Н. В. Александрова

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ, ПОНЯТИЙ, ОБОЗНАЧЕНИЙ

Словарь-справочник

Издание третье,
исправленное

URSS
МОСКВА

ББК 22.1я2 72.3

Александрова Надежда Вячеславовна

История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. Изд. 3-е, испр. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 248 с.

В настоящей книге, одной из немногих в отечественной и мировой научной литературе, приводятся сведения о математических понятиях, терминах и обозначениях. Читатель узнает, кто и когда ввел понятие, определение и термин; как оно называлось при своем первом появлении; когда возник современный термин и кем он был предложен; что он означает в точном переводе на русский язык; кому принадлежит обозначение (если оно имеется). Сведения даются в алфавитном порядке.

Справочник будет полезен широкому кругу читателей — математиков и историков науки. Много интересного в нем найдут научные работники, преподаватели, аспиранты, студенты, школьники старших классов и просто любители математики.

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доц. Р. С. Гутер;
кафедра высшей математики
Московского инженерно-строительного института (МИСИ)

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 15,5. Зак. № 1637.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-00839-4

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (499) 135–42–16
Тел./факс: 7 (499) 135–42–46

6067 ID 75808

9 785382 008394

Содержание

Предисловие

Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая делать его немного занимательным.

Б. Паскаль

Первое издание этой книги (1978) вышло под названием «Математические термины». Новое название должно подчеркнуть роль элементов истории математики в преподавании предмета. Вернее даже не «роль», а «роли», ибо в обучении важно и заинтересовать, и помочь запомнить (показав логику), и пробудить желание узнать...

Идея книги возникла, когда обнаружилось, что исторические сведения рассеяны в огромном числе статей и книг, в предисловиях, примечаниях и сносках. Насколько удалось найти специальные публикации, это — несколько страниц в «Математике в школе» за 1941 г. (автор — Н. И. Шевченко), брошюра В. В. Никишова «Словник походження математичніх термінів» (1935) и книга Ch. Mügler "Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs" (Paris, 1958). Теперь к ним можно добавить пособие «Математическая терминология» Е. А. Орловой (изд-во МГУ, 1989). Елена Алексеевна установила по словарям, когда именно и из какого языка тот или иной термин вошел в русский язык.

История открытия — одно из средств (а может быть, и единственное средство) сделать аудиторию, хотя бы в какой-то степени, свидетелем открытия, что так интересно и так важно для понимания логики развития математики и логики самой математики. Можно сослаться на мнение А. Пуанкаре: «В ее строго логической форме математическая дисциплина принимает столь искусственный характер, что ставит в тупик любого. Забывая исторические истоки, мы видим, как вопросы могут быть разрешены, но перестаем понимать, как и почему они были поставлены».

Исторический подход решает еще одну задачу — объяснить и сделать понятным определение, доказательство, решение. Ф. Клейн писал, что нет более доходчивого объяснения, чем обращение к истории предмета. Он щедро делился опытом в «Лекциях об истории развития математики в XIX веке».

Книга такого жанра, естественно, не может быть полной и законченной. Увы, никто необъятного объять не может...

Н. Александрова

А

АБАК

Греческое $\alpha\beta\alpha\xi$ (доска, стол) было названием древнейшего счетного приспособления, разграфленной доски. Отсюда и вид номограмм получил свое наименование.

АБСОЛЮТ

Общее проективное мероопределение, или метрика **Кэли**, развито им в его знаменитом A sixth Memoire on Quantics («Шестой мемуар о формах», 1859), основная идея которого — прием мероопределения **Гаусса** и **Римана**. **Кэли** назвал *абсолютом* произвольное коническое сечение, на основе которого может быть построена метрика. Его работы этого направления позволяют считать **Кэли** создателем современной алгебраической геометрии. Этот «ученый исключительного значения» (Ф. Клейн) начинает заниматься адвокатурой в Лондоне в 1843 г. и остается верным этой деятельности в течение двадцати лет. «Навсегда останется непонятным, как он сумел совместить эту требующую глубокого внимания профессию с ни с чем не сравнимой продуктивностью... именно за тот период и появились все основные работы **Кэли**». [44, с. 185–187]; [50, с. 223].

АБСОЛЮТНЫЙ

Термин происходит от латинского *absolvere* (освобождать, развязывать); *absolutus* (безусловный). Функция $y = |x|$ встречается впервые у **Лейбница** в форме $mol\ a, moles\ a$ (сокращение слова *modul*). Знак $|z|$, $|f(z)|$ и название *absolute Betrag* для абсолютного значения придумал **Вейерштрасс** в 1841 г., а с 1856 г. он употреблял эти термины и обозначения в лекциях, которые читал в Берлинском университете; в печати эти работы (вместе с обозначениями) появились в его "Werke" (Bd. I, 1894). Распространялось обозначение медленно; так, спустя четверть века **Риман** еще не употребляет знак модуля и говорит описательно: «независимо от знака...» В 1880 г. **Липшиц** использует обозначение $[w]$. В курсе **Дини** (1892) обозначение $|\ |$ употребляется с объяснением, как непривычное. Еще более разительный пример: **К. Нейман** в работе 1914 г. использует обозначение $abs.\,(s_n - f), abs.\,K$.

Обозначение $|z|$ перенесено **А. Лоренцом** в 1903 г. на векторы (с напоминанием, что комплексные числа — векторы плоскости). [221, с. 84]; [185, I, с. 123].

АВТОМОРФИЗМ

Термин составлен из греческих слов αυτος (сам) и μορφη (форма). Буквальное значение слова *автоморфный* — «не изменяющий свою форму». Термин принадлежит **Кэли** (1858). [198, I_1, с. 328].

АДДИТИВНЫЙ

Слово произведено от латинского *additio* (сложение, прибавление); *additivus* (прибавленный). [113].

АКСИОМА

Термин встречается впервые у **Аристотеля** и перешел в математику от философов древней Греции. Греческое αξιομα означает «достоинство, уважение, авторитет». Слово заимствовано из латинского языка, в русский язык термин ввел **Иван Сатаров** в переводе «Начал» **Евклида** (1739). Первоначально термин имел смысл «самоочевидная истина», такое значение сохранилось до XX в. («Толковый словарь» James and James, 1959).

В самых различных ветвях математики появлялись идеи, которые впоследствии, с созданием аксиоматики, соединились воедино. Так, в попытках развить неевклидову геометрию появились представления о непротиворечивости системы аксиом (**Саккери**, **Н. И. Лобачевский**), о независимости одного постулата от остальных (**Лобачевский**, **Бельтрами**). **Фон Штаудт** обосновал независимость проективной геометрии от евклидовой. С другой стороны, полезными оказались и те работы, авторы которых не замечали тонкостей аксиоматического метода (например, математики английской школы при создании систем гиперкомплексных чисел, теории групп не ставили вопроса о непротиворечивости аксиом).

Период, который ознаменовался появлением современной точки зрения, это — короткий промежуток времени 1882–1889 гг. — интервал между публикациями **Паша** и **Пеано**. Первая дата — год выхода "Vorlesungen über neuere Geometrie" **Паша** (он начал эти исследования в 1873 г.); **Ден** написал о «Лекциях о новой геометрии»: «Эта книга не имеет предшественников и имеет много последователей» (по-немецки это звучит чеканно: Dies Buch hat keine Vorganger, viele Nachvolger).

Мориц Паш, во-первых, предложил вводить неопределяемые понятия и основные предположения (он употреблял названия Kernbegriff, Kernsatz), во-вторых, показал, как именно ввести в геометрию понятие *порядок*.

Основополагающая монография **Паша** завершила этап истории математики и открыла новый. Эта книга вызвала работы по аксиоматике математиков итальянской и немецкой школ. В результате «Одной из заметных черт математики XX в. является колоссально возросшая в ней роль аксиоматического метода; он стал инструментом конкретного математического исследования» (Г. Вейль).

Ближайшая веха — книга **Пеано** "I principi di Geometria logicamente espositi" (1888), затем последовали "Fondamenti di Geometria a piu dimensioni" **Веронезе** (1890) и многочисленные работы школы **Пеано**, посвященные логико-формальной стороне теории.

Понятие *независимости* системы аксиом родилось в попытках доказать пятый постулат; исследования независимости первичных понятий и аксиом проведены впервые в итальянской школе **Пеано**.

Проблемы *непротиворечивости* системы аксиом изучал **Марио Пиери**, ученик **Пеано**, он изобрел метод построения моделей (1891). Другой ученик — **Падоа** — придумал прием, который теперь называют *методом* **Падоа**, для того чтобы выяснить, может ли аксиома быть выведена из других (были отзывы, что доклад **Падоа** на конгрессе 1900 г. один из самых интересных). Немецкий термин **Гильберта** «Verträglichkeit» означает «уживчивость, сговорчивость».

Проблему *полноты* системы аксиом заметил уже **Паш**, ее исследовали **Пиери**, **Гильберт**, **В. Ф. Каган** (1902), каждый из которых предложил полную систему аксиом.

Гильберт узнал о ценности аксиоматического метода в конце 1891 г. из лекции **Германа Винера** "Uber Grundlagen und Aufbau der Geometrie" (опубл. в 1892 г.). Лекции по основаниям геометрии **Гильберт** начал читать в 1894 г., а опубликовал "Grundlagen der Geometrie" в 1899 г. Уже здесь он разделил аксиомы на 5 групп. В библиографии приведены 40 работ (на немецком языке), среди авторов **Паш**, **Лобачевский**, **Риман**, **Ли**,... Из работ итальянских математиков упомянута только книга **Веронезе**; это обстоятельство еще раз дает повод вспомнить о скрупулезной честности **Пеано** в вопросах приоритета. Ремарка **Гильберта** — можно вместо «точки, прямые, плоскости» говорить «столы, стулья, пивные кружки» — была сделана в компании друзей, а опубликована только в 1935 г. Но уже в 1889 г. Пеано писал о том, что знак *1* можно читать и как «точка», а «вещи другой и третьей категорий» можно обозначить символами *2* и *3*.

Абсолютную геометрию выделил уже **Я. Бойяи** (1833).

Аксиомы линейного векторного пространства впервые приведены **Пеано** (1888), так называемая «аксиоматика **Вейля**» позаимствована у **Пеано** практически без изменений.

Американский математик **Мур** сформулировал аксиомы теории множеств (1905) и был одним из пионеров исследований по аксиоматике.

Для создания аксиоматики теории нормированных пространств фундаментальным трудом является докторская диссертация **Стефана Банаха** (1920).

Наконец, аксиомы теории гильбертова пространства принадлежат **Джону фон Нейману** (1929–1932).

Гильберт с удовлетворением подводил итог этим исследованиям (1930): «Сегодня мы располагаем неким универсальным — а именно аксиоматическим — методом рассмотрения естественно-научных проблем, и он обычно помогает нам уточнить проблематику, а зачастую способствует и подготовке решения поставленной задачи». [97, с. 11]; [157, с. 84]; [175, **26**, с. 73]; [205, **79**, с. 133–135].

АКСИОМА АРХИМЕДА

Аксиома названа «архимедовой» чисто случайно. Это знал и **Штольц**, который ввел такое наименование (в статьях 1882, 1883 гг.). Сам **Архимед** подчеркивал, что эта аксиома играет существенную роль в работах **Евдокса** и что следствия из нее не менее достоверны, чем определения площадей и объемов, сделанные без ее помощи: явный намек на полемику, которая не дошла до нас («можно подумать, что это наш современник говорит об аксиоме **Цермело**», — замечает **Бурбаки**).

Паш принял аксиому **Архимеда** за «фундаментальное предложение». **Штольц** доказал ее независимость от других аксиом (1882). Математики нового времени искали иные формулировки аксиомы (кроме известной греческим ученым). [80, II, с. 335]; [19, с. 148]; [198, III_1, с. 34]; [175, **35**, с. 340].

АКСИОМА КАНТОРА

Аксиома об однозначном соответствии между действительными числами и точками прямой использовалась в математике с незапамятных времен. Впервые точно сформулировал эту аксиому **Георг Кантор** (1872). [198, I, с. 53].

АКСИОМА ПАША

Эту аксиому ввел немецкий математик **Мориц Паш** (1882). В геометрии **Евклида** понятие порядка устанавливалось через измерение.

Самое раннее замечание о том, что понятие «между» нуждается в строгой формулировке, принадлежит **Гауссу** (в письме от 1832 г. к **Ф. Бойяи**). **Паш** впервые показал, что геометрию порядка можно построить без понятия измерения. Именно его понимание строгости стало общепринятым после работ **Пеано** (1889), **Веронезе** (1891), **Гильберта** (1898). [198, III_1, с. 11, 23]; [81, с. 225].

АКСИОМА ПЛЕЙФЕРА

Пятый постулат **Евклида** многие математики заменяли предложениями, которые казались более наглядными, более очевидными. В учебниках геометрии (и в английских изданиях «Начал» **Евклида**) с 1796 г. и до начала XX в. в качестве пятого постулата приводилась аксиома английского математика Джона **Плейфера**, профессора математики и физики в Эдинбурге: «Через точку вне прямой можно провести в плоскости не более одной прямой, не пересекающейся с данной».

АКСИОМА ЦЕРМЕЛО (АКСИОМА ВЫБОРА)

До того как аксиома сформулирована **Цермело** в явном виде (1904), все математики использовали этот принцип, не отдавая себе отчет в том, что применяется прием, не принятый в классической математике и логике. Необходимость такого рода аксиомы отметил итальянский математик **Беппо Леви** (1902). **Эрнест Цермело** сформулировал аксиому (по совету **Шмидта**) и включил ее в систему аксиом теории множеств; он называл ее Axiom der Aussonderung (аксиома отсеивания, отбора, выделения).

Аксиома была встречена бурной полемикой. **Рассел** высказывался о ней так: «Сначала она кажется очевидной; но чем больше вдумываешься, тем более странными кажутся выводы из этой аксиомы; под конец же перестаешь понимать, что же она обозначает».

Мур безоговорочно принял эту аксиому. Из французских математиков аксиому принимал только **Ж. Адамар**. Такие математики, как **Борель**, **Бэр**, **Лебег**, отказывали ей в праве на существование. Сторонники же аксиомы считают ее выражением чистого здравого смысла, например, **Штейнгауз** пишет: «Это утверждение само по себе следует считать аксиомой существования... а ее очевидность ничуть не меньше очевидности столь милой сердцу противников **Цермело** аксиомы индукции. Аксиома **Цермело** ни разу еще не приводила к противоречию и (как показал **Серпинский**) даже те, кто не приемлет аксиому **Цермело**, нередко, сами того не ведая, пользуются ею». [156, с. 55, 66]; [35, с. 75]; [109].

АЛГЕБРА

В древнегреческой, вавилонской математике метод решения становился ясным из нескольких однотипных примеров. Первое сочинение по алгебре «Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабала» написано арабским ученым **ал-Хорезми** (ок. 825). Слово «ал-джабр» означало перенос вычитаемых из одной части равенства в другую, «ал-мукабала» — уничтожение равных слагаемых в обеих частях. По мнению некоторых историков операции возникли из практики взвешивания, когда в буквальном смысле «восполняли» недостающий вес или снимали одинаковые грузы (в пользу такого предположения свидетельствует и название одного из приемов решения уравнений — «весы»). Книга **ал-Хорезми** имеет особое значение в истории математики как руководство, по которому долгое время обучалась вся Европа. Именно под влиянием арабской математики алгебра оформилась как учение о решении уравнений. Слово стало названием науки довольно поздно — в начале XIII в. в форме «алгебра и мукабала», потом просто «алгебра». В XVI в. возникло другое название — «косс», и только в XVIII столетии утвердилось окончательно *алгебра*, хотя **Ньютон** назвал свою книгу «Общая арифметика» (1707).

Первая печатная книга по алгебре появилась в 1494 г., т. е. это одна из первых печатных книг; автор ее — **Лука Пачоли**, монах-францисканец и друг **Леонардо да Винчи**. Книга содержит все сведения по арифметике, алгебре и тригонометрии конца XV в.

В русский язык слово перешло из польского в Петровскую эпоху и до конца XVIII в. произносилось с ударением на втором слоге. В 1738 г. встречается и вариант «алджебра». Первая русская книга по алгебре написана инженером **Н. Е. Муравьевым** (1752). Однако первое место принадлежит «Универсальной арифметике» **Эйлера** — русское издание 1768 г., немецкое — 1770 г., французский перевод — 1774 г. с приложением **Лагранжа**. Книга переиздавалась более 30 раз в течение двух веков. [54]; [6]; [116]; [65]; [157].

АЛГОРИТМ

В сочинении «Об индийском числе» **ал-Хорезми** изложил позиционную систему. Латинский перевод этого труда, сделанный в середине XII в. **Бонкомпаньи**, начинался словами: "Dixit Algorithmi" (сказал **ал-Хорезми**). Отсюда и произошел термин *алгоритм* (*алгорифм*). В русском языке слово впервые отмечено в «Энциклопедическом лексиконе» (1835).

В средневековой Европе слово означало всю систему десятичной позиционной арифметики. После работ **Лейбница** по дифференциальному исчислению (с 1684 г.) этим словом стали называть всякий порядок действий или правила для получения того или иного результата. Современное понятие *алгоритма* установилось в середине 30-х гг. нашего века в работах **Гёделя** (1930–1931), **Чёрча** (1936–1941), **Тьюринга** (1936), **Поста** (1936), **А. А. Маркова** (1947–1952) и др. [55, с. 83]; [129, с. 143–145].

АЛЕФ

Георг Кантор обозначил мощность счетного множества первой буквой древнееврейского алфавита $\aleph$ (1872).

АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА

Основной его статье "Sur une classe d'équations fonctionneles" предшествовали три кратких (каждый в три страницы) мемуара. Наконец, в статье 1903 г. **Фредгольм** изложил свою теорию решения общего уравнения

$$\varphi(x) + \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy = \psi(x).$$

Его доказательства основаны на аналогиях с системой линейных алгебраических уравнений. Отсюда совершенно естественно следовало и утверждение, называемое сейчас *альтернативой* **Фредгольма**. [215, с. 29–30].

А-МНОЖЕСТВА

Этот класс множеств назван *аналитическими* (отсюда сокращение А-) **Суслиным**, открывшим их в 1916 г. Работа студента **Суслина** родилась из размышлений над статьей **Лебега** об аналитически представимых функциях. Построением этих множеств **Суслин** разрешил одну из трудных проблем математики — все ли множества, измеримые по **Лебегу**, измеримы и по **Борелю**? — иными словами, среди множеств, измеримых по **Лебегу**, есть ли какие-нибудь, кроме борелевских? Такими оказались А-множества **Суслина**. Обобщение их — *проективные множества* — нашел **Н. Н. Лузин** (1930). Связь теории проективных множеств с логикой установили польские математики **Куратовский** и **Тарский** (1931). [19, с. 167]; [140, с. 33]; [89, с. 354].

АМПЛИТУДА

Термин происходит от латинского *amplitudo* (обширность, широта, величина). Слово заимствовано в XVIII в. из французского языка как астрономический термин. [113]; [116].

АНАЛИЗ

Греческое αναλυσις означает «решение, разрешение». Первоначально *анализ* представлял собой переход от данной единицы к низшей. Например, приведение дробей к общему знаменателю представляет по отношению к каждой дроби анализ. Историки древней Греции приписывали создание метода анализа **Платону**. В «Началах» **Евклида** уже встречаются слова *анализ* и *синтез*, но, возможно, они заимствованы у **Евдокса**. В новую математику термин настойчиво вводил **Виет** (ок. 1591).

В русском языке слово произносилось сначала как «анализис» (1709), затем — «анали́з» (женск. род, 1726), с 1802 г. — «ана́лиз» (мужск. род). [216]; [145, с. 64]; [116].

АНАЛИЗ ВЕКТОРНЫЙ

Название дисциплины ввел американский физик **Джозайя Уиллард Гиббс**. По его свидетельству он пришел к векторному исчислению под влиянием «Трактата по электричеству и магнетизму» **Максвелла**. Векторное исчисление существовало в XIX в. либо как часть теории кватернионов **Гамильтоиа**, либо как «Учение о протяженных величинах» **Грассмана**.

Уильям Роуэн Гамильтон пытался обобщить комплексные числа $x+iy$; за 8 лет напряженных трудов, 1835–1843 гг., он создал теорию кватернионов, т. е. теорию не *пар* действительных чисел (x, y), а *четверок* $u+ix+jy+kz$. С этих пор **Гамильтон** занимался только развитием и пропагандой своей теории. Во второй половине XIX в. теория кватернионов стала непременным элементом математического образования в Ирландии и в Англии.

Герман Грассман был преподавателем гимназии в Штеттине. В математике он был самоучкой. При жизни его работы не получили признания, поэтому он отошел от математики и полностью отдался филологии, в частности изучению санскрита, здесь он быстро преуспел. Первое издание его книги "Ausdehnungslehre..." («Учение о протяженности...», 1844) относится только к аффинной геометрии, она не содержит никаких формул и «почти неудобочитаема», так как все выводится из общих философских понятий. Второе издание (1862) — практически совершенно новая книга. Она содержит теорию «протяженных величин» n-мерного пространства, книга построена по образцу «Начал» **Евклида**. Утверждали, что в первые пять лет после выхода книги только один математик прочел ее от начала до конца — **Бретшнайдер**.

Публикации **Гиббса** по векторному исчислению относятся к 1881 и 1884 гг., это литографированные лекции (тиражом 130 экземпляров). В 1901 г. **Э. Б. Уилсон** издал обработанные лекции **Гиббса** "Elements of Vector Analysis arranged for Use of Students of Physics". «Обработка» заключалась и в том, что **Уилсон** позаимствовал кое-что у **Хевисайда**. Предисловие книги было написано **Гиббсом**.

Работы **Оливера Хевисайда** относятся приблизительно к этому же времени. В 18 лет на начал работать телеграфистом-оператором, уже в 1874 г. он оставил эту службу и стал заниматься исследованиями в собственной лаборатории. Он учился только в общеобразовательной школе, поэтому почти непонятно, как он мог оценить «Трактат» **Максвелла** при первом знакомстве — «Это было нечто великое, и еще более великое, и наивеличайшее!» Гениальному самоучке пришлось и одолевать уравнения в частных производных, и изобретать методы решения задач — так он развил (помимо всего прочего) *свою* векторную систему, операционное исчисление. Версия векторного исчисления, которую **Хевисайд** создал в 1882–1885 гг., отличалась от существующей в теории кватернионов только

1) постулатом $i^2 = j^2 = k^2 = +1$;
2) введением по определению двух видов произведений векторов — *скалярного* и *векторного* (кстати, названия принадлежат **Хевисайду**);
3) собственными обозначениями (например, жирной печатью для векторов).

«Элементы векторного анализа» **Гиббса** не были опубликованы, а распространялись частным образом, поэтому статьи **Хевисайда** — первые публикации векторного анализа, они знакомили математический мир с исчислением и демонстрировали полезность векторных методов в физике. Векторный анализ стал самостоятельной ветвью математики благодаря трудам **Максвелла**, **Гиббса** и **Хевисайда**.

В России элементы векторного исчисления в курсы механики, геометрии включались **Осипом Ивановичем Сомовым**, затем его сыном **Павлом Осиповичем**, которому принадлежит и первый курс «Векториального исчисления» (1907) на русском языке. Выдающиеся учебники были написаны **Владнмиром Сергеевичем Игнатовским** (1909) и **Яном Николаевичем Шпильрейном** (1924, 1936). [77, с. 212]; [1]; [64, **4**(39), 82].

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

Лейбниц написал **Я. Бернулли**, что до конца века (до 1700 г.) основное в математическом анализе было завершено: «Я рассматриваю отныне чистую математику только как упражнение, служащее для развития искусства мыслить. Ибо для практических целей в ней почти все открыто с помощью новых методов». Та же мысль в письме **Гюйгенсу**, которого **Лейбниц** призывал «...еще в этом веке довести до совершенства анализ чисел и линий... дабы избавить от этой заботы человеческий род, чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике». Поучительны ответы **Гюйгенса**:

(1690): «...Находя его <новое исчисление> неясным, я недостаточно в него вникал для полного понимания, а равно я думаю и сам иметь некоторый равносильный метод как для нахождения касательных к кривым линиям... так и для многих других исследований...»

Через два месяца: «Я старался со времени моего последнего письма понять Ваше дифференциальное исчисление и настолько успел, что стал разбираться, но лишь два дня назад...»

Через три года: «Узнайте, милостивый государь, что я сделал некоторые успехи в Вашем превосходном дифференциальном исчислении, полезностью которого я все более и более наслаждаюсь...» [*Бертран Ж.* Дифференциальное исчисление. СПб, 1912. С. XII].

Как мы знаем, многое еще осталось для трудов **Эйлера**, **Гаусса**, **Коши**, **Вейерштрасса** и многих, многих других математиков...

Первый трактат дифференциального исчисления создан **Иоганном Бернулли** в 1691 г. для одного ученика — маркиза **Лопиталя**, который и стал автором первого опубликованного учебного пособия — «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий» (Analyse des infiniment petites pour l'intelligence des lignes courbes, 1696). Первое изложение математического анализа на русском языке — сжатый «конспект» трудов **Эйлера**, выполненный **Семеном Кирилловичем Котельниковым** (1771).

АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ

Адамар считал вариационное исчисление старейшей частью функционального анализа, а в течение XIX в. и в других математических дисциплинах были созданы важные компоненты «общего анализа» (по терминологии **Фреше**): исследования по теории множеств **Кантора**, множества функций, рассматриваемые **Асколи** и **Арцела**, а вслед за ними **Вольтеррой** и **Пинкерле**; теория интегральных уравнений, развитая **Фредгольмом**, **Вольтеррой** и **Гильбертом** с учениками; аксиоматика и основания геометрии с аксиоматическим определением линейного пространства, примеры векторных пространств (в том числе бесконечномерных) и др. Насколько естественно в XIX в. (т. е. для **Пинкерле** и **Вольтерры**) было построение функционального анализа по образцу ТФКП, настолько же естественно в XX в. теоретико-множественное направление исследований **Фреше**. «Не отягченный грузом традиций молодой **Фреше** приступил к построению функционального анализа по образцу теории функций действительной переменной. Его диссертация „О некоторых вопросах функционального исчисления“ (1906) означает новый этап...» При этом сам **Фреше** считал, что это учение «исходит из принципов, которые вызваны векторным исчислением и теорией абстрактных групп». [215]; [175, **27**, с. 233–295]; [64, XVIII, с. 71–91].

АНАЛИЗАТОР ГАРМОНИЧЕСКИЙ

Термины «гармонический анализ, гармоническая функция» появились в английской математической литературе. Первый прибор, позволяющий вычислить коэффициенты **Фурье** функции по ее графику, сконструировали в 1898 г. известные физики **Майкельсон** и **Стреттон**. При этом они использовали опыт более ранней конструкции, изобретенной **Уильямом Томсоном** (лордом **Кельвином**) в 1876 г. Их прибор позволял вычислить до 160 коэффициентов ряда **Фурье**, он служил также синтезатором, т. е. мог суммировать функцию по заданным коэффициентам разложения **Фурье**. Попытка создания такого приспособления была предпринята за 20 лет до них: **Донкин** построил гармонограф, складывающий две гармоники (1874). [176, с. 163].

АНАЛИЗАТОР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ

Из попыток конструирования машин для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, вероятно, следует отметить работы **У. Томсона** (1876) и **А. Н. Крылова**, который в 1904 г. изобрел машину для интегрирования систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка (она была построена в 1912 г.). Независимо от этих ранних и малоизвестных работ, в Массачусетском технологическом институте под руководством **В. Буша** был построен первый мощный дифференциальный анализатор (1925–1931). [152, I, с. 18, 113].

АНТИ

Эта приставка, входящая во многие математические термины, заимствована из греческого языка: αντι означает «напротив, наоборот». Термин *антилогарифм* употребил **Непер** (1619), а затем его повторил **Кеплер** (1627). Слово *антиномия* составлено из αντι и νομως (закон) и означает «противоречие двух положений, двух утверждений».

АНТЬЕ

Название функции происходит от французского слова *Entier* (целый) и оправдано самим определением функции. Обозначение $\mathrm{E}(x)$ по первой букве термина ввел **Лежандр** в “Théorie des nombres” («Теория чисел», 1798). Обозначение $y = [x]$ принадлежит **Гауссу** (1808). Принятые ныне, они не быстро получили признание — вплоть до начала XX в. предлагались и другие обозначения (например, $\mathcal{E}(u)$, **Шварц** в 1873 г.).

Для обозначения дробной части числа используется предложенная **Цефуссом** функция $\beta(x)$; символ выбран по первой букве немецкого слова Bruchteil — дробная часть (1850). [185, II, с. 33].

АПОФЕМА

Термин составлен из греческих слов ἀπό (от, из) и θεμα (приложенное, поставленное). Поэтому греческое ἀποτιθημι означает «нечто, отложенное в сторону». В русском языке до начала XX в. было принято слово «апотема». [216]; [116].

АППРОКСИМАЦИЯ

Термин происходит от латинского *approximo* (приближаюсь); буквальное значение термина — «приближение». Основы теории аппроксимации заложили **Вейерштрасс** и **П. Л. Чебышёв** в середине XIX в.

АРГУМЕНТ

Термин произошел от латинского *argumentum* — «знак, признак, довод, содержание». **Лейбниц** разделил величины на постоянные и переменные и ввел термины «variable valeur, variable quantité». Именно эти выражения, а также indépendente variable, quantité означали аргумент функции в первых ее определениях: **И. Бернулли** (1718), **Эйлер** (1748), **Лагранж** (1797).

Из других принятых терминов в ходу были «корень функции» (**да Кунья**, 1787), «время» (**Ньютон**), «функция абсциссы и времени» (**Эйлер**).

Введение reelle variable и complexe variable на первых порах ничего не изменило.

По-видимому, самое раннее появление в печати выражения *аргумент функции* относится к 1862 г. (статья **Карла Неймана**). В русской литературе термин встречается впервые в лекциях **Сохоцкого** («независимые переменные или аргументы», 1898), но становится общепринятым только через два-три десятилетия. А в русском разговорном языке слово встречается впервые в письмах Курбского к Ивану Грозному. Оно заимствовано из польского языка и произносилось первоначально как аргу́мент. В конце XVIII в. под влиянием французского превратилось в аргуме́нт.

Термин *аргумент* для угла комплексной переменной ввел **Коши** (1847). В 1854 г. его повторил **Беллавитис**; у **Весселя** вместо аргумента «отклонение в направлении дневного движения Солнца». Однако и в XX в. многие авторы называли угол «аномалией». [64, XIX, с. 159]; [166, с. 37].

АРИФМЕТИКА

Название науки происходит от греческого ἀριθμος (число). Так как греки считали числом только целые числа, большие единицы, то их арифметика была наукой о целых числах, о свойствах чисел. Искусство счета и правила операций с числами относились к «логистике» — науке низшего порядка. **Ньютон** называл алгебру «общей арифметикой» (1707).

В русский язык слово вошло в XVI в. Математические рукописи того времени за редкими исключениями озаглавлены одинаково: «Книга, рекома по гречески арифметика, а по немецки алгоризма, а по русски цифирная счетная мудрость». Первый русский учебник — «Арифметика» **Л. Ф. Магницкого** (1703). К этому названию привели такие метаморфозы: арифмитикия, арифметикия, арифметика, арефметика.

Первая печатная книга по арифметике была издана анонимно в Италии в 1475 г.

Попытки аксиоматического построения арифметики предпринимались со времен **Лейбница**. Они, казалось, были близки к успеху в конце XIX – начале XX вв. (исследования **Пеано**, **Гильберта** и др.). Наконец, вопрос был разрешен в 1932 г.: **Гёдель** доказал невозможность построения арифметики натуральных чисел на базе какой-нибудь системы аксиом. [23, с. 151–162]; [65, III, с. 49]; [129, с. 83–86]; [116].

АРИФМОМЕТР

Название происходит от греческих ἀριθμος (число) и μετρέω (меряю) и означает буквально «измерение чисел». Слово *арифмометр* предложено парижским инженером **Томасом** (1818). Первые вычислительные машины сконструировали **В. Шиккард** (1623), восемнадцатилетний **Блез Паскаль** (1642) и **В. Г. Лейбниц** (1673–74).

Действительный прогресс в конструировании арифмометров наступил с изобретением **П. Л. Чебышёвым** арифмометра непрерывного действия (1876) и с созданием основного механизма всех конструкций арифмометра, называемого «колесом **Однера**» — по имени его изобретателя петербургского инженера, шведа по национальности, **Вильгодта Теофиля Однера** (1874). Звонок современного арифмометра (и пишущей машинки) был придуман гораздо раньше — в 1783 г. **Иоганн Мюллер** построил вычислительную машину со звонком: он раздавался, когда от машины требовали невозможного. [49, с. 23–49]; [64, XVIII, с. 295].

АРК

Сокращенное латинское *arcus* означает «лук, дуга, дугоподобная линия». В таком смысле слово входит в названия обратных тригонометрических функций. В русской математической литературе слово *аркус* встречается с 1718 г. [116]

АСИМПТОТА

Термин состоит из греческого отрицания α и прилагательного συμπτωτος — совпадающий, сливающийся (συμ — «с, вместе»; πιπτειν — «падать»). Буквальное значение слова — «несовпадающий, несливающийся». Термин отсутствовал у **Архимеда**, который чертил асимптоты гиперболы, однако слово уже появилось у **Аполлония** (ок. 225 г. до н. э.). Ему и приписывают этот термин. **Прокл** относил термин также к параллельным прямым. В русский язык термин введен **В. Я. Буняковским** (1839).

Трудно поверить, но в английских словарях (вплоть до XX в.) слово приведено только как имеющее медицинский смысл.

«Современный» прием отыскания асимптот алгебраической кривой изобретен **Коши** (“Leçons sur l’application du calcul infinitésimal à la géométrie”, v. I, 1826). Учение об асимптотах алгебраических кривых было развито **Эйлером** (1748) и особенно обстоятельно — **Плюккером** (1839). Криволинейные асимптоты линий третьего порядка впервые нашел **Ньютон**. Термин *асимптотические линии* ввел **Дюпен** (1813). [198, III_3, с. 18]; [216]; [173].

АССОЦИАТИВНОСТЬ

Основные законы сложения и умножения были введены как **законы** при попытках развить новые исчисления — «символическую алгебру» и теорию комплексных и гиперкомплексных чисел — то есть главную роль сыграли британские математики: **Дункан Грегори** (1838), **Джордж Пикок** (1830, 1842–45), **У. Р. Гамильтон** (1835, 1843), **Август де Морган** (1837, 1849), братья **Джон и Чарлз Грэйвс**. К XIX в. переместительный и сочетательный законы сложения включались в систему аксиом. Из них выводились распределительный и переместительный законы умножения.

Названия законов появились несколько позднее, чем были сформулированы сами законы: термин *ассоциативный* произведен от латинского *associare* (ассоциировать, сочетать); он введен **Гамильтоном** в 1843 г. [34, с. 399]; [65, III, с. 51]; [42, с. 11].

АСТРОИДА

Название составлено из греческих слов αστρον (звезда) и εἶδος (вид, наружность); оно означает «звездообразная». Термин ввел астроном **Литтров** (1838).

В течение XIX в. употреблялись различные названия этой кривой, отражающие ее многочисленные свойства: что она является эволютой эллипса, что это — огибающая отрезков, концы которых движутся по осям координат, и др. Отсюда названия: gleichseitige Evoluten (равносторонняя эволюта) — **Бретон де Шам** (1843), tetracuspide (кривая с четырьмя заострениями) — **Беллавитис** (1850), Kubozycloide (кубоциклоида) — **Монтуччи** (1865), Parazykel (парацикл) — **Маттисен** (1868).

АФФИННОСТЬ

Впервые этот термин появляется у **Эйлера** в "Introductio in analysin infinitorum" («Введение в анализ бесконечных», 1748). *Аффинными* **Эйлер** назвал кривые, которые могут быть получены друг из друга преобразованиями $x = X/m$, $y = Y/n$. Он пишет: «Поскольку эти кривые сохраняют все же некоторое родство (affinatas), мы будем называть эти кривые *аффинными*». Перевод «родство» не совсем точен: слово affinatas означает родство по жене — свойствó.

Однако, по-видимому, современное название восходит к **Мёбиусу**, у которого латинское *affinis* было составлено из предлога *ad* (к, у) и *finis* (конец). Термин должен был выражать тот факт, что при таком преобразовании бесконечно удаленным точкам соответствуют также бесконечно удаленные точки. [64, X, с. 398]; [80, II, с. 121]; [34, с. 277].

Б

БАЗИС

Термин происходит от греческого βασις (основа). Слово первоначально означало горизонтальную линию, которая рассматривалась как элемент плоской фигуры, или плоскую фигуру — как элемент пространственного тела. В таком смысле слово употребляется у **Евклида**, **Аристарха**, **Архимеда**. В книге **Райера** (1708) *базис* означает «основание фигуры».

В русском языке слово встречается с 1499 г. в виде «базес».

Систему векторов $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ *базисом* назвали **Дедекинд** (1885, 1887) и **Молин** (1893). В 1890 г. **Гильберт** доказал теорему о базисе, которая стала исходным пунктом для развития коммутативной алгебры. [198, I_1, с. 160, 292]; [116].

БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Слово *бесконечный* в математическом смысле стало употребляться по почину художника **Дюрера** (с 1525 г.). *Конечный* появилось впервые гораздо позднее: у **Райера**, профессора математики в Киле (1708).

Математики Греции пытались дать определения таким понятиям, как бесконечность, предел, и столкнулись с непреодолимыми трудностями. Все эти понятия были корректно определены только в XIX в. Современное определение бесконечного предложил **Дедекинд** в книге "Was sind und was sollen die Zahlen?" («Что такое числа и чем они должны быть?», 1888).

Знак ∞ для указания неограниченного возрастания был введен **Валлисом** (1655). Предполагают, что **Валлис** использовал римский символ ∞, означавший 1000. Знак стал общепринятым уже с XVIII в., хотя время от времени употреблялись и др. обозначения (например, $\sim$ или 0–0). [185, **I**, с. 44]; [185, II, с. 45]; [226, II, с. 80].

БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ ВЕЛИЧИНА

Метод исчерпывания древнегреческих математиков позволял им проводить вычисления (например, площади параболического сектора у **Архимеда** и т. п.) с точностью до произвольно малого остатка. Методы греков являлись путеводной нитью для **Стевина**, **Кеплера**, **Галилея**... или фундаментом, на котором возводились новые теории (как неделимые **Кавальери**, **Роберваля**...), инфинитезимальные методы **Ферма**, **Паскаля**. Следующий этап — труды **Ньютона** и **Лейбница**.

Ньютон оперировал с «моментами», которые вполне эквивалентны бесконечно малым приращениям **Ферма**. **Лейбниц** исходил из рассмотрения «характеристического треугольника» **Паскаля**, треугольника, образованного «бесконечно малыми отрезками» касательной, абсциссы и ординаты, в своей первой публикации «Новый метод максимумов и минимумов...» (Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, 1684). Он хотел построить «алгебру бесконечно малых», указав правила нахождения $d(x+y), d(xy), d(x/y), d(x^n)$. Позднее он добавил $d(lnx), d(a^x), d^n(y)$.

Ньютон не открыл суть своего метода в письмах для **Лейбница** (1676). Только после публикации **Лейбница** он дал некоторые наметки своего метода в «Математических началах натуральной философии» (1687). Доступное изложение (сообщение **Валлису**) впервые опубликовано в "Opera" **Валлиса** (1693). В своих публикациях (1704 г. и далее) **Ньютон** старался избегать бесконечно малых. Его «последние отношения исчезающих приращений», говоря нестрого, это «наши» производные. Новое исчисление не имело прочной базы, пока не было ясности и строгости относительно основного понятия — бесконечно малой. **Эйлер** и **Лагранж** создали «версии», которые обосновывали скорее правила действий, чем дифференциальное исчисление. Определение *бесконечно малой величины* (на основе понятия предела) дал **Больцано** (1817) и вслед за ним **Коши** (1821–1823).

Уже у **Ферма** встречались бесконечно малые различных порядков (в нечетком виде); с ними широко оперируют **Ньютон** и **Лейбниц**. **Карно** впервые стал рассуждать не об «исчезающе малой величине», а о «переменной, предел которой равен нулю». Его воззрения были изложены в «Размышлениях о метафизике инфинитезимального исчисления» (1797).

Понятия «O-большое» и «o-малое» и обозначения $\zeta_n = O(z_n)$, $\zeta_n = o(z_n)$ были введены **Бахманом** (1894) и **Ландау** (1909). Обозначения для сравнения бесконечно малых $a_\nu \sim b_\nu$, $a_\nu \prec b_\nu$ ввел **Дюбуа Раймон** (1870). [187, III, с. 653]; [198, I_1, с. 75].

БЕТА-ФУНКЦИЯ

Родственный интеграл

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx$$

рассматривали **Валлис** (1659), **Ньютон** (1676), **Стирлинг** (1730). Но первые важные результаты, связанные с интегралами

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q/n-1}\,dx, \qquad \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx,$$

принадлежат **Эйлеру** (1730). Первый из этих интегралов в 80-х гг. XVIII в. **Эйлер** обозначил через (p/q) или (p, q). Для этого же интеграла **Лежандр** ввел название *эйлеров интеграл первого рода* (1811), а **Бине** в 1839 г. — название *бета-функция* и обозначение $B(p, q)$. [198, II_1, с. 175]; [187, III, с. 653].

БИ

Латинская приставка, означающая удвоение, входит во многие математические термины: *билинейный* — «дважды линейный»; *биквадратный* — «дважды квадратный» — слово появилось в немецком языке в XVIII в.; *бинормаль* — «дважды нормаль» (термин ввел **Сен-Венан** в 1845 г.); *биполярный* составлено из латинского *bi* и греческого πολος (полюс); *биссектор* (*биссектриса*) — термин состоит из bi и seco (секу, режу), буквальный смысл его — «рассекающий на две части»; *бикватернион* — этот термин вместе с понятием введен английским математиком **Клиффордом** (1873); *бикомпактность* — этот термин введен математиками **Павлом Сергеевичем Александровым** и **Павлом Самуиловичем Урысоном** (из их инициалов возникла дарственная надпись «ПСУ от ПСА»).

БИНОМ

Слово восходит к **Евклиду**. В «Началах» под соответствующим термином подразумевалось выражение вида $a + \sqrt{b}$. Греческое νομως означает «часть, деление». С этим смыслом термин перешел из греческой математики в переводы на латынь. **Тарталья** употребил название *бином* для выражения $ax^m + bx^n$ (1560). Со времен **Стевина** (1585) слово приобретает современный смысл — алгебраической суммы двух членов. В русской литературе слово встречается с 1728 г. [226, II, с. 69].

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ БИНОМ, БИНОМИАЛЬНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Употребление одного или другого термина зависит исключительно от предпочтений автора, впрочем, бывает, что на одной странице встречаются оба названия. В письме (1676) **Ньютон** утверждал, что интеграл

$$\int z^{\theta}\left(e+fz^{\eta}\right)^{\lambda} dz$$

принимает конечную и притом алгебраическую форму, если

$$\frac{\theta+1}{\eta} \quad \text{или} \quad \frac{\theta+1}{\eta}+\lambda$$

суть целые положительные числа, и что, «насколько он может судить», это — единственные случаи такого рода.

Все случаи интегрируемости установлены в переписке **Гольдбаха** и **Эйлера**, который признал полноту результата, установленного **Гольдбахом** (1729–1730). Доказательство единственности этих случаев дал **Пафнутий Львович Чебышёв** в статье «Об интегрировании иррациональных дифференциалов» (1853).

БИНОМ НЬЮТОНА

Частные случаи этой знаменитой формулы были известны задолго до **Ньютона** на Древнем Востоке. В анонимной рукописи XV в. "Initius Algebra" («Начала алгебры» — в предисловии сообщается, что это — перевод с арабского на греческий язык, а затем — на латынь) даны правила возведения в степень бинома $(a+b)^n$ для $n = 1, 2, \ldots, 9$; для $n = 17$ формулу привел **Штифель** (1544). Общие правила для любых целых показателей есть в арифметических трактатах **ат-Туси** (1265) и **ал-Каши** (XV в.).

Как выяснилось впоследствии, биномиальный ряд впервые встречается у **Бриггса** ("Arithmetica Logarithmica", 1620). Известной биномиальная формула стала из трудов **Ньютона**. Ему принадлежит заслуга распространения формулы на случай дробных и отрицательных показателей. Первые сообщения о ней — в переписке 1676 г. (письмо **Ольденбургу** для **Лейбница**). Здесь **Ньютон** приводит формулу и подробные примеры ее применения (названия *бином* у него не было). Формула (в том виде, в каком она была дана **Ньютоном**) появилась впервые в печати в "De algebra tractatus" **Валлиса** (1693), а уже после этого в "Methodus Differentialis" **Ньютона** (1711).

Первым математиком, приблизившимся к биномиальному разложению, был **Джеймс Грегори** — он привел формулу в 1670 г. **Ньютон** пришел к биномиальной формуле от проблемы интерполяции: он знал разложение $\int\limits_0^x \left(1-x^2\right)^m dx$ для целых значений m, интерполяцией он нашел разложения для $m = 1/2$, $m = 1/3$. Статья **Ньютона** "De analysi per aequationes numero terminorum infinita" («Уравнения с бесконечным числом неизвестных») заведомо была написана к 1669 г. «Наипростейшее» разложение

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \ln(1+x) \tag{1}$$

получено почленным интегрированием геометрической прогрессии

$$1 - x + x^2 - \ldots = \frac{1}{1+x} \tag{2}$$

(между прочим, площадь под гиперболой $y = 1/(1+x)$ **Ньютон** вычислил до 52 знака). Итак, имея разложение (1), нужно выразить «неизвестную величину» x. Результат

$$x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots,$$

очевидно, представляет функцию $x = e^z - 1$.

Биномиальная формула была у **Ньютона** основой всего дифференциального и интегрального исчислений (и приложений); в самом деле, дальнейшие шаги таковы: зная разложение $(1 - x^2)^{-1/2}$, он нашел ряд

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{x^2}{2} + \ldots\right) dx = x + \frac{x^3}{6} + \ldots = z.$$

Выразив отсюда x, **Ньютон** получил ряд для функции $x = \sin z$, почленное дифференцирование доставляет ряд функции $y = \cos x$...

Лейбниц записал бином в 1695 г. в виде

$$\boxed{m}\,\overline{y+a} = y^m + \frac{m}{1} y^{m-1} a + \frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} y^{m-2} a^2 + \ldots .$$

В течение всего XVIII в., например, у **Эйлера**, из биномиального разложения следовала вся теория рядов. **Эйлер** называл биномиальные коэффициенты «характеристиками». Его выводы рядов для элементарных функций повторил **Коши** (1821). Только **Коши** установил интервал сходимости биномиального ряда, а **Абель** исследовал этот вопрос и для комплексных показателей (1826).

Ньютон похоронен в Вестминстерском аббатстве, где в 1731 г. было воздвигнуто торжественное надгробие. Довольно частое утверждение, что на нем высечена формула бинома — беспочвенный слух[1]. [185, II, с. 61–62]; [65, I, с. 300].

БРАХИСТОХРОНА

Слово составлено из греческих βραχιστος (очень короткий) и χρόνος (время). Термин введен **Иоганном Бернулли**, который поставил задачу о брахистохроне в 1696 г. В следующем году задачу решили **Лейбниц**, **Якоб Бернулли**, **Лопиталь** и английский аноним, в котором **И. Бернулли** узнал **Ньютона**: "Tanquam ex ungue leonem (Льва узнают по когтям)" — сказал он. [34, с. 215].

[1] Надпись гласит: «Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого. Родился 25 декабря 1642 г., скончался 20 марта 1727 г.».

В

ВАРИАЦИЯ

Термин происходит от латинского *variatio* (разнообразность, различие, перемена). Первую задачу вариационного исчисления поставил и решил **Ньютон** в «Математических началах натуральной философии» (1687); он рассмотрел задачу о форме поверхности тела вращения, встречающего при движении наименьшее сопротивление. В следующее десятилетие Иоганн **Бернулли** предложил задачу о брахистохроне.

Общий метод решения таких задач разработал **Эйлер** (1744). **Лагранж** усовершенствовал его, создав характерный для современного вариационного исчисления δ-алгоритм (1755–1760). Он же обозначил вариацию буквой δ. В 1766 г. **Эйлер** опубликовал статью “Elementa Calculi Variationum” с детальным изложением и объяснением метода **Лагранжа**. Так новое исчисление получило свое название; при этом слово *вариация* употреблялось применительно и к функции, и к функционалам без каких бы то ни было различий.

Лежандр ввел понятие второй вариации (1786), алгоритм второй вариации был развит **Якоби**.

«Современный» вид теория приняла в лекциях **Вейерштрасса**, которые он читал с 1865 по 1884 гг. В первые годы он обходился без рассмотрения уравнения **Эйлера**. С 1875 г. **Вейерштрасс** вводит поле экстремалей, строгое различение сильных и слабых вариаций и $\mathcal{E}$-функцию (в 1879–1882 гг. в одной форме, а позднее — в другой, сохранившейся до нашего времени).

В первое десятилетие XX в. **Адамар** читал лекции по вариационному исчислению в Коллеж де Франс. Отсюда — его интерес к исчислению функционалов, который способствовал появлению основополагающих работ по функциональному анализу самого **Адамара** и его ученика Мориса **Фреше**. [64, II, с. 355]; [205, **37**, с. 200].

ВЕКТОР

В начале XIX в. операции с направленными отрезками плоскости возникают в трудах нескольких ученых почти одновременно. Отправная точка всех этих работ была одна и та же — геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций над ними. Уже на этой начальной стадии теории функций комплексной переменной математики пытались обобщить теорию и ввести «гиперкомплексные» числа $x + iy + jz$, которым бы соответствовали направленные отрезки пространства. Именно в этих поисках **Чарлз Грэйвс** ввел наряду с i следующую мнимую единицу j $(i^2 = j^2 = -1)$. Это направление привело к созданию теории кватернионов ирландским ученым **Уильямом Роуэном Гамильтоном** (1843). Ему пришлось ввести еще одну мнимую, k, и рассматривать числа вида

$$xi + yj + zk + u.$$

Вначале **Гамильтон** употреблял названия «действительная и мнимая части» (для u и $xi + yj + zk$), затем ввел термины *скалярная часть* (*scale*) и *векторная часть* (*vector*), поясняя, что скаляры можно отложить на линейке, шкале (scale), как обычные действительные величины, а вектор можно рассматривать как «перенос, работу» при переходе от начального положения, A, в конечную точку, B; слово vector (несущий) и образовано от латинского vehere (нести). Впрочем, независимо от него выражения rayon mobile, rayon vecteur употребляли **Монж** и **Ашетт** (1806), **Коши** (1821) и **Гаусс** (1809), у которых эти слова имели смысл «подвижный радиус».

Старейшее из наших обозначений — черточка над буквой; **Арган** (1806) обозначал таким образом направленный отрезок плоскости. Это обозначение естественно распространили на векторы в трехмерном пространстве. **Гамильтон** обозначал векторные величины греческими буквами, а скалярные — латинскими (за немногими исключениями i, j, k — векторы, π — число). **Мёбиус** обозначал вектор через AB, чтобы указать его начало и конец. **Г. Грассман** называл векторы «отрезками» (Strecken), ввел базис $e_1, e_2, \ldots$ и представление вектора в виде $\sum\limits_n e_n x_n$.

Максвелл обозначал векторные величины готическими буквами, и **Хевисайд** сетовал на этот «несчастливый выбор», так как «одного этого достаточно, чтобы вызвать предубеждение читателя против векторного анализа». Обозначение векторов жирной печатью предложил **Хевисайд** (1896). Это обозначение было повторено в книге **Гиббса**, **Уилсона** (1901), которая оказала большое влияние на распространение векторного анализа. **Клейн** (развивая идеи Эрлангенской программы) стремился подчеркнуть, что векторное исчисление вписывается в общую схему и следует из теории инвариантов.

Обозначение $|a|$ для длины вектора впервые ввел **Лоренц** (1903), распространив обозначение **Вейерштрасса** $|z|$ (для комплексных чисел, т. е. векторов плоскости) на отрезки в пространстве. Обозначение получило широкое распространение после его появления в руководстве по векторному анализу **Р. Ганса** (1905). Название «модуль» родилось гораздо раньше: его образовал **Арган** от латинского modulus (мера) (1814), затем его употребляли **Коши** и математики итальянской школы (**Бурали-Форти**, **Марколонго**). **Гамильтон**, а за ним **Хевисайд** называли длину вектора словом «тензор», которое образовано от латинского tendo. Название обусловлено тем, что в теории кватернионов при перемножении двух векторов (как и двух комплексных чисел, например) первый множитель «растягивает» и «вращает» второй. **Грассман** использовал слово Inhaltbegriff (величина) для длины отрезка. [1, с. 23, 44, 91].

ВЕРЗИЕРА (ИЛИ ЛОКОН АНЬЕЗИ)

До **Аньези** кривая встречалась у **Ферма** (1657) и **Гранди** (1703), оба они вычислили площадь под кривой. Затем кривую нашла и исследовала болонский математик **Мария Гаэтана Аньези** (1748). В обзоре 1758 г. ее учебник математики считают лучшим для своего времени. **Аньези** назвала кривую «верзиера», по-видимому, от латинского vertete (обращать). А может быть, она знала о термине **Гранди**, который называл кривую versoria (предполагают, что это слово произведено из sinus versus). Так как название **Аньези** слишком похоже на итальянское versiera (ведьма, призрак), то **Буус** употребил в 1873 г. другой термин — «локон или кривая **Аньези**». [138, с. 89]; [170, с. 410].

ВЕРОЯТНОСТЬ

Теория вероятностей зародилась в XVI в. как попытка создать теорию азартных игр. Возможно, самое раннее вычисление числа способов, которыми могут выпасть три кости, появилось в латинской поэме "De Vitula" (приписываемой раньше **Овидию**). Вычисления вероятностей производили уже **Тарталья** (1556) и **Кардано** (1526), позднее **Галилей** (1642), **Паскаль**, **Ферма** (1654), хотя математическое понятие вероятности выкристаллизовалось не сразу. Понятие вероятности упоминает **Фома Аквинский** (со ссылкой на **Аристотеля**). «Искусство предположений» ("Ars conjectandi") **Якоба Бернулли**, написанное в 1679–1685 гг. и изданное его племянником в 1713 г., содержало одно из первых определений вероятности: вероятность есть «степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому». Так называемое классическое определение вероятности было сформулировано в курсе лекций, которые **Лаплас** читал в 1795 г. (и опубликовал как «Опыт философии теории вероятностей»), а затем — в книге "Théorie analytique des probabilitées" («Аналитическая теория вероятностей», 1812). Курьер доставил книгу Наполеону в Витебск, император обещал **Лапласу** посвятить изучению этой работы первые три месяца после взятия Москвы. Именно **Лаплас** употребил выражение *благоприятный случай*. Геометрическая трактовка вероятностей предложена английским логиком и математиком **Венном** ("The Logic of Chance", 1866). Статистическое определение связывают с именем **Фишера**, хотя, вообще говоря, его можно усмотреть в работах **Гиббса** по статистической механике. И, наконец, определение вероятности при аксиоматическом построении теории дано **Андреем Николаевичем Колмогоровым**.

Термин *вероятность* употреблялся наряду и наравне с другими: так, мемуар **Муавра** озаглавлен "The Doctrine of Chance or a Method of Calculating the Probabilities in Play" (1711).

Первое «полезное» применение «доктрины шансов» — работа **де Витта** с расчетами вероятной продолжительности жизни. **Лаплас** (1812) привел в систему многочисленные факты, накопленные за два столетия, усовершенствовал методы доказательств и изложил собственные результаты. Он писал: «Теория вероятностей есть, собственно говоря, только переложение здравого смысла на формулы, она доставляет средства для точной оценки того, что постигает ум верный, хотя часто бессознательно».

Из работ **Лапласа**, **Лежандра** и особенно **Гаусса** выросла теория ошибок. С именами **Чебышёва**, **Ляпунова**, **Маркова** связаны исследования Петербургской школы теории вероятностей: доказательство предельных теорем (1887, 1901) введение метода характеристических функций, создание нового раздела теории — марковских цепей. Приведем замечательные слова **Колмогорова**: «**Чебышёв** впервые ясно оценил и использовал силу понятий „случайной величины“ и „математического ожидания“... Понятия эти... являются производными от основных понятий „события“ и „вероятности“. Но случайные величины и их математические ожидания подчинены гораздо более удобному и гибкому алгоритму» [Уч. зап МГУ. 1947. Вып. 91. С. 56].

Если в первом периоде развития теории вероятностей задачи были тесно связаны с комбинаторикой, то уже **Лагранж** (1770) и **Лаплас** (1812) строили исследования на уравнениях с конечными разностями, а **Даниил Бернулли** первый применил в теории вероятностей методы математического анализа (1766). В Петербургской школе теория превратилась в строгую математическую науку. Новым этапом явился пересмотр логических основ теории. Задача об аксиоматическом построении теории вероятностей была названа **Гильбертом** в качестве шестой проблемы среди важнейших задач, стоящих перед математикой XX в. Первой работой в этом направлении явился «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей» **Сергея Натановича Бернштейна** (1917). Общепринятая в настоящее время система аксиом была предложена **А. Н. Колмогоровым** (1929–1936). Другие системы предлагались **Мизесом** (1928), **Гливенко** (1936) и др. [129, с. 117–119]; [225]; [99, с. 51–57, 297, 308]; [152, XXI, 3, с. 213]; [46].

ВЕРТИКАЛЬ

Термин происходит от латинского *vertex* (вершина), *verticalis* (вертикальный, отвесный). В русском языке слово встречается впервые в 1835 г. До 1907 г. отмечались две формы — вертикаль и вертикал. Прилагательное *вертикальный* = отвесный впервые в русской математике встречается в «Арифметике» **Магницкого** (1703). Еще в середине XIX в. (например, в сочинениях **Лобачевского**) вертикальные углы называются «вершинными» [116].

ВРОНСКИАН

Это название определителю дал **Мюир** (1882) в честь польского ученого **Йозефа (Гоёне) Вронского** (латинский суффикс -an означает родительный падеж). **Вронский** в 16 лет поступил на военную службу, в артиллерию. После очередного раздела Польши он перешел в русскую армию и, послужив в штабе Суворова, решил в 20 лет выйти в отставку и посвятить себя науке. Император Павел назначил ему пенсию! и **Вронский** поехал учиться в Германию, после чего оставшуюся часть жизни прожил в Париже. Его труды по философии математики имели мистический характер и невысоко оценивались в Европе. В “Refutation de la Théorie de Fonctions analytiques de Lagrange” («Опровержение теории аналитических функций Лагранжа», 1812) **Вронский** рассматривал определитель, составленный из конечных разностей различных порядков (не обязательно последовательных) функций $f, g, \ldots$, имеющий некоторое отношение к определителю, названному его именем. Интересно, что **Бобынин**, составивший биографический очерк «Гоёне Вронский» (1894) не отметил этого обстоятельства.

К исследованию линейной зависимости системы функций вронскиан привлекли **Гессе** (1857) и **Кристоффель** (1858). В течение нескольких десятилетий во все учебные курсы включалась теорема: обращение в нуль определителя **Вронского** является необходимым и достаточным условием линейной зависимости системы функций. Но в 1889 г. в заметке "Sur les wronskiens" **Пеано** представил контрпример. Именно, функции $y = x^2$ *и* $y = x|x|$ *непрерывны и дифференцируемы всюду, определитель* **Вронского**, составленный для них, равен тождественно нулю, а функции линейно независимы. С тех пор условия формулируются лишь для решений дифференциального уравнения, а не для произвольных функций. [64, III, с. 70]; [198, II_1, с. 261]; [1, с. 122].

ВЫРОЖДЕНИЕ

Впервые слово в математическом смысле употребил **Бонавентура Кавальери** (1635): «линия выродилась в точку».

ВЫЧЕТ (АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ)

Исчисление сравнений по модулю p было создано во второй половине XVIII в. работами **Эйлера**, **Лагранжа**, **Лежандра** и **Гаусса**. Термины *вычет* и *невычет* (residua, nonresidua), *степенной вычет*, *квадратичный вычет* ввел **Эйлер** в работах 1758–1759 гг. Латинское residua означает «оставшаяся (часть), остаток». Кубичные вычеты встречаются впервые в работах **Гаусса** 1808 и 1817 гг., теория биквадратичных вычетов фактически создана им в 1813 г. Понятие показателя данного основания введено **Гауссом**.

ВЫЧЕТ (ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

Понятие ввел **Коши** в 1814 г.; термин впервые употребляется в его мемуаре 1826 г. Название résidu объясняется, по-видимому, тем, что **Коши** пришел к этому понятию, отыскивая разность между интегралами по таким двум путям, с общими началом и концом, между которыми заключаются полюсы функции. На протяжении 1826–29 гг. **Коши** создал теорию вычетов. Интегрирование в комплексной плоскости производилось до того, как была осознана специфика этой операции, даже до уяснения понятия криволинейного интеграла. Так, у **Эйлера** без каких-либо объяснений встречается

$$\int f(z)\,dz = \int u\,dx - v\,dy + i \int v\,dx + u\,dy.$$

Теория интегрирования и исчисление вычетов приобрели стройность и завершенность в трудах **Лорана**, **Сохоцкого**, **Линделёфа**.

А. П. Юшкевич показал, что обозначение Res [ ] для вычета было у **М. В. Остроградского.** Так как он слушал лекции **Коши** в Париже, то это естественное сокращение слова Résidu может принадлежать как одному, так и другому математику.

Впоследствии стало известно, что уже к 1811 г. **Гаусс** владел основами теории функций комплексной переменной, включая «золотую теорему», по его выражению, — так он называл теорему о вычетах. [101, с. 63]; [64, XVI, с. 22]; [8, с. 197].

ВЫЧИТАЕМОЕ

Термины *уменьшаемое*, *вычитаемое* (число) появляются впервые в «Математическом лексиконе» **Вольфа** в 1716 г. Термин *разность* (differentia) как результат вычитания употребил впервые **Видман** (1489).

Г

ГАММА-ФУНКЦИЯ (ИЛИ ВТОРОЙ ЭЙЛЕРОВ ИНТЕГРАЛ)

Эйлер распространил определение понятия $m!$ на случай нецелого m в 1729 г. Появление интеграла

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

в публикации относится к 1730 г. Оба принятые названия и обозначение $\Gamma(n+1)$ были предложены **Лежандром** в "Exercices du calcul intégral" (1814). В Германии очень долго не принимали обозначение: сначала использовалось обозначение **Гаусса** $\prod(u-1)$, затем **Вейерштрасс** предложил другое: $Fc(u)$ от Factorielle von u.

В исследованиях **Эйлера** существенную роль играла формула, называемая теоремой умножения. Самому **Эйлеру** эта теорема в общем виде не была известна, а его доказательства частных случаев остались неизвестными **Гауссу** и др. Общее доказательство искали **Гаусс** (1812), **Лежандр** (независимо от **Гаусса**, 1817), **Коши** (1827, 1841); Гаусс знал о доказательстве **Лежандра**, но считал его неудовлетворительным. Интересно, что в его втором доказательстве использовались вычеты. Наконец, еще раз теорему доказал **Н. И. Лобачевский**, который ссылался только на **Лежандра**. [198, II_1, с. 157]; [101, с. 38].

ГЕКСАЭДР

Название состоит из греческих ἑξ (шесть) и ἕδρα (основание).

Буквальное значение греческого ἑξάεδρον — «шестигранник». Термин приписывают **Паппу** (IV в. н. э.). [113]; [216].

ГЕКТО

Эта приставка, входящая в названия многих метрических единиц, взята из греческого языка: ἑκατόν (сто) и означает, что единица в сто раз **больше** основной (латинские приставки означают, что единица меньше основной). [113].

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ

Термин происходит от греческого γεωδαισια (деление, межевание земель). «Кратчайшая линия» была названа *геодезической* **Лапласом** именно в случае земной поверхности (1797). Впоследствии это название было перенесено на поверхности второго порядка, а затем, по примеру **Лиувилля** (с 1844 г.) — на произвольные поверхности.

Задачей отыскания кратчайшей линии, соединяющей две точки поверхности, впервые занялся **И. Бернулли** (1697). Он утверждал, что в 1728 г. получил дифференциальные уравнения геодезических на земной поверхности; работа была опубликована только в 1742 г., так что первая публикация принадлежит **Эйлеру** (1732). Более простые задачи (на поверхностях вращения) разрешили **Я. Бернулли** (1698), **Клеро** (1733). **Эйлер** рассматривал также задачу в случае неявного задания уравнения поверхности (1779, опубликовано в 1799–1806 гг.).

В самом начале XX в. **Гильберт** и **Пуанкаре** привлекли внимание к исследованию геодезических «в целом», сформулировав классические теоремы (1900, 1905). В решении этих задач основную роль сыграли труды советских математиков **П. С. Урысона, Л. Г. Шнирельмана, Л. А. Люстерника** (1929–1930), **А. И. Фета** (1952) и других. [198, III_3, с. 139]; [208, с. 148]; [34, с. 313].

ГЕОИД

После того как измерения показали, что Земля не является ни сферой, ни эллипсоидом (а это было известно **Гауссу**, например), пришлось ввести специальное название для такой поверхности. Оно и было предложено **Листингом** (1845).

Слово *геоид* означает буквально «подобный, такой же, как земля».

Теория мироздания **Ньютона**, основанная на законе тяготения, была признана далеко не сразу. Долго с ней конкурировала механика **Декарта**. По **Ньютону** земля должна быть сплюснута у полюсов, по **Декарту** она должна быть вытянутой. В 1735 г. Парижская академия наук снарядила две экспедиции для измерения градуса земного меридиана — под руководством **Мопертюи** в Лапландию и во главе с **Буге** в Перу. Подтвердилась предсказанная **Ньютоном** и **Гюйгенсом** «сплюснутость» и были устранены все возражения против теории **Ньютона**, выдвинутые астрономами **Кассини** (отцом и сыном). **Мопертюи**, по выражению **Вольтера**, сплюснул Землю и обоих **Кассини**. [75, с. 80].

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК

Греки считали, что определение этого понятия дал **Платон**. В IV в. до н. э. древнегреческие математики (**Менехм**) построили знаменитую теорию геометрических мест и разработали ее приложения.

ГЕОМЕТРИЯ

Буквально это слово означает «землемерие»: γέα (земля) и μετρειν (измерять). Если верить свидетельству **Геродота**, началом египетской геометрии послужило измерение земельных участков, к которому египтяне должны были прибегать постоянно вследствие разливов Нила. Однако уже **Аристотель** ввел для «измерения земли» другое название — «геодезия».

Фалес Милетский, посетивший Египет в VI в. до н. э., «импортировал» знания в Грецию. Несмотря на эти «достоверные» сведения, невозможно понять, каким образом возникла необходимость доказывать теорему: диаметр делит круг на две равные части, если до этого (например, в вавилонской математике) вполне удовлетворялись доказательствами типа: чертеж плюс слово «смотри». Характер геометрии изменил **Пифагор**, сделав доказательствами абстрактные рассуждения. Первые «Начала» были составлены **Гиппократом Хиосским** в V в. до н. э. Уже в III в. до н. э. **Евдем Родосский** написал «Историю геометрии».

Первым русским учебником геометрии и тригонометрии было руководство **А. Э. Буркгарда фон Пюркенштейна** (1686), переведенное **Брюсом**, сподвижником Петра I. Книга, изданная дважды (1708, 1709), была первой книгой, набранной новым русским шрифтом — древнеславянским, петровского усовершенствования. [186, с. 48]; [69, с. 359].

ГЕОМЕТРИЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ

Арифметизация геометрии была начата **Ферма** (ок. 1629) и **Декартом** (1637), которого и считают творцом аналитической геометрии. Сочинение **Ферма** “Ad locos planos et solidos isagoge” («Введение в изучение плоских и телесных мест», 1629) впервые было опубликовано лишь в “Varia Opera” (1679), хотя оно было довольно хорошо известно парижским математикам к 1637 г. Неизвестно, был ли **Декарт** знаком с этим сочинением **Ферма** (достоверно, что в 1628 г. он рассказывал другу о своих успехах). В обеих теориях были введены ось абсцисс с начальной точкой и система параллельных ординат (вообще говоря, наклонных). Очень вероятно, что **Ферма** и **Декарт** имели общий источник для размышлений и создания родственных учений — небольшое сочинение **Виета** “Ad logisticam speciosae aotae priores” («Первые замечания к видовой логистике», 1631). Долгое время было принято название *декартова геометрия*, которое ввел **И. Бернулли** (1692). Название *аналитическая геометрия* родилось гораздо позднее.

Слово *аналитическая* исходит от **Виета**, который называл свой метод буквенной алгебры «аналитическим искусством»; его книга “In artem analyticen Isagoge” («Введение в аналитическое искусство») вышла в 1591 г. Следует сказать, что **Виет** отвергал слово «алгебра» как варварское и заменял его термином «анализ». Его нововведение не могло одолеть укоренившейся привычки, но привело в конце концов к введению в математический язык слов *аналитический*, *анализ*. Возникло обыкновение называть «аналитическими» всякие приложения алгебры к геометрии, В таком смысле этот термин употреблялся во второй половине XVII в. Однако сейчас под аналитической геометрией подразумевают лишь тот метод рассмотрения задач, в основу которого положено понятие координат. В таком именно значении этот термин появляется как название труда **Ньютона**

"Geometria Analytica" (написана в 1671 г., напечатана в 1736), а также как название учебника **Лакруа** "Eléments de géométrie analytique" (1801).

Работу **Декарта** понимали с большим трудом. Поэтому чрезвычайно важны комментарии **ван-Схоутена** (1649), **Дебона** (1639) и др. Их работы переиздавал еще **Я. Бернулли** (1695). В 1730 г. **Рабюэль** комментировал уже и **ван-Схоутена**.

Большое влияние на развитие аналитической геометрии оказали «Трактат о конических сечениях» **Валлиса** (1655) и «Перечисление кривых третьего порядка» **Ньютона** — эта рукопись 1676 г. издана как приложение к "Optics" (1704). Выражая соотношения, характерные для конических сечений, **Валлис** заменил буквами отрезки и выразил уравнениями «симптомы» кривых, известные еще **Аполлонию**. Таким образом, он сделал конус ненужным при изучении конических сечений. **Ньютон** на чертеже изображал обе оси, квадранты при этом были равноправными и была полная ясность относительно знаков координат.

Возможно, первым самостоятельным курсом аналитической геометрии было сочинение **де Витта** (1659). Второй том «Введения в анализ» **Эйлера** отведен исключительно геометрии. В «Геометрии» **Лакруа** предмет впервые излагается в знакомых нам форме и порядке. Первым курсом для технических учебных заведений России была «Вышняя геометрия в пространстве» **А. И. Майорова** (СПб., 1817). [33]; [181, с. 133, 216]; [34, с. 228–300].

ГЕОМЕТРИЯ ВНУТРЕННЯЯ (ИЛИ НАТУРАЛЬНАЯ)

Мысль задать кривую соотношением между длиной ее дуги и кривизной восходит к **Эйлеру** (1740, 1764). Но общие правила и многочисленные примеры установления свойств кривой из ее натурального уравнения развиты и приведены в систему **Эрнесто Чезаро**. К моменту его работ уже были в употреблении термины *натуральное уравнение*, *натуральные координаты* (для длины дуги, радиуса кривизны и кручения) — эти выражения ввел английский геометр **Юэл**. **Чезаро** присвоил науке название "Geometria intrinsica" (1896). [198, $\mathrm{III}_{1.1}$, с. 380]; [198, III_3, с. 34].

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ

Благодаря решению задач, возникающих в картографии, землемерии, упругости и пр., для дифференциальной геометрии были «заготовлены» некоторые понятия, результаты и методы. Датой рождения дифференциальной геометрии считают 1697 г., когда **Иоганн Бернулли** поставил задачу о нахождении кратчайшего пути на данной поверхности. Однако **Бляшке** показал, что **Бернулли**, **Эйлер** и **Лагранж** заложили только основы этой науки, а истинные ее творцы — **Монж** и **Гаусс**, создавшие «Приложения анализа к геометрии» (1795) и «Общие исследования о кривых поверхностях» (1828). Работа **Монжа**, доступно изложенная, задуманная и выполненная как учебник, содержит отдельные задачи, посвященные специальным классам поверхностей. Творение **Гаусса** — единая, глубокая теория, результаты и методы которой сразу же стали классическими. [143].

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ

Основы линейчатой геометрии созданы немецким математиком **Плюккером**, поэтому она называется также и его именем. Основным элементом в ней является не точка, а прямая линия, откуда и происходит название. Работа **Плюккера** «Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как элемента пространства» вышла в год смерти **Плюккера** (1868) и была доведена до конца уже **Ф. Клейном** (тогда ассистентом **Плюккера**). Здесь линейчатая геометрия развита преимущественно в алгебраическом направлении. В дифференциально-геометрическом аспекте она была развита ранее **Гамильтоном** (1828–1830) и **Куммером** (1860) в связи с задачами геометрической оптики.

ГЕОМЕТРИЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ

Изобретена **Монжем** в 60-х гг. XVIII в. Он же дал этой науке и название *géométrie descriptive*, т. е. «описательная геометрия»; термин «дескриптивный» в настоящее время широко употребляется в математике в другом смысле.

В работах **Дезарга** (1640), **Дешаля** (1674), **Фрезье** (1773) уже были изложены основы архитектурного черчения, резки камней, практические приемы изображений и ортогонального проектирования для выполнения технических работ. Однако **Монж** полностью «перекроил» эту отрасль математики. Его идеи развивались и оформлялись в течение десятилетий (вряд ли он работал над ними в революционные 1789–1794 гг.).

Курс начертательной геометрии был прочитан **Монжем** слушателям первого набора Нормальной школы (1794). В следующем году “Leçons de géométrie descriptive données à l’école normal, publiées d’abord en feuilles d’après les sténographes” были опубликованы в Журнале Нормальной школы, а в виде книги — в 1798 г. Более раннему опубликованию препятствовали военные власти Франции, желавшие удержать в секрете открытие.

Приведем интересное введение к первому русскому руководству по начертательной геометрии: «Пламенея желанием пересадить на родную землю древо Начертательной Геометрии, принесшее богатые плоды в благорастворенном климате Франции, я надеюсь увидеть его в полном цвете, ибо страсть к просвещению распространяется более и более под благотворным Эгидом Императора Александра» (1824). [198, $Ш_{1,1}$, с. 522]; [41].

ГЕОМЕТРИЯ НЕАРХИМЕДОВА

Примеры неархимедовых геометрий рассматривали, начиная с 1891 г. **Веронезе**, **Гильберт**, датский математик **Иельмслев**. Систематически развил и изложил неархимедову геометрию **Ден**, ученик **Гильберта** (1900). При этом сам **Гильберт** вначале употреблял термин *неархимедова геометрия* в несколько более узком смысле — под этим он подразумевал такую геометрию, где аксиома непрерывности (так он называл **аксиому Архимеда**) не только не используется, но и неверна. [129, с. 29]; [105, **3**, с. 111]; [105, **5**, с. 91].

ГЕОМЕТРИЯ НЕЕВКЛИДОВА

Древнегреческая геометрия строилась на апориях, постулатах, аксиомах. Под аксиомами понимались «самоочевидные истины» (относящиеся, вообще говоря, не обязательно к геометрии). Постулаты содержали только геометрические утверждения и, как правило, это были допущения, которые оказывались доказанными в ходе рассуждений. Постепенно все постулаты были доказаны, кроме пятого, который имел следующую формулировку: «Если при пересечении двух прямых третьей образуются углы такие, что с одной стороны их сумма меньше двух прямых углов, то при бесконечном продолжении две прямые пересекутся с той стороны, с какой сумма углов меньше двух прямых».

С самого начала этот постулат не казался «очевидным утверждением». **Посидоний** (I в. до н. э.) и **Птолемей** были первыми в длинном списке математиков, пытавшихся доказать постулат о параллельных. Первое побуждение, естественно, — пробовать доказать это утверждение с помощью принятых аксиом. Оказалось, что при этом опирались на какие-нибудь допущения, эквивалентные доказываемому. **Саккери**, например, предполагал существование двух неравных подобных треугольников. **Ф. Бойяи** постулировал, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную окружность, **Лежандр** — что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым... В английских изданиях «Начал» пятый постулат заменен **аксиомой Плейфера**.

В тысячелетних поисках доказательства пятого постулата были и попытки доказать его от противного. Среди них такие последовательно и глубоко развитые построения, как "Euclides ab omni naevo vindicatus..." («Евклид, очищенный от всех родимых пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии», 1733) **Саккери** и "Theorie der Parallellinien" **Ламберта** («Теория параллельных линий», составленная в 1766 г., опубликована посмертно в 1786 г.).

Следующим шагом был вывод, что справедлива не только «обычная» геометрия, но и «астральная, звездная» геометрия. К этому заключению пришли **Гаусс**, **Швейкарт** и **Тауринус**. **Гаусс** размышлял над этим с 1792 г. (т. е. с 15–16 лет!). В 1799 г. он еще пытался доказать априорную сущность геометрии **Евклида**, однако в последующие годы он пришел к тем же результатам, которые были достигнуты **Лобачевским** и **Бойяи**. **Гаусс** ничего не публиковал по этим вопросам, чтобы «не растревожить ос». Так получилось, что **Гаусс** внес в теорию только этот термин *неевклидова геометрия* (термин был принят далеко не сразу — еще в конце XIX в. **Клейн** писал о «так называемой неевклидовой геометрии».

Приблизительно в одно и то же время **Гауссу**, «королю математиков», направили свои работы **Швейкарт** и **Вахтер**. **Вахтер** — рано умерший ученик **Гаусса** — опубликовал перед смертью "Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi" («Доказательство одиннадцатой геометрической аксиомы Евклида», 1817).

Фердинанд Карл Швейкарт — юрист, вначале профессор Харьковского университета (1812–1816), затем Марбургского и Кенигсбергского —

послал **Гауссу** в 1818 г. плод своих десятилетних трудов “Astral Geometrie”, которая никогда не была опубликована. «Заметка г-на проф. **Швейкарта** доставила мне необыкновенно много удовольствия... почти все это списано из моей души» — таков ответ **Гаусса**. Интерес к проблеме разделил племянник **Швейкарта** (тоже юрист) **Франц Адольф Тауринус**; в 1825 г. он опубликовал “Theorie der Parallellinien”, а в 1826 г. — “Geometria prima elementa”. Эти работы не нашли ни признания, ни отклика. **Гаусс** прекратил переписку с **Тауринусом**, после того как тот попросил **Гаусса** опубликовать свои воззрения по этому вопросу. Реакция **Гаусса** повергла **Тауринуса** в отчаяние, он сжег остатки издания.

В период с 1823 по 1826 гг. профессор Казанского университета **Николай Иванович Лобачевский** создал свою неевклидову геометрию, которую он противопоставлял «употребительной геометрии» и называл или «воображаемая геометрия» или, позднее, Пангеометрия (т. е. «Всеобщая геометрия»; греческое $\pi\alpha\nu$ означает «весь»). 11 февраля 1826 г. он прочел доклад «Рассуждение о принципах геометрии» перед Ученым советом, а в 1829 г. опубликовал его. Началась тридцатилетняя борьба одинокого гения с косностью, непониманием, травлей. В 1841 г. с его книгой «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (изданной на немецком языке) познакомился **Гаусс** и высоко оценил ее... в дружеской переписке. Публично же он предложил избрать **Лобачевского** в члены-корреспонденты Геттингенского Ученого Королевского Общества «как одного из превосходнейших математиков русского государства» и ректора Казанского университета.

«Геометрические исследования» побудили **Гаусса** изучать русский язык. О впечатлении, которое произвела на него эта книга, он писал **Шумахеру**: «...так как уже 54 года я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их... я не нашел для себя в сочинении **Лобачевского** ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шел я сам... Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

Переписка **Гаусса** с **Шумахером** опубликована в 1860–1865 гг. Публикация этого письма произвела сильное впечатление на европейских математиков и вызвала целый ряд исследований, к 1870 г. геометрия **Лобачевского** стала известной математикам. При жизни **Лобачевского** с высокой оценкой его трудов публично выступил только один математик — профессор Казанского университета **Петр Иванович Котельников**. Когда в 1893 г. готовились к празднованию столетия **Лобачевского** и хотели установить памятник в Казани, из Министерства народного просвещения пришел запрос: кто такой **Лобачевский** и какие научные заслуги числятся за ним.

Л. Н. Толстой вспоминал о **Лобачевском**: «...Я его отлично помню. Он всегда был таким серьезным и настоящим ученым. Что он там в геометрии делает, я тогда ничего не понимал, но мне приходилось с ним разговаривать как с ректором. Ко мне он очень добродушно относился, хотя студентом я был и очень плохим».

В это же время подобные идеи рождались в Венгрии: первое письмо молодого артиллерийского офицера **Яноша Бойяи** о новой геометрии к своему отцу датировано ноябрем 1823 г. Сочинение **Я. Бойяи** опубликовано в 1833 г. в виде приложения к труду его отца **Ф. Бойяи**; «Приложение, содержащее абсолютно истинное учение о пространстве» состояло из 26 страниц; оно известно под названием “Appendix”. **Фаркаш Бойяи** послал работу другу студенческих лет, **Гауссу**. Постороннему человеку **Гаусс** писал: «Я считаю, что этот юный геометр **Бойяи** — гений первой величины». А вот отцу этого гения отправил такой отзыв: «Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что я ее не должен хвалить, то на мгновение ты поразишься, но я не могу поступить иначе: хвалить ее — значило бы хвалить самого себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, — почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30–35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен». Этот отзыв был настоящим потрясением для впечатлительного молодого ученого, сломавшим его дух.

Признание и торжество геометрии **Лобачевского** пришло в 1868 г. В Англии его идеи первым понял и стал горячо пропагандировать молодой талантливый математик **Клиффорд**. Это ему принадлежат слова: «Чем **Коперник** был для **Птолемея**, тем был **Лобачевский** для **Евклида**... Каждый из них произвел революцию в научных идеях, воззрениях, и обе эти революции имеют одно и то же значение. Причина их громадного значения заключается в том, что они суть революции в нашем понимании космоса». [34, с. 389–392]; [77, с. 9]; [95, с. 57–61,71–73, 239,245]; [186, с. 305].

ГЕОМЕТРИЯ ПРОЕКТИВНАЯ

Несколько «неметрических» теорем были открыты **Паппом Александрийским** (IV в. н. э.). Проективные свойства поневоле использовались и изучались, поскольку для астрономии необходимо было свободное обращение с коническими сечениями. Закономерно, что «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» **Дезарга** (“Brouillon project d’une atteinte aux événements des rencontrees du cone avec plan”, 1639) содержал основные идеи проективной геометрии, а также ряд теорем. Сочинение имело тираж 50 экземпляров, оно было утеряно и с 1845 г. известно лишь по копии, сделанной **Лагиром** (1679); только в наше время (1950) обнаружен печатный экземпляр. Идеи **Дезарга** были усвоены и развиты только одним математиком — **Б. Паскалем**; его работа осталась неоконченной (к 1654 г.), рукопись сочинения видел **Лейбниц**, с тех пор она пропала.

Отдельные факты и теоремы заметили **Лагир** (1685), **Сен-Венан** (1625, опубликовано в 1647 г.), **ван-Схоутен** (1656), **Лепуавр** (1704), **Эйлер** (1748) и др.

Однако создание проективной геометрии как самостоятельной науки связано с именами **Понселе** и **Штаудта**. **Понселе** провел два года в плену в Саратове (1813, 1814). «Вынужденное безделье и полная оторванность от всех вспомогательных средств научной работы» родили новую геометрию. Свои результаты он опубликовал в «Трактате о проективных свойствах фигур» ("Traité des propriétés projectives des figures", 1822). Современное изложение проективной геометрии ведет свое начало от "Geometrie der Lage" **Штаудта** («Геометрия положения», 1847). К этому времени **Мёбиус** ввел однородные координаты (1827). **Штаудт** первый изложил эту дисциплину совершенно независимо от метрических соображений и тем самым отделил «геометрию положения» от метрической. Систему аксиом проективной геометрии дал в 1899 г. **Пиери**, ученик **Пеано**. Конечно, в последующие годы его система претерпела некоторые усовершенствования. Название *проективная геометрия* впервые, по-видимому, употребил **Кремона** (1873). [82, с. 330]; [34, с. 339–342]; [50, с. 186, 205–208].

ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА

Эллиптическая геометрия была впервые отмечена **Риманом** в его Пробной лекции «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854), прочитанной в присутствии **Гаусса**, и впоследствии получила наименование *геометрии* **Римана**. Широкое распространение ее в XX в. связано с созданием теории относительности **Эйнштейна** и тензорного исчисления.

ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНАЯ

Гиппократу Хиосскому (450 г. до н. э.) приписывают составление первого систематического курса геометрии, основанного на определениях и аксиомах. Этот курс и его последующие обработки назывались Στοιχετον (стихии, элементы). В III в. до н. э. появилась знаменитая книга **Евклида** с тем же названием (в русском переводе — «Начала»), вытеснившая геометрию **Гиппократа**. От латинского названия «Начал» **Евклида** — "Elementa" — и происходит термин «Элементарная геометрия».

Название «Начала» не вполне правильно передает греческое Στοιχετον. Оно должно было означать, что здание геометрии так же строится с помощью определений и аксиом, как физическое тело — из элементов (или из «стихий» — огня, воздуха, воды и земли). По тем же соображениям это слово означало и буквы алфавита у греков.

Соответственно вкусам переводчиков переводы на русский язык назывались по-разному. Первый в России курс геометрии — «Эвклидовы элементы... в осмь книг чрез профессора мафематики **Андрея Фархварсона** сокращенные, с латинского на российский язык хирургиусом **Иваном Сатаровым** преложенные» (СПб., 1739). В 1784 и 1789 гг. некоторые книги «Начал» были переведены с греческого и имели название «Евклидовых стихий осмь книг...». Первые не переводные книги — «Опыт о усовершении элементов геометрии» (1798) и «Основания геометрии» (1804) **С. Гурьева**.

Первой страной, в которой отошли от Евклидовых традиций изложения геометрии, была Франция — уже в 1569 г. **Рамус** написал свой курс, затем последовали учебники **Арно**, **Пардиса**,... **Вариньона**, **Клеро**... Автором первой «Геометрии» на немецком языке был **Дюрер**. [163, IV, с. 13].

ГИПЕР

Греческое ὑπερ (над, сверх), входящее во многие математические термины, означает «превышение». Такой смысл приставка придает словам *гиперкомплексный*, *гиперповерхность* и т. д.

ГИПЕРБОЛА

Русский термин заимствован, всего вероятнее, непосредственно из латинского языка — *hyperbole* — возможно через польский. Встречается в русской литературе впервые в 1729 г. См. **сечения конические**.

ГИПЕРБОЛОИД

Уравнение этой поверхности вывел и исследовал **Валлис** (1670).

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида обнаружил несколько ранее, в 1669 г., **Рен** — ученик **Ньютона** и выдающийся архитектор (после пожара 1666 г. застройка Лондона была начата по его проектам, его планы осуществились лишь частично, но собор святого Павла он построил). Изучение гиперболоидов было развито только в школе **Монжа**. Двуполостные гиперболоиды вращения — как тела, а не как поверхности — были известны древним грекам под названием «коноидов».

ГИПОТЕЗА

В древнегреческой математике (у **Евклида**, **Архимеда**, **Платона**) употреблялось понятие υποθετις, под которым подразумевался геометрический факт, принимаемый в начале доказательства, но обоснование которого становится видимым в дальнейшем в ходе доказательства.

ГИПОТЕНУЗА

Термин образован от греческого ὑπότεινω (натягивать); буквальное значение слова υποτεινοσα — «натянутая». Это название происходит, конечно, от способа построения прямоугольных египетских треугольников с помощью натягивания веревки. **Евклид** вместо термина *гипотенуза* так и писал «сторона, которая стягивает прямой угол». Еще в XIX в. принято было чертить прямоугольный треугольник таким образом, что основанием была гипотенуза — отсюда в названии слог «под» — ὑπό.

ГИПОЦИКЛОИДА

Термин составлен из греческих ὑπό (под) и κικλοειδος (произведенная кругом). Первая гипоциклоида встречается у **Дюрера** в “Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Rychtscheyd” («Наставления об измерении циркулем и линейкой», 1525). Первое систематическое исследование гипоциклоид и эпициклоид принадлежит **Лагиру** (Traité des épicycloides et des leur usage dans les mécaniques, 1666). Здесь были рассмотрены вопросы построения касательных, спрямления, квадратуры; гипоциклоиды привлекали внимание **Эйлера**, **Клеро**, **Серре** и др.. [34, с. 307]; [213, с. 479].

ГОДОГРАФ

Название происходит от греческих слов οδος (дорога) и γραφω (рисую); таким образом смысл слова — «дорога, описанная чем-либо».

Понятие и термин введены **Гамильтоном** в теории кватернионов (1846). При этом под годографом **Гамильтон** подразумевал то, что сейчас называлось бы «годограф вектора скорости». Понятие и термин перешли в лекции **Гиббса** и в его курс векторного анализа (1901). В начале XX в., когда векторное исчисление начали осваивать «в отрыве от теории кватернионов» появилось выражение «годограф скорости» — бессмысленное с точки зрения кватернионистов; это, вероятно, и есть первый шаг к изменению смысла термина **Гамильтона**. [1].

ГОЛОМОРФНОСТЬ

Название состоит из греческих ὅλος (целый) и μορφή (образ).

Термин ввели в середине XIX в. **Брио** и **Буке** — ученики **Лиувилля**.

ГОМОЛОГИЯ

Термин составлен из греческих ὁμός (одинаковый) и λογος (смысл, закон) и означает «соответствие, согласие». Термин принадлежит **Понселе**, который рассмотрел первый пример преобразования проективного пространства (1822).

В мемуаре "Analysis situs" (1895) **Пуанкаре** ввел (нестрого) понятие гомологии и установил важные ее характеристики. Тем самым было положено начало теории гомологий.

Преобразование *гомографии* впервые рассмотрел **Понселе**. Несколько позже **Монж** и **Шаль** независимо друг от друга определили общее проективное преобразование, названное **Шалем** *гомографией* (1837). **Мёбиус** заметил, что можно изучать свойства, инвариантные при каждом типе преобразований. **Клейн** считал, что **Мёбиус** предвосхитил Эрлангенскую программу.

Название *гомоморфизм* происходит от греческих ὁμός и μορφή (образ) и означает «одинакового образа, однотипный». Понятие гомоморфизма в общем виде дано в работе выдающейся немецкой ученой **Эмми Нётер** (1929). Термин ввел **Фробениус**.

Термин *гомотетия*, составленный из ὁμός и θετος (расположенный), впервые употребил **Шаль**; смысл слова — «одинаковое размещение, одинаковое положение».

ГРАДИЕНТ

Термин происходит от латинского *gradior* (идти вперед). Его значение — «идущий вперед, растущий» — соответствует смыслу понятия. Символический вектор

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

был введен ирландским ученым **Гамильтоном** в 1846 г. Он рассмотрел единственную операцию умножения этого вектора на скалярную функцию $V(x, y, z)$. В статье 1862 г. **Тэт** выявил физический смысл величин ∇u, $\nabla \cdot u$, $\nabla \times u$. А **Максвелл** назвал вектор $\operatorname{grad}\Psi$ «склоном, скатом функции Ψ» (slope), чтобы указать направление наибыстрейшего убывания функции Ψ (1873). Название slope выбрано, вероятно, потому, что для функции двух переменных $z = \Psi(x, y)$ вектор grad Ψ отмечает самый крутой склон поверхности $z = \Psi(x, y)$. Современное название вошло в математику благодаря немецким ученым: в частности его принял **Генрих Вебер** и ввел его в переиздание «Лекций по дифференциальным уравнениям в частных производных» **Римана** (1900). [1]; [208, II, с. 40]; [80, II, с. 115].

ГРАДУС

Латинское слово gradus означает «шаг». Как заметили вавилонские жрецы, солнечный диск укладывается по дневному пути Солнца 180 раз, т. е. «Солнце делает 180 шагов». Тогда путь за сутки равен «360 шагам». Круг стали делить на 360 частей.

Обозначения, напоминающие современные, использовались **Птолемеем**, который употреблял шестидесятеричную систему исчисления. Он называл градусы «частями» — μοιραι (сокращенно μ°) и обозначал минуты штрихом, а секунды — двумя штрихами ($'$ и $''$). Средневековые рукописи и ранние печатные книги содержат сокращения латинских слов gradus, minutes, secundae вместо птолемеевых $\mu^\circ, ', ''$, чаще всего Gr, Min, Sec или grad, m, s; современные знаки ввел медик и математик **Пелетье** (1558), у которого, $^\circ, ', ''$ означали степени дроби $1/60$. Эти обозначения распространились очень быстро и к 1600 г. стали общепринятыми, в частности, они встречаются у **Тихо Браге** (1573), **Ретика** (1596), **Кеплера** (1604). [186, II, с. 142–147]; [163, I, с. 67].

ГРАНИЦА (ВЕРХНЯЯ, НИЖНЯЯ)

Первое замечание об отличии этого понятия от максимума и минимума находят у **Гаусса** (1799). **Больцано** ввел эти понятия и попытался сделать их инструментом доказательств в 1817 г. в статье "Rein analytischer Beweis..." («Чисто аналитическое доказательство того, что между двумя значениями противоположных знаков лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения»), ставшей знаменитой век спустя. Но вошли они в математический анализ благодаря постоянному употреблению их в лекциях **Вейерштрасса**, который сформулировал понятия eine obere (untere) Grenze в 1841 г., дал эти названия и оперировал ими в первых же курсах (с 1856 г.). Даже в немецких курсах начала XX в. (**Штольц**, например, 1905) еще приводились разные термины: «die Grenzen» (**Вейерштрасс**), «die Schranken» (**Паш**). [198, I, с. 72].

ГРАФ

Первой работой по теории графов явилась статья **Эйлера** о кенигсбергских мостах (1736). Однако в течение 100 лет эта работа оставалась единственной. Интерес к этой ветви математики и к частному случаю — к деревьям — возродился около середины XIX столетия и был сосредоточен главным образом в Англии.

На развитие теории графов оказали заметное влияние естественные науки, так как она имеет приложения в самых разнообразных областях —

исследование электрических цепей, моделей кристаллов, структур молекул и т. д., теории игр и программировании, биологии, психологии.

Термин употреблен впервые в статье **Кенига**, а затем в его монографии "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" (1936). Но **Д. Кениг** сам его заимствовал из статьи **Шура** 1912 г., где графом называлась фигура, состоящая из нескольких чисел или точек, из которых некоторые пары соединены между собой. [217, с. 78]; [152, XXIII, вып. 6, с. 117].

ГРАФИК

Греческое γραφικος означает «относящийся к письму или к живописи».

Действительный график, именно график ежедневного давления воздуха, в 1684 г. впервые начертил **Р. Плот** [34, с. 268].

ГРУППА

Понятие группы было введено в математику **Лагранжем** (1770). Термин *groupe* впервые употребил **Галуа** в своем знаменитом письме к **Шевалье** (1830). Как известно, **Коши** не открыл статью **Галуа**, **Пуассон** вернул статью, найдя ее непонятной; статья, посланная **Гауссу**, после смерти **Гаусса** найдена нераспечатанной.

Окончательно этот термин утвердился после работ **Кэли** (1854) и **Сильвестра** (1860). В статье **Кэли** содержится самая ранняя попытка сформулировать определение абстрактной группы. Оно было дано позднее **Кронекером** (1870), **Г. Вебером** (1882) и **Фробениусом** (1887). Аксиоматика теории в основном была завершена к 30-м гг. XX в.

Понятие группы было поставлено в центр геометрических исследований примерно в 1871 г. работами **Клейна** и **Ли**, которые ознакомились с важностью понятия группы у **Жордана**, в Париже. Их «манифестом» явилась знаменитая «Эрлангенская программа» (1872). Первое исследование бесконечных групп восходит к **Жордану** (1870). Несколько лет спустя изучение их было значительно расширено и продолжено в различных направлениях **Ли**, который и создал эту новую ветвь математики (работы 1888–1893 гг.). Ему же принадлежит терминология: *конечная группа*, *непрерывная группа преобразований*, *касательное преобразование* и т. д. **П. С. Александров** писал: «Я думаю, что ...понятия **числа, множества, функции и группы** являются теми четырьмя краеугольными камнями, на которых зиждется все здание современной математики и к которым сводится всякое другое математическое понятие». [19, с. 71–72]; [186, с. 351–353].

Д

ДЕДУКЦИЯ

Латинское *deductio* значит «выведение».

ДЕКА

Греческое δέχα, входящее в названия метрических единиц, означает «десять» и показывает, что единица в 10 раз больше основной.

ДЕЛЕНИЕ

В математике древности не было деления — его производили последовательным вычитанием (как впоследствии на арифмометрах). Определения деления, основанные на этом методе, просуществовали до XIV–XV вв. Как производили деление греки — неизвестно. До распространения современного способа деления эта операция была трудной и громоздкой, и методов было чуть ли не столько же, сколько учителей арифметики. Современный способ описан впервые в итальянской рукописи неизвестного автора (1460). Последний учебник, в котором деление излагается не «по-нашему» вышел в 1800 г.

Термины *деление*, *делимое*, *делитель* появились сравнительно поздно: у **Герберта** (будущего папы Сильвестра II), в конце X в., когда **Герберт** был центральной фигурой среди ученых. Употреблявшийся и ранее термин *divisio* (от глагола *dividere* (делить, распределять)) означал до этого вообще раздробление на части. Результат деления долгое время называли «суммой деления»; слово *частное* (латинский термин, конечно) появилось впервые у **Леонардо Пизанского** (1202), а затем — последовательно и систематически — у **Иордана Неморария** (генерала доминиканского ордена в первой четверти XIII в.). Соответствующие русские термины — *делимое*, *делитель*, *частное* — ввел **Магницкий** в своем учебнике «Арифметика сиречь наука числительная» (1703).

Сильвестр II

Из современных знаков деления старейший — горизонтальная черточка, она была у **Герона и Диофанта**, затем встречается у **Леонардо Пизанского**. Однако во всеобщее употребление горизонтальная черта вошла лишь в XVI–XVII вв. Двоеточие введено в «Арифметике» **Джонса** (1633). С 1684 г. двоеточие как знак деления употребляет **Лейбниц**. Наряду с этими символами в употреблении были и другие: в течение длительного времени операцию деления обозначали буквой D (от Division), впервые символы D и M (для деления и умножения) появились в “Deutsche Arithmetika” **Штифеля** (1545). До конца XVIII в. употреблялись также повернутые буквы D и d (⌓ или ⊸). Швейцарец **Ран** ввел знак $\div$ (1659), который после перевода его книги на английский язык был широко распространен в Англии и приписывался **Пеллю**. Только в 1923 г. Национальный Комитет Математических Проблем (National Commite of Mathematical Requirements) постановил прекратить употребление знака $\div$. [185, I, с. 268–273]; [56, с. 227–232].

ДЕРЕВО

Понятие и методы операций были уже у **Кэли** (1857, 1859, 1874 гг. и далее).

Это понятие комбинаторики более родственно генеалогическому древу, нежели дереву, растущему на земле; по-видимому, из-за сходства «картинок» и было дано такое название. Вначале в терминологии был разнобой: trees (деревья) у **Кэли**, assemblage à continuite simple (соединения с простой непрерывностью) у **Жордана**, ramifications (разветвления), arborescences (древовидные разветвления) у **Полиньяка**. Раньше всех вопросами этой теории занимался **Кэли**, вскоре последовали работы **Листинга** (1862), **Жордана** (1869), **Сильвестра** (1878), **Полиньяка** (1880), **Люка** (1891) и др.

ДЕТЕРМИНАНТ

Слово происходит от латинского *determino* (ограничивать, определять); так что *определитель* — калька латинского термина, он впервые встречается у **Гаусса** и означает при этом «дискриминант квадратичной формы» (1801). В современном значении этот термин ввел **Коши** в статье "Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment" (1815).

Идея детерминанта восходит к **Лейбницу**, который пришел к детерминантам при решении систем линейных уравнений; рукопись **Лейбница** относится к 1678 г., письмо к **Лопиталю** с сообщением о методе — к 1693 г. В одном из следующих писем **Лейбниц** писал: «На мой взгляд, это одно из лучших открытий в анализе». Основное — свой метод обозначения коэффициентов — **Лейбниц** опубликовал в 1700 г. без каких-либо применений и выводов. Переписка же с **Лопиталем** была опубликована в 1850 г. В 1750 г. детерминанты были изобретены вновь женевским математиком **Крамером** ("Introduction à l'analyse dès lignes courbes algébriques"). При этом **Крамер** употреблял естественные названия *строки* и *столбцы* детерминанта, которые и вошли в обиход (**Коши** писал suite horisontale, suite verticale). **Крамер** называл определитель «результантом», отсюда обозначение R, которое долго употреблялось.

Метод **Крамера** был замечен и очень быстро стал основной частью школьной программы. Французский математик **Вандермонд** опубликовал первое исследование, посвященное определителям (1772), он впервые изложил цельную теорию, ему принадлежат многие классические результаты: $\Delta = 0$, если две строки детерминанта равны; $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \Delta$ и др. **Вандермонд** предложил для элемента a_{ik} обозначение $\binom{k}{i}$ и специальный символ для детерминанта, который не сохранился в теории, но в свое время помог ее развитию. Совсем близко к современным обозначениям подошел **Коши**, употреблявший запись a_k^i. До конца XIX в. элементы детерминанта обозначали $a_{r,s}$. Слово element использовал **Якоби**, term — **Коши**.

Первые полные изложения теории принадлежат **Бине** и **Коши**. Они одновременно занялись теорией детерминантов и, естественно, получили некоторые общие результаты. Близость религиозных взглядов помогла им избежать споров о приоритете, они договорились сделать доклады Академии наук на одном заседании и опубликовать свои статьи одновременно (1812). **Коши** посвятил теории определителей еще 14 мемуаров. Считают, что именно он превратил теорию в самостоятельную дисциплину, оторвав ее от линейных уравнений.

Следующий этап составили 30 работ **Якоби** (1826–1841), среди которых и завершающая статья «О построении и свойствах детерминантов». Судьбу термина *детерминант* определило то обстоятельство, что **Якоби** принял его, правда, не сразу: только с третьей статьи **Якоби** стал использовать это слово. Его статьи стали в полном смысле слова «классическими» сразу же после появления (их перевод с латыни на немецкий язык опубликован в Ostwald's Klassiker, № 76, 77).

Первое пособие по теории определителей — "Elementary theorems relating to determinants" **Споттисвуда** (Лондон, 1851). Затем последовали **Бриоски** (1854), **Бальцер** (первое издание — 1857 г., второе — 1864 г.). **Бальцер** употреблял термины Inversion (а в скобках — derangement, variation), а также "m Zeilen, Horisontalreihen", "n Colonnen, Verticalreihen" и обозначения $a_{i,k}$ или a_{ik}. Индексы называли 2-Numern, или indices, или suffixe.

Якоби ввел в рассмотрение функциональные определители и сделал их средством исследования в математическом анализе, ему и **Коши** принадлежит термин *детерминант n-го порядка*. Первая попытка ввести бесконечные детерминанты была сделана в 1770 г. **Коттеричем**, а строгая теория начала создаваться работами **Пуанкаре** (1885–1886), а затем — **Хельге фон Кохом**.

Ко второй половине XIX в., кажется, не осталось такого раздела математики, куда бы не проникли определители, но задача, породившая их, еще не была решена: исследование различных случаев, возникающих при решении систем, выяснение существования и единственности решения и т. д. стало классической частью алгебры только после лекций **Кронекера**. Эти результаты излагались им в курсах, а опубликованы впервые (с разрешения **Кронекера**) во втором издании руководства **Бальцера**.

Два правила вычисления детерминанта (третьего порядка) — по методу треугольников и приписыванием столбцов — придумал страссбургский профессор **Саррюс** (опубликовано в "Les Elements d'Algebre" **Финка**, 1846). Еще одно правило основывается на свойстве, замеченном **Якоби** (1833): если к элементам строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на общий множитель, то определитель не изменится. Теорема **Лапласа** о разложении определителя по элементам строки (или столбца) встречалась в частных случаях у **Вандермонда** (1771), **Лапласа** (1773), **Безу** (1779). Но лишь у **Коши** она полностью сформулирована и доказана (1812). При этом сразу же употреблялись выражения "development des determinant" и "les determinants mineurs" (которые впоследствии превратились в просто *миноры*).

Обозначения — вертикальные линии для определителя, две вертикали для матрицы — ввел **Кэли** (1841). До той поры распространенным было обозначение **Коши**: $\sum \pm a_{11} b_{22} \dots m_{nn}$. **Кронекер** использовал обозначение $|a_{ik}|$ (1868). Знак Δ для определителя начал использовать **Якоби** (1827). Приведем для сравнения одновременно употреблявшееся обозначение: $(abc, \overline{123})$ — 1829 г.

Первая книга на русском языке — **И. Шперлинг** «Теория определителей и ея важнейшие приложения» (1858. 180 с.) Русская терминология складывалась довольно медленно. В XIX в. вместо «строки, столбцы» фигурировали «колонны, горизонтали»; индексы писали через запятую; по-видимому, в «Кратком курсе высшей алгебры» **Тихомандрицкого** (1892) мы находим переход к современному математическому языку (именно переход, так как есть ссылки на источники и иногда меняются соответствующие обозначения). Даже в начале XX в. равно употреблялись *инверсия* и *нарушение* (а в XIX в. — «непоследовательность» и «беспорядок»); *перемещение* и *транспозиция*; *строки* и *горизонтальные ряды*; *столбцы* и *вертикальные ряды*; *адъюнкта* (A_{ik}); а наряду с *минором* фигурировали также *субдетерминант* и *младший детерминант*; *определитель о n буквах или n-го порядка* — стандартное выражение. [198, I$_1$, с. 36]; [34, с. 58, 59]; [226, II, с. 45]; [217, с. 31]; [68, с. 2–8, 68, 127, 211]; [218].

ДЕЦИ

Латинское *decem* (десять) входит в названия метрических единиц и обозначает, что данная единица в десять раз **меньше** основной.

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

В статье, написанной около 1737 г. и опубликованной в 1744 г., **Эйлер** ввел так называемую функцию дзета

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^s}.$$

В таком именно виде эту формулу использовал **Риман**, отмечая, что она принадлежит **Эйлеру**. Первые нетривиальные приложения дзета-функции к вопросу распределения простых чисел были даны **Чебышёвым** (1848).

Дальнейшие глубокие исследования в этом направлении с переходом в область комплексных переменных принадлежат **Риману**. Он ввел обозначение $\zeta(s)$ и наименование ("Uber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse", опубликовано в 1859 г.). Так как он впервые выяснил фундаментальную роль этой функции во всей современной аналитической теории чисел, то функция носит его имя. Со свойствами функции $\zeta(s)$ связана и не доказанная до сих пор так называемая гипотеза **Римана**. [101, с. 38]; [64, VII, с. 510].

ДИАГОНАЛЬ

Термин διαγωνιος составлен из греческих слов δια (через) и γωνια (угол). Буквальное значение слова — «проходящая через угол».

Термин встречается у **Евклида**; он отсутствует у **Архимеда**, **Аполлония**. В большинстве случаев греческие геометры употребляли другое слово — «диаметр». Этот термин был естественным для четырехугольников, вписанных в круг, а затем был распространен на произвольные многоугольники. В Средние века в ходу были оба термина. Лишь в XVIII в. понятия «диагональ» и «диаметр» были строго разграничены. [216]; [219].

ДИАМЕТР

Греческое слово διάμετρος означает «поперечник». У древнегреческих математиков слово употреблялось и со значением «диагональ»; им были известны диаметры конических сечений, эллипсоида вращения. [216].

ДИВЕРГЕНЦИЯ

Максвелл ввел в рассмотрение величину

$$-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

названную им «конвергенцией в точке» (1873). Отсюда естественно назвать величину с противоположнным знаком *дивергенцией.* Термин был предложен **Клиффордом** (1878), он же обозначил величину через $\operatorname{div} F$ тремя первыми буквами слова *divergence* — «расходимость». До конца XIX в. были употребительны обозначения и $\operatorname{div} F$, и $\operatorname{conv} F$. [208, с. 41]; [1].

ДИРЕКТРИСА

Понятие директрисы конического сечения впервые ввел **Аполлоний**. Определение конического сечения через фокус и директрису приведено у **Паппа** (ок. 300 г. н. э.), но может быть, оно было известно раньше.

Французское название directrice образовано от позднелатинского directrixe — «направляющая» (dirigo — «определять направление, направлять»). Слово было введено **Лопиталем** в 1720 г. (для директрисы параболы). В русском математическом языке слово впервые встречается у **Буняковского** (1839). [198, $\mathrm{III}_{2.1}$, с. 12]; [186, с. 41].

ДИСКРЕТНОСТЬ

Термин произведен от латинского *discerno* (отделяю, разделяю); *discretus* (разорванный, сложенный из отдельных частей).

Интересно, что в конце XIX в. «дискретный» являлось антонимом качеству «конкретный». **Гуэль** (1878!) «дискретному или числовому» противопоставляет «конкретное или непрерывное». [113].

ДИСКРИМИНАНТ

Термин образован от латинского *discriminare* — «разбирать, различать». Понятие дискриминанта квадратичной формы установлено в работах **Гаусса**, **Дедекинда**, **Кронекера**, **Вебера** и др. Термин ввел **Сильвестр** (который называл себя «математическим Адамом» за множество придуманных терминов). [113]; [186, с. 345].

ДИСПЕРСИЯ

Термин происходит от латинского *dispengo* (рассыпать, рассеивать, разбрасывать). Понятия дисперсии и нормальной дисперсии ввел в 1877 г.

геттингенский экономист **Лексис** (“Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Geselschaft”). Теорию **Лексиса** с логической и теоретической стороны развил **фон Криз** (“Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, 1886). [113]; [198, II_2, с. 834].

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ

Термин происходит от латинского *distribution* — разделение.

В ходе доказательств правил действий с натуральными числами были выделены основные законы сложения и умножения. К XIX в. *переместительный* и *сочетательный* законы сложения включались в систему аксиом. Из них выводились соответственные законы умножения. Так излагает «Первые основания чистой математики» (1790) **Иоганн Шульц**, друг и философский единомышленник **И. Канта**, а за ним **Мартин Ом** (брат физика **Ома**) — в 1822 г. Названия законов — *дистрибутивный*, *коммутативный* — ввел французский артиллерийский офицер и преподаватель **Франсуа Сервуа** в 1815 г. (commutatio — перемена, обмен).

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

В работах создателей дифференциального исчисления — **Лейбница**, **Якоба и Иоганна Бернулли** — слово *differentia* (разность), которое употреблялось в смысле «приращение», не имело при себе никаких пояснений.

От **И. Бернулли** пошла традиция обозначать приращение через Δ (впрочем, он обозначал так и дифференциал функции); **Эйлер** придал этому знаку современный смысл в исчислении конечных разностей. **Лейбниц** для «бесконечно малой разности» использовал обозначение d — первую букву слова differential, образованного от differentia. Удобство его обозначений (dx для переменной x, dy — для y и т. д.) сейчас трудно оценить из-за привычности и «естественности». Но сравним их с теми, которыми пользовались предшественники **Лейбница**. Например, **Ферма** малые приращения обозначал через a; **Барроу** обозначал приращения x и y соответственно через a и e. Эти же обозначения вначале употреблял и **Лейбниц**, затем он изменял их следующим образом: $a, z, \bar{d}, \bar{x}, \overline{dx}, dx$. Обозначение dx появилось у него в 1675 г; в печати оно употреблено в статье 1684 г., когда **Лейбниц** опубликовал свой метод, простейшие правила дифференцирования и назвал этот алгоритм *дифференциальным* исчислением. Мемуар озаглавлен: «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». В этой же статье отмечена инвариантность формы первого дифференциала.

При своем рождении исчисление **Лейбница** было частью аналитической геометрии, для раннего периода характерно исследование кривых алгебраическими методами. Вследствие отсутствия понятия функции роль фундаментального понятия выпала на долю дифференциала. В исчислении **Лейбница** не было функций, не было производных, а были переменные величины: последовательности значений x_i, y_i и соответственно дифференциалы dx_i, dy_i. Получаемые формулы существенно зависели от выбора этой последовательности (или прогрессии) переменных.

Я. и **И. Бернулли** познакомились с исчислением **Лейбница** между 1687 и 1690 гг. по его достаточно темной статье и в значительной степени самостоятельно реконструировали его. Поэтому их исчисление не тождественно лейбницеву. Они развили концепцию интегрирования как действия, обратного дифференцированию, а поэтому у них появилась «функция». Именно этому направлению и следовали работы **Эйлера** — ученика **И. Бернулли**.

Фундаментальным понятием в методе **Ньютона** была функция (fluente) и ее производная (fluxion); а его «моменты» — бесконечно малые приращения — соответствуют дифференциалам **Лейбница**. Дифференциалы тригонометрических функций $d\sin x, d\operatorname{tg} x, d\sec x$ геометрически вывел **Коутс** (1722), не только до появления формул их производных, но и до введения самих функций, когда говорили о «линии синуса».

Благодаря трудам **Эйлера**, **Лагранжа**, **Коши**, производная заменила дифференциал в качестве основного понятия исчисления, дифференциал все же устоял при всех попытках вытеснить его из анализа. Любопытно, что определение дифференциала функции, равносильное современному, впервые сформулировал **да Кунья** (1790).

В течение всего XIX в. под дифференциалом функции многих переменных понимали $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. В сочинениях **Лагранжа** это выражение получалось из разложения $f(x, y)$ в ряд **Тейлора** (откуда возникали и частные производные). В конце XIX в. была осознана неточность такого определения — это заметили **Томе** (1873), **Штольц** (1893), **Пирпонт** (1905), **Юнг** (1908). В своем учебнике (1893) **Штольц** привел пример-иллюстрацию: функция $z = (xy)^{1/2}$ имеет частные производные в точке $0(0, 0)$ равные нулю, однако ее приращение — не тождественный нуль и традиционное определение, стало быть, неверно. **Штольц** ссылается на книгу **Томе**.

К современному обозначению полного дифференциала пришли после векового отбора и совершенствования символики. Прообразы принятых ныне обозначений мы находим у **М. Ома**: $df = df_x + df_y$ (1829) и у **Эйлера**

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)_{\cdot} dx + \left(\frac{df}{dy}\right)_{\cdot} dy \quad (1755).$$

Для сравнения приведем обозначение **Ф. Бойяи** (1832): если $\Phi(x)$ — функция одной переменной, то дифференциал порядка n этой функции у него обозначается так ${}^{n}|_{\odot}\Phi x$. [185, II, с. 186–234]; [77, с. 118]; [34, с. 134]; [19, с. 181].

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

Почти до конца XIX в. в курсах анализа «доказывали» теорему **Ампера** о дифференцируемости непрерывной функции. **Б. Я. Букреев** подвел итог:

«На существование производной смотрели как на неизбежную принадлежность непрерывности, а не как на новое условие, ограничивающее функцию». Понятие *дифференцируемость* сформировалось в работах немецких математиков — **Римана**, **Вейерштрасса**; в немецкой литературе появились и термины «differenzierbar», «Differenzierbarkeit». Правда, и в немецких статьях, и, особенно, во французских до середины 70-х гг. XIX в. вместо «недифференцируемая функция» употреблялось «функция без производной».

Первый пример функции, не имеющей производной ни в одной точке, построил **Больцано** (рукопись 1831 г., опубликовано в 1930 г.). Следующий пример принадлежит **Риману**. Он привел функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

По свидетельству **Вейерштрасса** мемуар был написан в 1854 г., немецкая публикация относится к 1868 г., французская — к 1873 г.

Свой собственный пример **Вейерштрасс** сообщил на лекциях, доложил Берлинской академии наук (1872) и **Дюбуа Раймону**, который и опубликовал в 1875 г. «Вейерштрассова монстра» — функцию

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x),$$

$(0 < b < 1$, a — целое, нечетное).

В следующее десятилетие ученики **Вейерштрасса** придумали целый ряд функций с такими свойствами. Во Франции мемуар **Римана** оказал влияние только на **Дарбу** (который настаивал на полной независимости от **Вейерштрасса**), в самом деле его функция

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)!x}{n!}$$

скорее «родственница» функции **Римана**; **Дарбу** доложил результат в 1873 г., опубликовал в 1875 г. К середине 70-х гг. существовал уже ряд таких примеров:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sin\pi nx\cdot\sin\left\{\frac{1}{\sin\pi nx}\right\},\quad s>1 \qquad \text{(Ганкель, 1870)},$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(2^n x)}{4^n}\quad \varphi(x)=[x]-\sqrt{x-[x]},\quad x>0 \qquad \text{(Шварц, 1873)},$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\cos(1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)x),\ a>1+\frac{3}{2}\pi \ \text{(Дини, 1877)}.$$

Понятие с большим трудом входило в «математический быт». **Жордан**, признавая существование недифференцируемых функций, писал:

«Мы не будем рассматривать эти ненормальные функции...» (курс 1882 г.). А **Эрмит** выражался эмоциональнее: «...я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производных» (письмо к **Стилтьесу**). Функция **Вейерштрасса** или ее модификации входят в учебные пособия, практически, только в XX в.: **Дини** (1892), **Клейн** (1902), **Паш** (1914), **Бибербах** (1917), **Гобсон** (1927)...

Долгое время функция многих переменных считалась дифференцируемой при наличии частных производных. Современное определение появилось в результате исследований **Томе**, **Штольца**, **Пирпонта** и **Юнга**. Независимо от них к аналогичному определению пришел **Фреше**, который предложил и «геометрическое определение» — существование касательной плоскости поверхности $z = f(x, y)$ (1911–1912) [175, **28**, с. 37–106]; [175, **40**, с. 37–112].

ДОДЕКАЭДР

Термин составлен из греческих слов δωδεκα (двенадцать) и ἕδρα (основание); его смысл — «двенадцатигранник». Тело было известно уже пифагорейцам; додекаэдр построил впервые **Теэтэт** (IV в. до н. э.). [216]; [113]; [219].

ДРОБЬ

В греческой математике числом называлось «составленное из единиц», т. е. дробь не признавалась числом; такое положение сохранялось поразительно долго. Многие математики (например, **Валлис**) полагали, что «дробь не является числом, поскольку отвечает на вопрос „какое количество", а не на вопрос „сколько"».

На всех языках дробь называется «ломаным, раздробленным числом». Латинское fractura, например, произведено от frango (разбивать, ломать). Этот термин ведет свое начало от арабов и через **Леонардо Пизанского** (1202) вошел в европейскую математику. Названия *числитель* и *знаменатель* имеются у **Максима Плануда** (конец XIII в.). Термин *обыкновенная дробь* (fractura vulgaris) появляется у **Траншана** (1558) для дроби p/q в отличие от шестидесятеричных дробей. У венгра **Сегнера** появляются термины *правильная и неправильная дроби* (1747).

Операции сокращения и расширения систематически применялись уже с XII в., но термин *сокращение* входит в употребление с XV в., а *расширение* — только с XIX в. Приведение дробей к общему знаменателю проводится с XII в., название операции встречается у **Региомонтана** (1464). Наименьший общий знаменатель стали находить только во второй половине XVI в., после работ **Тартальи** (1556) и **Клавиуса** (1583).

Первая попытка систематического развития десятичных дробей сделана, по-видимому, **Бонфисом** из Тараскона (середина XIV в.). Он оставил рукопись на древнееврейском языке, которая после шестисотлетнего хранения в архиве была прочитана лишь в наши дни. За 150 лет до **Стевина** с исчерпывающей полнотой теория десятичных дробей была развита самаркандским астрономом **ал-Каши**, которого пригласил в Самарканд Улугбек. Самый известный труд **ал-Каши** «Ключ к арифметике» (1427) —

настоящая энциклопедия математики. В частности он изложил не только шестидесятеричную арифметику, но и привел довольно методично теорию десятичных дробей, чтобы показать, что над ними можно производить операции так же, как над целыми числами.

Работы **Бонфиса** и **ал-Каши** остались неизвестными в Европе, независимо от них введение десятичных дробей подготавливалось работами **Пейрбаха**, его ученика **Региомонтана**, затем **Виета** и **Иоганна Севильского**. Широкое распространение десятичных дробей началось после выхода в свет книги “La Disme” («Десятая», 1585) фламандского инженера **Стевина**. Он ввел десятичные дроби и пояснил правила действий над ними. Примечательно, что в самой распространенной немецкой книге по элементарной математике “Anfangsgründen” **Вольфа** (1750) десятичные дроби опущены как совершенно лишние. Название *десятичные дроби* ввел **Эленд** (1724), до тех пор они именовались «десятичные числа». Обращение обыкновенных дробей в десятичные и обратно рассматривал **Кавальери** (1643), в связи с чем он впервые в Европе стал заниматься периодическими дробями.

Периодические дроби в шестидесятеричной системе исчисления встречаются в XV в. у **Сибта ал Миринди**. Несколько позднее их существование было замечено и европейскими учеными. Слово periodus встречается у **Бейера** в “Logistica desimalis” («Десятичный счет», 1603). **Валлис** установил, что иррациональные числа не выражаются периодическими дробями. Некоторые свойства периодических дробей обнаружил **Лейбниц**. После длительного перерыва в изучении периодических дробей многие важные результаты получили **Ламберт** (среди них — теоремы о числе цифр периода, 1769), **Робертсон** (библиотекарь Лондонского Королевского Общества) и **Гаусс**.

Установлено, что цепные (или непрерывные) дроби были известны в индийской математике (**Бхаскара**, XII в.), по косвенным данным заключают, что с этими дробями были знакомы древнегреческие математики. В новое время цепные дроби встречаются впервые у **Бомбелли** (1572). Элементарная теория цепных дробей была завершена **Гюйгенсом** (“Descriptio automati planetarum”) и независимо от него **Эйлером** (1737). Он доказал, что периодическая непрерывная дробь является корнем квадратного уравнения, а **Лагранж** — обратную теорему.

У **Валлиса** появляется термин *непрерывная дробь* (fractio continua), который показался удачным **Эйлеру** и систематически им употреблялся. Термин *цепная дробь* появился в Германии в середине XVIII в. В настоящее время употребляют оба термина.

Удобные обозначения для непрерывных дробей начали искать давно; по-видимому, самая ранняя запись цифрами, а не словами встречается у арабского математика **ал-Хассара** в начале XIII в. Почти современная форма записи непрерывных дробей есть у **Катальди** (1613): единственное отличие — вместо знака + он писал et. Современное начертание придумано **Лейбницем** (1696) и **Гюйгенсом** (1698).

Результаты, накопленные в работах **Кавальери**, **Валлиса**, **Ламберта**, **И. Бернулли** (младшего), **Эйлера**, получили обработку и оформились в единую теорию в "Disquisitiones Arithmeticae" **Гаусса** («Арифметические исследования», 1801). Статья **Чебышёва** «О непрерывных дробях» (1855) явилась началом его исследований по общей теории ортогональных многочленов. Новым мощным импульсом явился замечательный мемуар **Стилтьеса** «Исследование о непрерывных дробях» (1894).

Способ записи чисел древних греков был настолько «неудобным», что превращал записывание дроби в сложную проблему. Для некоторых дробей (например, для 1/2) существовали специальные символы. До эпохи **Архимеда** дроби описывали словами. **Архимед** (и **Диофант**) писали знаменатель над числителем, без черточки. Современная запись ведет начало от индусов, у которых ее переняли арабы: числитель пишется над знаменателем. Черту для их разделения впервые применил **Леонардо Пизанский** (1202); предполагают, что ее он тоже нашел у арабов. Потом такая запись исчезла и появилась вновь только у **Видмана** (1489). Но еще до середины XVII в. встречается запись без черты (**Мерсенн**, 1644).

Запятую в десятичных дробях ввели итальянский астроном **Маджини** (1592) и **Непер** (1617) — до них вместо запятой писали нуль в скобках, например 3,7 = 3 (0) 7, или отделяли целую часть вертикальной чертой: 3|7, или употребляли разные чернила, например, целую часть писали черными, а дробную — красными. Последние два способа применял **ал-Каши**. (Как знак препинания запятая была введена на рубеже XV–XVI вв. венецианским типографом Альдо Мануцци. Он же стал прилагать к книгам оглавление.) [56, с. 246]; [226, I, с. 98]; [220, с. 313]; [203]; [186, с. 53]; [45, с. 41]; [34, с. 19]; [45, с. 41–43].

Е

e

Существование предела $\lim(1 + 1/n)^n$ при $n \to \infty$ впервые установил **Даниил Бернулли** в 1728 г. Обозначение *e* введено **Эйлером** в печати в 1736 г., а в письмах и рукописях раньше (с 1728). Этот символ быстро стал общепринятым, но время от времени вместо него употреблялись и другие вплоть до конца XIX в. Например, американский математик **Б. Пирс** предлагал обозначить *e* символом , а π — символом , чтобы подчеркнуть тесную связь, существующую между этими числами (1859). Наконец, можно заметить еще, что и раньше — в XVII в. — существовали особые знаки для основания натуральных логарифмов, первый из них введен **Лейбницем** — буква *b* от слова "basa" — «основание» (в письмах к **Гюйгенсу**, начиная с 1690 г.).

Шарлю Эрмиту принадлежит знаменитое первое доказательство трансцендентности числа *e* (1874).

ЕДИНИЦА

Термин αριθμος обозначал у греков только «натуральное число, количество, составленное из единиц». Поэтому 1 не считалось числом. Такой взгляд продержался довольно долго. **Стевин** в своей «Арифметике» (1585) вынужден был бороться за признание единицы числом.

Греки, как обычно, *видели* глубокую проблему. **П. Р. Халмош** пишет: «Почти 200 страниц посвящаются подготовке к определению числа 1. Затем они [**Бурбаки**] определяют число 1, используя в высшей степени сжатую и сокращенную символику; в сноске указывается, что несокращенная форма этого определения потребовала бы в их системе обозначений несколько десятков тысяч символов. Справедливости ради следует отметить, что такие понятия, как число 1, отнюдь не являются простыми, как это могло бы показаться на первый взгляд. Это обстоятельство уже давно известно математикам, работающим в области математической логики». [17, с. 100].

З

ЗАКОН АСИМПТОТИЧЕСКИЙ

Название предложил **Дирихле** в статье "Uber die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie" (1838), где термин оправдывается аналогией с геометрической асимптотой. Старейшим примером такого закона **Дирихле** считает выражение **Стирлинга**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Этот закон теории вероятностей был высказан **Кардано** в середине XVI в. В «математическом оформлении» он появляется в "Ars Conjectandi" (1713) — посмертной работе **Я. Бернулли**. По его признанию он обдумывал доказательство теоремы 20 лет. Впоследствии были найдены более общие теоремы **Пуассоном**, **Чебышёвым**, **Борелем** и др. Свое название теорема получила в мемуаре **Пуассона** "Recherches sur la probabilité des jugements en matiére criminal et en matiére civil" (1836). Здесь в разных местах **Пуассон** называет *законом больших чисел* два разных утверждения, по-видимому, считая их равносильными. **А. А. Марков** предложил называть *законом больших чисел* всевозможные обобщения теоремы **Бернулли**.

В 1913 г. Петербургская академия наук праздновала двухсотлетие открытия закона больших чисел, в то время как происходили торжества по поводу трехсотлетия Дома Романовых. [99, с. 189, 260]; [174, (35), с. 170].

ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ

Этот фундаментальный закон был подмечен **Эйлером** на частных примерах (1772, опубл. 1783), общего доказательства у **Эйлера** не имелось (так же как и у **Ферма**). Затем теорема была вновь открыта **Лежандром** (1785) и опубликована в "Essai sur la théorie des nombres" (1798), после чего и приобрела известность. **Лежандру** принадлежит и название закона. Первое полное доказательство теоремы получил девятнадцатилетний **Гаусс** (1796) и опубликовал его в 1801 г. **Гаусс** подчеркивал значение этого закона, называя его «золотой теоремой», и возвращался к его доказательству вновь и вновь: он дал семь доказательств. Соответствующие законы для кубичных и биквадратичных вычетов содержатся в работах **Гаусса** 1825 и 1831 гг.

Одной из проблем, стоящих перед математикой XX в., **Гильберт** считал обобщение закона взаимности. Результаты, полученные **Гауссом**, **Эйзенштейном**, **Куммером**, далеко еще не исчерпывали задачу. Решение этой (девятой) проблемы **Гильберта** получено после полувековых поисков и завершено в работах советского математика **И. Шафаревича**. [77, с. 55]; [64, VII, с. 509]; [129, с. 133–139]

ЗАКОН ГАУССА ИЛИ НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН

До того как **Гаусс** опубликовал закон нормального распределения случайных величин в «Теории движения небесных тел» (1809), эквивалентные результаты были уже получены несколькими учеными.

Это распределение (для дискретных величин) было известно **Муавру** («Аналитические этюды», 1730). Вторично оно было опубликовано в 1765 г. — посмертная публикация "Essay" **Бейеса** сопровождалась введением и комментариями **Ричарда Прайса**. В первой части содержалась широко известная в наше время «формула **Бейеса**». Цель второй — оценить точность результата, который дает сумма членов биномиального ряда. Все эти авторы писали в «ньютоновском стиле»: **Муавр**, **Бейес** и **Прайс** не могли привести результаты в современном виде хотя бы потому, что не имели стандартных обозначений для π, экспоненциальной функции, знака интеграла... В частности, в 1765 г. **Прайс** доказал формулу, эквивалентную нормальному закону:

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{n!(2n+1)} \left\langle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2}\, dt \right\rangle.$$

Симпсон ввел в 1757 г. закон линейных ошибок, чтобы определить затем «среднюю» ошибку. В 1778 г. **Лаплас** исследовал другие законы, но только не нормальный; важнейшим из них было экспоненциальное распределение. К выводу о фундаментальном значении нормального закона **Лаплас** пришел несколько позднее — в 1782 г., тогда он поставил «полезную задачу» о табулировании интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

Основной результат о том, что распределение случайных ошибок подчинено нормальному закону, опубликовали почти одновременно **Эдрейн** и **Гаусс** (соответственно 1808, 1809). **Роберт Эдрейн** эмигрировал в США из Ирландии (1798); его считали выдающимся математиком Америки в то время. Возможности математических публикаций были в Америке весьма ограниченными, статьи **Эдрейна** появились в журнале "Analyst", учрежденном в Филадельфии самим автором. Неудивительно, что его работы остались неизвестными в математическом мире Европы. Только в наши времена установлено, что **Эдрейн** изложил метод наименьших квадратов, привел приложения его к обработке астрономических и геодезических наблюдений и сформулировал «сопутствовавший» закон распределения случайных величин — ошибок измерения $x_1 - a, x_2 - a, \ldots$.

Гаусс уже в течение нескольких лет хранил эти выводы. Со времени опубликования **Гауссом** "Theoria motus corporum coelestium in sectionibis conicis solem ambientum" закон называют «гауссовым»; **Пуанкаре** назвал его *нормальным* (**Пирсон** считал, что это ему принадлежит название). **Гаусс** ввел функцию $\varphi(\varepsilon)$ в виде

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-(h\varepsilon)^2},$$

он назвал ее probabilitas errori tribuenda (показывающая возможные ошибки). Первые таблицы функции

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

вычислил **Крамп** ("Analyse des réfractions astronomiques et terrestres", 1798); их продолжил и расширил **Бессель** (1818), а затем — **Энке** (1834). [198, I_2, с. 771, 775]; [99, с. 176].

ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Название дано **Сильвестром**, который и установил его в общем виде (1852). Однако уже раньше закон инерции вещественных квадратичных форм рассматривал **Гаусс** (в связи с методом наименьших квадратов в 1846–1847 гг.), на лекциях **Гаусса** с этим свойством познакомился **Риман**. В 1850 г. закон самостоятельно нашел **Якоби** (опубликовано в 1857 г. после смерти **Якоби**). Однако первая публикация принадлежит **Сильвестру**. [142, с. 205].

ЗНАЧЕНИЕ ГЛАВНОЕ ЛОГАРИФМА

Бесконечнозначность логарифма установил **Эйлер** в 1749 г. Понятие *главное значение* и это название для него (valeur principal) ввел **Коши** в 1821 г.

Вейерштрасс употреблял в своих лекциях обозначение $\lg\bar{g}\, z$. В «Общей арифметике» его ученика **Штольца** введены обозначения Lx и lx, а также $\operatorname{Arctg} x$ и $\operatorname{arctg} x$, которые в той или иной форме сохранились до наших дней ("Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", 1885–1886).

Название *главное значение функции комплексной переменной* (Hauptwert) стало употребляться после работы **Бьёрлиига** (1847). [198, $II_{3.1}$, с. 28]; [226, II, с. 262].

ЗНАЧЕНИЕ СОБСТВЕННОЕ МАТРИЦЫ

Величина имела много разных наименований, чаще других употреблялись *собственное значение* (Eigenwalue, propre value), «характеристическое значение» (characteristic value), «секулярное значение» (secular value), «латентное значение» или «латентный корень». Последний термин предложен **Сильвестром** (1882), поскольку эти числа «скрыты в операторе в таком же смысле, в каком пар может быть назван скрытым в воде, а дым — в листьях табака» (latent означает «в скрытом состоянии, связанный»). Термин *собственное значение* становится общепринятым с начала XX в. Надо признать, что «характеристическое значение», возможно, более удачно, поскольку число является корнем *характеристического* уравнения; этот термин употреблял **Пуанкаре**.

Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования появились в теории кватернионов **Гамильтона**, правда, они совершенно потерялись среди многочисленных вспомогательных векторов, а в некоторых случаях **Гамильтон** так бегло набрасывал «эскиз теории», будто хотел просто застолбить поле исследований. [198, $II_{3.1}$, с. 28]; [51, с. 646].

ЗНАЧЕНИЕ СОБСТВЕННОЕ ЛИНЕЙНОЙ ПОДСТАНОВКИ

В XVIII в. это понятие присутствует неявно при решении многих проблем — у **Эйлера**, **Сегнера** (1755) и др. В явном виде оно появляется **Лагранжа**, а затем у **Лапласа** в теории систем линейных дифференциальных уравнений.

ЗНАЧЕНИЕ СРЕДНЕЕ

Уже в III в. до н. э. вавилонские астрономы применяли средние значения наблюдаемых величин. "Syntaxis" **Птолемея** содержит изложение всех известных к тому времени сведений, исходя из них, **Гиппарх** поставил вопрос: постоянна ли продолжительность тропического года? **Тихо Браге** использовал арифметические средние, чтобы исключить систематические ошибки. Это же делал **Кеплер** [225, с. 121].

И

i

Это обозначение для $\sqrt{-1}$ ввел **Эйлер** в 1777 г. по первой букве латинского слова *imaginarius* (воображаемый, мнимый). Прочно в обиход обозначение вошло благодаря **Гауссу**, который принял его в 1801 г.

Обозначение орта перешло из теории кватернионов, где мнимая единица, единичный вектор и оператор поворота — одно и то же.

i в формулах интегрального исчисления — это сокращение слова индексы.

ИДЕАЛ

Наряду с идеальными числами **Куммера** **Дедекинд** ввел понятия идеала и главного идеала (1870). **Дедекинду** принадлежат и термины, которые он ввел по аналогии с гауссовой терминологией квадратичных форм. Понятие двустороннего идеала определено **Картаном** (1898). Понятия левого и правого идеалов появляются в работе **Э. Нётер** и **Шмейдлера** (1920), посвященной кольцам дифференциальных операторов.

ИЗО

Греческое ἴσος, входящее во многие математические термины, означает «равный, одинаковый, подобный»; *изоклина* — от ἴσος и κλινω (наклоняю) — «линия равного наклона», понятие и термин введены **И. Бернулли** в 1694 г.; *изопериметры* — от ἴσος и περιμετρον — «обвод, периметр» — таким образом, перевод — «равного периметра <фигуры>»; *изотропный* — от ἴσος и τροπος — «направление».

Изохрона — от ἴσος и χρονος (время). В 1687 г. последователи **Декарта** предложили **Лейбницу** задачу об изохроне. Первое решение, устанавливающее, что искомая кривая — циклоида, появилось в печати в 1690 г. Задачу решили **Лейбниц**, **Якоб** и **Иоганн Бернулли**. *Изохроной* кривую назвал **Пардис**.

Изоморфизм Существование этого свойства впервые подметил **Декарт**, он предвидел возможность «отождествлять» изоморфные отношения или операции (**Декарт** называл их «подобными»). Современный термин был введен в теорию групп в середине XIX в. и происходит от греческих ἴσος и μορφή (вид, образ). Однако первоначально в этот термин вкладывался другой смысл. Привычная ныне терминология утвердилась после основополагающей работы **Эмми Нётер** (1918). [19, с. 34, 120]; [190, **3**, с. 139].

ИЗОЛИРОВАННЫЙ

Термин происходит от французского *isolé* (отдельный).

ИКОСАЭДР

Слово состоит из греческих ἔιχοσι (двадцать) и ἕδρα (основание).

Буквальное значение — «двадцатигранник». Полагают, что название дано **Теэтетом**, который открыл его. Термин есть у **Евклида**, **Герона**. [216].

ИНВАРИАНТ

Впервые тот факт, что есть свойства, которые сохраняются при проектировании, заметил **Кеплер**, который рассматривал непрерывные преобразования конических сечений. **Дезарг** показал существование инвариантов и открыл ряд теорем (1639). Следующие теоремы установил **Б. Паскаль** (1640). Однако проективная геометрия оставалась частью евклидовой.

Теорема об инвариантности формы дифференциала функции приведена среди других правил вычисления дифференциалов уже в первом мемуаре **Лейбница** по дифференциальному исчислению (1684).

О существовании неизменяющихся величин писал **Лагранж** (1773). Дифференциальные инварианты появляются в дифференциальной геометрии и в теории дифференциальных уравнений. Среди ученых, которые первыми стали заниматься ими, надо назвать **Римана**, который дал обобщение гауссовой кривизны (1854), затем **Ламе** (1859), **Бельтрами** (1866), **Кристоффеля** (1869), **Липшица** (1869).

Однако основой теории инвариантов явилось учение об определителях. Это побудило **Кэли** первоначально (1846) дать инвариантам название «гипердетерминантов» (сверхдетерминантов). **Сильвестр** ввел термин *инвариант*, составленный из латинских *in* (отрицание) и *varians* (изменяющий). Буквальный смысл — «не изменяющий своего значения».

К теории групп понятие инварианта привлек впервые **Софус Ли** (1871–1884). Его друг **Феликс Клейн** провозгласил в «Эрлангенской программе» манифест — каждая геометрия изучает инварианты соответствующей группы преобразований.

Следующий период начинается работой **Риччи** и **Леви-Чивита** по «абсолютному» дифференциальному исчислению (1887, 1901). «Интегральный инвариант» — понятие и термин впервые ввел **Штуббс** (1843). [198, I_1, с. 322]; [77, с. 195, 200].

ИНВЕРСИЯ

Латинское *inversio* означает «переворачивание, обращение». Термин в теорию преобразований ввел английский математик **Штуббс** (1843).

Введение преобразования инверсии приписывают немецкому математику **Магнусу** (1830–1832). Однако его применял и получил этим методом многочисленные результаты **Штейнер** (с 1824 г.), которого называли величайшим геометром со времен **Аполлония**. Кстати, по некоторым свидетельствам заключают, что и **Аполлоний** знал об инверсии. Дальнейшие исследования принадлежат **Лиувиллю** (1847), **Мёбиусу** (1855), **Серре** (1864), **Кэли** (1871). Инверсией в геометрии шара занимались **Магнус** (1832) и **Клейн** (1872).

К *инверсии* в комбинаторике пришел **Крамер** (1750), он называл это понятие «беспорядком» (dérangement). [198, $III_{2.1}$, с. 227]; [34, с. 53]; [181, с. 246–260].

ИНВОЛЮЦИЯ

Начатки теории инволюций есть у **Паппа**, подробно инволюции изучил создатель проективной геометрии **Дезарг** (1639). Латинский термин involutio означает «скрученное состояние молодых листьев». Это — единственный термин, оставшийся от множества названий, которые вводил **Дезарг**, желая ввести новую «наглядную и естественную» терминологию: прямую, на которой расположен ряд точек, он называл «деревом», точку отсчета отрезков — «стволом», отрезки — «ветвями» и т. д. [198, $III_{1.1}$, с. 430]; [163, с. 97].

ИНДЕКС

Латинское *index* означает «доносчик, показатель, указатель, титул, надпись».

Общепринятые y_i, ΔS_i и т. д. получились как сокращения выражений «все y с индексами...» по первой букве слова *index*. По-видимому, впервые индексы применил **Стевин** в виде $\dot{B}, \ddot{B}, \ldots$ (1634). В форме $2C$, $3C\ldots$ индексы появились у **ван Схоутена** (1649). Порядок букв и цифр изменил **Ньютон** (1717).

Лейбницу принадлежит термин *indice* (1687); он стал пользоваться индексами, «творчески переработав» обозначение **Декарта**, который обозначал точки цифрами. С усовершенствованием книгопечатания индексы стали ставить ниже строки, как это делал в рукописях **Лейбниц**. Он употреблял также надчеркнутые буквы. В 1678 г. у **Лейбница** впервые появляются два индекса.

Индексирование с помощью штрихов встречается у **Коутса**, ученика **Ньютона**. В качестве дальнейших отличительных индексов **Монж** применял обозначения K'', $'K''$, K''' и т. д. (1770). Двойные индексы (в теории детерминантов) вошли в употребление благодаря **Якоби** (с 1835 г.).

Нумерацию теорем, аксиом, формул и т. п., при которой один из индексов указывает раздел, где они встречаются, т. е. индексирование, без которого немыслима ни одна диссертация и ни одна монография, придумал **Пеано**. [34, с. 254]; [226, II, с. 45]; [65, **2**, с. 52]; [152, III, с. 198].

ИНДЕКС СРАВНЕНИЯ

Это важное понятие теории сравнений (вместе с термином) ввел **Гаусс** в 1801 г. Он установил также основные свойства индексов. Таблицы индексов составлялись многими авторами. В 1839 г. таблицы индексов простых чисел, меньших 1 000, были опубликованы **Якоби**.

ИНДУКЦИЯ

Латинское *inductio* буквально означает «наведение».

Термин *математическая индукция* впервые появился в 1838 г. в статье **де Моргана** «Индукция (математическая)» в Британской Энциклопедии. Его многократно употреблял **Тодгентер** в своем популярном учебнике алгебры, после чего термин стал общепринятым. Слово *индукция* было введено в математику **Валлисом** («Всеобщая Арифметика», 1656), который позаимствовал термин из философии, где он означал переход от частного к общему. От **Валлиса** до **де Моргана** термин употреблялся случайно в обоих смыслах. Однако **де Морган** ввел название, которое четко отделяет математический смысл от философского. В течение многих десятилетий употреблялись различные названия: долгое время — «принцип **Бернулли**»; **Гаусс** писал: "eine bekannte Methode"; **Якоби** считал, что это «метод **Кестнера**» (иногда это название употреблял и **Гаусс**). Во французской литературе термин был принят очень поздно: еще **Пуанкаре** писал о récurrence.

В неявном виде метод использовался уже в «Началах» **Евклида**, в совершенно отчетливой форме он встречается в работе **Паскаля** о комбинаторике (ок. 1665). Может быть, **Паскаль** знал, что такой метод был у **Мавролико** (1575). В дальнейшем выяснилось, что принцип был сформулирован **Леви бен Гершеном** (1321). [65, **2**, с. 84]; [64, XIV, с. 97]; [187, **3**, с. 341]; [186, с. 331].

ИНЕРЦИЯ

Этот термин ввел в математические науки **Кеплер** (1609). Латинское inertia означает «неспособность, негодность, бездействие, лень». В алгебре это слово применил **Сильвестр**, доказав теорему об инерции квадратичных форм (1852). Последнее свойство было известно **Якоби** (1847). [198, I_2, с. 597].

ИНТЕГРАЛ

В первой половине XVII в. при вычислении площади фигуры операцию записывали словами: «совокупность всех неделимых» (omnes lineae). Такой способ выражения широко распространился благодаря сочинению **Кавальери** "Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota" («Геометрия, развитая некоторым новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин», 1635). В «Механике» **Валлиса** впервые встречаются сокращения вроде *omn w*, где *w* означает неделимую.

Точно так же писал **Лейбниц** в сохранившихся заметках (1675). Ради сокращения записи он вместо *omn w* вводит начальную букву слова Summa, которая по начертанию того времени писалась как наш знак интеграла. Первоначально **Лейбниц** писал $\int y$, но уже через месяц он стал писать $\int y\,dx$ — это уже не сумма неделимых, а сумма площадей бесконечно малых прямоугольников. **Лейбниц** систематически придерживался нового обозначения, после того как заметил его инвариантность относительно аргумента. В печати современное обозначение появилось в 1686 г. В это же время **И. Бернулли** обозначал операцию интегрирования буквой I по первой букве введенного им названия *интегральное исчисление*. Впоследствии этот символ сохранился для обозначения конкретных интегралов: I_1, I_2 и т. д.

Ньютон, так же как и его учитель **Барроу**, по-видимому, рассматривал интегрирование как задачу (решение уравнения $\dot{x} = f(t)$), а не как операцию, поэтому у него нет ни названия для интеграла, ни последовательного обозначения, за исключением нескольких случаев, где он пишет $\boxed{f(t)}$ или $\square f(t)$. В 1704 г. он вводит обозначение для интеграла $\overset{|}{x}\,(t)$, которое даже в Англии было признано неудачным. В математической литературе Англии знак $\int$ появился в 1693 г. (затем в 1701) и был принят немедленно. Лишь отдельные английские математики (среди них **Симпсон**) до половины XVIII в. вместо знака интеграла писали F (от слова «флюента»). Остальные авторы (даже те, которые в дифференциальном исчислении сохранили обозначения **Ньютона**) воздали должное символике **Лейбница** (например, **Муавр**).

Слово *интеграл* употребил впервые **Я. Бернулли** в 1690 г. Возможно, термин образован от латинского *integer* (целый). По другому предположению, **Я. Бернулли** произвел термин от integro (приводить в прежнее состояние, восстанавливать), действительно, восстанавливается первообразная функция. Как бы то ни было, термин был обсужден **И. Бернулли** и **Лейбницем** и «принят» в 1696 г. Тогда же **И. Бернулли** предложил название *интегральное исчисление* (calculus integralis). Он пояснил, что по его мнению дифференциал это бесконечно малая часть целого, интеграла. Сам **Лейбниц** предлагал название *calculus summatorius* (сумматорное, суммирующее исчисление) и пытался убедить предпочесть этот термин. [33, с. 72–73]; [20, с. 176–178]; [142, с. 132]; [185, II, с. 182, 245–247]; [120]; [107].

ИНТЕГРАЛ КРАТНЫЙ

Понятие введено в середине XVIII в., сначала в форме «неопределенного интеграла»: $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ означает решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

Но уже в 1769 г. **Эйлер** установил понятие двойного интеграла по ограниченной области и на различных примерах показал, как его вычислять и применять. Ему принадлежит и название *двойной интеграл*.

Понятие тройного интеграла ввел **Лагранж**. [19, с. 239].

ИНТЕГРАЛ КРИВОЛИНЕЙНЫЙ

Первый криволинейный интеграл встречается в работе **Клеро** (1743); здесь же приводится условие независимости от пути интегрирования (и условия полного дифференциала).

Интегрировать функции комплексной переменной пытались **Эйлер**, **Д'Аламбер**, **Лаплас**, не имея еще математической теории. Криволинейные интегралы в общем виде ввел **Коши** в 1825 г. Еще в конце XIX в. употреблялось (среди прочих) такое обозначение для интеграла от комплекснозначной функции комплексной переменной:

$$\int_{(a_0,b_0)}^{(a,b)} (X,Y)(dx,dy).$$

Выражение *путь интегрирования* применительно к криволинейному интегралу введено в математический язык французским математиком **Пюизо** в 1850 г. **Мёбиус** первым стал различать «направление обхода». Интеграл назвали *криволинейным* **Карл Нейман** и **Шарль Эрмит**.

Знак $\oint$ для указания того, что интеграл берется по замкнутому контуру, предложил в 1923 г. **Крамерс**. Это обозначение имело «предшественника» в книге **Уилларда Гиббса** (1901), где использовалось начертание $\int\limits_0$.

[198, II_1, с. 1020]; [198, II_2, с. 11]; [155, с. 206].

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Первая публикация **Анри Лебега** относится к 1901 г.; в следующем году появилась его диссертация "Intégral, longueur, aire" и, наконец, в 1904 г. "Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives" («Лекции об интегрировании и отыскании примитивных функций») с изложением теории и очерком развития понятия интеграла. В первых работах **Лебег** использовал мероопределение **Бореля** ("Leçons sur la théorie des fonctions" появились в 1898 г.) и считал, что его теория меры завершает теорию **Бореля**.

За несколько лет до **Лебега** аналогичную процедуру интегрирования применял **Граве** (только в конкретных примерах). Примечательно, что интеграл **Лебега** постигла буквально та же участь, что и интеграл **Стилтьеса**. Этот интеграл был почти неизвестен до статьи **Рисса** (1909), в которой **Рисс** нашел общий вид линейных функционалов в пространстве C. К интегралу **Лебега** всеобшее внимание привлек также **Рисс**, применив его в функциональном анализе; он же ввел обозначения L^2, L^n. [107, с. 288]; [120, с. 56–87]; [175, **27**, с. 273].

ИНТЕГРАЛ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ

Первым, кто указал, что свойства кривой могут быть выведены из свойств ее касательных, был **Дебон**, именно такую задачу он поставил перед **Декартом** в 1638 г. Поэтому интегральное исчисление называлось «обратным методом касательных» («обратным» по отношению к дифференциальному исчислению). Принято считать, что взаимная обратность дифференцирования и интегрирования установлена **Исааком Барроу**, однако сам **Барроу** называет своими предшественниками **Галилея** и **Торричелли**, ему, **Барроу**, оставалось только исключить кинематический элемент, чтобы придать теореме общность.

Братья **Якоб** и **Иоганн Бернулли** познакомились с исчислением **Лейбница** и обратились к нему с вопросами. Лейбниц ответил на письмо через два года. К этому времени Бернулли уже сами «воссоздали» исчисление. Они восприняли интегрирование как операцию, обратную дифференцированию. Именно таким был и подход **Ньютона**, а также **Эйлера** (ученика **И. Бернулли**). **Лейбниц** вначале пришел к понятию определенного интеграла, в статье 1694 г. он впервые ввел аддитивную постоянную и таким образом четко выделил неопределенный интеграл. У **И. Бернулли** произвольная постоянная появилась несколько раньше в 1691/92 гг. (опубликовано в 1742).

При обсуждении с **Гольдбахом** проблемы интегрируемости дифференциального бинома **Эйлер** заявил о необходимости расширить понятие *интегрируемость*. В его время под этим понимали только выражение результата через алгебраические функции. **Эйлер** предложил считать интегрируемыми функциями и те, интегралы от которых выражаются в логарифмах (а позднее он добавил и круговые функции).

В XVIII в. были созданы почти все известные методы интегрирования элементарных функций в конечном виде. **Кавальери** доказал формулу интегрирования степенной функции для первых девяти степеней x. Эту формулу знал и **Ферма** (его труды опубликованы только в 1679 г.). **Ферма** (ок. 1640) и **Паскаль** (1656) применили интегрирование по частям и подстановками. Интегрирование рациональных алгебраических дробей разложением на простейшие дроби применял **И. Бернулли**. Метод был усовершенствован **Эйлером**, **Коши** и другими. Они упростили способы определения коэффициентов. **Ньютон** мог заменить любую функцию ее разложением в степенной ряд и, таким образом, ему было достаточно одного-единственного интеграла от x^n.

Прежде чем появились таблицы интегралов, вместо одной формулы приводили несколько конкретных интегралов, откуда было ясно общее правило. Первые таблицы интегралов (в курсах **Эйлера**) были составлены по сугубо формальному принципу: после

$$\int a\,dx = ax, \qquad \int ax\,dx = \frac{a}{2}x^2, \qquad \int ax^2\,dx = \frac{a}{3}x^3$$

приведены, например,

$$\int \frac{dx}{1+x} = \ldots, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2}dx = \ldots, \qquad \int \frac{dx}{1+x^3} = \ldots, \qquad \int \frac{dx}{1+x^4} = \ldots .$$

Таким образом, интегралы

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{a^4+x^4}$$

попали в разные классы.

Коши приблизил таблицы к современному виду, но все-таки даже в 1878 г. мы находим не таблицу интегралов, а сводку, обучающую "intégration immédiate" («непосредственному, немедленному интегрированию»):

$$\int f'(x^n)x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}f(x^n), \qquad \int f'(a^x)a^x\,dx = \ldots .$$

Наконец, в учебниках начала XX в. мы видим привычные таблицы интегралов (но не производных!).

Эйлер употреблял термины «общий и частный интегралы» для неопределенного интеграла и конкретной первообразной.

Методы графического интегрирования в течение 10 лет (с 1878 г.) развивал бельгийский математик **Юниус Массо**, его работы собраны в одном томе "Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications" (1887). [154]; [33, с. 72–73].

ИНТЕГРАЛ НЕСОБСТВЕННЫЙ

Около 1350 г. **Николя Орем** суммировал бесконечную геометрическую прогрессию и показал, что существуют неограниченно протяженные фигуры с конечной площадью.

Первые несобственные сходящиеся интегралы вычислили **Торричелли** (1643) и **Роберваль** (1642), а затем **Ферма**. При этом **Торричелли** вычислил несобственный интеграл с бесконечным пределом, а **Роберваль** — вначале интеграл от разрывной функции, а затем и первый интеграл. Работа **Эванжелисты Торричелли** произвела сенсацию. Используя «неделимые», он даже установил, при каких условиях тело вращения имеет конечный объем, т. е. в некотором смысле нашел «условия сходимости» интеграла с бесконечным пределом.

Парадоксы, возникающие при вычислении интегралов от разрывных функций, были отмечены **Эйлером** и **Д'Аламбером** (при этом **Эйлер** обращался с несобственными интегралами, как с обыкновенными). **Лагранж** посвятил им мемуар (1775). Вопрос приобрел четкость и ясность у **Коши** (результаты 1814 г. опубликованы в 1823 г.). **Коши** ввел понятие главного значения несобственного интеграла — *valeure principale* — предложив для него это название (**Риман** и **Кронекер** оспаривали необходимость введения этого понятия). Признаки равномерной сходимости интегралов доказал **Валле-Пуссен** (1892).

Слово *несобственный* вошло в математику с работами **Штуди** (1901). **Харди** предложил название *интеграл с бесконечным пределом* (1902). [154]; [155]; [198, II_1, с. 1003].

ИНТЕГРАЛ ОПРЕДЕЛЕННЫЙ

Греческие математики использовали метод исчерпывания при нахождении площадей криволинейных фигур. Когда в математике появился интеграл **Римана**, это было возрождением процедуры **Архимеда**. Хотя, правда, верхнюю и нижнюю интегральные суммы составил в 1659 г. болонский математик **Менголи**, решая задачи квадратур. Он доказывал, что

$$s_n = \sum m_i \Delta x_i \quad \text{и} \quad S_n = \sum M_i \Delta x_i$$

имеют общий предел, а следовательно, тот же предел имеет и

$$\sigma_n = \sum f(x_i) \Delta x_i$$

(конечно, у него были иные обозначения).

В математике нового времени понятие определенного интеграла возникло в работах **Ферма**, **Декарта**, **Паскаля**, **Джеймса Грегори**, затем **Ньютона**, **Лейбница** и других. **Ферма** значительно продвинул вычисление квадратур, находя предел интегральных сумм. Но этот его метод не мог привести к *исчислению*, поскольку для решения каждой отдельной задачи требует изобретения нового приема.

Когда пишут, что **Роберваль** и **Паскаль** впервые проинтегрировали некоторые тригонометрические функции или что **Грегори** знал результат

$$\int_0^a \sec x \, dx = -\log(\sec a - \operatorname{tg} a)$$

или что **Кавальери** удалось проинтегрировать многочлены второй, третьей, четвертой степеней (а затем установить по аналогии $\int x^m \, dx$), то это означает, что ученые умели вычислять площадь под соответствующей кривой. Успех был обеспечен удачными комбинациями слагаемых или искусными преобразованиями; **Кавальери**, например, воспользовался «круговыми неделимыми», т. е. некоторым подобием полярных координат. Однако, как ни близко подошли **Паскаль**, **Роберваль**, **Сен-Винсент** к понятию определенного интеграла, у них не было ни символики, ни *исчисления*. Кроме того, существовала непреодолимая преграда — проблема однородности: как может «сумма линий» составить площадь?

По-видимому, впервые понятие о современном изложении дано в работе **Валлиса** “Arithmetica infinitorum” (1656), где был арифметизирован предельный переход.

О переходе **Лейбница** в период 1675–1686 гг. от неделимых (в духе **Кавальери** и **Валлиса**) к $\int y\,dx$ уже сказано (см. **интеграл**). В статье "Supplementum geometricae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum, similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentum conditione" (1693) **Лейбниц** выражает связь между интегралом (как площадью) и производной (как тангенсом угла, образуемого касательной с осью координат) и в геометрической форме доказывает формулу, называемую ныне *формулой* **Ньютона—Лейбница.** В «Методе флюксий» **Ньютон** высказал теорему тоже применительно к задаче квадратуры кривых.

К аналитическому определению определенного интеграла подошел **Эйлер** (хотя основным у него был неопределенный интеграл), который рассматривал суммы вида

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

Именно это определение повторили **Лакруа** (1797) и **Лежандр** (1811).

Хотя прошло около ста лет после работ **Лейбница** и **Ньютона**, различие в подходах к интегральному и дифференциальному исчислений не сгладилось, и **Эйлер** писал: «У англичан дифференциальное исчисление называется методом флюксий; сообразно с этим интегральное исчисление называется обратным методом флюксий... Это отличие в наименованиях настолько укоренилось, что вряд ли следует ожидать, чтобы когда-нибудь было достигнуто согласование». И через несколько страниц **Эйлер** привлекает внимание к принципиальной трудности — однородность! «Кстати сказать, знак $\int$ обычно толкуется как начальная буква слова Summa. Это толкование возникло из мало подходящего представления, согласно которому интеграл рассматривается как сумма всех дифференциалов, и допустить его можно не с бо́льшим правом, чем широко распространенное представление, будто линии состоят из точек».

Эйлер называл нижний предел *terminus a quo* («предел, от которого»), а верхний — *terminus ad quem* («предел, до которого»). **Лаплас** ввел термины *пределы интегрирования* и *определенный интеграл* (1782, опубликовано в 1785). Отправляясь от соображений **Эйлера**, **Лакруа** привел аналитические определения интегралов (определенного и неопределенного) в "Traité du calcul differentiel et intégral" (1797–1800).

Вначале пределы интегрирования указывались только на словах. Впервые написание пределов в самом интеграле встречается у **Эйлера** (в его «Интегральном исчислении», 1768–1770) в форме

$$\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} \text{ab} & x = a \\ \text{ad} & x = b \end{bmatrix}.$$

Такая запись затем используется **Саррюсом** и **Шмидтеном** (1819, 1820). Современное обозначение определенного интеграла появляется в знаменитой «Аналитической теории тепла» **Фурье** (1822), он использовал такую символику с 1816 г. Обозначение было оценено тотчас же и повторяется уже в статьях 1822 и 1823 гг. (**Френель**, **Коши**, **Пуассон**). Наконец, **Саррюсом** был предложен *знак подстановки* (термин **Саррюса**) пределов интегрирования $\Big|_b^a$ в несколько ином виде, он писал $\Big[_a^b$. Его статья 1823 г. не привлекла внимания, а после статьи 1848 г. обозначение получило признание.

В русском переводе «Лекций» **Коши** *(***В. Я. Буняковского***, 1831) соответствующий* раздел озаглавлен «Об определенных (междупредельных или частных) интегралах». Первый термин быстро стал общепринятым (отметим, что «неопределенный» интеграл при этом отсутствовал!).

Свойства определенных интегралов

$$\int_a^b \sum f_i\,dx = \sum \int_a^b f_i\,dx, \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

конечно, использовались издавна (например, они приведены в статье **Эйлера**, опубликованной посмертно в 1785 г.). При систематическом изложении теории их впервые выделил **Дирихле** (так же как и свойство $\int_a^b = -\int_b^a$). Однако в курсы математического анализа они вошли после работы **Дюбуа Раймона** (1876). Особняком стоит теорема о среднем. Теорема была известна **Ньютону**. Первая теорема о среднем в виде

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

принадлежит **Дирихле** *(1837). Вторая теорема дана* **Бонне** *(1849).*

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу была известна **Барроу** в 1667 г. Ее привел **Муаньо** (1844) со ссылкой на **Коши**.

В лекциях 1854 г. **Риман** строил интегральные суммы $\sum m_i\Delta x_i$ и $\sum M_i\Delta x_i$ и доказывал, что при $\Delta x \to 0$ нижняя сумма не убывает, а верхняя не возрастает, таким образом, он ввел процедуру построения *интеграла* **Римана**. *Публикация относится к 1868 г., статья* "Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe" вышла после смерти автора. Она привлекла общее внимание математиков и стимулировала интенсивное изучение непрерывности функций действительной переменной, создание теории меры и т.д. В 1875 г. несколько математиков Англии, Франции, Германии и Италии с разной степенью точности и подробности ввели верхние и нижние интегральные суммы (а также верхний и нижний интегралы). Более того, в 1881 г. студент **Вольтерра**, не знакомый с этими работами, также ввел *нижний* и *верхний интегралы*, и именно его названия и обозначения, $\underline{I}$ и $\overline{I}$, употребляются сегодня. Современные обозначения $\sum m_i(x_{i+1}-x_i)$, $\sum M_i(x_{i+1}-x_i)$ ввел **Дарбу**. Термин *суммы* **Дарбу**, по-видимому, впервые стал употреблять **Жордан**. [198, II_1, с. 74, 90, 97–99]; [64, VII, с. 494]; [185, II, с. 249].

ИНТЕГРАЛ ПОВЕРХНОСТНЫЙ

Впервые такие интегралы появились в «Аналитической механике» **Лагранжа** (1788), правда в настолько нечеткой форме, что не всегда различались двойной и поверхностный интегралы (даже в XX в. встречается еще выражение «двойной интеграл по поверхности»). В своих ранних работах **Лагранж**, а затем **Лаплас** решают только те задачи, которые сводятся к двойным интегралам с постоянными пределами. Понятие становится более ясным у **Гаусса** в "Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum methodo nova tractata" («Теория притяжения эллиптических сфероидов, изложенная новым способом», 1813). Здесь **Гаусс** вычисляет поверхностные интегралы непосредственным суммированием, что делает абсолютно наглядным это понятие (причем учитывается ориентация поверхности!). Работа содержит и «формулу **Остроградского**» (для конкретной задачи). [149, **17**, с. 232–245].

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

Интеграл, связанный с именем этого голландского математика, появился в действительности на полвека раньше его работы. **Коши** изложил основы теории «сосуществующих величин» (1841) и фактически ввел интеграл **Стилтьеса** в гораздо более общем виде, чем это сделал сам **Стилтьес**.

В 1894 г. **Стилтьес** опубликовал мемуар "Recherches sur les fractions continues" («Исследование о непрерывных дробях»), где в связи с вопросом довольно частного характера поставил и с редким изяществом решил совершенно новые проблемы теории аналитических функций действительной переменной. Здесь он получил «интеграл **Стилтьеса**» (не самого общего вида), но не стал дальше изучать этот интеграл. В последующее десятилетие это понятие, по-видимому, не обращало на себя внимания. Оно приобрело важное значение, когда в 1906 г. **Гильберт** и его школа начинают развивать спектральную теорию операторов.

В 1901 г. **Г. Ф. Вороной** сформулировал свое понятие интеграла, очень близкое к интегралу **Стилтьеса**. Впоследствии он, очевидно узнав о работах **Стилтьеса**, прекратил исследования в этом направлении, а в своих теоретико-числовых работах стал систематически использовать этот интеграл.

К 1909 г. было сформулировано понятие интеграла **Стилтьеса**, изучены его свойства и найдены разнообразные приложения. Новая волна интереса к этому интегралу была вызвана статьей **Рисса**, в которой доказано, что всякий линейный функционал в пространстве непрерывных функций выражается интегралом **Стилтьеса**. Понятие сразу же стало предметом многочисленных исследований, которые продолжаются до настоящего времени. В 1928 г. **Лебег** проанализировал забытые работы **Коши** (о которых говорилось вначале) и выявил значение его идей. [107]; [175, **31**, с. 171].

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Переход от тригонометрического ряда к интегралу **Фурье** был совершен **Фурье** в мемуаре "Mémoire sur la propagation de la chaleur", который был премирован Французской академией наук (1811) и оставлен в архивах

Академии. В то время как разложение в ряд по синусам и косинусам было известно великим математикам XVIII в., открытие интеграла **Фурье** — целиком **его** заслуга; он открыл новую главу в анализе. В течение ближайшего десятилетия к этому же открытию пришли **Коши** и **Пуассон** при обсуждении движения волн. После того, как **Коши** увидел знакомые формулы в рукописях **Фурье**, он безоговорочно признал его приоритет и приводил формулы с непременной ссылкой на **Фурье**. Название стало употребляться учениками **Фурье** и с 1817 г. стало общеупотребительным. В 1894 г. **Кронекер** ввел интеграл **Фурье** для комплексной переменной. [198, II_1, с. 804, 1086]; [77, с. 103].

ИНТЕГРАЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ

Название (слишком узкое) связано с тем, что такими интегралами выражается длина дуги эллипса. Тот факт, что эти интегралы не берутся в конечном виде, показал только **Лиувилль**. Название *псевдо-эллиптические интегралы* предложил в 1874 г. **Мале**, профессор в Дублине.

В 1691 г. **Я. Бернулли** рассматривал спрямление лемнискаты и параболической спирали, он сформулировал некоторые теоремы об эллиптических интегралах. Геометрическими проблемами, которые содержат в себе зародыши теоремы сложения эллиптических интегралов, занимался с 1714 г. граф **Фаньяно**. Он был «научным экспертом» папы Бенедикта XIV в вопросах безопасности купола Святого Петра в Риме. В воздаяние папа обещал опубликовать его математические труды. По различным причинам публикация затянулась до 1750 г.

В 1750 г. **Фаньяно** отправил “Produzioni matematiche” в Берлинскую академию наук, где его труд был отдан на отзыв **Эйлеру** (23.XII.1751). Этот день **Якоби** считает днем рождения эллиптических функций. В самом деле, изучение работ **Фаньяно** послужило толчком к важнейшим исследованиям **Эйлера**, которому принадлежит основная теорема о сложении интегралов и первая их классификация. К интегралам второго рода **Эйлер** пришел в 1754 г.

Следующим шагом была книга **Лежандра** «Упражнения по интегральному исчислению» (1811). **Лежандр** ввел названия *интегралы первого*, *второго* и *третьего рода* (1786). Очень рано самыми различными элементами теории эллиптических интегралов и эллиптических функций владел **Гаусс** (1799–1800), который не публиковал своих результатов. Однако, после того как новые идеи годами мирно покоились в бумагах **Гаусса**, они внезапно возникли в работах **Абеля** и **Якоби**, которые в яростном соревновании оспаривали славу их открытия (1826–1828). **Гаусс** писал: «**Абель** пошел точно по тому же пути, который я проложил в 1798 г., отсюда нечего удивляться большому сходству результатов. К моему удивлению сходство распространяется даже на форму и отчасти на выбор обозначений, так что иные его формулы как будто списаны с моих».

Ожесточеннейшая конкуренция оборвалась со смертью **Абеля**. **Якоби** продолжал работу один, в признание достижений **Абеля** он дал названия *абелевы трансцендентные*, *абелева теорема*, хотя вообще он не склонен был к высокой оценке чужих работ. **Вейерштрасс** в честь **Абеля** обозначил эллиптическую функцию, открытую им, через *Al*. Эта функция получила особенное распространение благодаря знаменитой в то время работе **Брио** и **Буке** "Théorie des fonctios doublement périodiques et notamment des transcendents elliptiques avec reférences aux travaux des mathématiciens allemands" («Теория двоякопериодических и в частности эллиптических функций с ссылками на работы немецких математиков», 1859), можно отметить, что в этой работе обозначение *Al* связывается с немецким словом Alles. [198, II_2, с. 183, 343]; [101, с. 29]; [77, с. 72, 81, 141, 142]; [187, **3**, с. 220].

ИНТЕГРАФ

Название происходит от *integral* и греческого γραφω (пишу, рисую).

Первое приспособление для вычерчивания графика функции по графику ее производной придумано **Жмурко** (60-е гг. XIX в.). Он был профессором математики в Львовском университете и в Львовском политехническом институте. Ему принадлежит также идея интегратора. Первые действующие модели создал польский ученый **Абданк-Абаканович** (1878 и 1882). Он же дал название устройству — *интеграф* [198, II_1, с. 131–134].

ИНТЕРВАЛ

Термин происходит от латинского *intervallum* — «промежуток, расстояние».

Современные обозначения появились впервые в 1909 г. в книге немецкого профессора математики **Г. Ковалевского** (работавшего в Лейпциге, затем в Праге).

В "Gründzuge der Differential- und Integral-rechnung" (1909) обозначения появились в виде (a, b) и $\langle a, b \rangle$, а также $\langle a, b)$ и $(a, b\rangle$. В 1921 г. **Хан** несколько изменил их, заменив скобки < > на прямые [ ], которые и вошли прочно в математику. Противопоставление [ ] и] [введено, по-видимому, **Бурбаки** ("Théorie des ensembles", 1956). [198, II_3, с. 860].

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Термин происходит от латинского *interpolare* — «подделывать, подновлять». Это слово первоначально означало подделку рукописи, т. е. введение в рукописный документ одного или нескольких слов, не находившихся в подлиннике. Слово в его современном смысле впервые употребил **Валлис** ("Arithmetica Infinitorum", 1656) при составлении астрономических и математических таблиц.

Линейной интерполяцией пользовался уже **Птолемей**.

Методом, подобным интерполированию, пользовался **Бриггс**, но интерполирование, основанное на представлении функций полиномами, было впервые введено **Джеймсом Грегори** в 1670 г. *Интерполяционная формула* **Ньютона** опубликована в "Methodus Differentialis" (1711), но упоминание о ней есть в письме от 1676 г. Уже один тот факт, что эта проблема оказалась по силам и **Грегори**, свидетельствует о глубоком даровании его, которое оценено только в наше время. Свою интерполяционную формулу **Ньютон** считал «одной из самых значительных проблем, которую я только мог надеяться решить»; от интерполяционной проблемы **Ньютон** пришел к биному и в конечном счете к своему интегральному исчислению. Естественно, что он так высоко ценил «источник».

Ньютон, так же как и **Грегори**, обозначал разности буквами $d, f, h, \ldots$. Обозначения $\Delta f, \Delta^2 f, \ldots$ появились у **Эйлера** (1755) под влиянием **Лейбница** («Замечательный символизм и т. д.» 1710). Формула **Лагранжа** была найдена **Варингом**, осталась неизвестной за пределами Англии и вновь изобретена **Лагранжем** в 1792 г. и опубликована в "Leçons élémentaires sur les Mathématique" (1795). Дальнейшее развитие теории связано с именами **Гаусса**, **Энке**, **Коши**, **Леверье**, **Чебышёва**. Независимо друг от друга **Рунге** (1904) и **Борель** (1903) показали на простых примерах, что рост степени интерполирующего многочлена не означает улучшения приближения. Строгая разработка теории интерполяции началась с работ **Хана** и **Фохера** (1918). [198, I_1, с. 229]; [198, II_1, с. 121]; [34, с. 221]; [226, II, с. 252].

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Латинское *interpretatio* означает «толкование, объяснение». Этот термин ввел в математику **Бельтрами**, назвавший *интерпретацией* систему образов на псевдосфере, на которой осуществляется геометрия **Лобачевского** (1868). **Клейн** опубликовал проективную интерпретацию плоскости **Лобачевского** ("Uber sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie", 1871). Указание на интерпретацию **Пуанкаре** были уже у **Бельтрами**; еще отчетливее они высказаны **Клейном** в его «Эрлангенской программе» (1872). Но в достаточно определенной, ясно выраженной форме эти идеи изложены **Анри Пуанкаре** (1882), с именем которого их и связывают. [67, II, с. 204].

ИНФОРМАЦИЯ

Впервые количество информации попытался оценить **Хартли** (1928). В следующем десятилетии появились работы французских математиков **Альфана**, **Куфиньяла**. В 1939–1940 гг. **Этьен Альфан** написал статью, которая была напечатана только в 1957 г. Работа возникла из задач статистической проверки гипотез, в ней предвосхищены многие понятия современной теории информации. Однако они стали достоянием науки, благодаря трудам **Шеннона**.

Первые шаги теории информации — статья **Шеннона** "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits" («Символический анализ релейных и переключательных схем», 1938); она является рефератом диссертации **Шеннона**. К этому времени относится решение основного вопроса — как измерить информацию. Статья **Шеннона** 1947 г., а затем его книга (в соавторстве с **Уивером** "The Mathematical Theory of Communication", 1949) содержали основные понятия — *информации*, *энтропии* — и основные теоремы. Таким образом, основы теории были созданы. **А. Н. Колмогоров** пишет: «В наш век возрастающей дифференциации человеческих знаний **Клод Шеннон** является исключительным примером соединения глубины отвлеченной математической мысли с широким и в то же время совершенно конкретным пониманием больших проблем техники. Его в равной мере можно считать одним из первых математиков и одним из первых инженеров последних десятилетий».

В следующие годы поток работ вызвал всестороннее развитие теории, проникновение в классическую математику и неожиданные приложения. В 1954 г. выходит первое общее руководство по теории информации. Работы **Макмиллана**, **Фейнштейна**, **Хинчина**, **Розенблат-Рота**, **Гельфанда**, **Яглома**, **Колмогорова** позволяют говорить о создании «абстрактной теории информации». [160]; [172]; [64, XIX, с. 167].

ИНЦИДЕНТНОСТЬ

Термин образован от латинского *incido* — «случайно падать во что-либо или на что-либо, попадать куда-либо». Такой «нейтральный» термин выбран для того, чтобы подчеркнуть взаимность рассматриваемого отношения. Название восходит **к Герману Грассману**. Затем отношение инцидентности детально изучалось **Шубертом**, которому принадлежат и термин (1874), и «формула **Шуберта**» (1876).

Одна из самых первых групп аксиом инцидентности сформулирована в 1899 г. итальянским математиком **Пиери**. [198, $\mathrm{III}_{2.1}$, с. 294].

ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ

Открытие иррациональных чисел — первоначально открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной — одни приписывают самому **Пифагору**, другие — некоторым пифагорейцам V в. до н. э. «Современное» доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ есть уже у **Аристотеля**.

Доказательство иррациональности $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}, \ldots$ принадлежит **Теодору** из Кирены (по свидетельству **Платона**).

Общее учение об иррациональностях создал **Теэтет**, ученик **Теодора**. Возможно, и терминология в теории иррациональностей введена **Теодором**. Целое рациональное число называлось αριθμος; а отношение отрезков, т. е. любое действительное число, — λογος. Греческое αλογος (не имеющие отношения), таким образом, относилось не к иррациональному числу, а к тем величинам, отношение которых выражалось иррациональным числом.

Современный термин появился как буквальный перевод греческого и образован из латинских *in* (*ir*) — отрицание и *ratio* — отношение. Термин ввел **Штифель** (1544). Патер **Михаил Штифель** предсказал конец света на 13 сентября 1533 г. Прихожане постарались завершить свои земные дела к этому сроку. Легко вообразить, каково пришлось **Штифелю** 14 сентября. Священника спасло только заступничество Лютера. Зато **Штифель**, пытаясь найти ошибку в своих расчетах, стал серьезно заниматься математикой и превратился в выдающегося ученого своего времени, который, однако, отказывался признавать иррациональности «настоящими» числами. **Стевин** активно отстаивал «равноправие» иррациональных чисел. До XVI в. иррациональные числа назывались «глухими, безгласными» или «непроизносимыми» (surdi). Распространено другое толкование этого термина, так как латинское ratio означает еще «разум»; убедительное опровержение перевода термина как «неразумное, нелогичное число» у **Ф. Клейна** («Элементарная математика с точки зрения высшей». Т. I). Термин, предложенный **Штифелем**, был принят не сразу, еще в течение долгого времени в ходу были оба термина: так, **Декарт** называл иррациональные числа nombres sours.

Вплоть до XVI в. иррациональности не считались подлинными числами. Важный шаг был сделан **Декартом**, который дал геометрическую интерпретацию иррациональным корням уравнения, а затем **Ньютоном**, сформулировавшим определение числа, которое включало и иррациональности. Математически строгая теория была создана только в конце XIX в. трудами **Дедекинда**, **Кантора**, **Вейерштрасса** и **Мерэ**. [226, II, с. 92–95]; [165, с. 232]; [64, XXV, с. 202–203]; [50, с. 141].

ИТЕРАЦИЯ

Название происходит от латинского *iteratio* (повторение), *iter* (опять).

Первые попытки изучения итераций сделаны **Эйлером** в 1778 г. Термин появился только в конце XIX в.

К

КАРДИОИДА

Открытие кривой приписывается голландскому математику **Коерсма** (в конце XVII в.). Название ввел итальянский ученый **Кастильон** в 1741 г. в статье "De curva cardioïde". Термин составлен из греческих καρδια (сердце) и εἶδος (вид, наружность), так что буквальный смысл названия — «сердцевидная, похожая на сердце» (поэтому термин состоит в родстве с «кардиограммой», «валокордином»). [34, с. 304].

КАТЕТ

Греческое καθετος означает «опущенный перпендикулярно, отвес». В Средние века словом *катет* называли высоту прямоугольного треугольника, в то время как его основанием была *гипотенуза*. В XVII в. слово начинает употребляться в современном смысле и широко распространяется в XVIII в.

В русском языке слово претерпевало много раз изменения: у **Магницкого** — *катетус* (1703); 1803 г. — *кафет* (очевидно, термин взят непосредственно из греческого языка); **Буняковский** — *катет* (1839); 1896 — *катéт*; **Даль** — *катета*. [45, с. 260]; [219].

КВАДРАНТ

Латинское *quadrantis* означает «четвертая часть». Слово заимствовано из немецкого языка в петровскую эпоху.

КВАДРАТ

Термин *quadratus* (четырехугольный) получился как буквальный перевод соответствующего греческого наименования. В России он появился в допетровскую эпоху: *квадратум* встречается в 1499 г. От него образованы «чисто русские слова» — *квадратный* у **Магницкого** (1703), *квадратический* в конце XVIII в. [113].

КВАДРАТРИСА ДИНОСТРАТА

Одна из многих трансцендентных кривых, открытых греками в поисках решения задачи о квадратуре круга и о трисекции угла. Изобретение ее приписывается **Гипию** из Элиды (420 г. до н. э.), занимавшемуся второй задачей. На возможность ее применения для решения первой задачи указал **Динострат**. После этого стали употребляться термины *квадрировать* — τετραγωνιζειν и квадратриса — τετραγωνιζονσα для любой кривой, которая используется при решении задачи о квадратуре круга.

Лейбниц ввел в употребление перевод этого термина на латынь quadratrix. Этой кривой занимались **Роберваль** (1636), **Ферма**, **Барроу** (1670), **Ньютон** (1676), который представил площадь и длину кривой в виде ряда, и многие другие математики. [137]; [173].

КВАДРАТУРА

Латинское *quadratura* означает «придание квадратной формы». Вычисление площади плоской фигуры или площади поверхности у греков сводилось к построению равновеликого квадрата, к квадратуре. Квадратурой стали также называть составление какого-нибудь интеграла. Аналитическое определение интеграла появилось только в XIX в.; еще **Фурье** (1807) считал интеграл определенным с помощью понятия площади. Поэтому любой интеграл представлял некоторую квадратуру, отсюда выражения *уравнение решается в квадратурах*, *задача сводится к квадратурам.*

КВАДРАТУРА КРУГА

Первая попытка точно определить число π была сделана в V в. до н. э. **Анаксагором** — так он проводил время заключения, будучи посажен в темницу за атеизм (он считал, что Солнце — раскаленный шар, а не Феб). В течение тысячелетий математики пытались решить эту задачу, среди них, например, **Галилей**; **Сен-Винсент** предложил четыре способа (1647). Но в новой математике появились суждения о невозможности квадратуры круга циркулем и линейкой — в решение не верили **Леонардо да Винчи**, **Штифель** и **Мавролико**, **Гюйгенс**, **Ньютон**, **Эйлер**. А **Грегори** даже пытался доказать это в “Vera circuli et hyperbolae quadratura” («Истинная квадратура круга и гиперболы», 1667). Наконец, в 1775 г. в «Решениях и постановлениях Парижской академии наук» было записано: «Отныне и впредь не рассматривать представляемых решений задач удвоения куба, трисекции угла, квадратуры круга, а также машин, долженствующих осуществить вечное движение». Спустя сто лет **Линдеман** (используя математический аппарат, созданный **Эрмитом**) установил, что π есть трансцендентное число, доказав тем самым невозможность построения квадрата, равновеликого кругу.

В качестве анекдота — вот как разрешил эту проблему **Леонардо да Винчи**: надо построить цилиндр с радиусом окружности основания R и высотой $\frac{1}{2}R$. При одном обороте такой каток «напечатает» прямоугольник; бери линейку и измеряй — не хочу. [186, с. 51].

КВАНТОР

В явном виде кванторы впервые были введены **Готлобом Фреге** в "Begriffsschrift" («Исчисление понятий», 1879). «К сожалению, принятые им символы мало выразительны и слишком далеки от применяемых в математической практике» (Бурбаки). В самом деле, современные $\forall\, a\, F(a)$ и $\exists\, a\, F(a)$ выглядят у **Фреге** следующим образом: $\vdash\!\!-\!\!\overset{a}{\smile}\!\!-\!\!-F(a)$, $\vdash\!\!\top\!\!-\!\!\overset{a}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-F(a)$.

Из всей символики **Фреге** в современную математику вошел единственный знак — выводимости (слегка модифицированный) $A \vdash\!\!- B$. Но это произошло уже в наше время (1934). Почти одновременно кванторы появились в американской логической школе.

Со ссылкой на **Пирса** признают, что кванторы общности и существования ввел **Митчелл**, у которого выражение $\prod\limits_{x}(f(x) = 0)$ означало, что логическая функция $f(x)$ выполняется для некоторых значений x (1883). **Ч. Пирс** в 1885 г. вводит термины *квантор*, *квантификация* (от *quantum* — сколько и *facio* — делать).

Символика **Митчелла** частично сохранилась и в наше время: так, в польской логической литературе кванторы существования и общности обозначаются через $\sum$ и $\prod$.

Кванторы получили широкое распространение после использования их **Шредером**, **Пеано**, **Расселом**. В "Formulaire des Mathématiques" — работе, написанной группой итальянских ученых во главе с **Пеано** (1892–99), широко используются перевернутые буквы и знаки. Здесь не только $\exists$ — первая буква слова existe (существовать), но и *3*, Э, ɸ, и даже перевернутый знак корня $\diagup\!\!\!\wedge$ (означающий, конечно, обратное действие — возведение в степень, так что $a \diagup\!\!\!\wedge m = a^m$). Кроме того, введены также знаки $\uparrow$ и $\downarrow$, которые соответственно означают «каждый» и «какой-нибудь» (или «некоторый»). [158, с. 278]; [144, с. 212, 262]; [221].

КВАТЕРНИОН

Термин происходит от латинского *quaterni* (по четыре); буквальное значение «четырехчленное число». Название ввел сам изобретатель кватернионов **Гамильтон**.

С начала XIX в., как только появилась геометрическая интерпретация комплексных чисел, математики начали пытаться найти такие числа, которые изображались бы точками трехмерного пространства. Естественные поиски шли в одном направлении: надо ввести еще одну «мнимую», $j^2 = -1$, и строить алгебру чисел $x + iy + jz$.

Оказалось, что

1) необходимо отказаться от коммутативности умножения ($[a \cdot b] = -[b \cdot a]$);
2) надо строить числа вида $xi + yj + zk + u$ (где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$).

Гамильтон создал исчисление кватернионов в 1835–1853 гг. К понятию кватернионов за четверть века до **Гамильтона** пришел **Гаусс**, он не опубликовал своих открытий, которые увидели свет, таким образом, в 1900 г. [70, с. 143]; [77, с. 222]; [1].

КИБЕРНЕТИКА

Название происходит от греческого κυβερνητική (искусство управления), которое в свою очередь произведено от κυβερνήτης (кормчий, рулевой). В «Диалогах» **Платона** это слово обозначает не только искусство кораблевождения, но и административное управление провинциями. Затем слово появилось в работе французского математика и физика **Ампера** «Классификация наук», где он пытается классифицировать **все** науки — существующие и грядущие. *Кибернетика* у него и означает искусство управления в самом широком смысле — всем вообще (1843).

Как научное направление, современная кибернетика стала существовать с 1948 г. — со времени публикации книги **Винера** «Кибернетика». Он так рассказывает о возникновении этого термина: «Я... с первых же шагов был озадачен необходимостью придумать заглавие, чтобы обозначить предмет, о котором я писал. Вначале я попробовал найти какое-нибудь греческое слово, имеющее смысл „передающий сообщение", но я знал только слово angelos. В английском языке angel — это ангел, то есть посланник бога. Таким образом, слово angelos было уже занято, и в моем случае могло только исказить смысл книги. Тогда я стал искать нужное мне слово среди терминов, связанных с областью управления или регулирования. Единственное, что я смог подобрать, было греческое слово kybernetes, обозначающее „рулевой, штурман"... Так я напал на название *кибернетика*. Позднее я узнал, что еще в начале XIX в. это слово использовал во Франции физик **Ампер**, правда, в социологическом смысле, но в то время мне это было неизвестно.

В слове „кибернетика" меня привлекало то, что оно больше всех других известных мне слов подходило для выражения идеи всеобъемлющего искусства регулирования и управления, применяемого в самых разнообразных областях». [36, с. 51, 52].

КИЛО

Греческое χιλλοι, входящее в названия метрических единиц, означает *тысяча*.

КОЛЛИНЕАРНОСТЬ

Термин образован из латинских *co* (с, со, вместе) и linearis (линейный) и означает буквально «солинейность». До того как был придуман термин *коллинеарность*, **Гамильтон** в течение десяти лет писал *coaxial vectors*, или *codirectional vectors*, или «две линии одного или противоположных направлений» и приводил «уравнение соосности или параллельности» (оно заключалось, естественно, в том, что векторное произведение векторов равно нулю). Затем **Гамильтон** ввел названия *termino-coplanar*, *termino-collinear* для векторов, которые имеют общее начало и концы которых лежат на одной плоскости (прямой). Понятие и название слегка изменил **Гиббс**, благодаря которому термин *коллинеарность* вошел в векторную алгебру (опубликовано в 1901 г., до этого **Гиббс** употреблял термин в лекциях, вероятно, в течение 20 лет). [1].

КОЛЬЦО

Понятие кольца было введено **Дедекиндом** в приложении к третьему изданию «Лекций по теории чисел» **Дирихле** (1879), где кольца назывались «порядками». Термин *Ring* предложил **Гильберт** в работе «К теории алгебраических числовых тел» (1897). Термин *булево кольцо* принадлежит **Стоуну** (1936). [19, с. 100]; [17, с. 232]; [158, с. 398].

КОМБИНАТОРИКА

Элементы этой теории были известны в глубокой древности: за два века до нашей эры треугольник **Паскаля** был известен в Индии; таблица биномиальных коэффициентов (до 8 степени) встречается в китайской математике, общая теорема о разложении бинома была известна **Омару Хайяму** и т. п. К XVII в. были накоплены многочисленные результаты **Тартальи**, **Эригона**, **Паскаля**, **Ферма**, **Валлиса** и др. Название эта область математики получила в "Dissertation de art combinatoria" («Рассуждение о комбинаторном искусстве») **Лейбница** (1666). В это время были получены многие результаты в связи с решением первых задач теории вероятностей.

Термин *сочетание* (combination) появляется у **Паскаля** в 1653 г., а в публикациях употребляется с 1665 г. В «Трактате об арифметическом треугольнике» ("Traité du triangle arithmétique", 1665) **Паскаль** привел основные соотношения между биномиальными коэффициентами. Эти свои результаты он сообщил годом раньше **Ферма**, который, по-видимому, к этому времени получил эквивалентные результаты в связи со своими занятиями фигурными числами и магическими квадратами. **Тарталья** знал формулу для числа сочетаний, независимо от него формулу нашел **Эригон** и привел в "Cursus mathematiqus" (1634). Обозначение C_n^m по первой букве латинского названия введено **Поттсом** в 1880 г. (правда, в несколько иной форме: ${}^nCp$). Второе принятое сейчас обозначение $\binom{m}{n}$ введено **Эйлером** в виде $\left(\frac{n}{m}\right)$, $\left[\frac{n}{m}\right]$, эти обозначения он употреблял в рукописях 1778, 1781 гг. Обозначения упрощены до современного венским математиком **Эттингсхаузеном** (1827).

Название *перестановка* впервые употребил **Таке** (преподаватель иезуитских колледжей в Лувене и Антверпене) в «Теории и практике арифметики» ("Arithmeticae theoria et praxis", 1656), это наименование осталось в математике благодаря тому, что его принял **Я. Бернулли** (в публикации 1713). Обозначение P происходит от слова permutation (перестановка) и введено также **Поттсом** (впрочем, такое естественное сокращение встречалось иногда и раньше).

Слово *размещение* встречается у **Я. Бернулли**, правда, только один раз; обычное для **Бернулли** название — «сочетания вместе с перестановками». Обозначение размещения через A_n^p — от arrangement — появилось впервые в 1904 г. в статье **Нетто**. Последний значительный пик интереса к комбинаторике относится ко второй половине XVIII в., когда в Германии образовалась комбинаторная школа. Основатель и руководитель ее **Карл Фридрих Гинденбург** верил, что комбинаторный метод должен оказать «в высшей степени важное влияние на анализ». Пристрастия математиков этой школы придали специфический характер их трудам, правда, без особенно значительных результатов. [34, с. 97–99]; [187, **2**, с. 79]; [185, I, с. 80,81]; [185, **2**, с. 60]; [2, **2**, с. 47]; [99, с. 70, 55]; [186, с. 183].

КОМБИНАЦИЯ ЛИНЕЙНАЯ

Выражение получило права гражданства только в начале XX в. Стандартным оборотом и в теории дифференциальных уравнений, и в теории определителей было «линейное и однородное выражение». Это название для $Af(x) + A_1 f_1(x) + \ldots + A_n f_n(x)$ мы видим у **Кристоффеля** (1858), у **Кронекера** (“Vorlesungen über Zahlentheorie”, 1901). В русскую литературу термин был введен, по-видимому, **Вениамином Федоровичем Каганом**, хотя еще в его «Основаниях теории определителей» издания 1922 г. дается определение: «под линейной формой переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разумеют однородное выражение вида $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n$».

КОМПАКТНОСТЬ

В 1906 г. **Морис Фреше** ввел понятие метрического пространства; он и **Рисс** попытались рассматривать наряду с точечными множествами множества функций. При этом оказалось, что необходимое и достаточное условия компактности были уже раньше сформулированы **Арцела** (1895). **Фреше** определил компактное множество по аналогии с теоремой **Больцано—Вейерштрасса**. Бесспорно, он впервые ввел это слово в математику.

Термин *бикомпактный* принадлежит **П. С. Александрову** и **П. С. Урысону** [175, **27**, с. 233–295].

КОМПЛАНАРНОСТЬ

Термин составлен из латинской приставки *co* (*con*, *cum*), означающей совместность, и *planum* (плоский, горизонтальный). Буквальное значение — «солежащие в одной плоскости». Такое название встречалось у **Я. Бернулли**. Однако в современную математику слово вошло вместе с векторным анализом **Гиббса**. В теории кватернионов **Гамильтон** рассматривал *termino-coplanar vectors* — так он называл векторы с общим началом, концы которых лежат в одной плоскости (1853). **Гиббс** упростил название таких векторов до современного (1901). [187, **3**, с. 221]; [1].

КОНГРУЭНТНОСТЬ

Слово произошло от латинского *congruentis* (совпадающий), из него же образовано *конгруэнция* — «согласованность, соответствие».

Понятие конгруэнтости, как первоначальное, ввел впервые **Паш** в «Новой геометрии» (1882). Ему принадлежат аксиомы конгруэнтности; некоторые изменения в его систему внесли **Гильберт** и **Мур**. Знак $\equiv$ перенесен из теории сравнений (**Гаусс**, 1801).

Термин *конгруэнция* ввел **Плюккер** (1846). [226, II, с. 40]; [198, III_1, с. 28].

КОНСТАНТА

Латинское *constants* означает «**постоянный, неизменный**». Отсюда обычное обозначение **аддитивной постоянной** (**да и любой постоянной**) буквой C.

КОНТИНУУМ

Латинское *continuum* означает «непрерывный, смежный, следующий, непосредственно прилегающий». Понятие пытался определить уже **Больцано** в "Paradoxien des Unendlichen" («Парадоксы бесконечного» опубликованы посмертно в 1854 г.), он учитывал при этом только одно свойство континуума — непрерывность. У **Больцано** употребляется и естественное название — *континуум*.

Первые определения **Кантора** (1873) подчеркивают прежде всего связность множества. Определение континуума как открытого связного множества восходит к **Вейерштрассу** («Лекции», 1880). Как это бывает большей частью, пока термин не стал общепринятым, он употреблялся и в других смыслах, так, **Пуанкаре** называл «континуумом первого рода» множество рациональных чисел, а «континуумом второго рода» — множество вещественных чисел. Наконец, в статье 1883 г. **Кантор** предложил придать термину постоянное, четко оговоренное значение. **Кантор** писал в 1883 г.: «Я хорошо знаю, что слово *Continuum* до сих пор не имеет в математике четкого (*feste*) значения» и предложил подразумевать под *континуумом* только совершенные и связные области. **Кантор** и **Жордан** дали определения, эквивалентные для *ограниченных* континуумов (и не совпадающие для неограниченных). [198, II_2, с. 9]; [198, I_1, с. 201].

КОНТУР

Термин произошел от французского contour (очертание, очерк).

КОНУС

Греческое κῶνος означает «кегля, сосновая шишка, верхушка шлема, остроконечный предмет». Термин получил современный смысл у **Евклида**, **Архимеда**, **Аристарха**. По свидетельству **Архимеда**, **Демокрит** открыл, что объем конуса или пирамиды составляет треть объема цилиндра или призмы с тем же основанием и той же высотой. Первое доказательство этого факта дал **Евдокс**. [23, с. 192].

КОНХОИДА

Название кривой составлено из греческих κονκη (раковина) и ἔιδος (вид, наружность); его смысл — «подобная раковине». Название дал **Никомед**, которому приписывают изобретение и первое исследование *конхоиды*. О **Никомеде** ничего не известно, кроме того, что он жил между 250 и 150 гг. до н. э., открыл конхоиду и пытался применить ее для решения задач о трисекции угла и удвоении куба. В XVI и XVIII вв. конхоида была излюбленным примером для приложения всяческих инфинитезимальных приемов, так что **Ньютон** (1707) даже предложил отнести ее наряду с прямой и окружностью к разряду постоянно употребляемых кривых.

Построение касательной к конхоиде выполнили около 1636 г. **Декарт**, **Ферма** и **Вариньон**. **Гюйгенс** нашел точки перегиба (1653) и установил, что площадь между правой ветвью и основанием бесконечна (1658). Квадратуру осуществил **И. Бернулли** (1692)

Вариньон назвал также конхоидами группу кривых

$$x^3 - 6px^2 + xy^2 + p^2x - 4p^3 = 0,$$

(метод построения которых он предложил в 1702 г.) ввиду сходства графиков таких функций с конхоидой. [137]; [138]; [173].

КОНХОИДА СЛЮЗА

Эту кривую открыл и сообщил о ней **Гюйгенсу** в письмах 1662–63 гг. **де Слюз**. Он исследовал кривую, определил ее точки перегиба (что было тогда непростой задачей). Потом эта кривая была забыта до 80-х гг. XIX в., когда **Лориа** написал о ней статью "Une courbe oubliée" («Забытая кривая») и назвал кривую *конхоидой Слюза*. **Де Слюз** родился в Льеже, учился в Лионе, затем 10 лет провел в Италии. Здесь он познакомился с методом неделимых **Кавальери**, методом касательных **Торричелли** и с работами **Галилея**. Он получил глубокие и разносторонние результаты, но по возвращении в Льеж публикация их оказалось невозможной из-за «свирепого давления церкви», тем временем **Ньютон** обнародовал свой метод (1673) и приоритет **де Слюза** был утрачен. [170, с. 405]; [213, с. 71–72].

КООРДИНАТЫ

Координаты появились независимо в географии, астрономии, математике в различных формах уже в науке Вавилона и Греции. Гораздо ближе к современным координатам подошел французский математик **Орем** (1371), который использовал графическое представление зависимости и употреблял при этом термины «широта, долгота» (вполне аналогичные нашим «абсцисса, ордината»). В его время приложения алгебры к геометрии тормозились из-за отсутствия буквенной символики. Термины «декартовы координаты», «декартова система координат» достаточно ясно оценивают важность алгебраизации геометрических исследований, т. е. «Геометрии» **Декарта** (1637). Столь же важное сочинение **Ферма**, написанное в это же время, было опубликовано в 1679 г., после смерти **Ферма**. Формулы преобразования координат привел **ван Схоутен** (1649). **Орем**, **Галилей**, а затем **Ньютон** пользовались временем как координатой.

Наши термины *абсцисса*, *ордината*, *аппликата* обязаны своим происхождением греческой терминологии в учении о конических сечениях. Слово *абсцисса* происходит от латинского *abscindere* (отсекать, отрезать). Термин *abscissa* широко употреблялся в латинских переводах с греческого. После работ **Кавальери** (с 1635 г.) слово стало употребляться только в смысле «отрезок, отсекаемый...». В современном смысле термин употреблен **Лейбницем** в 1675 г. В русский язык слово перешло из французского только в начале XIX в.

Аполлоний называл параллельные хорды «по порядку проведенными линиями». Латинский перевод этого выражения — ordinatum applicatae —

«по порядку приложенная» (**Коммандино**, 1566). В «Геометрии» **Декарта** употребляется совершенно аналогичное appliquées par ordre. Отсюда и произошли термины *ордината* и *аппликата*, когда позднее наряду с этим выражением стали употреблять его элементы в виде *ordinatae* и *applicatae*; они означают соответственно «расположенный в порядке» и «присоединенная, приложенная». При этом первоначально под ординатой понимали либо всю хорду конического сечения, либо ее половину. Как одна из координат точки слово *ордината* употреблено **Лейбницем** (1676). Приблизительно в это же время **Лейбниц** ввел термин *координаты*, определенно подчеркнув этим равноправие абсциссы и ординаты. В его письме к **Ольденбургу** слова *абсцисса* и *ордината* приведены без пояснений. Полагают, что уже **Орем** употреблял слово *координаты* (1371). Все эти названия употреблялись наряду с другими. Например, вслед за **Лагиром** использовали термины «tige» и «rameau» (ствол и ветвь) (1679). Еще в 1936 г. в учебнике написано: «Было предложено называть третью координату „аппликатой“; но это название не получило распространения». Например, **Буняковский** переводил французское appliqúe выражением «вертикальная ордината» (1839).

В течение первых десятилетий оси координат имели произвольные направления. Слово *ось* (абсцисс) было введено **Барроу**, учителем **Ньютона**, — linea abscissarum (1670). Термин *ось ординат* появился гораздо позднее: лишь со второй половины XIX в. постепенно входит в обычай указывать на плоскости обе оси. Формально ось ординат была введена **Крамером** (“Introduction à l’analyse des lignes courbes algébriques”, 1750), хотя эпизодические ссылки на нее бывали и раньше — у **Эйлера**, **Рабюэля** и др.

Начало координат, если его вообще как-нибудь называли, именовали чаще всего *началом абсцисс* (initium abscissarum). Но уже **Лагир** (1679) употребил слово origine — *начало*. Первой буквой этого слова и отмечается начало координат. **Лагир** же впервые ввел пространственную систему координат. Затем использование трех переменных в аналитической геометрии мы находим в трудах голландского ученого **Гудде**, ученика **Декарта** и **ван Схоутена** (1659–1661). Французский математик **Паран** также употреблял систему координат в пространстве и представлял поверхность уравнением с тремя переменными (1700–1705).

Традиция обозначать неизвестные величины последними буквами алфавита x, y, z, а известные — первыми $a, b, c, \ldots$ — пошла от **Декарта** (1637). Эта условность не была признана сразу всеми математиками, и в течение следующего века наряду с этими обозначениями были распространены и другие (например, большие и маленькие буквы алфавита). Однако после систематического употребления **Лагиром** x, y, v (1679), **Параном** x, y, z (1705), **Эйлером** t, x, y (1728), **И. Бернулли** x, y, z (1715) декартова символика прочно вошла в геометрию.

Координаты у **Декарта** были не только положительными числами, однако отрицательные координаты «открывали» еще много раз: **Валлис** (1655), затем **Ян де Витт** (1649, опубликовано в 1659). И все-таки координаты с трудом воспринимались математиками. Почти век спустя после появления Декартовой «Геометрии» были опубликованы обширные «Комментарии к „Геометрии“ г-на Декарта» (Commentaires sur la Géometrie de H. Descartes, 1730). Даже и в это время автор считает, что «Геометрия» представляет «почти непреодолимую трудность».

Тот факт, что существуют различные системы троек направлений, вероятно, был замечен под влиянием экспериментов **Ампера** и **Кориолиса** (1792–1843). Сочли необходимым отметить это в математических работах **Мёбиус** (1827) и **Гаусс** (1846), а строгое различие было введено в связи с задачами векторного исчисления. Современные названия *левая* и *правая системы координат* предложены в 1873 г. **Максвеллом** (right-handed, left-handed); вначале он называл системы «подобная хмелю, подобная винограду». До того как термины стали повсеместно употребляемыми, в ходу были «положительно или отрицательно ориентированная система» или «французская и английская система» и многие другие. [198, $III_{1.1}$, с. 619]; [175, I, с. 293]; [185, с. 379–384]; [157, с. 219].

КООРДИНАТЫ КОСОУГОЛЬНЫЕ

В системе координат **Декарта** не было второй оси, ее подбирали специальным образом. И чаще всего система координат была косоугольной. Такой подход сохранился до **Монжа** и **Ашетта** в конкретных задачах. Вся аналитическая геометрия (включая теорию пространственных кривых и поверхностей второго порядка) в этих координатах была развита физиком **Г. Омом** (“Beiträge zur Molekular-Physik”. T. 1: “Grundriss der analytischer Geometrie im Raume am schiefwinkeligen Koordinatensystem”, 1849). [198, $III_{1.1}$, с. 617].

КООРДИНАТЫ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ

Впервые такие координаты использовал **Я. Бернулли**. *Координатами* назвал их год спустя **Лейбниц**. Криволинейные координаты сразу же стали «рабочим инструментом». Так как формулы для трансцендентных функций еще не были установлены, в XVII в. умели дифференцировать только алгебраические выражения (и в это время **Лейбниц** провозгласил: «Новое исчисление завершено»!), поэтому путем подбора специальных криволинейных координат уравнения необходимых кривых всегда приводились к алгебраическому виду (**Лейбниц**, **Ньютон**, **Лопиталь**).

С именем **Гаусса** связаны криволинейные координаты на поверхности. Криволинейные координаты в пространстве впервые ввел **Ламе**, широко используя их в исследованиях по математической физике; в приветственных адресах его даже называли «изобретателем криволинейных координат». Его статьи на эту тему составили труд “Leçons sur les coordonnées courvilignes et leurs diverses applications” («Лекции о криволинейных координатах и их различных приложениях», 1859), труд, увековечивший название координат.

Стоит отметить, что основные научные интересы **Ламе** сложились в те 11 лет, которые он работал в России — прикладная механика, теория упругости, аналитическая теория тепла, теория криволинейных координат. В 1820 г. выпускники Парижской Политехнической школы **Габриэль Ламе** и **Бенуа Клапейрон** приняли приглашение стать профессорами Института Корпуса инженеров путей сообщения (открытого в Петербурге в 1810 г.). Наряду с преподаванием **Ламе** вел активную инженерную деятельность: принимал участие в строительстве первой железной дороги России и шоссейных дорог, в проектировании мостов и шлиссельбургских шлюзов (в 1823 г. начато строительство первого цепного моста России — через Фонтанку), в 1829 г. был утвержден представленный **Монферраном** проект триумфальной колонны в честь победы над Наполеоном, **Монферран** написал благодарственный панегирик **Ламе**, который выполнил расчеты проекта. Многие работы **Ламе** выполнены в соавторстве с **Клапейроном** — уже в этих исследованиях они отказываются от прямоугольных координат и вводят более удобные для конкретных задач, в частности *цилиндрические*, которые они называли полуполярными (1828).

Труды **Ламе** получили высокую оценку современников: его «**Гаусс** поместил во главе французских математиков... и **Якоби** описал как математика наиболее проницательного». [39, с. 155].

КООРДИНАТЫ ПОЛЯРНЫЕ

Динострат в V в. до н. э. исследовал квадратрису, которая в полярных координатах имеет уравнение

$$\rho = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

В явном виде, конечно, полярные координаты не появлялись. Подобие полярных координат находят у **Дюрера**: он строил спираль **Архимеда**, один вид кардиоиды, логарифмическую спираль и некоторые другие кривые (1525).

В «Методе флюксий» (1736) **Ньютон** трижды использовал полярные координаты и привел формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки в виде $xx + yy = tt$, $tv = y$, где t — радиус-вектор, $v = \sin\varphi$ (последнее — иллюстрация к криволинейным координатам). В это же время и **Дж. Грегори** переходил практически к полярным координатам.

В почти современном виде полярные координаты появились у **Я. Бернулли** (1691): за координаты точки он принимал длины дуг некоторой окружности (наши углы φ) и длины перпендикуляров к этой окружности (современные ρ).

Однако от использования специальных систем в конкретных задачах до мысли, что таким образом определяется положение точки на плоскости, прошло около полувека. Эта мысль четко проведена только во втором томе "Analysin infinitorum" (1748) **Эйлера**. Здесь есть формулы $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, здесь же точки с отрицательными ρ откладываются на луче $\varphi \pm \pi$ (затем такое построение встречается только у **Магнуса** в 1833 г.).

Выражение *полярное уравнение* появилось у **В. Крафта** в 1732 г., а название *полярные координаты* — только в XIX в. — у **Ламе** в 1854 г.

(coordonnées polaires). Слово *полюс* (Pol) утвердилось после работ **Монжа** и его школы (с 1802 г.), впрочем, до последних десятилетий XIX в. наряду с ним употреблялись Anfangspunkt или Ursprung. Название *полярная ось* (Polarachse) появилось впервые в учебнике **Магнуса** "Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der Analytischen Geometrie" (1833, 1837). Полярный угол φ так и не получил названия в XIX в., его называли «аномалией», «амплитудой», «долготой», «азимутом» или «аргументом».

В 1857 г. вышла в свет "Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polar Koordinatensystem" **Грунерта**; в этом руководстве изложение всей геометрии, включая дифференциальную, основано на использовании полярной системы координат. К современным обозначениям ближе всего обозначения **Эйлера**, z и φ, и **Гурьева**, r и ω. [198, $\mathrm{III}_{1.1}$, с. 546, 656]; [174, **56**, с. 73]; [34, с. 297,300].

КООРДИНАТЫ СФЕРИЧЕСКИЕ

Несмотря на то, что такие координаты издавна употреблялись в астрономии (их использовал **Эйлер**), первая попытка определить кривую на сфере уравнением между сферическими координатами точки относится к 1796 г. Затем сферические координаты широко использовали **Монж** и его ученик **Ашетт** (1802), а также **Лаплас**. Формулы, выражающие декартовы координаты через сферические (чисто тригонометрические, по-существу), привел **Лагранж** (1773). Соотношения, связывающие сферические координаты с косоугольными декартовыми, вывел физик **Георг Ом** (1849).

Примерно в 1830 г. немецкий математик **Гудерман** (учитель **Вейерштрасса**) и английский ученый **Дэвис**, независимо друг от друга, систематически развили аналитическую геометрию на шаре. В работах по математической физике **Ламе** тщательно выбирал систему координат; в частности, сферические координаты он определял и называл как *широту* и *долготу* на глобусе плюс расстояние до центра сферы. Такая координатная система позволила свести дифференциальное уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Название Kugelkoordinaten предложил **Бальцер** (1882); оно объясняется тем, что семейство сфер есть среди координатных поверхностей. **Бальцеру** принадлежит также термин *цилиндрические координаты*. До того как утвердился этот термин, чаще всего писали «полу-полярные координаты», следуя **Ламе** (semi-polaires coordinates). И в русском языке в конце XIX в. встречаются названия «полярные» и «полу-полярные» координаты соответственно вместо «сферические» и «цилиндрические». [198, $\mathrm{III}_{1.1}$, с. 659–660].

КООРДИНАТЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ

Этот частный (и, возможно, самый важный) случай криволинейных координат **Ламе** ввел уже в 1833 г. Он постоянно пользовался ими в исследованиях 30-х гг., ему принадлежит и название *эллиптические координаты*. **Ламе** писал: «Без изобретения прямоугольных координат алгебра осталась бы на той же точке, где **Диофант** и его последователи ее оставили... Без введения сферических координат небесная механика была бы абсолютно невозможна. Без эллиптических координат знаменитые геометры не могли бы решить многочисленные вопросы, важные в этой теории... Теперь необходимо наступило царствование криволинейных координат...». Почти одновременно такие координаты использовал **Якоби** (1839). [39, с. 157].

КОРЕНЬ

В греческой математике понятие называлось πλευρά — «сторона». Древнегреческие математики говорили «найти сторону по данной площади квадрата» вместо «извлечь корень». Следуя этой традиции, раньше квадратный корень называли «стороной». В латинском языке «сторона, бок, корень» выражаются одним и тем же словом — *radix*. От этого слова произошли термины *радикал* и *корень*, которые вошли в математику благодаря **Иоганну из Севильи** (1140), **Роберту Честерскому** (1145) и **Герарду из Кремоны** (1150), переводившим «Начала» **Евклида** с арабского на латынь.

Кардано пришел впервые к идее о кратности корня (1539). **Жирар** провозгласил, что уравнение степени n имеет ровно n корней с учетом кратности каждого (1629). Неясно, правда, что он думал о мнимых корнях.

Знак корня ввел автор первого учебника по алгебре на немецком языке, учитель математики в Вене **Рудольф** (1525). Он обозначил корень квадратный через $\surd$. Затем в 1637 г. **Декарт** объединил знак корня с горизонтальной чертой — знаком скобок, и получился современный знак. Он вошел в употребление лишь с начала XVIII в., до этого использовались различные символы, например ℞, r. Знаки $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ ввел **Ньютон**, усовершенствовав обозначения **Валлиса**, который писал $\surd^3 27$, $\surd^4 81$ вместо наших $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$ (книга **Ньютона** "Arithmetica universvalis", написанная между 1673 и 1683 гг., вышла в 1707 г.). В публикациях 1720 г. уже повсеместно употребляются Ньютоновы обозначения. [226, II, с. 189]; [185, II, с. 4].

КОРРЕКТНОСТЬ

Поль Леви отмечал характерную черту творчества **Адамара**: «Чтобы решить тонкую проблему, он, не колеблясь, менял формулировку. Задача казалась неразрешимой, так как была плохо поставлена; будучи сформулированной лучше (parfaitement bien posé), она становилась разрешимой». Ясно, что эта особенность мышления должна привести к анализу формулировки краевых задач.

По существу, **Адамар** имел в виду то обстоятельство, что «хорошо поставлены» не все, а именно те краевые задачи, которые соответствуют математическим моделям физических явлений. Требуя, чтобы задача была поставлена «правильно» — *correctement*, он тем самым четко определил, чем именно занимается теория уравнений в частных производных. Знаменитый «пример **Адамара**» доложен на конгрессе в Цюрихе (1917). Если

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin tn}{\sqrt{n}}$$

— решение краевой задачи, то

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cos tn$$

и множитель $\sqrt{n}$ приводит к $x' \to \infty$.

Завершил эти исследования **Адамар** в "La problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles lineaires hyperboliques" (1922), где и введено выражение «корректно поставленная задача». Интерес к некорректным задачам возник после исследований **Карлемана** (1926). [152, XIX, с. 184]; [122].

КОРРЕЛЯЦИЯ

Латинское *correlatio* означает «связь, соотношение, соответствие».

История выборочного метода «вероятно, столь же стара, как само человечество, и, возможно, предшествовала ему, судя по привычке низших животных предварительно пробовать часть предлагаемой им пищи и затем отказываться от остальной на основании пробы только одной части». В производстве примерно такую роль и играет *корреляция*: сравнение наличествующей продукции с потребностью (экспериментальных данных с теоретическими).

В период 1893–1894 гг. в статистике начинают применять новые методики: введение в научный эксперимент, использование среднего, стандартной девиации и коэффициента корреляции... Фундаментальную роль сыграли работы британских ученых, прежде всего исследования **Гальтона** о наследственности (в 1888 г. он ввел коэффициент корреляции), **Пирсона**, **Эджеуорта**, **Уэлдона** и др. Каждый шел своим путем, так что исследования — с одной стороны — оригинальны и самостоятельны, а с другой — постоянные тесные контакты и обсуждения обогащали и стимулировали родственные идеи, так что попытки установить приоритет совершенно безнадежны. Например, **Уэлдон** и **Пирсон** тесно сотрудничали с 1891 г. до преждевременной кончины **Уэлдона**. **Эджеуорт** предвосхитил в 1883 г. «распределение Стьюдента». В свою очередь **Госсет** (Стьюдент) присоединился к этим исследованиям в 1899 г., он тоже исходил из теории ошибок и метода наименьших квадратов. Он установил, что некоторые из его наблюдений не независимы, и ему было необходимо некоторым образом измерить эту «связь», и похоже, что если бы не случайная консультация при встрече с **Пирсоном** (1905), он переоткрыл бы коэффициент корреляции совершенно оригинальным и независимым путем. [112, с. 56]; [224].

КОСИНУС

Термин представляет собой сокращение выражения *complementi sinus* — т. е. «дополнительный синус» (точнее, «синус дополнительной дуги»). В трудах арабских математиков косинус рассматривался только как синус дополнения угла до 90°. Этот термин, так же как и «котангенс», ввел английский математик и астроном, изобретатель счетной линейки, **Гентер** в 1620 г. Эти термины не получили немедленного признания со стороны известных английских математиков того времени. Они не встречались ни у **Бриггса**, ни у **Оутреда** и появились только в работах 1633, 1635, 1671 гг.

Как правило, употреблялись сокращения *SiCo* или *SineCo* наряду с s', s^* и многими другими (так же, как *tanCo*, *Tco*, *tco*). Употребляемые нами обозначения впервые применил **И. Бернулли** в письме к **Эйлеру** (1739). **Эйлер** нашел их самыми удобными. Авторитет **Эйлера** способствовал тому, что эти обозначения стали общепринятыми.

Косинусоиду для первого квадранта впервые построил **Барроу** (1674). [185, II, с. 149–157]; [186, с. 151–158]; [14, с. 69]; [103].

КОСИНУСЫ НАПРАВЛЯЮЩИЕ

Выражение *направляющие косинусы* впервые употребил **Коши**, он ввел уравнения прямой в виде

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma}$$

и непосредственно вслед за этим получил соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \text{ (1826)},$$

которое раньше уже установил французский математик **Тенсо** (1780). Однако в книгах середины XIX в. (**Ламе**, например) термин не употребляется. [189, с. 339].

КОТАНГЕНС

Как уже было сказано, этот термин принадлежит **Гентеру**. Котангенсы появились раньше тангенсов. В арабской математике их изобрел **ал-Баттани** (IX в.), в европейской — их вновь открыл английский математик **Брадвардин**, который называл котангенс *umbra recta* — прямая тень (отбрасываемая вертикальным шестом на горизонтальную плоскость). График котангенса для первой четверти построили **Грегори** (1668) и **Барроу** (1674). Для двух периодов его построил **Коутс**. [187, **2**, с. 101]; [183].

КОЭФФИЦИЕНТ

Термин из латинских *co* (*con*, *cum*) (с, вместе) и *efficiens* (производящий, составляющий причину чего-либо); буквальное значение — «содействующий». Термин возник из выражения **Виета** *longitudo coefficiens* (содействующая длина) (1591). Под этим подразумевался множитель в члене уравнения, придающий ему нужное для однородности число измерений: например, x^2+x **Виет** записывал только в виде $x^2+x\cdot 1$, чтобы выражение означало сумму площадей, а не представляло бы бессмысленное сложение площади и длины.

Многие европейские математики XVI–XVII вв. не пользовались постоянным термином для понятия коэффициента. Например, **Декарт** говорил об «известной величине» в члене уравнения, **Лопиталь** — об «умножающей величине», **Ньютон** — писал то «предстоящее число», то «известная величина», то «член». В современном смысле его стали систематически употреблять английские математики **Оутред** и **Валлис**, французские —

Дешаль и **Жирар**, а затем и другие. Первое употребление буквенных коэффициентов, независимо от того, положительные или отрицательные они, содержит статья **Гудде** (1659–1661). [226, II, с. 69]; [181, с. 113]; [165, с. 231].

КРИВАЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

После гениальных результатов греческих математиков в изучении **конических сечений** (см.) наступил абсолютный перерыв, в течение 12 веков не было сделано ни одного открытия до 1522 г., когда **Вернер** из Нюрнберга, проектируя окружность, обнаружил некоторые новые свойства конических сечений. Поток открытий хлынул после создания аналитической геометрии. Первая работа, в которой кривые рассматриваются не как конические сечения, а как *кривые второго порядка* и исследуются декартовым методом, — "Conics sections" **Валлиса** (1656). Новым в этот трактате была только форма, ничего, сверх известного **Аполлонию**, здесь не содержится. Название, данное **Ньютоном** (1706), вызвано тем, что в уравнения этих кривых переменные входят, вообще говоря, во второй степени. Название *Ordnung* (*порядок*) вместо «степень» (Grad) ввел **Плюккер** (1829).

Вскоре был дан первый аналитический вывод уравнений эллипса и гиперболы как геометрических мест, для которых $MF_1 + MF_2 = 2a$, $MF_1 - MF_2 = 2a$. Такое изложение впервые провел ученик **ван Схоутена**, **Ян де Витт**, бывший некоторое время главой государства Нидерландов. Во время одного из кризисов сограждане растерзали его на улице. "Elementa curvarum linearum" («Начала кривых линий») **де Витта** напечатаны во втором издании «Геометрии» **Декарта** (1659–1661). Уравнение гиперболы в форме $xy = k$ встречается впервые у **Ферма** (1659).

Свойство $MF_1 + MF_2 = 2a$ есть у **Аполлония**. Определение конических сечений через фокус и директрису, по-видимому, было известно **Евклиду**, оно есть у **Паппа**. Название *директриса* (для параболы) ввел **Лопиталь**.

Архимед вычислил площадь параболического сегмента и нашел формулу для площади эллипса: πab. **Сен Винсент** нашел формулу для площади между дугой гиперболы и асимптотой. **Маклорен** представил длину дуги конического сечения интегралом ("A Treatise on Fluxions", 1742). **Ленден** открыл, что длину произвольной дуги гиперболы можно выразить через длины дуг двух эллипсов. Многочисленные теоремы о дугах конических сечений получил **Фаньяно** (1716), а затем **Эйлер** (1736, опубликовано в 1741 г.). Почти одновременно была найдена приближенная формула для длины эллипса **Пеано** (1887) и **Бусинеском** (1889) $4q = \pi\left\{a + b + 0{,}5\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2\right\}$.

Новые подходы и дальнейшее развитие теории конических сечений связаны с именами **Штейнера** (1832) и **Штаудта** (1847) (см. **сечения конические**).

КРИВАЯ ЖОРДАНА

Необходимость доказать тот факт, что замкнутая кривая делит плоскость на две части, впервые отметил **К. Нейман** (1865). Подобие идей **Жордана** можно усмотреть в «Лекциях» **Вейерштрасса** и его статье от 1884 г.

Однако только в "Cours d'Analyse" **Жордана** (издания 1882, 1893 гг.) они были развиты настолько последовательно и полно, что из этого руководства «целое поколение математиков почерпнуло современную концепцию строгости» (Курант, Роббинс). Ввиду важности введенных **Жорданом** понятий быстро установились названия *теорема* **Жордана**, *кривая* **Жордана** — они стали общепринятыми уже к XX в.

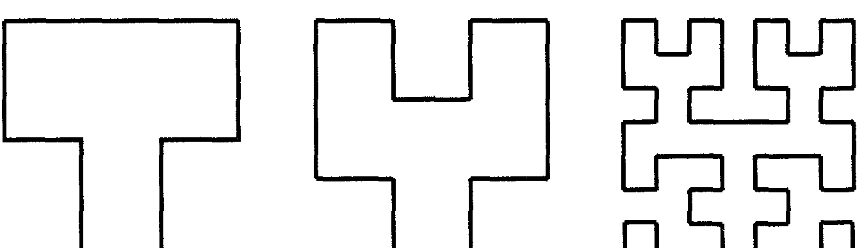
Тем не менее доказательство **Жордана** недостаточно удовлетворительно. И первое полное доказательство теоремы в ее наиболее общей форме дал **Веблен** в статье 1905 г. [88, с. 327]; [198, III$_{1.1}$, с. 287]; [175, **49**, с. 282].

КРИВАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ

Название введено **Гюйгенсом** в статье «О причине силы тяжести» (1690). При этом **Гюйгенс** пишет, что кривую уже рассматривали другие авторы. Согласно **Вилейтнеру**, кривая встречалась уже около 1670 г. Остается неизвестным, кто ее ввел первым, так как логарифмы возникли, когда графическое представление функции было уже известно, но после **Гюйгенса** кривая встречается систематически, поэтому иногда встречается утверждение, что **Гюйгенс** первый построил кривую. Спрямление кривой осуществили **Лопиталь**, **Гюйгенс** и **Коутс**. **Гюйгенс** и **Торричелли** вычислили площадь между $y = \log x$ и ее асимптотой. Это — результаты последнего десятилетия XVII в. [213, с. 542–544].

КРИВАЯ ПЕАНО

В 1878 г. **Кантор** опубликовал теорему об эквивалентности континуумов различных размерностей. Не было никаких попыток опровергнуть этот результат, подтвержденный **Дедекиндом**. Эта публикация заставила математиков обратить внимание на абсолютно «очевидные» понятия — размерность, взаимно однозначное соответствие... Из этой совершенно реальной почвы взошли фантастические результаты **Пеано**. В 1890 г. **Пеано** построил плоскую непрерывную кривую, проходящую через все точки некоторого квадрата ("Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane"). В следующем году другую такую кривую построил **Гильберт**, а вскоре были найдены и другие примеры. Все эти кривые по имени автора первой из них получили название *кривых **Пеано***. Через 25 лет **Хаусдорф** писал: «Это один из наиболее замечательных фактов теории множеств». [198, III$_{1.1}$, с. 286]; [105, **6**, с. 227]; [108, с. 109].



КРИВАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ

Эта кривая появилась в исследованиях примерно в 1640 г. Однако переменная в показателе степени встречается впервые только в 1679 г. в письмах **Лейбница** к **Гюйгенсу**. Кривую исследовали **Торричелли**, **Коутс**, **Гюйгенс**. Термин возник в переписке **Лейбница** и **И. Бернулли** (ок. 1697). [34, с. 308].

КРИВИЗНА

Первый писатель в математике нового времени, который трактует о кривизне, хотя и в недостаточно ясной форме, это — **Орем** ("Nune restat de Curvitate ducendum"), он утверждал, что слово *кривизна* взято у **Плутарха**. У **Кеплера** есть понятие *круга кривизны*, которое затем вновь открыл **Лейбниц** (1659).

Понятие кривизны плоской кривой и первый вариант теории построил **Гюйгенс**. В статье 1691 г. **Гюйгенс** употребил выражение *radius curvitatus*.

Ньютон (1664), **Лейбниц** (1686) и **Я. Бернулли** (1693) применили к этой теории новый аппарат дифференциального исчисления. Когда **И. Бернулли** познакомил парижских математиков (1691) с формулой радиуса кривизны, то именно из-за этого результата **Лопиталь** начал уговаривать (и уговорил) **И. Бернулли** стать его частным учителем математики. Независимо от брата формулу для радиуса кривизны вывел **Я. Бернулли** (в декартовых и полярных координатах).

Работа **Ньютона**, в которой содержится формула для кривизны, опубликована в 1736 г. ("Method of Fluxions and Infinite Series with Application to the Geometry of Curved Lines by the Inventor Sir Isaac Newton"). Существуют два мнения. Одно из них — книга не отличается от рукописи, которую видели в 1671 г. Согласно второму мнению, **Ньютон** знал работу **Гюйгенса** и показал, что можно приложить новый метод к старым задачам. После **Ньютона** понятие кривизны ввел **Валлис** (1685).

В этих формулах впервые появляется вторая производная. Формулы **Лейбница** содержат только дифференциалы первого порядка, это достигается тем, что $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ приняты за новые переменные (пример иллюстрирует, что формулы исчисления **Лейбница**, оперирующего с дифференциалами, не переводятся автоматически в термины функций и производных). [198, $\mathrm{III}_{1.1}$, с. 592]; [198, III_3, с. 32]; [189, с. 321]; [174, **50**, с. 376].

КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ

Эйлер предложил характеризовать кривизну поверхности через кривизну всех плоских нормальных сечений. В статье «Исследование о кривизне поверхности» (1760, опубл. в 1766 г.) он вывел формулу радиуса кривизны произвольного плоского сечения поверхности, а затем выразил радиус через наибольший и наименьший радиусы сечений в точке. Результаты **Эйлера** были развиты в школе **Монжа**; в частности, теорема **Менье** получена в 1776 г. и опубликована в 1785 г.

Понятие и название ввел **Гаусс** в "Disquisitiones generales circa superficies curvas" («Общие исследования о кривых поверхностях», окончена в 1827 г., опубликована в 1828 г.). Открытие того факта, что кривизна инвариантна относительно изгибания, привело молодого **Гаусса** в такой восторг, что он назвал полученный результат Theorema egregium (выдающаяся теорема). Как обобщение гауссова понятия **Риман** ввел понятие *кривизны пространства.*

Гауссу принадлежат также названия *полная кривизна*, *мера кривизны.* Он рассматривал также кривизну линии на поверхности (это понятие называлось у него «боковая кривизна»). Этих исследований он не публиковал, в печати понятие кривизны линии на поверхности появляется впервые в 1830 г. у **Миндинга**, который доказал ее инвариантность. Современный термин *геодезическая кривизна* ввели **Бонне** (1848) и **Лиувилль** (1850). Одновременно **Бонне** ввел понятие, которое он назвал «вторая геодезическая кривизна» и за которым в наше время закреплено название *геодезическое кручение.* [82, с. 523]; [198, III_3, с. 32, 88, 95, 133,167].

КРИВЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ

Впервые **Декарт** разделил кривые на *геометрические* и *механические* (1637). В 1684 г. **Лейбниц** ввел современную классификацию и названия. **Ньютон** впервые рассмотрел порядок кривой, разделил кривые на классы по степени их уравнения в декартовых координатах или по числу точек пересечения кривой с прямой.

КРИТЕРИЙ

Слово происходит от греческого κριτεριον, что означает «способ решения».

Критерий сходимости, который связывают с именем **Коши**, встречается впервые в статье **Эйлера**, написанной в 1734 г. и опубликованной в 1740 г. В последующих работах **Эйлер** не использовал этот прием. Критерий, независимо от своего первого появления, был переоткрыт **Больцано** (1817) и **Коши** (1821).

Позднее **Г. Кантор** считал, что это предложение нужно принять за определение предела. И его поддержали, например, **Гарнак** (1871), **Липшиц** (1877). В 1871 г. **Дюбуа Раймон** употребил название *критерий* и ввел его вместе со справкой, что «известный прием» полностью принадлежит **Больцано**, а **Вейерштрасс** самостоятельно открыл его и этот метод доказательства привел **Вейерштрасса** к понятию равномерной сходимости (1841). Одновременно и **Ганкель** заявил о приоритете **Больцано**.

С именем **Коши** критерий связали только в XX в. — в курсах **Гуэля** (1878–1880), **Дини** (1892) приведена формулировка критерия без какого-либо упоминания имени **Коши**. Кажется, словосочетание *критерий Коши* стали употреблять после курса **Нильсена** "Lehrbuch der unendlichen Reihen" (1909). [180, с. 227].

КРУГ СОПРИКАСАЮЩИЙСЯ

Понятие было введено **Лейбницем** в 1686 г. (оно было известно и **Ньютону**). **Лейбниц** употребил название «оскулирующий круг» (латинское *osculor* — «целовать»), так как, по его словам, круг как бы прижимается к кривой, целует ее. [170, с. 429]; [143, с. 15].

КРУЧЕНИЕ

Термин *torsion* ввел французский математик **Валле** в 1825 г. Распространению его содействовало то, что **Леруа** включил его в учебник геометрии (1854). Кривые постоянного кручения впервые рассматривал **Серре**. Формулы **Серре—Френе** получены соответственно в 1851 и 1852 гг. (естественно, без векторных обозначений). [82, с. 461].

КУБ

Термин происходит от греческого κύβος (игральная кость). Так как она имела форму кубика, то название перешло на любое тело той же формы. Название ведено пифагорейцами, затем термин встречается у **Евклида**.

При зарождении алгебраической символики для разных степеней неизвестной использовали различные термины — «вещь», «сторона», «куб». Сохранился только один — куб — введенный еще **Диофантом** (III в.). [6].

Л

ЛЕММА

Термин происходит от греческого λῆμμα — «допущение, предыдущее положение». У **Архимеда, Прокла** термин уже имеет смысл «вспомогательная теорема». [216].

ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

Эта кривая встречается впервые в статье **Я. Бернулли** в 1694 г. Он и дал ей название, поясняя, что кривая похожа на лежащую восьмерку или повязку. Греческое λημνισχος означает «повязка, лента, бант».

Площадь, ограниченную кривой, нашел в 1750 г. **Фаньяно**. Сейчас этот результат получается легко, но в свое время математики (**Чирнгаузен**, например, в 1691–1695 гг.) полагали, что невозможно получить квадратуру кривой, состоящей из нескольких лепестков. **Фаньяно** был столь преисполнен сознанием важности своего открытия, что поместил фигуру лемнискаты на титульном листе своей большой работы с надписью: "Multifarum divisa atque dimensa. Deo veritis gloria." («Измерена многократным делением. Истинному Богу слава»). И даже на портрете в одной руке у него лемниската. [34, с. 304]; [138, с. 162]; [213, с. 200].

ЛИНЕЙНОСТЬ

Термин связан с тем обстоятельством, что характерными свойствами обладает уравнение прямой *линии* $y = kx$. Слова появлялись случайно и раньше (например в 1675 г. у французского математика **Престе** встретилось égalité linéaire), но по существу на свойство линейности обратили внимание в конце XIX в., когда стали кристаллизоваться понятия *линейное пространство*, *линейный оператор*, *линейный функционал*. Термин *линейная функция* ввел **Дюбуа Раймон** (1882). А при формировании функционального анализа **Адамар** писал: «**Пинкерле** говорит *дистрибутивная функция*,

Бурле — *аддитивная функция*, а я — *линейная функция*». Заметка **Адамара** начинается определением *линейной функциональной операции*:

$$U(C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) = C_1 U(f_1(x)) + C_2 U(f_2(x)).$$

Как уже ясно, исследования **Сальваторе Пинкерле** сыграли значительную роль, особенно его книга (500 страниц) "Le operazioni distributive e loro applicazioni all'analisi" (в соавторстве с **Амальди**). Здесь существенно использовались работы **Пеано** и его учеников по геометрии, векторному исчислению. [198, $\mathrm{II}_{1.2}$, с. 780]; [175, **31**, с. 127–187].

ЛИНИЯ

Слово происходит от латинского *linea*, а в конечном счете от латинского же *linum* (лен, льняная нить). В русских учебниках XIX в. термин выглядел как его латинский предок *линея*. [163, с. 11].

ЛИНИЯ ВИНТОВАЯ

Обыкновенной винтовой линией занимался уже **Аполлоний**. Во всяком случае, это — одна из древнейших известных пространственных кривых. Затем (1579) ее изучал **Гвидо Убальдо дель Монте**, который называл ее helix (плющ). Пространственные координаты к винтовой линии впервые применил **Пито** (1724–1726). Уравнения трех ее проекций вывел **Монж** (1795). Считают, что термин произошел от немецкого слова *winden* — виться (*Winde* — «ворот»). [34, с. 311].

ЛИНИЯ УРОВНЯ

Кривые одного уровня (в геодезии) впервые рассмотрел **Бассантен** в 1557 г., а затем — **Франсуа** в 1665 г. Однако, когда географ **Бюаш** ввел в описание Земли линии уровня (1733), это было воспринято как открытие, и тотчас же последовали развитие и применение этого метода в картографии. **Монж** (1798) рассмотрел большое число топографических задач и, по свидетельству **Дюпена**, установил понятие линий уровня поверхности. Специальное исследование об этих методах было написано **де ла Гурнери** в 1855 г. [198, $\mathrm{III}_{1.1}$, с. 593].

ЛИНИЯ ЦЕПНАЯ

Впервые вопрос о форме подвешенной в двух точках гибкой тяжелой нити (цепи) рассматривал **Галилей** (1638), который полагал, что это обычная парабола. Ошибочность этого мнения доказывал вычислениями и экспериментом **Юнгиус** (1669).

Я. Бернулли поставил вопрос о математическом определении такой кривой (1690). В следующем году задачу решили сам **Я. Бернулли**, **Гюйгенс**, **Лейбниц** и **И. Бернулли**. **Гюйгенс** назвал кривую catenaria (*catenae* — «цепь»). Особенно подробно рассматривал функцию **Эйлер** в приложении к «Методу нахождения кривых линий» (1744).

В 1776 г. **Менье** открыл минимальную поверхность, образующуюся при вращении цепной линии. Название — катеноид — предложил **Плато** (1831). Название происходит от латинского catenae (цепь) и εἶδος (вид), которое в сложных словах означает еще и происхождение. Таким образом смысл термина — «порожденная цепной линией, цепью». [34, с. 308, 309]; [113]; [138, с. 220]; [198, III, с. 228].

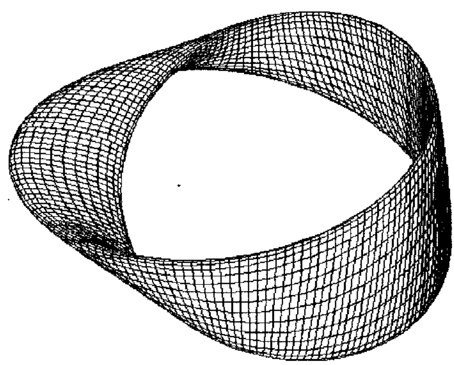
ЛИСТ ДЕКАРТА

Кривая впервые упоминается в письме **Декарта** к **Ферма** (1638). **Роберваль** считал, что кривая состоит из одной петли; повторяя ее во всех четырех квадрантах, он получил фигуру «цветок жасмина», однако это название не привилось (**Декарт** не возражал против такого построения!). Полная форма кривой определена позднее **Гюйгенсом** и **И. Бернулли** (1692).

Декарт употреблял название *лист* (feuille). В письмах **Гюйгенса** к **Лейбницу** встречается «лист **Декарта** или **Роберваля**». Однако это название не принимается, и в позднейших письмах **Лейбниц** приводит только уравнение кривой без какого-нибудь наименования. В XVIII в. прочно вошло в употребление название «лист». Наконец, в «Энциклопедии» **Д'Аламбер** восстанавливает *лист* **Декарта**. [213, с. 51]; [34, с. 303]; [138, с. 68].

ЛИСТ МЁБИУСА

Тот факт, что существуют поверхности, имеющие только одну сторону, был установлен одновременно и независимо друг от друга **Мёбиусом** и **Листингом** (1858). **Листинг** опубликовал это открытие в 1862 г. **Мёбиус** послал сообщение в Париж, и оно было погребено в архивах Академии наук до 1865 г. Публикация **Мёбиуса** вызвала интерес к односторонним поверхностям, может быть потому, что она была подробнее. **Клейн** писал, что этот анекдотически рассеянный профессор, скромный и даже робкий, обладал и научной смелостью, глубиной мысли и фантазии, и талантом педагога.



Хотя **Мёбиус** предложил название *односторонняя поверхность*, в старой литературе двусторонние поверхности называли «простыми», а односторонние — «двойными» (потому что для их окраски «нужно краски в два раза больше»!). Лист **Мёбиуса** в иностранной литературе называют более подходящим термином «band, strip» (лента, полоса). [198, III_1, с. 216].

ЛОГАРИФМ

Логарифмы были изобретены **Непером**, шотландским бароном, и **Бюрги**, другом **Кеплера**, королевским придворным часовых дел мастером в Праге, а также мастером астрономических инструментов. **Непер** изобрел логарифмы не позднее 1594 г., но опубликовал свое открытие лишь 20 лет спустя. В названии его труда «Описание удивительной таблицы логарифмов» — тот же восторг, которым логарифмы были встречены всюду и который сохранился и столетия спустя: «Изобретение логарифмов, сокращая вычисления нескольких месяцев в труд нескольких дней, словно удваивает жизнь астрономов» (Лаплас).

Таблицы **Бюрги** были составлены в течение 1603–1611 гг. Предполагают, что они были обнародованы через 10 лет под названием «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий, вместе с основательным наставлением, как их нужно понимать и с пользой применять во всех вычислениях». Они остались незамеченными и были обнаружены только в 1856 г. В 1624 г. **Кеплер** вместе со своим зятем **Якобом Борчем** выпускают свои таблицы логарифмов.

Название, данное **Непером**, происходит от греческих слов λόγος и ἀριθμος — оно означает буквально «числа отношений» и объясняется тем, что логарифмы возникали при сопоставлении членов двух последовательностей. Основание его логарифмов близко к e^{-1}. Английский математик **Бриггс** упростил таблицы **Непера** и убедил его перейти к десятичному основанию (1624). Эти логарифмы впоследствии стали называться *бригговы*, или *десятичные*, или *обыкновенные*. На континенте логарифмы **Непера** стали известны в 1617 г., когда берлинский преподаватель математики **Урсинус** выпустил книгу «Курс практической математики», включив в нее сокращенные таблицы **Непера**.

Таблицы с основанием e ввел учитель математики в Лондоне **Спейделл**, он издал в 1619 г. таблицы «новых логарифмов» чисел от 1 до 1000. Такие логарифмы «естественно» возникают при определении площадей, ограниченных гиперболой, для этого **Меркатор** простым делением представил функцию $y = \frac{1}{1+x}$ рядом $1 - x + x^2 - \ldots$, поэтому он назвал логарифмы при основании e *натуральными* или *гиперболическими* (1667–1668). Десятилетием раньше итальянский математик **Менголи** констатировал важность логарифмов с основанием e и называл их Logarithmi naturali. Это название употребляли **Галлей** (1695), **Коши** (1823).

Термины *логарифм* и *антилогарифм*, введенные **Непером**, получили современный смысл у **Валлиса** (1693). **Непер** же подразумевал под логарифмом $\log \sin \alpha$, а под антилогарифмом — $\log \cos \alpha$. *Характеристика* (вместе с этим термином) появляется впервые в “Arithmetica logarithmica” **Бриггса** в 1624 г.; в таблицах **Непера** и числа, и их логарифмы — целые. Опускать характеристику в таблицах логарифмов стали после того, как это сделал **Шервин** в своих «Математических таблицах» (1705). Обыкновение писать знак минус над характеристикой ввел **Оутред** в “Clavis mathematicae” в издании 1652 г. Как это часто бывает, прием не сразу встретил признание. *Мантисса* (от этрусского слова mantissa — «добавка, придаток») была введена **Валлисом**, который называл так дробные знаки любой десятичной дроби. Впервые **Эйлер** воспользовался этим словом для обозначения десятичных знаков только логарифма (1748).

Понятие *основание логарифмов* ввел **Бриггс**. Слово *основание* (*base*) заимствовано из теории о степенях и перенесено в теорию логарифмов

Эйлером. *Модуль перехода* употреблял уже **Меркатор**, а термин ввел **Коутс** (1712). Глагол *логарифмировать* появился только в XIX в. у **Коппе**.

Непер не употреблял никаких символов для обозначения логарифмов. Напрашивающиеся сокращения Log, log или l (у **Кеплера**, **Бриггса**, **Оутреда** соответственно в 1624, 1631, 1647 гг.) употреблялись в течение века без строгого различения их. **Коши** первый предложил ввести различные знаки для десятичных и натуральных логарифмов. Обозначения, близкие к современным, ввел американский математик **Стрингхэм** (1893). Именно он обозначил натуральные логарифмы чисел через ln , логарифмы чисел при основании b — через "${}^{b}\log$ ", логарифмы при комплексном основании — через "$\log_k$". Это же обозначение использует **Штольц**, ученик **Вейерштрасса**, именно $y = {}^{B}\log x$ (1905).

Определение логарифма как показателя степени данного основания можно найти у **Валлиса** (1665), **И. Бернулли** (1694) и **Джонса** (1633). Ученик последнего — **Гардинер** — ввел впервые это определение и систематическое изложение на этой основе в руководстве "Tables of Logarithmus" (1742). В курс алгебры логарифмы впервые включил **Эйлер**, который дал определение логарифмической функции как обратной показательной (1770). Логарифмическую кривую впервые построил **Гюйгенс**. Несмотря на быстрое распространение логарифмов и на то, что они прочно вошли в обиход, в их теории оставалось много неясного даже для выдающихся умов.

В 1712–1713 гг. между **Лейбницем** и **И. Бернулли** возник знаменитый спор о логарифмах отрицательных чисел. Аргументы их кажутся тяжелой артиллерией, двинутой против воробья. **И. Бернулли**, например, доказывал, что $\ln(-x) = \ln x$, исходя из того соображения, что $d\ln(-x) = d(\ln x)$ (остальные три довода такого же уровня). **Лейбниц** опровергал это положение, приводя разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

которое дает

$$\ln(-1) = \ln(1-2) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \ldots \neq 0.$$

Даже после статей **Эйлера** «О споре между **Лейбницем** и **Бернулли** о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (1749), «О логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (1762) проблема не приобрела характера тривиальной истины. В 1810 г. (!) **Лакруа** писал: «Теория **Эйлера** принята теперь согласием наиболее выдающихся аналистов. Несмотря на это следует сознаться, что вопрос о логарифмах отрицательных чисел не свободен еще, быть может, от некоторой туманности».

Таблицы десятичных антилогарифмов составили английские математики **Пелл** и **Уорнер** между 1630 и 1640 гг. Натуральные антилогарифмы вычислены бароном **Вега**, австрийским офицером и математиком (1794). [226, II, с. 162, 246–262]; [183, II, с. 43]; [185, II, с. 105–110]; [151, с. 16]; [219]; [186, с. 152]; [50]; [65, **2**, с. 55–66].

ЛОГАРИФМ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ

Впервые **Эйлер** исследовал функцию

$$\int_0^x \frac{dx}{\log x}.$$

("Institutiones Calculus integralis", 1768–1770). Название и обозначение $\mathrm{li}(x)$ ввел **Зольднер**, который написал книгу об интегральном логарифме — "Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante" (1809). Обозначение составлено из начальных букв слов logarithm integralis. Термин был повторен **де Морганом** (1842) и **Бретшнайдером** (1873).

Гаусс поведал, что интерес к этой функции у него возник, когда ему было 15-16 лет и он догадался, что разность $\mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2)$ выражает число простых чисел, меньших чем x. **Гаусс** и **Бессель** вычислили таблицы интегрального логарифма (1810–1812). [198, II_1, с. 174]; [34, с. 179, 415].

ЛОКАЛЬНЫЙ

Термин произошел от латинского *localis* (местный).

ЛУНОЧКИ ГИППОКРАТА

Гиппократ, автор первого учебника геометрии, открыл части круга (луночки трех типов), допускающие квадратуру. Это был первый пример определения площади фигуры, ограниченной кривыми линиями. Квадрируемые криволинейные фигуры интересовали, естественно, многих ученых, среди них были **Леонардо да Винчи**, **Лейбниц**, **Чирнгаузен**, **Дж. Грегори**, **Лопиталь** и др.

Впервые все пять квадрируемых круговых луночек нашел финский математик **Уинквист** (1766). Его работа осталась малоизвестной. В 1771–1772 гг. такие же результаты получил **Эйлер**, который высказал предположение, что кроме этих случаев нет квадрируемых луночек. Когда в 1840 г. **Клаузен** вновь открыл квадрируемые луночки, он считал, что **Гиппократу** был известен только один случай и что четыре новых найдены им впервые. [173]; [191]; [34, с. 385]; [9, с. 120].

ЛУЧ

Строгая терминология для *прямой, луча, отрезка* была установлена Якобом **Штейнером** (1833).

М

МАЖОРАНТА

Термин происходит от французского *majeur* — больший. **Дьедонне** нашел примеры применения метода мажорант у **Ньютона**, однако в постоянное употребление *мажорирующие функции* в математику ввели **Коши** и **Вейерштрасс**.

Коши широко использовал их уже с 1821 г. В серии статей 1833–1835 гг. он строил решения дифференциальных уравнений в частных производных, привлекая мажорирующие функции, а также доказывал сходимость рядов (и числовых, и функциональных), сравнивая их с геометрической прогрессией. Метод **Коши** был усовершенствован и облегчен его последователями — **Брио** и **Буке** (1856).

Независимо от **Коши** к такой же аргументации пришел **Вейерштрасс** в 1842 г. Прием был изложен в его Лекциях (отсюда теорема **Вейерштрасса** о равномерной сходимости), а в публикациях метод **Вейерштрасса** появился только в 1894 г. («Werke», I).

Названия majorante, Majorantenrechnung распространились очень быстро и стали общепринятыми уже к середине XIX в. [198, II_1, с. 174]; [34, с. 179].

МАКСИМУМ, МИНИМУМ

Термины представляют собой латинские *maximum*, *minimum* (наибольшее, наименьшее). Отдельные задачи на нахождение экстремума были решены древнегреческими математиками. До XVII в. для решения каждой такой задачи создавался индивидуальный метод.

То обстоятельство, что вблизи экстремума изменение функции «незаметно», было отмечено **Кеплером** в 1615 г. Задачей занимались также **Винченцо Вивиани**, **Бонавентура Кавальери**, **Эванжелиста Торричелли**.

Первый общий алгоритм изобрел **Ферма** (ок. 1629 г.), метод изложен в работе “Methodus ad disquirendam maximam et minimam” («Метод отыскания наибольших и наименьших значений», 1638). Из писем **Ферма** видно, что он умел различать максимум и минимум по знаку $\Delta^2 y$. **Ферма** «скупо» публиковал свои труды, под конец жизни он стал обдумывать возможность обнародовать их. В 1654 г. он попросил, чтобы после его смерти **Пьер Каркави** и **Блез Паскаль** опубликовали его работы (однако **Ферма** пережил **Паскаля**). Некоторые результаты **Ферма** стали известны из публикации его писем, из книг его друзей, нахождение экстремума поместил **Эригон** в своем «Курсе математики» (1642) с согласия **Ферма**.

Решительный шаг в развитии общей теории сделан **Лейбницем** — в его “Nova methodus” (1684) рассматриваются наличие экстремума при $dv = 0$ или $dv = \infty$, связь между убыванием и возрастанием функции и знаком dv, между выпуклостью графика функции и знаком d^2v. Как теперь известно, все это знал и **Ньютон**. Случай, когда первые n производных обращаются в нуль, рассмотрел впервые **Маклорен** (1742).

Первые попытки перенести методы на функции нескольких переменных сделали голландский математик **Гудде** (1654) и **Эйлер**, который исследовал задачу в общем виде и установил необходимые условия (достаточным он считал

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0,$$

«Дифференциальное исчисление», 1755 г.)

В первой печатной статье **Лагранжа** ("Recherches sur la méthode de maximis et minimis", 1759) отмечены ошибки предыдущих авторов, составлены выражения первого дифференциала, второго (а в случае $d^2 f = 0$ — третьего); в 1773 г. **Лагранж** решил задачу для $f = f(x, y, z)$. Наконец, в 1797 г. **Лагранж** рассмотрел экстремум функции $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Достаточные условия, полученные **Лагранжем**, аналогичны критерию **Сильвестра** для определенности квадратичной формы.

Эйлер, **Лагранж**, решая задачу, не давали определения максимума и минимума функции нескольких переменных. Впервые строгое определение было дано только **Вейерштрассом** в его лекциях по математическому анализу.

Пеано придумал пример

$$f(x, y) = \left(y^2 - 2px\right)\left(y^2 - 2qx\right), \quad p > 0, \quad q > 0,$$

который опровергал существовавшие к тому времени критерии.

Русские математики внесли большой вклад в развитие теории экстремума функций многих переменных — работы **П. А. Рахманова** (1810), **Н. Д. Брашмана** (1835), **В. Я. Буняковского** (1863), **В. П. Ермакова** (1892), **Б. Я. Букреева** (1892, 1896), **А. Н. Коркина** (1857) содержат важнейшие результаты современной теории. **М. Е. Ващенко-Захарченко** впервые применил критерий **Сильвестра** к определению достаточных условий экстремума функции нескольких переменных (1867). **Коркин** впервые рассмотрел случаи, когда функция или ее производные разрывны (1857).

Пифагор (ок. 480 г. до н. э.) решил первые изопериметрические задачи, доказав, что из всех фигур одного и того же периметра круг имеет наибольшую площадь (и что из всех тел одной и той же площади поверхности сфера имеет наибольший объем). Метод неопределенных множителей **Лагранжа** опубликован им в 1773 г. ("Solutions analytiques de quelques problémes sur les pyramides triangulaires"). [165, с. 381]; [170, с. 400]; [86]; [207].

МАТЕМАТИКА

μανθάνω

Слово греческого происхождения; μαθημα означает «наука, учение», в свою очередь, происходит от глагола μαθάνω, первоначальное значение которого — «учусь через размышление». Термин, таким образом, категорически отбрасывал учение путем опыта. Пифагорейцы знали четыре μαθημα, т. е. четыре отрасли науки: учение о числах (арифметика), теорию музыки (гармония), учение о фигурах и измерениях (геометрия) и, наконец, астрономию и астрологию.

Учение **Пифагора** было тайным и предназначалось только для посвященных, своими открытиями нельзя было делиться с непифагорейцами. Так, за нарушение тайны **Гиппас** был изгнан из школы. Последовательные пифагорейцы назывались акузматиками (*ακουσμα* — «священное изречение»), последователи **Гиппаса** в противоположность им стали называть себя «математиками» — «приверженцами науки».

В России термин известен с X в. В XV в. так называли астрологию, а математика называлась геометрией. Лишь в XVII–XVIII вв. под словом *математика* стали понимать и арифметику, и геометрию. [23, с. 149–151]; [174, **56**, с. 19].

МАТРИЦА

Термин происходит от латинского *matrix* (матка животного) и объясняется тем, что первые матрицы, рассмотренные **Сильвестром** и **Кэли**, порождали линейные преобразования. Современные обозначения — две вертикальные черточки — ввел **Кэли** (1843–1845), а круглые скобки — английский математик **Каллис** (1913). До того как термин был узаконен в математике, употребляли естественное «таблица» (le tableau, **Коши**, **Эрмит**, 1854, 1858). В русских алгебраических курсах до конца XIX в. также использовали слово «таблица», «таблица элементов, состоящая из n строк и m столбцов», так же как и другие «буквальные переводы» терминов: «горизонтали» и «колонны» вместо современных «строки, столбцы» (**Ващенко-Захарченко**, 1877; **Тихомандрицкий**, 1892; только у последнего уже нет запятых между индексами элементов!).

Матрицы 3×3, 4×4 встречаются у **Эйлера**, который называл их «квадратами» («Алгебраическая задача о совершенно замечательных свойствах», 1771). В 1801 г. **Гаусс**, рассматривая линейное преобразование, исчерпывающе задавал его таблицей коэффициентов

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix}.$$

Однако **Гаусс** не оперировал с таблицами как с математическими объектами.

К середине XIX в. из исследований различных направлений возникло исчисление матриц. Многие методы, понятия, теоремы были созданы в других теориях. Первыми источниками послужили теория детерминантов и теория систем линейных уравнений. **Кэли** в 1858 г. рассмотрел матрицу как алгебраическую величину и определил сумму, произведение матриц и умножение матрицы на число, установил свойства ассоциативности и некоммутативности умножения. Кажется, **Кэли** и заметил первым, что «понятие матрицы предшествует идее детерминанта». **Сильвестр** писал, что его интерес к этой теории вырос из его исследований неравенства **Чебышёва** для простых чисел. В ходе их **Сильвестр** пришел к системе уравнений; к этому надо добавить интерес **Сильвестра** к теории инвариантов и дружбу с **Кэли**. В 1882 г. он перевел результаты на язык матриц, и эта теория стала центральной в его исследованиях. После двух лет у **Сильвестра** — громадный прогресс в понимании алгебры матриц. Кульминационная работа **Сильвестра** — серия статей "Lectures on the Principles of Universal Algebra" (1884). Его работы вызвали отклик **Пуанкаре** ("Sur les nombres complexes". 1884).

Операции с матрицами распознали в "Ausdehnungslehre" (1844) **Германа Грассмана**: из линейного преобразования (в современных обозначениях и терминах) $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ **Грассман** получал $A = \mathbf{x}'/\mathbf{x}$; эти новые образования он называл «дроби» и развил «исчисление дробей». Но эти результаты (как и «вариант» векторного исчисления **Грассмана**) были поняты спустя десятилетия и не оказали влияния на формирование исчисления матриц. Последовательная теория была развита **Гамильтоном** (в его теории кватернионов) и его последователями — **Тэтом**, **Келлендом** и особенно **Уиллардом Гиббсом**. В 1880 г. **Б. Пирс** показал, что система гиперкомплексных чисел эквивалентна алгебре матриц, и выписал матрицы, «соответствующие» «единицам» $1, i, j, k$.

Часто цитируемый мемуар **Кэли** был неизвестен вне Англии (до 1880 г.). За это время и на континенте была развита теория матриц в работах по квадратичным и билинейным формам и линейным преобразованиям. Ключевую роль сыграла статья **Вейерштрасса** об элементарных делителях (1868). Теория преобразования квадратичных форм лежала вне сферы основных интересов **Вейерштрасса** (однако в 1859 г. он читал курс "Die homogenen Functionen zweiten Grades mit beliebig vielen Veränderlichen"). Высказывают предположение, что это направление исследований возникло под влиянием **Карла Борхардта**. Их дружба началась еще в 1854 г., когда **Вейерштрасс** был преподавателем гимназии и **Борхардт** приехал в заштатный городок познакомиться с автором присланной в журнал выдающейся статьи. **Борхардт** же написал свою докторскую диссертацию под руководством **Якоби**, которому, как известно, принадлежат основополагающие работы по теории детерминантов. **Якоби** также изучал линейные преобразования n переменных (1834). Таким образом, существует непрерывная линия развития «немецкой части» учения от **Якоби** до коллег и учеников **Вейерштрасса** — в частности **Кронекера** и **Фробениуса**. Исследования последнего, имевшие фундаментом теорию билинейных форм **Вейерштрасса** и **Кронекера**, далеко превосходили результаты **Кэли**.

В 1867 г. опубликована статья **Лагерра** "Sur le calcul des systèmes linéaires", в которой матрицы трактовались в почти современной форме. Наконец, **Фробениус** связал идеи **Вейерщтрасса**, **Эрмита**, **Кэли**, отца и сына **Бенжамена** и **Чарлза Пирсов**, **Якоби** ("Ueber lineare Substitutionen und bilinearen Formen", 1878).

В конце XIX в. эти исследования слились в единую теорию, и уже появляется "Sketch of the History of the Development of the Theory of Matrices" (H. Taber, 1889). [198, I_1, с. 169]; [80, с. 66]; [185, II, с. 103–105]; [204].

МЕДИАНА

Термин образован от латинского *medius* (средний). [113]; [219].

МЕРА МНОЖЕСТВА

Условие интегрируемости функции, сформулированное (1854) **Риманом** (опубликовано в 1868 г.), «навело на идею меры для множества точек разрыва функции на интервале; однако должно было пройти почти 30 лет, прежде чем было найдено удобное и плодотворное определение этого понятия» (Бурбаки).

Первые целенаправленные попытки определить понятие и развить теорию были сделаны **Карлом Гарнаком** и **Полем Дюбуа Раймоном.** К 1883 г. **Кантор** познакомился с их идеями. Эти три математика — предшественники **Пеано** и **Жордана**, которые ввели «внутреннюю меру» (**Пеано** сознавал, в отличие от **Кантора**, что не всякое множество имеет меру).

Мероопределение **Пеано** введено в его Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale («Геометрические приложения анализа бесконечно малых», 1887). В русской литературе за этой мерой сохраняется название «мера **Жордана**», определение которого содержится в Cours d'Analyse (1893). Терминология **Пеано** и **Жордана** одинакова: «внутренняя (внешняя) площадь, измеримое» множество.

В 1884 г. **Штольц** предложил определение меры, которое эквивалентно понятию внешней меры **Лебега** (1902). В связи с построением «своего» интеграла **Лебег** дал определение меры точечных множеств, включающее все различные предыдущие мероопределения как частные случаи (в том числе он учел и некоторые идеи **Бореля**, который ввел понятие меры точечного множества в 1898 г.). Оставалось сделать один шаг, чтобы перейти к общему понятию меры, который и сделал **Радон** в 1913 г.

Долго меру обозначали mes — сокращение слова mesure. Затем осталась только первая буква m. [214]; [188]; [206]; [114].

МЕРОМОРФНОСТЬ

Слово *мероморфный* составлено из греческих μερος (дробь) и μορφη (вид, форма). Такое название для функции ввели **Брио** и **Буке** (1859).

МЕТА

Греческое μετά, входящее во многие математические термины, значит «после, следом» и обозначает переход, перенос (свойства). Термин *метаматематика* ввел **Гильберт**, остальные — *метаязык*, *метатеорема*, *металогика* и т. д. — образованы по аналогии.

МЕТОД

Греческое μέθοδος означает буквально «дорога вослед за чем-либо», оно составлено из μετά и ὁδός (дорога, путь). **Платон** и **Аристотель** стали употреблять это слово как название совокупности математических процедур, операций, необходимых для построения или получения результата. [216].

МЕТОД АПАГОГИЧЕСКИЙ (ИЛИ МЕТОД ОТ ПРОТИВНОГО)

Такое название дали ученые XVII в. Он образовано от латинского apage (прочь, вон), но это слово произведено от греческого корня. Одно из первых доказательств от противного, известных нам, — это доказательство **Евклида** существования бесконечного числа простых чисел.

МЕТОД БОЛЬЦАНО

Этот прием рассуждений, вошедший во все учебники математического анализа и теории множеств, применил впервые чешский математик **Бернард Больцано** («Чисто аналитическое доказательство...», 1817). Вряд ли кто-нибудь из современников **Больцано**, кроме **Абеля**, **Лобачевского** и **Коши** понял эту работу. **Абель** с ней познакомился, будучи в Париже, в 1826 г. и собирался ехать в Прагу, чтобы встретиться с этим монахом-ученым; если бы не ранняя смерть **Абеля**, идеи **Больцано**, возможно, оказали бы существенное влияние на математику через **Абеля**.

Коши виделся с **Больцано** во время жизни в эмиграции, с семейством изгнанного короля Карла X; об этом свидании стало известно только в XX в., когда прочитали письма **Больцано** к его сестре. Некоторые определения, данные **Больцано** в статье 1817 г., **Коши** повторил в своих лекциях (без ссылок на **Больцано**). Через полвека эти идеи стали рабочим инструментом в «Лекциях» **Вейерштрасса**: «...без заключений, которые развиты **Вейерштрассом** из принципа **Больцано**, невозможно преуспеть в многочисленных исследованиях» (Шварц). Ближайшие ученики **Вейерштрасса** не приписывали ему изобретение метода, а говорили: «метод **Больцано**, развитый **Вейерштрассом**...», «метод, изобретенный **Больцано** и усовершенствованный **Вейерштрассом**...».

Первый учебник, в котором изложение построено на этой основе — книга **Штольца** "Vorlesungen über allgemeine Arithmetik nach neueren Ansichten" («Лекции по общей арифметике, согласно новой точке зрения», 1885–1886). [175, **10**, с. 43–77]; [201]; [200].

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Метод детально разработан **Ж. Л. Лагранжем** при решении дифференциальных уравнений (публикации 1762, 1765, 1775 гг.). Вообще говоря, метод был известен раньше **Эйлеру** (сочинение о приливах и отливах). Этот же прием независимо придумал **Д. Бернулли** (1740). Однако **Эйлер** варьировал не все величины, кроме того он допустил некоторые ошибки в вычислениях; получившиеся результаты настолько огорчили его, что он перестал заниматься дальнейшим развитием метода. Название дал **Лагранж**. [167, с. 435]; [62, с. 69].

МЕТОД ГОРНЕРА

Впервые метод опубликован **П. Руффини** в статье "Sopra la detaminazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado" («Об определении корней численных уравнений любой степени», 1804). Он был награжден за эту работу золотой медалью, учрежденной в 1802 г. Итальянским научным обществом за улучшение в методах решения численных уравнений.

Вполне аналогичный метод был предложен в 1819 г. **Уильямом Джорджем Горнером**, "A New Method of Solving Numerical Equations of All Orders by Continuous Approximation" («Новый метод решения численных уравнений с помощью непрерывного приближения»). Затем последовали еще две его статьи (вторая — в 1845 г.)

Схема вычислений, известная под названием *схема* **Горнера**, почти точно повторяет предложенную **Руффини**, а не **Горнером**. Изложение **Горнера** было весьма сложным и запутанным и можно было ожидать, что метод не будет замечен. Этого, однако, не произошло благодаря двум математикам — **Юнгу** и **Моргану**, которые изложили метод в своих книгах, вследствие чего метод завоевал в середине столетия широкую популярность.

МЕТОД ДИАГОНАЛЬНЫЙ

Был изобретен **Георгом Кантором** при доказательстве несчетности континуума. Первое сообщение — в письме **Дедекинду** (1873). Этот метод при обнародовании был признан «переворотом в математическом мышлении». Впоследствии выяснилось, что несколько ранее такой же прием придумал **Дюбуа Раймон**. [214].

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Этот метод возник довольно рано и разрабатывался на протяжении XVII в. одновременно в теоретическом и практическом направлениях. Одной из важнейших задач эпохи было составление тригонометрических, логарифмических, навигационных и тому подобных таблиц, необходимых из-за быстрого развития географии, теоретической и практической астрономии, небесной механики. Многие из наиболее крупных математиков, начиная с **Кеплера** и кончая **Гюйгенсом** и **Ньютоном**, участвовали в этом либо непосредственно, либо теоретическими изысканиями. У **Бриггса** (1624) мы находим употребление разностей высших порядков (при **интерполяции**). [20, с. 183].

МЕТОД ЛАГРАНЖА (НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ)

Правило появилось при решении изопериметрических задач у **Эйлера** (1744) и **Лагранжа** (статья 1773 г. и «Аналитическая механика», 1788). **Вейерштрасс** дал строгое доказательство этому приему.

Л. А. Люстерник (1934) перенес метод на задачи функционального анализа. [165, с. 223].

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод давно использовался в статистике под названием «пробных выборок». В годы войны **Джон фон Нейман** и **Улам** применили его к решению задач диффузии. Американские физики придумали ему название, которое должно отражать тот факт, что в вычислительном процессе используются различные случайные решения.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Впервые метод был опубликован под этим же названием (méthode des moindres quarrés) **Лежандром** в 1805 г. После ознакомления с ним **Гаусс** заявил, что он пользовался этим принципом с 1795 г. Последовали раздраженное письмо **Лежандра** и ссылки **Гаусса** на частные письма к различным ученым, в которых он сообщал о применении этого метода. **Гаусс** вспоминал впоследствии, что был уверен, что его предшественник в Обсерватории в Гёттингене тоже использовал этот метод при обработке результатов наблюдений. Просмотрев бумаги (**Тобиаса Майера**), он убедился в обратном. Но и тогда воздержался от публикаций. Спор о приоритете не разгорелся, так как было признано, что оба ученых открыли метод независимо.

Гаусс обосновывал и выводил метод тремя существенно различными способами (его публикации относятся к 1821–1823 гг.). **Лаплас** после статьи **Лежандра** связал метод с теорией вероятностей, что придало больше цены методу в глазах **Гаусса**. С этой же точки зрения (теоретико-вероятностной) рассмотрел приложения метода и американский математик **Эдрейн** (1808).

Фундаментальные мемуары **Гаусса** 1823 и 1826 гг. (а именно "Theoria combinationibus observationum" и "Supplementum") послужили источником для появления понятия **корреляции**. [22, с. 143–145]; [175, **41**, с. 171–184]; [198, I_2, с. 771]; [77, с. 44].

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Этот метод изобрел **Декарт**, который впервые применил его в своей «Геометрии» (1637). Блестящие приложения метод нашел у **Ньютона**, а затем у **Лейбница** (в частности, в практике интегрирования) [165, с. 223].

МЕТОД НЬЮТОНА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ньютон сообщил о нем **Ольденбургу** в 1676 г. Впервые метод, изобретенный в 1669 г., опубликован в «Алгебре» **Валлиса** (1685), публикация самого **Ньютона** относится к 1711 г.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Этот метод испокон веков применялся в астрономии для численного решения уравнений. С большой общностью он был сформулирован **Коши** для дифференциальных уравнений в частных производных (1840) и примерно в то же время применен к обыкновенным дифференциальным уравнениям **Лиувиллем**, который доказал сходимость ряда приближений для некоторых специальных случаев в 1838 г.

Аналогичные приемы изобрели также **Лазар Фукс** (1870), **Джузеппе Пеано** (1887) для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка. **Пеано** полагал, что он был первым изобретателем метода и несколько раз пытался доказать свой приоритет перед **Пикаром**, что, вообще говоря, было совершенно несвойственно **Пеано**. Использование метода для доказательства существования решения восходит к **Шварцу** (1885). [198, II_1, с. 198–200]; [167, с. 448]; [206]; [188].

МЕТОД СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

К. Нейман изобрел этот знаменитый метод в 1870 г. и опубликовал его в "Untersuchungen über das logarithmische und Newtonische Potential" (1877); с помощью этого метода **Нейман** доказал равномерную сходимость ряда последовательных приближений. [177, с. 363].

МЕТРИКА

Термин происходит от греческого μέτρον (мера), поэтому *метрический* означает «связанный с измерением». Впервые разделение свойств на «метрические» и «проективные» ввел **Понселе** (вместе с этой терминологией) в 1820–1830 гг.

В работах **П. Л. Чебышёва** о приближении функций многочленами фактически уже использовалась и C_1-метрика, и метрика среднего квадратичного. Терминология, употребляемая в проективной метрике, введена **Клейном**, ему принадлежат названия *гиперболическая*, *эллиптическая*, *параболическая геометрия*. [76, с. 190].

МИЛЛИОН

Латинское *mille* означает *тысяча*. Слово *миллион* было введено впервые Марко Поло при описании богатств Китая для обозначения «большой тысячи», т. е. $1\,000^2$. Первоначально оно, по-видимому, являлось названием конкретной меры — 10 бочонков с золотом. В XV–XVI вв. это слово распространилось и в других европейских странах. Французский математик **Шюке** в 1484 г. ввел термины *биллион*, *триллион*, *квинтиллион*, *септиллион*, *секстиллион*, *нонниллион* для обозначения степеней $1\,000\,000^2$, $1\,000\,000^3$, ..., $1\,000\,000^9$. Примерно с середины XVII в. во Франции числа стали разделять на периоды по три цифры в каждом. При этом *биллион* вместо прежнего значения 10^{12} получил значение 10^9; триллион, квадриллион и т. д. стали равными 10^{12}, 10^{15}, ... Однако в Англии, Германии и некоторых других северо-европейских странах слова «биллион, триллион» и т. д. до сих пор значат 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, ...

В язык русской математики слова *миллион*, *биллион*, *триллион* ввел **Л. Ф. Магницкий** (1703). [163, I, с. 38]; [56, с. 44].

МИНОР

Латинское minor означает «меньший». При первых появлениях термина «minor» являлось определением: “Les determinants mineurs”. Затем **Сильвестр** (1850) ввел в рассмотрение “a system of r-th minor determinants” из r строк и r столбцов как детерминант, полученный вычеркиванием строк и столбцов из исходного. В 1852 г. **Сильвестр** ввел обороты *окаймляющий* и *окаймленный миноры*. Еще в 1878 г. в учебниках (**Гуэля**, например) не было четкого разделения минора и алгебраического дополнения.

До конца XIX в. употреблялись термины *minor*, *minor Determinant*, *Subdeterminant*, *Unterdeterminant*. В русской литературе в XIX в. наряду с термином «минор» встречались и «младший детерминант», и «субдетерминант». [178]; [217, **2**, с. 50–52].

МИНУС

Термин образован от латинского *minus* (меньше). О происхождении знака (так же, как и о знаке **плюс**) высказываются различные гипотезы: например, что он эволюционировал так: minus, $\overline{\text{mi}}$, $\overline{\text{m}}$, m и затем $\sim$ или $-$.

МИНУТА

Этот термин (так же как и *секунда* и *терция*) перенесен из латинского языка. Римляне говорили: *minuta prima* (первая доля), *minuta secunda* (вторая доля), *minuta tertia* (третья доля). Для сокращения первую долю стали называть *минута* (доля), вторую — *секунда*, третью — *терция*. [56, с. 239].

МИРИАДА

Слово μυριος означает «бесконечный, неисчислимый».

МНОЖЕСТВО

Родоначальником теории множеств считают **Бернарда Больцано**. Он определил множества конечные и бесконечные, понятие взаимно однозначного соответствия, понятие предельной точки последовательности («Парадоксы бесконечного», 1850).

К понятию числовых множеств и множеств функций подводят работы **Римана**, **Дюбуа Раймона**, **Дедекинда**. На этом этапе результаты теории множеств были «побочным продуктом» при изучении традиционных проблем теории чисел, анализа. **И Георг Кантор** в течение 7-8 лет занимался рассмотрением множеств потому, что этого требовали задачи анализа: выяснение условий разложимости функции в тригонометрический ряд, доказательство существования трансцендентных чисел и др. Примерно в 1879 г. **Кантор** увидел, что рождается самостоятельное учение — о множествах. Все, что было известно к тому времени о множествах, он опубликовал в серии статей. **Кантор** сделал решительный шаг и начал изучать множества произвольной природы, он развил методы, свойственные современной теории множеств, и поставил ее на строго научную основу.

При этом по мере развития теории понятие «множество» претерпело значительные изменения. Интуитивное понимание привело к антиномиям теории множеств, полученным разными авторами к 1900 г. Математики разделились во взглядах на новую теорию. **Гильберт** говорил: «Из рая, созданного нам **Кантором**, нас никто уже не изгонит!» Учитель **Кантора** — **Кронекер** — и его друг **Герман Шварц** заняли резко отрицательную позицию. **Пуанкаре** называл «канторизм» болезнью, от которой математика должна излечиться. На первом математическом конгрессе в Цюрихе (1897) **Адамар** представил доклад «Некоторые возможные приложения теории множеств», а его ученик **Морис Фреше** блестяще подтвердил прогнозы **Адамара**.

Нервное напряжение, атмосфера враждебности, работа в условиях борьбы за признание, возможно, содействовали психическому заболеванию **Кантора**, от первого приступа которого он оправился (1884), но полностью излечиться не смог.

В 1904–1908 гг. немецкий математик **Цермело** сформулировал первую систему аксиом теории множеств. Тем самым был найден выход из кризиса и направление дальнейшего развития теории. Началось триумфальное шествие теории множеств во всех областях математики.

Кантор употреблял вначале термин «Inbegriff» (совокупность), затем — Mannigfaltigkeit (многообразие), и наконец Menge — *множество*, в настоящее время сохранилось его обозначение множества $M = \{m\}$, которое он ввел в 1895 г.

Символика теории множеств в большой степени заимствована из математической логики. Так, **Шредер** в 1890 г. ("Algebra der Logik") ввел знаки, похожие на $\supset$, $\subset$. **Роберт Грассман** (брат математика **Г. Грассмана**) ввел в математической логике обозначение $\bar{a}$ — «отрицание», «не a». **Пеано** продолжил тенденцию (**Буля**, **Шредера**, **Грассмана**) использовать инструмент алгебры логики в математических доказательствах, и для того чтобы не было путаницы между логическими и математическими символами, в работе "Calcolo geometrico..." (1888) он ввел знаки $\frown$, $\smile$ — дужки полуокружностей, из которых в дальнейшем получились знаки пересечения и объединения. **Пеано** ввел знак ε как сокращение греческого εστι (быть); **Бертран Рассел** деформировал символ ε в современный $\in$ (1903). По крайней мере до 1927 г. в ходу были оба обозначения.

От слова contien — содержать — **Пеано** образовал символы С и перевернутую букву С, чтобы обозначать «содержать, содержаться» (1889). Вместе со шредеровыми знаками они трансформировались в $\supset$ и $\subset$.

Русская терминология теории множеств принадлежит **Болеславу Корнелиевичу Млодзиевскому**, который впервые стал читать лекции по теории множеств в Московском университете.

Множество Бореля определил **Борель** в книге "Leçons sur la théorie des fonctions" («Лекции по теории функций», 1898).

Термины *множество упорядоченное и вполне упорядоченное* ввел **Кантор**, сначала — понятие вполне упорядоченного множества (wohlgeordnete, 1883) и лишь через десятилетие (1895) — линейного упорядоченного. Он же ввел понятие типа упорядоченного множества и обозначения ω и ω^*.

Множество всюду плотное, нигде не плотное, плотное в себе — это терминология **Георга Кантора**, который писал überal dicht, niergends dicht, in sich dicht (1883). Всюду плотное и нигде не плотное множества точек разрыва функции (или экстремумов) рассматривал **Липшиц** (1864). **Ганкель** дал общие определения этих понятий. Он писал «множество заполняет отрезок». Затем эти два класса множеств выделили, по-видимому независимо друг от друга, **Кантор** и **Дюбуа Раймон**.

Впервые осознанное различение *замкнутых* и *открытых множеств* встречается у **Дюбуа Раймона** (1882). Определение внутренней точки принадлежит **Кантору**. Понятие граничной точки встречается в ранней работе **Кантора**, но, возможно, оно воспринято им от **Вейерштрасса. Кантор** четко определил понятие замкнутого (abgeschlossen) множества.

С самого начала не было очевидно, что открытые множества окажутся столь важными для математики. Это понятие не сразу получило признание. В 30-х гг. XX в. математики пришли к выводу, что понятие открытого множества является простым и гибким инструментом для исследования всех топологических свойств, и сделали его основой для теории топологических пространств.

К необходимости ввести понятие предельной точки множества пришли почти одновременно **Дюбуа Раймон** и **Кантор**. **Дюбуа Раймон** называл их «точками уплотнения (сгущения)» — Verdichtungspunct (1875). **Кантор** ввел современный термин (1882). Одновременно **Кантор** ввел понятие и название *производное множество* — die erste Ableitung der Menge G (и обозначение G' — т. е. «настоящая» производная). У него была и «вторая производная» (zweite Ableitung G'').

Термин *множество сепарабельное* принадлежит **Кантору**; немецкое separat — отдельный (1885).

В статье 1875 г. английский математик **Генри Джон Стефан Смит** построил примеры совершенных нигде не плотных множеств (как меры нуль, так и положительной меры). К этому времени было известно только понятие нигде не плотного множества **Ганкеля**.

Совершенные множества изучали затем **Дини**, **Вольтерра**, **Гарнак**, **Дюбуа Раймон**. У **Кантора** совершенные нигде не плотные множества появляются только в статье 1882 г., где он и вводит название *совершенное множество* (perfecte Menge), возможно, заимствованное у **Жордана** (parfait). **Смит** установил четкую связь между вопросами меры множества и интегрируемости функции. И все это еще до того, как у **Кантора** возникла идея самостоятельного учения о множествах.

Термин *множество счетное* (abzahlbar) **Кантор** ввел в 1872 г. Мощность счетного множества он обозначил первой буквой финикийского, древнееврейского алфавитов — алеф $\aleph_0$. В русской литературе первоначально употреблялся термин «исчислимая совокупность», затем «исчислимое множество».

Лебег ввел термин *множество меры нуль* в 1904 г. [89, с. 7–8]; [185, II, с. 294–301]; [152, XXII, 1, с. 143–156]; [114, с. 3, 37]; [108, с. 91–113]; [126, с. 14]; [141, с. 39]; [90, с. 3].

МНОЖИТЕЛЬ ИНТЕГРИРУЮЩИЙ

Впервые его применил **И. Бернулли** (ок. 1700 г.). Этот метод вновь открыл **Клеро** (1739), он сформулировал условие, при котором выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ есть полный дифференциал. Полная теория интегрирующего множителя создана **Эйлером** (1760, 1762). [187, **3**, с. 227]; [64, VII, с. 547]; [198, II_1, с. 237].

МОДУЛЬ

Термин происходит от латинского *modulus* (мера). Термин широко использовался в математике.

Выражение *модуль перехода* (при логарифмировании) ввел **Коутс**.

Термин *модуль сравнения* введен **Гауссом** в 1801 г.

В смысле «длина вектора» и *модуль комплексного числа* $A+iB$ термин встречается у **Аргана** (1814). Слово всегда использовал **Коши** в теории комплексной переменной (начиная с 1829 г.) Символ $|\,|$ для комплексного числа появился у **Вейерштрасса** довольно рано (1841), однако во всеобщее употребление вошел нескоро: с 1903 г. физик **Лоренц** стал обозначать так длину вектора (напомним, что в теории кватернионов вектор был и гиперкомплексным числом). [42, с. 89]; [185, **II**, с. 124].

МОМЕНТ, ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Термин *проблема моментов* встречается впервые в 1894–1895 гг. у **Стилтьеса**. Однако одну важную задачу, относящуюся к проблеме моментов, поставил и в частном случае решил **Пафнутий Львович Чебышёв** (1873).

МОНО

Греческая приставка μόνος, входящая во многие термины, означает «один, единый».

Термин *монодромность* принадлежит **Коши**; он составлен из μόνος и δρόμος — бег. Название должно выражать тот факт, что каким бы путем ни происходил «бег» независимой переменной z к точке, монодромная функция принимает в этой точке одно и то же значение.

Термин *монотонность* составлен из μόνος и τονος (натяжение, напряжение, тон). Буквальное значение — «однотонность». Термин ввел **К. Нейман**, который применил его сначала к монотонным последовательностям чисел ("Ueber die nach Kreis- Kugel- und Cylinder- Functionen", 1881). **Нейману** также принадлежат термины *кусочно монотонна*, *кусочно непрерывна* (abtheilungsweise monoton, abtheilungsweise stetig). Понятие четко определил **Дирихле** при исследовании разложения функции в тригонометрические ряды (1837). [77, с. 133]; [198, I_1, с. 67]; [80, с. 439]; [113].

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Различие между счетным и несчетным множествами было замечено **Больцано** (ок. 1840 г.), а затем **Кантором**. Понятие мощности множества **Кантор** сформулировал в 1872 г. Термин *мощность* (Machtigkeit), как пишет **Кантор**, он перенял у **Штейнера**. **Кантор** ввел и символ эквивалентности множеств $\sim$.

В 1874 г. **Кантор** поставил вопрос: можно ли установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и точками отрезка? В Геттингене на праздновании столетия **Гаусса** он обратился с этим вопросом к виднейшим математикам. Никто не ответил: «Да»! Но ведь и сам **Кантор**, имевший доказательство в руках, с трудом верил ему. Он писал **Дедекинду**: «Я это вижу, но я этому не верю» (1877). **Кантор** определял мощность множества M как такое свойство, которое остается после абстрагирования от качества элементов множества и от их порядка. Чтобы подчеркнуть этот факт двойного абстрагирования, он ввел символ $\overline{\overline{M}}$.

В русской литературе вначале употреблялось выражение «размер области». [89, с. 176]; [214, с. 40]; [198, I_1, с. 188].

Н

НАБЛА

Оператор $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}i + \dfrac{\partial}{\partial y}j + \dfrac{\partial}{\partial z}k$ ввел в рассмотрение **Гамильтон** (1846). Он обозначил этот «символический вектор» значком ∇, не называя никак, при этом он применял оператор только к скалярным функциям. Тот факт, что через ∇ можно выразить дивергенцию, ротор и градиент, открыл **Тэт** (1862).

Термин *набла* предложил **Робертсон Смит** (друг **Тэта** и **Максвелла**) из-за сходства знака с остовом ассирийской арфы с таким названием. Слово употреблялось в шуточных стихах, в дружеской переписке, пока не стало, наконец, привычным. В печати этот термин появился впервые, кажется, в статье **Тэта** (1890). До того как термин привился, оператор называли atled — прочитанная наоборот «дельта», в ходу были также «гамильтонов оператор» или «гамильтонов вектор». [1].

НАПРАВЛЯЮЩАЯ

Впервые это название употребил **Лагир** в 1685 г. Французское *directrice* означает «ведущая, направляющая». [159, с. 149].

НЕЗАВИСИМОСТЬ ЛИНЕЙНАЯ

Очень нескоро было замечено, что в далеких друг от друга областях математики используется одно и то же понятие. Оно появилось в середине XIX в., но со страниц научных журналов перешло в учебники в промежуток 1880–1901 гг. Последняя дата — год публикации статьи **Максима Бохера** "The Theory of Linear Dependence".

В векторном исчислении теории кватернионов **Гамильтона** строгого определения линейной зависимости не имелось, но стандартной была фраза: раз α, β, γ лежат в одной плоскости, один из этих векторов можно выразить через остальные... (аналогично утверждение для четырех векторов в пространстве). Более строгое и общее определение (для n-мерного пространства) было дано **Германом Грассманом** во втором варианте его "Ausdehnungslehre..." («Линейном учении о протяженности...», 1861). **Джузеппе Пеано** сформулировал аксиомы линейного векторного пространства (1888) и привел примеры, которые продемонстрировали, что самые разные теории допускают единое изложение, единый метод.

При решении линейных дифференциальных уравнений (начиная с мемуара **Эйлера** 1743 г.) за неимением этого необходимого понятия в центре внимания находилось не свойство частных решений, а требование n произвольных постоянных. Современные традиции в теории дифференциальных уравнений утвердились гораздо позже, чем было определено понятие «линейной зависимости функций одной переменной» в статье **Кристоффеля** с именно таким названием (1858). Например, в «Курсе анализа» **Жордана** (1893) «функции, не связанные никаким соотношением», называются «различными» (как и у **Коши** за 70 лет до того). Первым учебником, где «фундаментальная система решений...», «линейная независимость...» встречаются на каждой странице, является "Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen" (1895) австрийского математика **Людвига Шлезингера**.

Якоби оказал существенное влияние на развитие теории определителей: 30 статей по этой тематике завершала статья «О функциональных детерминантах» (1841). Здесь говорилось о зависимости, а не о *линейной* зависимости (независимости) функций. В «Лекциях» **Кронекера** (опубликованных только в 1901 г.) сделан последний шаг к современному изложению, здесь он ввел «линейно независимую систему s решений». [1]; [198, I, с. 270]; [175, **31**, с. 144]; [64, XXIX, с. 77–88].

НЕИЗВЕСТНАЯ

Уже в самом древнем математическом документе, дошедшем до нас, в древнеегипетской «Расчетной книге писца Ахмеса», есть особое название для неизвестной величины уравнения. Как правило, в древности неизвестная именовалась «вещь, часть». **Диофант** впервые ввел специальный знак, чтобы обозначать неизвестную задачи. Во всех случаях он обозначал неизвестную и ее первые шесть степеней символами $\sigma, \sigma\sigma, \sigma^\nu, \kappa^\nu, \sigma\sigma^\nu, \kappa\kappa^\nu$. В XII в. **Лука Пачоли** также употреблял слово «вещь», только итальянское — *cosa*. От этого корня в Германии и Англии произвели термины *coss*, *cosic art*; последний был синонимом слова «алгебра». Кажется, от этой традиции отступил впервые **Бомбелли** (1572), введя слово tanto (настолько), при этом он ссылался на **Диофанта**.

В 1478 г. **Региомонтан** ввел специальный символ ƶ для неизвестной, затем появляется обозначение q (от *quantita*) у **Рудольфа**. По-видимому, **Шюке** первым использовал показатели для степени неизвестной. Его "Triparty en la science des numbers" («Наука о числах в трех частях», 1484) имела большое влияние на современников, хотя и оставалась неизданной до 1880 г.

Виет (с 1591 г.) обозначал неизвестные величины гласными буквами A, I, O, Y, а известные — согласными B, G, D и др. В это же время распространено и обозначение N от слова numeris. Как уже упоминалось выше, x, y, z в качестве неизвестных (или переменных) ввел **Декарт** (1637). [193]; [54]; [50, с. 143, 153].

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

В учебной литературе до конца XIX в. употреблялись термины «неопределенные формы» (*forms indéterminés*), «неопределенные величины» (в русской литературе эти термины еще употреблены в курсах 1871–1872 гг.).

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ (без каких-либо обозначений) исследовал уже **Лопиталь** (1696). Этот символ появился в переписке **И. Бернулли** (1730), а затем — в печати (**Д'Аламбер**, 1754). Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ рассматривал **Эйлер** (1748), а вида ∞^0, 1^∞ — **Коши** (1821). Позднее **Коши** дал общее правило исследования неопределенностей вида $0^\infty, 0^0$, которое и приводится в современных учебниках. Обозначения $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ и др. впервые привел в учебнике математики **Карстен** (1786). [198, $\mathrm{II}_{1.1}$, с. 28].

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Понятие непрерывности восходит к древнегреческой математике, математики и философы Греции «знали», что в природе нет скачков. Современное понятие о непрерывности переменной величины (в нестрогом виде) могло появиться не ранее **Лейбница**.

Термины *непрерывность*, *непрерывный*, *разрывный* в их современном смысле ввел **Коши**. Эти слова употреблялись и до него, но в них вкладывалось другое значение. **Эйлер**, **Лагранж**, **Фурье**, **Пуассон** (да и сам **Коши** вначале) называли функцию непрерывной, если всюду в области определения она задана одним аналитическим выражением. Например, если функция задана таким образом:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

то правая часть — разрывная функция, а левая — непрерывная. Функция $y = 1/x$, — наоборот, по **Эйлеру** — непрерывна. Впрочем время от времени смысл слова «непрерывный» у **Эйлера** менялся, как и у других математиков. Так, **Арбогаст** (1790) вкладывал в слово «непрерывный» такой же смысл, как и **Эйлер**, а его «разрывность» эквивалентна нашему понятию разрывности.

Коши привлек понятие предела для формулировки «непрерывности функции» (1821). Откуда появилась такая идея? **Коши** не называет источника. Граттан-Гинесс считает, что возможным источником могла быть статья **Больцано** (1817). Определения понятия у **Больцано** и у **Коши** эквивалентны (у обоих нет «непрерывности в точке» функции). Насколько подход был новым, можно судить по тому, что еще в 1848 г. **Стокс** считал определения по **Эйлеру** и по **Коши** тождественными.

В. Я. Буняковский еще в 1839 г. понимает «непрерывность» по **Эйлеру**, а для нового понятия — непрерывности по **Коши** — употребляет наименования «непрерывающаяся, сплошная линия», «сплошность». До этого в русской математике предлагалось название «разверзающиеся кривые». В учебном пособии 1882 г. тангенсоида приведена как «пример многократных перерывов». Но и во французской науке терминология претерпевала вариации: так в Cours de calcul infinitesimal (1878) **Гуэль** противопоставлял «дискретное или численное конкретному или непрерывному» (discrète ou numérique, concrète ou continu).

Коши и **Больцано** писали о непрерывности функции на интервале. В рукописи **Больцано** от 1830 г. (прочитанной в 1920 г.) содержится первое определение односторонней непрерывности. **Коши** доказывал в «Лекциях» непрерывность элементарных функций и указал одно из свойств непрерывных на отрезке функций (впрочем, давно используемое при отделении корней уравнения). В статье 1875 г. **Дарбу** дал определение непрерывности как локального свойства. Впервые **Вейерштрасс** дал определение в терминах ε-δ; его приоритет бесспорен, первая публикация принадлежит, видимо, профессору Политехнической и Нормальной школ **Бонне** (1871). Впервые **Вейерштрасс** стал рассматривать свойства функций, непрерывных на замкнутом отрезке (с 1861 г.), доказательства приобрели «современный вид» к 1874 г. Независимые исследования **Дарбу** относятся приблизительно к тем же годам. Однако современное изложение в курсах математического анализа установилось после «Лекций» **Пеано** (1884) и **Жордана** (1893). Определение непрерывности функции в точке у **Пеано**: $\lim f(x) = f(x_0)$; у **Гуэля**: $\lim f(x) = f(\lim x)$.

Надо только отметить, что в первых изданиях Cours d'Analyse **Жордана** (1878 и 1882) и в курсе **Эрмита** (1873) отсутствовали определение непрерывности функции, свойства непрерывных функций. Стоит также упомянуть, что до исследований **Римана** и **Вейерштрасса** непрерывные функции считались также и дифференцируемыми.

В учебнике **Дини** "Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali" (1878) впервые проведена классификация точек разрыва — *первого* и *второго рода*. Очень быстро появился немецкий перевод (1892), где встречаются и современные термины — «gleichmassige und ungleichmassige Stetigkeit» (равномерная и неравномерная непрерывность), обязанные, конечно, **Вейерштрассу**. **Паш** и **Дюбуа Раймон** назвали *скачком функции в точке* величину

$$\lim[f(a+h) - f(a-h)] \text{ при } h \to 0.$$

Вопрос о непрерывности функции нескольких переменных в точке возник впервые у **Коши**, который привел теорему: функция непрерывна в точке (x_0, y_0), если она непрерывна как функция одной переменной x и как функция одной переменной y (1821). Это утверждение казалось очевидным современникам. Но в 1848 г. **Стокс** знал, что это неверно. Последовали контрпримеры **Дюбуа Раймона** (1869), **Дарбу** (1870), **Шварца** (1872). Современное определение непрерывности функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) было дано **Дарбу** в 1872 г. Но вопрос все еще не считался разрешенным: в 1896 г. **Бэр** вновь открыл, что функция, непрерывная по каждому аргументу x и y, может быть разрывной по совокупности аргументов.

Риман дал определение непрерывности функции комплексной переменной (1851).

Непрерывность функционала определил **Вольтерра**.

С абсолютно непрерывными функциями впервые начал оперировать **Асколи** (1900), он и ввел это название. Он же ввел понятие равностепенной непрерывности (1883); почти в то же время понятие равностепенной непрерывности использовал **Арцела**. [198, $\text{II}_{1.1}$, с. 17, 18]; [198, II_1, с. 28, 29]; [106, с. 50]; [51, I, с. 416]; [178]; [64, XXX, с. 75]; [200, с. 273]; [201, с. 48–55].

НЕРАВЕНСТВО

После введения знака равенства английский ученый **Гарриот** ввел в употребление наши знаки неравенства ("Artis Analytical Praxis", 1631 — посмертная публикация сочинения **Гарриота**). Он обосновал свое нововведение следующим образом: если две величины не равны, то отрезки, фигурирующие в соотношении, не параллельны, а пересекаются. Пересечение может быть справа (>) или слева (<).

Несмотря на то что знаки неравенств были предложены на 74 года позднее знака равенства, в употребление они вошли намного раньше. Одна из причин — то, что в типографиях использовали уже имевшуюся букву V, тогда как наборного знака равенства у них не было. Знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ были употреблены век спустя парижским гидрографом **Буге** и быстро вошли в обиход (хотя предложенные в 1670 г. **Валлисом**, по-видимому, не были замечены). Знаки $\ll$ и $\gg$ были введены **Борелем** и **Пуанкаре** (1901) при сравнении рядов и впоследствии приобрели смысл «много больше» и «много меньше». [45, с. 165]; [185, II, с. 118–120]; [186, с. 157].

НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ

Сформулировано им для тригонометрических рядов (1828).

НОМОГРАММА

Использование простых графических таблиц для вычислений восходит к Античности и к Средним векам: во времена **Гиппарха** эти методы были общепринятыми для решения сферических треугольников, а в 1628 г. в Лондоне было издано руководство **Уингейта** «Построение и использование линий пропорций» (“Consruction and Use of the Lines of Proportions”).

В новое время номограммы получили распространение во второй половине XIX в. Их ввел парижский инженер **Лалан**, который, применив неординарные шкалы на параллельных осях, осуществил спрямление графика (1842). Это преобразование он назвал «анаморфозой». Идея была подхвачена и использована в работах ученых разных стран.

Творцом общей теории номограмм считается французский математик **д'Окань**, который опубликовал ряд работ по теории «считающих чертежей» в период с 1884 по 1894 гг. Именно он и назвал их *номограммами* (“Traité de nomographie”, 1899). Термин состоит из греческих слов νόμος (закон) и γραμμή (запись), аналогично *номография* образована из νόμος и γράφω (пишу); таким образом, буквальный смысл термина — «изображение законов». [198, I_2, с. 1024–1026]; [186, с. 482].

НОРМА

Латинское norma означает «угломер, мера, правило, образец». Слово было весьма употребительным в математике и использовалось в самых различных смыслах: **Гаусс** ввел в 1831 г. понятие и термин *норма комплексного числа* (Norm einer complexen Zahl) как произведение $z\bar{z}$. В русском языке слово первоначально было мужского рода: «**Гаусс** назвал нормом...» (1892).

Гамильтон употребил (независимо от **Гаусса**) совершенно аналогичные понятие и термин в теории кватернионов Nq (1843); отсюда последовало естественное название *норма вектора*.

Затем появились *норма бесконечной матрицы*, *нормальное уравнение* (**Гессе**) и т. п. До конца XIX в. *норма*, *модуль* и *абсолютное значение* были равно распространены. Интересно, что и в теории функциональных пространств выражение *нормированная система функций* появилось раньше, чем понятие и термин *норма функции*.

Истоки понятия нормы функции можно проследить до работ **Сальваторе Пинкерле**: в 1897 г. он использует, по-существу, это понятие. В заметке 1905 г. **Фреше** ввел écart («отклонение») в бесконечномерном пространстве. Возможно, он позаимствовал термин у **Жордана**, который называл «отклонением двух точек плоскости» число $|x - a| + |y - b|$. **Фреше** определяет отклонение как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

(Здесь же он приводит неравенство треугольника). В 1906 г. **Фреше** ввел понятие метрического пространства, определив écart в классе функций

$$(f, g) = \max \left| f(t) - g(t) \right|, \quad t \in [a, b].$$

В дальнейшем **Фреше** называл норму $||\xi||$ «длиной» (longueur de ξ).

В статье 1908 г. **Шмидт** ввел обозначение $||z|| = \sqrt{(z, \bar{z})}$ и перенес на случай гильбертова пространства язык, который к тому времени был довольно всесторонне развит **Пинкерле** и **Фреше**. В 1912 г. будапештский математик **Йозеф Кюршак** использует это обозначение, называя норму $||a||$ «оценкой» (Bewertung). **Рисс** (1918) рассматривал множество функций, непрерывных на $[a, b]$; он назвал *нормой* $||f||$ число $\max |f(x)|$ и принял обозначение **Шмидта**. Даже к 1930 г. терминология еще не установилась: **фон Нейман** употреблял термин «Betrag».

В редко цитируемых (или забытых) работах австрийского математика **Эдуарда Хелли** аксиоматически введено понятие *нормы функционала* — Maximalzahl. Возможно, эта терминология оказала влияние на некоторое время — так, **Радон** в 1919 г. называл норму функционала «минимальная граница».

Шмидт называл сходимость по норме starke Konvergenz (1908). Определение слабой сходимости было дано **Риссом** в его статье (1910), в которой он рассматривал пространства L^p (die Klasse $[L^p]$); здесь один из параграфов озаглавлен “Starke und schwache Konvergenz in bezug auf die Exponenten p”. *Сходимость в среднем* была определена (и названа convergence en moyenne) **Э. Фишером** (1913). Работа **Шмидта** так быстро стала классикой, что уже в 1910 г. была защищена диссертация в Цюрихе «Геометрический язык исследований **Шмидта**». [19, с. 224]; [64, XVIII, с. 75–88]; [51, с. 93]; [175, **26**, с. 60]; [215].

НОРМАЛЬ

Одно из первых появлений этого термина находится в статье **Гюйгенса** от 1659 г., где он строит теорию эволют и эвольвент. **Эйлер** употребил выражение normalis in planum (1775), после чего термин можно считать общепринятым. Так что его использование в векторном исчислении (**Гамильтоном**, **Тэтом** и другими) — это следование общей практике. [175, **27**, с. 15].

НУЛЬ

Нуль систематически употреблялся только в двух системах — в десятичной и в системе исчисления майя. Некоторые ученые полагают, что нуль заимствован у греков: **Птолемей** писал при отсутствии числа букву «омикрон» от слова ονδεν (ничего). Возможно, от этого знака происходит шестидесятеричный нуль. Другие полагают, что нуль пришел из Индии: действительно, одним из достижений индийской арифметики является десятичный нуль. Древнейшая запись с нулем (в Индии) относится к 876 г., а в Камбодже и Индонезии обнаружены записи VII в. (нуль изображался в виде точки в маленьком кружочке).

«Трактат об арифметике» **ал-Хорезми** — первая книга, в которой изложена десятичная система счисления и, в частности, использовался нуль, в виде маленького кружка. Трактат, написанный в первой половине IX в., известен только в латинском переводе XIII в. Первая печатная книга, содержащая «zero», издана во Флоренции в 1491 г.

Первоначально нуль именовался словом «цифра» (это обыкновение дожило до XIX в.). Еще **Эйлер** в «Исчислении нулей» называл нуль cephrae. Термин «nulla figura» — «никакой знак» — появился в рукописных латинских переводах и обработках арабских трудов в XII в. Термин «nulla» встречается в рукописи **Шюке** (1484) и в первой печатной арифметике (1478). [55, с. 95–116]; [65, **3**, с. 49]; [227, II, с. 74].

О

ОБРАЗ, ПРООБРАЗ

Понятия впервые ввел **Дедекинд** в работе “Was sind und was sollen die Zahlen?”. Она была опубликована в 1888 г., но основные ее результаты относятся к 1872–1878 гг. До этой работы встречались преобразования одной поверхности в другую, проекции. **Дедекинд** же ввел понятие отображения (*Abbildung*) одного множества (*System*) в другое без оговорок об их природе. Здесь же вводится привычная для нас терминология: *образ* (das Bild); *элементу* s *ставится в соответствие* s'; *тождественное преобразование* (*identische Abbildung*); *преобразование множества в себя* (*in sich selbst*)... и обозначения — образы элемента s и множества T отмечаются штрихами s' и T'.

ОБРАЗУЮЩАЯ

Название formatrice впервые употребил **Лагир** (1685). В русской литературе вплоть до начала XX в. термин переводился как «производящая» [159, с. 149].

ОВАЛ

Французское *oval* произошло от латинского *ovum* — яйцо. Астроном **Жан Доменик Кассини** ввел так называемую «обобщенную лемнискату» или «овал **Кассини**». Кривая была приведена в «Началах астрономии» (Elements d’astrononmie, 1749) его сына **Жака Кассини**. По мнению **Кассини**, эта кривая должна заменить эллипс в астрономии. [113].

ОГИБАЮЩАЯ

Огибающая семейства кривых (а именно — траекторий тел, брошенных под разными углами с данной скоростью из данной точки) встречается впервые у **Торричелли** в книге «О движении естественно падающих и брошенных тел» (1644). Однако общего подхода у него нет. Определение огибающей и прием нахождения ее уравнения с помощью дифференцирования по параметру дал **Лейбниц** в статье «О линии, образующейся из бесконечного числа проведенных в определенном порядке и пересекающихся между собой линий и т. д.» (De linea ex lineis infinitis formata etc., 1692).

Термин *огибающая* (envelopée) стал общепринятым после лекций **Монжа** по дифференциальной геометрии (1795–1806). В русской литературе в XIX в. был принят термин «обвертывающая геометрических мест». [34, с. 139]; [143, с. 33].

ОДНОРОДНОСТЬ

Термин *homogeneus* (*однородный*) встречается у **Виета** (в издании его трудов **ван Схоутеном** в 1646 г.). Смысл слова был «бытовой»: **Виет** складывал только величины одного рода — длины, или площади, или объемы. В многовековой истории математики отмечены считанные случаи отклонения от «здравого смысла» — в вавилонской «алгебре», например.

Оглядки на однородность существенно влияли на положения новых теорий (т. е. на развитие всей математики): например, **Кавальери** в своей теории неделимых должен был объяснить, как при сложении неделимых-линий получается площадь, из неделимых-площадей — объем. Эта проблема перешла к **Лейбницу** при переходе от неделимых к интегралу.

Декартом в аналитической геометрии был сделан шаг исключительного значения: он снял ограничительное требование однородности выражения. Теперь x^2 означал не площадь квадрата с неизвестной стороной x, а лишь соответствующий член пропорции $1 : x = x : x^2$. **Декарт** ввел понятие размерности алгебраического выражения.

Однородные функции ввел в рассмотрение **Лейбниц**. Но термин «functio homogenea» впервые появился у **И. Бернулли** (1726); он требовал, чтобы x^p и y^q, «связанные и перемешанные любым способом..., имели бы одну и ту же сумму показателей в каждом слагаемом». **Эйлер** заимствовал у него этот термин вместе с определением и такое «недостаточно строгое» определение подправил несколькими теоремами: он доказал, что имеет место соотношение $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$; что однородная функция f нулевой степени представима в виде $\phi(y/x)$ (с точностью до обозначений).

Однородные линейные дифференциальные уравнения чаще всего именовали «уравнением без второго члена»; насколько удалось найти, одно из первых появлений современного термина — в «Лекциях о методах **Штурма-Лиувилля**...», прочитанных **М. Бохером** в Сорбонне в 1913/14 гг. [187, **3**, с. 704]; [189, с. 126].

ОДНОЧЛЕН

Термин появился впервые в учебниках **Бертрана** (1864).

ОЖИДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ

Понятие ввел **Христиан Гюйгенс** в мемуаре «О расчете в азартных играх» (1657). Употребленный им термин «стоимость шанса», конечно, вполне характеризовал суть понятия. Интересен тот факт, что в XVII в. основным понятием являлось именно математическое ожидание, а не вероятность. Затем **Я. Бернулли** вводит название «судьба игрока», тоже соответствующее смыслу задачи. Впервые слово *ожидание* появилось в переводе **ван Схоутеном** мемуара **Гюйгенса** на голландский язык (1660). Современный термин ввел **Лаплас**: «...назовем эту выгоду математическим ожиданием» (**Лаплас** употреблял этот термин с 1795 г.). [46]; [99, с. 136]; [2, II, с. 49].

ОКРЕСТНОСТЬ

Впервые слово в математику ввел, по-видимому **Коши**, употребив выражение *voisinage d'une valeure* ("Cours d'Analyse", 1821). Французское voisinage означает «соседство, близость, смежность»; таков же смысл английского neighbourhood и немецкого Nachbarschaft; Umgebung значит «приближение, окружение, среда, окрестность». В русском переводе «Алгебраического анализа» **Коши** приведено выражение «в сопредельности частного значения переменной x» (1864); а в переводах курса **Дженокки—Пеано** (1905) употреблено слово «сфера», в 1922 г. — «окрестность».

Слово с легкостью вошло во французскую математическую литературу (например, у **Брио** и **Буке**, 1859), хотя одновременно фигурировали и environ, и autour du point. Но, кажется, всеми, кроме **Дарбу**, понятие воспринималось как-то поверхностно. Даже **Жордан** в курсе анализа 1882 г. обходился без понятия окрестности точки. Этот факт тем значительнее, что здесь же **Жордан** дал определения внутренней и граничной точек множества (а **Георг Кантор** дал определение *окрестности точки множества* в 1872 г.). Опередив математиков своего времени, понятие ввел **Больцано** (1817) в своих попытках поставить геометрию на теоретико-множественную основу.

В Германии, Италии термин появился позже. **Вейерштрасс** в первых же курсах лекций по анализу (с 1856 г.) вводит понятие *окрестности* точки (Nachbarschaft). Насколько понятие было новым, можно судить по тому, что и через десять лет **Фукс** ссылался на **Вейерштрасса**, вводя die Umgebung des Punktes x_0.

В «Лекциях по вариационному исчислению» (ок. 1879 г.) **Вейерштрасс** дал определение *близости двух функций порядка p*. В 1877–1878 гг. его лекции слушал **Пинкерле** (которому, в частности, принадлежит первая систематизированная публикация теории **Вейерштрасса** «Опыт введения в теорию аналитических функций по принципам проф. **К. Вейерштрасса**», 1880). Именно таким образом идеи **Вейерштрасса** распространялись и становились достоянием математиков (в частности, в Италии). Понятие ε-окрестности использовал **Вито Вольтерра** при создании теории «функции линий» — функционалов (со ссылкой на **Пинкерле**).

Понятие окрестности точки функционального пространства стало привычным в результате работ математиков итальянской школы —

Пинкерле, **Вольтерры**, **Арцелы**, **Асколи**, и, наконец, стало основой при построении «общего анализа» — так называл функциональный анализ один из его создателей **Морис Фреше** (1905). *Окрестность*, которую ввел **Фреше** (в результате обсуждений с **Адамаром**), эквивалентна сегодняшней слабой метрике. Топология, основанная на понятии окрестности, введена им в 1909 г. В это время в работах **Рисса** появляется идея окрестности в абстрактных множествах. [175, **3**, с. 34]; [175, **10**, с. 64].

ОКТАНТ

Латинское *octans* означает «восьмая часть».

ОКТАЕДР

Термин состоит из греческих слов ὀκτώ (восемь) и ἕδρα (основание). Буквальное значение — «восьмигранник». Название ὀκτάεδρον дано **Теэтетом**, который впервые построил восьмигранник. Затем термин встречается у **Евклида** и **Герона**. [216].

ОПЕРАТОР, ОПЕРАЦИЯ

Термины произведены от латинского *operor* (делаю); *operator* означает «делатель, работник»; *operatio* — «действие, претворение, работа». Термины ввел, по-видимому, **Кармайкл** (A Treatise on the Calculus of Operations, 1855). Отсюда в английской школе появилось название *операционное исчисление*.

Зачатки этого исчисления возникли довольно рано. Еще **Оутред** пытался установить правила операций с произвольными буквами (1631). «Исчислением символов» занимался также **Лейбниц**, ему и принадлежит это первоначальное название операционного исчисления, которое сохранилось до середины XIX в. Формальные операции с «символами» вызвали глубокий интерес во Франции. Исходными соображениями были:

1. Замеченная **Лейбницем** аналогия между формулами $(u+v)^n$ и $(uv)^{(n)}$.
2. Полученная отсюда **Лагранжем** «символическая формула» (1771) — он заменил в разложении $u = e^h - 1$ показатель степени величиной $\frac{du}{dx} \cdot h$(где вместо степеней — производные соответствующих порядков). Правда, **Лагранж** отметил, что принцип не очевиден, но это не отражается на правильности получаемых результатов.

Простота алгоритма **Лагранжа** удивила, пробудила интерес и вызвала целый ряд исследований — **Арбогаста** (1801), **Франсэ** (1812), **Бриссона** (1804, 1821). Впервые символ операции дифференцирования отделен от функции в “Calcul des Derivations” **Арбогаста** (1801), он развил метод, состоящий «в том, чтобы отделить от функции, когда это возможно, знаки операций Δ, Σ, $\int$, d и т. д., которые действуют на эту функцию...». Следующие затем работы **Бриссона** оказали влияние на французских математиков (в частности, на **Коши**); все они утеряны, кроме единственного мемуара (1804/1808). **Сервуа** пытался ответить на вопрос, почему с операторами можно действовать, как с алгебраическими величинами (1814); он предвосхитил современный алгебраический подход к обоснованию операционного исчисления.

Продолжением этих исследований были работы **Коши**, **Фурье** (в частности, о представлении функций с помощью интеграла **Коши**, преобразования **Фурье**). Многие результаты были переоткрыты английскими математиками **Дунканом Грегори**, **Мерфи**, **Кармайклом**, **Булем**, **Пикоком** в 1830–1860 гг. Эти ученые развивали символическую алгебру — «науку о символах и их комбинациях, конструируемых по их собственным правилам, которая может быть применима к арифметике или к другим наукам посредством их интерпретации». **Грегори** и **Буль** развили полную теорию прямых и обратных операторов. Многочисленные результаты содержала книга «Символическое исчисление» **Ващенко-Захарченко** (1862).

Символические методы существенно упростили формальную сторону теории линейных дифференциальных уравнений. Методы решения дифференциальных уравнений теории электромагнетизма с помощью операционного исчисления создал английский инженер **Оливер Хевисайд**. В цикле статей (начиная с 1881 г.) он развил свою теорию. Трудно решить, что именно из предшествующих работ знал **Хевисайд**: он был самоучкой, но определенно известно, что он читал работы **Буля** и **Фурье** (которым восхищался). У **Хевисайда** только один раз записано преобразование **Лапласа** — он предпочитал разложения в ряды. Он ввел термин *линейный оператор* (как правило, для операций $\frac{d}{dt}$, $\frac{d^2}{dt^2}$). Широкое распространение термин получил благодаря «Математическим основам квантовой механики» **фон Неймана** (1927).

Теория **Хевисайда** не была достаточно строго математически обоснованной. «Его математика возникала в физическом контексте, из которого ее нелегко было выделить», поэтому при жизни **Хевисайда** его теория не нашла того признания, какого заслуживала. Однако **Уиттекер** писал через три года после смерти **Хевисайда**: «Мы должны считать операционное исчисление наряду с открытием автоморфных функций **Пуанкаре** и открытием **Риччи** тензорного исчисления тремя наиболее важными успехами математики за последнюю четверть XIX в. Их применение, дальнейшая разработка и обоснование составляют значительную часть деятельности математиков наших дней». Существует мнение, что **Хевисайд**, подобно средневековым ученым, утаил свои главные результаты. Вряд ли этот вопрос когда-нибудь решится, так как бумаги **Хевисайда** пропали сразу же после его смерти.

Попытки строгого обоснования и «математически приемлемого» изложения исчисления напоминали «общий штурм» — английский математик **Бромвич** (1916), американский инженер **Карсон** (1925), голландский инженер-электрик **Ван-дер-Поль** (1929–32) привлекли результаты различных теорий, связали исчисление **Хевисайда** с преобразованием **Лапласа**, с теорией функций комплексной переменной. У **Ващенко-Захарченко** есть замечание: решение, полученное символическим методом, можно найти и с помощью преобразования **Лапласа**.

Первые пять глав “Electrical Circuit Theory and the Operational Calculus” **Карсона** посвящены систематическому и довольно полному изложению и разбору (критическому) исчисления **Хевисайда**, автор связал исчисление с преобразованием **Лапласа**. **Поль Леви** объединил точки зрения **Карсона** и **Бромвича** (1926). Наконец, в 1950-х гг. исчисление получило еще одно направление развития (и средство обоснования) в работах польского математика **Микусинского**. Его *операторное исчисление* ознаменовано возвращением к первоначальной операторной точке зрения **Хевисайда** и снятием ряда ограничений, которые связаны с использованием преобразования **Лапласа**. Это «прикладная», так сказать, линия развития, а теоретическая вначале принадлежала целиком итальянцам. В исследованиях **Пинкерле** (1885–1887) понятие *оператора* введено самым общим образом, он изучает линейные операторы, определяет *сопряженные операторы* (и дает это название); **Пинкерле** при построении исчисления операторов принял за образец ТФКП. [60, с. 8–9]; [24, с. 7–9]; [164, с. 9]; [29, с. 1–10]; [15]; [152, II, с. 73]; [175, v. 26, с. 366].

ОРИГИНАЛ

В мемуарах **Лапласа** (1782–1812) современные *оригинал* и *изображение* именуются *fonction determinant* и *fonction generatrice* — «определяющая функция» и «производящая». Эти названия, хотя и признанные неудачными, сохранились до XX в. **Хевисайд** употреблял название «подоператорная функция» (1892). Оператор он обозначал буквой p, которая и употребляется в современном исчислении.

Карсон озаглавил таблицу оригиналов и изображений так: Table of Infinite Integrals, the Corresponding Operational Equations and their Explicit Solutions (1926). Названия original и image и знак $\risingdotseq$ предложил **Ван дер Поль** в статьях 1929–1932 гг. Они были приняты далеко не сразу, еще в течение 30 лет употреблялись и термины **Лапласа**, и «Objectfunktion» — «Resultantfuncktion», и «Oberfunktion» — «Unterfunktion», и «трансформанта — начальная функция», и многие другие.

В русской литературе термин *изображение* и символ $\risingdotseq$, по-видимому, впервые появились в книге погибших в войну харьковских математиков **А. М. Эфроса** и **А. М. Данилевского** «Операционное исчисление и контурные интегралы» (1937), а термин *оригинал* — только в 1953 г. [152, II, с. 75]; [197, с. 8–9]; [24, с. 10].

ОРИЕНТАЦИЯ

Французское *orientation* значит «установка, ориентация». Слово произошло от французского *orient*, которое, так же как латинское oriens, означает «восток» (а также — «восходящее солнце»).

Термин *ориентация* применительно к системе координат возник в работах **Штауде**. Во французской математической литературе различение правой и левой систем координат введено **Коши** (1826). Он отметил, что сделал это под влиянием работ физиков — **Ампера** и **Кориолиса**.

Понятие об ориентации плоскости, поверхности появляется в работах **Г. Грассмана** (1844), **Мёбиуса** (1827), **Гаусса** (1846), затем у **Ли** и **Клейна** (1872). В статье от 1875 г. **Клейн** ввел ставший классическим прием определения стороны поверхности непрерывным перемещением основания нормали по поверхности. Придуманную им одностороннюю ограниченную поверхность его ученики назвали *бутылкой* **Клейна**.

Последовательная теория была развита **Лагерром** примерно в 1880 г., при этом ориентированную плоскость, сферу, поверхность он называл «полу-плоскостью...» (Semi-plan, semi-sphere, semi-surface). Термины *ориентированная плоскость*, *противоположной ориентации* (plan orientée, orientées opposées) ввел математик **Стефанос** (1883). [198, $\mathrm{III}_{1,1}$, с. 619, 626, 712–713].

ОРИЦИКЛ, ОРИСФЕРА

Понятия и термины ввел **Николай Иванович Лобачевский** в работах 1826–1841 гг. В русских изданиях он употреблял названия «предельный круг, предельная сфера», а в иностранных публикациях — наряду с courbe limitée и Grenzlinie также и horicycle (Oricycle). Термины составлены из греческих слов ὅριος (предельный) и κυκλος (круг) или σφαῖρα (сфера).

ОРТ

Термин ввел **Хевисайд** как сокращение слова «ориентация» (1892).

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Термин составлен из греческих ορθος (прямой, правильный) и γωνια (угол). Буквальное значение — «прямоугольный». У греков прилагательное ορθογωνιος относилось всегда к треугольникам, квадратам и конусам. Термин есть уже у **Евклида**. Применительно к функциям термин впервые был использован **Ф. Клейном** в курсе лекций по уравнениям математической физики (1889), а затем широко использовался в школе **Гильберта**.

Знак обозначения перпендикулярности $\perp$ ввел в употребление **Эригон** (1634).

Отдельные системы ортогональных функций изучались уже в XVIII в.; едва ли не первая ортогональная система функций появилась при решении задачи колебания струны (**Д. Бернулли**, **Эйлер**, **Клеро**, 1727–1741 гг.). **Лагранж** (1759) открыл замечательное свойство ортогональности функций $\varphi_k = \left\{\cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$:

$$\int_{-l}^{+l} \varphi_k(x)\cdot\varphi_m(x)\,dx = 0, \quad k \neq m.$$

Начиная с работ **Штурма** и **Лиувилля** (1836), системы ортогональных собственных функций дифференциального уравнения использовались постоянно. **Фурье** заметил свойство ортогональности системы $f_n(x) = e^{nix}$ на $[0, 2\pi]$ и получил соответствующие выражения «коэффициентов ряда **Фурье**». Первыми найденными ортогональными многочленами явились многочлены **Лежандра** (1784), которые он нашел как частные решения дифференциального уравнения и доказал свойство их ортогональности на $(-1, 1)$.

Статья **Пафнутия Львовича Чебышёва** «О непрерывных дробях» (1855) — первая в серии статей, где введены некоторые важные ортогональные многочлены и развита общая теория ортогональных многочленов и специальных ортогональных систем, так появились многочлены **Чебышёва—Эрмита** (1864), **Чебышёва—Лагерра** (1879) и др. Неизвестно, знал ли **Чебышёв** о теореме **Вейерштрасса** (о возможности аппроксимации непрерывной функции многочленами), т. к. теорема, как и практически все результаты **Вейерштрасса**, опубликована с опозданием (1885).

Г. Грассман впервые (1861) указал, что обращение в нуль «внутреннего произведения» (подобия скалярного) может стать основой для определения ортогональности элементов общей природы. Идея была реализована при создании функционального анализа в начале XX в. — в работах **Пинкерле**, затем **Фреше** и математиков школы **Гильберта**. Уже в 1907 г. опубликована статья **Рисса** "Sur les systèmes de fonctions orthogonaux". Одновременно **Шмидт** изобрел *метод ортогонализации* системы (1905).

Строгое исследование ортогональных систем функций было проведено **В. А. Стекловым**. В течение 30 лет (с 1896 г.) он публиковал работы на эту тему, построив постепенно *теорию замкнутости* ортогональной системы функций. [215, с. 36]; [175, **26**, с. 64]; [64, XVIII, с. 42]; [168, с. 468].

ОТОБРАЖЕНИЕ КОНФОРМНОЕ

Термин *конформный* образован из латинского conformare (сообщать стройный вид, надлежащую, форму, устроить, образовать). Впервые термин появился как *конформная проекция* (*projectio conformis*) в картографической работе (1788) **Федора Ивановича Шуберта**, академика Российской академии наук и предка **С. В. Ковалевской**. Независимо от него этот же термин ввел **Гаусс** (1843). Термин выражает существенное свойство отображения: подобие в бесконечно малых частях (con, означающее совместность, и forme).

Если не считать стреографической проекции на плоскость у **Птолемея** (ок. 150 г. н. э.), то до **Гаусса** конформное отображение встречается в статье **Эйлера** "De representatione superficiei sphaericae super plano" (1777); он называл это отображение «подобием в малом» и вывел условие конформности. Кроме того, **Лагранж** создал теорию конформного отображения поверхностей вращения на плоскость (1779). Но только **Гаусс** создал общую теорию, исходящую из теории функций комплексной переменной (1822).

Теорема о том, что произвольную односвязную область можно конформно отобразить на круг, впервые опубликована **Риманом** (1851). Многочисленные попытки дать строгое доказательство теоремы **Римана**, предпринятые **Шварцем**, **Гарнаком**, **Пуанкаре** и др., увенчались успехом только в 1900 г. Такое доказательство было дано **Осгудом**.

В русской литературе XIX в. (например, 1890 г.) общеупотребительными были термины «изображение», «зеркальное изображение», «изображение квадрата на полуплоскость» — термины чаще всего были кальками немецких. Язык складывался под сильнейшим влиянием лекций **Вейерштрасса**. Его курсы доходили до России в публикациях его учеников, при этом математики сетовали на «до крайности медленное» печатание «Лекций», обусловленное тем, что **Вейерштрасс** хотел довести теории до безукоризненной строгости, а не его нелюбовью к типографской краске (по **Клейну**). [198, III_3, с. 358]; [174, **47**, с. 362]; [174, **79**, с. 270]; [143, с. 43].

П

ПАНТОГРАФ

Название состоит из греческих παν (все) и γράφω (пишу); буквальный смысл слова — «тот, что все пишет». [16].

ПАРАБОЛА

В русской литературе до середины XIX в. в словарях указывалось ударение парабо́ла. Это термин **Аполлония Пергского** (ок. 200 г. до н. э.), однако и после этого кривую рассматривали как **коническое сечение** (см.). [116].

ПАРАБОЛОИД

Термин ввел Гаспар **Монж** (1801), как и названия некоторых других поверхностей второго порядка, слегка изменив терминологию **Эйлера**.

ПАРАДОКС

Греческое слово παράδοξος значит «странный, необычный», оно образовано от παρα (около), которое часто имеет смысл «не попасть в мишень и пройти выше нее»; второе слово δόξα означает «мнение, ожидание». Употребляемое наряду с *парадоксом* слово «антиномия» означает «противоположное (ἀντί) закону или обычаю (νομος)». Древнейшие из парадоксов имеют нематематический характер, например, парадокс **Эпимеиида Критского** «Все критяне лжецы».

Парадоксы теории множеств начали возникать один за другим в конце прошлого века. Первым (1897) был опубликован парадокс **Бурали-Форти** — одного из соавторов **Пеано** в создании книги “Formulaire de mathématiques”, сыгравшей значительную роль в математической логике. Этот парадокс был известен **Кантору**, который сообщил о нем **Гильберту** (1896). В 1899 г. **Кантор** пришел к другому противоречию — парадоксу **Кантора** (парадокс был опубликован в 1922 г.) Хотя не было никакого разрешения парадоксов, они сначала не внушали тревоги, так как оставалась надежда исправить кое-какие доказательства и спасти положение. Однако под влиянием парадокса **Кантора** в 1901–1902 г. **Рассел** пришел к антиномии, пошатнувшей основания теории множеств и логики. Парадокс **Рассела** был опубликован в 1903 г. в приложении к книге **Фреге**. Затем последовали парадоксы **Ришара** (1905), **Берри** (опубликован впервые **Расселом** в 1910 г.), **Греллинга и Нельсона** (1908) и др. Никогда раньше антиномии не возникали на таком элементарном уровне, затрагивая так сильно самые фундаментальные понятия двух самых точных наук — логики и математики. Так начался кризис в математике. [156, с. 7–16]; [89, с. 69, 238].

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

Греческое παράλληλος означает «рядом идущая, друг подле друга проведенные». Слово стало употребляться как математический термин 2 500 лет назад в школе **Пифагора**. **Евклид** впервые употребил этот термин применительно к плоскостям, а **Папп** — к параллелям на сфере. Это слово дало основу и для термина *параллелограмм*. **Папп** пользовался знаком = для обозначения параллельности; такое обозначение сохранялось до XVIII в. Лишь после того как введенный **Рекордом** знак равенства вошел в употребление, стали пользоваться знаком || (**Керси**, 1637; **Вильсон** и др.). В русском языке слова *параллельный*, *параллелепипед* появились в 1710 г. [185, I, с. 411]; [45, с. 260]; [216].

ПАРАМЕТР

Греческое παραμετρεω означает «измеряю одну вещь другою, меряю что-нибудь, сравнивая с чем-то»; слово образовано из παρα — «от, у, возле» и μετρω (измеряю).

Термин *параметр* в теорию конических сечений ввел **Мидорж** — математик из кружка **Паскаля—Мерсенна** (1631); его параметр был равен хорде, проходящей через фокус конического сечения перпендикулярно оси (т. е. это удвоенный «наш» параметр). У латинских авторов параметр параболы назывался latus rectus, т. е. «вертикальная (отвесная) ширина».

Лейбниц называл *параметром* произвольную постоянную в общем решении дифференциального уравнения, а с 1684 г. — любую постоянную величину, входящую в уравнение.

Прием введения вспомогательной переменной использовался в математике с незапамятных времен. Широко применял его **Диофант**, в новой математике — **Крамер**, **Декарт**, **Лопиталь**, но только **Эйлер** выразил уравнение между двумя переменными при помощи третьей — переменного параметра — и превратил этот прием в эффективно действующий математический инструмент. [198, $III_{1.1}$, с. 611]; [198, $III_{2.1}$, с. 9].

ПЕРЕМЕННАЯ

Этот термин ввел **Лейбниц** при обсуждении понятия функции (так же как слова «константа», «параметр») в последнее десятилетие XVII в.

ПЕРИМЕТР

Слово περιμετρος образовано из греческих περι (около) и μετρειν (измерять). Оно встречается у **Архимеда**, **Герона**, **Паппа**. В русских учебниках геометрии еще в конце XIX в. одинаково часто употреблялись термины «периметр» и «обвод». [113]; [216].

ПЕРИОД

Слово составлено из περι (около, вокруг) и ὁδός (дорога, путь). Таким образом, περιοδος означает «обход, путь вокруг». [113].

ПЕРПЕНДИКУЛЯР

Термин был образован в Средние века от латинского слова *perpendicularum* (отвес), которое, в свою очередь, произведено от глагола *perpendre* (взвешивать). [113].

ПЕРСПЕКТИВА

Термин происходит от латинского *perspicere* (ясно видеть). Основные результаты теории перспективы, полученные в математике древности, собрал и изложил польский ученый **Витело** (XIII в.). «Оптика» **Витело** оказала значительное влияние на дальнейшее развитие науки. В частности, геометрическое сочинение **Кеплера** «Оптическая часть астрономии» носит подзаголовок «Дополнение к **Витело**». Основные законы перспективы открыли художники **Альберти**, **деи Франчески**, **Леонардо да Винчи**, **Дюрер** и др. Математической теорией перспективы занимались **Дезарг** (1639) и **Монж** (1795), заложив тем самым основы проективной геометрии. [16]; [65, **1**, с. 323].

ПИ

Первые попытки вычисления π относятся к IV в. до н. э. В Библии упоминается, что отношение длины окружности к диаметру равно трем. Египтяне считали $S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$; у индусов $\pi = \sqrt{10}$; **Архимед** нашел, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$; **Л. В. Магницкий** приводит значение 22/7. Голландский математик **Лудольф ван Цейлен** вычислил π с 34 знаками (1690), а **Мэчин** — со 100 знаками (в книге **Джонса**, 1706). Наконец, английский математик **Шенкс** нашел 707 знаков для π (1874); впоследствии оказалось, что все знаки, начиная с 528-го, неверны. **Пеано** считает, что **Валлис** привел первый пример разложения $\pi/2$ в бесконечное произведение.

До **Эйлера** отношение длины окружности к радиусу не обозначалось символом, а описывалось целым предложением (за немногими исключениями). Заслуга **Эйлера** заключается в том, что он ввел обозначение, которое стало всеобщим и означало некий новый угол зрения; однако еще во «Введении в анализ бесконечных» (1748) **Эйлер** называет число π всегда «длина полуокружности», «окружность круга». Эта терминология перешла и к следующему поколению математиков, например **Коши**.

Итак, специальный знак для числа 3,1415... появился сравнительно поздно. Вероятно, первым из них было обозначение **Валлиса**, который употреблял для этого квадрат □ или древнееврейскую букву «мем», ב, напоминающую квадрат, в “Arithmetica infinitorum” («Всеобщая арифметика», 1656). Затем обозначение в виде одной буквы e встречается в книге **Штурма** (1689).

Ближайшим предшественником современного символа является обозначение π/δ, введенное **Оутредом** в 1647 г. (вероятно, от греческих περιφερεια — окружность и διαμετρος — диаметр); такое же обозначение употреблял и **Барроу**. Обозначение π встречается впервые у английского математика **Джонса** в 1706 г. (“Synopsis palmariorum Matheseos or new introduction to the mathematics”). Но навсегда это обозначение в математику ввел **Эйлер**, который с 1736 г. постоянно его использовал. От него символ заимствовали **Стирлинг**, **Гольдбах**, **И. Бернулли** (он до 1740 г. употреблял букву "*c*" — от circumferentia).

В 1739 г. (в порученном ему разборе брошюры, где доказывалось, что $\pi = \frac{3844}{1225}$) **Эйлер** писал: «Было бы даже легко доказать, что <отношение> длины окружности к диаметру круга не может быть выражено не только квадратными числами, но и вообще рациональным числом». **Джеймс Грегори** попытался доказать, что π — трансцендентное число (1667). Иррациональность π была доказана **Ламбертом** в 1766 г. Аппарат, необходимый для доказательства трансцендентности π, был создан **Эрмитом** при доказательстве трансцендентности числа e (1873). Усовершенствовав метод **Эрмита**, **Линдеман** сумел доказать трансцендентность π, завершив задачу о квадратуре круга, волновавшую математиков в течение 4 000 лет, статьей "Uber die Zahl π" (1882). [186, с. 158]; [34, с. 159]; [185, II, с. 8–13]; [88, с. 205]; [80, I, с. 229].

ПИРАМИДА

Происхождение этого термина не выяснено достоверно. По одному мнению греческое πύραμις происходит в свою очередь от египетского per me ous (боковое ребро сооружения). Существует другое предположение: термин берет начало от формы хлебцев в Древней Греции (πύρος — «рожь»). Наконец, в связи с тем, что пламя иногда напоминает по форме пирамиду, средневековые ученые считали, что термин произошел от греческого πυρ (огонь); в некоторых учебниках геометрии XVI в. пирамиду называли «огнеформенное тело».

До **Евклида** под термином πύραμις подразумевали правильный тетраэдр, а впоследствии, приняв определение **Евклида**, — любую пирамиду. Формулу объема пирамиды **Архимед** приписывал **Демокриту**. [163, IV, с. 10]; [45, с. 291].

ПЛАНИМЕТР

Название произведено от латинского *planum* (плоская поверхность, площадь) и греческого μετρέω (меряю). Принцип, предложенный в 1854 г. **Амслером**, ученым из Цюриха, используется и в современных инструментах. Теоретическое обоснование принципа построения приборов для вычисления площадей было дано французским корабельным инженером **Андрадом** (1874). В 1854–1856 гг. оригинальный планиметр был создан конструктором-самоучкой, впоследствии журналистом и автором нескольких беллетристических произведений **Павлом Алексеевичем Зарубиным**. [198, II_1, с. 128–129].

ПЛАНИМЕТРИЯ

Термин образован в Средние века по образцу древнегреческого «стереометрия», поэтому в нем соединены латинское и греческое слова: *planum* и μετρέω. [45, с. 255].

ПЛОСКОСТЬ

Определения прямой, плоскости, поверхности, данные **Евклидом**, вызывали возражения уже в древности. В первом случае выход был найден быстро: понятие кратчайшей, соединяющей две точки, — удовлетворительно. С плоскостью дело обстояло сложнее. **Лейбниц** предложил определить плоскость как геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек.

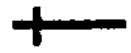
Уравнение плоскости встречается впервые у **Клеро** в исследовании о кривых двоякой кривизны (1731), здесь **Клеро** отмечает, что уравнение первой степени представляет плоскость, затем у Петербургского математика **Германа** (1732, 1733) и, наконец, у **Эйлера** («Введение в исчисление бесконечных», 1748), после чего уравнение можно считать общеизвестным и общераспространенным.

Уравнение плоскости в отрезках, по-видимому, впервые использовал **Ламе**, так же как и уравнение пучка плоскостей (1816–1818). Нормальное уравнение плоскости вместе с названием (Normalforma) и в современном виде ввел в учебники геометрии **Гессе** (1861), хотя оно было известно **Коши** (1826), **Люилье** (1809) и **Магнусу** (1833).

Предложение о том, что касательные ко всевозможным кривым, проходящим на поверхности через точку, лежат в *одной* плоскости, отчетливо сформулировал **Дюпен** («Развитие геометрии», 1813). В неполной формулировке оно есть у **Клеро** и у **Эйлера**. В учебные пособия его ввел **Коши** ("Leçons sur l'application du calcul infinitésimale à la géométrie", 1826). Понятие и термин *соприкасающаяся плоскость* встречаются впервые в работе **И. Бернулли** (1728). *Спрямляющая плоскость* введена (вместе с названием) в работе талантливого рано умершего французского математика **Ланкре** ("Mémoire sur les courbes à double courbure", 1806). [198, III$_3$, с. 614, 623–626]; [189, **341**].

ПЛЮС

Термин произошел от слова *plus* (больше). Первое употребление слова *plus* как обозначения действия сложения найдено историком математики **Энестремом** в итальянской алгебре XVI в. Сначала действие обозначали первой буквой термина *p*; **Шюке**, например, писал $\bar{p}$ и $\bar{m}$ для + и −. Такими же символами или $\tilde{p}$, $\tilde{m}$ пользовались и другие математики.

Современные + и − появились в Германии в последнее десятилетие XV в. в книге **Видмана**, которая была руководством по счету для купцов ("Behende und ubsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft", 1489). В первом учебнике алгебры на немецком языке (автор — **Рудольф**, 1525) уже широко применялись знаки + и −. Возникновение этих знаков не совсем ясно. Знак + происходит, возможно, от сокращенной записи et, т. е. «и» (&). Впрочем, может быть, он возник из торговой практики: проданные меры вина отмечались на бочке черточкой −, а при восстановлении запаса их перечеркивали, откуда получился знак +. Однако в Дрезденской библиотеке найдена рукопись 1481 г., которая содержит символы + и −, и известно, что **Видман** изучал эту рукопись. Вместе с тем и после первого появления этих знаков на страницах математических книг еще более века в роли плюса и минуса выступали самые различные значки. Некоторые авторы предпочитали испытанные p и m («Алгебра» **Бомбелли**, 1572). **Виет** ввел свой собственный знак  (1591), который встречается затем у **Юма** (1635), **Эригона** (1634), **Гюйгенса** (1673), **Лопиталя** (1694). Объединенные знаки $\pm$ впервые появляются у **Жирара** (1626) в форме $\overset{+}{\underset{-}{\text{или}}}$. Такая запись была вытеснена значками  и  соответственно для $\pm$ и $\mp$. Именно этими символами пользовались **ван Схоутен**, **Валлис** (1685) и **Я. Бернулли** (1701). Вторично объединенные знаки $\pm$ изобрел португалец **да Кунья** (1790), у которого они выглядели так: $\pm'$, $\mp'$. [185, I, с. 128, 245–246].

ПОВЕРХНОСТИ

Древние математики почти не рассматривали поверхностей, кроме плоскости, шара и некоторых поверхностей вращения (параболоида, эллипсоида, двухполостного гиперболоида). Однако они исследовали только части этих поверхностей с целью определения их площадей.

Ферма в книге "Isagoge ad locos ad superficiem" («Введение в изучение поверхностных мест», 1643) сделал попытку ввести в теорию поверхностей, рассматриваемых как геометрические места, общую точку зрения. Приблизительно к этому же времени относятся отдельные эпизодические результаты; так, **Рен** (1669) и **Паран** (1702) установили, что однополостный гиперболоид — линейчатая поверхность. **Паран** в 1705 г. вывел уравнение общей шаровой поверхности. По-видимому, с 1700 г. после исследования **Парана** считается общепризнанным и общеизвестным, что $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности. **Клеро** считал очевидным, что уравнение между x, y, z определяет поверхность. **Лагир** (1679), а затем **Клеро** (1731) вывели уравнения поверхностей вращения, в частности уравнения конуса, эллипсоида и однополостного гиперболоида. У **Эйлера**, затем независимо от него у **Монжа** появилось понятие развертывающейся поверхности.

Параметрическое представление поверхности встречается у **Эйлера** (1766 г., опубликовано в 1862 г.) и в картографических работах **Лагранжа**. Систематически оно использовалось **Гауссом** (с 1822 г.). **Коши** последовательно заменял уравнения $z = f(x, y)$ на $w(x, y, z) = 0$, где переменные x, y, z «равноправны»; до него такая запись встречалась только у **Лагранжа**. [34, с. 275]; [64, X, с. 388]; [198, $\text{III}_{1.1}$, с. 623]; [198, $\text{III}_{2.1}$, с. 168–188, 636]; [198, III_3, с. 358]; [189, с. 338].

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вероятно, невозможно установить, когда в математике появились конус и пирамида. Вавилонские математики знали усеченный конус вращения, усеченную пирамиду (хотя формула, по которой они вычисляли объемы, была ошибочной: $V = \frac{1}{2}h(B_1 + B_2)$, где h — высота, B — площади оснований).

Эллипсоиды, двуполостный гиперболоид и параболоид вращения рассматривались впервые **Архимедом** в трактате «О сфероидах и коноидах». Он нашел объем шара и площадь поверхности сферы.

Валлис в своем сочинении о конических сечениях рассмотрел эллипсоиды, эллиптические параболоиды общего вида (1655), а затем — однополостный гиперболоид вращения, названный им «цилиндроид» из-за прямолинейных образующих, обнаруженных им (1670). **Рен** в это же время рассмотрел линейчатые поверхности.

В 1728 г. **Эйлер** рассмотрел цилиндрические, конические поверхности общего вида и поверхности вращения. Широко известными все поверхности второго порядка стали известными после «Введения в анализ бесконечных» **Эйлера** (1748), где поверхности впервые представлены уравнениями второй степени. Основным методом исследования формы поверхности у **Эйлера** было преобразование системы координат и приведение уравнения к каноническому виду. Этим же путем следовал затем **Монж**.

Современные названия невырожденных поверхностей второго порядка появились только в начале XIX в. в книге **Монжа** "Application d'Analyse à la Géométrie" (1801). Названия **Монжа** носят явные следы терминологии **Эйлера**: у **Эйлера**– «эллиптоид», у **Монжа** — *эллипсоид*, а также «эллиптико-параболическая поверхность» и *эллиптический параболоид* и т. д. (до тех пор «параболоиды» и «гиперболоиды» означали параболы и гиперболы высших порядков).

Исследование поверхностей методом сечений ввел **Коши**, хотя **Ферма** уже рассматривал сечения поверхности координатными плоскостями как характеризующие поверхность.

Начиная с «Введения в анализ бесконечных» **Эйлера**, в классификации поверхностей повторяется выражение, составленное из коэффициентов уравнения поверхности. **Коши** (1829), **Якоби** (1833) и **Гессе** (1833, 1861) усмотрели в нем детерминант. **Гессе** сделал этот детерминант существенным средством исследования. [198, $III_{1.1}$, с. 588, 623]; [198, III_3, с. 88, 358].

ПОВЕРХНОСТИ РИМАНА

Для восстановления взаимной однозначности конформного отображения **Риман** создал новый образ — многолистную поверхность, в первой же его работе (1851) есть термины «листы поверхности» (*Blatt*), «разрез» или «сечение» (*Schnitt*) в комплексной плоскости, «точка ветвления» (*Verzweigungspunkt*). Идеи **Римана** были разъяснены и в более доступной форме изложены его учениками, прежде всего **Примом** ("Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblattiger Flache", 1866). Во Франции, где долго доминировали традиции **Коши**, **Пикара** (1879!) и **Эрмита**, в исследованиях проявились идеи **Вейерштрасса**, но к идеям **Римана** относились «с подозрением». **Брио** и **Буке** писали: «Идея многолистной поверхности — трудна; она не представляет никаких преимуществ для предмета наших рассмотрений» (1875).

В учебники понятие *поверхности* **Римана** вошло через 20 лет, впервые — в "Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen" **Кенигсбер-**

гера (1874). Первое аксиоматическое изложение было дано лишь в 1913 г. **Г. Вейлем** в книге "Die Idee der Riemannische Flächen".

По устному свидетельству **Клейна** и **Пуанкаре**, бесконечнолистную поверхность впервые рассмотрел **Шварц**. В литературе она встречается впервые у **Пуанкаре**. [198, II_2, с. 248]; [198, $\text{II}_{3.1}$, с. 194].

ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Поверхности, на которых некоторая функция имеет постоянное значение, впервые встречаются у **Маклорена** и **Клеро**. **Маклорен** называл их *level surface* (1742); у **Клеро** они носили наименование *surfaces de niveau* (1743).

Ламе в статьях 1834–1837 гг. рассмотрел не только поверхности уровня, но и производную по нормали к поверхности, установил величину наибольшей скорости роста функции, таким образом, в его изложении не хватало только векторных величин, чтобы оно было вполне современным. Результаты **Ламе**, переведенные на векторный язык **Максвеллом** (1873), полностью вошли в современные учебники [198, II_1, с. 476].

ПОДОБИЕ

Первое появление современного знака для подобия относится к 1710 г. Значок, напоминающий современный, был напечатан в анонимной статье, принадлежавшей, как выяснилось, **Лейбницу**. Он пользовался этим символом в рукописях, начиная с 1679 г. При издании математических трудов **Лейбница** (1863) знак был заменен на $\sim$, в таком виде он и сохранился. [185, II, с. 195–196].

ПОДСТАНОВКА

Подстановки привлекли внимание математиков в конце XVIII в. Многие теоремы о них сформулировал итальянский математик и врач **Руффини**. Его результаты упорядочил и дополнил **Коши**. В статьях 1812–1815 гг. **Коши** ввел термин substitutions и представил подстановку современным образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \xi \end{pmatrix}.$$

Он ввел определение произведения подстановок, заметил, что оно ассоциативно, но не коммутативно. Позднее он ввел термины *циклическая подстановка*, *тождественная подстановка*, *транзитивная подстановка*, *порядок цикла*, *транспозиция* (1844–1846). В 1844 г. он доказал фундаментальную теорему, установленную, но не доказанную **Галуа**. **Жордан** назвал ее теоремой **Лагранжа—Коши**. Его «Трактат о подстановках» (1870) — по существу первый учебник по теории групп и важнейший труд для популяризации идей **Галуа**. [198, I_1, с. 209–219]; [185, II, с. 82–83] ; [175, **23**, с. 279–282].

ПОКАЗАТЕЛЬ

Слово *Exponent*, которое ввел для показателя степени **Штифель** (1553), означает «показатель, истец». Показатели степени в настоящем виде (только целые положительные) ввел в науку **Декарт** (1637). Он порвал с греческой традицией допускать в математике только первые три степени («длину», «площадь», «объем»). До **Декарта** ближе всего к современным обозначениям подошли **Юм** и **Эригон**. **Юм** — англичанин по рождению, живший во Франции и издавший в 1635 г. “Le traité d’algèbre”, писал, например, $5a^{\mathrm{IV}}$, а **Эригон** — 5a4 (1634). У **Декарта** эти обозначения превратились в $5a^4$. Декартовы обозначения степеней распространились очень быстро: между 1660 и 1670 гг. положительные целые показатели заняли свое бесспорное место в алгебре. Правда, и в XVIII в. вместо a^2 все математики писали $a \cdot a$ (даже **Гаусс** впоследствии придерживался этой традиции, так как a^2 «не короче»).

Вычисления с отрицательными и дробными показателями встречались у бакалавра медицины и математики **Шюке** (1484), у **Орема**, епископа Нормандии (его рукопись “Algorifmus proportionum” была распространена в нескольких копиях), у **Жирара** (1629) и **Стевина** (1585) — он предложил подразумевать под $a^{1/n}$ корень $\sqrt[n]{a}$.

Без каких-либо обозначений говорит об отрицательных и дробных «индексах» **Валлис** (1656). Первым систематически стал применять отрицательные и дробные показатели **Ньютон** (с 1676 г.). Вычисления с ними детально изложены **Клеро** в книге “Eléments d’Algèbre” («Начала алгебры», 1746).

Мнимые показатели степени упоминаются впервые в письмах **Эйлера** к **Гольдбаху**, где сообщается формула $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$ (1740). В печати эти результаты появились в 1743–1747 гг. Переменная величина в показателе степени встречается впервые в 1679 г. в письмах **Лейбница** к **Гюйгенсу** при исследовании уравнений вида $x^x - x = 24$, $x^z + z^x = b$ и аналогичных.

Выражение «возведение в степень» (in eine Potenz erheben) появилось впервые в “Mathematische Lexicon” **Вольфа** (1716). [226, II, с. 151–158]; [185, I, с. 91, 354–356]; [157, с. 219].

ПОЛЕ ВЕКТОРНОЕ, ПОЛЕ СКАЛЯРНОЕ

Понятие *скалярного поля* появилось в математике «незаметно» — **Ламе**, оперировавший с различными системами криволинейных координат (1834), должен был придти к концепции функции, значения которой зависят от положения точки в пространстве и не зависят от какой-либо системы координат. Его *fonction de point*, т. е. функция точки, и является первым скалярным полем в математическом анализе. Впоследствии выражение *Vector Function of Position in Space* на много лет вошло в математику как понятие «векторного поля».

Векторное поле появилось в теории кватернионов: при изучении функций **Гамильтон** (а затем и его последователи) детально изучил случай, когда аргументы являются скалярными величинами, а функция принимает векторные значения $\Phi(x, y, z)$. Как известно, теорию кватернионов развивала кучка фанатиков, из-за чего имело место «всеобщее отторжение» кватернионов; признание пришло из физики. Около 1830 г. **Фарадей** ввел силовые линии (lines of forces). Его труды долго не принимались во внимание на континенте, так как

1) они в корне противоречили теории, по которой между зарядами мгновенно возникает взаимодействие, подобно ньютоновскому притяжению;
2) они не имели математической базы.

Через 30 лет с его «Экспериментальными исследованиями» познакомился **Максвелл**. Он владел теорией кватернионов и увидел, что векторное исчисление представляет тот математический инструмент, которого не хватало **Фарадею**. Идея векторного поля навсегда связана с именами **Фарадея** и **Максвелла**.

У **Томсона** (лорда **Кельвина**) впервые встречаются термины *«поле»* (field), *«поле вихревое, безвихревое»* (1851). Слово σωληνειδης , которое ввел **Ампер**, означает «трубчатый, подобный твердому». [15]; [1]; [229, с. 171, 242].

ПОЛЕ ЧИСЛОВОЕ

После публикации работы **Галуа** (1846) начались исследования в теории групп. Математики французской школы развивали идеи **Лагранжа** и **Галуа**, а в Германии исходили из изучения и развития работ **Гаусса** по теории чисел. Постепенно стало очевидно, что нужно исследовать природу самих числовых систем. Концепции поля появляются в работах **Кронекера** и **Дедекинда**, **Кронекер** ввел понятие области рациональности (Rationalitätsbereich); исчерпывающее изложение опубликовано в 1882 г., а начало работы над этими вопросами относится к 1853 г. **Дедекинд** ввел понятие поля (Körper), которое он первоначально называл «рациональной областью» (rational Gebiet); понятие появилось в лекциях 1857–1858 гг., теория **Дедекинда** опубликована в примечаниях и дополнениях к «Теории чисел» **Дирихле**. Все четыре издания “Zahlentheorie” (1863, 1871, 1879, 1894) вышли после смерти **Дирихле**; они сопровождались предисловиями, замечаниями и комментариями **Дедекинда**, которые существенно дополняли и развивали теорию чисел, теорию идеалов и теорию конечных полей. В частности, термин «endlich Körper» появился в издании 1871 г., а теория расширенных полей — в 1894 г.

Работы **Кронекера** и **Дедекинда** почти не получили немедленного развития и продолжения, только через 30 лет стала очевидной важность их основополагающих результатов. [175, **8**, с. 125–146]; [12, с. 232].

ПОЛИГОН

Греческое πολύγωνον (многоугольник) составлено из πολύ (многочисленный) и γωνια (угол). Слово встречается у **Евклида**, **Паппа**, **Архимеда**. Термин *полином* образован аналогично из πολύ и νομή (деление, часть). Буквальный смысл — «имеющий много частей, членов». [16].

ПОЛЮС

Термин происходит от греческого πόλος (ось). Это название в геометрии означало, что точка или конец диаметра на сфере является центром окружности, проведенной на сфере (у **Евклида**, **Паппа**). До **Евклида** слово встречается у **Платона** в смысле «ось сферы». В латинском языке слово приняло форму *polus.*

В проективную геометрию термины *полюс* (*pôle*) и *поляра* (*polaire*) были введены соответственно **Сервуа** (1810) и **Жергоном** (1812). Впервые полюсы и поляры в теории конических сечений появились у **Аполлония**, который рассмотрел их простейшие свойства.

Термин *полюс* как название особой точки аналитической функции ввели **Брио** и **Буке** (ок. 1859 г.). [198, II_2, с. 18]; [198, $\mathrm{III}_{1.3}$, с. 398].

ПОСТУЛАТ

Термин образован от латинского *postulare* (требовать), *postulatum* (требование). В греческой геометрии постулаты были, так сказать, аксиомами геометрического характера. Например: прямую можно безгранично продолжить...

Пятый постулат имеет славную историю. Он единственный имеет нетривиальную формулировку. Во-первых, ее пытались заменить эквивалентным, но более очевидным утверждением. Например, «существуют подобные треугольники» (**Валлис**, 1651) или «через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной» (**Плейфер**, 1795). Во-вторых, пытались **доказать** постулат; попытки начались уже в древности. Наконец, методом от противного были последовательно развиты системы **Саккери**, **Швейкарта**, **Тауринуса** и др., что и привело в конечном счете к созданию **неевклидовой геометрии**. [90, с. 305].

ПОТЕНЦИАЛ

Название происходит от латинского *potentia* (сила). В 1773 г. **Лагранж** заметил, что выражения составляющих силы ньютоновского притяжения получаются как частные производные одной и той же функции. Это наблюдение можно считать истоком теории потенциала. Дальнейшие работы принадлежат **Лапласу** (1782). Самостоятельная ветвь математики — теория потенциала — была создана **Гауссом** и **Грином** (1828) — сыном пекаря, выдающимся самоучкой. Несмотря на то что **Гауссу** была неизвестна работа **Грина**, терминологии этих исследований близки: **Грин** использовал название «потенциальная функция», а **Гаусс** ввел слово *потенциал*. [198, II_1, с. 467]; [77, с. 48].

ПОТЕНЦИРОВАНИЕ

Термин происходит от немецкого *potenzieren* (возводить в степень). В основе лежит корень *potentia*, происхождение которого таково. **Диофант** называл квадрат неизвестной величины словом δύναμις — что значит «сила, способность, могущество, значение». На латинский язык этот термин перевели словом *potentia* — «сила, влияние, власть, способность». Отсюда и возникло употребление этого слова при возведении в степень. По-видимому, оборот *потенцировать*, *потенцирование* встречается впервые у швейцарского математика **Рана** (1659). [226, II, с. 133, 162].

ПОТОК

Понятие и термин flux введены **Максвеллом** в "A Treatise on Electricity and Magnetism" (1873). Здесь приведены формулы для вычисления потока векторного поля через поверхностный интеграл, а также выражение потока через дивергенцию. Понятие было уже известно из статей **Тэта** (1862), который популяризировал теорию кватернионов, пытался проиллюстрировать на физических примерах смысл величин $\nabla f(x, y, z), \nabla \mathbf{f}(x, y, z)$ (правда, в кватернионных обозначениях).

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Маркиз **Гийом Франсуа Лопиталь** должен был стать артиллерийским офицером по семейной традиции, вследствие близорукости он оказался непригодным к военной службе и употребил свой досуг, в частности, на совершенствование в математике. В 1691–1692 гг. его в занятиях наставлял **И. Бернулли** и даже составил для него пособие. Под влиянием этих лекций **Лопиталь** написал курс "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" («Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий», 1696) Книга служила основным руководством по дифференциальному исчислению многие десятилетия: английский перевод вышел в 1730 г. (причем дифференциалы были заменены на флюксии), в 1764 г. в Вене появился латинский перевод, пятое французское издание вышло в 1781 г.; кроме того, было издано несколько комментариев к книге (один из них составлен **Вариньоном** в 1725 г.).

Курс содержал и «правило **Лопиталя**», принадлежавшее, конечно, **Иоганну Бернулли**, который сообщил его **Лопиталю** в письме (1694). В предисловии **Лопиталь** весьма корректно оговорил: «...я не имею ничего против того, чтобы они [братья **Бернулли** и **Лейбниц**] предъявили авторские права на все, что им будет угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить». **Лопиталь** умер в 1704 г., и в этом же году **И. Бернулли** заявил, что методы «Анализа бесконечно малых» принадлежат ему. Пока в течение двух веков историки математики взвешивали все «за» и «против» (при этом в ход шли не только свидетельства людей, некогда видевших конспекты **И. Бернулли**, но и соображения о его скверном характере и о благородстве **Лопиталя**), за этим правилом укрепилось его современное название. Истина выяснилась в 1920 г., когда была обнаружена рукопись **Бернулли** "Lectiones de calcolo differentialium" (опубликованы «Лекции» в 1922 г.). Эти лекции доказывают, что книга **Лопиталя** содержит немало его собственных результатов. [80, с. 250]; [34, с. 145–146]; [19, с. 204]; [170, с. 32, 59].

ПРЕДЕЛ

Строгим предельным переходом в античной математике был метод исчерпывания, изобретение которого приписывают **Евдоксу**; название употребил впервые **Сен-Винсент** в 1647 г. **Евклид**, **Архимед** и другие получили поразительные результаты, применяя метод к вычислению площадей криволинейных фигур, объемов неправильных тел и т. д. (В русской литературе еще в начале XX в. фигурировало наименование — метод истощения.)

В новое время идеи предела появляются у **Кеплера** (1615), **Кавальери** (1635), **Дж. Грегори** и др. **Валлис** («Арифметика бесконечного», 1655) и **Сен-Винсент** («Геометрический труд», 1647) развили совершенно строгую процедуру вычисления предела: после того как установлен общий член последовательности, они дают доказательство того, что разность между ним и предельным значением становится сколь угодно малой, начиная с некоторого номера. Математики нового времени тщательно изучали сочинения древнегреческих геометров: **Паскаль** писал: «метод неделимых **Кавальери** немногим отличается от метода пределов, которым пользовались древние».

Сен-Винсент употреблял слово terminus (конец, граница). Слово limit произошло от латинского limes (межа, граница, граничный камень). Словом limes впервые воспользовался **Ньютон**, который сделал учение о пределах основой своего метода флюксий (ок. 1670 г. он переделывал свои рукописи, убирая бесконечно малые разных порядков). Явного определения понятия предела у него не было, свойства пределов он считал самоочевидными. В «Энциклопедии» **Д'Аламбера** есть статья «Предел» (1756), написанная **Де Ля Шапелем**; определение **Д'Аламбер** дополнил замечанием, что величина никогда не становится равной своему пределу... Из-за неясностей и принципиальных трудностей в обосновании этого исчисления, а также из-за ожесточенной критики (в частности, епископа **Беркли**) последовали попытки обойти понятия предельного перехода и бесконечно малых. Самая значительная из них — "Théorie des fonctions analytiques" **Лагранжа** (1797), основные идеи появились в его мемуаре 1772 г. Лагранж хотел построить математический анализ на менее сомнительной основе, чем понятие предела и бесконечно малая величина. Его идея — **определить** производные функции $f(x)$ как коэффициенты $a_1, a_2 \ldots$ в разложении функции в ряд

$$f(x+h) = a_0 + ha_1 + \frac{1}{2!}h^2 a_2 + \ldots .$$

Сочинение **Люилье** "Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs" (1786) явилось одним из наилучших обзоров анализа на базе теории пределов (конечно, без ε и δ) в XVIII в.; это исследование было отмечено премией Берлинской академии наук. **Люилье** ввел общепринятый ныне символ (в виде lim.), привел доказательство теорем о пределе частного и т. д.

Еще в 1810–1818 гг. **Лакруа** в своем "Traité..." давал словесное описание перехода к пределу. Предел, к которому стремится аргумент, стали указывать только в XIX веке. Вероятно, первыми в этом были отец и сын **Бойяи**, их обозначение имело вид $x \frown a$; за ними следуют **Гамильтон** (1853) и **Вейерштрасс** (1841), которые придумали почти современные обозначения, именно: $\lim\limits_{n=\infty} P_n(x)$, $\lim\limits_{x=a} f(x)$. Знак $\to$ для указания стремления к пределу применил в 1905 г. англичанин **Лиисем**. Стрелку использовал также **Риман** в лекциях 1856/57 гг. Обозначения $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ для пределов слева и справа (или $x \to a+0$) ввел **Дирихле** (1837). **Паш** ввел обозначения $\limsup f(x)$, $\liminf f(x)$ (1881 и 1887). **Прингсхейму** (1898) и **Дюбуа Раймону** (1884) принадлежат обозначения $\underline{\lim}\, a_\nu$, $\overline{\lim}\, a_\nu$. В русском издании «Лекций» (1831) **Коши** было «переведено» и обозначение lim, выглядело это как пр. $f(x)$.

Математики пришли к современным понятиям строгости благодаря работам **Вейерштрасса**, который реформировал основы анализа, приняв за базис операцию предела, особенно применяя (ε-δ)-технику. Хотя определение предела через ε и δ было дано **Больцано** (1817), метод употреблялся случайно и больше для оценки аппроксимации. Именно отсутствие техники (ε-δ) у **Коши** явилось причиной его известных ошибочных теорем, которые вызвали возражения **Абеля**, **Стокса**, а позднее — знаменитые контрпримеры. **Дюбуа Раймон** (1869) привел пример функции

$$z = \frac{x + (x+y)^2}{2x + y - (x+y)^2}, \quad xy \neq 0,$$

которая непрерывна по каждому аргументу, по x и по y, но не является непрерывной по совокупности аргументов в точке (0,0). **Томе** (1870) показал это же для функции

$$f(x,y) = \sin\left(4\mathrm{Arg\,tg}\,\frac{x}{4}\right),$$

Шварц (1872) упростил функции, его пример:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad xy \neq 0.$$

Реформа **Вейерштрасса** была глубока, последовательна. Она была настолько нетривиальна, что в «Курсе анализа» **Жордана** (1882) определение предела отсутствует. В устном изложении математического анализа первенство бесспорно принадлежит **Вейерштрассу**, а первая публикация определения предела в классической манере ε-δ — это статья **О. Бонне** (1871). В "Cours d'Analyse" **Гуэля** (1878) «метод пределов» приписывается **Коши** или **Дюамелю**.

Первые пропагандисты метода пределов в России — С. Е. **Гурьев** и П. А. **Рахманов**. [198, I$_1$, с. 66–71]; [185, II, с. 254–256]; [33, с. 94]; [161, с. 121,152]; [64, XIV, с. 93]; [64, XXX, с. 11–81].

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Согласно **Цейтену**, уже **Аполлоний** при исследовании конических сечений применял преобразование системы координат. Первые формулы замены координат на плоскости приведены в 1659 г. **ван Схоутеном** в комментариях к «Геометрии» **Декарта**. Это действительно были комментарии, развивавшие мысль **Декарта**, брошенную вскользь, но недвусмысленную и бесспорно ясную автору.

Общие формулы преобразования координат впервые привел **Эйлер**. Он дал формулы преобразования декартовых координат в полярные и одной пространственной прямоугольной системы координат в другую (1748).

Преобразование переменных в двойных интегралах впервые производил **Эйлер** (1759–1770), в тройных — **Лагранж** (1773), а также **Лаплас**. В XIX в. сами преобразования координат сделались предметом исследования — в работах **Якоби**, **Кэли** и других. **Якоби** впервые рассмотрел вопрос во всей общности и дал общее правило. Определитель *якобиан* совершенно обоснованно связан с именем **Якоби**. [198, $III_{1.1}$, с. 761]; [198, II_1, с. 107]; [175, **26**, с. 370].

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Самое первое появление этого интегрального преобразования датируется 1737 г. — это статья **Эйлера** “De constructione aequationum”, где он рассматривает

$$z(x, a) = \int_a^x e^{at} X(t)\, dt$$

(в современных обозначениях). **Эйлер** применяет этот прием для решения дифференциальных уравнений в 1737, 1744, 1763 гг.

Трижды при решении уравнений в частных производных **Лагранж** применил аналогичный прием (1759, 1776). Последняя его статья была известна **Лапласу**. Самая ранняя статья **Лапласа**, связанная с этой темой, относится к 1779 г. (“Mémoire sur les suites”). В ряде работ 1779–1812 гг. **Лаплас** систематически развил основную часть теории и на этой основе получил замечательно глубокие и важные результаты.

В «широко читаемом» курсе **Лакруа** было изложено использование преобразования **Лапласа** в решении дифференциальных уравнений, так что результаты сразу же приобрели характер «классических». Здесь также был проведен анализ и сравнение работ **Эйлера** и **Лапласа**.

Затем последовали работы **Фурье** (1805), **Пуассона** (1823), **Коши** (1823–40), **Лиувилля** (1832), **Мерфи** (1832) и других, которые развили и углубили метод. В течение всего XIX в. время от времени появлялись независимые исследования, перекрывавшие друг друга.

Двухтомный труд “Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und verandlichen Coefficienten” (1853, 1859) венского математика **Петцваля** обобщил не только его собственные исследования, но и все достижения этой теории к 1860 г. **Петцваль** даже имел версию формулы обращения. Его теория не содержала контурных интегралов, вычетов и т. п., однако его работы оказали стимулирующее влияние на **Буля**, **Шлезингера**, **Меллина** и **Бейтмена**.

Новый этап развития теории знаменовали работы **Пуанкаре**, который начал заново развивать теорию. Через пять лет он уже не считал интегральное преобразование своим изобретением, но приписывал его **Бесселю** (безо всяких на то оснований) и, наконец, в статье 1885 г. поместил сноску о том, что в предыдущем мемуаре имя **Бесселя** надо всюду заменить именем **Лапласа**. **Пуанкаре** употребил только однажды название “la transformation de **Laplace**”. До тех пор писали о «замене переменной», «методе **Лапласа**», «методе определенных интегралов». Несомненно, только благодаря **Пуанкаре** преобразование связано с именем **Лапласа**. В английской литературе слово transform впервые появилось в печати в статье **Титчмарша** как "**Hankel** Transform" (1923).

Статьи **Пуанкаре** вместе с работами **Шлезингера** ("Handbuch... ", 1895) и **Меллина** (1896) явились источником исследований **Пинкерле** (а позднее — **Дёча**).

Исторически самая важная — статья **Пинкерле** от 1887 г. Он продолжал развивать это направление в течение 40 лет (хотя оно и не находилось в центре его научных интересов). Главной целью **Пинкерле** было создание «функционального исчисления», в котором «аргументом» являлась бы функция. Так **Пинкерле** пришел к изучению линейных операторов и, в частности, — преобразования **Лапласа**. Опередив современников на 25–30 лет и будучи незамеченным, **Пинкерле** писал с большим достоинством: «...я рассмотрел (и полагаю — первым)... свойство с точки зрения функционального анализа... и не без удовлетворения вижу, что в самых недавних работах многие ученые становятся на ту же самую точку зрения, даже если мои исследования ускользнули от внимания их авторов». Возможно, эти слова больше всего относятся к **Феликсу Бернштейну** и **Густаву Дёчу**.

В исследованиях **Бореля** (с 1897 г.) преобразование **Лапласа** было, наконец, связано со сверткой функций, с интегральной теоремой **Коши**. Именно его статьи (а также **Бейтмена**) дали **Бромвичу** и **Карсону** идеи обоснования исчисления **Хевисайда**. В 1920–1927 гг. **Ф. Бернштейн** и **Дёч** обобщили и продолжили многочисленные исследования. Синтез современной теории завершился в 1927–1933 гг., когда удалось слить воедино исследования разных направлений — по рядам **Дирихле**, дзета-функции **Римана**, исчисление **Хевисайда**. [198, II_2, с. 555]; [177, с. 346]; [194, с. 7]; [197, с. 7]; [64, XX, с. 247]; [175, **25**, с. 344]; [175, **26**, с. 351–381].

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

Согласно письму **Эйлера** к **Гольдбаху**, рукопись его «Интегрального исчисления» была закончена в 1763 г. (когда **Лежандру** было 11 лет). Здесь используется преобразование, названное впоследствии именем **Лежандра**.

ПРИЗМА

Термин произошел от греческого πρισμα (отпиленный кусок, отпиленная часть); πριω означает «пилю». Слово встречается уже у **Евклида**, **Архимеда**. В русскую математику слово перешло из латыни и до середины XIX в. имело написание «присма». [113]; [163, IV, с. 10].

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

В течение долгого времени ряды использовались достаточно широко, но вопрос о сходимости ряда даже и не ставился. **Тейлор**, например, ни разу не задавал такого вопроса. Расходящиеся ряды употреблялись несмотря на возражения **Вариньона**, **Маклорена**, **Н. Бернулли** и **Д'Аламбера**. В 1740 г. **Эйлер** сформулировал условие расходимости ряда $|S_{2n} - S_n| > 0$ (считая его необходимым и достаточным).

В распространенном курсе математического анализа **Бертрана**, переведенном на многие языки и выдержавшем множество переизданий (т. е. в течение всего XIX в.), признаки сходимости не связаны с именами математиков. Современные названия встречаются впервые в учебнике **Отто Штольца** (1904, 1905).

Признак **Лейбница** был известен ему (ок. 1682 г.) и сообщен в письме к **И. Бернулли** (от 1714 г.)

Признак **Д'Аламбера** доказан им в 1768 г.

Интегральный признак был открыт **Маклореном** (1742), а затем вновь изобретен **Коши**, благодаря которому и стал широко известен. **Коши** доказал в 1821 г. радикальный признак сходимости.

Признак **Абеля** опубликован им в 1827 г.

В промежуток между 1832 и 1852 гг. опубликованы критерии сходимости рядов **Раабе** (1832), **Дюамеля** (1839), **де Моргана** (1839), **Бертрана** (1842), **Бонне** (1843), **Пуанкаре** (1851) и др. [198, I_1, с. 82–107]; [102, с. 55]; [77, с. 39]; [155, с. 209]; [86].

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Первое употребление этого принципа относится к 1806 г. (**Брианшон**). Официально его открыл **Понселе**, живя в Саратове, в плену; свое открытие он опубликовал только в 1822 г. **Жергонн**, будучи редактором Annales des Mathematiques, имел обыкновение так редактировать присылаемые статьи, что авторы с трудом их узнавали. Так же он подошел к статье **Понселе** «О проективных свойствах фигур». При этом он разработал в общей форме идеи **Понселе**, приложенные к специальным случаям. В трех статьях (1824–1827) **Жергонн** попытался обосновать принцип.

Это было началом борьбы за приоритет между **Жергонном** и **Понселе**, которая продолжалась долгие годы. Название Principe de dualité ввел **Жергонн**. Смысл принципа, туманный вначале, был достаточно разъяснен после прений, возникших по этому предмету между **Жергонном**, **Понселе** и **Плюккером**. **Жергонн** первым подметил, что принцип двойственности вытекает из взаимности аксиом инцидентности. [186, с. 292]; [76, с. 81]; [81, с. 33].

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Дирихле не был первым, кто использовал этот принцип, аналогичные методы доказательства встречались уже у **Гаусса** (1804) и **У. Томсона** (1847); у **Дирихле** они появляются после 1848 г., но **Риман** узнал об этом методе на лекциях **Дирихле** и, не заботясь об исторической истине, дал ему название. **Вейерштрасс** подверг критике нестрогие рассуждения **Дирихле** и **Римана**, после чего физики продолжали пользоваться принципом, а большинство математиков признали критику убедительной.

Строгое обоснование теорем дал только **Гильберт** (1901). **Минковский** характеризовал высокий педагогический дар **Дирихле** словами: «Он обладал искусством соединять с минимумом слепых формул максимум зрячей мысли» и назвал это «настоящим принципом **Дирихле**». [77, с. 304–308]; [142, с. 187].

ПРОБЛЕМА

Греческое πρὸβλημα означает «то, что поставлено вперед, задание». Оно образовано из προ (вперед) и βαλλω (бросаю). Греки называли проблемой только текст, который предлагает построение фигуры. Термин встречается уже у **Платона, Евклида, Архимеда**. [216].

ПРОГРАММА

Слово πρὸγράμμα означает «объявление, наказ». Оно образовано из πρὸ (вперед) и γραμμα (запись, линия).

В первой половине XIX в. (с 1812 г.) английский математик **Бэббедж** работал над созданием вычислительной машины — вначале разностной, а потом универсальной, или аналитической. Итальянский военный инженер **Л. Ф. Менабреа** написал «Очерк аналитической машины, изобретенной **Бэббеджем**». Очерк был переведен на английский язык и прокомментирован леди **Лавлейс** (1843). Леди Ада **Лавлейс**, единственная дочь поэта **Байрона**, была очень дружна с **Бэббеджем** и писала комментарии при его одобрении, поддержке и постоянных консультациях. Она создала «Список операций» для вычисления чисел **Бернулли**. В этой программе были «условная передача управления», изобретенная **Бэббеджем**, повторение цикла операций и т. д. В программе были заложены многие принципы современного программирования. Сохранились введенные ею термины *рабочая ячейка*, *цикл* и др. [16]; [49, с. 132–137].

ПРОГРЕССИЯ

Задачи на прогрессии находят в древнейших математических записях — в папирусе Ринда, в вавилонских астрономических таблицах. Термин происходит от латинского *progredior* (иду вперед); *progressio* означает «движение вперед, успех, постепенное усиление».

Знак $\div\!\div$ для *геометрической прогрессии* ввел **Оутред** (1631). Обозначение было сразу принято и быстро распространилось в XVII в. В XVIII в. изредка встречались некоторые видоизменения. Такую запись применяют **Маклорен** (1748), **Безу** (1797) и др.

Слово *геометрическая* в названии объясняется тем, что любой ее член есть среднее геометрическое между двумя соседними.

С обозначением *арифметической прогрессии* было меньше единодушия. Употреблялись значки $\frac{\bullet\!\sim}{\sim\!\bullet}$, $\frac{\bullet\bullet\bullet}{\bullet\bullet\bullet}$, $\overset{\bullet\bullet\bullet}{\bullet\bullet\bullet}$, $\frac{\bullet}{\bullet\bullet}$, $\frac{\bullet\bullet}{\bullet}$, $\frac{\bullet}{\bullet}$. Последний символ утвердился в основном благодаря французским математикам **Ланьи** (1692), **де Белидору** (1725), **Безу** (1797) и другим.

Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии выведена **Торричелли**. Бельгийский математик-иезуит **Таке** привел этот результат в книге "Arithmeticae theoria et praxis" («Арифметическая теория и практика, тщательно обоснованная», 1656), которая долго служила стандартным учебным пособием. До XX в. формулу приписывали **Таке**. [185, с. 278]; [102, с. 45]; [34, с. 20].

ПРОДОЛЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ

Зачатки метода можно обнаружить в теории рядов **Эйлера**. Однако идею аналитического продолжения (вместе с этим термином) впервые в математику ввел **Вейерштрасс**: в 1842 г. он, будучи учителем гимназии, занимался теорией дифференциальных уравнений и пришел к этим идеям. Сообщение **Вейерштрасса** на эту тему относится к 1866 г. Тогда же **Вейерштрасс** знал о существовании естественной границы.

По воспоминаниям **Клейна**, **Вейерштрасс** питал отвращение к типографской краске. Он даже не разрешал литографировать свои лекции, а требовал, чтобы их переписывали. Записи его лекций были настолько распространены и в Германии, и за ее границами, что оказали влияние на развитие математики. Именно в них были развиты идеи **Вейерштрасса** об аналитическом продолжении.

Пример функции, имеющей естественную границу, опубликовал **Ганкель** (1870). Работы **Вейерштрасса** в этом направлении при его жизни не были опубликованы. В 1857 г. принцип аналитического продолжения сформулировал **Риман** в «Теории абелевых функций». Ему и **Шварцу** принадлежит заслуга разработки специального метода — принципа симметрии. [198, II_2, с. 36]; [101, с. 70–72]; [77, с. 296].

ПРОЕКЦИЯ

Термин происходит от латинского *projectio* (бросание вперед), которое свою очередь образовано от глагола *projiciere* (выбрасывать, бросать).

Изопериметрическую проекцию впервые применил **Фейрич**, которому принадлежит и название. Теория этой проекции изложена им в 1820 г.

Проекция **Меркатора** названа по имени ученого, открывшего ее (1569). **Меркатор** — «латинизированная» фамилия немецкого математика Кауфмана: Kaufmann по-немецки и Mercator по-латыни означают «лавочник, торговец».

Первая *ортогональная проекция* встречается в книге **Дюрера** “Underweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheyd” («Наставления об измерении циркулем и линейкой», 1525), которая явилась первым немецким учебником геометрии.

Стереографическая проекция появилась в древности. Некоторые авторы приписывают ее **Птолемею**; по мнению других она открыта **Гиппархом**. В Средние века проекция называлась «проекцией астролябии». Современное название она получила в 1613 от французского математика **д'Эгийона**. Слово *стереографический* составлено из греческих στερεὸς (телесный, пространственный) и γραφω (пишу). Систематический вывод всех основных формул впервые дан **Магнусом** (1831) и **Серре** (1855). [198, $III_{1.1}$, с. 594]; [136, с. 33–34]; [65, **2**, с. 121]; [131].

ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Латинские productum, producere встречались часто уже в XIII в. Среди многочисленных обозначений умножения употреблялся и прямоугольник $\square$, как символ того, что его площадь получается при перемножении двух измерений. В связи с этим вплоть до XVII в. вместо *произведение* говорили «прямоугольник».

Первое определение действия умножения восходит к грекам. Коммутативность умножения доказана **Евклидом**. Латинский глагол multiplicare со всеми производными от него терминами встречается у **Витрувия** (I в.). Термин *множитель* имеется у **Боэция** (VI в.), *множимое* — у **Сакробоско** (XIII в.). Русские названия *множитель* и *произведение* впервые ввел **Л. Ф. Магницкий** (1703).

До современных знаков умножения в европейской математике употреблялись различные обозначения. Больше других было распространено M — от названия операции — Multiplicftion (для деления D от Division). Так записывается умножение у **Штифеля** (1545), **Стевина** (1585) и др.

Знак умножения × ввел **Оутред** ("Clavis mathematicae", 1631), возможно, по аналогии со сложением; напоминавшая этот символ буква X как знак умножения встречается в английской анонимной работе 1618 г. Точка в качестве знака умножения появилась впервые у **Региомонтана**, затем у **Гариотта** (1631). Это обозначение принял **Лейбниц**. Однако во всеобщее употребление знак вошел благодаря неоднократно переиздававшимся «Основаниям всех наук» **Вольфа** (первое издание в 1710 г.). Знаки · и × отобраны из множества символов, придуманных различными авторами и принятых в разных странах во все времена; так, в употреблении наравне с современными были, например, уже упоминавшийся знак $\square$ — прямоугольник (**Эригон**, 1634); знак ∗ (**Ран**, 1659); или знак מ — древнееврейская буква «мем» (**Джонс**, 1706).

Бесконечные произведения появились при попытках решить задачу квадратуры круга — у **Виета** (опубликовано в 1646 г.) и у **Валлиса** (1659). [56, с. 221]; [185, I, с. 250, 266]; [165, с. 209].

ПРОИЗВОДНАЯ

Слова *ableiten*, *derivare* впервые были употреблены в переписке **Ньютона** и **Лейбница** (1675–1677).

Название *производная* (dérivée) ввел **Лагранж** ("Théorie des fonctions analytiques", 1797). Вместе с этим термином в математический язык вошли также *вторая производная*, *третья*... В русский язык слово *производная* ввел впервые **Василий Иванович Висковатов** (1810).

Лейбниц называл производную «дифференциальным отношением», что обусловлено его обозначением $\frac{dy}{dx}$, а также $\frac{ddy}{dx^2}$ (1684 г. и раньше). Исчисление, созданное **Лейбницем**, было именно **дифференциальным**, в том смысле, что он оперировал дифференциалами и в его исчислении не было места производным.

Ньютон (с 1665 г.) называл производную «флюксией»; он не давал определения флюксии, для него это скорость — не объяснять же что такое «скорость»! С 1691 г. **Ньютон** использовал обозначения $\dot{x}, \dot{r}, \ddot{\theta}$, которые долго сохранялись в Англии; наконец, по типографским соображениям Совет Лондонского математического общества в 1915 г. предпочел x', r', θ'' ньютоновым обозначениям.

Лагранж в 1760 г. ввел обозначения y' или $f'(x)$, а также $f''(x)$ и т. д., которые, однако, появились раньше в мемуаре **Фонсене** (1759); предполагают, что часть мемуара для него написал **Лагранж**.

В книге **Арбогаста** (1800) впервые введено обозначение $D_x y$ — по первой букве слова Dérivation, которое затем распространилось благодаря тому, что его постоянно употреблял **Коши**. Здесь впервые знак операции отделен от функции. В виде $\frac{d}{dx} f(x)$ это сделано в анонимной статье 1859 г.

Интересно, что таблицы производных появились в учебниках поздно, и во всяком случае — после таблицы интегралов. Одним из самых первых курсов (а возможно, и самым первым) дифференциального исчисления, где была приведена таблица производных, был «Курс математики по **Серре**, **Фидлеру**, **Сальмону** и многим другим», изданный в Одессе в 1881 г. В «Таблице формул для упражнения в дифференцировании» (так она озаглавлена!) функции и их производные записаны в два столбца, и функции приведены к такой форме, чтобы «ответ» имел простой и красивый вид:

	функция	ея производная
1)	$\frac{1}{b} l(a+bx)$	$\frac{1}{a+bx}$,
2)	$-\frac{1}{b(a+bx)}$	$\frac{1}{(a+bx)^2}$,
3)	$\frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta x}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}$

и т. д. — всего 16 формул. Уже из приведенных примеров видно, что выбор формул зависел от вкусов составителя: пять из 16 формул — производные различных конкретных степенных функций; общая степенная и показательная функции отсутствуют.

Нужно добавить, что и выводы формул дифференцирования непривычны для нас. Например, широко использовались ряды. Так, **Эйлер** получил производную функции $\ln x$ следующим образом:

$$d(\ln x) = \ln(x+dx) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^2}{2x^2} + \ldots .$$

Так как производная равна коэффициенту при dx, то $(\ln x)' = 1/x$.

В 1930 г. была опубликована найденная рукопись **Больцано** "Funktionslehre" («Учение о функциях»), написанная примерно век назад. Оказалось, что уже в то время **Больцано** построил непрерывную функцию, не являющуюся монотонной в любом интервале области определения и недифференцируемой на всюду плотном множестве точек. Доказательства **Больцано** не строги по современным требованиям, но своих современников он обогнал на несколько десятилетий.

Отдельные точки недифференцируемости были очевидными и известными: разрыв, точки возврата ($y = x^{2/3}$), случаи когда правая и левая производные не равны ($y = |x|$ — **Дирихле**, 1829) или обе не существуют ($f(x) = x \sin 1/x$ — **Коши**, 1829).

Почти весь XIX в. прошел в попытках доказать, что произвольная непрерывная функция имеет производную всюду, кроме, может быть, особых точек. В конце XIX в. **Гуэль** ручался: «Сегодня нет ни одного математика, который поверил бы в существование непрерывных функций без производных».

В 1855 г. бельгийский математик **Ламарль** (доказывая теорему **Ампера**) рассматривал

$$\limsup \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = L, \quad \liminf \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = l,$$

что является некоторым подобием производных **Дини**, Λ_x, λ_x, Λ'_x, λ'_x, которые **Дини** ввел в 1878 г., независимо от **Ламарля**.

Вейерштрасс и **Риман** привели первые примеры непрерывных, но недифференцируемых функций. При этом ни **Риман**, ни **Вейерштрасс** не расставили точки над i: всюду ли функция недифференцируема? До 1918 г. не появилось ни доказательства утверждения, ни опровержения его: **Харди** удалось указать множество точек, в которых функция не имеет конечной производной. В 1970 г. **Гервер** расширил результат **Харди**, а в 1971 г. доказал, что функция не имеет производной нигде, кроме указанных им точек.

Частные производные появились уже в XVII в. в трудах **Ньютона**, **Лейбница**, **Я.** и **И. Бернулли** без каких-либо оговорок, правил и особых символов. Во всяком случае **Якоби** считал нужным дать четкое определение частных производных (1841). **Лежандр** впервые противопоставил обозначениям $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ новые: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ (1786).

Такие попытки предпринимались и раньше: **Лопиталь** (1696), например, писал $\delta m, \vartheta m$ для частных производных функции m по x и по y соответственно; **Монж** (1770) употреблял обозначения $\frac{\delta v}{dx}$, $\frac{\delta v}{dy}$; **Коши** (1823) отмечал частные производные индексами: $\frac{d_x u}{dx}$, $\frac{d_y u}{dy}$, а **Эйлер** (1770) — скобками: $\left(\frac{df}{dx}\right)$, $\left(\frac{df}{dy}\right)$. **Пуассон** употреблял обозначения $z', z_{\prime}$ для частных производных по x и по y (1831). Таковы же обозначения **Лагранжа** (1797, 1813); если же речь шла о производных функции, заданной неявно, $F(x,y,z) = 0$, то запись (например в «Теории аналитических функций») такова:

$$F'(x) + z'F'(z) = 0, \quad F'(y) + z_{\prime}F'(z) = 0.$$

Введению современных обозначений, равно как и $\frac{\partial^{n+p+q}u}{\partial x^n \partial y^p \partial z^q}$ способствовало систематическое употребление их немецкими математиками — в первую очередь **Якоби** (с 1837 г.) и **Вейерштрассом** (с 1841 г.).

Эволюция обозначений частных производных:

f'_x, f'_y или z'_x, z'_y	**Лагранж** (1797, 1801);
$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$	**Лежандр** (1786), **Якоби** (1837, 1841);
$D_x f, D_y f$	**Коши** (1840);
p, q	**Эйлер** (1775), **Монж** (1801);
$z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$	**Лагранж** (1801);
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	**Якоби** (1837)
r, s, t	**Монж** (1801);
$f^{p+q+r}_{x^p y^q z^r}$	**Лагранж** (1797).

[185, I, с. 207, 225, 240]; [185, II, с. 224, 238]; [186, с. 257]; [174, **35**, с. 459, 476]; [152, IV, вып. 2 (30), с. 15, 176]; [175, **10**, с. 76, 92].

ПРОПОРЦИЯ

Теория пропорций была глубоко развита древнегреческими учеными. Стимулом для этого явилось требование математической строгости: изучать только целые числа и отношения между ними. В итоге в IV в. до н. э. **Евдоксом** было завершено построение общей теории пропорций. Греческие термины для обозначения отношений и пропорций, будучи переведены на латинский язык, дали современные термины: λογος переводится словом ratio (отношение), а греческое αναλογια **Цицерон** один раз перевел редким латинским словом proportio (соразмерность), которое и подхватили **Капелла** (V в.) и **Боэций** (VI в.) для обозначения математического понятия. Однако термин «аналогия» был еще долго в употреблении — в XIX в., например, им пользовался **Гамильтон**.

Современное определение впервые дал **Цамберти**, директор инженерной школы в Риме (XV в.). Члены пропорции назывались у греческих математиков ορoι — «границы»; буквальным переводом этого слова является латинское termini, откуда и возник term (**Клавиус**, 1608). Выражение *средняя пропорциональная* ввел **Иордан Неморарий** (XIII в.), *средняя арифметическая* — **Кеплер** , *средняя геометрическая* — **Клюгель** (1808).

Современную запись $A : B = C : D$ ввел **Лейбниц** (с 1708 г.). В ней обнаруживается явное родство с принятыми в Англии обозначениями, где в это время была в употреблении запись $A.B :: C.D$, предложенная **Оутредом**, и обозначение $A : B :: C : D$ английского астронома **Уинга** (в его книгах 1649, 1651 гг.). Во французской же математике, например, в это время были приняты различные модификации записи **Декарта** $a|b||c|d$ (1619–1621). В течение первой половины XVIII в. встречались различные обозначения, пока постепенно символика **Лейбница** не одержала победу всюду, кроме Англии, где к ней пришли только в XX в. [56, с. 315–318]; [185, II, с. 275–297]; [165, с. 259].

ПРОСТРАНСТВО

Понятие пространства стало объектом изучения после того, как появились некоторые исследования по аксиоматике. Видимо, первой работой в этой области была статья **Больцано** "Betrachtungen über einige Gegenstande der Elementargeometrie" (1804). Когда большинство математиков не помышляли об «абстрактных исследованиях», **Больцано** ввел «неопределяемые элементы» и «произвольные допущения» (постулаты, аксиомы). Общий интерес к понятию *пространство* возник, вероятно, после работ **Гаусса**, **Лобачевского**, **Бойяи**, **Римана**, **Гельмгольца**, **Грассмана**, **Пуанкаре** и др. «К 1870 г. были доказаны все основные теоремы линейной алгебры и рассмотрены основные понятия n-мерного пространства» (Клейн).

Нечеткие соображения о четырехмерном пространстве находят у **Орема** (XIV в.), **Штифеля** и **Рудольфа** (XV в.). Идея многомерного пространства появляется в конце XVI в. Возможность четвертого измерения обсуждается впервые в «Алгебре» **Валлиса** (1685); такие соображения высказаны **Кантом**, **Д'Аламбером** (1674), затем **Лагранжем** (1788). В 1843 г. появляется статья (**Кэли**), в названии которой — «геометрия (n) измерений», в 1844 г. — книга **Германа Грассмана** "Lineale Ausdehnungslehre... ". В 1854 г. **Риман** в знаменитой пробной лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» ввел общее определение *n-кратно протяженного многообразия* и мероопределения, возможные на таком многообразии.

Современная геометрическая терминология появляется впервые у итальянского ученого, друга **Римана**, **Энрико Бетти** в его "Sopra gli spazio di un numero qualunque di dimensioni" («О пространстве любого числа измерений», 1871). Уже в следующем году эта терминология была принята **Жорданом** ("Essai sur la géomérie à n dimension").

К концу XIX в. идея многомерного пространства прочно вошла в математику. В 1884 г. **Гиббс** ввел понятие *фазового пространства*, таким образом, понятие вошло и в механику, физику, химию. Дифференциальная геометрия n-мерного евклидова пространства в основных чертах была создана **С. Ли** (1871).

Теория *линейного пространства* родилась из исследований по алгебре **Дедекинда**, **Кронеккера**, **Фробениуса**, **Сильвестра** и др. Затем добавился еще один фактор — влияние векторного анализа, т. е. в конечном счете также алгебры — кватернионов. Первая система аксиом линейного пространства («линейной системы», как писали в конце XIX – начале XX вв. вместе с **Лагерром**, **Пеано**, **Карвалло**) была сформулирована **Пеано**; она приведена в Приложении к "Calcolo geometrico... " (1888). Именно **Пеано** становится основателем новой концепции, по которой основными понятиями становятся *вектор* и *точка* — это мы видим уже в названной работе, а затем и в его последующих статьях (1892, 1896). В математике появляется *векторное пространство* (видимо, впервые названное так **Банахом**), **Пеано** привел примеры линейных пространств — векторы плоскости или трехмерное пространство, пространство многочленов степени не выше n на отрезке, бесконечномерное пространство непрерывных на отрезке функций. Аксиомы **Пеано**, практически без каких-либо изменений, повторены **Г. Вейлем** в его книге “Raum. Zeit. Materie” (1918) и с тех пор известны под названием «аксиоматика **Вейля**».

В это же время в работах других итальянских математиков — **Вольтерры**, **Пинкерле** — кристаллизуются понятия функционала, линейного оператора. Из общего начала — вариационного исчисления, теории функционалов, теории интегральных уравнений — развились две линии: работы одной ветви, относящиеся к периоду до 1900 г., завершаются книгой **Пинкерле** и **Амальди** (500 страниц) “Le operazioni distributive e loro applicazioni all'analisi”, а затем эволюционируют в направление **Адамара** и **Фреше**; другая ветвь связана с интегральными уравнениями — идеи **Фредгольма**, **Гильберта**, развитые **Шмидтом**, **Риссом**, **Хелли**, привели к созданию теории *абстрактных полных нормированных пространств.*

В публикациях 1874–1901 гг. **Пинкерле** развил геометрию бесконечномерного пространства. В статье «Замечание о геометрии функционального пространства» (“Genno sulla Geometria dello spazio funzionale”, 1896) **Пинкерле** считает «точкой пространства» степенной ряд, а коэффициенты при соответствующих степенях x — «координатами точки» этого пространства. Именно **Пинкерле** впервые написал слова spazio funzionale, а потом — spazio lineare. Он охотно признавал влияние **Гамильтона**, **Грассмана**, **Фробениуса**, **Пеано** (аксиомы которого **Пинкерле** использовал). В 1901 г. l'espace functional — уже привычное понятие в работах французских математиков — **Адамара** и **Фреше** (его ученика).

Замечательно, что **Фреше**, развивая «абстрактный подход», имел в качестве «образца» векторное исчисление. В 1906 г. **Фреше** ввел понятие *абстрактного метрического пространства*, определив l'écart («отклонение, разность») в пространстве функций. **Фреше** долго избегал слов *абстрактное пространство*, предпочитая «абстрактные множества или классы» (ensembles abstraits); как и **Пеано**, он термину «точка» предпочитал «элемент». **Пеано** писал (1884): «Назовем $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ точкой или элементом...», а дальше: «назовем... системой точек или областью», **Шмидт** вначале избегал слов «вектор» и «пространство», хотя он был хорошо знаком с этими понятиями. **Фреше** не использовал и слова *топология*.

Название *метрическое пространство* принадлежит **Хаусдорфу**, который ввел термин «metrische Raum» (1914) и аксиомы метрического пространства (не упоминая имени **Фреше**, хотя из книги ясно, что работы последнего были известны **Хаусдорфу**). Создание теории абстрактного полного нормированного пространства было подготовлено трудами **Фреше**, **Рисса** и других математиков. В результате **Хелли**, **Банах** и **Винер** почти одновременно опубликовали системы аксиом такого пространства (1921–1922).

Хелли исходил из прикладной точки зрения, что видно из названия его статьи «Системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных» (“Systeme linear Gleichungen mit unendliche viele Unbekannten”, 1921). **Банах** и **Винер**, опубликовавшие работы в 1922 г. с разрывом в несколько месяцев, осуществили абстрактный подход. В течение некоторого времени эти пространства назывались *пространствами* **Банаха—Винера**. Затем имя **Винера**, занявшегося другими темами (в частности, кибернетикой), перестало упоминаться.

Статья **Банаха** называлась "Sur les opérations dans les ensembles abstraites et leur application aux equations intégrales" («Об операциях в абстрактных множествах и их приложении к интегральным уравнениям»). Только это название и указывает на путь, которым **Банах** пришел к теории, поскольку обещанные в заголовке приложения так и не появились в статье. Интересно отметить, что даже в 1922 г. **Банах** считал необходимым оправдывать абстрактный подход: «чтобы не нужно было доказывать теоремы для каждого определенного множества... я выбрал другой путь».

Открытие пространства **Банаха** отмечает начало современного функционального анализа. **Дьедонне** писал: «Непосредственное влияние этой статьи трудно оценить, хотя эффект длительного воздействия был огромным». Последним шагом в переходе к абстрактному анализу явились статьи **фон Неймана** (1929, 1930).

В теории интегральных уравнений **Фредгольма** (1903) и **Гильберта** (1904–1910) рассматривались семейства последовательностей, суммируемых с квадратом. **Гильберт** не вводил никаких геометрических образов в бесконечномерном пространстве. Он не изучал также самих таких пространств, занимаясь теорией интегральных уравнений, однако его работы содержат значительно больше, чем интегральные уравнения: он ввел понятия сильной и слабой сходимости, слабой компактности, понятие полной системы ортогональных функций, создал спектральную теорию для бесконечных квадратичных форм, изучал линейные преобразования в таких пространствах. Однако он не употреблял слова «пространство», и когда бесконечномерное пространство (и в частности, гильбертово) стало объектом изучения, **Гильберт** просил объяснить ему, что же это такое — «пространство **Гильберта**». Кажется, название Hilbertsche Raum впервые употребил **Шенфлис** (1908). В немецкой литературе употреблялись названия «линейная область» или «линейная функциональная область» (lineare Gebiet, ein lineare Funktionalgebiet — **Шмидт**, 1908), а также Klasse; У **Рисса** название l'espace Hilbertien встречается впервые в 1913 г., а в следующем году термин, уже как «признанный», употреблен **Хаусдорфом**. **Фреше** предположил, что пространство L^2 надо бы называть *пространством* **Гильберта—Лебега—Рисса** (хотя оно появилось именно в работе **Фреше** 1906 г.). **Лебег** отклонил это предложение и подчеркнул важность работ **Фату—Парсеваля** и **Рисса—Фишера**. На Международном математическом конгрессе в Риме (1908) **Рисс** предложил первую систему аксиом общих топологических пространств, которая с некоторой модификацией и вошла в современную математику.

Фундаментальный результат — изоморфизм пространств l^2 и L^2 — установлен **Риссом** и **Фишером** в 1907 г. В 1910 г. **Рисс** обозначил класс функций через L^p $(p > 1)$; обозначение L напоминает о том, что интеграл — **Лебега**; одновременно он ввел *сопряженное пространство* и получил теорему о представлении линейного функционала в L^p. Один из параграфов его статьи озаглавлен "Starke und schwache Konvergenz in bezug auf die Exponent p". **Рисс** определяет *сильную сходимость* как

$$\lim \left[\int_a^b |f(x) - f_i(x)|^p \, dx \right]^{1/p} = 0, \quad i \to \infty.$$

Рисс раньше, чем **Фреше**, проявил интерес к случаю $p = 2$, ссылаясь на **Фишера**, он называет такую сходимость сходимостью в среднем (convergenze en moyenne).

В статьях 1929–1930 гг. **Джон фон Нейман** публикует систему аксиом «так называемого гильбертова пространства» (der sogenannte Hilbertsche Raum), начиная тем самым новый этап теории. По словам **Дьедонне**, **Нейман** разрушил конкретный подход к теории гильбертова пространства и этот результат работ **фон Неймана** имел значение, далеко выходящее за пределы этой теории. [64, XVIII, с. 75–102]; [152, I, вып. 3–4, с. 13–23]; [188]; [206]; [207]; [215]; [174, **80**, с. 370].

ПРОЦЕНТ

Слово происходит от латинских *pro centum* (со ста, на сто) и вошло в математику из купеческого и финансового обихода. Относительно обозначения % существуют несколько мнений. Порядковые числа писались так: 1° — «первое», 2° — «второе», так что C° означало «сотое». В итальянских рукописях XV в. слова per cento стали писать так: perC, pC, pC°, затем $\mathrm{p}\frac{\circ}{\circ}$ — и, наконец, $\frac{\circ}{\circ}$. Косая черточка % появляется в середине XIX в. из типографских соображений. По другим источникам обозначение % произошло от искажения записи ct_0 — сокращение слова cento. В «Коммерческой арифметике» (1685) наборщик принял ct_0 за дробь и напечатал его в виде $\frac{0}{0}$. Благодаря этому знак % стал употребляться для обозначения процентов и с середины XIX в. получил всеобщее признание.

В русском языке слово встречается в словаре 1714 г. в виде «процент» и в виде «проценто». [185, I, с. 312]; [56, с. 263].

ПРЯМАЯ

Создатели аналитической геометрии **Ферма** и **Декарт** знали, что любое уравнение первой степени с двумя переменными есть уравнение прямой (ок. 1636 г.) Опубликовал это утверждение впервые (1649) **Дебон** в «Кратких замечаниях» [о «Геометрии» **Декарта**]. Он привлек внимание также к тому, что $x = C$, $y = C$ — уравнения прямых, параллельных осям координат. Если принять во внимание, что в геометрии тогда рассматривались только положительные координаты x, y, то становится ясно, что это сказано слишком сильно. Естественно поэтому, что через 20 лет доказательству этого факта **Ян де Витт** посвятил целую книгу (вторая книга "Elementa curvarum linearum", 1658–1659). Он рассмотрел на чертежах положения прямых

$$y = \frac{bx}{a}, \quad y = \frac{bx}{a} \pm c, \quad y = c - \frac{bx}{a}.$$

У **ван Схоутена** уравнение прямой еще не встречалось в 1649 г., а в издании 1659 г. появилось уравнение $y = a - x$.

В "Introductio in Anlisin" во второй главе, посвященной преобразованию координат, **Эйлер** кратко рассмотрел прямую, исследовал уравнение $\alpha x + \beta y - a = 0$, разобрал различные комбинации знаков α и β. Систематически и в современной форме основные задачи на прямую изложил впервые **Лакруа** (1798/99).

Параметрическое представление кривых широко использовалось в математике, начиная с **Крамера** (1750). Параметрические уравнения прямой (на плоскости и в пространстве) ввел в употребление **Коши**, так же как и канонические уравнения в виде

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$$

("Leçons sur les applications du calcul infinitesimal à la géométrie ", 1826).

Уравнение прямой в отрезках привел впервые **Крелле** в «Сборнике статей и заметок по математике» (1821, "Sammlung mathematischer Aufsatze und Bemerkungen").

Нормальное уравнение прямой (и плоскости) встречается у **Лиувилье** (1809) и у **Магнуса** (1833), однако оно стало общеизвестным и общеупотребительным после того, как его вновь открыл **Гессе** (1861) и дал многочисленные приложения уравнения $x\cos u + y\sin u - v = 0$. В своем учебнике геометрии **Гессе** называл уравнение Normalforma. Еще в начале XX в. имя **Гессе** связывалось с этим уравнением и названия «гессева нормальная форма», «гессево нормальное уравнение» были обычными.

Пучок прямых впервые рассмотрел **Ламе** как частный случай семейства кривых $mE + m'E' = 0$, проходящих через точку пересечения двух линий с уравнениями $E = 0, E' = 0$. **Ламе** также привел необходимое и достаточное условия того, чтобы три прямые пересекались в одной точке (1818).

В «Элементарном трактате по теории кватернионов» (1867) **Тэт** рассмотрел и решил векторными методами те задачи на прямую (на плоскости и в пространстве), которые входят и в современные сборники задач. [198, $\text{III}_{1.1}$, с. 348, 624].

ПСЕВДОСФЕРА

Термин составлен из греческих слов ψεῦδος (неправда) и σφαῖρα (сфера). Эта поверхность была известна **Гауссу** (1828), который не публиковал никаких результатов по неевклидовой геометрии. Независимо от **Гаусса** поверхность была открыта **Миндингом** (1839). Наконец, ее вновь открыл **Бельтрами** (1868).

В 1840 г. **Лобачевский** опубликовал на немецком языке «Геометрические исследования», чтобы познакомить иностранных математиков со своими идеями. По-видимому, их никто не понял, кроме **Гаусса**. После смерти **Гаусса**, с 1860 г. начинается публикация его эпистолярного наследия. В 1866 г. французский математик **Гуэль** переиздал «Геометрические исследования» с добавлением писем **Гаусса к Шумахеру**, которые содержали горячие похвалы труду **Лобачевского**. Публикации сразу же вызвали всеобщий интерес к работам **Н. И. Лобачевского**. В том числе они привлекли внимание и **Бельтрами**. К этому времени **Бельтрами** имел опыт работы в картографии, от нее он перешел к исследованию поверхностей постоянной отрицательной кривизны и попытался «отыскать реальное основание для того учения, прежде всего, чтобы признать тем самым необходимость нового порядка вещей и идей». В знаменитом мемуаре «Опыт истолкования неевклидовой геометрии» (1868) он показал, что на псевдосфере выполняется геометрия **Лобачевского**. Так как это — поверхность *постоянной* отрицательной кривизны, то естественно было дать название, которое роднило бы ее со сферой. [78, с. 311]; [95, с. 232–233]; [198, III_3,412]; [82, с. 537].

ПУЧОК

К уравнению пучка плоскостей впервые пришел **Ламе** (1816). Этот факт вновь заметили **Жергон** (1826) и **Бобилье** (1827). **Бобилье** развил из него метод сокращенных обозначений (независимо от него и полнее и систематичнее это сделал **Плюккер**, 1827–1834).

Ламе рассматривал и пучок прямых, а также представлял в виде $f + \lambda g = 0$ совокупность всех поверхностей 2-го порядка, проходящих через сечение двух таких поверхностей $f = 0$, $g = 0$. [198, $\mathrm{III}_{2.1}$, с. 212, 326, 428].

Р

РАВЕНСТВО

До появления специального знака слово «равенство» писали на разных языках, а затем «унифицировали» математический язык и в научный обиход вошло aequatura или сокращенное aequ. В 1557 г. английский математик и врач **Рекорд** предложил знак =, «ибо, — писал он, — ничего нет более равного, чем две параллельные прямые». Книга **Рекорда** носила замечательное название “The Whetstone of Wit” («Точильный камень остроумия»). Знак, который он писал, по крайней мере в пять раз «длиннее» современного и действительно подобен отрезкам параллельных прямых. Этот символ **Рекорд** употреблял и до издания своей книги (с 1541 г.). Вероятно, сейчас это «самый печатаемый» знак, а его изобретатель **Роберт Рекорд** умер в Лондонской долговой тюрьме.

Исследования недавнего времени обнаружили, что одновременно с **Рекордом** или, может быть, несколько ранее его итальянский математик **Бомбелли** употреблял в рукописях такой же знак. Одни современники **Рекорда** приняли этот знак, другие пользовались своими собственными обозначениями, третьи предпочитали старое написание словами. Некоторые математики (например, **Непер**) употребляли это новшество в рукописях, а в печати избегали. Такое положение возникло и из-за того, что знак $=$ иногда употреблялся в других смыслах. **Виет** обозначал им арифметическую разность. Его обозначениям следовали **Жирар** и др. У **Декарта** этот символ обозначал $\pm$, а для знака равенства он употреблял значок $\propto$; благодаря его «Геометрии» именно этот знак равенства был распространен в течение XVII в.

Нет никакого сомнения, что утвердиться знаку $=$ помогли английские математики **Оутред**, **Гарриот**, **Барроу**, **Ньютон**. Как известно, **Лейбниц** придавал большое значение символике, он прибегал к знаку $=$ с большими колебаниями: в 1666, 1675, 1684 гг. он использует это обозначение, а в промежутках между этими случаями у него встречается aeq или aequ, $\sqcap$, ∞ и др. Только к концу XVIII в. можно считать знак $=$ широко распространившимся. Однако еще долго существовали различные видоизменения его, например, $==$, $\rightleftarrows$; американские авторы ставили запятую перед знаком равенства: ",="; **Ф. Бойяи** (1832) писал Ξ; **Беллавитис** (1832) обозначал равенство векторов особым значком $\triangleq$. Знак приближенного равенства имеет предка в рукописях древнегреческих математиков, это знак $\mathring{\pi}$ — первая буква слов παρ ολιγον — «приблизительно», затем он превратился в $\sim$. Знак $\approx$ ввел немецкий математик **С. Гюнтер** (1882). [33, с. 26]; [185, I, с. 126, 165, 297–308]; [185, II, с. 122]; [2, I, с. 67].

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

«Равенство **Парсеваля**» служит яркой иллюстрацией «закона Бойера», который гласит: «математические формулы и теоремы названы не по имени их открывателя» (отметим, впрочем, что закон Бойера сформулирован самим Бойером!). Рассматривая задачу умножения двух рядов, **Парсеваль** действительно нашел в 1799 г. соотношение между функцией и коэффициентами ее ряда **Фурье** и опубликовал его в статье 1805 г.:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Но нечто аналогичное нашел и **Лакруа** (1800). В дальнейшем специфическая и очень частная теорема приобрела значительно более широкий смысл, сохранив при этом имя **Парсеваля**.

Обширную теорию *замкнутости системы ортогональных функций* построил **В. А. Стеклов**, это название встречается впервые в его заметке 1910 г.

Это соотношение было обобщено на случаи различных функциональных пространств **Валле Пуссеном** (1893), **Фату** (1906), **Стекловым** (1901), **Риссом** (1907) и **Фишером** (1907). **А. М. Ляпунов** доказал равенство в 1894 г. [198, II_1, с. 12]; [168, с. 471].

РАДИАН

Термин происходит от латинского radius, что значит «спица, луч»; таким образом, буквальное значение слова — «лучеобразный».

С 1869 г. **Мюир** и **Дж. Томсон** (брат лорда **Кельвина**) употребляли названия rad, radial, radian. В 1873 г. термин *радиан* появился «в печати» — в экзаменационных вопросах, составленных **Томсоном**. Вначале полагалось отмечать греческой буквой или каким-нибудь другим способом, что речь идет именно о радианах, например, $2^{(r)}$, π^R. [185, I, с. 147]; [186, с. 484].

РАДИУС

Латинское radius означает еще и «палочка, радиус». В древности не было этого термина; **Евклид** и другие математики говорили: прямая из центра. **Боэций**, а за ним **Фибоначчи**, **Региомонтан**, **Тарталья** употребляли термин «полудиаметр». Слово *радиус* встречается впервые в 1569 г. у французского ученого **Рамуса**, погибшего в Варфоломеевскую ночь, затем у **Виета** и становится общепринятым лишь в конце XVII в.

Словосочетание *радиус-вектор* встречается у **Монжа** (1805), затем у **Коши** (1826), термин имел смысл «подвижный радиус». Современный смысл эти слова приобретают только в теории кватернионов **Гамильтона**, откуда термин и перешел в векторное исчисление. В немецкой математике в это время в употреблении были термины «Leitstrahl» (ведущий луч — **Магнус**), Fahrstral (дорожный луч, указывающий путь). [198, $III_{1.1}$, с. 656]; [45, с. 274]; [143, с. 40].

РАЗМЕРНОСТЬ

Первые попытки определения понятия находим в древнегреческой математике; **Евклид** дал два определения: 1. Линия это то, границей чего является точка; поверхность это то, границей чего являются линии и точки... 2. Линия имеет длину без ширины....

Д'Аламбер в статье «Размерность» знаменитой книги «Энциклопедия или толковый словарь наук, искусств и ремесел» (1764) писал: «Один известный мне умный человек считает, что можно было бы рассматривать время как четвертое измерение... Эта идея, быть может, является спорной, но мне кажется, что она имеет некоторое достоинство, во всяком случае достоинство новизны».

Глубина проблемы стала ясной в 1877 г., когда **Георг Кантор** открыл, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между точками отрезка (одномерного пространства) и точками квадрата (очевидно, двумерного). Этот пример разрушил общее мнение, что в двумерном пространстве точек «больше», чем в одномерном, он вызвал шок в математическом мире. В 1890 г. **Пеано** опубликовал пример «кривой, имя которой он имеет честь носить» (по его выражению). В следующем году **Гильберт** тоже опубликовал пример такой кривой — она получается как предел последовательности кривых. Возможно, **Пеано** так же пришел к своей конструкции, но его публикация 1890 г. была чисто аналитической. Этим результатом он явно гордился. На перилах веранды его виллы была изображена одна из кривых последовательности. **Хаусдорф** еще в 1914 г. восхищался: «Это один из наиболее замечательных фактов теории множеств».

Что, относящееся к рассматриваемой проблеме, можно найти в столетия между этими двумя работами? Заслуживает упоминания книга **Кестнера** “Anfangsgrunde der Arithmetik, Geometrie, ebenen und spharischen Trigonometrie und Perspective”, которая выдержала 6 изданий (с 1758 по 1800 гг.) и которая, по-видимому, оказала влияние на **Больцано** — предтечу математиков, вводивших современную строгость. Его рукописи 1830–1844 гг. не были опубликованы (так как Франц-Иосиф запретил публикации каких бы то ни было трудов **Больцано**, прогневавшего императора вольнолюбивыми проповедями). Частично его открытия включены в «Парадоксы бесконечного» (1850). **Больцано** хотел дать строгие определения кривой, поверхности, тела и затрагивал при этом проблемы размерности.

Большую роль сыграли исследования по многомерной геометрии. В 1843 г. впервые в названии математической работы появились слова «геометрия n измерений» — это статья **Кэли**. К этому же времени относятся работы **Гамильтона** и особенно **Г. Грассмана** о n-мерно протяженных многообразиях, а также **Римана** (1854). Однако к началу XX в. математики должны были признать: неизвестно «дал ли кто-либо и когда-либо точное и полное решение этого вопроса». К 30-м гг. XX в. проблема была решена трудами **Пуанкаре**, **Брауэра**, **Менгера** и **Павла Самуиловича Урысона**. [175, **17**, с. 261–295]; [206, с. 31].

РАЗНОСТЬ

Такое название для результата действия впервые употребил **Видман** (1489). Освященные вековыми традициями «остаток» и «избыток» со временем полностью перешли в купеческий обиход, а из математики были вытеснены «благородным» *differentia*.

Лейбниц и конечные, и бесконечно малые приращения обозначал буквой d.

Принятое ныне обозначение Δ введено **Эйлером** в “Institutiones calculis differentialis” (1755). Там же он предложил обозначения для конечных разностей

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0,\ y_2 - y_1 = \Delta y_1 \text{ и т. д.}$$

Удобство этих обозначений становится очевидным при сравнении с существующими ранее. **Тейлор**, например, обозначал первые разности переменных x, y, z точками под соответствующими буквами; вторые приращения — двумя точками; приращения выше четвертых отмечались цифрами:

$$\underset{\cdot}{x},\ \underset{\cdot}{y},\ \underset{\cdot}{z};\ \underset{\cdot\cdot}{z},\ \underset{\cdot\cdot}{y},\ \underset{\cdot\cdot}{z},\ \ldots,\ \underset{4}{x},\ \underset{4}{y},\ \underset{4}{z},\ \ldots$$

Лагранж (1792!) использовал «старые» символы d и S для конечных разностей и суммы, а также обозначения $T_1 - T_0 = D_1$, $T_2 - 2T_1 + T_0 = D_2$ и т. д. [226, II, с. 40]; [185, II, с. 263–267]; [34, с. 225–226].

РАНГ

Понятие ввел **Сильвестр** около 1850 г., не дав ему названия (при любви **Сильвестра** к созданию новых терминов объяснить этот недосмотр трудно). Термин позднее ввел **Фробениус** (1877–1879); немецкое Rang значит «степень, разряд». **Кронекер** перенял термин, в своих лекциях он представил современную теорию систем линейных уравнений, включая *теорему* **Кронекера—Капелли**. Термин в его Лекциях появляется приблизительно с 1860 г. **Капелли** слушал его лекции, и с разрешения **Кронекера** издал курс в своем родном городе (Пизе, в 1884 г.)

Условие разрешимости системы уравнений дал **Хегер** в 1858 г. К этому разделу алгебры относятся и глубокие статьи **Доджсона**, автора «Алисы в стране чудес» (1867). Понятие и название *ранга группы* ввел **Киллинг**. [208, с. 16]; [19, с. 80]; [198, II_2, с. 269].

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Распределение ошибок впервые рассмотрел **Симпсон** (1756). Он охватил и непрерывное распределение. Позднее этим вопросом занимался **Даниил Бернулли** (опубликовано в 1778 г., но о существовании рукописи было известно гораздо раньше). Развитие теории ошибок было связано с нуждами астрономии, где впервые появилось *распределение* **Гаусса**.

К распределению **Пуассона** независимо пришел **Томас Юнг**, известный кроме работ по теории упругости, капиллярности и волновой теории света еще и расшифровкой египетских иероглифов. В частности, он вывел среднюю девиацию биномиального закона (1819).

Максвелловское *распределение* (с фундаментальным понятием плотности распределения) явилось первым случаем введения в физику методов статистики. Терминология создавалась и шлифовалась постепенно, как это можно проследить по переписке с **Томсоном**, например, слово *распределение* встречается с 1870 г. Распределение **Максвелла—Больцмана** перестало быть неубедительной гипотезой только в 1866–1872 гг., когда эти великие физики вывели распределение на основе учета столкновения молекул (т. е. в рамках классической механики). У **Больцмана** «распределение» означает «состояние, характеризуемое условием R».

Распределение **Стьюдента** ввел английский статистик **Уильям Госсет**, подписывающий свои статьи псевдонимом Student. Работая на пивоваренном заводе (с 1899 г.), **Госсет** пытался оценить относительную важность многих факторов, на различных стадиях процесса пивоварения. В связи с этим ему нужно было придумать быстрые тесты и для малых выборок. К 1904 г. он нащупал, как установить зависимость между наблюдаемыми величинами, однако еще не решил, как оценить, измерить ее. Ему помогли консультации с **Пирсоном** (1905), который предоставил многие сведения из биометрики. Три знаменитые статьи **Госсета** (1907–1908) содержали классические результаты. Как правило, **Госсет** не торопился с публикациями, и были случаи, когда он обнародовал методы после того, как уже десятилетие пользовался ими. Многие его идеи «несознательно» усваивались его корреспондентами и становились частью работ других математиков. Можно еще заметить, что совсем иным путем получил такое же распределение **Эджеуорт** (1883), о чем **Госсет** не подозревал. [224, с. 156, 183, 330, 342, 355]

РЕГУЛЯРНЫЙ

Термин образован от латинского *regula* (правило), *regulis* (правильный, подчиняющийся нормам).

РЕЗОЛЬВЕНТА

Математики XVIII в. были убеждены, что все алгебраические уравнения можно разрешить в радикалах. **Эйлер** указывал, что решение уравнений второй, третьей, четвертой степеней приводится к решению соответственно первой, второй, третьей степеней; эти последние уравнения он называл aequatio resolvens — «разрешающее уравнение», откуда и возник термин *резольвента* (resolventa — «разрешающая»). Название ввел **Лагранж** (1808).

Резольвента **Галуа**. Смерть **Абеля** (1829) оборвала его интенсивную работу над проблемой разрешимости алгебраических уравнений в радикалах; он сообщил **Лежандру** и **Креллю** результаты, очень близкие к тем, которые три года спустя получил **Галуа** и которые стали известны только через десятилетие. Таким образом, **Абель** впервые нашел выражение, называемое теперь резольвентой **Галуа**. И сам **Галуа** приписывал идею резольвенты **Абелю**. Название введено **Бетти** (1852), который был первым комментатором знаменитой статьи **Галуа**, опубликованной в 1846 г. **Бетти** дал доказательства теорем, сформулированных самим **Галуа**, и некоторые добавления к ним.

Выражение, называемое ныне *резольвента* **Лагранжа**, рассмотрели одновременно **Лагранж** и **Вандермонд** (1770). [175, **8**, с. 106]; [198, I_1, с. 485]; [19, с. 98].

РЕКУРРЕНТНОСТЬ

Латинское recurro означает «бегу назад, возвращаюсь»; слово *рекуррентный*, таким образом, значит «возвратный». Термин ввел **Муавр**, который установил важнейшие свойства рекуррентных рядов и почти полностью разработал теорию (1720–1730). Древнейшее сочинение, содержащее возвратный ряд — “Liber abaci” (1202) **Леонардо Пизанского**. [226, III, с. 104].

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Эйлер ввел понятия общего и частного решений дифференциального уравнения и термины *общий* и *частный интегралы* (1743). В русском языке «частные интегралы» продержались до конца XIX в.

Эйлер изложил метод интегрирования линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в мемуаре 1743 г. (а нашел его не позднее 1739 г.). Одновременно к методу пришел **Д. Бернулли** (его работа была опубликована лишь в 1751 г.).

Лагранж доказал, что общее решение линейного однородного уравнения имеет форму $\sum\limits_i C_i y_i$ (1762–1765). **Лагранж**, как и **Д'Аламбер**, не делал никаких оговорок относительно линейной независимости частных решений. После работ **Гессе** и **Кристоффеля** (соответственно 1857 и 1858 гг.) условия линейной независимости были выражены через определитель **Вронского**.

До **Коши** центральным понятием теории было общее решение. **Коши** поставил во главу угла частное. Критерием того, что некоторое решение является общим, была возможность получить решение задачи **Коши** с произвольными начальными условиями.

С особым решением впервые встретился **Тейлор** (1715). Оборот «некоторое особое решение» (singularis quadem solutio problematis) означал у **Тейлора** только, что решение найдено необычным путем.

Затем **Клеро** нашел особое решение, решив уравнение, носящее его имя (1734). Он установил, что особое решение не содержится в общем. **Эйлер** предпринял систематическое изучение особых решений дифференциального уравнения первого порядка. Он пытался установить априори правило для определения, является ли решение особым. **Эйлер** рассмотрел ряд дифференциальных уравнений с особыми решениями (1736), но не заметил, что последние представляют собой огибающую семейства интегральных кривых. **Эйлер** не имел специального названия для этих решений. Его работы возбудили общий интерес математиков к этой проблеме — последовали статьи **Лапласа** (1772), **Лагранжа** (1774). Употреблялись названия integrale particuliere (**Лагранж**), équation singuliere (**Курно** в 1841 г. и **Муаньо** в 1844 г.). **Лагранж** открыл метод нахождения особого решения — исключением C из уравнений $F(x, y, C) = 0$, $F'_c(x, y, C) = 0$ — и установил, таким образом, связь с уже развитой теорией огибающих семейства кривых. Затем он пришел ко второму методу — нахождения особого решения без знания общего: исключением y' из уравнений $f(x, y, y') = 0$, $f_{y'}(x, y, y') = 0$. Он не заметил, что попутно у него встречается и третий метод, переоткрытый **Дарбу** в 1873 г.

Первый пример, когда решение, найденное как особое, оказывается частным, дал **Коши** (1844), именно, уравнение $(y')^3 = 8y^2 - 4xyy'$ имеет общее решение $Y = C(x + C)^2$ и особое $y = 0$. После этого было осознано, что в точках особого решения нарушается единственность. [66, I, с. 254–255]; [167, с. 434–437]; [34, с. 418]; [198, II, с. 189–229].

РОД

Понятие *род кривой* введено **Абелем** и **Риманом** (1857). При этом мемуар **Абеля** (1829) затерялся в бумагах **Коши** и был опубликован только в 1841 г. Принятое обозначение введено **Риманом**. Важность понятия показал в ряде статей **Клебш**, который и ввел название Geschlecht (кривой и поверхности).

По сообщению **Лейбница**, около 1620 г. **Декарт** заметил основное соотношение, в которое входит род поверхности. В 1752 г. это соотношение вновь нашел **Эйлер**.

Понятие и название *род целой функции* (genre) ввел **Лагерр** (1882). Первые результаты теории роста функций привел **Эйлер** (1778); однако заслуга создания теории принадлежит, вероятно, **Дюбуа Раймону**, который начал заниматься ею в 1871 г. и продолжал исследования до самой смерти (1889). Между прочим, именно в этих работах он применил впервые (до **Кантора**!) диагональный метод. **Лагерр** ввел термин в ходе исследований распределения нулей целой функции и ее производной. **Борель** ввел понятие порядка и получил точные оценки. Важные результаты принадлежат **Пуанкаре**; в мемуаре “Sur les fonctions entières” (1883) он доказал теоремы о роде функции и порядке роста ее, о росте коэффициентов и т.д. [8, с. 215]; [198, III_1, с. 200]; [101, с. 74]; [198, $\mathrm{II}_{3.1}$, с. 425,429].

РОЗЫ

(или кривые **Гранди**, или розовидные кривые). Наиболее красивые свойства кривых этого семейства были найдены флорентийским монахом **Гвидо Гранди**. В 1713 г. он сообщил о своих достижениях в двух письмах **Лейбницу**. Первая публикация **Гранди** относится к 1723 г. Затем он издал книгу «Геометрия цветов» (“Flores geometrici ex rhodonearum descriptione resultantes”), в которой была изложена полная теория таких кривых. **Гранди** называл кривые, лежащие в плоскости, *розовидными*, а аналогичные кривые на сфере — *клелиями* (в честь некоей княгини Клелии Борроми). **Гранди** изложил геометрические определения кривых, рассмотрел вопросы симметрии, число лепестков (он включил в теорию и случай бесконечного числа лепестков), квадратуру кривых и столкнулся с эллиптическими интегралами при спрямлении кривых. Первые декартовы уравнения розовидных кривых дал **Ридольфи** (1844). [138, с. 167]; [213, с. 297–306].

РОМБ

Происхождение этого термина объясняют по-разному. Его производят от греческого ρομβος (бубен); название оправдывается тем, что ромб похож на четырехугольный бубен. Предлагается также другое объяснение: слово *ρομβ* означало «вращающееся тело, веретено». В геометрию же термин вошел потому, что такую форму имеет сечение, проведенное в обмотанном веретене. В «Началах» **Евклида** *ромб* встречается только в определении, свойства ромба вообще не изучаются. Слово употребляется у **Герона**, **Паппа**. [64, I, с. 227]; [45, с. 266].

РОСТ ФУНКЦИИ

Дюбуа Раймон и **Веронезе** различными путями пришли к идеям сравнения «бесконечных величин». В статье “Sur les grandeurs relative de infinis des fonctions” (1871) **Дюбуа Раймон** ввел обозначения $f(x) \prec \varphi(x)$, $f(x) \succ \varphi(x)$, $f(x) \sim \phi(x)$.

Дальнейшие его рассуждения подводят очень близко к понятиям «О-большое, о-малое». Эти идеи он развивает в статьях 1872–1873 гг. И, наконец, в 1875 г. результат, который **Борель** и **Харди** назвали *теоремой* **Дюбуа Раймона**, — *некая шкала роста функций*.

Несмотря на справедливую во многом критику **Г. Кантора**, работы **Дюбуа Раймона** были фундаментом, на котором базировалась теория *роста функций*, созданная **Кантором** и **Прингсхеймом** (1898–1904), **Борелем** и **Адамаром** (1898, 1894), **Пинкерле** (1884). Авторы воздавали должное своему замечательному предшественнику. **Харди** повторил предложенное **Пинкерле** (1881) название Infinitar calcul of Paul **Du Bois Reymond** (1910).

Термин *порядок роста функции* принадлежит **Борелю** (1898), как и *порядок бесконечно малой* (ordre d'infiniment petit). **Борель** привел расширенную версию теории роста функций в "Leçons sur les séries à termes positifs" (1902).

РОТОР

Гамильтон ввел символический вектор ∇ в 1846 г.

Спустя полтора десятилетия его соратник шотландский физик **Тэт** перевел на язык кватернионов исследования, в которых встречались rot и div (современной математики). **Тэт** записал формулы **Стокса** и **Гаусса—Остроградского** в векторной форме. В частности, величины, которые сейчас обозначают $\mathrm{rot}\,F$ и $\mathrm{div}\,F$, встречались у **Коши** и у **Стокса** (1849). Физическая важность этих операторов стала очевидной в статьях **Максвелла** (1855–1856). Здесь **Максвелл** предложил «с большой неуверенностью» ввести название *rotation* или *curl* вектора. Английское curl означает «локон, завиток», rotation — «вращение». В течение некоторого времени употреблялись термины «curl» или в немецкой литературе — «Quirl». Затем **Клиффорд** ввел название и обозначение $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$, его употреблял и **Максвелл**. [15]; [1].

РЯД ЛОРАНА

Первая публикация такого ряда принадлежит **Лорану** (мемуар "Extention du théorème de **M. Cauchy**, relatif à la convergence du developpement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable", 1843).

В трудах **Коши** исчисление вычетов еще не превратилось в стройную, законченную теорию. Объединить разрозненные факты, содержащиеся в работах **Коши**, **Пюизо**, **Брио** и **Буке**, связав их с исследованием особых точек и др., удалось **Лорану** в "Théorie des résidus" (1865). При этом надо иметь в виду, что такие ряды изучал **Вейерштрасс** в 1841 г., во время обучения у **Гудермана**, в Мюнстере; работа, выполненная в это время, была опубликована только в 1894 г.; результаты **Вейерштрасса** оставались неизвестными математическому миру. [175, **10**, с. 47–48]; [178].

РЯД СТЕПЕННОЙ, РЯД ТЕЙЛОРА

В русской литературе до конца XIX в. употреблялись обороты. «ряды или строки», «бесконечные строки», «развертывание в строку».

Во всех вычислениях всегда функции заменяли некоторыми суммами. В какой-то степени «руководствами» могли служить сочинения **Кеплера** (1604, 1609), **Кавальери** (1635), **Валлиса** (1655).

Примерно к тому же времени относятся открытия **Гудде** (1656), **Меркатора** (1667), **Валлиса** (1668), **Дж. Грегори** (1670). **Гудде** получил разложение логарифмической функции в степенной ряд, но хранил в секрете этот результат. **Меркатор** нашел также первый (после геометрической прогрессии) бесконечный ряд; в современных обозначениях его открытия означали

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

а также

$$\int_0^x \ln(1+b)\,db = \frac{1}{1\cdot 2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

(именно в этой работе впервые вместо *гиперболический логарифм* употреблено выражение *натуральный логарифм*). **Валлис** указал, что в последнем разложении x принимает значения, не большие 1. Секретарь Лондонского Королевского Общества лорд **Броункер** нашел (1668) площадь под кривой $xy = 1$ в виде ряда

$$\ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$$

(он даже доказал сходимость ряда, не сознавая значения этого).

Рукописное наследие **Джеймса Грегори** свидетельствует о том, что уже в 1671 г. он владел рядом **Тейлора**. В переписке **Грегори** привел степенные ряды (с пятью-шестью членами) для функций $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{tg} x$, $\log\sec x$, $\lg\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)$, $\operatorname{arcsec}\left(\sqrt{2}\cdot e^x\right)$, $2\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x/2)$. Еще ранее он получил биномиальный ряд. Вероятно, впервые слово *convergent* употребил именно **Грегори**.

Введение «бесконечных рядов» имело для развития математического анализа не меньшее значение, чем первые методы квадратур или методы касательных и экстремумов. **Ньютон** и **Лейбниц** видели в рядах универсальный ключ к задачам анализа. Так и **Лагранж** писал: «...$f(x+i) = f(x) + ip + i^2q + i^3r + \ldots$ Эту теорему нужно считать одним из фундаментальных принципов теории, которую мы будем развивать». Это убеждение сохранилось до XIX в.

Для математиков XVIII в. характерна уверенность, что любая функция может быть разложена в степенной ряд и что с таким разложением можно обращаться точно так же, как с конечными целыми алгебраическими многочленами. Подавляющее большинство результатов было верным либо потому, что проводимые вычисления были на самом деле законными, либо потому, что от ошибок оберегала интуиция и невероятная изобретательность.

Принципиальный шаг в создании теории рядов сделал **Ньютон** (1664–1665). Он изобрел приемы разложения в степенные ряды дробей и корней (**Ньютон** пришел к биномиальному ряду от задачи интерполяции!). Его “De analysi per aequationes numero terminorum infinitas” («Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов», 1669) посвящен квадратурам различных кривых, все они сведены **Ньютоном** к интегралам вида

$$\int ax^{m/n}\,dx = x^{(m+n)/n}\cdot\frac{an}{m+n}$$

(опубликован мемуар в 1711 г.). **Ньютон** считал основным способом задания функции — ее разложение в степенной ряд; он мог получить степенной ряд для любой функции, а следовательно, и решить «любое» дифференциальное уравнение.

Разложение в ряд с помощью метода флюксий излагалось в изданной после смерти **Ньютона** книге "Method of Fluxions and Infinite Series" (1736); в собрании трудов **Ньютона** это сочинение озаглавлено "Geometria analytica".

Интересно отметить, что когда **Ньютон** оперировал с функцией $\frac{1}{1+x^2}$, для малых значений x он приводил разложение $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$, а при больших значениях x — разложение по степеням $1/x^2$, то есть

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \ldots .$$

Первые открытия **Лейбница** в теории рядов — разложение для $\operatorname{arctg} x$ и вычисление $\pi/4$ — относятся к 1673 г. Они опубликованы в 1682 г. Название его статьи 1686 г. «Дополнение практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов» показывает, что он так же высоко ценил метод, как и **Ньютон**. Так что «ряды **Тейлора** носились в математическом воздухе» и были получены различные эквивалентные техники.

Общая формула была найдена **Бруком Тейлором** в 1712 г. и опубликована в 1715 г. в его книге "Methoda Incrementorum..." («Метода приращений, прямая и обратная»). Близко подошли к степенному ряду **И. Бернулли** (1694) и **Лейбниц**, который известил **И. Бернулли** (1695), что знает правило вычисления коэффициентов при x^n. Однако современники принимали эти разложения за принципиально различные — из-за этого были даже споры между сторонниками **Тейлора** и **Бернулли**. Между прочим, **Пеано** считал обоснованными претензии **И. Бернулли** на приоритет.

Ряд **Маклорена** встречается впервые у **Стирлинга** (1717), а затем в "Fluxions" **Маклорена** (1742) с указанием, что это частный случай ряда **Тейлора**. **Маклорен** вывел свой ряд по методу неопределенных коэффициентов, т. е. не «по-тейлоровски», а так, как это делал **Грегори**, чего **Маклорен** знать не мог, так как работы **Грегори** не были опубликованы. **Маклорен** установил, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, — единственный, а именно ее ряд **Тейлора**.

Запись ряда в символах дифференциального исчисления появляется у **Эйлера**. Первая работа **Эйлера**, связанная с рядами, относится к 1729 г., т. е. к самому началу его научной деятельности. Термин *теорема* **Тейлора** ввел **Кондорсе** (1784), а **Люилье** впервые употребил слова *ряд* **Тейлора** (1786).

Португальский математик да **Кунья** считал необходимым указывать область сходимости степенных рядов и применять их только в этой области ("Principios mathematicos", 1790). Его труд не получил известности ни в оригинале, ни во французском переводе (1811).

Вопрос о разложимости функций в ряд **Тейлора** до XIX в. даже не ставился. Кажется, единственная оговорка есть у Лагранжа: «...в случаях, когда это разложение возможно» (1797). Когда **Абель** приступил к выяснению сходимости биномиального ряда, он трезво оценил положение:

«...наиболее важная вещь в математике стоит без обоснования, раз биномиальная формула не доказана, как следует». Большая заслуга **Коши** — постановка проблемы о законности разложения функции в степенной ряд. В его «Алгебраическом анализе» (1821) теории рядов были посвящены три главы — администрация Политехнической школы требовала исключения этого раздела, во-первых, потому что **Коши** выходил за все рамки времени, отведенного для математики, а во-вторых, потому что «учащиеся никогда не будут употреблять ряды на практике».

Остаточный член ряда **Тейлора** (только для оценки точности приближения) привел **Лагранж** — сначала в виде определенного интеграла, а затем в *форме* **Лагранжа** в "Théorie des fonctions analytiques" (1797). **Коши** вывел остаточный член (в *форме* **Коши**) в 1840 г. Обозначение R, предложенное **Н. Бернулли** (1713), происходит от Residium, Rest — остаток. **Коши** установил условия сходимости ряда **Тейлора** и сходимости его к породившей функции. Он открыл классический пример функции $y = e^{-1/x^2}$, для которой можно составить ряд **Маклорена**, этот ряд сходится, однако сходится к функции, отличной от исходной (1822). Изучение необходимых и достаточных условий разложимости продолжили его последователи **Брио** и **Буке** (1853)[2]. И все же выяснение условий, при которых функция может быть разложена в ряд **Тейлора**, продолжалось вплоть до последнего десятилетия XIX в. В 1884 г. **Пеано** отметил «ошибочность доказательства формулы **Тейлора**». А еще через десять лет последовали две статьи **А. Прингсхейма** в Mathematische Annalen.

Ряды часто привлекались к аргументации в довольно неожиданных случаях. Выше приведен вывод производной функции $y = \ln x$, данный **Эйлером**. На таких же соображениях основана и одна из самых серьезных попыток исключить из математики бесконечно малые величины — теория **Лагранжа** (1762). Наконец, когда **Коши** обнаружил «патологическую» функцию $y = \exp(-1/x^2)$, то возникла и проблема существования и единственности решения дифференциального уравнения (1823). [34, с. 126–166, 416]; [155, с. 196–199]; [198, I_1, с. 79]; [198, II_1, с. 74]; [201, с. 80]; [174, **50**, с. 149]; [174, **56**, с. 147–153]; [86]; [180, с. 51].

РЯД ФУРЬЕ

Первые тригонометрические ряды приведены **Ньютоном** в письме от 1676 г. Разложения были получены как разложения в ряд **Тейлора**: например, **Эйлер** представлял дробь $\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$ рядом по степеням $\cos\varphi$ (1744).

В XVIII в. общий интерес к тригонометрическим рядам был вызван решением задачи о колебании струны (поставленной **Б. Тейлором**

---

[2] В 1890 г. опубликован пример **Дюбуа Раймона** (придуманный им в 1883 г.):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!\left(x^2 + a_n^2\right)},$$

где $\{a_n\}$ — любая последовательность действительных чисел, такая что $\lim a_n = 0$ при $n \to \infty$. Ряд **Маклорена** этой функции не сходится ни при каком значении $x \neq 0$.

в 1713 г.). **Д. Бернулли** получил решение в виде тригонометрического ряда (1753–1755); он не смог найти метод определения коэффициентов, и это слабое место использовали его критики. Однако метод существовал, и коэффициенты a_n и b_n были найдены **Клеро** (1754) и **Эйлером** (1777) при решении конкретных задач.

Жозеф Жан Баптист Фурье, осиротевший на восьмом году жизни, был сыном портного, его приняли в военную школу бенедиктинцев, но препятствием для дальнейшей службы стала резолюция министра: «**Фурье**, как неблагородный, не может быть принят в артиллерию, хотя бы он был второй **Ньютон**». В 1817 г. Академия выбрала **Фурье** своим членом (вместо **Деламбра**) вопреки противодействию Людовика XVIII. О нем писали «...он доказал, что преподавание математики не чуждо изящества... что ныне <1833> встречается весьма редко».

Мемуар **Фурье** (1807), в котором сформулирована теорема о том, что произвольно (графически) заданная функция может быть представлена тригонометрическим рядом, был столь неожиданным, что математики встретили его с осторожностью, с недоверием, а иногда и решительными возражениями, так как «разложения противоречат принципам математического анализа». Работа **Фурье** (1811) не была опубликована и увидела свет только в 1824 г., когда **Фурье** стал секретарем Академии (а **Лагранж** умер в 1813 г.). Классическую “Théorie analytique de chaleur” (1822) уже ждали признание и успех. В дальнейшем **Фурье** доставляли огорчения попытки математиков усовершенствовать его теорию.

Основная теорема была доказана **Дирихле** (1829–1837), а его изложение, исчерпывающе ясное и простое, стало классическим и принято во всех современных руководствах по математическому анализу. Вначале коэффициенты при косинусах **Дирихле** обозначил через b_n, а коэффициенты при синусах — a_n. К обозначениям $f(a+0)$, $f(a-0)$ **Дирихле** пришел от первоначальных $f(a+\varepsilon)$, $f(a-\varepsilon)$. **Риман** показал, что $a_n, b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Выражение «функция, удовлетворяющая условиям **Дирихле**» предложил **Дюбуа Раймон** (1875). В следующем году он привел первый пример непрерывной функции, не раскладывающейся в ряд **Фурье**. Существование функции, для которой ряд **Фурье** расходится в каждой точке, обнаружено **Андреем Николаевичем Колмогоровым** (1926).

Фурье называл ряды *тригонометрическими*; так же писал **Дирихле**. **Стокс** употреблял название periodic series. **Риман** прояснил разницу между рядом **Фурье** и тригонометрическими рядами и предложил название *ряд* **Фурье** (1857); оно стало общепринятым приблизительно к 80-м гг. XIX в. и является знаком признания трудов великого математика, хотя «ряды **Фурье**» и были довольно хорошо известны ко времени **Фурье**.

В 1903–1904 гг. **Фреше** работал над подготовкой к печати книги **Бореля** (о наилучшей аппроксимации функции многочленами) и при этом доказал минимальное свойство коэффициентов **Фурье**.

По словам **Ланцоша**, однажды **Виктора Гюго** спросили, какое единственное литературное произведение он бы оставил, если бы пришлось пожертвовать всей мировой литературой (он выбрал «книгу Иова» Библии). Сам **Ланцош** поставил аналогичный вопрос о математике и ответил на него: «...если бы нам предложили выбросить все математические открытия, кроме одного, мы едва ли не оставили бы ряд **Фурье**. Этот ряд оказал наиболее глубокое влияние на все развитие анализа как в его теоретическом, так и в практическом аспектах. Кроме того, его связь с другими частями анализа столь тесна, что если бы сказали „ряд **Фурье** со всеми его следствиями", то значительная часть нашего классического анализа была бы сохранена». [18, с. 374]; [183, II, с. 61]; [198, II_1, с. 923]; [91, с. 13]; [118]; [212].

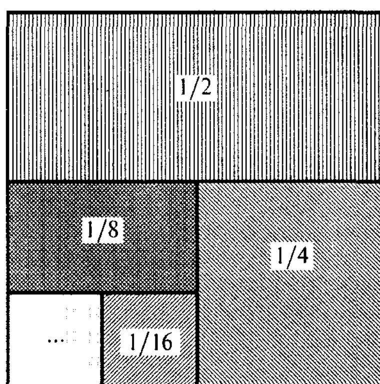
РЯД ЧИСЛОВОЙ

Установить, когда впервые появились ряды в математике, очевидно, невозможно. Уже вавилонские математики умели суммировать геометрическую и арифметическую прогрессии, а также знали формулы для некоторых конечных сумм, например,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Архимед в «Квадратуре параболы» приводит бесконечную сумму. Ряды **Грегори** и **Лейбница** для вычисления $\pi/4$ были найдены в Индии примерно в 1500 г. Рисунок **Менголи** демонстрирует доказательство того, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = 1.$$



Важные результаты были получены **Менголи**, который доказал расходимость *гармонического ряда* около 1650 г. (до него этот факт установил **Орем** в 1350 г.). Название было введено **У. Броункером**, возможно, оно оправдано тем, что каждый член ряда, начиная со второго, есть среднее гармоническое двух соседних, но, может быть, и из-за того, что такие соотношения встречаются в музыке. Числовые ряды использовали **Торричелли**, **Меркатор**, **Валлис**. Обычное название для рядов было series infinite; в русской литературе в XIX в. было принято название «исчезающие строки».

В течение продолжительного времени вопрос о сходимости ряда даже и не ставился. Полной ясности и четкости не было долго: **Эйлер**, который критически высказывался по поводу получения из геометрической прогрессии $1+q+q^2+\ldots = \frac{1}{1-q}$ результата $1+2+4+8+\ldots = \frac{1}{1-2} = -1$

(1754), через несколько страниц «доказывал» аналогичный результат:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2},$$

(еще **Фурье** вначале принимал этот результат без раздумий).

Со времен **Гранди**, записавшего этот ряд (1703), ему была посвящена целая литература. **Гранди** полагал, что этот ряд иллюстрирует, как бог сотворил мир (1) из ничего (0). **Лейбниц** признавал его правоту.

С

СВЕРТКА

Еще в начале XIX в. было замечено, что если $F(x,t)$ является интегралом некоторого линейного уравнения в частных производных, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-s,t)f(s)\,ds$ — также интеграл этого уравнения. Эту идею использовал **Пуассон** (1820, 1826), затем **Дюамель** (1833) и др. Свертка дискретных мер появляется у **Чебышёва** (1867) как закон распределения случайной величины, которая представляет собой сумму двух случайных слагаемых. В 1884 г. свертку при обращении интеграла **Абеля** использовал **Сонин**, а в 1896 г. — **Меллин**.

В исследованиях по интегральным уравнениям, где естественно появилась свертка, почти не были выявлены ее алгебраические свойства. Это было сделано целиком **Вольтеррой**. С 1910 г. он начал развивать так называемое «композиционное исчисление». Операция «композиции» двух функций $\int f(x,\xi)g(\xi,y)\,d\xi$ появляется у него как обобщение произведения двух матриц. Для этой операции он вводит обозначение $\overset{\star\star}{fg}\,(x,y)$ или $\overset{\star\star}{fg}$ и термин «composition», исследует свойства операции и выделяет случай, когда f и g зависят только от разности $y-x$. От этой терминологии **Вольтерры** во французском языке остались, например, названия *композиция* для свертки, а также *композиционный ряд*.

Основную теорему о свертках доказал **Борель** (1899–1901), а за ним — **Бромвич** (при меньших ограничениях). **Хевисайд**, по-видимому, не был знаком со сверткой, в операционном исчислении она появилась у **Карсона**; в версии операционного исчисления, развитой **Микусинским**, операции свертки отводится фундаментальная роль. Преобразование **Лапласа** к уравнениям типа свертки впервые применил **Герглотц** (1908); **Бейтмен** доказал, что это преобразование переводит такое интегральное уравнение в алгебраическое (1911). Свертку в комплексной области впервые, вероятно, рассмотрел **Пинкерле** (1908).

Аналогию между этими исследованиями и теорией **Вольтерры** заметили **Дёч** и **Феликс Бернштейн**. Они развили последовательную теорию к 1922 г. У них впервые введены термины “Faltungsintegral”, а затем “Faltung" (складка); слово "Faltung", несомненно, взято из «Основ общей теории линейных интегральных уравнений» **Гильберта** (1906). **Дёч** предложил для обозначения операции свертки символ $*$, возможно, как модификацию обозначения **Вольтерры**. В английской математической литературе в начале XX в. был принят термин «fold» (1911, **Бейтмен**), постепенно перешли к термину «convolution» (1939). В русской литературе до 50-х гг. XX в. в употреблении были *свертка* и *складка* двух функций. Знак $*$ встречается в русской литературе впервые, видимо, в 1949 г. в переводе книги **М. Ф. Гарднера** и **Дж. Л. Бэрнса** «Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными». [19, с. 311–313]; [199, с. 364]; [197, с. 155–157, 417]; [177, с. 393, 412, 414]; [179].

СВЯЗНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА

Понятие и термин в его современном смысле ввел **Риман** (1851, 1857), он употребил названия eine einfach zusammenhangende Flache, mehrfach zusammenhangende Flache, а также *порядок связности* — Ordnung der Zusammenhange. Слово «связный» звучало в математике и до него, означая различные другие понятия. **Эйлер**, например, называл связными непрерывные кривые. [208, с. 180].

СЕГМЕНТ

Знаменитый греческий астроном **Птолемей** делил окружность круга на 360 частей. Для этих частей **Птолемей** иногда употреблял название τμήματα, т. е. «отрезки», которое было буквально переведено латинским segments. [163, I, с. 67]; [45, с. 277].

СЕКАНС

Среднеазиатский ученый **Абу-л-Вафа** (X в.) открыл тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы. Его результаты остались неизвестными в Европе и были переоткрыты впоследствии. Однако в учебнике **Штурма**, выдержавшем много переизданий с 1689 по 1711 гг., линия секанса не приводилась. Таблицы секансов составил **Ретик** (1551). Этот немецкий профессор специально приехал к **Копернику**, чтобы ознакомиться с его теорией. После трехлетнего обучения **Ретик** уехал, чтобы издать труд **Коперника**, и стал, таким образом, первым редактором знаменитой работы «Об обращении сфер».

Название «*секанс*» связано с геометрическим представлением тригонометрических функций в виде отрезков: secans — «секущий, отрезок секущей» от seco (режу, секу). Термин введен в 1583 г. датским математиком **Финке** в книге "Geometria rotundi" («Геометрия круглого») вместе с термином «тангенс». Первые графики секанса (в первом квадранте), построенные **Валлисом** и **Барроу** (1670), оказались неверными. Правильный график был опубликован в «Гармонии мер» **Коутса** (1722). [65, I, с. 320]; [34, с. 344]; [183].

СЕКТОР

Это латинское слово, образованное от seco, является буквальным переводом греческого термина ἀποτμῆμα. У некоторых авторов оно означало конечный фрагмент, отсеченный от фигуры, плоской или пространственной. **Евклид** использовал его также для названия сегмента круга, цилиндра или конуса.

СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

Понятие и термин *séparable* введены **Фреше** в его докторской диссертации (1906), в труде, классическом для функционального анализа. Французское séparer означает «отделять», séparable — «отделимый». В 1921 г. он несколько модифицировал определение. Уже в 1906 г. диссертацию цитировал **Рисс**, применяя новое понятие. В ближайшие годы **Шмидт**, **Хан**, **Шенфлис**, **Хаусдорф** используют понятие. [175, **34**, с. 345].

СЕЧЕНИЕ ВО МНОЖЕСТВЕ ЧИСЕЛ

Термин принадлежит создателю теории действительных чисел **Дедекинду**; он введен в книге "Stetigkeit und irrationalen Zahlen" («Непрерывность и иррациональные числа», 1872). Развитая **Дедекиндом** теория имеет столь глубокие аналогии с теорией отношений **Евдокса**, что **Липшиц** спрашивал **Дедекинда** в одном из писем, что же он, собственно говоря, сделал нового по сравнению с древними.

СЕЧЕНИЯ КОНИЧЕСКИЕ

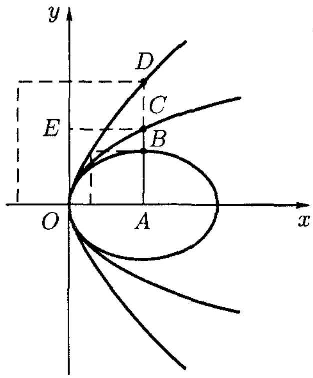
Менехм, брат **Динострата** и учитель Александра Македонского, открыл около 340 г. до н. э., что эллипс, гипербола и парабола являются сечениями конусов; **Эратосфен** назвал эти кривые «триадой **Менехма**». По свидетельству **Паппа** первую работу о конических сечениях написал **Аристей** (старший) ок. 320 г. до н. э. От **Менехма** и до **Аполлония** конус пересекали плоскостью, перпендикулярной к образующей, и названия конических сечений были таковы: «сечение прямоугольного конуса», «сечение тупоугольного конуса», «сечение остроугольного конуса». **Аполлоний** впервые получил кривые как сечения *одного* конуса и ввел современные названия их, хотя *эллипс* и *гипербола* иногда употреблялись и до него (например, *эллипс* есть у **Архимеда**).

Как пишет **Кулидж** в "History of Conic Sections", в течение многих веков слова «Аполлоний» и «конические сечения» были почти синонимами. В самом деле, теория конических сечений, созданная **Аполлонием**, была развита столь глубоко и разносторонне, что новых результатов пришлось ждать почти два тысячелетия: он изучил фундаментальные свойства кривых, нашел касательные, диаметры, асимптоты; именно он ввел понятие директрисы, открыл фокусы эллипса и гиперболы (фокус параболы нашел **Папп**). **Аполлоний** обнаружил проективные инварианты, доказал теоремы относительно нормалей конического сечения, теоремы о некоторых свойствах эволют и пр.

Современные названия произошли от сравнения площадей плоских фигур, связанных с кривыми. Рассматривая y^2 как площадь квадрата, построенного на ординате, а $2px$ — как площадь прямоугольника с основанием x и высотой $2p$, мы видим, что для эллипса площадь квадрата меньше площади прямоугольника (по-гречески ἐλλείπειν — «недостаток»), в случае гиперболы — больше (ὑπερβαλλειν — «избыток»), в случае параболы эти площади равны (παραβάλλειν — «равенство»).

Греческие математики достигли поразительных высот в изучении конических сечений. **Архимед** знал формулы площади эллипса, параболического сегмента.

В христианской Европе первой работой о конических сечениях явилось сочинение **Иоганна Вернера** из Нюрнберга (1522); изучение сечений было подхвачено **Франческо Мавролико**. Первая работа, в которой эти кривые трактуются как кривые второго порядка — «Трактат о конических сечениях, изложенных по новому способу» **Валлиса** (“Tractatus de sectionibus conicis, nova methodo expositis”, 1655). Выражение *кривые второго порядка* восходит к **Ньютону** (1706). В сочинении **Валлиса** впервые отрезки, фигурировавшие в чертежах **Аполлония**, заменены буквами, так что, во-первых, «симптомы» конических сечений выражены уравнениями, а во-вторых, алгебраические уравнения представляют собой перевод синтетических рассуждений. Однако прошло еще столетие, прежде чем дух аналитической геометрии стал привычным, более «обыденным», чем геометрические построения.



$$AB^2 < OE \cdot OA$$
$$AC^2 = OE \cdot OA$$
$$AD^2 > OE \cdot OA$$
$$OE = 2p$$

В 1673, 1679, 1685 гг. вышли три работы **Лагира** (одна из которых посвящена Кольберу!), это совершенные и оригинальные по изложению труды, в которых собрано все, относящееся к теории конических сечений (вся информация **того** времени, конечно).

«Начала кривых линий» (“Elementa curvarum linearum”) **де Витта** написаны в 1649 г., опубликованы в 1659 г. как приложение ко второму изданию «Геометрии» **Декарта**. Здесь **де Витт** впервые аналитически вывел уравнения геометрических мест точек, сумма или разность расстояний которых до двух фокусов постоянна (хотя свойство $MF_1 + MF_2 = 2a$ было известно **Аполлонию**). Уравнение гиперболы в виде $xy = k$ впервые встречается у **Ферма** (“Ad locus planos et solidos isagoge”, 1638), а затем у **Я. де Витта** (1659). Метод построения конического сечения через фокус и директрису, по-видимому, был известен **Евклиду** и заведомо упоминается у **Паппа**.

Конфокальные конические сечения впервые рассмотрены **Маклореном** (1742). Соответствующий французский термин ввел **Ламе** (homofocal, 1838).

Первые инструменты для вычерчивания конических сечений изобретены в V и VI вв. н. э. **Проклом** и **Изидором Милетским**. Затем методы построения кривых переоткрывались и изобретались. Через тысячу лет, в 1604 г., **Кеплер** дал способы веревочного построения всех трех кривых. Один из методов придумал **Коперник** (1543). **Ян де Витт** привел кинематические методы вычерчивания конических сечений. Жаркие споры о приоритете открытия одного из методов построения конических сечений шли между **Маклореном** и **Брэйкенриджем**. **Брэйкенридж** опубликовал в 1733 г. важную теорему и при этом сообщал в предисловии, что получил ее в 1726 г. **Маклорен** утверждал, что он владел результатом с 1722 г. [198, $\mathrm{III}_{2.1}$, с. 6–9, 85–88]; [23, с. 240–262]; [81, с. 111]; [157, с. 137, 445]; [44, с. 38]; [190, с. 47]; [216]; [219].

СИГНУМ

Функция $\operatorname{sgn} x$ получила название и обозначение от латинского *signum* (*знак*). Такую функцию ввел в рассмотрение **Л. Кронекер**. Необходимость в такой функции ощущалась и раньше, конечно; **Коши**, например, писал $\frac{y}{\sqrt{y^2}}$ (1821). При первом появлении этой функции у **Кронекера** (1878) и при чтении лекций он рекомендовал обозначение $y = [x]$. Когда это обозначение ему понадобилось для функции «антье», он отступился от привычки и ввел $y = \operatorname{sgn}. x$ (1884). [175, **36**, с. 55].

СИМВОЛ

Греческое σύμβολος означает «условный знак, примета». Древние греки этим словом называли условный устный распознавательный знак для членов общества, товарищества. Позднее слово стало обозначать любой устный или условный знак (графический, звуковой).

Символы **Кристоффеля** введены им в статье 1869 г.

Символы **Кронекера** δ_{ik} их создатель ввел в статье 1866 г., а затем в 1903 г. при изложении теории детерминантов. Обобщение обычных символов **Кронекера** на случай пространства n измерений $\delta^{r_1 r_2 \ldots r_m}_{s_1 s_2 \ldots s_m}$ $(m \leqslant n)$ принадлежит **Мурнагану** (1924).

Символы **Лежандра** введены в книге "Essai sur la théorie des nombres" (1791), где собраны и систематизированы все результаты по теории чисел, полученные к тому времени. Обобщение их — *символы* **Якоби** — предложены **Якоби** в 1837 г. [198, III_3, с. 51]; [16].

СИММЕТРИ́Я

Буквально συμετρια означает «соразмерность, правильное отношение». В греческой математике слово употреблялось сначала в смысле «измерение, метод для оценки площади, объема фигуры» (**Архимед**), затем — «мера» и наконец — «соразмерность, свойство двух геометрических величин иметь общую меру» (**Прокл**).

СИМПЛЕКС

Латинское simplex значит «простой». Симплекс-метод линейного программирования разработан английским математиком **Дж. Б. Данцигом** и опубликован в 1949 г.

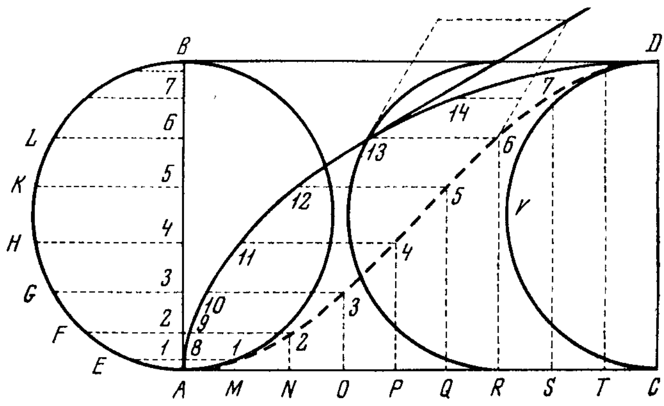
СИНУС

Слово встречается в индийских сидхантах — анонимном труде по астрономии IV или V в. и в «Ариабхатиам» (сочинение по астрономии и математике **Ариабхаты**, 476).

Линия синуса называлась «ардхаджива» (или «архаджипа»): «ардха» означает «половина», а «джива» — «тетива лука, хорда». Позднее синус стали сокращенно называть «джива». В арабской литературе индийский термин был переделан в «джиба», а затем в IX в. лишенное обиходного смысла слово «джиба» было заменено настоящим арабским словом «джайб», т. е. «пазуха, вырез платья, выпуклость».

При переводах с арабского на латынь переводчики **Роберт Честерский** (1145) и **Герард Кремонский** (1175) употребили слово *sinus* — буквальный перевод слова «джайб». В рукописях XII в. для синуса встречается и термин «geib» — латинская транскрипция слова «джайб». Вместе с этим вплоть до XV в. употреблялся термин **Птолемея** «хорда удвоенной дуги». Есть и другие предположения о возникновении этого слова, например, что оно есть сокращение латинских слов semirecta inscripta — «полухорда». При этом в старинной терминологии синусом называли то, что мы сейчас называем «линией синусов»; эта терминология сохранилась до **Монжа**. Термин *линия синусов* ввел **Фабри** — учитель философии и математики в иезуитском колледже (1659).

Для обозначения синуса угла использовались различные сокращения слова: s, si, sin , S и др. Современное обозначение sin употребляли **Симпсон** (1737, 1750), **Эйлер** (1748, 1753), **Кестнер** (1758), **Д'Аламбер** (1754), **Лагранж** (1774) и др. Авторитет **Эйлера** способствовал тому, что в тригонометрии утвердились обозначения sin , cos , tg . Он перенял эти обозначения от **И. Бернулли**.



Так появился первый чертеж синусоиды: сравнивая «неделимые», Роберваль показал, что площадь под половиной арки циклоиды равна 3/2 площади образующего круга

Интересно отметить, что первая синусоида появилась не как кривая, определенная уравнением $y = \sin x$, а как «спутник рулетты», т. е. как вспомогательная кривая при построении циклоиды (1634), так кривую впервые построил **Роберваль**. Название *синусоида* составлено из sinus и εοιδ — «вид, образ», это греческое слово означает также происхождение, так что название значит «произведенная синусом, полученная из синуса». Оно встречается впервые у **Фабри** (1659). **Валлис** впервые разрешил вопрос о знаках синуса во всех четвертях, начертил два периода синусоиды и отметил, что их бесконечно много (1670).

В Европе первые таблицы синусов составил в XV в. **Пейрбах**, а затем его ученик **Региомонтан**; следующие таблицы (включенные затем в таблицы, которые издал **Ретик** в 1551 г.) вычислил **Коперник**. **Питискус** (1610) составил 16-значные таблицы через каждые 10″, а для малых углов его таблицы содержали 26 знаков. [84, с. 157]; [34, с. 344–378]; [183, I, с. 50]; [65, I, с. 317].

СИСТЕМА

Слово греческого происхождения: σύστημα (составленное из частей, соединение). [216].

СКАЛЯР

Создавая свою алгебру, **Виет** рассматривал не только длины, площади, объемы, но и величины, не имеющие геометрического смысла: квадрато-квадрат, квадрато-куб и т. д. Эти восходящие степени образуют шкалу — лестницу; а величины **Виет** назвал *скалярами* — «ступеньками». В таком смысле слово «скаляр» впервые вошло в математику.

Современный термин *скалярная величина* (в отличие от векторной) придумал **Гамильтон**, образовав его от того же латинского слова scale — «шкала, лестница» (1843).

СКАЧОК

Паш и **Дюбуа Раймон** назвали *скачком функции* в точке a величину

$$\lim[f(a+h) - f(a-h)] \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Жордан ввел понятие *скачка* (écart — скачок, отклонение, разница) для функции многих переменных (“Cours d’analyse... ”, t. 1, 1893). [180, с. 273].

СКОБКИ

До появления специальных символов перед выражением, которое нужно заключить в скобки, ставили слово collect или буквы *cs* от communis или *u* от universal (**Л. Пачоли**, **Кардано**), *b*, означающее binomial, и др. Знаки, выполняющие роль скобок, появились в XV в. В сочинении **Шюке** (1484) вместо скобок выражение подчеркивалось горизонтальной чертой. Такое же обозначение употреблял **Бомбелли** (1550), позднее он стал писать букву L перед таким выражением, а в конце выражения — перевернутую букву ⅃; от такой записи произошли квадратные скобки. Черта сверху употреблялась очень долго, это обозначение используют **Декарт**, **Ньютон**,

Лопиталь, редко **Лейбниц**. Еще в "Theorie des nombres" **Лежандра** наряду с различными скобками фигурируют $\overline{CA} \times B = C \times \overline{AB}$ (1830).

Подобие скобок изобрел **Тарталья** (1556), у него символ Rv (от Radix universalis, т. е. «общий корень») означал, что корень извлекается из суммы, а не только из первого слагаемого. Круглые скобки встречаются у него, а затем у **Жирара** (1629). Это почти единственное, что осталось в математике от символов, употребляемых **Жираром**; в некоторых странах еще используются его tan, cotan. В сочинениях **Виета** появляются фигурные скобки (1593). Широкое применение скобки получили лишь в первой половине XVIII в., благодаря **Лейбницу** и еще больше **Эйлеру**. И название *скобки* произошло от введенного **Эйлером** немецкого термина «Klammer». В учебные курсы скобки вошли поздно. О расстановке скобок в арифметике впервые говорит **Шредер** ("Lehrbuch der Arithmetik und Algebra", 1873). [226, II, с. 34]; [170, с. 376]; [198, I_1, с. 10]; [45, с. 145].

СЛЕД

Термин «trace» ввел **Монж** в своей «Начертательной геометрии» (1799).

СПЕКТР

Отыскивая «истоки» понятия спектра, можно дойти до первого появления собственных функций и собственных значений дифференциального уравнения в работах **Лиувилля** и **Штурма** (1836). **Гильберт** показал, как свести решение дифференциального уравнения к интегральному и обобщить понятие собственного значения на случай бесконечной симметричной формы K (1904). Ему принадлежат термины «*спектр*, *точечный спектр*, *непрерывный спектр*» (das Punktspektrum oder diskontinuierliche Spektrum, das Streckenspektrum). Его четвертое сообщение по теории интегральных уравнений (1906) посвящено изучению соотношения между преобразованием K и его спектром $\sigma(K)$.

Многочисленные быстро последовавшие работы (**Шмидта**, **Карлемана** и др.) продолжали и развивали идеи **Гильберта**. Принципиально новый этап начался с работами **фон Неймана**, который внес абстрактные концепции в гильбертову теорию и, в частности, применил ее к квантовой механике. Оказалось, что условное математическое понятие «спектр» связано со спектрами энергетических состояний атомов и элементарных частиц. **Гильберт** был очень удивлен: «Я развил мою теорию... в чисто математических интересах и даже назвал ее *спектральным анализом* без какого-либо предчувствия, что позднее будет найдено приложение к действительным спектрам в физике». [175, **3**, с. 1–29]; [205, **45**, с. 181–193]; [174, **80**, с. 365–370].

СПИРАЛЬ

Латинское spira (изгиб, извив, кольцо, узда, повод) произведено от греческого σπεῖρα (виток). При этом греки и для спирали, и для винта имели одно название — ἕλιξ (закрученный).

Спираль **Архимеда**. По некоторым источникам, изобретение этой спирали приписывается **Конону Самосскому**, однако свойства ее были изучены

Архимедом, который определил способ построения касательных к кривой, выполнил ее квадратуру и применил эту кривую для трисекции угла. При изучении спирали **Архимед** практически пришел к полярным координатам, составил верхнюю и нижнюю интегральные суммы и показал, что их разность может стать меньше заданного числа.

Уравнение кривой $\rho = a\varphi$ было записано в конце XVII в. Тогда же удалось спрямление кривой (**Кавальери**, **Роберваль**, **Ферма**, **Паскаль**). **Эйлер** ввел впервые вторую ветвь спирали, соответствующую отрицательным значениям радиуса-вектора. О спиралях **Архимеда** высших порядков $\rho^k = a^k \frac{\varphi}{2\pi}$ шла речь в переписке **Ферма** с **Мерсенном** (1636). При $k = 2$ получается кривая, которую греки называли «удивительной кривой» (παραδοξος γραμμα); ее, по свидетельству **Паппа**, открыл **Менелай** из Александрии. Кривые исследовались многими математиками (кроме **Ферма**) — **Гюйгенсом**, **Валлисом**, **де Слюзом** (1633) и др.

Спираль гиперболическая была открыта **Вариньоном** (1704), он записал ее уравнение в полярных координатах в виде $\delta\nu = a$. Независимо от него к кривой пришел **И. Бернулли**. Разные авторы приписывают название кривой то одному, то другому из них.

Спираль коническая была известна уже **Паппу**. Спрямление ее произвел **Гранди** (1701).

Спираль логарифмическая впервые упоминается в письме **Декарта** к **Мерсенну** (1638). Независимо от **Декарта** ее открыл **Торричелли** (1644). Особое внимание изучению свойств этой кривой уделял **Я. Бернулли** (1692), называвший ее spira mirabilis — «дивная спираль». Открытые им свойства инвариантности кривой относительно различных преобразований настолько поразили его, что он склонен был приписывать мистический смысл этой кривой и пожелал иметь на своей могиле изображение spira mirabilis с надписью “Eadem mutata resurgo” — «Измененная воскресаю прежней». Так как при перемножении ρ_1 и ρ_2 показатели $\rho = e^{\varphi}$ складываются, то оказывается, что кривая имеет свойства, роднящие ее с логарифмами. Поэтому **Вариньон** (1704) предложил назвать кривую *логарифмической спиралью*. Однако, по-видимому, это название употреблялось и раньше, в переписке. [216]; [138, с. 196, 211]; [34, с. 309]; [213, с. 434–435, 445]; [198, III$_3$, с. 197, 210]; [137]; [170, с. 399]; [186, с. 156]; [165, с. 250].

СПРЯМЛЕНИЕ

Задачи о спрямлении дуги и о площади поверхности вращения появились довольно поздно — в XVII в. По мнению многих математиков того времени задача считалась абсолютно неразрешимой, потому что при вычислении длины дуги эллипса (простейшей кривой после окружности) геометры пришли к эллиптическим интегралам, т. е. к непреодолимым трудностям. **Декарт** писал: «Отношение между прямым и кривым неизвестно и даже, думаю, не может быть познано людьми». Парабола **Нейля**, или полукубическая парабола, — первая кривая, спрямление которой удалось выполнить почти одновременно нескольким авторам. Это были **Ферма** во Франции, **ван Гейрет** в Голландии и **Нейл** в Англии (1657, 1658). Согласно

Валлису, приоритет принадлежал **Нейлю**; при этом **Валлис** ввел естественное название (высшая степень переменной равна половине куба $y = x^{3/2}$).

В 1656 г. **Валлис** нашел выражение, эквивалентное нашему

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

и ввел характеристический треугольник (*triangulum characteristicum* — по терминологии **Лейбница**). Вслед за этим **Реном** и **Гюйгенсом** было выполнено спрямление циклоиды. **Джеймс Грегори** построил вспомогательную кривую $y = r\sqrt{1 + (y')^2}$, к квадратуре ее он сводил задачу спрямления, т. е. неявным образом использовалась современная формула для вычисления длины дуги. **Гюйгенс** нашел ряд длин дуг и площадей поверхностей вращения.

Интуитивно ясное понятие площади поверхности не имело строгого определения, оно было сформулировано только в XX в. **Пеано** и **Жорданом**. [20, с. 178]; [64, XIV, с. 38]; [165, с. 222]; [34, с. 122]; [159, с. 114].

СРАВНЕНИЕ

Термин *сравнимы* (congruence) в том смысле, в каком он потом появился у **Гаусса**, впервые употребил **Гольдбах** (1742). Понятие в неявном виде встречалось у многих математиков, однако только **Гаусс** точно определил его и систематически развил теорию. **Гаусс** начал писать "Disquisitiones Arithmeticae" в 1796 г., и значительная часть этого сочинения была написана в студенческие годы. *Равноостаточные члены* или *числа, сравнимые по модулю* — термины **Гаусса**, введенные в этом сочинении. Там же **Гаусс** ввел знак сравнения $\equiv$. Он рассмотрел также сравнения высших порядков, однако первая подробная публикация принадлежит **Шенеману** (1846). Наконец, **Гаусс** рассмотрел системы сравнений. Полное исследование систем линейных сравнений было дано в работах **Фробениуса** и **Стейница** в конце XIX в. [185, I, с. 34]; [198, I_2, с. 573].

СТАТИСТИКА

По-видимому, впервые слово появилось в работе итальянского историка **Джироламо Чилини**, который в 1589 г. ссылался на подсчет civil, politica, statistica e militare scienza. В Англии слово появилось в 1770 г.; оно произведено от латинского status, употребляемого в смысле «политическое состояние», и использовалось именно в таком значении итальянскими, немецкими, английскими авторами. Предмет определялся как «наука, которая учит нас, каково политическое устройство современных государств в известном мире». Затем смысл слова несколько изменился: в течение XVIII в. выражение «статистические данные» означало справки о населении, производстве, политической ситуации, и поэтому наука называлась «политической арифметикой». Первые «полезные» приложения теории вероятностей относятся к XVII в.: исследования **Гудде** и **де Витта** о пожизненной ренте (1671), «медицинская статистика» **Петти** (1690), таблицы смертности в Лондоне **Галлея** (1693), которые явились основой для страхования жизни, и др.

Основателем новейшей статистики считают бельгийского астронома **Кэтле**, который заложил ее основы в двух нашумевших в свое время книгах — «О человеке и развитии его способностей» (1835) и «О социальной системе и законах, управляющих ею» (1848). Он показал, что число преступлений, самоубийств, браков, браков между представителями различных возрастных групп, холостых с вдовами, вдов со вдовцами и т. д. почти не меняются из года в год. **Кэтле** впервые и категорически высказал мысль, что нравственный мир управляется такими же непреложными законами, как мир физический.

Английский ученый **Гальтон**, который интересовался самыми различными проблемами (например, он изучал действенность молитв, изобрел метод дактилоскопии), заложил основы биометрии — науки, изучающей биологические проблемы изменчивости и наследственности с помощью статистических методов (1889). Его знаменитый ученик **Карл Пирсон** сделал чрезвычайно много для развития статистики и применения ее в биологии. Он развил идеи **Гальтона** о корреляционных связях, много внес в теорию выборок, под его руководством составлены многочисленные и обширные статистические таблицы. Статистика предъявила теории вероятностей требования, которые вызвали пересмотр основ этой науки. Дальнейшее одновременное развитие статистики и теории вероятностей связано с работами **Р. Е. Фишера** и **Р. Мизеса**. **Фишер** создал метод дисперсного анализа, играющий важную роль в применениях математической статистики к агрономии и другим опытным наукам. Он развил также теорию правдоподобия, которой стремился заменить учение о вероятностях «апостериори».

Джон фон Нейман так оценивал состояние статистики своего времени: «Современный уровень математической статистики можно сравнить с анализом эпохи **Вейерштрасса**... Основные положения теории пересматриваются. Привычные допущения проверяются с целью выяснения точной области их приложимости, — строятся противоречащие примеры, показывающие недостаточность старых доказательств». [186, с. 383]; [2, II, с. 52–53]; [174, **29**, с. 333]; [111, с. 230–242]; [224].

СТАЦИОНАРНОСТЬ

Термин происходит от латинского stationarius (тот, кто стоит; нерушимый).

СТЕПЕНЬ

Понятие степени первоначально относилось только к переменной (неизвестной) величине; эти степени и назывались «длина, площадь, объем» и обозначались совершенно разными символами (см. **неизвестная, показатель**) **Шюке** ввел (1484) отрицательную и нулевую степени (неизвестной), дробные степени появились у **Орема** (XIV в.)

СТЕРАДИАН

Термин состоит из греческого στερεον — объем (στερεος — пространственный) и радиан. [16].

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Термин составлен из греческих στερεος и μετρεω (измеряю). Буквальное значение термина — «измерение объемов». Термин встречается уже у **Аристотеля**. [7, с. 128]; [45, с. 272].

СТРОФОИДА

Кривая была открыта в середине XVII в., впервые она встречается у **Гранди** и **Торричелли**; последний исследовал ее в 1645 г., причем из его письма видно, что кривую нашел не он, а некий французский ученый. Кривую долгое время называли «крылом **Торричелли**» (по традиции, идущей от **Казали**, 1757). Название *строфоида* происходит от греческого στροφος (пояс, завязка, отсюда же произошли парашютные «стропы»), и ειδος (вид, образ). Этот термин введен в 1846 г. **Монтуччи**. [138, с. 78–84]; [34, с. 304].

СТРУКТУРА

Интуитивное представление о понятии структуры встречается уже у математиков XVIII в. (например, у **Лагранжа**). Четко его сформулировал **Дедекинд** (работы 1894 и 1897 гг.). Термин *структура* (latice) был введен в статье **Биркгофа** (1933). В настоящее время все чаще употребляется термин «решетка». **Биркгофу** принадлежит также термин *полуструктура* (semilatice), который он образовал по образцу употреблявшегося в немецкой литературе Halbverband, введенного **Клейном**. Понятия «импликативной» и «субтрактивной» структур явно сформулированы **Сколемом** (1919). [19, с. 94].

СУММА

Латинское summa переводится как «главный пункт, сущность, итог, сумма». Вначале этот термин употреблялся не как название результата сложения чисел. Суммой называли основное число при всяких расчетах. **Леонардо Пизанский** писал: «сумма умножения», «сумма деления». Термин «сумма действия» встречается до конца XVII в. Оттенок такого значения сохранился до сих пор в нашем языке: мы говорим о «денежной сумме» и в тех случаях, когда никакого сложения нет. С XV в. слово приобретает современный смысл, появляется глагол «суммировать» (1489). Наряду с «суммой» употребляются и другие термины: «агрегат», «коллект», «продукт» (именно этот термин служил **Лейбницу**). Так как основное число всяких расчетов выписывалось сверху, то очень долгое время при сложении сумму писали вверху.

Для обозначения суммы **Лейбниц** (а вслед за ним и другие авторы) использовал знак $\int$ как стилизованную букву S, которой начинается слово summa. Буква $\sum$ выбрана как аналог буквы S. Этот знак ввел **Эйлер** в 1755 г. Символ использовал **Лагранж**. Затем в течение XVIII в. его мало употребляли, для сумм рядов широко использовалась буква S. Вновь $\sum$ как выражение «сумма» появляется в 1822 г. у **Фурье** и в 1829 г. — у **Якоби**. [185, **1**, с. 61]; [185, II, с. 36]; [226, II, с. 40]; [56, с. 218]; [50, с. 33].

СУММЫ ДАРБУ

Самые настоящие верхнюю и нижнюю интегральные суммы составил **Архимед** (III в. до н. э.). В новое время их появление относится к 1659 г., когда болонский математик **Пьетро Менголи** в задачах квадратур составил суммы

$$s_n = \sum m_i(x_{i+1} - x_i),$$
$$\sigma_n = \sum f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$
$$S_n = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$$

и доказал, что они имеют один предел.

Определенный интеграл именно таким образом ввел **Риман** («Мемуар о тригонометрических функциях», 1854 г.). **Дарбу** развил идеи **Римана** (1875). В этот год несколько математиков приходят к одинаковой формулировке условия интегрируемости функции — **Томе**, **Смит**, **Асколи** и **Дюбуа Раймон** с разной степенью подробности и строгости ввели нижние и верхние интегральные суммы (а также верхний и нижний интегралы). Современные обозначения ввел **Дарбу**.

Вероятно, это совпадение подготовлено «Лекциями» **Римана**, опубликованными в 1869 г., где рассматриваются такие суммы и доказывается, что при $\Delta x \to 0$ верхняя сумма не возрастает, а нижняя — не убывает. Более того, в 1881 г. студент **Вольтерра**, не знакомый с этими работами, также ввел *нижний и верхний интегралы* и именно его названия и обозначения $\overline{I}, \underline{I}$ и употребляются сегодня. Термин *суммы* **Дарбу** ввел, по-видимому, **Жордан**. [107, с. 204–210]; [176, **29**, с. 831].

СУПЕРПОЗИЦИЯ

Термин составлен из латинских super (над) и positio (положение); он означает «наложение одного на другое». Этот термин встречается впервые у английского математика **Уитстоуна** (1833) и **Коши** (1838). Идея принципа суперпозиции принадлежит **Даниилу Бернулли**, который считал принцип фундаментальным законом. Начало его исследований задачи о колебании струны относится к 1728 г. Согласно его догадке, колебание струны можно раскладывать на составляющие его «собственные колебания», вывод о возможности представления решения в виде суммы гармоник **Д. Бернулли** опубликовал в 1741–1743 гг.

Строгое исследование условий, при которых принцип имеет силу, впервые провел **Дюамель** (1834). [19, с. 218]; [198, II_A, с. 952]; [50, с. 314].

СУПРЕМУМ

Обозначение sup представляет сокращение латинского supremum (самый верхний), от superior (верхний). В «Алгебраическом анализе» **Коши** (1821) встречается выражение «наибольший из пределов» без единого слова пояснения. До этого понятие появилось у **Больцано** (1817). [198, I_1, с. 71].

СФЕРА

Термин происходит от греческого σφαῖρα (шар, мяч). Слово встречается у **Платона**, **Аристотеля**, т. е. еще до **Евклида**. Он определял сферу как поверхность, образованную вращением окружности вокруг ее диаметра. Современное определение дано **Теодосием** в «Сферике». Относительно времени жизни и биографии **Теодосия** существуют различные мнения, опирающиеся на противоречивые сообщения древних историков, которые ошибочно объединяли несколько лиц, носивших это имя. Жил он, по всей вероятности, во второй половине II в. до н. э., хотя часто его называли современником **Цицерона** (ок. 50 г. до н. э.). [163, IV, с. 10]; [216]; [103, с. 32].

СХЕМА

Термин произошел от греческого σχῆμα (внешний вид, форма, образ). В древнегреческой математике слово употреблялось со смыслом «фигура, часть пространства» (**Платон**, **Тимей**, **Аристотель**, **Евклид**). Глагол σχηματζειν означал «построить, образовать фигуру». [216].

СХОДИМОСТЬ

Представления о сходимости ряда в той или иной степени присутствовали в математике. У **Маклорена** (и других) термин «сумма» означал сумму первых n членов; нашей же сумме ряда у него соответствует «значение ряда, когда он предполагается бесконечно продолженным» (1742). Термин *сходимость* приобрел современный смысл после исследований **Коши** и **Больцано**. До тех пор ряд называли сходящимся, если $a_n \to 0$ — такая терминология была введена шотландским математиком **Джеймсом Грегори** в 1668 г. Тот факт, что $a_n \to 0$ есть необходимое условие для того, чтобы сумма ряда была ограниченной, доказал **Пьетро Менголи** (1650), он же доказал расходимость гармонического ряда. **Гаусс** обратил внимание на различие понятий "$a_n \to 0$" и «ряд сходится» (в современных выражениях) и дал первые критерии сходимости в статье о гипергеометрическом ряде (1812); эта работа знаменует начало изучения сходимости с современной строгостью. Различные **признаки сходимости** появлялись чаще всего как часть решения конкретной задачи, а не как общий прием исследования, доказательства. Необходимо только сказать, что до XX в. признаки не связывали с именами математиков (и что они получили названия в основном исторически несправедливые).

Термин *условная сходимость* означает, что должно выполняться *условие* — не переставлять члены ряда. **Дирихле** привел примеры условно сходящихся рядов, из которых перестановкой членов в одном случае получается расходящийся ряд, а в другом — сходящиеся ряды с разными суммами (1837). Как писал **Риман**, он узнал о существовании абсолютно и условно сходящихся рядов от **Дирихле**, с которым он почти ежедневно встречался на каникулах в 1852 г. **Риман** показал, что такие ряды можно «заставить» сходиться к любой наперед заданной сумме (1854). Выражения *условная* и *безусловная сходимость* употреблял в лекциях **Вейерштрасс** (с 1856 г.) — возможно, эти термины заимствованы у него.

Равномерная сходимость. Характер сходимости функционального ряда стали исследовать только во второй половине XIX в., хотя пример

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \ldots, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

привлекал внимание математиков в течение долгих десятилетий. Впервые о нем писал **Эйлер** (1783), затем — **Фурье** (1808). **Абель** (1826) заметил, что это разложение опровергает теорему **Коши** о непрерывности суммы ряда непрерывных функций, высказанную в 1821 г. Этот вопрос исследовал **Филипп Зейдель**, ученик **Дирихле**, в знаменитой статье 1848 г. В это же время над другим утверждением **Коши** размышлял **Стокс** (функция нескольких переменных, непрерывная по каждому аргументу, непрерывна и по совокупности аргументов). **Стокс** выяснил условия, при которых справедлива эта теорема, и пришел к необходимости различать виды сходимости функциональных рядов — равномерную и неравномерную (essentially, accidentally). Несколько ранее **Кристоф Гудерман** фактически использовал равномерную сходимость в статье, посвященной эллиптическим функциям (1838), через его ученика **Вейерштрасса** понятие gleichmassig Konvergenze вошло в математику.

Перелом в отношении математиков к понятию равномерной сходимости наступил в 1874–1875 гг., когда лекции **Вейерштрасса** стали настолько известными, что стали оказывать влияние на всю европейскую математику. Во Франции сыграли роль работы **Дюбуа Раймона** и **Дарбу**. В Италии фундаментальный вклад внес **Дини** (1878).

Различение условной и абсолютной *сходимости интегралов* идет от **Дюбуа Раймона**, его названия — unbedingt, bedingt Konvergenze (1868).

Сходимость в функциональном пространстве начали изучать в первой декаде XX в. В статье **Эрнста Фишера** (1907) появилось впервые выражение *сходимость в среднем* (converger en moyenne). Этот термин быстро принял **Фреше**. Понятие *слабой сходимости* было сформулировано **Ф. Риссом** в статье 1910 г. А в 1908 г. **Э. Шмидт** использовал термин *сильная сходимость* (starke Convergenze). [178]; [180, с. 93]; [64, **45**, с. 260–280].

Т

ТАБЛИЦА

Латинское *tabula* означает «доска, табличка для письма, стол». От этого же корня произошло немецкое *tabulieren* и наши термины «табулировать», «табулятор».

Таблицы широко использовались в арифметике древних — в Вавилоне, Египте. Со времен **Птолемея** тригонометрические таблицы были непременной частью всякого астрономического труда, таблицы **Птолемея** — это «таблицы хорд». Во всех зиджах — сборниках астрономических и тригонометрических таблиц — приводилась таблица синусов, впервые — у **ал-Хорезми**, который табулировал функцию $r\sin\alpha$, для $r = 60$, через 1° (в интервале от 0° до 90°). **Шабаш ал Хасиб** привел также таблицы тангенсов, косекансов и $1 - \sin\alpha$.

Стандартный для современных учебников обычай — приводить таблицу производных элементарных функций (таблицу интегралов) — имеет удивительно недавнее начало. Даже в пособиях 1924 г. нет произвольной постоянной. [16]; [103].

ТАНГЕНС

Линии тангенса и котангенса появились в арабской математике как «прямая и обратная тень» (в латинских переводах — umbra recta, umbra versa). Эти величины фигурировали в науке о солнечных часах — гномонике. Впервые **ал-Фараби** рассматривал линии тангенса и котангенса как линии, связанные с кругом, разорвав традиционную связь этих тригонометрических функций с гномоникой.

В комментариях работы **ал-Хорезми** приведены таблицы тангенсов и котангенсов (IX в.). **Абу-л-Вафа** использовал тангенсы, он ввел также секанс и косеканс (X в.). Результаты арабских математиков стали известны в Европе благодаря западно-арабским ученым, работавшим в Испании в XI–XII вв., они были посредниками в передаче достижений математиков и астрономов Ближнего и Среднего Востока на «латинский» Запад. **Брадвардин** в Англии (XIV в.) и **Региомонтан** в Германии (XV в.) вновь открыли эти функции и подчеркивали особое значение тангенсов в тригонометрии. Однако и спустя век **Коперник** еще на знал этого открытия. Арабским ученым была известна теорема тангенсов («теорема теней»).

Название *тангенс* происходит от латинского tangere (касаться), *tangens* (касающийся, отрезок касательной). Слово *тангенс* вместе с *секансом* ввел **Финке** (1583). **Виет** относился к этим терминам неодобрительно, по его мнению, могла возникнуть путаница с геометрическими понятиями («касательная» и «секущая» имеют такое же написание по латыни: tangent, secant). Другие же математики — **Тихо Браге** (1592), **Питискус** (1600), а затем **Кеплер** — приняли термины. Во всеобщее употребление они вошли в XVII в.

Ланьи впервые выяснил знаки тангенса для углов различных квадрантов и установил период функции (1705). График тангенса для первой четверти построили **Дж. Грегори** (1668) и **Барроу** (1674). Для двух периодов его построил **Коутс**. Названия тригонометрических функций стали сокращать, следуя **Финке**. Чаще других употреблялись tan , T, t. Обозначение $\operatorname{tg} x$ ввел **Эйлер**, переняв его у **И. Бернулли**; обозначение $\tan x$ принадлежит **Жирару** (1629). [185, **1**, с. 150]; [65, **1**, с. 320]; [45, с. 288]; [127, с. 8]; [103, с. 105].

ТАУТОХРОНА

Название происходит от греческих τάυτος (тот самый) и χρόνος (время). Буквальный смысл термина — «равновременная». Задачу о таутохроне поставил **Гюйгенс** в сочинении о маятнике («Horologium oscillatorium», 1673) и блестяще решил ее, обнаружив, что таутохроной является циклоида. Он же ввел этот термин. [186, с. 182–188].

ТЕКУЩАЯ ТОЧКА, ВЕЛИЧИНА

Впервые такое выражение встречается у **Кавальери** (ок. 1635 г.). Если прямая перемещается параллельно себе самой, то он говорил, что прямая течет, и называл линию «текущей».

Обобщая термин **Кавальери**, **Ньютон** называл *текущей* любую непрерывно меняющуюся величину.

ТЕНЗОР

Латинское tendo означает «натягивать, растягивать». Слово впервые ввел в математику **Гамильтон** — так он называл длину вектора и оператор, «растягивающий» вектор. Затем этот термин появляется в теории упругости (1900), где **Фохт** назвал так систему коэффициентов, которая определяет «деформацию при растяжении». Из теории упругости его заимствовали **Риччи** и **Леви-Чивита** (1901). **Риччи** рассматривал функцию, производные которой представляют «инвариантные выражения». **Риччи** назвал их «абсолютными величинами», а развитое им исчисление — «абсолютным исчислением». Производные **Риччи** не заслуживают этого названия, так как это именно «относительные» производные, отнесенные к определенному риманову пространству. Уже вскоре **Скаутен** заменил это название более целесообразным — «прямое исчисление», а впоследствии оно стало называться *тензорным*. [142, с. 221]; [208, с. 36].

ТЕОРЕМА

Греческое θεώρημα означает «зрелище, представление». В математике греков это слово стало употребляться в смысле «истина, доступная созерцанию»; θεώρημα происходит, в свою очередь, от θεωρέω (рассматриваю, обдумываю). Слово как математический термин встречается у **Архимеда**. [113, с. 170].

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

Сходимость степенного ряда исследована впервые **Коши**, который и положил начало традиции: прежде всего — область сходимости (1821). Теорема **Абеля** сформулирована и доказана автором практически так, как это делается в современных учебниках (1826), с единственным недостатком: за неимением знака модуля, **Абель** пишет «для всех значений..., меньших чем...»

ТЕОРЕМА ВИЕТА

Зависимость между корнями и коэффициентами уравнения, частично известная **Кардано**, установлена **Виетом** (1591). Формулы для первых четырех степеней сумм корней алгебраических уравнений любых степеней привел **Жирар** (1629).

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА—КАПЕЛЛИ

Теорема, вероятно, должна бы называться теоремой **Кронекера—Доджсона**. Какой была теория до **Кронекера**, можно увидеть по любому учебнику того времени, например, по «Алгебре» **Бертрана** (перевод на русский язык с 18-го французского издания 1908 г.!): «Полное исследование общих формул решения системы двух уравнений с двумя неизвестными» (линейных уравнений) занимает 9 параграфов, содержит подробную таблицу и нисколько не проясняет проблему, ибо нет единого подхода, нет общей идеи.

Альфредо Капелли учился в университетах Рима, Павии, недолгое время — Берлина. Среди его преподавателей — **Бельтрами**, **Вейерштрасс**, **Кремона** и **Кронекер**. **Капелли** — один из основателей Математического кружка Палермо. Знаменитая теорема появилась сначала в его литографированных лекциях (Неаполь), затем — в журнале, издаваемом **Пеано** в Турине (1892), эта публикация появилась почти через 30 лет после того, как **Кронекер** получил результат, и вполне вероятно, что публикация — просто информация о состоянии исследований в Германии, без претензий на приоритет. Но и это была не первая публикация. **Ч. Л. Доджсон**, автор знаменитых книг «Алиса в стране чудес», «Алиса в Зазеркалье», написал несколько учебных пособий. В 1866 г. опубликована его статья "Consideration of Determinants being a New and a Brief Method for Completing Their Arithmetical Values", а в следующем году — небольшой курс лекций (143 с.) "Treâtise on a Theory of Determinants", здесь рассмотрена и теорема **Кронекера—Капелли**.

ТЕОРЕМА О КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ

Пытаясь «арифметизировать» анализ, **Лагранж** в «Теории аналитических функций» (1797) рассматривал задачу об оценке точности приближения функции частичной суммой ряда и, в частности, вывел эту теорему. Другие доказательства давали **Коши**, **Гуэль**, **Жордан**, **Бонне**, которому и принадлежит стандартное доказательство современных учебников. В XIX в. теорему часто называли *основной теоремой анализа.*

ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ ОСНОВНАЯ

Приблизительно в одно время (ок. 1629 г.) **Жирар** и **Декарт** утверждали, что уравнение *может иметь* столько корней, сколько измерений имеет неизвестная, что и естественно, пока корнями признаются только положительные числа. Такова же формулировка теоремы у **Ньютона**: «Уравнение может иметь столько же корней, сколько оно имеет измерений, но не более». В XVIII в. эта теорема стала необходимой для интегрирования. Ни один математик не сомневался в том, что любое уравнение степени n *должно* иметь точно n корней или что многочлен с действительными коэффициентами

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$$

можно разложить в произведение множителей (с действительными коэффициентами) первой и второй степеней, такое, что сумма их степеней равна n, но только **Эйлер** и **Д'Аламбер** глубоко изучили вопрос и дали первые (несовершенные, правда) доказательства (письма **Эйлера** на эту тему относятся к 1742 г.). [50, с. 346–352].

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

Теорема была известна **Ньютону**. Первая теорема о среднем была у **Лакруа**. «Окончательно» теорема введена в курсы анализа благодаря **Дирихле** (1837). **Оссиан Бонне** нашел метод оценки интеграла (1849), который ныне называется второй теоремой о среднем. Наконец, **Дюбуа Раймон** и **Вейерштрасс** доказали еще одно соотношение; первый имеет приоритет публикации, второй — устного сообщения в лекциях. **Дюбуа Раймон** изложил историю этой теоремы в диссертации «К истории тригонометрических рядов» (1880). [175, **42**, с. 43].

ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

Первая или одна из первых формулировок теоремы приведена в курсе лекций по математическому анализу **Вейерштрасса** (1861). Что же до **Мишеля Ролля**, то в «Трактате по алгебре» (1690) он развил метод отделения действительных корней, основанный на частном случае теоремы, названной его именем.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Проблемы существования возникли уже в греческой математике. Считается, что древнейшее доказательство существования математического объекта принадлежит **Гиппократу**. **Аристотель** считал таким доказательством построение. Выдающимися достижениями Пифагорейской школы считались доказательства существования несоизмеримых отрезков и правильного додекаэдра. И в дальнейшем проблемы существования присутствовали в математике. Вот несколько примеров.

Шараф ад-Дин ад-Туси (конец XII в.) систематически исследовал существование положительных корней уравнения.

Эйлер ставил вопрос о существовании интегрирующего множителя.

Однако появление в математике теорем существования связывают с именем **Коши**.

Метод последовательных приближений использовали при доказательстве этой теоремы **Фукс** (1870), позднее **Пикар** и **Пеано** (1887), последний ослабил требования **Коши** и упростил доказательство.

Рисс полагал, что доказательство существования решения важнее, чем аппарат его нахождения (в теории интегральных уравнений). [178]; [50, с. 72, 132, 316]; [206, с. 33]; [207, с. 51]; [175, **40**, с. 52].

ТЕОРИЯ

Греческое θεωριά означает «наблюдение, исследование, опыт».

ТЕРМИН

Латинское terminus означает «межа, граница, конец».

ТЕТРАЭДР

Слово составлено из греческих τετραρες (четыре), в сложных словах τετρα, и ἕδρα (основание). Буквальное значение — «четырехгранник». По-видимому, термин впервые употреблен **Евклидом**. После **Платона** еще встречается «пирамида». [113]; [216]; [219].

ТИП

Термин образован от греческого τυπος (образ, отображение).

ТОЖДЕСТВО

Знак $\equiv$ был впервые употреблен **Риманом** в статье 1857 г.

ТОПОЛОГИЯ

В XIX в. были распространены два названия — топология и analys situs. Этот последний термин употреблял еще **Лейбниц** (в рукописных работах, с 1679 г., и в переписке с **Гюйгенсом**), имея в виду, однако, особое прямое геометрическое исчисление, не пользующееся алгеброй в отличие от аналитической геометрии. Analys situs как название дисциплины топологии ввел **Риман** (наброски к топологическим работам относятся приблизительно к 1854 г.). Первой работой, специально посвященной топологии, были "Vorstudien zur Topoligie" («Предварительные исследования по топологии» (1847) **Листинга**. Здесь **Листинг** предложил название *топология*, образованное от греческих τοπος (место) и λογος (слово, закон). Среди научных статей **Листинга**, кроме 25 математических, есть также относящиеся к оптике, физиологии зрения, метеорологии, геофизике. "Vorstudien" он написал по настоянию **Гаусса**.

Популяризации термина «*топология*» много способствовал американский математик **Соломон Лефшец**, опубликовавший книгу под этим названием (1930).

Отдельные результаты теории узлов, задача о раскраске карт и другие не сливались в единую теорию, и главное — до Эрлангенской программы **Клейна** не было формулировки: в чем состоит предмет топологии, круг ее проблем. В последние десятилетия XIX в. четко оформились отдельные ветви топологии: **Пуанкаре** создал комбинаторную (или алгебраическую) топологию (1895), работами **Вейерштрасса** и **Кантора** была подготовлена теоретико-множественная топология, а затем **Фреше** основал абстрактную топологию, развитую **Хаусдорфом**. При изучении понятия размерности **Брауэр** объединил эти два направления (1908–1912). Объединенная теория была глубоко и всесторонне развита **П. С. Александровым**, **П. С. Урысоном**, **Александером**, **Лефшецом** и др. «Отдельной областью математики топологию стали считать примерно 50 лет назад, но в основном ее развитие приходится на последние 30 лет» (Стинрод, Чинн). [186, с. 323]; [205, **37**, с. 273]; [141].

ТОР

Латинское torus означает «возвышение, выпуклость, мускул, подушка».

ТОЧКА

Слово происходит от глагола «ткнуть» и означает результат мгновенного прикосновения, укола. Тот же смысл имеет и латинское *punctum*, от которого произошли *Punkt*, *point* европейских языков и «русский» пункт. Эти слова происходят от латинского глагола *pungo* — «укалываю». Такое толкование является сейчас общепринятым. Интересно, что **Лобачевский** придерживался другого взгляда. Он говорил, что «точка» происходит от прикосновения отточенного пера, так что «точка» означает острие гусиного пера, которым еще писали во времена **Лобачевского**, и следовательно, слово образовано от глагола «точить».

Точки в бесконечномерном пространстве впервые рассмотрели **Пеано** (который называл это понятие «числовой комплекс») и **Пинкерле** (1903).

Точка ветвления. Согласно свидетельству **Дедекинда**, до первой «зрелой» работы **Римана** (т. е. до 1851 г., когда **Риману** было 25 лет) не было значительных разговоров **Римана с Гауссом**, **Якоби**, **Дирнхле**. Зато многие вопросы он обсуждал с **Эйзенштейном**, у которого **Риман** слушал теорию эллиптических фукций. «Вероятно, именно летом 1847 г. им основательно продуманы... идеи, в значительной степени определившие его дальнейший жизненный путь». Понятие и название — Verzweigungspunkt — введены **Риманом** (1851). Разъяснению понятия были посвящены специальные работы, так, главная цель статьи **Пюизо** — показать, как происходит переход с одной ветви функции на другую при обходе такой точки. Польский математик **В. Серпинский** доказал (1915), что существуют кривые, состоящие целиком из точек ветвления.

Точка возврата. И термин, и первое исследование точек возврата (ок. 1690 г.) принадлежат **И. Бернулли**. Первую публикацию мы находим в «Анализе бесконечно малых» **Лопиталя** (1696). Правда, до этого они мельком появлялись у **Гюйгенса** (1678). **Лопиталь** различал точки первого и второго рода (points de rebroussement de la premiere et de la second sorte), хотя конкретных примеров он не приводил. Это обстоятельство дало возможность **де-Гюа де-Мальву** отрицать существование таких точек (1740). Неясность в этом вопросе просуществовала до 1749 г., когда классический пример **Эйлера** $y = \alpha x^2 \pm \beta x^2 \sqrt{x}$ решил спор. **Крамер** (1750) называл такие точки rebroussement en bec или просто bec (клюв), откуда произошло немецкое Schnabelpunkt. **Федор Иванович Шуберт** завершил исследование вопроса (1822), рассмотрев все возможные случаи системы соответствующих уравнений.

Точка несобственная. Несобственные элементы ввел в геометрию **Дезарг** (1639). Термин «бесконечно удаленный» появился впервые в «Новой астрономии» **Кеплера** (1609). Необходимость понятия долго дебатировалась в связи с обсуждением «принципа непрерывности» проективной геометрии. Термины «*собственный*, *несобственный*» (eigentlich, uneigentlich) принадлежат **Штуди** (1909).

Точки особые алгебраических кривых. Термин ввел в 1740 г. **де-Гюа де-Мальв**.

Название «особые точки поверхности» используют **Гаусс** (1828), **Дюпен** (1813), но название «*обыкновенная точка*» не появляется еще очень долго. По-видимому, термин был введен впервые **Жорданом** в его “Cours d'analyse” (1882). Способы определения *точек перегиба* нашли впервые **Ферма** (1638), **Гюйгенс** (1654) и **де Слюз** (1668). В знаменитой статье **Лейбница** (1684) вместе с правилами дифференцирования приведены и способы различения максимума и минимума и нахождения точек перегиба.

Особые точки аналитической функции изучал впервые **Коши**, который писал: «Изучение особенных значений функций относится к самым важным и самым тонким вопросам анализа». В 1823 г. он уже выделил полюсы и ввел термин *изолированные* точки, в 1825 г. он сформулировал «теорему **Коши**» для прямоугольного контура о том, что интеграл зависит только от того, какие особые точки лежат внутри контура интегрирования (как известно, к этому времени **Гаусс** уже знал эти результаты и сообщил о них в письме **Бесселю**). Дальнейшее развитие теории связано с созданием исчисления вычетов (1826–1830). О существовании *существенно особых точек* **Вейерштрасс** знал в 1841 г., а **Лоран** — в 1843 г. Поведение функции в окрестности существенно особой точки было изучено **Юлианом Васильевичем Сохоцким** (в диссертации 1868 г.). Одновременно теорему доказал **Казоратти** (1868), затем — **Пикар** (1879). Названия wesentlich singuläre Stelle (*существенно особое место*), и несохранившееся unwesentlich singulären Stellen употреблял **Вейерштрасс** на лекциях, а в литературе они стали известны из работ его учеников — **Фукс** упомянул их впервые в 1868 г., публикация **Вейерштрасса** — 1876 г. Термин «Pol» встречается в издании **Карлом Нейманом** «Лекций о **Римановой** теории абелевых интегралов» (1865).

Классификация *особых точек дифференциального уравнения* введена **Пуанкаре** (статьи 1881–1886 гг.), мы следуем его терминологии: *узел* (noeud), *центр* (centre), *фокус* (foyer) и *седло* (col — «горное седло, перевал»). [198, II_2, с. 233]; [198, $\text{III}_{1.1}$, с. 323]; [198, $\text{III}_{2.1}$, с. 322]; [198, III_3, с. 5, 507]; [178]; [163, IV, с. 10]; [175, **11**, с. 274–278]; [77, с. 299]; [34, с. 145–146]; [170, с. 406,423].

ТРАЕКТОРИЯ

Термин образован от латинского trajectorius — «то, что относится к перемещению». Слово появилось у **Гюйгенса**, а также в письмах **И. Бернулли** к **Лейбницу** (1698), где обсуждалось нахождение ортогональных траекторий на плоскости. [187, **3**, с. 215]; [143, с. 17].

ТРАКТРИСА

Клод Перро в статье 1693 г. поставил задачу: найти ту кривую, по которой перемещается в горизонтальной плоскости точка, прикрепленная к концу нити, если другой конец перемещается по некоторой прямой, лежащей в той же плоскости. Это был брат автора знаменитых «сказок **Перро**»; пятеро братьев отличались интересом к самым разнообразным наукам и занятиям. **К. Перро** — известный архитектор, спроектировавший «колоннаду **Перро**» в Лувре, но, кроме того, он был врачом, натуралистом, физиком, конструктором, механиком, археологом и переводчиком.

Название *трактриса* совершенно оправдано: латинское traho означает «тащить»; tractrice — «тянущая»; трактриса — «линия влечения». Кривая была исследована **Лейбницем** и **Гюйгенсом** (1693). **Гюйгенс** обобщил задачу, полагая, что свободный конец нити перемещается по произвольной кривой. Так возникли понятия трактрисы окружности, параболы и т. д. [34, с. 308]; [138, с. 224].

ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Термин образован от латинского *transeo* (перехожу). Транзитивные подстановки впервые рассмотрел **Руффини** (1799). Название дано **Коши** (1845).

ТРАНСВЕРСАЛЬ

Термин образован от латинского *transversus* — «поперек лежащий, поперек идущий». Буквальное значение — «секущая, проходящая поперек».

ТРАНСПОЗИЦИЯ

Термин образован от латинского *transpono* (переставляю); от этого же корня происходит и слово *транспонирование.* Термин употреблялся уже **Коши** (1815). Однако в первых учебниках по теории определителей этого термина нет, он не принят в первой половине XIX в., даже в пособии 1915 г. (!) описание операции транспонирования абсолютно неудобопонимаемо. В книгах 1936 г. **Шпильрейн** объясняет, что «транспонированный» и «сопряженный» — одно и то же.

Эрмит (1855) обозначил через **А*** транспонированную матрицу из комплексно сопряженных элементов матрицы **А.** Если матрица — действительная, то **А*** — просто транспонированная, поэтому знак * зачастую стал означать транспонирование. Наряду с этим обозначением используются и $A^{т}$, A' и др. Обозначения обсуждаются до сих пор.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ

Слово употребил в 1686 г. **Лейбниц**, который разделил кривые на трансцендентные и алгебраические. Латинское *transcendere* означает «переходить, превосходить, преступать»; *трансцендентный* — превосходящий (мощность алгебраических методов — подразумевается).

На функции этот термин распространил **И. Бернулли** в 1724 г.

И, наконец, выражение *трансцендентные числа* ввел **Эйлер.**

Ламберт и **Лежандр** — непосредственные предшественники теории трансцендентных чисел, основания которой заложил в 1840 г. **Лиувилль.** Доказательство трансцендентности числа *e* принадлежит **Эрмиту** ("Sur la fonction exponentielle", 1873). **Линдеман** в статье "Uber die Zahl π" (1882) доказал, что π — трансцендентное число (и, таким образом, завершил решение задачи о квадратуре круга). Наконец, после решения в 1934 г. седьмой проблемы **Гильберта**, обобщающей предположение **Эйлера** относительно логарифмов рациональных чисел, теория оформилась в отдельную ветвь теории чисел, особенно благодаря работам **А. О. Гельфонда**, **К. Л. Зигеля** и **Т. Шнайдера**. [19, с. 92]; [64, XXV, с. 205].

ТРАПЕЦИЯ

В «Началах» **Евклида** этим термином назывались все четырехугольники, кроме квадрата, ромба и прямоугольника, а также и усеченная пирамида. Слово τραπεζων по-гречески означает «столик» (сравнить с нашей «трапезой»).

В современном смысле термин встречается впервые у древнегреческого математика **Посидония**. У **Прокла** этим словом названа только трапеция, а все прочие четырехугольники называются «трапециевидные» — τραπεζοειδης. [163, IV, с. 10]; [2, I, с. 64]; [65, 1, с. 227–228].

ТРЕУГОЛЬНИК АРИФМЕТИЧЕСКИЙ (ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ)

был известен в индийской математике во II в. до н. э., а затем встречался в китайских рукописях и в сочинении **ал-Каши**. **Тарталья** в "General Trattato" («Общий трактат о числе и мере», 1556) привел таблицу биномиальных коэффициентов в виде

$$
\begin{array}{llllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots \\
1 & 4 & 10 & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Арифметический треугольник есть у **Штифеля** (1543), **Стевина** (1625), **Эригона** (1634). Возможно, **Б. Паскаль** знал эти сочинения (что наверняка можно сказать о "Cours Mathematique" **Эригона**). **Паскаль** посвятил этому треугольнику специальный «Трактат об арифметическом треугольнике»; он был опубликован после смерти автора (1664). Сочинение стало широко известным; за треугольником закрепилось название, данное ему **Паскалем** — арифметический. Часто к нему добавляют имя **Паскаля**.

Треугольник египетский. С помощью натянутых веревок длиной 3, 4 и 5 единиц жрецы получали прямые углы при возведении храмов и т. п. Установлено время возникновения этого приема: в начале III тысячелетия до нашей эры была построена пирамида фараона Хеопса, в ней еще нет такого треугольника, а в ансамбле пирамиды его брата фараона Хефрена он уже имеется. Интересно, что в Индии для аналогичного построения использовались длины 5, 12, 13.

Треугольник характеристический. Этот треугольник рассматривали **Паскаль** и **Барроу**, их работы опубликованы соответственно в 1658 и в 1670 гг. Именно чертеж **Паскаля** с отмеченными dx, dy, ds привел **Лейбница** к изобретению дифференциального исчисления. **Лейбниц** говорил, что увидел здесь свет, которого не различил автор, и поэтому назвал треугольник *характеристическим* (1673–1676 гг). Правда, термин встречался также у **Паскаля и Снеллия** (1624). [65, 1, с. 301]; [23, с. 13]; [142, с. 131].

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Слово произведено от греческих τριγωνον (треугольник) и μετρεω (меряю). Буквальное значение — наука «об измерении треугольников». Термин впервые встречается в заглавии книги немецкого богослова и математика **Питискуса** "Trigonometria sive de solutione triangularum tractatus brevis et prespicuus" (1595). Наука же появилась в глубокой древности вместе с астрономией. От вавилонской астрономии ведет начало столь важное для тригонометрии деление окружности на 360 равных частей — градусов, каждого градуса — на 60 минут и т. д. Уже в древности астрономы ввели четыре сферические системы координат и правила перехода от одной системы к другой.

Ученые древней Греции унаследовали от египтян и вавилонян богатый запас астрономических фактов и вычислительных методов. Согласно легенде, в Египте **Фалес Милетский** познакомился с методом нахождения высоты шеста по его тени. Отношения величин, представляющие собой по существу тригонометрические соотношения, впервые встречаются в сочинении «О величинах и расстояниях Солнца и Луны» выдающегося астронома античного мира **Аристарха Самосского**.

Клавдий Птолемей, знаменитый астроном, создатель «системы **Птолемея**», составил для целей астрономии "Syntaxis Mathematica" (или "Almagest", как называли труд арабы). Первая книга «Альмагеста» посвящена тригонометрии и сферической тригонометрии. Эта тригонометрия (замечательно совершенная по форме) была фундаментом всей астрономической науки вплоть до **Коперника** (свергнувшего систему **Птолемея**). Однако греки никогда не помышляли о том, чтобы находить общие зависимости между углами и сторонами треугольников — любая задача сводилась к построению.

Одним из источников для развития тригонометрии явилась гномоника — наука о часах; основу конструкции солнечных часов составлял гномон — шест, укрепленный на горизонтальной площадке. С помощью гномона решались многие важные задачи. На Ближнем и Среднем Востоке служба времени была непосредственно связана с требованиями религии. Одно из них касалось точного определения времени пяти обязательных ежедневных молитв, другое — нахождения кыблы в каждом пункте (направления на Мекку), так как истинно верующий человек во время молитвы должен быть обращен к священному камню Кааба.

Обобщив достижения предшественников, арабские ученые развили тригонометрические методы и уже к XII в. фактически превратили тригонометрию в самостоятельную науку. В литературе на арабском языке появился новый жанр — зиджи — сборники астрономических и тригонометрических таблиц, дополненные правилами пользования и более или менее развернутыми доказательствами этих правил. Начало зиджам положил **ал-Фазари** (ум. ок. 800 г.). Тригонометрические разделы зиджей явились той основой, на которой была построена тригонометрия независимо от астрономии, что случилось в XIII столетии. Первое изложение тригонометрии дано **Нассир-Эддином**; он впервые отделил тригонометрию как науку от астрономии.

Первые таблицы хорд для различных центральных углов круга были составлены греческим астрономом и геометром **Гиппархом** (в середине II в. до н. э.); у **Птолемея** хорды выражались в долях диаметра, подразделенного на 12 частей (радиус чаще всего был равен 60). Чрезвычайно важный для развития тригонометрии шаг сделал **Абу-л-Вафа**, положив $R = 1$, он стал рассматривать тригонометрические линии в единичном круге и тем самым существенно облегчил вычисления. Это открытие совершалось много раз (например, **Оутред** в 1648 г. указывал, что радиус можно принять равным 1), однако только благодаря **Эйлеру** в тригонометрии раз и навсегда введено это соглашение.

Очень глубокое влияние на развитие тригонометрии как отдельной ветви математики оказал **Региомонтан** («Кенигсбергский»): его "De triangulis o libri quinque" («Пять книг о треугольниках всех видов», 1462–1464) — полное введение в тригонометрию, первый учебник тригонометрии. Здесь систематически изложен накопленный к тому времени материал, дополненный оригинальными доказательствами и примерами.

Новую эру открыл **Виет**. Он опубликовал книгу "Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus" (1579), содержащую замечательный вклад в тригонометрию. Здесь дано первое в Западной Европе систематическое изложение методов решения плоских и сферических треугольников с помощью всех шести тригонометрических функций. **Виет** первым применил алгебраические преобразования в тригонометрии (до того времени задачи тригонометрии были задачами на построение).

Наиболее употребительные формулы (в словесных формулировках, конечно) были установлены следующими математиками. Теорема синусов открыта **Брахмагуптой** в VII в., а затем **ал-Баттани** в IX в. Теорема косинусов доказана **ал-Бируни** (X в.) и вновь открыта **Виетом**; в конце XVI в. **Финке** и **Виет** сформулировали теорему котангенсов. **Виет** вывел также формулы для $\sin na$, $\cos na$ при $n < 10$. Выражения для $\sin 2a$, $\cos 2a$ привел **Абу-л-Вафа**, а для $\operatorname{tg} 2a$ — только **Роберваль**. Формулы, выражающие $\sin 2a$, $\cos 2a$ через $\operatorname{tg} a$, получены **Ламбертом** (1765).

Большие преобразования в тригонометрии произвел **Эйлер**. Он первый определил тригонометрические функции. (А как можно решить дифференциальное уравнение $y'' + y' = 0$, не имея функций $y = \sin x$, $y = \cos x$?) Благодаря ему утвердились современные обозначения A, B, C — для углов треугольника и a, b, c — для противолежащих сторон, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$; только **Эйлер** внес ясность относительно знаков тригонометрических функций в различных четвертях, дал формулы приведения.

На основе работ **Эйлера** по тригонометрии в России было составлено выдающееся по своим достоинствам руководство его ученика, племянника **Ломоносова**, **М. Е. Головина** «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами» (СПб, 1789).

Исторически плоская тригонометрия развилась позднее сферической, которая составляла вспомогательный раздел астрономии. [65, I, с. 101, 317–320]; [143, с. 87]; [185, I, с. 208–212]; [159, с. 48]; [183]; [34, с. 345–375]; [103].

ТРИЕДР

Слово состоит из греческих τρεις (три) и ἕδρα (основание). Буквально оно значит «фигура с тремя основаниями». **Эйлер** в «Механике» ввел понятие *сопровождающего триедра* линии. (1736) Этот метод в основном развит **Дарбу**, в сочинении которого "Leçons sur la théorie générale des surfaces" подвижный триедр (trièdre mobile) играет основную роль.

ТРИСЕКЦИЯ

Одна из трех знаменитых задач древности о трисекции угла возникла в Греции в V в. до н. э. В древнегреческой математике, начиная с **Паппа**, употреблялось слово τριχοτομειν (операция деления какого-нибудь угла на три части). Термин *трисекция* составлен из латинских tri, что в сложных словах означает «три» и seco — «разрезание, рассечение». В Средние века по аналогии с термином «квадратриса» было образовано слово *трисектриса*. Строгое доказательство невозможности разделить произвольный угол на три равные части с помощью циркуля и линейки (так же как и делосской задачи) дал в 1837 г. французский инженер и математик **Ванцель**.

Одна из самых неожиданных теорем элементарной геометрии была открыта в 1899 г. **Ф. Морли**: три точки пересечения смежных трисектрис произвольного треугольника образуют равносторонний треугольник. Полагают, что теорема не была обнаружена до XX в. потому, что «люди чувствовали известную неловкость при упоминании о трисекции угла». [82, с. 43–44, 51].

У

УГОЛ

Понятие угла было уже с давних времен введено в греческую математику, оно, несомненно, перешло от вавилонян, искушенных в употреблении углов, благодаря своему большому астрономическому опыту. Но определение угла (у **Евклида**, например) было тавтологией: «угол — это наклон между двумя пересекающимися прямыми».

У греческих и у всех европейских геометров до XVII в. рассматривались только углы, меньшие двух прямых. Только **Эйлер** ввел современное понятие угла (измеренного в радианах), принимающего произвольные значения — положительные и отрицательные. Вспомогательные углы использовали в тригонометрии **Ибн Юниус** (990), **Симпсон** (1748).

Прямой угол обозначается буквой d от французского droit (прямой). Знак $<$ для обозначения угла ввел **Эригон** (1634). А в Англии **С. Уорд** ввел знак $\angle$, и $\angle\angle$ для множественного числа в «Очерке тригонометрии, изложенной для употребления юношества» (“Idea trigonometriae demonstratae in usem juventutis”, 1654). Обозначение было повторено спустя три года в «Тригонометрии» **Оутреда** и благодаря этому принято другими авторами. **Эригон** отметил перпендикулярность прямых знаком $\perp$. Обозначение $\widehat{a, b}$ для угла, образованного прямыми a и b, применили впервые **Бине** (1813), **Мёбиус** (1827) и **Фаваро** (1879). Отмечать точкой прямой угол $\llcorner\!\bullet$ стал **Э. Мах** («Пространство и геометрия», 1906). [19, с. 122]; [198, $\mathrm{III}_{1.1}$, с. 25]; [185, I, с. 400, 415].

УГОЛ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

И понятие, и название были введены **Н. И. Лобачевским** уже в самом первом исследовании (1826), где угол параллелизма к прямой p обозначен через p'. В его «Геометрических исследованиях» (1840), по которым Европа ознакомилась с идеями неевклидовой геометрии, было введено обозначение $\Pi(p)$, которое **Бельтрами** сохранил, чуть-чуть изменив его: $\Pi(z)$, где z — расстояние по нормали.

УГЛЫ ЭЙЛЕРА

Эйлер ввел в рассмотрение эти углы при выводе формул преобразования одной прямоугольной системы координат в пространстве в другую («Введение в анализ бесконечных», 1748). К этим формулам он возвращался еще в 1770, 1775 гг. В мемуаре 1779 г. **Эйлер**, кроме неподвижных осей, ввел и подвижные (здесь же понятие угловой скорости).

УЛИТКА ПАСКАЛЯ

Кривая, по-видимому, была изобретена **Этьеном Паскалем** (отцом **Блеза Паскаля**), в честь которого и получила название, предложенное **Робервалем**.

УРАВНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ

Термин впервые употребил **Лейбниц** в письме к **Ньютону** (1676), а затем — в печати (с 1684 г.). После того как **Ньютон** открыл биномиальное разложение, а с его помощью — ряды для элементарных функций, он мог найти решение любого дифференциального уравнения. Приемы решения уравнений в квадратурах **Ньютон** почти не развил. При этом **Ньютон** имел четкое представление о том, что можно получить бесконечно много решений одного и того же дифференциального уравнения, но запись общего решения с произвольной постоянной впервые встречается у **И. Бернулли**. В руководстве на русском языке от 1869 г. *уравнениям в частных дифференциалах* противопоставляются *обыкновенные*. По-видимому, термин *обыкновенное уравнение* становится привычным только в конце XIX в.

Первым общим приемом интегрирования дифференциальных уравнений явилось, естественно, разделение переменных. Такие уравнения исследовал **Лейбниц** и его ученики. Название aequatio separata, а также *разделение переменных* — separatio variabilium — по-видимому, ввел **Эйлер**, ему же принадлежит термин «*порядок уравнения*», который он ввел словами aequationis primi gradus, т. е. «уравнения первой ступени (или степени)» в 1763 г. Метод решения *однородных уравнений* (первого порядка) подстановкой $y = ux$ открыл **Иоганн Бернулли** (1695), хотя эта подстановка была известна **Лейбницу**. Однако опубликовал этот метод впервые профессор в Болонье **Г. Манфреди** (1714). Метод решения *линейных уравнений* заменой $y = uv$ изобрел **Якоб Бернулли** (1695), он же решил *уравнение* **Бернулли**, сведя его к линейному. Последний метод открыли также **Лейбниц** (1696) и **И. Бернулли** (1697). **Я. Бернулли** принадлежит также идея *понижения порядка* уравнения введением параметра p. Его работа не была опубликована своевременно и этот же прием для случая $F(y, y', y'') = 0$ открыл и первым опубликовал **Джакопо Риккати** (1712).

Относительно *уравнений в полных дифференциалах* можно сказать, что они полностью исследованы **Эйлером** и **Клеро**. *Интегрирующий множитель* в отдельных случаях применил **И. Бернулли** (1691); метод вновь открыли одновременно **Клеро** и **Эйлер** (1739–1740). **Эйлер** установил классы дифференциальных уравнений, обладающих интегрирующим множителем и распространил понятие на уравнения n-го порядка. **Клеро** дал определение *полного дифференциала* и ввел этот термин. **Эйлер** опубликовал условие, при котором выражение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

является полным дифференциалом (1740).

Уравнение **Риккати**. Самое раннее упоминание уравнения типа **Риккати** встречается в статье **И. Бернулли** (1694), который привел это уравнение, признав, что не решил его. В течение нескольких лет (1697–1704) **Я. Бернулли** упоминает о попытках решить уравнение $dy = yy\,dx + xx\,dx$. В конце концов он нашел решение в виде ряда.

В 1724 г. граф **Дж. Риккати** решил уравнение $y' + ay^2 = bx^m$ и опубликовал анаграмму «Решение проблемы, предложенное **Риккати**, записанное тайными знаками:...» ("Solutio problematis ab Ill. **Riccato** proposito characteribus occultis involuta $24a, 6b, 6c, 8d, \ldots, +, -, \underline{\quad\quad}, \pm, =, 4, 2, 1$"). Статья **Риккати** была сопровождена заметкой **Даниила Бернулли**, который подтверждал, что до сих пор задача считалась неразрешимой. Через год **Д. Бернулли** опубликовал найденное им решение, доказав тем самым, что это более легкая задача, чем разгадка анаграммы. Уже в переписке **Бернулли** употреблялось название *уравнение* **Риккати**. Большое значение, которое **Д. Бернулли** придавал работе **Риккати**, привело к тому, что имя **Риккати** было присвоено уравнениям более общего вида. Это название окончательно узаконено по предложению **Д'Аламбера** (1763). **Лиувилль** доказал невозможность решения общего уравнения **Риккати** в квадратурах.

С уравнения **Риккати** начинается методическая разработка теории дифференциальных уравнений.

Геометрическая теория дифференциальных уравнений получила развитие главным образом в трудах **Монжа**.

Эйлер обладал методом решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (*методом* **Эйлера**) в 1739 г., а опубликовал его в 1743 г.; здесь он впервые ввел понятия *частного и общего интегралов*. **Лагранж** доказал, что $\Sigma C_i y_i$ — общее решение линейного однородного уравнения. **Д'Аламбер** установил, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и некоторого частного неоднородного (1766).

Интегрируя линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, **Эйлер** пришел к мысли искать решение в виде определенного интеграла $\int\limits_a^b e^{xt} f(t)\,dt$, развивая эту идею, **Лаплас** пришел к одному из первых примеров *преобразования* **Лапласа** (1782).

Метод вариации произвольных постоянных разработан **Эйлером** (1739) и **Лагранжем** (1775). В 1768 г. **Эйлер** опубликовал *метод ломаных* **Эйлера**, придуманный им пятью годами раньше.

В 1885 г. **Владимир Павлович Максимович**, первый ректор Киевского университета, доказал невозможность решения в квадратурах общего дифференциального линейного уравнения 2-го порядка.

Метод интегрирования систем уравнений (линейных однородных с постоянными коэффициентами) начали создавать **Д'Аламбер** (1743), **Эйлер** (1743), **Лагранж** (1762). Уже **Д'Аламбер** заметил структуру общего решения уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами; при этом упор был на число произвольных постоянных, понятия о линейной независимости частных решений не было до середины XIX в. К тому же изложение этого раздела оставалось довольно долго невразумительным. Так, в «Лекциях» **Н. И. Алексеева**, читанных в Варшавском университете в 1873/74 гг. (изданных в 1878 г.), в одном абзаце приведены все необходимые понятия, теоремы в терминах различных теорий. *Метод последовательных приближений* **Коши** употребил лишь как вспомогательное средство приближенного представления решения, а не для доказательства существования его (1835).

Либри (известный замечательными авантюрами) впервые указал на аналогию между алгебраическими и дифференциальными линейными уравнениями: подобно тому как коэффициенты алгебраического уравнения могут быть выражены через его корни симметричными функциями, коэффициенты дифференциального уравнения являются симметричными функциями его частных решений. Эта аналогия играла важную роль в развитии теории в течение всего XIX в. **Лагранж**, **Д'Аламбер**, **Либри**, **Лиувилль**, **Брассин** развили теорию линейных уравнений. Это направление было продолжено **Фробениусом** и **Томе**. Мемуар берлинского математика **Лазара Фукса** "Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veranderlichen Coefficienten" (1866, 1868) стал основой теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. С легкой руки **Пикара** эта статья упоминается не иначе как с определением «классическая». В русской литературе употреблялись до конца XIX в. термины «основная система интегралов», «основное уравнение» (т. е. точный перевод выражений **Фукса** fundamental Systeme, fundamentale Gleichung, от которых в нашей терминологии осталась *фундаментальная система решений*).

Отличительная черта теории дифференциальных уравнений первой половины XIX в. — решение начальной задачи и доказательство существования частного решения — такая постановка задачи принадлежит **Коши**. Отсюда — возросшая роль приближенных методов и представления решения степенным рядом (что связано также с интересом **Коши** к ТФКП — к 1835 г. относится выход теории дифференциальных уравнений в комплексную область).

В конце XIX в. появились качественные исследования решений дифференциальных уравнений. Теория создана в основном **Пуанкаре** (с 1878 г.) и **Ляпуновым** (первая статья по теории устойчивости — 1888). [167, с. 433]; [198, II_1, с. 236, 241]; [28, с. 10].

УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Первое такое уравнение рассмотрел **Тейлор**, решая задачу о малых колебаниях струны (1715), которая затем занимала виднейших математиков мира.

Лидером в изучении уравнений в частных производных был **Д'Аламбер**, он изучал движение и равновесие жидкостей и привел известное решение — формулу **Д'Аламбера** (1744–1747 гг.)

Даниил Бернулли показал, что уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

удовлетворяется рядом

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \frac{\pi t}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot \cos \frac{2\pi t}{l} + \ldots$$

и считал, что это — общее решение. **Эйлер** не признавал его общность. Таким образом, **Д. Бернулли** первым ввел *ряд* **Фурье** в математическую физику (1753).

В работах 70-х гг. XVIII в. **Лагранж** разработал общую теорию дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для случая трех переменных, установил взаимоотношения между различными видами решений уравнений первого порядка и ввел современную терминологию. Ему принадлежат термины *полный интеграл*, *общий интеграл*, *особое решение*. **Коши** распространил теорию на случай n переменных (1819).

Уравнение **Лапласа** впервые рассмотрел **Эйлер**. **Лаплас** сначала получил уравнение в полярных координатах (1782), а через пять лет — в декартовых. Преобразование уравнения к произвольным криволинейным координатам дал **Ламе** (1834).

Принятое обозначение $\Delta U = 0$ постепенно выделилось из десятка бывших в ходу, а именно: **Фурье** записывал уравнение в виде $DU = 0$, **Пуассон** — в виде $\delta U = 0$, **Ламе** писал $\Delta_2 U = 0$, **Бетти** — $\Delta^2 U = 0$, **Гиббс** и **Тэт** употребляли обозначение $\nabla^2 U = 0$ и т. д. Обозначение $\Delta U = 0$ ввел английский математик **Роберт Мерфи** в первой половине XIX в.

Фурье предложил технику разделения переменных в 1807 г. Он также рассмотрел наряду с уравнением колебания струны аналогичные задачи для $U = U(x, y, t)$, $U = U(x, y, z, t)$, а также вывел уравнение теплопроводности. Из его работ выросло мнение, что соответствующих начальных и краевых условий достаточно для получения единственного решения задачи. Первый пример некорректно поставленной задачи предложил **Адамар** на математической конференции 1917 г.

Первую классификацию уравнений второго порядка с частными производными попытался провести **Монж** при создании своего метода характеристик (1795–1801). Современное разделение на *эллиптический*, *гиперболический*, *параболический* типы предложил **Дюбуа Раймон** (1889); он же ввел деление гиперболических уравнений на *задачи первого рода* и *второго рода*. [167, с. 433–445]; [198, II_1, с. 467–510]; [208, с. 111]; [66, I, с. 245]; [64, VII, с. 606].

УРАВНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ

Первое интегральное уравнение рассмотрел **Фурье** (1822). **Абель**, решая задачу об обобщении таутохроны, получил уравнение

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^a}, \quad 0 < a < 1, \quad g(0) = 0$$

и нашел его решение (1826).

Математики XIX в. приходили к отдельным интегральным уравнениям, например, при обращении преобразования **Лапласа**. Однако создание общей теории начинается только работами **Вито Вольтерры**. В серии статей 1884–1896 гг. он развил общий метод, который явился затем основой работ **Фредгольма** и **Гильберта**. Сначала **Вольтерра** рассматривал уравнение первого рода, затем он сконцентрировал внимание на уравнении второго рода

$$\varphi(x) = U(x) + \int_0^x K(x,s)U(s)\,ds.$$

К 1898 г. теория *интегральных уравнений* **Вольтерры** была построена в таком виде, в каком она излагается в современных учебниках.

Шведский математик **Ивар Фредгольм** исследовал уравнение

$$\varphi(x) + \int_0^1 N(x,s)\varphi(s)\,ds = F(x),$$

которое он называл equation fonctionelle abelienne («абелево функциональное уравнение»). Парижская академия наук в 1908 г. присудила **Фредгольму** за работы 1900–1903 гг. по интегральным уравнениям премию **Понселе**.

Теорию интегральных уравнений существенно развил **Гильберт**. Результаты, изложенные им сначала на семинарах и лекциях, составили 6 статей (1904–1910), которые впоследствии были изданы отдельной книгой "Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linear Integralgleichungen" (1912). Можно проследить, как менялся подход **Гильберта**: в первых трех статьях его методы еще «традиционны» — он сводит интегральное уравнение к бесконечной системе линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Такой подход восходит к **Фурье** (1822), который, видимо, впервые рассматривал бесконечную систему линейных уравнений и метод которого, вообще говоря, не строг. **Рисс** (1913) полагал, что этот пример **Фурье** был забыт. Без ссылок на **Фурье** такую систему рассматривал **Фюрстенау** (1860), а более общий случай — **Коттерич** (1870). Существенное развитие теории наступило около 1900 г. — при решении задач небесной механики **Хилл** ввел бесконечные детерминанты (1886), за ним последовали **Пуанкаре** (1886), **фон Кох** (1891). Наконец, начиная с четвертого сообщения (1906), **Гильберт** развивает теорию бесконечных квадратичных форм, изучает соотношение между преобразованием $K(x, y)$ и его спектром $\sigma(\mathrm{K})$. В школе **Гильберта** был создан привычный для нас язык: *спектр*, *точечный спектр*, *непрерывный спектр*, хотя некоторые понятия и результаты были получены уже раньше, например, **Пинкерле** установил, что некоторые классы операторов могут иметь непрерывный спектр.

Пуанкаре ввел параметр λ в интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = \psi(x)$$

и изучал свойства его решений как функции λ.

Название *интегральное уравнение* впервые употребил **Дюбуа Раймон** (1888), затем **Гильберт**, а затем **Пикар** добавил к названиям имя **Вольтерры**. **Гильберт** же ввел классификацию — *уравнения первого и второго рода* (1904). В начале века вводятся термины *ядро*, *спектр*, *собственное значение* и др.

Принципиально новый этап развития теории начат работами **Джона фон Неймана**, который, в частности, применил теорию к квантовой механике. [177, с. 345–390]; [186, с. 393]; [198, $\mathrm{II}_{3.2}$, с. 1349]; [175, **3**, с. 3–29]; [175, **4**, с. 327–333]; [215, с. 7–13].

УРАВНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЕ

Это название для дифференциального уравнения в частных производных ввел **Якоби**. Слово *каноническое* образовано от греческого κανονιχος, что означает «составленный по правилам, нормальный». Слово κανον, в свою очередь, означало в прямом смысле «палка», а затем — «инструмент для проведения прямых линий» и, наконец, — «предписание, правило».

УРАВНЕНИЕ КВАДРАТНОЕ

Впервые это название было употреблено **Хр. Вольфом** (1710) и быстро распространилось по Европе в течение XVIII в. Первые решения квадратных уравнений — в арабской математике — носят геометрический характер и не оторваны от античной почвы. Затем в работах европейских математиков создаются отдельные методы для решения различных форм квадратных уравнений. Знаменитый **Ал-Хорезми** дает описание шести различных алгоритмов, которые в совокупности исчерпывают задачу решения квадратного уравнения. Слияние этих методов в общее правило произвел **Штифель** (1544). Он дал «рецепт» решения без доказательства и без объяснений, для всех видов квадратных уравнений с действительными и даже отрицательными корнями. Более современное оформление учение о решении квадратных уравнений приняло у **Бомбелли** (1572) и у **Стевина** (1585); появилось доказательство и был рассмотрен случай мнимых корней. [226, III, с. 101]; [65, I, с. 298–299]; [2, III, с. 283].

УРАВНЕНИЕ КЛЕРО

Клеро решил уравнение $y = (x+1)y' - (y')^2$, носящее его имя, в 1734 г.; после чего **Д'Аламбер** нашел особое решение уравнения $y = x\varphi(y') + \Psi(y')$

(1748–1750). Однажды такое уравнение было проинтегрировано **И. Бернулли** в 1694 г.

УРАВНЕНИЕ КУБИЧЕСКОЕ

Первые попытки решения кубических уравнений относятся к глубокой древности, к кубическим уравнениям сводятся делосская задача и задача и трисекции угла. Однако в математике древности кубические уравнения появлялись лишь эпизодически. Большой материал накопили математики стран ислама. Систематизировал этот материал **Омар Хайям**.

Строгое доказательство того, что знаменитые задачи древности не могут быть решены с помощью циркуля и линейки, было получено **Ванцелем** (1837).

Первое решение одного из видов кубического уравнения ($x^3+ax=b$) удалось найти профессору Болонского университета **дель Ферро**. **Тарталья** вновь открыл метод решения таких уравнений и изобрел правило для решения уравнений другого вида (1535). Эти правила у **Тартальи** выпросил **Кардано**, поклявшись не публиковать их (1539). Через шесть лет **Кардано** обнародовал решения, правда, упомянув об авторстве **Тартальи**, в труде "Ars Magna sive de regulis algebraicis" («Великое искусство или об алгебраических правилах», 1545).

Тригонометрическое решение кубического уравнения в неприводимом случае впервые дал **Виет** в Supplementum Geometriae (1593).

Название *кубическое уравнение* впервые употребили **Декарт** (1619) и **Оутред** (1631). **Декарт** и **Ньютон** рекомендовали каноническую запись уравнения: все члены перенести налево. **Лагранж** обозначил корни уравнения через x_1, x_2, x_3. [226, III, с. 145].

УРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЕ

Впервые такое название для алгебраических уравнений — *égalité linéaire* — встречается у **Престе** (1675). Способ **Гаусса** решения систем линейных алгебраических уравнений дан им в Theoria Combinationis, Supplementum (1823–1827); подробно способ описан **Энке** (1835, 1836). Стандартный ныне метод сформировался в статьях **Якоби** и лекциях **Кронекера**, опубликован **Бальцером** (1864) и стал общепринятым.

УРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ

Соответствующее уравнение, возникающее при преобразовании квадратичных форм и в небесной механике, восходит к **Лагранжу** и **Лапласу**, которые употребляли название «вековое уравнение». **Лагранж** дал это название, напоминающее о первом появлении уравнения. Термин впервые употребил **Лейбниц** в письме к **Ньютону** (1676), а затем в печати (1684). Это же уравнение встречалось также у **Ашетта** (1812) в задаче о главных осях конических сечений. Поэтому еще и в 1905 г. наряду с многими терминами фигурирует «уравнение задачи о главных осях поверхностей второго порядка». (Например, терминология Штаудта: Gleichung des Hauptachsen Problems der Flachen 2. Ordnung.)

В виде детерминанта

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

уравнение появляется у **Коши** (1826); в других работах **Коши** пишет λ или r вместо буквы ρ. Соответствующее уравнение в косоугольных координатах впервые получил **Бине** (1813), позднее **Якоби** (1827), **Плюккер** (1846).

В теории линейных дифференциальных уравнений **Фукс** (1866) употреблял термин «фундаментальное уравнение» (что гармонирует с «фундаментальной системой решений»). Названия «характеристическая функция» для $\Delta(\rho)$ и *характеристическое уравнение* для $\Delta(\rho) = 0$ ввел **Фробениус** (ок. 1896).

В русских пособиях до конца XIX в. алгебраическое уравнение, которое получается при решении дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, называлось «вспомогательное уравнение». Но в то же время в курсе **Николая Ивановича Алексеева** «Интегрирование дифференциальных уравнений» мы встречаем и *характеристическое уравнение*. [198, $\mathrm{II}_{2.1}$, с. 175]; [198, I_1, с. 42]; [65, **3**, с. 69].

УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА

Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц впервые ввел условие

$$|f(x) - f(\xi)| \leqslant A|\xi - x|^n$$

в статье 1864 г. Оно получило широкое распространение в математике, особенно после повторения в статье 1876 г., а затем в учебнике «Lehrbuch der Analyse» (1880). Интересно, что при этом **Липшицу** понадобился знак модуля (которого тогда не было в математике), и он изобрел обозначение, очень близкое к нынешнему: [ ]. [198, II_1, с. 194].

УСЛОВИЯ Д'АЛАМБЕРА—ЭЙЛЕРА (КОШИ—РИМАНА)

Соответствующие уравнения встречаются впервые в исследованиях **Д'Аламбера** (1746, 1752) и **Эйлера** (1755). **Д'Аламбер** показал ("Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides", 1752) что это условия формальной дифференцируемости функции комплексной переменной. В работе "De repraesentatione supperficiei sphaericae super plano" (написанной в 1777 г. и опубликованной в 1794 г.), связанной с картографическими исследованиями **Эйлера**, он ввел понятие конформного отображения и показал, что это — условия конформности отображения (нестрого, конечно). Обсуждение вопроса дифференцируемости функции продолжалось вплоть до XX в.: **Пеано** спорил с **Кенигсбергером**, который считал, что необходимые и достаточные условия дифференцируемости это $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$ (Theorie der elliptischen Functionen, 1874).

Соотношения много раз встречаются у **Коши**. Он долго не мог решить, каким именно условиям должны удовлетворять функции, рассматриваемые в теории комплексных переменных; только к концу жизни он выделил класс аналитических функций. Эти равенства появились в первой большой статье **Римана** "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grosse" (1851) и сразу же приобрели то значение, которое они имеют в современной теории. Условия, которые мелькали до него как незначительные и несущественные, **Риман** положил в основу определения аналитической функции и построения теории. Он установил геометрический смысл их как условий конформности отображения и их роль в геометрии и математической физике. [8, с. 109]; [64, VII, с. 482].

УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

Впервые **Дирихле** ответил на вопрос, какова именно «произвольная» функция, представимая рядом **Фурье**, сформулировав условия, носящие его имя (1829). Дальнейшее изучение этих проблем вызвало исследования интегрируемости функций, что привело к интегралу **Римана** (1854), затем и **Лебега** (1904), к теории меры и т. д. Другое направление подвело к теории множеств **Г. Кантора**. Продолжены и исследования проблем ряда **Фурье**. Название *условие* **Дирихле** ввел **Дюбуа Раймон** (1875), о чем он с явным удовольствием сообщает в книге «К истории тригонометрических рядов» (Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, 1880).

УСТОЙЧИВОСТЬ

Диссертация **Александра Михайловича Ляпунова** (1885) «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» сделала его имя известным в научном мире Европы; в "Bulletin Astronomique" сразу же появилось краткое содержание ее. С 1888 по 1902 гг. **Ляпунов** публиковал цикл работ об устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы — проблема была рассмотрена с исключительной глубиной и точностью. Его ученик **Стеклов** оценил полное решение задачи об устойчивости: «Работу, совершенную Александром Михайловичем, нельзя назвать иначе, как подвиг».

Работами **Ляпунова** и **Пуанкаре** была создана качественная теория дифференциальных уравнений. В серии работ **Пуанкаре** (начатых в 1878 г.) **Ляпунов** нашел единственную попытку строгого решения проблемы устойчивости для некоторых систем; это **Ляпунов** отметил в своей диссертации. [168, с. 447, 458].

Ф

ФАЗА

Греческое $\varphi\alpha\sigma\iota\varsigma$ означает «появление».

ФАКТОРИАЛ

Название происходит от слова *factor* (множитель). Термин *factorielle* ввел **Арбогаст** (1800). Обозначение $n!$ встречается впервые у **Крампа** (1808). Наряду с этим обозначением в XIX в. употребляются и многочисленные другие, чаще всего $\Pi(n)$ или Π_n (**Гаусс**, **Якоби**, **Вебер**) и $\underline{\lfloor n}$ — в английской математической литературе. В 1916 г. Совет Лондонского математического общества рекомендовал в "Suggestion for Notation and Printing" принять знак $n!$ (при этом было предложено читать его «n-восхищение»). [185, **1**, с. 341–342]; [226, II, с. 40]; [185, II. с. 71–77].

ФИГУРА

Латинское *figura* означает «образ, внешний вид, начертание». Этот термин вошел в употребление с XII в. До этого наряду с ним был принят термин «форма», который тоже означает «наружный вид, внешнее очертание предмета». В русском языке слово появилось в 90-е гг. XVII в.

ФОКУС

Фокусы эллипса и гиперболы и их основные свойства открыл **Аполлоний**; фокус параболы был неизвестен до **Паппа**.

Латинское focus означает «очаг, огонь». Термин ввел в науку **Кеплер**. В его «Оптической астрономии» ("Ad Vitellionem Paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur", 1604) слово focus появляется как буквальный перевод арабского термина «место зажигания» для фокуса параболы, а параболу арабы называли «зажигательным зеркалом». Однако **Кеплер** распространил этот термин и на фокусы гиперболы, эллипса. **Дезарг** называл фокусы points brulans, foyers. В немецкой литературе и в начале XX в. употреблялось название Brennpunkten. [198, $\mathrm{III}_{2.1}$, с. 8–9]; [64, XVI, с. 275].

ФОРМА КВАДРАТИЧНАЯ

Вероятно, первые квадратичные формы появились у **Ферма** в его великих открытиях о простых числах. Он обнаружил красивые закономерности: простые числа определенных видов возможно представить формами $x^2 + y^2$, $x^2 \pm 2y^2$, $x^2 + 3y^2$, $x^2 + xy + y^2$. Через 70 лет исследования **Ферма** были продолжены **Эйлером**. Со времен **Эйлера** изучение квадратичных форм и структуры множества представимых ими чисел и их делителей было в центре внимания крупнейших математиков XVIII–XIX вв. **Гаусс** получил условие положительной определенности квадратичной формы, эквивалентное установленному позже критерию **Сильвестра**.

Теория квадратичных форм изложена впервые в учебнике **Лежандра** "Essai d'une théorie des nombres" (1798). **Лежандр** не вводит для них никакого специального названия, например, его «сведение формулы $Ly^2 + Myz + Nz^2$ к более простому выражению» означает, конечно, «приведение квадратичной формы к каноническому виду».

В 1801 г. была опубликована работа "Disquisitiones Arithmeticae" **Гаусса**, которая затмила и оставила далеко позади труд **Лежандра**. Здесь был введен термин *квадратичная форма*, произведено разделение на *бинарные*, *тернарные* и т. д. формы, введены понятия *собственной* и *несобственной эквивалентности*, *рода формы*, *примитивной формы*, *противоположной формы*. *Приведенная форма* — термин **Лагранжа**. Теория квадратичных форм разрабатывалась затем **Минковским**, **Смитом**, **Коркиным**, **Золотаревым**, **Вороным** и др. Теорию квадратичных форм с бесконечным числом переменных развил и дал ее приложение к теории интегральных уравнений **Гильберт** в серии мемуаров (1904–1910). [208, с. 15]; [34, с. 89–94]; [20, с. 126].

ФОРМУЛА

Вначале термин имел геометрическое содержание, его корень — *forma*. Термин означает «норма, масштаб, схема, образец, правило, по которому что-либо делают». [226, II, с. 70].

ФОРМУЛА ГАУССА—ОСТРОГРАДСКОГО И ФОРМУЛА СТОКСА

Карл Гаусс в работах 1813 и 1830 гг. произвел преобразования тройного интеграла к поверхностному и поверхностного к криволинейному не в общем виде, а для рассматриваемых конкретных задач. Однако все выкладки проведены так детально и с такой геометрической отчетливостью, что обобщение их не представляло труда. В общем виде формулы выведены **Остроградским** (1826) и **Стоксом** (1854).

Соотношение между тройным и поверхностным интегралами было известно **Пуассону** (с 1828 г.), он прибегал к такому преобразованию многократно, проводя выкладки каждый раз заново и не пользуясь соотношением как формулой. Формула была переоткрыта **Кронекером** (1869) и **Максвеллом** (1873). Во втором издании “Treatise” **Максвелла** (1881) отмечен приоритет **Остроградского**, по-видимому, впервые. [149, **17**, с. 232–268]; [1].

ФОРМУЛА ГЕРОНА

В работах **Герона** (I в. н. э.), которые представляют собой сводку примеров и рецептов для вычислений, содержится и эта формула, по-видимому, принадлежащая **Архимеду**.

ФОРМУЛА КОШИ

В мемуаре 1831 г. **Коши** привел так называемую интегральную формулу для функции комплексной переменной. **Коши** пытался распространить формулу и на случай многих переменных. Дальнейшие обобщения принадлежат **Пуанкаре** (1883, 1887).

ФОРМУЛА МУАВРА

Впервые в несколько измененном виде формулу получил **Муавр** (статья 1707 г., затем “Miscelanea analytica”, 1730). **Муавр** — английский математик, семья которого бежала в Англию из Франции из-за преследования гугенотов. Говорят, что на многие вопросы **Ньютон** отвечал: «Спросите у **Муавра**, он это знает лучше меня». Независимо от **Муавра** формулу открыл итальянский ученый — граф **Джулио Фаньяно де Фаньяни** (1738). В современном виде формулу представил **Эйлер** во «Введении в анализ» (1748). [34, с. 24]; [102, с. 9, 17].

ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Задача суммирования бесконечно малых возникла почти одновременно с задачей проведения касательных и вначале никак не была связана с нею.

Связь между задачей о «квадратуре» и задачей «об обращении касательной» стала ясна лишь **Ньютону** и **Лейбницу**. Опубликовано утверждение в виде, несколько отличном от принятого ныне, **Исааком Барроу**, учителем **Ньютона**. Доказательство современных учебников

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

принадлежит **Лакруа**. Однако еще в 1880 г. была опубликована статья **Дюбуа Раймона** с доказательством формулы. [107, с. 171].

ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Формула $n! = \sqrt{2\pi n}\cdot e^{-n}\cdot n^n$ была опубликована автором в "Methodus differentialis" (1730). Через 50 лет версию этой формулы получил **Лаплас** (с помощью преобразования **Лапласа**). Однако и до публикации **Стирлинга** формулу знал **Муавр**. [198, $\mathrm{II}_{3.1}$, с. 42].

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Это соотношение, правда, в менее удобном и изящном виде, а именно в форме $xi = \log_e(\cos x + i\sin x)$ было опубликовано в посмертной работе **Коутса** «Гармония мер» (1722) — на двадцать лет раньше публикации **Эйлера**; этот результат **Коутс** открыл в 1714 г. **Эйлер** сообщил формулу в письме к **Гольдбаху** (1741). В следующем году он утверждал в статье, что функции $y = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ и $y = 2\cos x$ обе являются решением уравнения $y'' + y = 0$ и поэтому равны. Он привел формулу в «Введении в анализ бесконечных» (1748). По крайней мере сначала он рассматривал свое открытие как парадокс. Да и век спустя **Б. Пирс** окончил вывод формулы перед студентами такими словами: «Джентльмены, это, наверное, правда, но она абсолютно парадоксальна; мы не можем понять ее и мы не знаем, что она значит, но мы доказали ее и поэтому мы знаем, что она должна быть достоверной». [102, с. 18]; [34, с. 24]; [82, с. 214, 215].

ФУНКЦИОНАЛ

При первом появлении функционалов в математике было только отмечено, что это «особые функции» (конец XVII в., задачи вариационного исчисления). Через два века **Асколи** и **Арцела** попытались изучать множества, элементами которых были функции или кривые (1884, 1889). Первое систематическое обсуждение функционалов опубликовал **Вольтерра** в пяти заметках (1887). Он был учеником **Дини**, одного из лидеров нового строгого анализа. Понятие функционала введено в отчетливой форме **Вольтеррой**, употреблявшим название «функции линии» или «функции от функции» (funzioni dipendenti da altra funzioni, 1887), он определил также понятие непрерывности для функционалов.

Вольтерра обозначил функционал символом $U\left|\left[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]\right|$ (1886); в дальнейшем запись была упрощена до современного $U[x(t)]$.

Вольтерра и **Пинкерле** первые заметили, что в математике развивается совершенно новая ветвь, выделили характерные черты этой отрасли знаний и показали ее важность. Их исследования, а затем курс лекций, прочитанный **Вольтеррой** в Париже, знаменовали создание функционального анализа и определили направление в развитии.

Название *fonctionelle* **Адамар** употребил как прилагательное. В короткой заметке "Sur les operations fonctionelles" (1903) он за шесть лет до **Рисса** и **Фреше** указал, что линейный функционал представим интегралом; **Фреше** преобразовал термин **Адамара** в существительное: *functional*.

Окончим замечанием **Грея**. В истории функционального анализа «главную роль играли долгожители: **Адамар** прожил 98 лет, **Вольтерра** — 80, **Пинкерле** — 84, **Фреше** — 95, **Рисс** — 76. Читатель волен сделать свои собственные выводы». [175, **31**, с. 148]; [20, с. 141]; [198, I_1, с. 202]; [186, с. 395].

ФУНКЦИЯ

Вероятно, невозможно указать, когда впервые появились функции в виде таблиц, графиков и т. п. Уже в 2000 г. до н. э. вавилонские математики широко использовали при вычислениях таблицы обратных чисел, квадратов, кубов, квадратных и кубических корней и т. п. Самая древняя таблица хорд (синусов) нам известна из «Альмагеста» **Птолемея**.

Важную роль в развитии общего понятия функциональной зависимости сыграли в Средние века натурфилософские школы Оксфорда и Парижа, где проводились кинематические исследования. Здесь разрабатывали понятия движения (motus), скорости (latitudo motus или velocitadis), ускорения (latitudo aequisitionis latitudinis motus), мгновенной скорости, равномерного движения, равномерного ускорения... **Орем** привел одно из первых графических представлений функционального соотношения (между временем и скоростью). Развитие тригонометрии и открытие логарифмов в начале XVII в. также означали новые шаги в осознании идеи функциональной зависимости величин.

После появления символики буквенной алгебры в астрономии вместо составления таблиц начинают находить траектории небесных тел; их «уравнения», как во времена **Аполлония**, по-прежнему выражались на языке пропорций. Наконец, в аналитической геометрии **Декарта** и **Ферма** (ок. 1637 г.) появилась четкая мысль, что уравнение, связывающее x и y, определяет функцию.

Латинское слово functio означает «свершение, исполнение» (латинский глагол fungor, functus sum, fungi значит «осуществлять, исполнять обязанность»). Как математический термин слово *функция* появилось впервые у **Лейбница**, в рукописях — с 1673 г., в публикациях — с 1692 г. В "Mathematische Lexicon" **Вольфа** (1716) термин *функция* еще отсутствует, слово уже встречается во втором издании (1747). В русской литературе появление термина *функция* относится к 1707 г., а до этого времени — заимствования из латыни, а также итальянское funzione и польское funkcya. Функциями кривой **Лейбниц** называл абсциссы, ординаты, хорды и другие отрезки, связанные с рассматриваемой линией. «Функция» не рассматривалась как величина, зависящая от некоторой другой переменной. В 1698 г. **И. Бернулли** употребил термин «функция ординат».

Позднее **И. Бернулли** определил функцию как «переменную величину, заданную аналитическим выражением, составленным из переменной x и постоянных величин» (1718), таким образом, понятие связывалось с формулой, а не с линией (заметим попутно, что «постоянные и переменные количества» были определены с самого начала в первом руководстве по дифференциальному исчислению, написанном **Лопиталем** и опубликованном в 1696 г.).

Знаменательно, что **Ньютон** в это же время (1676) употребляет для функции название «ордината». Он четко оценил роль понятия: «Я не мог бы получать эти общие результаты, если бы не отвлекся от рассмотрения фигур и не свел все просто к исследованию ординат». **Ньютон** употреблял также оборот «буквенное выражение».

Эйлер дал общее определение функции как произвольной зависимости одной величины от другой; при этом он ввел неявно заданные и параметрически заданные функции (1755) и распространил определение на величины, зависящие от нескольких переменных (1748).

Фундаментальные открытия, менявшие лицо математики, вызывавшие пересмотр основ ее, неизбежно затрагивали понятие функции, в дискуссиях оно изменялось, уточнялось: отделение анализа от геометрии привело к понятию функции. Вековой спор о задаче колебания струны вызвал определение функции **Дирихле—Лобачевского** (1837–1848). Слова «определение функции по **Дирихле**» вошли в обиход, благодаря **Ганкелю**: до его работы 1870 г. никто не утверждал, что общее определение понятия функции принадлежит **Дирихле**. В связи с исследованиями по математической логике и основам арифметики **Фреге** ("Begriffsschrift", 1879; последующие работы) отказался от само собой разумеющегося предположения, что аргумент и значения функции — числа (в тесной связи с введенным им понятием «пропозициональной функции»). Наконец, определение функции как отображения одного множества на другое было установлено в полемике о теории множеств, при обсуждении понятия взаимно однозначного соответствия. Это определение **Дедекинда—Пеано** введено ими соответственно в "Was sind und was sollen die Zahlen?" (1888) и "Sulla definitione di funzione" (1911).

Первые обозначения функций ввел **Лейбниц**, пользуясь астрономическими знаками. **И. Бернулли** обозначал функции знаками z (1694), X или ξ (1698). Так же обозначали функции и в дальнейшем (**Клеро**, **Д'Аламбер**). При этом аргумент писали рядом без скобок: Πx, φx. **Эйлер** ввел буквы F, Ψ и др. В 1734 г. он употребил обозначение $f()$, чтобы отметить, что f есть функция аргумента $\frac{x}{a}+c$, а в 1753 г. — обозначение $\Phi=\Phi(x,t)$. В это же время **Клеро** не писал скобок; обозначения без скобок предлагались и много позднее (например, F,u или f,u — **Маскерони**, 1790). **Лагранж** в «Теории аналитических функций» (1797) использовал буквы F, f, φ и Ψ, Γ, u; он полагал, что обозначение $f(x)$ не согласуется с обозначениями $\sin x$, $\log x$ и писал fx, но $f(x^2)$, $f(a+bx)$. В XX в. **Пеано** настаивал на преимуществах символики **Лагранжа** и целесообразности возврата к его обозначениям. [187, **3**, с. 215]; [186, с. 235]; [226, II, с. 41]; [65, **2**, с. 142–147]; [158, с. 29, 306, 356]; [106, с. 22–50]; [152, III, с. 181]; [34, с. 155]; [64, XIX, с. 158].

ФУНКЦИИ АВТОМОРФНЫЕ

Одними из первых автоморфные функции рассматривали **Риман** и **Шоттки**. Результаты **Римана** не были опубликованы при его жизни и в 1875 г. **Шотки** переоткрыл некоторые из них. Теория автоморфных функций создана в основном **Клейном** и **Пуанкаре**. Первым толчком для **Пуанкаре** послужили работы **Фукса**, а кроме того, — работы **Эрмита** о квадратичных формах. Первые сообщения **Пуанкаре** относятся к 1881–1882 гг. Он пользовался названиями «фуксовы функции» (автоморфные функции с главным кругом) и «клейновы функции» (автоморфные функции без главного круга). Исторически эти названия не оправданы, они отражают ход мыслей **Пуанкаре**. **Клейн** пришел к автоморфным функциям при решении задачи об установлении всех конечных групп линейных подстановок одной переменной и инвариантов групп (1875–1884). Более короткий путь употребил **Клейн** в заметке «К теории общих функций **Ламе**» (1890), это изложение быстро стало общепринятым. Первоначальная классификация, употребляемая **Пуанкаре**, «носила провизорский характер» (по выражению **Клейна**), следующая введена **Фрике** и **Клейном**.

Одновременно начала развиваться теория автоморфных функций многих комплексных переменных. Большую роль сыграли исследования **Зигеля** 1935 г., где он ввел модулярные функции многих переменных. [198, II_2, с. 351, 357–359,395]; [152, XIV, с. 171].

ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ

Лейбниц разделил функции на *алгебраические* и *трансцендентные* (1686). Он же употребил термин *алгебраические* в современном смысле. **Эйлер** подразделил функции на *однозначные* и *многозначные*, *четные* и *нечетные*, а алгебраические функции на *рациональные* и *иррациональные* (1748).

ФУНКЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИЕ

Термин *аналитическая функция* впервые употребил **Кондорсе**; слово «аналитическая», по-видимому, должно было означать, что метод изучения функций — математический анализ. Мемуар **Кондорсе** был довольно широко известен, хотя он не был опубликован. Неизвестно, заимствовал ли **Лагранж** это выражение или оно вторично «изобретено» **Лагранжем** через 20 лет после **Кондорсе**. В “Théorie des fonctions analytiques” **Лагранж** подразумевал под этим функцию, раскладывающуюся в ряд.

Современное понятие аналитической функции сформировалось в основном в работах **Вейерштрасса**. Только в последнее время выяснилось, сколь многими идеями **Вейерштрасс** был обязан своему учителю — **Гудерману**. Среди прочего — представление функции степенным рядом и исследование характера сходимости ряда. Этот подход **Вейерштрасс** развивал уже в самом начале своей научной карьеры. До 80-х гг. XIX в. **Вейерштрасс** не позволял ни публиковать, ни литографировать свои лекции. Только отшлифовав курс и получив почти совершенное изложение, он решался на его издание. Поэтому многие его основополагающие идеи впервые увидели свет в изложении его учеников — **Штольца**, **Шварца**, **Пинкерле** и др. Первый учебник по теории аналитических функций — "Theorie der analytischen Funktionen" (1887) **Бирмана.** Вскоре последовали лучшие.

До конца XIX в. три направления теории функций комплексной переменной — **Коши**, **Вейерштрасса** и **Римана** — развивались параллельно, практически не сливаясь, и воспринимались современниками как различные теории! **Пуанкаре** писал в 1898 г.: «Три концепции остаются различными, и это очень хорошо, так как из трех способов мы можем выбирать нужный нам и можем их комбинировать». [64, XIX, с. 161]; [101, с. 45]; [8, с. 109, 223]; [168, с. 51].

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Название исторически неверно. Такие функции (нулевого порядка) встречались в статьях **Д. Бернулли** (1732, 1734, 1738), который установил многие их свойства — рекуррентные соотношения, интегральные представления, формулы для разложения произвольных функций в ряды по бесселевым функциям и др. Бесселевы функции с любым целым индексом введены впервые **Эйлером** (1764). Наконец, такие функции есть у **Лагранжа** (1770).

Бессель ввел этот класс трансцендентных функций в статье 1824 г. Название *функции* **Бесселя** дал **Оскар Шлемильх** (1857), который сделал первую попытку построения более или менее самостоятельной теории бесселевых функций. Термины *функция первого рода* и *функция второго рода* были введены по аналогии с шаровыми функциями, для которых соответствующие термины уже существовали; первый термин ввел **К. Нейман** (1867), а второй — **Ломмель** (1868).

Гейне ввел название *цилиндрические функции.* Термин обязан своим происхождением тому обстоятельству, что дифференциальное уравнение, из которого они получаются, встречается при рассмотрении краевых задач потенциала для цилиндрической области. Эволюция обозначений цилиндрических функций первого рода: J_x^n — **Бессель** (1824); $J_{x/2}^n$ — **Хансен** (1843); $J_{(x)}^n$ — **Ломмель** (1868); $J^{(n)}(x)$ — **Ганкель** (1869); $J_n(x)$ — **Вебер** (1873).

Первые таблицы бесселевых функций вычислил **Бессель** (1824–1826); они содержали значения $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с десятью десятичными знаками для интервала (0; 3,2). Небольшие таблицы (для $J_0(x)$, $J_0^2(x)$, $2J_1(x)/x$, $J_1^2(x)/x$) были опубликованы **Эйри** (1835, 1841), **Ломмелем** (1870, 1886). В 1843 г. **Хансен** опубликовал таблицы для $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с шестью десятичными знаками для (0; 10). Эти таблицы были перепечатаны **Шлемильхом** (1857) и **Ломмелем**, который расширил их до $x = 20$. Эти таблицы были перекрыты бóльшими таблицами **Мейселя** для $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с 12-ю знаками для интервала (0; 15,5). [198, II, с. 743]; [28, **1**, с. 9–23]; [28, **2**, с. 6–10]; [64, VI, с. 385].

ФУНКЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИЕ

Томсон и **Тэт** предложили для функции u, удовлетворяющей уравнению $\Delta u = 0$ в некоторой области, название «полной гармонической функции этой области» (1873). В английской литературе привилось сокращенное название. Через 20 лет в обзоре новой математической литературы **Букреев** пояснил, что «функция называется так по почину английских ученых». **Пуанкаре** предлагал закрепить это наименование за решением уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$, а решение уравнения $\Delta u = 0$ он называл «бигармонической функцией» (1894). [198, II_1, с. 468, 512, 560].

ФУНКЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ

Функции возникли рано — в связи с квадратурой равносторонней гиперболы. Затем **Муавр** установил, что при замене действительного аргумента мнимым задачи на круг переходят в задачи на равностороннюю гиперболу (1707, 1722). Уравнения, определяющие эти функции, выведены в 1757 г. **Винченцо Риккати**, итальянским монахом-иезуитом (уравнение **Риккати** названо по имени его отца). **Риккати** употреблял обозначения $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$. Если положить $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t$, где t — время, то эти уравнения описывают движение точки по гиперболе; отсюда происходят названия функций, которые ввел в 1768 г. **Ламберт**, показав полный параллелизм между формулами обычной тригонометрии и формулами для гиперболических функций — в работах "Mémoire sur quelques proprietes remarquables des quantites transcendentes circulares et logarithmiques" (1761), "Observations trigonometriques" (1768). **Ламберт** исходил из геометрических соображений. Те же самые формулы, соотношения между круговыми и гиперболическими функциями получил **Гудерман**: он оперировал рядами, его методы ближе к анализу, чем к геометрии (1830).

Обратные гиперболические функции изучал французский математик **Гуэль** (1878), который обозначил их Argsh, Argch, Argth. [185, II, с. 172–178]; [163, III, с. 263]; [34, с. 368]; [175, **14**, с. 304–315].

ФУНКЦИЯ ГРИНА

В работе 1828 г. **Грин** излагает первые начала теории потенциала, которые долго остаются неизвестными, так как **Джордж Грин**, родившийся в семье бедного пекаря в Ноттингеме, вначале располагал ограниченными возможностями. Функция, называемая его именем, была в этом сочинении одним экспериментально важным частным случаем электростатического потенциала. Название предложено **К. Нейманом** в конце XIX в. В настоящее время, конечно, этот термин понимается в гораздо более широком смысле.

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

Первые появления этой функции не предвещали той огромной роли, которую она играет в современной математической физике. **Коши** и **Пуассон** использовали ее для вывода интеграла **Фурье** (1816). Их «сингулярные интегралы» были известны **Эрмиту**, а затем — **Кирхгофу** (1882), **Гельмгольцу** и **Кельвину**. Функция была вновь изобретена **Хевисайдом**, который называл ее «импульсной функцией» (unit pulse). **Хевисайд** использовал несколько представлений этой функции, например, разложение в ряд **Фурье** по косинусам:

$$\delta(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Он считал эту функцию самой обыкновенной, а для «кембриджских математиков» (так **Хевисайд** называл поборников математической строгости в ущерб физическим интересам) функция была буквально красной тряпкой. Когда **Дирак** в 1928 г. заново ввел дельта-функцию (как он назвал ее), математики яростно протестовали. [15]; [91, с. 73]; [1, с. 76].

ФУНКЦИЯ ДИРИХЛЕ

Немецкий математик **Лежен-Дирихле** привел свой знаменитый пример в статье 1829 г. Функция «описана» словами: $\varphi(x)$ принимает постоянные значения c и d соответственно при рациональном и иррациональном значениях x. В его статье 1837 г. приведены суммы

$$\cos(m-h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m-h)\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos(n-1)(m-h)\frac{\pi}{n};$$

$$-\left[\cos(m+h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m+h)\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos(n-1)(m+h)\frac{\pi}{n}\right],$$

которые равны соответственно — 1 или 0, 1 или 0 в зависимости от четности или нечетности $m-h$, $m+h$.

Когда молодой преподаватель **Джузеппе Пеано** готовился к лекциям по математическому анализу, он пересмотрел и проанализировал практически все наиболее авторитетные курсы Европы. Результатом этих трудов явился учебник 1884 г., влияние которого отчасти сохранилось до наших дней. Интересны и примечания **Пеано**; они содержат и исторические замечания, и критические реплики, и контрпримеры. Так, **Пеано** приводит «замечательный пример разрывности. Полагая $\varphi(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{x^2}{x^2+t^2}$, имеем $\varphi(x) = 1$ при $x \neq 0$, $\varphi(x) = 0$ при $x = 0$.

Тогда функция от x, равная $\lim \varphi(\sin n!\pi x)$, где к пределу подходим, давая n целые положительные значения, беспредельно возрастающие, будет равна нулю при всяком рациональном x, а при иррациональном равна 1». После этого примера аналитическое выражение функции **Дирихле**, принимающей значения c и d, в виде

$$y = (c-d)\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m\right] + d$$

данное в 1899 г. **Прингсхеймом**, кажется не столь поразительным, как при первом знакомстве. [198, II, с. 7]; [206].

ФУНКЦИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ

Это — первая трансцендентная функция, если не считать тригонометрических линий. Она знаменовала переломный момент в различных представлениях понятия функции. Введя логарифмы, **Непер** интуитивно осознавал и непрерывность зависимости. Однако функция $y = \log x$ могла появиться только после исследований **Ферма** и **Декарта**. Правда, **Декарт** не дал уравнения для функции, поскольку в его системе кривая была «механической». Определение логарифмической функции как обратной показательной дано **Эйлером** (1748). **Николай Меркатор** разложил в степенной ряд $(1 + x)^{-1}$, а затем почленно проинтегрировал ряд. Так было получено разложение $\ln(1 + x)$ в степенной ряд (1668). Первую логарифмическую кривую изобразил **Гюйгенс** (1673). [50, с. 298].

ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Это название вместе с терминами *однозначная* и *многозначная* функции, *ветвь*, *точка ветвления*, *однолистная поверхность*, *односвязная область* — терминология **Римана** (с 1851 г.). Определение функции одной комплексной переменной дано **Коши** в его первом учебнике “Cours d’analyse de l’école polytecnique. Analyse algébrique” (1821). В 1825 г. он сформулировал определение интеграла от функции комплексной переменной. Когда в 1856 г. появился мемуар **Коши** «О теории функций», он не был воспринят как веха в оформлении новой самостоятельной теории. Среди отзывов были и такие: «Мы оставляем в стороне формулы метафизического происхождения, изобретателем которых был **Коши** и которые никогда и никто не будет употреблять».

В любых историях признается, что теория держалась на трех китах-основателях — **Коши**, **Риман**, **Вейерштрасс**. Их исследования продолжили по всем направлениям их ученики. Однако впоследствии оказалось, что основы теории функций комплексной переменной развил **Гаусс**, который не опубликовал свои результаты, что для него типично. Из его письма к **Бесселю** (19.12.1811) известно, что он пришел к геометрической интерпретации комплексных чисел, к определению интеграла в комплексной области, включая теорему о вычетах. Здесь же впервые дано полное объяснение многозначности логарифма. Дальнейшие размышления привели его к эскизу исчисления кватернионов.

Общепринятые обозначения $\mathrm{Re}\,[f(z)]$, $\mathrm{Re}\,z$ развились из употребляемого **Вейерштрассом** знака $\mathfrak{R}z$. Символа Im у **Вейерштрасса** не было, в случае необходимости он писал $\mathfrak{R}[if(z)]$. Обозначение распространялось медленно — **Брио** и **Буке** употребляли обороты «действительная часть» и «коэффициент при i» (1856–1859). В XX в. только заменили готические $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{I}$ — латинскими. Однако даже в издании 1948 г. (Труды **Римана**) используются обозначения $0 < \mathfrak{R}s < 1$, $\mathfrak{I}s = 1/2$. В 40-х гг. XX в. появился символ Re.

В России первые спецкурсы были введены в разных университетах в разное время. В Петербургском университете впервые его читал **Юлиан**

Васильевич Сохоцкий в 1868/69 гг., но его инициатива не встретила поддержки **Чебышёва**. В Москве — **А. Ю. Давидов** в 1864 г., а с 1869 г. его читал **Н. В. Бугаев**, в Киеве с конца 60-х гг. курс вел **М. Е. Ващенко-Захарченко**, затем — **П. Э. Ромер**, а затем **А. В. Васильев** (1874) и **В. П. Максимович** (1887). В Харькове лекции читал **Д. М. Деларю** (с 1874 г.), в Одессе — **И. В. Слешинский** (с 1889), затем — **И. Ю. Тимченко**. [198, I_1, с. 153]; [198, II_1, с. 1004]; [198, III_3, с. 367]; [8, с. 112]; [50, с. 327]; [168, с. 437].

ФУНКЦИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Определение дано **Жорданом** в заметке 1881 г. К этому понятию он пришел в своих исследованиях о спрямлении кривых. В издании "Cours d'Analyse" (1882) **Жордан** употребил название fonction à oscillation limitée, т. е. «функция с ограниченным колебанием»; выражение *функция ограниченной вариации* (fonction à variation bornée) появилось в следующем издании (1893). Терминология — *вариация функции* $f(x)$ *в интервале* $[a, b]$ *для ряда значений* $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant b$, *полная вариация* — частично принадлежит **Гобсону** (1907), а частично — **Юнгу** (1906). [198, II_1, с. 104].

ФУНКЦИЯ ПЕРВООБРАЗНАЯ ИЛИ ПРИМИТИВНАЯ

Название fonction primitive (вместе с «производной функцией») ввел **Лагранж** в «Теории аналитических функций» (1797). Латинское primitivus означает «начальный». Термины «примитивная и производная» и отражают соотношение между двумя функциями — исходной и произведенной из нее.

В русском переводе курса математического анализа **Пеано (Дженокки)** употребляется название «первоначальная функция» (перевод Н. С. Синеокова, 1904).

ФУНКЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ

Такие функции, как правило, появлялись впервые в предварительных разделах астрономических сочинений. Понятия синуса и «обращенного синуса» впервые в арабоязычной литературе встречаются, по-видимому, в зидже **ал-Хорезми** (IX в.). Здесь приведены таблицы тангенса и котангенса. Тангенс, котангенс, а также секанс и косеканс, введенные и табулированные тогда же, вначале рассматривались как линии, фигурировавшие в науке о солнечных часах — гномонике. Косинус в трудах восточных математиков рассматривался только как синус дополнения угла до 90°. Таким образом, к концу IX в. ученые средневекового Востока знали все шесть тригонометрических функций. Соотношения между ними формулировались словесно.

Определения, связанные со сторонами прямоугольного треугольника, а не с линиями круга, дал **Ретик** (1551). Однако тригонометрические функции продолжали определять как отношение соответствующих линий к радиусу круга. Впервые **Эйлер** стал рассматривать тригонометрические линии как функции углов в круге единичного радиуса (1748), тем самым тригонометрия получила аналитический фундамент, но еще **Монж** (1801, 1814) писал по старинке.

Выражение *тригонометрические функции* употребил **Клюгель**, профессор математики в Галле; благодаря его «Аналитической тригонометрии» (1770) вошли в обыкновение современные определения функций как отношений сторон треугольника. Довольно понятно, что специальные названия и обозначения появились гораздо позднее самих функций, синус, например, был известен сначала как сумма ряда (отсюда, между прочим, — термин «нечетная функция» для ряда $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$). В письме от 15.II. 1671 **Джеймс Грегори** привел степенные ряды для семи функций (с пятью или шестью слагаемыми):

$$\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{tg} x,\ \sec x,\ \lg \sec x,\ \lg \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\ \operatorname{arcsec}\left(\sqrt{2}e^x\right),\ 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right).$$

При этом **Грегори** сослался на то, что ему известен «универсальный метод **Ньютона**». **Ньютон** же пришел к рядам в 1664–1665 гг., опередив **Лейбница**, который независимо развил теорию. Достижения **Грегори** оценены по достоинству спустя века. «В течение долгого времени свет **Грегори** не сиял так, как должен бы, из-за других трех великих британских математиков — **Валлиса**, **Барроу**, **Ньютона**» (М. Ден).

Что касается формул дифференцирования и интегрирования, то нужно мало, если главный инструмент — ряды, однако **Я. Бернулли** писал как об известных о формулах $d\tan\varphi = \ldots$, $d\sec\varphi = \ldots$ Вероятно, он узнал их из «Лекций» **Барроу** (которые заведомо были известны ему). Блестящую работу по интегрированию написал **Грегори** (1668).

Трудно определить, кто первый стал рассматривать графики тригонометрических функций — не являясь объектом исследований, они возникали в работах многих математиков. Например, первую синусоиду построил **Роберваль**, изучая циклоиду (1634) (см. рисунок на с. 169).

Первые сокращения названий тригонометрических функций ввел, по-видимому, **Финке** (1583). Сокращение обозначений было принято далеко не сразу. В Англии в анонимной статье 1618 г. вновь появляются сокращения для наименований синуса, тангенса и т. д. Как правило, в Англии математики сокращали названия до двух букв: si, cs, ct и др., а на континенте до трех: sin , cos , tan , sec .

Первым автором, который использовал специальные символы для *обратных тригонометрических* функций, был **Д. Бернулли**. В 1729 и в 1736 гг. он писал AS и At соответственно вместо arcsin и arctg . Современные обозначения $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ появляются в 1772 г. в трудах **Шерфера** (венского математика) и **Лагранжа**. Обозначения были приняты сразу только французскими математиками (**Кондорсе** — 1772, **Ламберт** — 1776). В качестве примера других обозначений можно привести $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ **Гершеля** (1813) или $\frac{1}{\sin} x$, $\frac{1}{\cos} x$ **Мартина Ома** (1829). Современные $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д. утвердились только к концу XIX в. [185, I, с. 175–177, 223]; [185, II, с. 165]; [34, с. 347, 361]; [103, с. 67–69, 113].

ФУНКЦИИ ШАРОВЫЕ

Теория шаровых функций одной переменной основана **Лежандром** ("Sur l'attraction des spheroïdes", 1785). Шаровые функции двух переменных, общие шаровые функции были исследованы **Лапласом** (1812). Термин *шаровые функции* (Kugelfunctionen) принадлежит **Гауссу** (1828). Обобщение шаровых функций как побочный результат получил **Гейне** (1861). Систематическое исследование принадлежит **Шлефли**, который рассматривал индекс как параметр (1881). Таблицы шаровых функций вычислил **Глэйшер** (1879). [198, II_1, с. 699–724].

ФУНКЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ

В 1797 г. **Гаусс** приступил к изучению лемнискаты и открыл двойную периодичность для длины дуги лемнискаты. Он интенсивно занялся этой совершенно новой областью анализа и к 1800 г. создал полную теорию эллиптических и модулярных функций, получив более полные результаты, чем **Абель** в 1825 г. и **Якоби** в 1827 г.

Гаусс называл эти функции «лемнискатическими». Название *эллиптические модулярные функции* принадлежит **Эрмиту**; *модуль периодичности* — термин **Римана**. Исторически сначала были найдены эллиптические интегралы, а затем их обращением были получены эллиптические функции. Теория достигла завершения после введения **Риманом** многолистной поверхности. Обозначения в теории эллиптических функций введены **Якоби**, а затем упрощены **Гудерманом** — $x = \mathrm{Sn}\,u$, $\sqrt{1-x^2} = \mathrm{Cn}\,u$, $\sqrt{1-k^2u^2} = \mathrm{dn}\,u$. **Вейерштрасс** в начале излагал эллиптические функции по **Якоби**. Функции $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ появились впервые в лекциях **Вейерштрасса** в 1862–1863 гг. [77, с. 63, 79–82]; [185, II, с. 276].

Х

ХАРАКТЕР

Греческое χαρακτήρ означает «черта, особенность, главное качество». В теории групп термин утвердился после работ **Гаусса** и **Дирихле**.

ХАРАКТЕРИСТИКА

Первоначально слово употреблялось в математике в смысле «операция, функция». В теорию уравнений в частных производных термин ввел **Монж** (1795, 1801, 1807). Слово имело у него, по существу, два значения, которые **Монж** плохо различал между собой. Первое: линия пересечения двух бесконечно близких поверхностей, принадлежащих однопараметрическому семейству поверхностей. Второе: линия, через которую можно провести не конечное, а бесчисленное множество поверхностей, удовлетворяющих данному уравнению в частных производных. В современной математике оба эти значения сохранились. Чтобы отметить заслуги **Монжа**, класс уравнений **Ли** назвал *уравнениями* **Монжа**.

Вся геометрическая теория характеристик принадлежит **Дмитрию Федоровичу Егорову**. [41, с. 597]; [34, с. 204].

ХОРДА

Термин происходит от греческого χορδή (струна, тетива). **Менелай** (в конце I в. н. э.) и **Птолемей** (II в. н. э.) называли хорду дуги AC «прямой под дугой AC». Индийские математики употребляли для дуги и хорды образные названия «лук» и «тетива», а перпендикуляр, опущенный из середины дуги на хорду, называли «стрелой». В VIII в. в арабской обработке «Сидхант» появился перевод этих терминов, а в XII в. они были переведены как arcus, chorda и sagita — таково происхождение термина *хорда*. [113]; [103].

Ц

ЦЕНТР

Слово греческого происхождения: κεντρον обозначало палку с заостренным концом, которой подгоняли быков, а позднее — ножку циркуля, помещенную в центр описываемой окружности. Этим термином **Евклид** называл центр окружности и центр сферы, а **Архимед** — центр эллипса и эллипсоида. До **Евклида** это слово не было еще термином чистой геометрии, у **Тимея** оно употреблялось в теории атома как обозначение точки, важной по каким-то соображениям.

Центр поверхности второго порядка стал играть важную роль в исследованиях **Эйлера**, а затем — **Монжа** и **Ашетта**. *Центр* как название особой точки дифференциального уравнения ввел **Пуанкаре**. [198, III_3, с. 173, 507]; [216]; [163, IV, с. 10]

ЦИКЛ

Греческое κύκλος означает «круг, нечто законченное». В современную математику слово ввел французский ученый **Лагерр**. Понятие и термин *предельный цикл* ввел **Пуанкаре**. В программирование термин введен с вполне современным смыслом леди **Лавлейс** (1843).

ЦИКЛОИДА

Название образовано от греческих κύκλος (круг, окружность) и εἶδος, означающего в сложных словах происхождение; так что буквальный смысл названия — «порожденная кругом». История открытия циклоиды не ясна. Она не была известна древним, по-видимому, впервые встречается у **де-Бувиля** (1503) в связи с задачей квадратуры круга. Название ей дал **Галилей** (ок. 1598 г.), который первый стал изучать свойства этой кривой. Он нашел взвешиванием фигур, вырезанных из однородной пластинки, что площадь, ограниченная одной аркой циклоиды, в три раза больше площади соответствующего круга. Таким путем Галилей надеялся получить решение задачи о квадратуре круга.

Собственно говоря, история циклоиды начинается с 1628 г., когда **Мерсенн**, узнавший ее определение, вероятно, от учеников **Галилея**, привлек к ней внимание, и кривая стала модой в математике. Площадь, ограниченную циклоидой, вычислил **Роберваль** (1634). Его результат подтвердили в 1638 г. **Ферма** и **Декарт**. Необыкновенная популярность циклоиды беспокоила мнительного **Роберваля**, который постоянно конфликтовал с **Декартом**, **Торричелли** и др.

Через 20 лет спрямление циклоиды произвели **Рен**, **Ферма** и **Ван Гейрет**. Впоследствии ею занимались все выдающиеся математики. Объемы и центры тяжести связанных с нею тел вращения определил **Б. Паскаль**. **Гюйгенс** установил (1659), что она является **таутохроной**, введя этот термин; он применил циклоиду в теории маятниковых часов (и при этом построил теорию эволют, опубликованную в 1673 г.). В 1696 г. **Иоганн Бернулли** поставил задачу о кривой быстрейшего спуска — **брахистохроне**; он сам, его брат **Якоб**, **Лейбниц**, **Лопиталь** и аноним, в котором узнали **Ньютона**, решили задачу, доказав, что такой кривой является циклоида. [165, с. 249]; [213, с. 473]; [138, с. 247]; [34, с. 307].

ЦИЛИНДР

Термин происходит от греческого κύλινδρος (валик), которое в свою очередь, образовано от κύλινδρο (вращаю, катаю); он имеет явно техническое происхождение. Как математический термин встречается у **Евклида**, **Аристарха**. [163, IV, с. 10]; [216].

ЦИРКУЛЯЦИЯ

Название принадлежит **Томсону** (лорду **Кельвину**), оно введено в первых работах по электромагнитной теории.

Понятие введено **Гельмгольцем** (ок. 1858 г.), однако полная четкость и ясность настала только после работ **Максвелла** (1856–1873), **Хевисайда** (1885–1891), **Гиббса** (1881,1884), которые впервые вели исследования методами векторного исчисления. [1].

ЦИФРА

Индийские математики называли знак, обозначавший отсутствие некоторого разряда, словом «сунья» (пустой). Арабы перевели этот термин по смыслу и получили слово «сифр». Отсюда — слово *цифра*, вошедшее в европейскую литературу, оно означало первоначально нуль. Еще **Х. Вольф** (1791) называл нуль цифрой. Уже в XIV в. этим словом стали называть все числовые знаки. Ученые авторы протестовали: «Хотя только десятый знак — 0 — должен называться цифрой, а остальные — фигурами, но народ в своей необразованности называет все 10 знаков цифрами».

Установившееся название «арабские цифры» исторически неверно, так как наша система ведет свое начало в действительности из Индии, а в арабском мире и до сих пор употребляются совсем другие знаки.

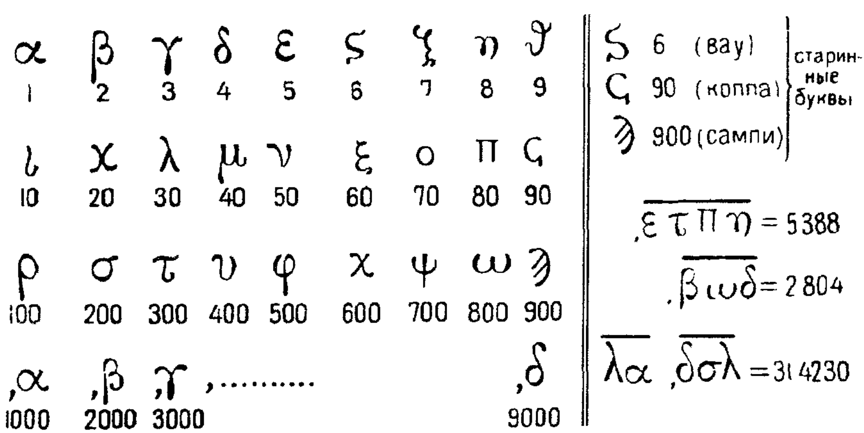
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Предполагают, что в европейскую математику современные цифры ввел французский ученый **Герберт** (воспитатель и советник императора Оттона III), ставший впоследствии папой **Сильвестром** II, который для пополнения образования ездил в Испанию, где он и ознакомился с достижениями арабских ученых и в том числе с «арабскими» цифрами. **Леонардо Пизанский** первым из видных европейских математиков принял арабские цифры и «популяризировал» их. Однако еще в 1299 г. флорентийское правительство запрещало купцам использовать арабские цифры.

Форма цифр почти не изменилась с тех пор, как они появились в печати (1482–1489): 0 и 1 всегда сохраняли свою форму; 2 в западно-арабских цифрах писалась «головой вниз» — ; 3 яснее всех остальных цифр сохранила форму санскритской буквы, относящейся ко II в. н. э.; цифра 4 появилась впервые в XIII в. Судьба цифры 5 такова же, как и 2. Цифра 6 почти современной формы встречается уже в 500 г. н. э.; 7 — самая молодая цифра: ее нельзя найти ранее XV и XVI вв.; 8 и 9 встречаются, так же как и 6, уже в 500 г.

Что касается римских цифр, то первоначально числа от 1 до 9 обозначались вертикальными палочками. Перечеркивание числа означало удесятерение: ⫲= 10, ⫲⫲= 20; 5 обозначали $\wedge$ или $\vee$, т. е. половина десяти (X). Позднее были введены C для 100 (от слова centrum — сто) и M — для 1 000 (от mille — тысяча). Во Франции Парижское счетоводство велось римскими цифрами вплоть до XVIII в.

В греческой математике роль цифр играли буквы алфавита, т. е. α означала 1, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ и т. д. до $\vartheta = 9$. Следующие буквы $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi$, означали $10, 20, \ldots, 90$; $\rho, \sigma, \ldots, \omega$ представляли соответственно $100, \ldots, 800, 900$. Чтобы в тексте не спутать число со словом, числа надчеркивали; например 742 записывалось как $\overline{\psi\mu\beta}$. Высшие единицы отмечались запятой ($,\alpha = 1\,000$), надчеркиванием и множителем M от μυριαδες$= 10\,000$; например, $\overset{\gamma}{\mathrm{M}}, \vartheta = 39\,000$. Легко понять, что при



такой системе «Исчисление песчинок», заполняющих пространство между Землей и Солнцем, было очень непростой задачей, именно ее решает **Архимед** в своем сочинении Ψαμμιτις.

Русская церковно-славянская нумерация была скопирована с греческой. Чтобы не было отступлений от греческого образца, несколько раз был нарушен алфавитный порядок, например, из первых букв «аз», «буки», «веди», «глаголь» не использовалась «веди» с тем, чтобы буква «Г» означала 3, как в греческой математике. Заметим, что в греческом языке нет звука, передаваемого нашим «б»; и β называется «вита». Поэтому слова, начинающиеся с β и доходившие до Руси непосредственно из Греции или через Византию, пишутся в русской литературе как Византия, варвар, Вавилон, Влас,... А слова, пришедшие через Западную Европу, имеют первой буквой «б»: библия, Блэз и т. д. В сухом, наисушайшем справочнике “Poggendorf” лирические строки посвящены **Фархварсону**: «...встретился с Петром Великим... ввел арабские цифры в России, где до той поры использовались славянские...». [226, I, с. 21]; [56, с. 106]; [186, с. 53, 120]; [55, с. 95].

Ч

ЧИСЛО

В древнегреческой математике единица не признавалась числом. До XVII в. нуль не считался корнем уравнения, и следовательно не был числом.

Фундаментом «вейерштрассовой строгости» математического анализа была арифметика. Однако теории действительных чисел еще не было в середине XIX в. К 1863 г. **Вейерштрасс** построил свою версию этой теории, которая была опубликована в 1872 г. **Коссаком** (по лекциям **Вейерштрасса**). Теория не была единственной: к этому же времени относятся публикации **Георга Кантора**, **Эдуарда Гейне**, **Рихарда Дедекинда** и **Шарля Мерэ** (1869).

«Все определения числа, которые давались до **Фреге**, содержали элементарные логические ошибки. Немецкий математик **Готтлоб Фреге** привел определение числа в 1893 г. (“Grundgesetzte der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet”). У **Фреге** был исключительно острый и тонкий ум, и следы его гения все еще остались в сердце математической логики. К сожалению, у него был очень скверный характер и, говорят, он был очень жесток в своей критике современников. Может быть, поэтому он так долго не получал признания. Признание только-только начало приходить к нему, когда **Рассел** написал ему, что в его системе возникает противоречие (парадокс **Рассела**)... Последствия были для **Фреге** трагическими. Хотя ему было тогда всего 55 лет и он прожил после этого более 20 лет, он больше не опубликовал ни одной значительной работы по логике» (**Чёрч**). [158, с. 32]; [148, с. 199]; [50, с. 287–289].

ЧИСЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ

Эйлер разделил числа на *алгебраические* и *трансцендентные* и ввел эти названия (1748). **Лиувилль** в 1844 г. впервые дал необходимый признак алгебраичности числа (и тем самым — достаточный признак трансцендентности). Общая теория целых алгебраических чисел была почти одновременно создана **Дедекиндом** (1877–1895) и **Егором Ивановичем Золотаревым** (1874). Фундаментом для теории послужили работы **Куммера**.

ЧИСЛА ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ

«Иррациональные числа были постепенно признаны, потому что их полезность и привычка к ним породили некритичность, логического построения системы иррациональных чисел не было вплоть до 1870-х гг.... Ни **Декарт**, **Ферма**, **Лейбниц**, **Эйлер**, **Лагранж**, ни **Гаусс** или **Коши** не могли дать определения отрицательных, комплексных или иррациональных чисел. И все же они вполне удовлетворительно выполняли вычисления с этими числами...» (*Клайн М.* Логика против педагогики).

ЧИСЛА КОМПЛЕКСНЫЕ

Термин *комплексное число* впервые ввел **Карно** (1803). Буквальное значение выражения — «сложное, составное число». Позднее термин был повторен **Гауссом** («Теория биквадратичных вычетов», 1828); **Гаусс** употреблял его систематически, чтобы исключить *мнимое* число. Именно такой термин «составное число» употреблялся в русской литературе до конца XIX в.

Считается, что впервые комплексные числа стали употреблять итальянские математики **Кардано** (1545) и **Бомбелли** (1572); **Кардано** называл их «чисто отрицательными». Однако в неявном виде эти числа можно найти и в более ранних работах. С другой стороны, еще долго после работ **Кардано** и **Бомбелли** даже выдающиеся математики не имели отчетливого понятия о комплексных числах. **Лейбниц** писал (1702): «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти сочетание бытия с небытием». **Бомбелли** в своей «Алгебре» (написана примерно в 1560 г., издана в 1572) дал первое формальное обоснование действий над комплексными числами.

Слово *мнимый* впервые употребил **Кавальери** — только в геометрии; мнимой степенью он называл всякую степень выше третьей, поскольку такая степень лишена геометрического смысла (1635).

У **Декарта** (1637) впервые противопоставлены действительные и мнимые корни уравнения (reele — imaginaire). Первой буквой этого термина **Декарта** — "radices imaginaire" — и обозначена «мнимая единица». **Эйлер** повторно использовал это обозначение в 1777 г. (опубликовано в 1794); обозначение стало общепринятым благодаря **Гауссу**. **Коши** принял это обозначение только в 1847 г., до тех пор **Коши** употреблял только $\sqrt{-1}$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел с разной степенью строгости встречается у **Валлиса** (1686), **Аргана**, **Уоррена**, **Бюэ** (1806). В ясной и систематической форме геометрическое изображение комплексных чисел (в виде направленных отрезков плоскости) и действий над ними находят в работах датского геодезиста, картографа и землемера **Каспара Весселя** (1799) и французского математика (выходца из Швейцарии) **Жана Аргана** (1806). Оба они не имели никаких контактов с научными кругами своего времени, поэтому их работы оставались долгое время незамеченными — статья **Весселя**, написанная в 1797 г. и опубликованная в 1799, стала известна математикам после того, как к столетнему ее «юбилею» она была опубликована во французском переводе. Всеобщую известность геометрическое представление комплексных чисел получило, начиная с 1831 г., когда появилась статья **Гаусса** "Theoria residorum biquadratorum" (1828), содержавшая и геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

И. Бернулли, **Лейбниц**, **Коутс**, **Муавр** обращались с мнимыми числами как с действительными. Например, **И. Бернулли** без особых аргументов привел формулу (1702):

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{1-ix}{1+ix}.$$

С другой стороны, возникла и оппозиция, особенно в английской математической школе, мнимые числа были атакованы точно таким же образом, как **Беркли** оспаривал использование бесконечно малых. Именно в ответных попытках обосновать действия с комплексными числами, четко сформулировать требования, предъявляемые к «числам», **Гамильтон** пришел к законам алгебраических действий: ассоциативному, коммутативному, дистрибутивному.

Название *приведенная форма* для выражения $A+iB$ ввел **Коши** (1821).

Термин *модуль* для $\sqrt{A^2+B^2}$ ввел **Арган** в 1814 г., затем его употреблял **Коши**. **Вейерштрасс** ввел название *абсолютная величина* и обозначение $|z|$ в 1841 г. Еще в учебниках XX в. можно прочитать «численное значение вектора» (вместо «длина»). Употреблялись также обозначения *mod.z*, *abs.z* и др. Название **аргумент** для угла φ комплексного числа употребил впервые **Коши** (1847), это название привилось не сразу: угол φ называли также «амплитудой», «аномалией», «азимутом» и «аркусом» комплексной переменной. Названия *сопряженные числа* для $a+ib$, $a-ib$ ввел **Коши** (1821). По свидетельству **Пинкерле**, обозначение сопряженных величин $\bar{z}$, $\overline{B}$ принадлежит **Лагранжу**.

В тригонометрической форме числа были представлены **Эйлером** и **Д'Аламбером**. **Коши** записывал комплексное число в виде $re^{\rho\sqrt{-1}}$ в 1827 г. (не надо только забывать, что **Виет** сумел решить уравнение 45 степени, представив неизвестную в форме, эквивалентной тригонометрической, в 1593–1600 гг.). [19, с. 161]; [226, II, с. 117]; [64, XV, с. 283]; [101, с. 50]; [198, I_1, с. 153]; [198, III_3, с. 367].

ЧИСЛА НАТУРАЛЬНЫЕ

О «естественном ряде» чисел говорится во «Введении в арифметику» греческого математика **Никомаха** (I в. н. э.). «Арифметика» была переведена на латинский язык и переработана римским автором **Боэцием** в VI в., впервые употребившим при этом термин «numeri naturalis». Единицу он, следуя традиции древнегреческой математики, называл матерью всех остальных чисел, но числом не считал. **Боэций Аниций Манлий Торквар Северин** был государственным деятелем, ученым, философом. Он был казнен по обвинению в государственной измене.

Затем термин встречается в некоторых средневековых рукописях, в современном смысле понятие и термин введены **Д'Аламбером**. В конце XIX в. "naturlichen" еще писали в кавычках (**Дини**). В русской математике термин встречается в XVIII в. [56, с. 21, 60]; [226, II, с. 70]; [55, с. 45].

ЧИСЛА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ

Операции с положительными и отрицательными числами содержатся в «Математике в 9 книгах» — китайском трактате V в. до н. э. Затем, толкуемые как «имущество» и «долг», они появляются у индусов вместе с правилами действий (**Ариабхатта**, **Брамагупта**). **Диофант** ввел отрицательные числа и употреблял специальный символ для такого числа. Однако отрицательные числа не получали признания еще около 1 000 лет. «Современному человеку невозможно даже представить себе, с каким трудом проникли в науку привычные для нас истины.

У. Френд, член Совета Кембриджского университета, в предисловии к книге „Начала алгебры“ (1796) писал: „Любое число допустимо вычитать из большего числа, но любая попытка вычесть какое-либо число из меньшего числа смехотворна сама по себе. Тем не менее именно это пытаются делать алгебраисты, толкующие о числах, меньших нуля; об умножении отрицательного числа на отрицательное, дающем положительное произведение; о мнимых числах. Все это не более, чем жаргон, в котором нет ни капли здравого смысла“».

В европейской математике отрицательные числа впервые появились в «Книге Абака» **Леонардо Пизанского**, где он интерпретирует их тоже как долг. Термины *положительный* и *отрицательный* появились в Европе в XV в. в анонимной рукописи "Initius Algebra" — переводе с арабского языка на греческий, а затем — на латынь. Видимо, они явились переводом арабских терминов «мусбат» и «манфи» самаркандского математика **ал-Кушчи**. Его термины в ходу и ныне в Турции, Иране, Азербайджане и Средней Азии. Кроме этих терминов употреблялись также affirmativus (утвердительный) и privativus (лишательный). Современное обозначение положительных и отрицательных чисел знаками «$+$» и «$-$» введено в конце XV в. **Видманом**.

Штифель называл числа, меньшие нуля, «абсурдными» и в то же время объяснял, что эти числа «ниже, чем ничто», следовательно, он мысленно изображал положительные и отрицательные числа на вертикали. Такое понимание отрицательных чисел через **Декарта** перешло к **Ньютону**. Другой подход был у **Маклорена**, **Клеро**, **Эйлера**. В их определениях в начальной форме содержится понимание относительных чисел как противоположных элементов кольца действительных чисел, связанных соотношением $a + (-a) = 0$. **Эйлер** объяснял: «...погасить долг = сделать подарок».

Виет не признавал отрицательных корней уравнения. Еще в 1831 г. **Гаусс** «боролся за права» отрицательных чисел: «Насколько не опасаются вводить в общую арифметику дробные числа, хотя существует так много пересчитываемых вещей, в применении к которым дробь не имеет смысла, настолько же не следует отказывать отрицательным числам в правах, равных с положительными, потому только, что многие вещи не допускают противоположения. Реальность отрицательных чисел достаточно определяется тем, что в бесчисленных других случаях они находят адекватную основу». [163, I, с. 157]; [226, II, с. 98–103]; [65, III, с. 52–55]; [74, с. 129].

ЧИСЛО ПРОСТОЕ

Выражение *простое число* взято из латинского языка, где употреблялось словосочетание *numeri primi*, которое, в свою очередь, перешло к римлянам от греческих математиков. Неизвестно, когда возникло понятие простого числа. **Евклид** доказал, что последовательность простых чисел не обрывается; до сих пор не придумано лучшего доказательства, чем его доказательство от противного — именно оно и приводится в современных учебниках.

Исследование распределения простых чисел начинается с **Эйлера**. **Эйлер** доказал (1744), что $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, где $\pi(x)$ — число простых чисел, меньших, чем x. Вопросом о распределении простых чисел занимались **Гаусс** и **Лежандр**. **Гаусс** предложил назвать $\pi(x)$ *функцией* **Эйлера** и обозначить ее $\varphi(x)$ (“Disquisitiones Arithmeticae”, 1801). Письмо **Гаусса** (от 1849 г.), в котором он сообщил о своих мыслях: $\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x}$, стало известным лишь в 1863 г. **Лежандр** улучшил результат **Гаусса** и сформулировал асимптотический закон

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}.$$

Закон был впервые доказан в 1896 г. одновременно **Адамаром** и **Валле-Пуссеном**. Элементарное доказательство удалось найти только в 1948 г. **Эрдешу** и **Сельбергу**. [226, I, с. 81]; [185, II, с. 35].

ЧИСЛО СОБСТВЕННОЕ

Собственные значения линейных подстановок впервые появились в работах **Лагранжа** и **Лапласа** по теории малых колебаний и «вековых неравенств» движений планет, вследствие чего современное «характеристическое уравнение» называли «вековым уравнением». В неявном виде это понятие было у **Эйлера** во «Введении в анализ бесконечных» (1748) при определении главных осей кривых и поверхностей второго порядка и в «Теории движения твердых или жестких тел» (1765).

Приведение матриц n-го порядка к диагональному виду разработано **Коши** (1826), а в общем виде — **Кэли** (1858).

Линейные преобразования векторов изучались впервые в теории кватернионов (в виде векторной функции векторного аргумента). Теория, развитая **Гамильтоном** и **Тэтом** (1853–1862), только языком и обозначениями отличалась от современной. Но собственные векторы и собственные числа совершенно затерялись в беспорядочной свалке результатов, теорем, вспомогательных векторов, свойств и т. п.

ЧИСЛО СОВЕРШЕННОЕ

По-видимому, впервые совершенные числа рассмотрели ранние пифагорейцы (VI в. до н. э.). В «Началах» **Евклида** доказана теорема, эквивалентная формуле для совершенных чисел. Впоследствии **Эйлер** доказал, что никаких других четных совершенных чисел не существует. Ни одного нечетного такого числа до сих пор не найдено, но и не доказано, что нечетных совершенных чисел нет. [6, с. 176].

ЧЛЕН

Впервые слово стало употребляться в теории пропорций, затем в теории уравнений. Название terminus ввел **Клавиус**, преподаватель математики в иезуитском колледже в Риме (1608). Его настоящая фамилия Schlussel (ключ) превратилась в латинское название ключа — Clugel. Этот ученый принимал деятельное участие в проведении реформы календаря (введение григорианского календаря).

В 1637 г. у **Декарта** название terme означало, кроме понятия «член уравнения», уже и «член алгебраического выражения». [226, II, с. 70].

Э

ЭВОЛЮТА

Впервые понятие эволюты появляется в работе о маятниковых часах **Гюйгенса** («Horologium oscillatorum», 1673). Здесь приведены основные свойства эволюты и введено название evolute — развиваемая (от латинского evolvere — развертывать). **Лейбниц** также посвятил разверткам две статьи (1692). Обобщение понятия эволюты принадлежит знаменитому физику **Реомюру** (1709). **Сальмон** рассмотрел кривые, которые он назвал *квазиэволютами* (1882). [143, с. 14]; [198, $III_{2.1}$, с. 78].

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Термин происходит от латинских *aequus* (равный) и *valens* (имеющий силу, сильный); смысл термина — «равносильный».

При сравнении бесконечно малых величин этот термин использовал **Дюбуа Раймон** (1870). Множества назвал *эквивалентными* **Кантор** (1882). Применительно к квадратичным формам термин употребил **Гаусс** (1801), а к подстановкам — **Липшиц** (1857). [198, I_1, с. 75, 189]; [187, **3**, с. 140]; [213, с. 614].

ЭКВИДИСТАНТА

Буквальное значение слова *aequidistans* — равноотстоящая.

ЭКСПОНЕНТА

Слово *exponenet* (свидетель, показатель) для показателя степени ввел **Штифель** (1553). **Лейбниц** ввел термины *экспоненциальная кривая*, *экспоненциальная функция* (1679, 1692). [213, с. 542]; [226, II, с. 151, 159].

ЭКСТРЕМАЛЬ

Название для кривой вариационной задачи ввел **Кнезер** (1900).

ЭКСТРЕМУМ

Термин происходит от латинского *extremum* — «крайний, последний».

Для обозначения минимума или максимума в тех случаях, где не обязательно их различение, этот термин предложил **Дюбуа Раймон** (1879).

Точные правила определения экстремума функции $y = f(x)$ в случае

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

были даны первоначально **Маклореном** (1742). Соответствующие правила для $z = f(x, y)$ частично приведены **Эйлером** в «Основаниях дифференциального исчисления» (1755). **Лагранж** установил достаточные условия экстремума функции двух переменных (1759). В 1797 г. он исследовал *условный* экстремум и применил метод неопределенных множителей.

Сильный и *слабый* экстремумы в вариационном исчислении стали различать **Вейерштрасс** (в лекциях по вариационному исчислению, 1878–1882) и рано умерший немецкий математик **Людвиг Шеффер** (1885). Термины *слабый* и *сильный* экстремумы введены **Кнезером** (1900). [34, с. 171].

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ

Термин образован от латинских *ex* (вне) и *centrum* (центр).

Название оправдано тем, что эксцентриситет эллипса характеризует смещение фокусов относительно центра. Термин введен **Кеплером** в «Новой Астрономии» (1609), где рассматривались также excentric angel или excentric anomaly. [198, $III_{2.1}$, с. 9].

ЭНТРОПИЯ

Клаузиус сформулировал второе начало термодинамики в 1850 г., но лишь в 1865 г. он ввел понятие и термин *энтропия*. Слово произведено из греческого ἡ τροπή (превращение). **Клаузиус** хотел обратить внимание на органическую связь этого понятия с понятием энергии. Понятие энтропии было обобщено в статистической физике, а затем оно вошло в теорию информации. «Оно вводилось первоначально в тесной связи с передающими установками того или иного типа. Лишь постепенно было осознано его теоретическое значение» (Хинчин). Термин выбран специально, чтобы подчеркнуть естественную связь между количеством информации и классическим понятием статистической механики. **Шеннон** указывает на одинаковый вид этих величин. **Винер** поясняет: «Как количество информации о системе есть мера организованности системы, точно так же энтропия системы есть мера дезорганизованности системы; одно равно другому, взятому с обратным знаком». [2, VI, с. 40]; [77, с. 256]; [36, с. 55].

ЭПИЦИКЛОИДА

Мысль об эпициклах является очень древней. Привлечь их к объяснению движения небесных тел пытались **Аполлоний** и **Гиппарх**. Слово *эпицикл* встречается у **Теона** Смирнского (130 г. н. э.) и у **Птолемея**. Оно составлено из предлога επι (к, на), употреблявшегося в названиях фигур, построенных на линии как на базе, на основе, и κύκλος (круг, окружность).

Геометрически первая конкретная эпициклоида была рассмотрена лишь **Дюрером** (1525). **Дезарг**, а за ним **Ремер**, датчанин, живший в Париже (определивший скорость света ок. 1674 г.), указали, что зубчатые колеса, профиль которых имеет форму эпициклоиды, испытывают наименьшее трение. Ряд механических приложений эти кривые получили в «Математических началах натуральной философии» **Ньютона** (1687). Их рассматривали также **И. Бернулли** и **Лопиталь**, у которого для эпициклоид и гипоциклоид употреблялись названия roulettes exterieures и roulettes interieures. Первую систематическую работу об эпициклоидах написал **Лагир** (1694), который и узаконил название. Он увидел многие свойства кривых, выполнил квадратуру, спрямление кривых, построение касательных и т. д. [213, с. 479–504]; [198, III_3, с. 189]; [34, с. 307]; [170, с. 419].

Я

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА

Особенность поведения частичных сумм ряда **Фурье** вблизи точек разрыва была отмечена самим **Фурье**, а затем в двух статьях — **Ньюменом** и **Вильбрагамом** (обе статьи 1848 г.) и, может быть, **Дюбуа Раймоном** (1873). Этот последний математик получил формулу, из которой можно усмотреть *явление* **Гиббса**, но либо не заметил, либо не счел нужным писать об этом, так как в статье он преследовал другую цель. Самое детальное описание явления дал **Генри Вильбрагам** — он разобрался во всем, провел блестящие вычисления и графики, которые воспроизводятся до сих пор (“On a certain periodic function”, 1848). После изобретения в 1898 г. **Майкельсоном** и **Стреттоном** гармонического анализатора, **Майкельсон** затронул в печати вопрос, относящийся к одному ряду **Фурье**. Его статья явилась началом острой дискуссии, в ходе которой **Гиббс** вновь открыл «явление **Гиббса**». В двух письмах в журнал “Nature” (1898, 1899) **Гиббс** объяснил сущность явления и установил, что это действительно математический факт, а не дефект анализатора для конкретного ряда **Фурье**.

Гиббс явно не знал о статье **Вильбрагама**. Название установилось после работы **Бохера** (1906), который, видимо, не знал истории вопроса. В общем случае явление **Гиббса** рассмотрел именно **Бохер**. [118, с. 162–168]; [175, **21**, с. 129–160].

ЯДРО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Название *Kern* введено **Гильбертом**, и в литературе встречается впервые в его статье (1904), затем в статье **Эрхарда Шмидта** (1907). [198, $II_{3.2}$, с. 1351].

ЯКОБИАН

«Якобианом» пользовался уже **Эйлер** при переходе к новым переменным (с 1759 г.). «Общий функциональный определитель» (под таким названием) в современном виде был впервые введен **Якоби** в статье, завершающей серию 30 его работ по теории определителей (1841). **Якоби** рассмотрел понятие «взаимной зависимости» системы функций

$$\{f_i(x_1, x_2, \dots x_m)\}, \quad i = 1, \dots n,$$

условия существования неявных функций, определенных уравнениями

$$f_i(x_1, \dots x_m) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

а в случае, когда f_i — линейные функции, «функциональный определитель» самым естественным образом оказывался основой теории линейных алгебраических уравнений. До конца XIX в. изложение **Якоби**, практически без изменений, повторялось в общепринятых курсах (**Бальцер**, 1864; **Гуэль**, 1872). Термин *якобиан* ввели **Кэли и Сильвестр** (1853), чтобы воздать должное трудам **Якоби** по алгебре и теории определителей.

Обозначение

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots f_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots z_m)}$$

принадлежит **Донкину** (1854), а $J(f_1, f_2 \dots f_m)$ — **Сильвестру** (1853). [185, **1**, с. 101]; [142, с. 182]; [198, I_1, с. 274].

Литература

1. *Александрова Н. В.* Из истории векторного исчисления. М.: Изд-во МАИ, 1992.
2. Архив истории науки и техники. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1933–1936.
3. *Асмус В. Ф.* Декарт. М.: Госполитиздат, 1956.
4. *Ахиезер Н. И.* Академик С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1955.
5. *Багратуни Г. В.* Карл Фридрих Гаусс. Краткий очерк геодезических исследований. М.: Госгеодезиздат, 1955.
6. *Башмакова И. Г., Славутин Е. И.* История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М.: Наука, 1984.
7. *Беллюстин В. К.* Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики. М.: Учпедгиз, 1940. 2-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
8. *Белозеров С. Е.* Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Ростов-на-Дону, Изд-во Рост. ун-та, 1962.
9. *Белозеров С. Е.* Пять знаменитых задач древности. Росгов-на-Дону, Изд-во Ростовского ун-та, 1975.
10. *Белянкин И. И.* Краткий очерк исторического развития математики от древнейших времен до наших дней. Киев, 1908.
11. *Бобынин В. В.* Гоене Вронский. М., 1894.
12. *Бобынин В. В.* Я. Бернулли и теория вероятностей. М., 1914.
13. *Боев Г. П.* Беседы по истории математики. Саратов, 1947.
14. *Боев Г. П.* Лекции по истории математики. Саратов, 1956.
15. *Болотовский Б. М.* Оливер Хевисайд. М.: Наука. 1985.
16. *Бугай А. С.* Тлумачный словник математічних термінів. Київ, 1964.
17. *Бурбаки Н.* Алгебра. М.: Наука, 1966.
18. *Бурбаки Н.* Интегрирование меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1965.
19. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963. 2-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.
20. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.
21. *Бут К., Бут Э.* Автоматические цифровые машины. М.: Физматгиз, 1959.
22. *Бюлер В.* Гаусс. М.: Наука. 1989.
23. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. М.: Физматгиз, 1959. 2-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.
24. *Ван дер Поль Б., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М.: ИЛ, 1952.
25. *Васильев А. В.* Исторический очерк развития идей бесконечно малых. Казань, 1906.
26. *Васильев А. В.* Математика. Пг., 1921.
27. *Васильев А. В.* Роль профессора Вейерштрасса в современном развитии математики. Казань, 1895.

28. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.
29. *Ващенко-Захарченко М. Е.* История математики. Киев, 1883.
30. *Ващенко-Захарченко М. Е.* Исторический очерк развития аналитической геометрии. Киев, 1884.
31. *Ващенко-Захарченко М. Е.* Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений. Киев, 1862.
32. *Вебер Г., Вельштейн Й.* Энциклопедия элементарной математики. Одесса: Матезис, 1911.
33. *Вилейтнер Г.* Как рождалась современная математика. М.; Л.: Госиздат, 1927.
34. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Физматгиз, 1966.
35. *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. М.: Наука, 1965.
36. *Винер Н.* Кибернетика. М.: Советское радио, 1968.
37. *Виппер Ю. Ф.* Семейство математиков Бернулли. М., 1875.
38. Вопросы истории естествознания и техники. М.: Изд-во АН СССР, 1956–2006.
39. *Воронина М. М.* Габриэль Ламе. Л.: Наука, 1987.
40. *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. М.: Наука, 1967.
41. *Выгодский М. Я.* Возникновение дифференциальной геометрии // Монж Г. Приложение анализа к геометрии. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
42. *Ганкель Г.* Теория комплексных числовых систем. Казань, 1912.
43. Гаспар Монж. Сборник статей к 200-летию со дня рождения / Под ред. В. И. Смирнова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
44. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 4-е изд. М.: УРСС, 2004.
45. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. М.: Просвещение, 1964.
46. *Гнеденко Б. В.* Из истории науки о случайном. М.: Знание, 1981.
47. *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* Чарльз Бэббедж. М.: Знание, 1973.
48. *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* Джон Непер. М.: Наука, 1980.
49. *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* От абака до компьютера. М.: Знание, 1975.
50. *Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. М.: Мир, 1986.
51. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 2-е изд. М.: УРСС, 2004.
52. *Дарбу Г.* Этюд о развитии геометрических методов. Казань, 1911.
53. *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
54. *Демидов С. С.* У истоков современной алгебры. М.: Знание, 1971.
55. *Депман И. Я.* Из истории математики. М.; Л.: Детгиз, 1950.
56. *Депман И. Я.* История арифметики. М.: Учпедгиз, 1959. 3-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.
57. *Дирихле (Лежен) П. Г.* Лекции по теории чисел. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
58. *Дирихле Лежен П.* Карл Густав Якоб Якоби / Пер. В. В. Бобынина. М., 1886.
59. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966.
60. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.

61. *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902.
62. Жозеф Луи Лагранж, 1736–1936. Сборник статей / Под обш. ред. А. Н. Крылова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937.
63. Исаак Ньютон. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. Казань: Изд-во АН СССР, 1943.
64. Историко-математические исследования. М.: Физматгиз, 1948–2006.
65. История математики от древнейших времен до начала XIX века: В 3 т. / Под общ. ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970–1973.
66. История отечественной математики: В 4 т. Киев, 1966–1970.
67. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1949–1956.
68. *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. Одесса, 1922.
69. *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии. М.: Изд-во МГУ, 1963.
70. Карл Фридрих Гаусс. Сборник статей // Под обш. ред. И. М. Виноградова. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
71. *Карри Х.* Основания математической логики. М.: Мир, 1969.
72. *Кац М., Улам С.* Математика и логика. М.: Мир, 1971.
73. *Киричинский Р. И.* Математический словарь. Киев, 1914.
74. *Клайн М.* Математика. Поиски истины. М.: Мир, 1988.
75. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.
76. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. М.; Л.: ГОНТИ, 1939. 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
77. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
78. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. М.; Л.: НКТП СССР, 1936. 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
79. *Клейн Ф.* Памяти Софуса Ли. Казань, 1899.
80. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М.; Л.: ГТТИ, 1933.
81. *Коксmер Х. С.* Действительная проективная плоскость. М.: Физматгиз, 1959.
82. *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
83. *Кольман Э. Я.* Бернард Больцано. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
84. *Кольман Э. Я., Юшкевич А. П.* Математика до эпохи Возрождения. М.: Физматгиз, 1961.
85. *Кондаков Н. И.* Логический словарь. М.: Наука, 1971.
86. *Коренцова М. М.* Колин Маклорен. М.: Наука, 1998.
87. *Крылов А. Н.* Леонард Эйлер. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1933.
88. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
89. *Куратовский К., Мостовской А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
90. *Кэджори Ф.* История элементарной математики с указаниями на методы преподавания. Одесса: Матезис, 1910.
91. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
92. *Лебедев В. И.* Очерки по истории точных наук. 1919.
93. Леонард Эйлер (1707–1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935.
94. Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

95. *Ливанова А. М.* Три судьбы. Постижение мира. М.: Знание, 1969.
96. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1965.
97. *Лурье С. Я.* Архимед. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945.
98. *Лурье С. Я.* Математический эпос Кавальери // Кавальери Б. Геометрия. М.; Л.: ГТТИ, 1940.
99. *Майстров Л. Е.* Теория вероятностей. Исторический очерк. М.: Наука, 1967.
100. *Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г.* Толковый словарь математических терминов. М.: Просвещение, 1965.
101. *Маркушевич А. И.* Очерки по истории теории аналитических функций. М.; Л.: ГТТИ, 1951.
102. *Маркушевич А. И.* Ряды. Элементарный очерк. М.: Гостехиздат, 1957.
103. *Матвиевская Г. П.* Очерки истории тригонометрии. Ташкент, 1990
104. Математика в современном мире. М.: Мир, 1969.
105. Математическое просвещение. М.: Физматгиз, 1957–1961.
106. *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975. 2-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.
107. *Медведев Ф. А.* Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974.
108. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX в. М.: Наука, 1965.
109. *Медведев Ф. А.* Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982.
110. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв. М.: Наука, 1976. 2-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.
111. Международный математический конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961.
112. *Миронов Б. Н., Степанов З. В.* Историк и математика. Л.: Наука, 1975.
113. *Нікішов В. В.* Словник походження математічних термінів. Київ, 1935.
114. *Ожигова Е. П.* Математика в Петербургской академии наук в конце XVIII – первой половине XIX века. Л.: Наука, 1980.
115. *Ожигова Е. П.* Что такое теория чисел? М.: Знание, 1970. 2-е изд. М.: УРСС, 2004.
116. *Орлова Е. А.* Введение в специальность «математика» (математическая терминология). М.: Изд-во МГУ, 1989.
117. Очерки по истории математики / Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Изд-во МГУ, 1997.
118. *Паплаускас А. Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. М.: Наука, 1966.
119. *Пекелис В. Д.* Кибернетическая смесь. М.: Знание, 1970.
120. *Песин И. Н.* Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1966.
121. *Погребысский И. Б.* Готфрид Вильгельм Лейбниц. М.: Наука, 1971.
122. *Полищук Е. Н., Шапошникова Т. О.* Жак Адамар. М.: Наука. 1990.
123. *Польский Н. И.* О различных геометриях. Киев: Изд-во АН УССР, 1962.
124. *Попов Г. Н.* История математики. М., 1920.
125. *Попов Г. Н.* Математический словарь. М., 1923.
126. *Попов Г. Н.* Очерки по истории математики. М.; Л., 1925.
127. *Порецкий П. С.* Исторический очерк развития сферической тригонометрии. Казань, 1887.
128. *Постников М. М.* Магические квадраты. М.: Наука, 1964.

129. Проблемы Гильберта. Сборник / Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969.
130. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. М.: Физматгиз, 1962. 4-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
131. *Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д.* Стереографическая проекция. М.: Наука, 1973.
132. *Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П.* Предыстория неевклидовой геометрии на Средневековом Востоке. М.: Изд-во Восточной литературы, 1960.
133. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.
134. *Рыбников К. А.* История математики. М.: Изд-во МГУ, 1960–1963.
135. *Рынин Н. А.* Значение начертательной геометрии и сравнительная оценка главнейших ее методов. СПб., 1907.
136. *Рынин Н. А.* Материалы к истории начертательной геометрии. Л., 1938.
137. *Савелов А. А.* Замечательные кривые. Томск, 1938.
138. *Савелов А. А.* Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960.
139. *Саткевич А. А.* Леонард Эйлер. СПб., 1907.
140. *Серпинский В.* О теории множеств. М.: Просвещение, 1966.
141. *Стинрод Н., Чинн У.* Первые понятия топологии. М.: Мир, 1967. 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
142. *Стройк Д.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1964.
143. *Стройк Д.* Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия. М.; Л.: ОГИЗ, 1941. 2-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.
144. *Стяжкин Н. И.* Становление идей математической логики. М.: Наука, 1964.
145. *Таннери П.* Основные понятия математики. СПб., 1914.
146. *Тиле Р.* Леонард Эйлер. Киев, 1983.
147. *Тимченко И. И.* Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. Одесса, 1899.
148. *Тропфке И.* История элементарной математики. Ч. I. 1914.
149. Труды института истории естествознания и техники. М.: Наука.
150. Украинский математический журнал.
151. *Успенский Я.* Очерк истории логарифмов. Пг., 1923.
152. Успехи математических наук.
153. *Ферма П.* Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М.: Наука, 1992.
154. *Фрейман Л. С., Никифоровский В. А.* Рождение новой математики. М.: Наука, 1976.
155. *Фрейман Л. С.* Творцы высшей математики. М.: Наука, 1968.
156. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. 2-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.
157. *Цейтен Г. Г.* История математики в XVI и XVII веках. М.; Л.: ОНТИ, 1938.
158. *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: ИЛ, 1960.
159. *Шаль М.* Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1883.
160. *Шеннон К. Э.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
161. *Шереметевский В. П.* Очерки по истории математики. М., 1940. 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
162. *Штокало И. З.* Операционное исчисление. Киев, 1972.

163. Энциклопедия элементарной математики. М.; Л.: ГТТИ, 1951–1966.
164. *Эфрос А. М., Данилевский А. М.* Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков; Киев: ГНТИ, 1937.
165. *Юшкевич А. П.* Декарт и математика // Декарт Р. Геометрия. М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
166. *Юшкевич А. П.* Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке // Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. М.; Л.: ГТТИ, 1933.
167. *Юшкевич А. П.* Исторический очерк // Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
168. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М.: Наука, 1960.
169. *Юшкевич А. П.* Математика в ее истории. М.: Янус, 1996.
170. *Юшкевич А. П.* Первый печатный курс дифференциального исчисления // Лопиталь Г. Анализ бесконечно малых. М.; Л.: ГТТИ, 1935.
171. *Яглом И. М.* Герман Вейль. М.: Знание, 1967. 2-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
172. *Яглом И. М.* Теория информации. М.: Знание, 1961.
173. *Allman G. J.* Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin, 1889.
174. American mathematical monthly.
175. Archive for History of Exact Sciences.
176. Archives Internationales d'Histoire des Sciences.
177. *Bateman H.* Report of the history and present state of the theory of integral equations. London, 1911.
178. *Belhost B.* Cauchy. Paris, 1988.
179. *Berg E. J.* Heaviside's operational calculus. N. Y., 1929.
180. *Bottozzini U.* The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. N. Y., 1986.
181. *Boyer C. B.* The history of the analytic geometry. N. Y., 1956.
182. *Boyer C. B.* The history of the calculus and its conceptual development. N. Y., 1959.
183. *Braunmuhi A. von.* Vorlesungen tiber Geschichte der Trigonometrie. Leipzig, 1900.
184. *Brunet P.* La vie et l'oeuvre de Clairaut. Paris, 1952.
185. *Cajori F.* A history of mathematical notations. Chicago, 1928, 1930.
186. *Cajori F.* A history of mathematics. N. Y., 1931.
187. *Cantor M.* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig, 1907–1913.
188. *Cassina U.* L'opera di Giuseppe Peano. Torino, 1957–1959.
189. *Coolidge J. L.* A history of geometrical methods. Oxford, 1940.
190. *Coolidge J. L.* A history of the conic sections and quadric surfaces. Oxford, 1945.
191. *Coolidge J. L.* The geometry of complex doman. Oxford, 1924.
192. *Coolidge J. L.* The mathematics of great amateurs. Oxford, 1949.
193. *Crowe M.* A History of vector analysis. London, 1967.
194. *Davis H. T.* The present status of integral equations // Indiana university studies. 1926. Vol. XVIII.
195. *Dehn M., Engel F.* Moritz Pasch. Giessen, 1931.
196. *Dickson E.* History of the theory of numbers. Washington, 1920–1923.
197. *Doetsch G.* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin, 1937.

198. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.
199. *Gardner M. F., Barnes J. L.* Transicuts in linear systems. N.Y.; London, 1942.
200. *Grabiner J. V.* The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus. London, 1981.
201. *Grattan-Guiness I.* The development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. London, 1970.
202. *Grattan-Guiness I.* Joseph Fourier. London, 1972.
203. *Hankel H.* Zur Geschichte der Mathematik Alterthum und Mitteralter. Leipzig, 1874.
204. *Hankins T. L.* Sir Rowan Hamilton. Baltimor; London, 1970.
205. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.
206. *Kennedi H. C.* Life and Works of Giuseppe Peano. Boston; London, 1980.
207. *Kennedi Y. C.* Selected Works of G. Peano. Toronto; Buffalo, 1973.
208. *Klein F.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin, 1927.
209. *Koenigsberger L.* Jacobi G. G. J. Leipzig, 1904.
210. *Kollros L.* Jacob Steiner. Basel, 1947.
211. *Kowalewski G.* Einführung in die Determinantentheorie. Berlin, 1925.
212. *Lanczos C.* Discours on Fourier Series. Edinbourg; London, 1966.
213. *Loria G.* Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Leipzig, 1902.
214. *Meschkowski H.* Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig, 1967.
215. *Monna A. F.* Functional analysis in historical perspective. Utrecht, 1973.
216. *Mügler Ch.* Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs. Paris, 1958.
217. *Muir Th.* Contributions to the history of determinants. London, 1930.
218. *Muir Th.* The theory of determinants in the historical order of its development. London, 1890.
219. *Muller F.* Mathematische Vokabularium. Leipzig, 1900.
220. *Ore O.* Number theory and its history. N.Y., 1948.
221. *Peano G.* Formulaire de Mathematiques. Turin, 1901.
222. *Reiff R.* Geschichte der unendlichen Reihen. Tubingen, 1889.
223. *Scott J. F.* The mathematical works of John Wallis. London, 1938.
224. Studies in the History of Statistics and Probability. London, 1970.
225. *Todhunter I.* A history of the mathematical theory of the probability. London, 1865.
226. *Tropfke J.* Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Leipzig, 1930–1940.
227. *Valson C. A.* La vie et les travaux du baron Cauchy. Paris, 1868.
228. *Wheeler L. P.* Josiah Willard Gibbs. London, 1966.
229. *Whittaker E. T.* A history of the theories of Aether and Electricity. London, 1953.

Именной указатель

...Даты фабриковались Аполлодором и другими хронологами поздней древности таким путем: бралась наиболее замечательная (или единственная известная) дата жизни великого человека и принималась за ακμη (высший расцвет), совпадавший по античным представлениям с достижением 40 лет; исходя из этой даты и вычислялись даты рождения и смерти.

С. Я. Лурье.
Очерки по истории античной науки

Об авторе

Надежда Вячеславовна АЛЕКСАНДРОВА

Закончила механико-математический факультет Томского университета и аспирантуру под руководством профессора Изабеллы Григорьевны Башмаковой. Работает в вузах Москвы (МИХМ и МАИ) и систематически читает лекции на факультетах повышения квалификации преподавателей математики. Отсюда — естественные поиски методики, которая позволила бы повысить КПД работы преподавателя, иными словами, вызвать активный интерес, облегчить студентам понимание материала. Очень скоро обнаружилось, что одним из таких средств могут быть исторические экскурсы. Со временем (за какие-нибудь 30–40 лет) удалось собрать материал, которым автор и делится с «пользователями».

Автор с глубокой благодарностью вспоминает И. Г. Башмакову, Г. Е. Шилова, Г. Л. Лунца, Р. С. Гутера, Л. Я. Цлафа и многих других известных ученых и педагогов, проявивших интерес к работе автора и оказавших помощь при написании настоящей книги.

6067 ID 75808

9 785382 008394

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7 (499) 135–42–16
Тел./факс: 7 (499) 135–42–46

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru