

ТРУДЫ
НАМИ

Выпуск 69

— 1964 —

Государственный комитет автотракторного и сельскохозяйственного
машиностроения при Госплане СССР

Управление по развитию автомобильной промышленности

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ НАУЧНО-
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АВТОМОБИЛЬНЫЙ И АВТОМОТОРНЫЙ ИНСТИТУТ

~~НАМИ~~

ТРУДЫ
НАМИ

Выпуск 69

ОТДЕЛ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Москва

1964

В первой статье излагается достаточно простой для практического применения вывод зависимости свободного радиуса колеса с эластичной шиной от внутреннего давления воздуха с применением положений теории резинокордной оболочки, разработанных проф. В. Л. Бидерманом.

Во второй статье предлагается способ приложения уравнения неразрывности механики сплошных сред к анализу кинематики качения колеса с эластичной шиной. Ее целью является получение на основе простейших предпосылок уравнения, связывающего радиус качения ведомого колеса с нагрузочными параметрами шины.

Третья статья содержит изложение результатов экспериментальной проверки основных соотношений, полученных в первых двух статьях. В ней дается способ обработки экспериментальных данных для накопления количественных сведений по константам связи между радиусом качения ведомого колеса, свободным радиусом шины, внутренним давлением воздуха и нормальной нагрузкой.

Все три статьи носят поисковый характер и направлены на получение вспомогательного аналитического и экспериментального материала, необходимого для кинематического и силового анализа работы колесного движителя многоприводных автомобилей.

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ВОЗДУХА НА СВОБОДНЫЙ РАДИУС КОЛЕСА С ЭЛАСТИЧНОЙ ШИНОЙ

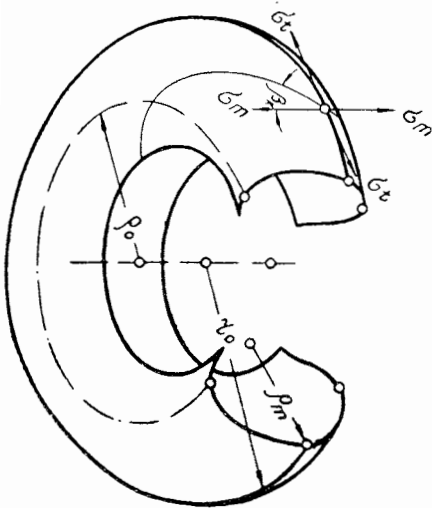
Параметры качения колеса с эластичной шиной существенно зависят от ее исходных геометрических размеров в свободном состоянии. Последние, в свою очередь, находятся в зависимости от внутреннего давления воздуха p_w . Даже незначительное изменение диаметральных размеров шин (в среднем не превышающее 1—1,5% исходной величины диаметра) в рабочем диапазоне p_w , как показывают эксперименты, оказывает значительное влияние на абсолютную величину и характер изменения радиуса качения колеса в зависимости от приложенной нагрузки. Происходящее вследствие этого нарушение правильной кинематики работы колес многоприводного автомобиля в режимах блокировки вызывает появление дополнительных потерь сопротивления качению или возникновение циркуляции мощности в силовом приводе.

Несмотря на наличие многочисленных экспериментальных данных о характере изменения величины свободного радиуса шины r_0 от p_w , расчет ряда параметров, характеризующих работу движителя многоприводного автомобиля, осложнен из-за отсутствия простого аналитического выражения функции $r_0 = f(p_w)$, пригодного для регулярных инженерных расчетов без сложных вспомогательных выкладок.

Ниже излагается попытка установления такой взаимосвязи, которая, несмотря на ряд допущений, приближается к экспериментальным характеристикам шин в рабочем диапазоне их внутреннего давления.

Рассматривая шину как тонкостенную оболочку, выделим на ее экваторе элемент, находящийся в двумерном напряженном состоянии (фиг. 1).

Следуя В. Л. Бидерману [1; 2], воспользуемся уравнением Лапласа и уравнением равновесия части тороидной оболочки, ограничиваемой меридианом радиуса r_0 и окружностью радиуса ρ_0 , являющейся линией касания с тором плоскости, перпендикулярной оси вращения шины. Первое из этих уравнений, как известно, устанавливает следующую связь между окружным σ_t и меридиональным σ_m напряжениями для элемента на экваторе:



Фиг. 1. Схема эластичной шины — резинокордной оболочки, — нагруженной внутренним давлением.

$$\frac{\sigma_t}{r_0} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p_w}{\delta_{пр}}, \quad (1)$$

где ρ_m — радиус кривизны профиля шины в точке экватора;
 $\delta_{пр}$ — приведенная толщина резинокордной оболочки.

Второе уравнение

$$\pi p_w (r_0^2 - \rho_0^2) = 2\pi r_0 \delta_{пр} \sigma_m$$

приводит к соотношению для меридионального напряжения

$$\sigma_m = \frac{p_w (r_0^2 - \rho_0^2)}{2\delta_{пр} r_0} = \frac{p_w \left(r_0 - \frac{\rho_0}{r_0} \cdot \rho_0 \right)}{2\delta_{пр}}. \quad (2)$$

Первым приближением к уравнению (2) является функция

$$\sigma_m = \frac{p_w (r_0 - c\rho_0)}{2\delta_{пр}}, \quad (3)$$

где константа

$$c = \frac{\rho_0}{r_0} \approx \frac{\rho_0}{r_{ш}}, \quad (4)$$

причем r_n — радиус экватора в исходном (ненакачанном; $p_w = 0$) состоянии шины.

Вызываемая заменой радиуса r_0 на r_n количественная погрешность в соответствии с математическим правилом определения относительной погрешности алгебраической функции $\delta\sigma_m$ в зависимости от аргументальной погрешности δc может быть оценена, исходя из формулы (3), соотношением:

$$\delta\sigma_m = \delta(r_0 - cr_0) = \left| \frac{cr_0}{r_0 - cr_0} \right| \delta c.$$

Подставляя для коэффициента при δc точное значение константы $c = \frac{p_0}{r_0}$, получаем:

$$\delta\sigma_m = \left| \frac{p_0^2}{r_0^2 - p_0^2} \right| \delta c. \quad (5)$$

Так как для существующих шин величина коэффициента при δc заключена в пределах 0,6—1,7, то формулу (5) записываем в виде неравенства

$$\delta\sigma_m < (0,6 \div 1,7) \delta c. \quad (6)$$

Исходя из выражения (4), получаем:

$$\delta c = \delta r_0 = \frac{r_0 - r_n}{r_n}.$$

По многочисленным опытным данным последняя величина, т. е. относительное колебание радиуса шины от изменения p_w , не превышает, как правило, 1—2%. Тогда согласно неравенству (6)

$$\delta\sigma_m \leq 0,6 \div 3,4\%.$$

Для наиболее часто встречающихся конструкций шин высокой проходимости $\delta\sigma_m \leq 1,5\%$.

Воспользуемся связью между относительной деформацией ε_t в окружном направлении для элемента, находящегося в двумерном напряженном состоянии (см. фиг. 1), и соответствующими главными напряжениями σ_t и σ_m :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E_t} (\sigma_t - \mu_m \sigma_m), \quad (7)$$

где E_t и μ_m — некоторые приведенные осредненные значения соответственно модуля упругости первого рода и величины, аналогичной коэффициенту Пуассона.

Однократное использование зависимости (7) применительно к двум главным направлениям с отнесением величины E_t к окружному направлению, а μ_m — к перпендикулярному, не противоречит анизотропности упругих свойств резинокордной оболочки шины. Величину μ_m связываем со структурной особенностью резинокордной покрышки согласно отношению В. Л. Бидермана [2], записанному для точки на экваторе покрышки в виде

$$\varepsilon_t = -\varepsilon_m \operatorname{ctg}^2 \beta_k,$$

где β_k — угол наклона нити корда по короне покрышки.

Отсюда

$$\mu_m = -\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_t} = \operatorname{tg}^2 \beta_k. \quad (8)$$

Находя из уравнения (1) величину σ_t и подставляя ее в зависимость (7), получаем:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E_t} \left[\left(\frac{p_w}{\delta_{\text{нр}}} - \frac{\sigma_m}{\rho_m} \right) r_0 - \mu_m \sigma_m \right]$$

или с учетом соотношения (8)

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E_t} \left[\frac{p_w}{\delta_{\text{нр}}} \cdot r_0 - \sigma_m \left(\frac{r_0}{\rho_m} + \operatorname{tg}^2 \beta_k \right) \right]. \quad (9)$$

Основываясь на малых изменениях двух главных радиусов кривизны профиля оболочки r_0 и ρ_m по сравнению с их абсолютными величинами, примем их отношение постоянным и равным некоторой средней величине для рабочего диапазона изменения p_w , а сумму в формуле (9) при σ_m заменим постоянным коэффициентом

$$\frac{r_0}{\rho_m} + \operatorname{tg}^2 \beta_k = k_{\text{ср}} = \operatorname{const}. \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) с учетом формулы (3) приводится к виду

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E_t} \left[\frac{p_w}{\delta_{\text{нр}}} \cdot r_0 - \frac{p_w (r_0 - c \rho_0)}{2 \delta_{\text{нр}}} \cdot k_{\text{ср}} \right]. \quad (11)$$

Величина ε_t также связана с переменным радиусом r_0 и исходным радиусом r_H соотношением

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi r_0 - 2\pi r_H}{2\pi r_H} = \frac{r_0}{r_H} - 1. \quad (12)$$

Приравнивая правые части выражений (11) и (12) и разрешая полученное уравнение относительно r_0 , находим:

$$r_0 = r_n \frac{1 + \frac{k_{cp} c p_0}{2 E_t \delta_{np}} \cdot p_w}{1 + \frac{k_{cp} - 2}{2 E_t \delta_{np}} \cdot r_n p_w} \quad (13)$$

или

$$\boxed{r_0 = r_n \cdot \frac{1 + \nu_I p_w}{1 + \nu_{II} p_w}}, \quad (14)$$

где константы

$$\nu_I = \frac{k_{cp} c p_0}{2 E_t \delta_{np}} \text{ см}^2/\text{кг} \quad (15)$$

и

$$\nu_{II} = \frac{k_{cp} - 2}{2 E_t \delta_{np}} \cdot r_n \text{ см}^2/\text{кг}. \quad (16)$$

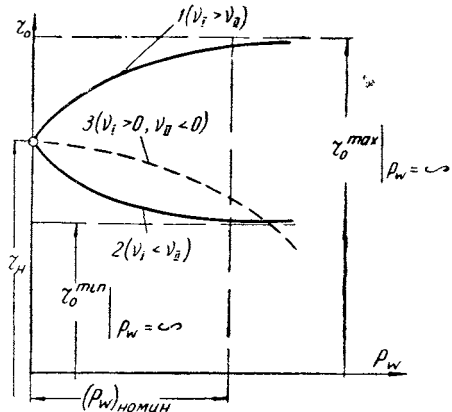
Зависимость (14) устанавливает дробнолинейную (гиперболическую) зависимость величины r_0 от p_w . При положительных константах ν_I и ν_{II} возможны два характерных случая изменения r_0 от p_w , согласующиеся с большинством экспериментальных данных.

Первый случай — возрастание r_0 по мере увеличения p_w по гиперболе 1 (фиг. 2). Это имеет место при неравенстве $\nu_I > \nu_{II}$, которое согласно выражениям (15) и (16) эквивалентно условию

$$k_{cp} c p_0 > (k_{cp} - 2) r_n$$

или

$$k_{cp} > \frac{2 r_n}{r_n - c p_0}.$$



Фиг. 2. Характерные случаи протекания зависимости свободного радиуса шины от внутреннего давления воздуха: 1 и 2 — типичные, встречающиеся в практике случаи; 3 — теоретически возможный, но практически не встречающийся случай.

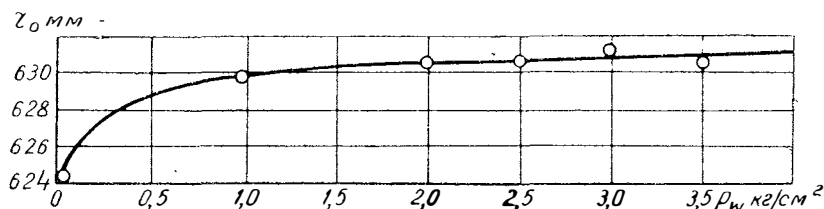
Подставляя в последнее выражение значение c из формулы (4), запишем рассматриваемое неравенство в виде

$$k_{\text{ср}} > \frac{2r_{\text{н}}^2}{r_{\text{н}}^2 - \rho_0^2}. \quad (17)$$

Таким образом, при выполнении условия (17) свободный радиус увеличивается по мере роста внутреннего давления. Радиус r_0 с ростом p_w возрастает монотонно, асимптотически приближаясь к некоторому значению r_0^{max} (см. фиг. 2), которое для дробнолинейной функции (14) на основе известного соотношения аналитической геометрии [3] для горизонтальной асимптоты гиперболы равно:

$$r_0^{\text{max}} \Big|_{p_w = \infty} = \frac{\nu_{\text{I}}}{\nu_{\text{II}}} \cdot r_{\text{н}} > r_{\text{н}}. \quad (18)$$

Один из многочисленных примеров, относящихся к шинам с такими свойствами, приведен на фиг. 3.



Фиг. 3. Зависимость свободного радиуса шины 14,00—20 модели И-172 от внутреннего давления воздуха. (График построен по уравнению (14) при $\nu_{\text{I}} = 3,096$ и $\nu_{\text{II}} = 3,060$; точками отмечены экспериментальные данные).

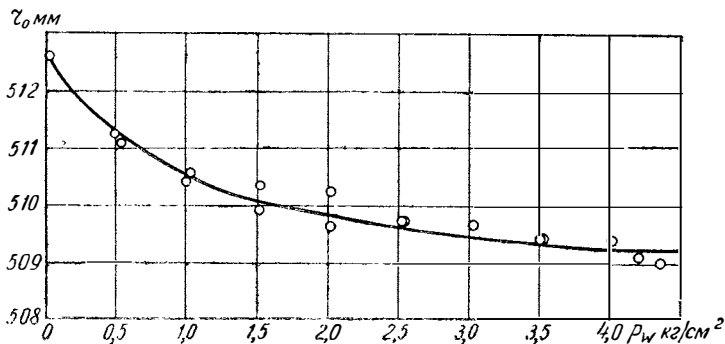
Второй случай — уменьшение r_0 по мере роста p_w по гиперболе 2 (см. фиг. 2). Это имеет место при $\nu_{\text{I}} < \nu_{\text{II}}$ или при

$$k_{\text{ср}} < \frac{2r_{\text{н}}^2}{r_{\text{н}}^2 - \rho_0^2}. \quad (19)$$

Соответствующая данному случаю гипербола имеет горизонтальной асимптотой значение r_0 , равное:

$$r_0^{\text{min}} \Big|_{p_w = \infty} = \frac{\nu_{\text{I}}}{\nu_{\text{II}}} \cdot r_{\text{н}} < r_{\text{н}}. \quad (20)$$

Практический пример, относящийся к шине с подобной характеристикой, показан на фиг. 4.



Фиг. 4. Зависимость свободного радиуса шины 10,00—18 модели ИК-8 от внутреннего давления воздуха. (График построен по уравнению (14) при $\nu_I=0,712$ и $\nu_{II}=0,714$; точками отмечены экспериментальные данные).

Исходя из выражений (14) и (16), теоретически возможен еще и **третий случай** — монотонное падение величины r_0 с ростом p_w по гиперболе 3 (см. фиг. 2, пунктирная кривая). Такой характер протекания кривой $r_0 = f(p_w)$ мог бы иметь место при $\nu_I > 0$ и $\nu_{II} < 0$, однако в практике он не встречался. Это свидетельствует о том, что во всех рассматриваемых случаях конструкция шин соответствует условию $\nu_{II} > 0$, которое согласно формуле (16) эквивалентно неравенству $k_{cp} > 2$ или

$$\frac{r_0}{\rho_m} + \operatorname{tg}^2 \beta_k > 2. \quad (21)$$

Для проверки соответствия изложенных результатов основным положениям статики резинокордной оболочки шины [1; 2] рассмотрим несколько подробнее неравенство (21).

Полученное В. Л. Бидерманом [1] уравнение связи между геометрическими параметрами шины, определяющими ее равновесную конфигурацию, можно в принятых в данной статье обозначениях для точки, лежащей на экваторе покрышки, записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho_m} + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_k}{r_0} = \frac{2r_0}{r_0^2 - \rho_0^2}. \quad (22)$$

Умножая обе части этого уравнения на r_0 , получим:

$$\frac{r_0}{\rho_m} + \operatorname{tg}^2 \beta_k = 2 \frac{r_0^2}{r_0^2 - \rho_0^2} = \frac{2}{1 - \left(\frac{\rho_0}{r_0}\right)^2}. \quad (23)$$

Вследствие того, что величина ρ_0 всегда меньше радиуса r_0 , левая часть равенства (23), а следовательно, и неравенства (21) не может быть меньше 2.

Таким образом, использование уравнения (22) для равновесного состояния профиля шины подтверждает, что неравенство (21) всегда соблюдается, в результате чего константа ν_{II} , входящая в формулу (14), всегда положительна. Это дает возможность применять формулу (14) для теоретического анализа некоторых вопросов работы колесного движителя автомобилей.

Для конкретных числовых расчетов необходимо располагать значениями констант ν_I и ν_{II} , получаемыми несложными экспериментальным путем (измерение периметра шины при четырех-пяти значениях внутреннего давления воздуха)*.

Для тех редких случаев, когда особенности конструкции некоторых шин обуславливают отклонение от гиперболического характера протекания функции $r_0 = f(p_w)$, выражаемого формулой (14), можно прибегнуть к прямой подстановке выражения (2) в формулу (9). Однако получающееся при этом выражение оказывается громоздким, что осложняет дальнейшие выкладки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Бидерман. Расчет формы профиля и напряжений в элементах пневматической шины, нагруженной внутренним давлением. Труды НИИШП. Сб. 3. М., Госхимиздат, 1957.

2. В. Л. Бидерман и др. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). Под общей редакцией В. Л. Бидермана. М., Госхимиздат, 1963.

3. И. И. Привалов. Аналитическая геометрия. М.—Л., ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

* Способ обработки опытных данных для вычисления этих констант приведен в третьей статье настоящего сборника.

Канд. техн. наук В. А. Петрушов

ПРИЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД К АНАЛИЗУ КИНЕМАТИКИ ЭЛАСТИЧНОГО КОЛЕСА

Введение

Движение замкнутых силовых элементов, обладающих упругими свойствами, подобно приводным ремням (плоским, клиновым и круглым), транспортерным резиновым лентам, резинокордным гусеницам и эластичным шинам (сплошным и пневматическим), характеризуется в пределах цикла регулярным изменением деформаций и линейных скоростей элементарных участков по мере прохождения ими различных точек траектории. Установление связи между деформациями и скоростями в таких силовых элементах во многих случаях является узловым вопросом исследования кинематики и мощностных потерь механизма в целом.

В данной статье подчеркивается, что анализ кинематики перечисленных выше тяговых элементов имеет существенно общую сторону и может быть выполнен на основе рассмотрения законов движения замкнутого потока массы (резиновой, резинокордной и т. п.), подчиняющегося условию неразрывности сплошной среды

$$\rho FV = \text{const}, \quad (1)$$

причем

$$\rho = \frac{dM}{dW},$$

где ρ — массовая плотность в данном сечении потока;

F — поперечное сечение;

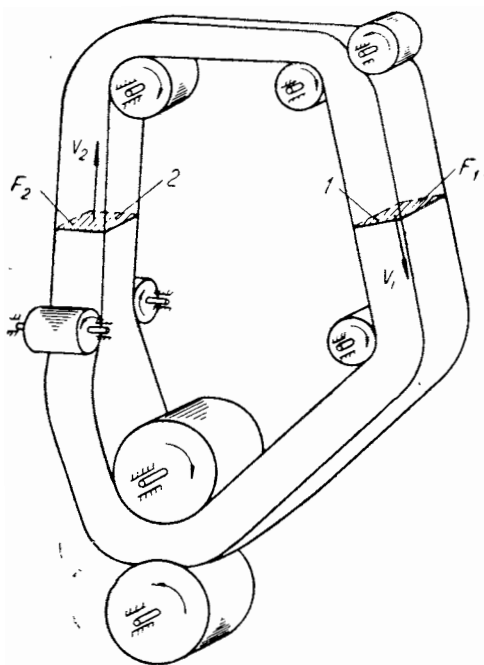
V — средняя скорость потока в этом сечении;

M — масса;

W — объем.

Уравнение (1), характеризующее установившееся на всем протяжении состояние потока, можно записать в ином виде, снабдив входящие в уравнение величины индексами 1, 2, 3...*i*, соответствующими бесконечному числу различных сечений, т. е.

$$\rho_1 F_1 V_1 = \rho_2 F_2 V_2 = \dots = \rho_i F_i V_i = \text{const.} \quad (2)$$



Фиг. 1. Схема к выводу уравнения неразрывности для потока сплошной среды, подчиняющейся закону Гука.

Уравнения (1) и (2) отражают постоянство массы тела, проходящей в единицу времени через данное сечение. Если эта масса для двух сечений не была бы постоянной, то масса потока, заключенная внутри данных сечений, должна неограниченно возрастать или по истечении некоторого времени полностью исчезнуть, что противоречит условию стационарности потока [1].

Для потока механического упругого тела, например резинового ремня, направляемого роликами (фиг. 1), предположение о непостоянстве массы, проходящей через сечения 1 и 2, равносильно его разрыву на участке 1—2 при

$$\rho_1 F_1 V_1 < \rho_2 F_2 V_2$$

или разрыву на участке 2—1 при

$$\rho_1 F_1 V_1 > \rho_2 F_2 V_2.$$

Для исследования потоков механической среды, находящейся в упругом состоянии, применим закон Гука. Использование уравнения неразрывности сжимаемой жидкости совместно с соотношениями, вытекающими из закона Гука при-

нительно к анализу работы плоскоременной передачи, принадлежит Кретцу и Н. Е. Жуковскому. Посредством этого способа Н. Е. Жуковский в 1894 г. дал простое аналитическое решение запутанной в то время задачи о скольжении упругого ремня на шкивах [2]. Это показывает возможность применения уравнения неразрывности совместно с законом Гука также к выводу некоторых основных соотношений кинематики автомобильного колеса, приведенных в последующих разделах данной статьи*.

Уравнение неразрывности для потока сплошной среды, подчиняющейся закону Гука по способу Кретца-Жуковского

Для вывода этого уравнения воспользуемся построением Кретца-Жуковского в форме, излагаемой Б. А. Прониным [3] применительно к плоским и клиновым ремням.

Если обозначить через F_n площадь сечения кольцевого тела (см. фиг. 1), находящегося в этом сечении в свободном недеформированном состоянии, то в соответствии с законом Гука после растяжения тела при относительной деформации ϵ в направлении, перпендикулярном этому сечению, его площадь станет равной:

$$F = F_n (1 - \mu\epsilon)^2, \quad (3)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Аналогично связь элементарных объемов тела, подчиняющегося закону Гука, соответственно до (dW_n) и после (dW) деформации характеризуется соотношением

$$dW = dW_n (1 + \epsilon) \cdot (1 - \mu\epsilon)^2. \quad (4)$$

При сжатии в основном направлении алгебраические знаки перед членами с ϵ в двух последних формулах меняются на обратные.

Обозначим через

$$\rho_n = \frac{dM}{dW_n} \quad (5)$$

массовую плотность тела до деформации в данной его точке (сечении). Поскольку масса тела в элементарном объеме до

* Следуя Н. Е. Жуковскому, здесь и далее будем пользоваться законом Гука для резин в качестве первого приближения оценки их упругих свойств, вполне допустимого для зоны относительных деформаций, не превышающих 4—8%, как это имеет место при тангенциальных деформациях беговой дорожки различных шин.

и после деформации сохраняется равной dM , плотность после деформации с учетом формул (4) и (5) выразится в виде

$$\rho = \frac{dM}{dW} = \frac{dM}{dW_H(1 + \epsilon) \cdot (1 - \mu\epsilon)^2} = \frac{\rho_H}{(1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2}. \quad (6)$$

Обозначив через V_H среднюю скорость в некотором недеформированном сечении, в соответствии с уравнением (1) имеем:

$$\rho FV = \rho_H F_H V_H = \text{const}$$

или после подстановки соотношений (3) и (6)

$$\frac{V}{1 + \epsilon} = V_H = \text{const}. \quad (7)$$

Последнюю зависимость можно использовать также в виде

$$\frac{V_1}{1 + \epsilon_1} = \frac{V_2}{1 + \epsilon_2} = \dots = \frac{V_i}{1 + \epsilon_i} = V_H = \text{const}. \quad (8)$$

Это и есть основное уравнение Кретца-Жуковского, связывающее скорости тела в нормальных к потоку сечениях.

Уравнения (7) и (8) устанавливают следующую зависимость тангенциальной средней скорости в любом (текущем) сечении от известной скорости в некотором другом сечении (например, 1, 2... i и т. д.), в том числе и недеформированном, обозначения параметров которого снабжены индексом n , а его деформация $\epsilon = 0$:

$$V_i = V_1 \frac{1 + \epsilon_i}{1 + \epsilon_1} = V_2 \frac{1 + \epsilon_i}{1 + \epsilon_2} = \dots = V_n(1 + \epsilon_i). \quad (9)$$

Уравнение неразрывности для замкнутого потока сплошной среды, подчиняющейся закону Гука

В качестве простейшего примера замкнутого потока рассмотрим вращающееся автомобильное колесо с пневматической шиной, не передающей внешней нагрузки. Установим через окружную деформацию связь между тангенциальными скоростями беговой дорожки шины в ее накачанном и ненакачанном состояниях (фиг. 2). Выделим на поверхности беговой дорожки также в подканавочном слое резины по всей ее ширине круговой элемент толщиной dr^* (см. фиг. 2). Если

* Н. Е. Жуковский не прибегает к рассмотрению потока элементарной толщины на контактной поверхности плоского ремня и оперирует усредненными по всему сечению ремня с кордом значениями массовой

беговая дорожка не имеет цилиндрической формы, то рассуждения можно проводить применительно к струйке потока по экватору покрышки шириной dB . При вращении шины, независимо от ее угловой скорости ω_k и деформации от центробежных сил и внутреннего давления за цикл (т. е. за один оборот), через любое ее сечение в соответствии с законом сохранения материи должна проходить масса выделенного кругового элемента, постоянно равная dM_Δ , т. е.

$$\rho dFVT = dM_\Delta = \text{const}, \quad (10)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega_k}$ — период цикла (оборота) колеса, а $dF = Bdr$.

На основании закона (10) имеем связь параметров шины в накачанном (индекс 0) и исходном (индекс n) состояниях:

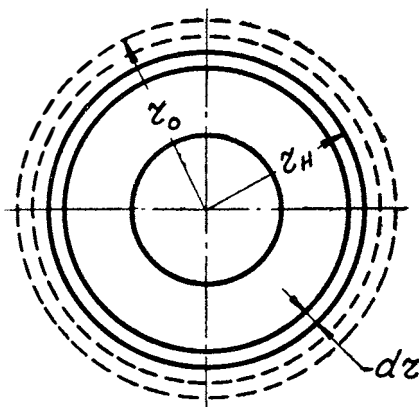
$$\rho_0 dF_0 V_0 T_0 = \rho_n dF_n V_n T_n. \quad (11)$$

Предполагаем, что материал рассматриваемого кольцевого элемента подчиняется закону Гука.

Подставляя зависимости (3) и (6) в уравнение (11) для постоянной угловой скорости ω_k ($T_0 = T_n$), имеем:

$$V_0 = V_n(1 + \epsilon_0).$$

Полученное уравнение соответствует уравнению (9) для деформированных и недеформированных сечений одного и того же потока. Следовательно, уравнение (9), выведенное применительно к различным сечениям одного и того же упругого тела для случая замкнутого потока, распространимо на различные его состояния при условии равенства угловой скорости или периода цикла.



Фиг. 2. Внешний контур шины в исходном и накачанном состояниях.

плотности и скорости. Выделение внешнего по контуру шины, бесконечно тонкого элемента, лежащего, допустим, на дне рисунка протектора, необходимо для того, чтобы абстрагироваться от анизотропных свойств покрышки, поскольку выделенный таким способом элемент при малых деформациях обладает изотропными описываемыми законом Гука свойствами неармированной резины.

В рассмотренном случае

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi r_0 - 2\pi r_H}{2\pi r_H} = \frac{r_0}{r_H} - 1,$$

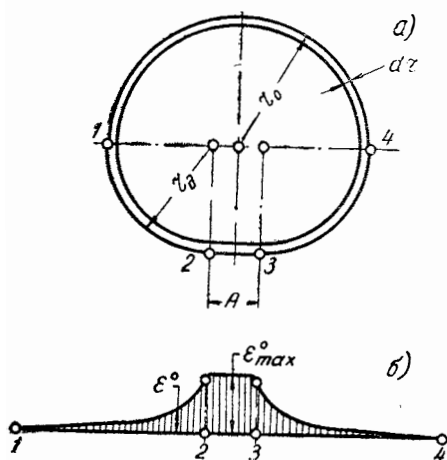
что при подстановке в формулу (12) дает:

$$V_0 = V_H \cdot \frac{r_0}{r_H} = \omega_K r_0,$$

т. е. полное соответствие результату, получаемому непосредственно из кинематических соотношений. Подчеркнем еще раз, что в дальнейших рассуждениях, связанных с использованием уравнения неразрывности, следует иметь в виду замкнутый сплошной поток подканавочной резины, не включая в него дискретный по структуре протектор.

Приложение уравнения неразрывности к анализу кинематики внешнего контура эластичной шины

Рассмотрим неподвижное, опирающееся на твердую поверхность, автомобильное колесо с приложенной к его оси



Фиг. 3. Упрощенная схема деформирования шины в неподвижном или ведомом состоянии, составленная, исходя из экспериментальных данных работы [4]:

a — внешний контур профиля; *б* — развертка эпюры тангенциальных деформаций беговой дорожки.

нормальной нагрузкой G_K . Анализ многочисленных экспериментальных данных, в том числе приведенных, например, в работе [4], показывает, что контур беговой дорожки шины в этом случае может быть с достаточной для практики степенью точности представлен в виде сопряжения трех дуг: участка 4—1 (фиг. 3, *a*) радиуса r_0 , сохраняющегося приблизительно равным свободному радиусу r_0 в накачанном состоянии, и участков 1—2 и 3—4 радиуса r_d с прямой линией участком 2—3 длины A в контакте с дорогой.

По экспериментальным данным В. И. Кнороза [4],

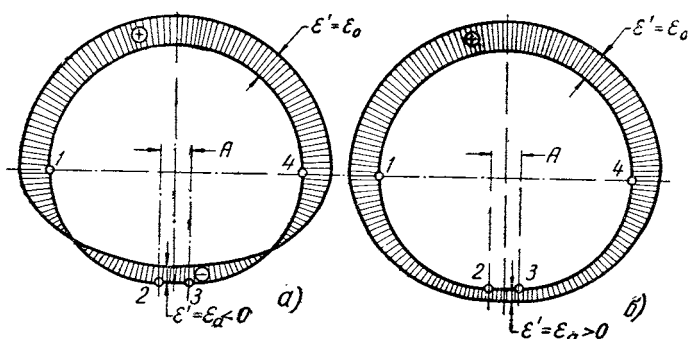
проводившего измерения относительной окружной (тангенциальной) деформации элементов беговой дорожки (тангенциальной) деформации элементов беговой дорожки для неподвижного и ведомого колес, эта деформация имеет характер, близкий к показанному на фиг. 3,б.

Как видно, для верхнего участка шины 4—1 характерно отсутствие изменения относительной деформации в тангенциальном направлении. Участок 2—3 характеризуется максимальной и примерно постоянной величиной относительной деформации сжатия ϵ^0_{\max} , а участки 1—2 и 4—3 — ее постепенным возрастанием от нуля до ϵ^0_{\max} .

При экспериментах за исходную базовую длину элементарного участка беговой дорожки принимался элемент на части 4—1 контура шины, находившийся в состоянии растяжения с относительной деформацией ϵ_0 от внутреннего давления в шине. Учет этого обстоятельства при рассмотрении фиг. 3,б приводит к схеме распределения относительных деформаций по контуру шины, показанной на фиг. 4, где за исходную базовую длину элементарного участка беговой дорожки принимается длина участка недеформированной в окружном направлении покрышки. Эпюры относительных деформаций ϵ' на фиг. 4 получают сдвижением эпюры деформаций сжатия (см. фиг. 3,б) на постоянную величину деформаций растяжения ϵ_0 .

В случае, показанном на фиг. 4,а, относительная деформация ϵ_a на участке контакта с дорогой

$$\epsilon_a = \epsilon_0 - \epsilon^0_{\max} < 0, \quad (12)$$



Фиг. 4. Теоретически мыслимые действительные относительные тангенциальные деформации шины в простейших предпосылках:

а — эпюры деформаций знакопеременного характера; б — то же знакопостоянного характера.

и в случае, показанном на фиг. 4,б,

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 - \varepsilon_{\max}^0 > 0. \quad (13)$$

Переведем теперь мысленно неподвижное нагруженное силой G_k колесо в режим ведомого качения со скоростью V_a .

В первом приближении пренебрегаем незначительным изменением распределения относительных деформаций по контуру шины от силы сопротивления качению, не превышающей на твердой опорной поверхности 0,01—0,02 от G_k .

Выделяя по внешнему контуру шины кольцевой элемент толщиной dr , для кольцевого потока, ограничиваемого поверхностями выделенного элемента, получаем возможность воспользоваться уравнением (9), благодаря которому находим

$$V = V_0 \cdot \frac{1 \mp \varepsilon'}{1 + \varepsilon_0}, \quad (14)$$

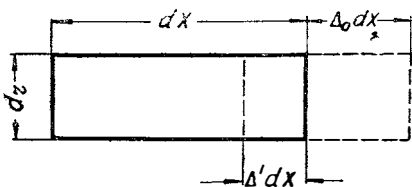
где V — текущая скорость потока в сечениях участков 1—2, 2—3 и 3—4 (см. фиг. 3,а);

V_0 — окружная скорость потока в любом из сечений участка 4—1 (см. фиг. 3, а) относительно мысленно неподвижной оси колеса.

Верхний знак в числителе зависимости (14) соответствует случаю, характеризуемому неравенством (12), нижний — случаю, соответствующему неравенству (13).

Как следует из уравнения (14), при постоянстве относительных деформаций на участках 4—1 и 2—3 контура шины в ведомом режиме тангенциальные скорости точек на всем протяжении этих участков постоянны.

Чтобы опираться на экспериментальные данные, которые получены для исходной длины элемента беговой дорожки шины, равной его длине на участке 4—1 [4], установим связь между величинами относительных деформаций ε' , ε_0 и ε .



Фиг. 5. Схема для вывода соотношения между регистрируемой в опытах и действительной тангенциальной деформациями внешнего контура шины.

Рассмотрим бесконечно тонкий элемент наружного контура шины в недеформированном состоянии длиной dx (фиг. 5). Допустим, что в результате растяжения от действия внутреннего давления и центробежных сил элемент получит приращение длины $\Delta_0 dx$, тогда $\varepsilon_0 = \frac{\Delta_0 dx}{dx}$.

Пусть элемент, проходя участок 2—3 в контакте с опорной плоскостью, получит сжатие на величину $\Delta' dx$, тогда

$$\varepsilon' = \frac{\Delta' dx}{dx}.$$

В упоминавшихся выше экспериментах длина $dx + \Delta_0 dx$ условно принималась за исходную, а величина ε равна полному алгебраическому приращению длины элемента, отнесенному к величине $dx + \Delta_0 dx$, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta_0 dx \pm \Delta' dx}{dx + \Delta_0 dx}. \quad (15)$$

Здесь верхний знак в числителе соответствует неравенству (12), нижний — неравенству (13).

Поделив числитель и знаменатель формулы (15) на dx , находим искомую связь между величинами ε_0 , ε' и ε , т. е.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \pm \varepsilon'}{1 + \varepsilon_0},$$

из которой

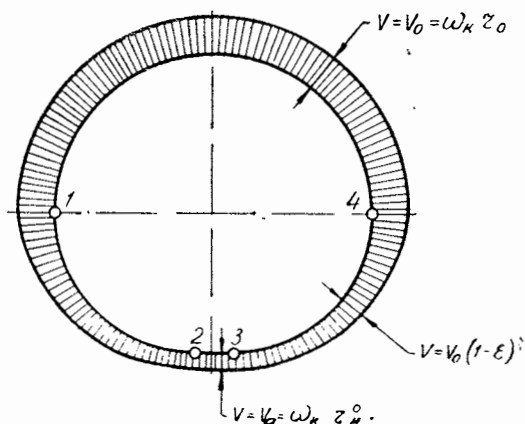
$$\mp \varepsilon' = \varepsilon_0 - \varepsilon(1 + \varepsilon_0).$$

Подставляя значение $\mp \varepsilon'$ в формулу (14), приходим к результату

$$V = V_0(1 - \varepsilon). \quad (16)$$

Такова простая форма уравнения неразрывности, определяющего величину тангенциальной скорости шины по ее внешнему контуру в зависимости от относительной деформации тангенциального сжатия при условии, что за исходную базовую длину элемента контура принимается его длина на участке 4—1 (см. фиг. 3 и 4).

Уравнение (16) показывает, что тангенциальная скорость бе-



Фиг. 6. Характер эпюры тангенциальных скоростей беговой дорожки шины в ведомом режиме качения.

говой дорожки шины в данной точке тем ниже, чем больше в этой точке ее траектории относительное тангенциальное сжатие (фиг. 6). Оно может быть применено также и для анализа любых других исходных схем распределения тангенциальных деформаций, отличающихся (в сторону усложнения) от принятой выше простой исходной схемы, основанной на использовании экспериментальных данных В. И. Кнороза [4].

Использование уравнения (16) позволяет, в частности, наметить пути решения следующей практически важной задачи, которая относится к оценке параметров ведомого режима качения автомобильного колеса, лежащего в основе исследования параметров качения в более общем случае [5; 6; 7].

Вывод зависимости радиуса качения ведомого колеса от исходных геометрических размеров шины, внутреннего давления и нормальной нагрузки

Изучение такой взаимосвязи основных параметров колеса с эластичной шиной до настоящего времени ведется преимущественно эмпирическими путями. Известна, в частности, полученная в опытах на небольшой по размерам авиационной шине приближенная формула Уиттбрета [10], которую в обозначениях параметров данной статьи можно представить в виде

$$r_k^0 = r_0 \left(1 - \frac{h}{3r_0} \right),$$

где r_k^0 — радиус качения колеса в ведомом режиме;
 h — нормальная деформация (прогиб) шины под действием нагрузки G_k .

В данном случае, используя уравнение (16), попытаемся аналитически установить зависимость радиуса качения r_k^0 от радиуса шины r_0 в свободном состоянии, от внутреннего давления p_w и нормальной нагрузки G_k .

Как уже отмечалось, при движении колеса в ведомом режиме со скоростью V_a вследствие отсутствия буксования эта скорость является относительной скоростью внешнего контура шины на участке 2—3 (см. фиг. 3) контакта с опорной поверхностью, т. е. $V_{2,3} = V_a$. На этом же участке (см. фиг. 3 и 4) $\varepsilon = \varepsilon_{\max}^0$.

В соответствии с уравнением (6) имеем:

$$V_a = V_0 (1 - \varepsilon_{\max}^0).$$

Для точек контура шины на участке 4—1

$$V_0 = \omega_k r_0,$$

где ω_k — угловая скорость оси колеса.

В соответствии с определением радиуса качения

$$V_a = \omega_k r_k^0,$$

поэтому из уравнения (18) следует, что

$$r_k^0 = r_0 (1 - \varepsilon_{\max}^0). \quad (19)$$

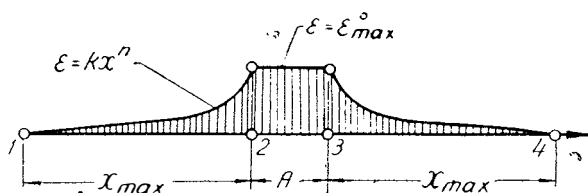
В современной теории автомобиля часто дают описательный характер объяснению явления, состоящего в том, что колесо с эластичной шиной катится с радиусом, отличным от радиуса, определяемого внешним периметром колеса как в свободном так и в нагруженном состоянии. Формула (19) наглядно отражает это явление*.

Принимая степенную зависимость распределения тангенциальных деформаций на участках контура шины 1—2 и 4—3 (см. фиг. 3,б), имеем:

$$\varepsilon = kx^n, \quad (20)$$

где k — константа.

Эпюра относительной деформации ε в развернутом на горизонтальную ось координат x виде показана на фиг. 7.



Фиг. 7. Расчетная схема тангенциальных деформаций. (Развертка эпюры деформаций на горизонтальную ось).

Абсолютное укорочение каждого из 1—2 и 3—4 участков внешнего контура шины в предположении, что закон (20) со-

* Аналогичную формуле (19) зависимость, отражающую рассматриваемый частный случай уравнения (16), можно получить и непосредственно из рассмотрения геометрических соотношений, характеризующих радиус качения колеса [4].

храняется в силе во всем интервале деформаций, начиная с бесконечно малых, равно:

$$\Delta x_{1,2} = \Delta x_{3,4} = \int_0^{x_{\max}} \varepsilon dx = \int_0^{x_{\max}} kx^n dx = k \cdot \frac{x_{\max}^n}{n+1}, \quad (21)$$

где $x_{\max} = x_{1,2} = x_{3,4}$ — длина участков интегрирования 1—2 и 3—4.

Для значений $x = x_{\max}$ и $\varepsilon = \varepsilon_{\max}^0$ из формулы (20) следует, что

$$\varepsilon_{\max}^0 = kx_{\max}^n.$$

Отсюда находим величину константы k для обоих участков

$$k = \frac{\varepsilon_{\max}^0}{x_{\max}^n},$$

тогда

$$\Delta x_{1,2} = \Delta x_{3,4} = \frac{x_{\max}}{n+1} \cdot \varepsilon_{\max}^0. \quad (22)$$

Для профиля внешнего контура шины, показанного на фиг. 3,а,

$$x_{\max} = \frac{\pi}{2} \cdot r_{\partial} \quad (23)$$

и

$$A = 2(r_0 - r_{\partial}). \quad (24)$$

В более общем случае можно предположить, что

$$x_{\max} = \chi_1 r_{\partial} \quad (25)$$

и

$$A = \chi_2(r_0 - r_{\partial}), \quad (26)$$

где χ_1 и χ_2 — безразмерные константы.

Величина абсолютного сжатия на участке контура 2—3 составляет

$$\Delta x_{2,3} = A\varepsilon_{\max}^0 = \chi_2(r_0 - r_{\partial})\varepsilon_{\max}^0. \quad (27)$$

Следовательно, полное укорочение части контура шины 1—2—3—4 в соответствии с выражениями (22), (25) и (27) будет:

$$\Delta x_{1,4} = 2\Delta x_{1,2} + \Delta x_{2,3} = \frac{2\chi_1}{n+1} \cdot r_{\partial} \varepsilon_{\max}^0 + \chi_2(r_0 - r_{\partial})\varepsilon_{\max}^0. \quad (28)$$

Из рассмотрения фиг. 3,а следует, что эта же величина равна разности полуокружности радиуса r_0 в свободном состоянии и суммы длин участков 1—2, 2—3 и 3—4 после деформации под действием нагрузки G_k , т. е.

$$\Delta x_{1,4} = \pi r_0 - \left(2 \cdot \frac{\pi r_\partial}{2} + A \right). \quad (29)$$

Поскольку для схемы фиг. 3,а длина площадки контакта определяется зависимостью (24), то из формулы (29) вытекает, что

$$\Delta x_{1,4} = (\pi - 2)(r_0 - r_\partial). \quad (30)$$

При отклонениях от рассматриваемой схемы вместо $(\pi - 2)$ вводим более общий коэффициент χ_3 , тогда

$$\Delta x_{1,4} = \chi_3 (r_0 - r_\partial). \quad (31)$$

Приравнивая правые части выражений (28) и (31) и разрешая полученное уравнение относительно ϵ_{\max}^0 , находим:

$$\epsilon_{\max}^0 = \frac{\chi_3 (r_0 - r_\partial)}{\chi_2 r_0 - \left(\chi_2 - \frac{2\chi_1}{n+1} \right) r_\partial}. \quad (32)$$

Подставляя найденное выражение для ϵ_{\max}^0 в формулу (19), получаем:

$$r_k^0 = r_0 \cdot \frac{(\chi_2 - \chi_3) r_0 - \left(\chi_2 - \chi_3 - \frac{2\chi_1}{n+1} \right) r_\partial}{\chi_2 r_0 - \left(\chi_2 - \frac{2\chi_1}{n+1} \right) r_\partial}. \quad (33)$$

При отсутствии вертикальной нагрузки на шину или при абсолютной жесткости шины, когда $r_\partial = r_0$, по формуле (33) $r_k^0 = r_0$, что находится в соответствии с физическим смыслом этого частного случая.

Если исходить из прямоугольной формы площадки контакта шины с опорной плоскостью и пренебречь несущей способностью боковин и рабочей части шины, то нагрузочная способность шины выразится соотношением

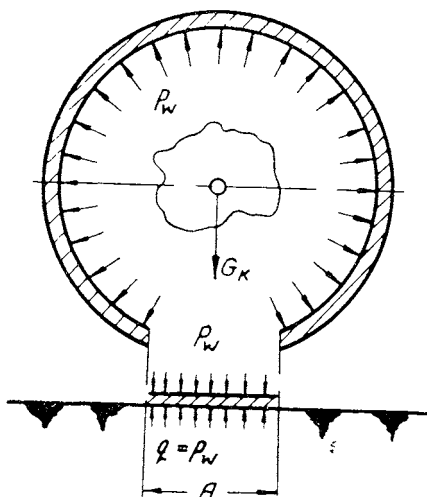
$$G_k = ABp_w,$$

где B — ширина площадки контакта. С учетом соотношения (26) можем записать:

$$G_k = \chi_2 (r_0 - r_\partial) B p_w. \quad (34)$$

Последнее уравнение, использующее известную гипотезу Хедкеля [11] о равенстве среднего удельного давления в

контакте внутреннему давлению воздуха в шине, может оказаться практически полезным для оценки тонкослойных шин широкого и особо широкого профилей (особенно пневмокатков). У этих шин доля нагрузки, воспринимаемой боковыми и рабочей частями, работающими на продольный изгиб, весьма мала по сравнению с долей нагрузки, воспринимаемой за счет подъемно-реактивных свойств (фиг. 8).



Фиг. 8. Схема, объясняющая восприятие шиной нормальной нагрузки G_k только за счет упругих свойств сжатого внутри шины воздуха.

Если учесть отклонение площадки контакта от прямоугольной формы коэффициентом $\theta_1 < 1^*$, а долю нагрузки, воспринимаемой покрышкой, коэффициентом $\theta_2 > 1$, то уравнение (34), предстанет в виде

$$G_k = \theta \chi_2 (r_0 - r_d) B p_w,$$

где $\theta = \theta_1 \theta_2$.

Это уравнение является приближенным вследствие линеаризации связи между радиальным прогибом шины ($r_0 - r_d$) и нагрузкой G_k . По данным ряда экспериментальных исследований [4; 8; 9], связь радиального прогиба с нагрузкой шины от линейной отличается квадратичной компонентой.

Из предыдущего уравнения находим:

$$r_d = r_0 - \frac{G_k}{\theta \chi_2 B p_w} **.$$

* Например, для торондных шин с площадкой контакта в виде эллипса, исходя из формулы его площади, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

** Этой линеаризацией зависимости $r_d = f(G_k)$, аналогичной зависимости $h = f(G_k)$, и ограничивается влияние приближенности предпосылок Хедекеля на излагаемый вывод. Вторая известная упрощенная предпосылка об отсутствии деформаций шины вне зоны контакта в данном выводе, как следует из изложенного выше, не применялась (тангенциальные деформации шины вне зоны контакта во внимание приняты).

Подставляя эту зависимость в формулу (33), получаем:

$$r_k^0 = r_0 \cdot \frac{r_0 p_w + \frac{1}{\theta \chi_2 B} \left[\frac{\chi_2 - \chi_3}{2\chi_1} (n+1) - 1 \right] G_k}{r_0 p_w + \frac{1}{\theta \chi_2 B} \left[\frac{\chi_2}{2\chi_1} (n+1) - 1 \right] G_k} \quad (35)$$

или

$$\boxed{r_k^0 = r_0 \cdot \frac{r_0 p_w + \nu_1 G_k}{r_0 p_w + \nu_2 G_k}}, \quad (36)$$

где ν_1 и ν_2 — константы.

Зависимость (36) устанавливает дробнолинейную (гиперболическую) функцию величины r_k^0 от G_k при $p_w = \text{const}$ или r_k^0 от p_w при $G_k = \text{const}$ и имеет хорошее качественное совпадение с опытными данными.

В формуле (35) размерность величин r_0 , B и r_k^0 выражена в см, p_w в кг/см² и G_k в кг; введенные константы, структура которых видна из формулы (35), имеют размерность 1/см.

Если размерность линейных величин в формуле (36) принимается в мм, а p_w в кг/см² и G_k в кг, то размерность констант будет в 1/мм:

$$\nu_1 = \frac{100}{\theta \chi_2 B} \left[\frac{\chi_2 - \chi_3}{2\chi_1} (n+1) - 1 \right] 1/\text{мм} \quad (37)$$

и

$$\nu_2 = \frac{100}{\theta \chi_2 B} \left[\frac{\chi_2}{2\chi_1} (n+1) - 1 \right] 1/\text{мм}. \quad (38)$$

Для каждого конкретного случая выражения констант ν_1 и ν_2 упрощаются. Для частного случая профиля контура шины, показанного на фиг. 3,а, $\chi_1 = \frac{\pi}{2}$, что следует из формул (23) и (25) $\chi_2 = 2$ — из формул (24) и (26) и $\chi_3 = (\pi - 2)$ — из формул (30) и (31).

Таким образом, согласно формулам (37) и (38) при $\theta = 1$

$$\nu_1 = \frac{13,7n - 36,3}{B} 1/\text{мм}; \quad (39)$$

$$\nu_2 = \frac{31,8n - 18,1}{B} 1/\text{мм}. \quad (40)$$

Из сопоставления выражений (37) и (38) видно, что $\nu_2 > \nu_1$. Поэтому в соответствии с формулой (36) для постоянных значений давления p_w и свободного радиуса r_0 возрастание нормальной нагрузки G_k приводит к падению радиуса каче-

ния r_k^0 по гиперболической кривой, что подтверждается также экспериментально. Обработка опытных данных позволяет уточнить величины констант ν_1 и ν_2 и производить накопление количественных сведений для практических целей анализа работы колесных движителей.

Для того, чтобы при известных величинах ν_1 и ν_2 иметь простую зависимость r_k^0 от G_k при $p_w = \text{const}$, можно пользоваться формулой (36) в ее исходном или в таком преобразованном виде:

$$\boxed{r_k^0 = r_0 \cdot \frac{1 + \alpha_1 G_k}{1 + \alpha_2 G_k}}, \quad (41)$$

где α_1 и α_2 — константы, соответственно равные:

$$\alpha_1 = \frac{\nu_1}{r_0 p_w} \quad 1/\kappa z \quad (42)$$

и

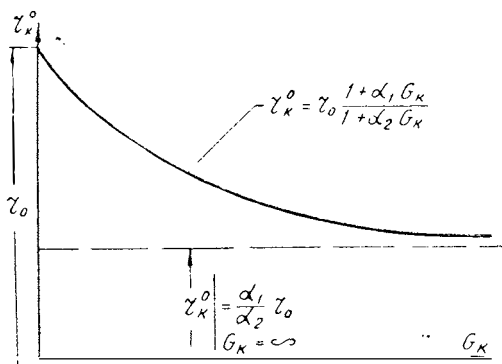
$$\alpha_2 = \frac{\nu_2}{r_0 p_w} \quad 1/\kappa z. \quad (43)$$

Весьма незначительным [9] изменением величины внутреннего давления в шине от изменения внешней нагрузки G_k при этом можно пренебречь.

Графически зависимость (41) показана на фиг. 9.

Кривая $r_k^0 = f(G_k)$ асимптотически приближается к значению r_k^0 , которое для горизонтальной асимптоты гиперболы равно:

$$r_k^0 \Big|_{G_k = \infty} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot r_0 = \frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot r_0.$$



Фиг. 9. Характер зависимости радиуса качения ведомого колеса с пневматической шиной от нормальной нагрузки.

Более сложный характер носит функция $r_k^0 = f(p_w)$ при $G_k = \text{const}$, так как не всегда можно использовать зависимость (36), полагая неизменной величину r_0 при изменении p_w . Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в зависимости от конструкции шины изменение r_0 от p_w , хотя и невелико, но может составлять величины, соизмеримые с изменением r_k^0 . Поэтому целесообразным является предварительное установление зависимости $r_0 = f(p_w)$. При этом в качестве исходного радиуса можно рассматривать свободный радиус r_n шины в ненакачанном состоянии.

Как показано в предыдущей статье, искомая зависимость может быть достаточно точно представлена гиперболической функцией вида

$$r_0 = r_n \cdot \frac{1 + \nu_I p_w}{1 + \nu_{II} p_w}, \quad (44)$$

где ν_I и ν_{II} (в $\text{см}^2/\text{кг}$) — константы, зависящие от основных геометрических соотношений, определяющих форму профиля и размеры шины, а также от ее конструкции.

При подстановке выражения (44) в соотношение (36) получаем общее выражение, связывающее радиус качения ведомого колеса r_k^0 с исходным радиусом r_n шины в ненакачанном состоянии, внутренним давлением p_w и нормальной нагрузкой G_k

$$r_k^0 = r_n \cdot \frac{1 + \nu_I p_w}{1 + \nu_{II} p_w} \cdot \frac{r_n (1 + \nu_I p_w) p_w + \nu_1 (1 + \nu_{II} p_w) G_k}{r_n (1 + \nu_I p_w) p_w + \nu_2 (1 + \nu_{II} p_w) G_k}.$$

Так как это выражение трудно использовать для практических целей, его следует упростить.

Напишем выражение (36) в виде

$$r_k^0 = r_0 \cdot \frac{p_w + \frac{\nu_1}{r_0} G_k}{p_w + \frac{\nu_2}{r_0} G_k}. \quad (45)$$

Учитывая, что относительная величина колебания δr_0 в зависимости от p_w составляет незначительный процент исходного размера r_n , не превышая

$$\delta r_0 := \frac{r_0 - r_n}{r_n} = 0,01 \div 0,02,$$

проанализируем возможность принятия величин $\frac{\nu_1}{r_0}$ и $\frac{\nu_2}{r_0}$

в качестве констант выражения (45) при переменном p_w . Погрешности значений величин $\frac{\nu_1}{r_0}$ и $\frac{\nu_2}{r_0}$ в соответствии с правилом нахождения погрешности частного при точном значении числителя составят:

$$\delta \frac{\nu_1}{r_0} = \delta r_0$$

и

$$\delta \frac{\nu_2}{r_0} = \delta r_0.$$

Погрешности сумм, являющихся соответственно числителем и знаменателем дроби выражения (45), при точном значении первого слагаемого составят:

$$\delta \left(p_w + \frac{\nu_1}{r_0} G_k \right) = \frac{\nu_1 G_k}{r_0 \left(p_w + \frac{\nu_1}{r_0} G_k \right)} \cdot \delta r_0 < \delta r_0$$

и

$$\delta \left(p_w + \frac{\nu_2}{r_0} G_k \right) = \frac{\nu_2 G_k}{r_0 \left(p_w + \frac{\nu_2}{r_0} G_k \right)} \cdot \delta r_0 < \delta r_0.$$

Общая величина погрешности дроби, являющейся коэффициентом при r_0 в правой части выражения (45), составит:

$$\delta r_k^0 = \delta \left(p_w + \frac{\nu_1}{r_0} G_k \right) + \delta \left(p_w + \frac{\nu_2}{r_0} G_k \right) < 2\delta r_0.$$

Таким образом, введение в уравнение (45) новых констант

$$\frac{\nu_1}{r_0} \approx \frac{\nu_1}{r_n} \quad (46)$$

и

$$\frac{\nu_2}{r_0} \approx \frac{\nu_2}{r_n} \quad (47)$$

уменьшает точность подсчета значений радиуса r_k^0 лишь в пределах 2—4 %.

Принимая в уравнении (45) значения констант (46) и (47), а также подставляя значение r_0 из соотношения (44), приходим к более простой форме записи рассматриваемой функции:

$$\boxed{r_k^0 = r_n \cdot \frac{1 + \nu_1 p_w}{1 + \nu_{11} p_w} \cdot \frac{r_n p_w + \nu_1 G_k}{r_n p_w + \nu_2 G_k}} \quad (48)$$

Сведения об экспериментальной проверке полученных выше основных зависимостей (36), (41) и (48), а также способ обработки опытных данных с их применением изложены в третьей статье данного сборника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Изд. 2-е. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
 2. Жуковский Н. Е. О скольжении ремня на шкивах (1884). Полное собрание сочинений. Том VIII. М—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1937.
 3. Пронин Б. А. Клиноремные и фрикционные передачи и вариаторы. М., Машгиз, 1960.
 4. Кнороз В. И. Работа автомобильной шины. Изд. 2-е. М., Авто-трансиздат, 1960.
 5. Петрушов В. А. О качении эластичного колеса по твердой опорной поверхности. Труды НАМИ, вып. 57. М., ОНТИ НАМИ, 1963.
 6. Петрушов В. А. Некоторые пути построения технической теории качения. Труды НАМИ, вып. 61. М., ОНТИ НАМИ, 1963.
 7. Петрушов В. А. К вопросу о качении эластичного колеса по твердой опорной поверхности. «Автомобильная промышленность» № 12, 1963.
 8. Синельников Е. Л. Радиальная жесткость автомобильных шин. «Автомобильная промышленность» № 6, 1959.
 9. Кнороз В. И., Хлебников А. М. О нагрузке на арочные шины и их обода. Труды НАМИ, вып. 12. М., ОНТИ НАМИ, 1960.
 10. Steeds W., Ellis I. R., Thomson I. L. Transmission Wind-up in Vehicles Having Several Driven Wheels. «IME Proceedings of the Automobile Division» № 4, 1956—57.
 11. Woods E. Pneumatic Tire Design, Cambridge, 1952.
-

Инж. В. И. Леонов, канд. техн. наук В. А. Петрушов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ СВЯЗИ МЕЖДУ
СВОБОДНЫМ РАДИУСОМ КОЛЕСА,
ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ВОЗДУХА В ШИНЕ,
РАДИУСОМ КАЧЕНИЯ В ВЕДОМОМ РЕЖИМЕ
И НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ**

В первой статье данного сборника было показано, что свободный радиус r_0 колеса с эластичной шиной зависит от исходного радиуса шины в ненакачанном состоянии r_n , внутреннего давления воздуха p_w , констант ν_1 и ν_{II} и определяется по формуле

$$r_0 = r_n \frac{1 + \nu_1 p_w}{1 + \nu_{II} p_w} . \quad (1)$$

Величина r_0 вычисляется по этой формуле с точностью до четырех или пяти значащих цифр, так как она в процессе своего изменения при переменном давлении p_w отличается от исходной величины r_n в среднем не более чем на 1—2%.

Таким образом, если соблюдать при делении и умножении необходимую точность в 0,1—1,0%, то приращение радиуса нужно вычислять с точностью до 0,0001—0,00001. Поэтому удобнее оперировать величиной приращения свободного радиуса $\Delta r_0 = r_0 - r_n$, которая на основании формулы (1) может быть представлена в виде

$$\Delta r_0 = r_n \frac{(\nu_1 - \nu_{II}) p_w}{1 + \nu_{II} p_w} . \quad (2)$$

Обозначив

$$\nu_{I,II} = \nu_1 - \nu_{II} , \quad (3)$$

получаем выражение, вычисление по которому легко осуществимо с помощью обычной логарифмической линейки:

$$\Delta r_0 = r_n \frac{\nu_{I,II} p_w}{1 + \nu_{II} p_w} . \quad (4)$$

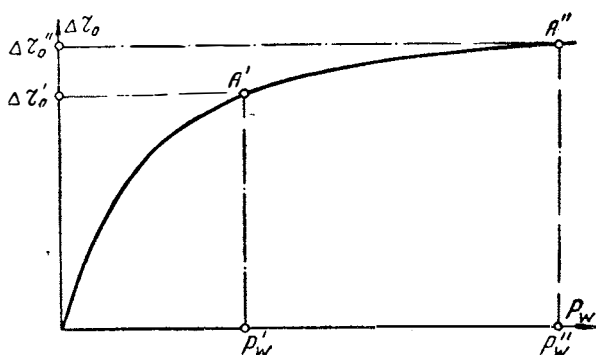
После того, как определена величина Δr_0 , свободный радиус подсчитывается по формуле

$$r_0 = r_n + \Delta r_0 . \quad (5)$$

По выражению (4) достаточно просто определять для каждой конструкции шины значения констант ν_I и ν_{II} либо производить экспериментальную проверку соотношений (4) или (1).

Допустим, что в результате измерений шины при различных величинах внутреннего давления получена экспериментальная кривая $\Delta r_0 = f(p_w)$, показанная на фиг. 1. Ее аналитическое выражение, исходя из формулы (4), представим уравнением

$$r_n p_w^{\nu_{I,II}} - \Delta r_0 p_w^{\nu_{II}} = \Delta r_0 . \quad (6)$$



Фиг. 1. К определению констант ν_I и ν_{II} по точкам экспериментальной зависимости $\Delta r_0 = f(p_w)$.

Задача состоит в отыскании значений констант $\nu_{I,II}$ и ν_{II} . Выбирая на экспериментальной кривой $\Delta r_0 = f(p_w)$ две точки A' и A'' (см. фиг. 1) с координатами соответственно $p_w', \Delta r_0'$ и $p_w'', \Delta r_0''$, на основании уравнения (6) располагаем следующей системой двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} r_n p_w'^{\nu_{I,II}} - \Delta r_0' p_w'^{\nu_{II}} &= \Delta r_0' ; \\ r_n p_w''^{\nu_{I,II}} - \Delta r_0'' p_w''^{\nu_{II}} &= \Delta r_0'' . \end{aligned} \right\}$$

Решениями этой системы являются две зависимости для искомых констант, вычисление которых не требует оперирования с числами, имеющими более трех значащих цифр:

$$\text{и } \nu_{I,II} = \frac{\Delta r_0' \Delta r_0'' (p_w'' - p_w')}{r_{II} p_w' p_w'' (\Delta r_0'' - \Delta r_0')} \quad (7)$$

$$\nu_{II} = \frac{p_w'' \Delta r_0' - p_w' \Delta r_0''}{p_w' p_w'' (\Delta r_0'' - \Delta r_0')} \quad (8)$$

Если требуется найти константу ν_I , то используется соотношение (3), из которого следует, что

$$\nu_I = \nu_{I,II} + \nu_{II} \quad (9)$$

При выборе двух характерных точек на экспериментальной кривой $\Delta r_0 = f(p_w)$ — см. фиг. 1 — следует придерживаться выбора достаточно малого значения p_w' и близкого к максимальному p_w'' , так как в противном случае величины $(p_w'' - p_w')$ и $(\Delta r_0'' - \Delta r_0')$, входящие в формулы (7) и (8), могут оказаться крайне малыми, что уменьшит точность подсчетов.

1-й пример. Получены экспериментальные значения приращения свободного радиуса широкопрофильной шины $1400 \times 550 \times 553$ модели ЯИ-225 в диапазоне внутреннего давления от 0 до $4,5 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 2,а). Величина исходного радиуса шины в результате измерения составила $694,6 \text{ мм}$. Требуется найти аналитическое выражение функции $r_0 = f(p_w)$, необходимое для теоретического исследования работы колесного движителя автомобиля на шинах этой модели.

Выбираем среди экспериментальных точек две точки, например A' и A'' (см. фиг. 2,а), с координатами $p_w' = 1,0 \text{ кг/см}^2$; $\Delta r_0' = 12,8 \text{ мм}$ и $p_w'' = 3,8 \text{ кг/см}^2$; $\Delta r_0'' = 23,0 \text{ мм}$.

Используя формулу (7), находим значение константы $\nu_{I,II}$:

$$\nu_{I,II} = \frac{12,8 \cdot 23,0 (3,8 - 1,0)}{694,6 \cdot 1,0 \cdot 3,8 (23,0 - 12,8)} = 0,0308 \text{ см}^2/\text{кг} ,$$

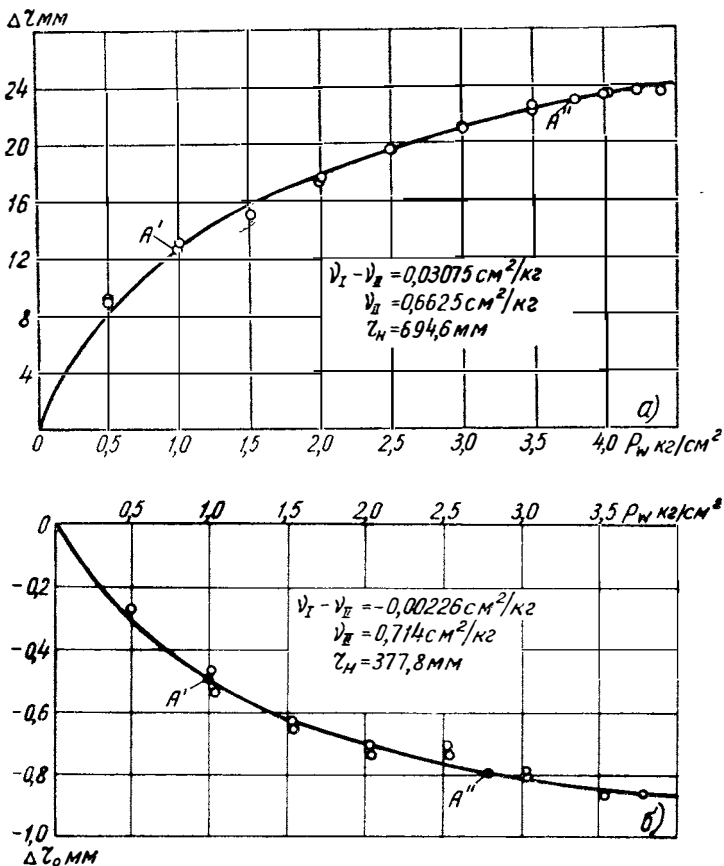
и формулу (8) — значение константы ν_{II} :

$$\nu_{II} = \frac{3,8 \cdot 12,8 - 1,0 \cdot 23,0}{1,0 \cdot 3,8 (23,0 - 12,8)} = 0,663 \text{ см}^2/\text{кг} .$$

С помощью формулы (4) получим выражение функции $\Delta r_0 = f(p_w)$:

$$\Delta r_0 = 694,6 \frac{0,0308 p_w}{1 + 0,663 p_w} = \frac{21,4 p_w}{1 + 0,663 p_w} \quad (10)$$

Для проверки справедливости полученного соотношения нанесем на график фиг. 2,а теоретическую кривую $\Delta r_0 = f(p_w)$. Результаты подсчетов по формуле (10) приведены в табл. 1.



Фиг. 2 Зависимость приращения свободного радиуса шины 14,00—550×533 модели ЯИ-225 (а) и 6,50—16 модели Я-13 (б) от внутреннего давления воздуха. (Графики построены по уравнению (4); точками отмечены практические результаты, полученные с помощью измерений).

Таблица 1

p_w кг/см ²	0,5	1,0	1,5	2,5	3,0	4,0	4,5
Δr_0 мм	7,99	12,80	16,10	19,60	21,50	23,40	24,10

Соответствующая этим результатам теоретическая кривая, показанная на фиг. 2,а сплошной линией, хорошо совпадает с экспериментальными данными. Все подсчеты значений Δr_0 , вошедших в табл. 1, выполнены с помощью логарифмической линейки. Точность этих подсчетов является удовлетворительной и соответствует лишь трем значащим цифрам.

Таким образом, согласно формулам (5) и (10) для искомой функции $r_0 = f(p_w)$ получаем выражение, удобное для подсчетов величины r_0 при различных давлениях воздуха:

$$r_0 = 694,6 + \frac{21,4 p_w}{1 + 0,663 p_w} \text{ мм.} \quad (11)$$

Если необходимо также пользоваться формулой (1), то входящая в нее константа ν_1 определяется суммой (9)

$$\nu_1 = 0,0308 + 0,663 = 0,6938 \text{ см}^2/\text{кг.}$$

Окончательно

$$r_0 = 694,6 \frac{1 + 0,6938 p_w}{1 + 0,6630 p_w} .$$

При использовании последнего выражения или его общей формы (1) для общих теоретических выкладок расчеты по нему выполняются с помощью умножения чисел с четырьмя и пятью значащими цифрами в противоположность вычислений по формуле (11).

2-й пример. Получены экспериментальные значения приращения Δr_0 свободного радиуса шины 6,50—16 модели Я-13 в диапазоне p_w от 0 до 4 кг/см² (фиг. 2,б). Они свидетельствуют об убывании свободного радиуса шины по мере роста внутреннего давления. Исходный радиус шины составляет $r_n = 377,8$ мм. Необходимо определить константы ν_1 и ν_{II} функции $r_0 = f(p_w)$.

Выбираем на экспериментальной кривой две точки A' и A'' (см. фиг. 2,б) с координатами $p_w' = 1,0$ кг/см²; $\Delta r_0' = -0,5$ мм и $p_w'' = 2,8$ кг/см²; $\Delta r_0'' = -0,8$ мм.

Используя формулу (7), находим константу $\nu_{1,II}$:

$$\nu_{1,II} = \frac{(-0,5)(-0,8)(2,8-1,0)}{377,8 \cdot 1,0 \cdot 2,8(-0,8+0,5)} = -0,00226 \text{ см}^2/\text{кг.},$$

и формулу (8) — константу ν_{II} :

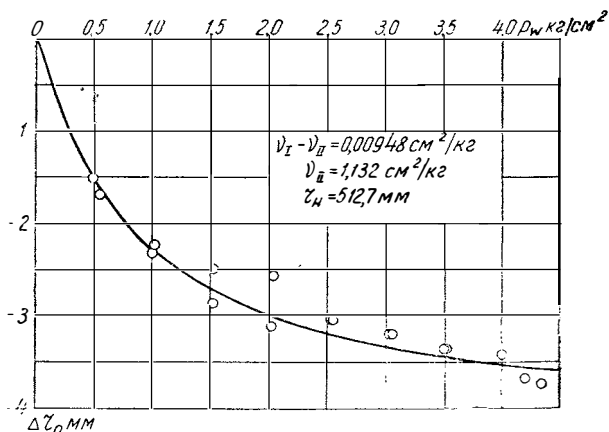
$$\nu_{II} = \frac{2,8(-0,5) - 1,0(-0,8)}{1,0 \cdot 2,8(-0,8+0,5)} = 0,714 \text{ см}^2/\text{кг.}$$

Соответствующая этим константам кривая, построенная по уравнению (4), показана на фиг. 2,б сплошной линией.

Константу ν_1 определяем по формуле (9):

$$\nu_1 = -0,00226 + 0,714 = 0,71174 \approx 0,712 \text{ см}^2/\text{кг}.$$

Более широкая проверка справедливости соотношений (4) и (1) осуществлялась на нескольких моделях шин, в том числе на шинах с регулируемым давлением и широкопрофильных. В ряде случаев использовались экспериментальные данные лаборатории колес и шин НАМИ, результаты которых приведены на графиках фиг. 3; 4; 5,а, б и 6.



Фиг. 3. Зависимость приращения свободного радиуса шины 10,00—18 модели ИК-8 от внутреннего давления. (График построен по уравнению (4); точками отмечены практические результаты, полученные с помощью измерений).

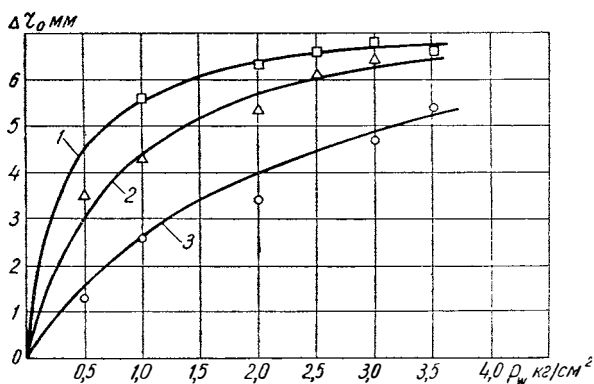
Экспериментальные данные величин свободного радиуса получены путем измерения внешнего периметра шины с последующим делением его на 2π ; величины приращения свободного радиуса — путем вычитания из значений r_0 величины радиуса в исходном состоянии r_H . Сопоставление расчетных и опытных данных свидетельствует об их удовлетворительном совпадении как для обычных тороидных шин, так и для шин с регулируемым давлением, широкопрофильных и арочных, а также пневмокатков (данные по пневмокаткам здесь не приведены).

В соответствии с положениями, изложенными в первой статье данного сборника, все испытанные шины с последую-

шим использованием выражений (4) или (1) можно подразделить на две основные группы:

1) шины, у которых с ростом p_w свободный радиус возрастает ($v_I > v_{II}$);

2) шины, у которых с ростом p_w свободный радиус уменьшается ($v_I < v_{II}$).



Фиг. 4. Зависимость приращения свободного радиуса трех моделей шин 14,00—20 от внутреннего давления. (График построен по уравнению (4); точками отмечены практические результаты измерений, проведенных лабораторией шин НАМИ):

шины: 1 — И-172 ($v_I = v_{II} = 0,0364$ см²/кг; $v_{II} = 3,06$ см²/кг; $r_H = 624,3$ мм); 2 — Я-202А ($v_I - v_{II} = 0,0165$ см²/кг; $v_{II} = 1,3$ см²/кг; $r_H = 619,5$ мм); 3 — ОИ-25 ($v_I - v_{II} = 0,00586$ см²/кг; $v_{II} = 0,432$ см²/кг; $r_H = 635,7$ мм).

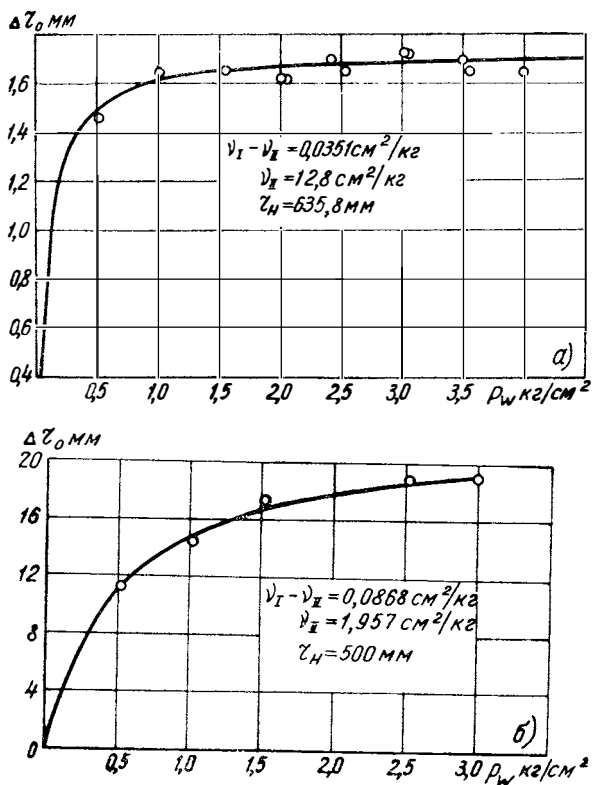
Некоторые отклонения от характера протекания приращения свободного радиуса выявлены у шины 12,00—18 модели И-III с регулируемым давлением воздуха (фиг. 7).

Как следует из фиг. 7, величина Δr_0 сначала в узком диапазоне малых значений внутреннего давления растет, а затем убывает по гиперболе. Участок II (см. фиг. 7) соответствует, по-видимому, деформациям профиля шины, находящегося в равновесном состоянии и описываемого зависимостью (4). Короткий участок I возрастания Δr_0 соответствует деформациям, связанным с переходом этой шины от неравновесного исходного состояния с радиусом r_H к равновесному.

Из приведенных выше данных видно, что у остальных испытанных шин подобные явления отсутствуют. Это свидетельствует о том, что их оболочки находятся в равновесном

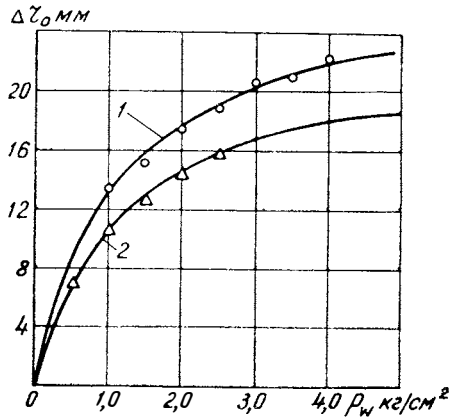
(или близком к нему) состоянии, даже будучи ненакачан-ными.

Для практических инженерных и исследовательских целей необходимо располагать зависимостью $\Delta r_0 = f(p_w)$ лишь в рабочем диапазоне p_w (для шины 12,00—18 диапазон рекомендуемых давлений составляет от 0,5 до 3,5 кг/см²). В этом диапазоне кривая $\Delta r_0 = f(p_w)$ подчиняется зависимости (4).

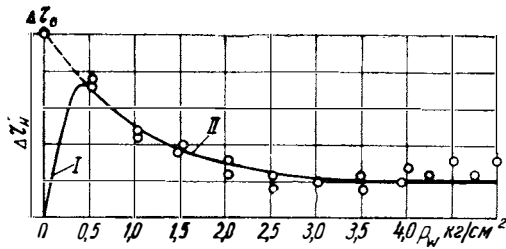


Фиг. 5. Зависимость приращения свободного радиуса шины 15,00—20 модели Я-60 (а) и шины 1000×650/6 модели И-182 (б) от внутреннего давления. (Графики построены по уравнению (4); точками отмечены практические результаты, полученные с помощью измерений).

Для определения констант ν_{II} и ν_I требуется найти некоторое условное значение исходного радиуса r_H' (см. фиг. 7), что осуществляется экстраполяцией экспериментальной



Фиг. 6. Зависимость приращения свободного радиуса шин моделей Я-224 и Я-296 от внутреннего давления. (График построен по уравнению (4); точками отмечены практические результаты измерений, проведенных лабораторией шин НАМИ):
шины: 1 — Я-224 ($\nu_I - \nu_{II} = 0,0394 \text{ см}^2/\text{кг}$;
 $\nu_{II} = 0,834 \text{ см}^2/\text{кг}$; $r_H = 498,1 \text{ мм}$); 2 — Я-296
($\nu_I - \nu_{II} = 0,0059 \text{ см}^2/\text{кг}$; $\nu_{II} = 0,834 \text{ см}^2/\text{кг}$;
 $r_H = 400,9 \text{ мм}$).

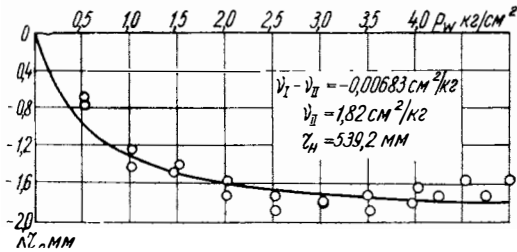


Фиг. 7. Зависимость приращения свободного радиуса шины 12,00—18 модели И-111 от внутреннего давления:

I и II — участки экспериментальной кривой, пунктиром показана ее экстраполяция для нахождения величины Δr_H .

кривой (пунктир на фиг. 7). После нахождения величины r'_n и ее подстановки вместо r_n в формулы (7) и (8) все последующие действия, связанные с нахождением искомых констант, не отличаются от описанных выше. В результате для шины 12,00—18 модели И-111 получается теоретическая кривая, показанная на фиг. 8 и построенная по уравнению

$$\Delta r_0 = r'_n \frac{\nu_{1,II} P_w}{1 + \nu_{II} P_w} \quad (12)$$



Фиг. 8. Зависимость приращения свободного радиуса шины 12,00—18 модели И-111 от внутреннего давления. (График построен по уравнению (12); точками отмечены практические результаты, полученные с помощью измерений).

Центр координат этого графика соответствует точке **Б** на фиг. 7

$$(p_w = 0; \Delta r_0 = r'_n - r_n = \Delta r'_n).$$

О порядке величин констант ν_I и ν_{II} для нескольких шин дает представление табл. 2.

Следует отметить, что в процессе эксплуатации шин их характеристики, определяющие зависимость свободного радиуса от внутреннего давления, не остаются постоянными, что отражается на изменении во времени значений констант ν_I и ν_{II} . Это необходимо учитывать при исследовании работы колесного движителя многоприводных автомобилей. Исследования, касающиеся изменения во времени параметров колесного движителя одного и того же автомобиля и связанных с ними изменений в процессах циркуляции мощности в заблокированном приводе автомобилей высокой проходимости, в настоящее время отсутствуют. Полученные результаты, по-видимому, могут способствовать последующему системати-

Таблица 2

Некоторые данные о влиянии внутреннего давления на свободный радиус шин повышенной проходимости

Модель	Размер	Рекомендуемое давление воздуха в шине P_w , кг/см ²	Исходный радиус r_n , мм	Максимальное при эксперименте давление воздуха в шине P_w^{\max} , кг/см ²	Константы, см ² /кг		Константа $\gamma_I - \gamma_{II}$, см ² /кг	Δr_0^{\max} при P_w^{\max} , мм	$\frac{\Delta r_0^{\max}}{r_n}$ %
					γ_I	γ_{II}			
Я-13	6,50—16	2,0	377,8	4,0	0,712	0,714	-0,00226	-0,87	0,23
ИК-8	10,00—18	3,0 и 4,0	512,7	4,5	1,123	1,132	-0,00948	-3,51	0,69
И-111	12,00—18	0,5—3,5	539,2*	5,0	1,813	1,820	-0,00683	-1,80	0,33
И-172	14,00—20	0,5—3,2	624,3	3,5	3,096	3,060	0,03640	6,75	1,08
Я-202А	14,00—20	0,5—3,2	619,5	3,5	1,317	1,300	0,01650	6,40	1,04
ОИ-25	14,00—20	0,5—3,2	635,7	3,5	0,438	0,432	0,00586	5,25	0,83
Я-60	15,00—20	3,0 и 4,0	635,8	4,0	12,835	12,800	0,03510	1,70	0,27
И-182	1000×650/6	1,5	500,0	3,0	2,038	1,951	0,08680	19,00	3,80
Я-224	1000×400	1,0—4,5	498,1	4,0	0,837	0,834	0,03940	22,00	4,41
Я-296	800×320—444	1,0—3,0	400,9	4,0	0,893	0,834	0,05940	18,00	4,50
ЯИ-225	1400×550×533	0,5—2,0	694,6	4,5	0,694	0,663	0,03075	24,00	3,46

* Приведено значение условного исходного радиуса.

ческому накоплению соответствующих экспериментальных данных. Таковы результаты, иллюстрирующие апробацию полученных соотношений (1) и (4).

Более сложную задачу составила экспериментальная проверка зависимостей r_k^0 от параметров r_0 (или r_n), p_w и нормальной нагрузки на колесо G_k , полученных во второй статье данного сборника. Проверке подвергались:

1. Зависимость

$$r_k^0 = r_0 \frac{r_0 p_w + \nu_1 G_k}{r_0 p_w + \nu_2 G_k}, \quad (13)$$

где ν_1 и ν_2 1/мм — константы.

2. Зависимость, вытекающая из формулы (13), для случая $p_w = \text{const}$ (и, следовательно, для $r_0 = \text{const}$)

$$r_k^0 = r_0 \frac{1 + \alpha_1 G_k}{1 + \alpha_2 G_k}, \quad (14)$$

где константы

$$\alpha_1 = \frac{\nu_1}{r_0 p_w} 1/\text{кг} \quad (15)$$

и

$$\alpha_2 = \frac{\nu_2}{r_0 p_w} 1/\text{кг} \quad (16)$$

3. Зависимость

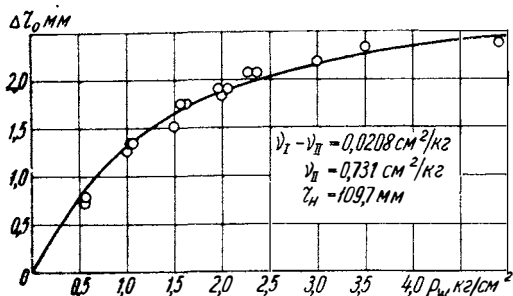
$$r_k^0 = r_n \frac{1 + \nu_1 p_w}{1 + \nu_{11} p_w} \cdot \frac{r_n p_w + \nu_1 G_k}{r_n p_w + \nu_2 G_k}, \quad (17)$$

вытекающая из соотношений (13) и (1) и позволяющая, в частности, по известному исходному радиусу r_n и нагрузке G_k находить значения радиуса качения в ведомом режиме при различных давлениях в шине.

Для экспериментальной проверки этих соотношений была проведена специальная серия опытов*. С целью устранения влияния непостоянства внешних факторов, которые могут отразиться на изменении состояния опорной поверхности и физико-механических параметрах самой шины (например, на температуре, а следовательно, и внутреннем давлении), опыты проводились в лабораторных условиях на небольшой камерной тороидной шине $8,5 \times 2$ при минимальных скоростях качения (порядка 0,2 м/сек).

* В опытах принимали участие инж.-ры Н. Г. Сперанский и Р. В. Кочеткова.

Предварительная часть эксперимента состояла в нахождении значений констант ν_1 , ν_{II} , ν_1 и ν_2 . Способ определения этих констант, который можно рекомендовать для дальнейшего накопления экспериментальных данных по другим моделям пневматических шин, приводится ниже.



Фиг. 9. Зависимость приращения свободного радиуса шины $8,5 \times 2$ модели TSG от внутреннего давления. (График построен по уравнению (4); точками отмечены практические результаты, полученные с помощью измерений).

Определяем константы ν_1 и ν_{II} с помощью экспериментальной зависимости $r_0 = f(p_w)$ и формул (7), (8) и (9). Для шины $8,5 \times 2$ такая зависимость показана на фиг. 9, а вычисленные константы равны $\nu_1 = 0,752$ и $\nu_{II} = 0,731 \text{ см}^2/\text{кг}$.

Для одного произвольно выбранного значения внутреннего давления p_{w1} (одного значения свободного радиуса r_{01})

строим экспериментальную зависимость $\Delta r_{k1}^0 = f(G_k)$ — фиг. 10, которой соответствует выражение (14). Это дает возможность определить константы α_{11} и α_{21} . Вторые индексы 1 у констант α_1 и α_2 , входящих в формулу (14), обозначают номер кривой при «первом» значении p_{w1} . Константы α_1 и α_2 определяем аналогично константам ν_1 и ν_{II} , для чего в формуле (1) оперируем приращением радиуса качения в ведомом режиме от воздействия нормальной нагрузки G_k :

$$\Delta r_k^0 = r_k^0 - r_0. \quad (18)$$

Так как радиус качения с ростом G_k убывает, то приращение Δr_k^0 отрицательно.

Используя формулы (18) и (14), находим:

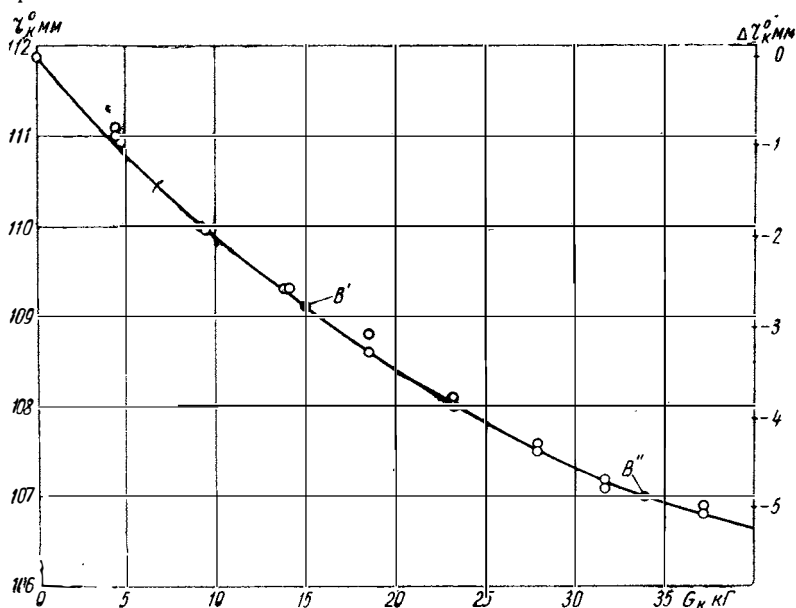
$$\Delta r_k^0 = r_0 \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) G_k}{1 + \alpha_2 G_k}. \quad (19)$$

Обозначив $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_{1,2}$, получим:

$$r_0 G_k \alpha_{1,2} - \Delta r_k^0 G_k \alpha_2 = \Delta r_k^0. \quad (20)$$

Выбираем на экспериментальной зависимости $\Delta r_k^0 = f(G_k)$ — см фиг. 10 — две точки B' и B'' с координатами соответственно $\Delta r_k^{0'}$, G_k' и $\Delta r_k^{0''}$, G_k'' . Величины $\Delta r_k^{0'}$ и $\Delta r_k^{0''}$

отсчитываем вниз от горизонтальной оси с ординатой $r_k^0 = r_0$. Шкала отрицательных приращений Δr_k^0 нанесена на фиг. 10 справа.



Фиг. 10. Экспериментальная зависимость радиуса качения шины $8,5 \times 2$ от нормальной нагрузки при $\rho_w = 3 \text{ кг/см}^2$.

Подставляя выбранные значения координат точек B' и B'' в уравнение (12), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_0 G_k' \alpha_{1,2} - \Delta r_k^{0'} G_k' \alpha_2 &= \Delta r_k^{0'}; \\ r_0 G_k'' \alpha_{1,2} - \Delta r_k^{0''} G_k'' \alpha_2 &= \Delta r_k^{0''}. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\alpha_{1,2} = \frac{\Delta r_k^{0'} \Delta r_k^{0''} (G_k'' - G_k')}{r_0 G_k' G_k'' (\Delta r_k^{0''} - \Delta r_k^{0'})}; \quad (21)$$

$$\alpha_2 = \frac{G_k'' \Delta r_k^{0'} - G_k' \Delta r_k^{0''}}{G_k' G_k'' (\Delta r_k^{0''} - \Delta r_k^{0'})}. \quad (22)$$

Исходя из принятого выше обозначения величины $\alpha_{1,2}$, имеем:

$$\alpha_1 = \alpha_{1,2} + \alpha_2. \quad (23)$$

Для шины $8,5 \times 2$ характеристические точки B' и B'' кривой $\Delta r_k^0 = f(G_k)$ имеют координаты $G_k' = 15,0$ кг; $\Delta r_k^{0'} = -2,8$ мм и $G_k'' = 34,0$ кг; $\Delta r_k^0 = -4,9$ мм. Константы α_{11} и α_{21} и их разность $\alpha_{11,21} = \alpha_{11} - \alpha_{21}$, подсчитанные по формулам (21), (22) и (23), составляют:

$$\alpha_{11,21} = \frac{(-2,8) \cdot (-4,9) \cdot (34,0 - 15,0)}{111,9 \cdot 15,0 \cdot 34,0 (-4,9 + 2,8)} = -0,00217 \text{ } 1/\text{кг};$$

$$\alpha_{21} = \frac{34,0(-2,8) - 15,0(-4,9)}{15,0 \cdot 34,0 (-4,9 + 2,8)} = 0,0203 \text{ } 1/\text{кг};$$

$$\alpha_{11} = -0,00217 + 0,0203 = 0,01813 \text{ } 1/\text{кг}.$$

Эти константы соответствуют давлению $p_{w1} = 3,0$ кг/см² и, следовательно, свободному радиусу $r_{01} = 111,9$ мм, вычисленному по формулам (4) и (5) или определенному по фиг. 9.

Теоретическая кривая $\Delta r_k^0 = f(G_k)$, построенная по уравнению (19) с учетом полученных констант, показана на фиг. 10 сплошной линией. Она хорошо согласуется с экспериментальными данными.

По константам $\alpha_{1,2}$, α_2 и α_1 , соответствующим одному произвольно выбранному значению внутреннего давления воздуха в шине p_w , находим константы ν_1 и ν_2 уравнений (13) и (17) следующим образом.

Согласно формулам (15) и (16) имеем:

$$\nu_1 = \alpha_1 r_{0i} p_w \quad (24)$$

и

$$\nu_2 = \alpha_2 r_{0i} p_w. \quad (25)$$

Для ряда давлений $p_{w1}, p_{w2}, \dots, p_{wi}, \dots, p_{wn}$ имеем:

$$\nu_1 = \alpha_{11} r_{01} p_{w1} = \alpha_{12} r_{02} p_{w2} = \dots = \alpha_{1i} r_{0i} p_{wi} = \dots = \alpha_{1n} r_{0n} p_{wn}; \quad (26)$$

$$\nu_2 = \alpha_{21} r_{01} p_{w1} = \alpha_{22} r_{02} p_{w2} = \dots = \alpha_{2i} r_{0i} p_{wi} = \dots = \alpha_{2n} r_{0n} p_{wn}. \quad (27)$$

Выражения (24) — (27) отражают кинематическое подобие шины при качении в ведомом режиме с различными внутренними давлениями. Графически это подобие представляется семейством кривых $r_k^0 = f(G_k)$ для ряда значений давления $p_{w1}, p_{w2}, \dots, p_{wi}, \dots, p_{wn}$.

Рассматриваемое семейство кривых описывается уравнением (14) в виде

$$r_{ki}^0 = r_{0i} \frac{1 + \alpha_{1i} G_k}{1 + \alpha_{2i} G_k}, \quad (28)$$

где по уравнению (1)

$$r_{0i} = r_n \frac{1 + \nu_1 p_{wi}}{1 + \nu_{11} p_{wi}} \quad (29)$$

и согласно соотношениям подобия (26) и (27)

$$\alpha_{1i} = \alpha_{11} \frac{r_{01} p_{w1}}{r_{0i} p_{wi}} ; \quad (30)$$

$$\alpha_{2i} = \alpha_{21} \frac{r_{01} p_{w1}}{r_{0i} p_{wi}} . \quad (31)$$

Каждому значению p_{wi} соответствует одна кривая семейства, описываемого уравнением (28).

В табл. 3 приведены константы α_{1i} и α_{2i} шины $8,5 \times 2$.

Т а б л и ц а 3

Параметры	$p_{wi} \text{ кг/см}^2$					
	1,0	1,5	2,0	3,0	3,5	4,9
r_0 мм, подсчитанный по формуле (29)	111,0	111,2	111,5	111,9	112,0	112,1
$\alpha_{1i} \text{ }^1/\text{кг}$, подсчитанный по формуле (30)	0,05484	0,03644	0,02734	0,01813	0,01554	0,01108
$\alpha_{2i} \text{ }^1/\text{кг}$, подсчитанный по формуле (31)	0,06140	0,04080	0,03060	0,02030	0,01740	0,01240

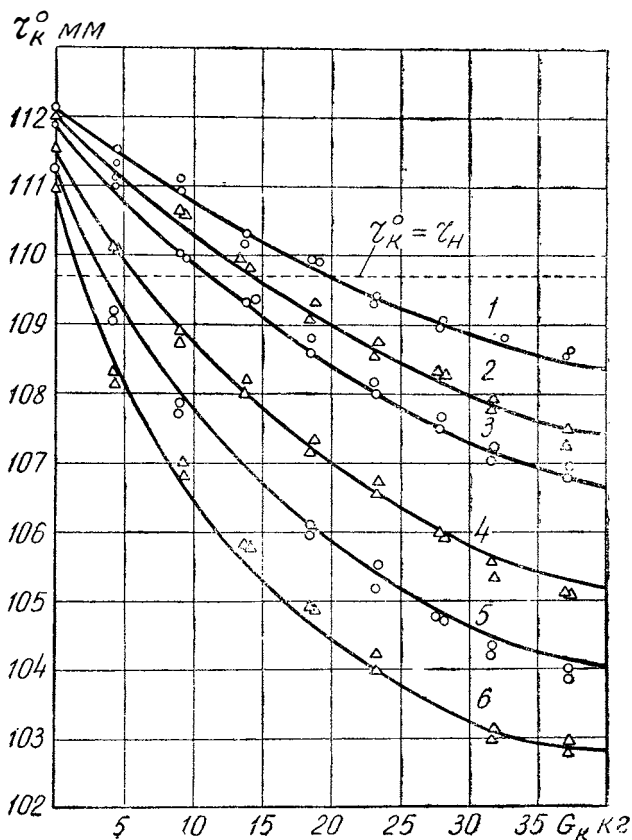
Семейство кривых, соответствующее уравнению (28) и константам табл. 3, показано на фиг. 11.

Для более точного контроля подсчетов (без оперирования числами с количеством значащих цифр более трех) применялось также уравнение (19), представленное в виде

$$\Delta r_k^0 = r_{0i} \frac{(\alpha_{1i} - \alpha_{2i}) G_k}{1 + \alpha_{2i} G_k} . \quad (32)$$

Данные фиг. 11 свидетельствуют о хорошем качественном и количественном совпадении расчетных и экспериментальных данных, что подтверждает правильность изложенных выше рассуждений. Пересечение каждой из кривых семейства с осью ординат соответствует значению радиуса качения при нулевой нагрузке, равному r_0 . Значения свободного радиуса для каждой величины p_w при нулевой нагрузке соответствуют фиг. 9.

На фиг. 11 приведена горизонтальная прямая $r_k^0 = r_H$, разделяющая весь квадрант на две области, у которых $r_k^0 > r^0$ и $r_k^0 < r_H$.



Фиг. 11. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных для семейства кривых $r_k^0 = f(G_k)$; шина $8,5 \times 2$ модели TSG. (График построен по уравнению (28); точками отмечены экспериментальные данные):

1, 2, 3, 4, 5 и 6 — соответственно $p_w = 4,9; 3,5; 3,0; 2,0; 1,5$ и $1,0 \text{ кг/см}^2$.

Применим уравнение Кретца-Жуковского к случаю качения колеса в ведомом режиме со скоростью

$$V_a = \omega_k r_k^0 \quad (33)$$

и установим связь между скоростью V_a и окружной скоростью колеса в свободном ненакачанном состоянии

$$V_n = \omega_k r_n, \quad (34)$$

где ω_k — угловая скорость оси колеса.

В соответствии с уравнением Кретца-Жуковского *

$$\frac{V_a}{1 + \epsilon_a} = V_n,$$

где ϵ_a — относительная тангенциальная деформация внешнего контура шины на участке контакта с дорогой, в котором отсутствует частичное скольжение.

С учетом выражений (33) и (34)

$$r_k^0 = r_n(1 + \epsilon_a)$$

или

$$\epsilon_a = \frac{r_k^0 - r_n}{r_n}. \quad (35)$$

Из уравнения (35) следует, что при $r_k^0 > r_n$ $\epsilon_a > 0$, т. е. на участке контакта с дорогой внешний контур шины подвергается растяжению; при $r_k^0 < r_n$ $\epsilon_a < 0$, т. е. внешний контур шины на участке контакта с дорогой претерпевает сжатие.

Первому случаю соответствуют точки на кривых $r_k^0 = f(G_k)$ выше линии $r_k^0 = r_n$ (см. фиг. 11), второму случаю — точки на кривых ниже линии $r_k^0 = r_n$.

Изложенное свидетельствует о том, что практически (как видно из примера испытанной шины) в зависимости от соотношений нагрузки G_k и внутреннего давления p_w эпюры тангенциальных деформаций по внешнему контуру шины могут иметь как знакопостоянный (растяжение на всем контуре), так и знакопеременный характер**.

Завершающая часть апробации рассмотренных выше аналитических соотношений состояла в экспериментальной проверке формулы (17) — общей зависимости радиуса качения в ведомом режиме от внутреннего давления p_w и нормальной нагрузки G_k .

Для шины $8,5 \times 2$ входящие в формулу (17) константы γ_1 и γ_{11} были найдены выше. Для $p_{w1} = 3,0 \text{ кг/см}^2$ и $r_{01} = 111,9 \text{ мм}$ были вычислены константы $\alpha_{11} = 0,0181 \text{ }^1/\text{кг}$ и $\alpha_{21} = 0,0203 \text{ }^1/\text{кг}$.

* См. уравнение (8) второй статьи данного сборника.

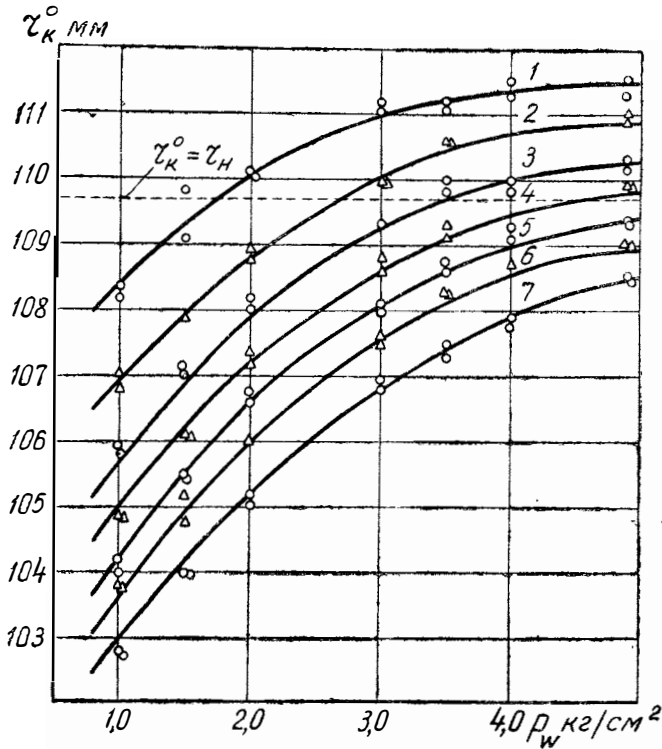
** См. фиг. 4,а и б второй статьи данного сборника.

По формулам (24) и (25) находим входящие в выражение (17) константы ν_1 и ν_2 , равные:

$$\nu_1 = 0,0181 \cdot 3,0 \cdot 111,9 = 6,09 \text{ }^1/\text{М.М.};$$

$$\nu_2 = 0,0203 \cdot 3,0 \cdot 111,9 = 6,82 \text{ }^1/\text{М.М.}$$

На фиг. 12 показано построенное по формуле (17) с учетом констант ν_1 , ν_{11} , ν_1 и ν_2 семейство кривых $r_k^0 = f(p_w)$ для ряда значений нормальной нагрузки G_k .



Фиг. 12. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных для семейства кривых $r_k^0 = f(p_w)$; шина $8,5 \times 2$ модели TSG. (График построен по формуле (17); точками отмечены экспериментальные данные):

1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 — соответственно $G_k = 4,41; 9,11; 13,8; 18,5; 23,3; 27,9$ и $37,2$ кг.

Как видно, данные фиг. 12 свидетельствуют о хорошем совпадении расчетных и практических результатов.

При построении кривых использовалась формула для приращения радиуса качения $\Delta_n r_k^0$ относительно исходного радиуса шины r_n , которая выводится из зависимостей (3), (9) и (17):

$$\Delta_n r_k^0 = r_k^0 - r_n = r_n \frac{\nu_{1,11} r_n \rho \omega^2 + (\nu_1 \nu_1 - \nu_{11} \nu_2) G_k \rho \omega + \nu_{1,2} G_k}{(1 + \nu_{11} \rho \omega) \cdot (r_n \rho \omega + \nu_2 G_k)}.$$

Использование этой формулы, эквивалентной зависимости (17), не связано с оперированием числами с числом значащих цифр более трех.

Пунктирная линия $r_k^0 = r_n$ на фиг. 12 подтверждает наличие двух областей, в верхней из которых ($r_k^0 > r_n$) абсолютные величины деформаций внешнего контура шины в контакте с дорогой положительны (растяжение), а в нижней ($r_k^0 < r_n$) — отрицательны (сжатие).

В заключение отметим, что изложенные построения и условия экспериментов не затрагивают вопроса влияния на радиус качения колеса с пневматической шиной в ведомом режиме величины угловой скорости колеса вследствие действия центробежных сил. Это влияние при скоростях качения да 70—80 км/ч невелико.

Не приводя строгого доказательства, отметим, что и для достаточно больших скоростей качения, формулы (13) и (14) могут оказаться справедливыми, так как влияние центробежных сил отражается на величине свободного радиуса r_0 , а он входит в эти формулы.

Для использования формулы (17) необходимо отыскать функции $\nu_1 = f(V_a)$ и $\nu_{11} = f(V_a)$, которые характеризуют влияние скорости качения V_a на величину свободного радиуса при заданном исходном радиусе шины r_n . Подробная оценка влияния поступательной скорости на радиус качения ведомого колеса является предметом дальнейших исследований.

СОДЕРЖАНИЕ

В. А. Петрушов. Влияние внутреннего давления воздуха на свободный радиус колеса с эластичной шиной	3
В. А. Петрушов. Приложение уравнения неразрывности механики сплошных сред к анализу кинематики эластичного колеса	11
В. И. Леонов, В. А. Петрушов. Определение констант связи между свободным радиусом колеса, внутренним давлением воздуха в шине, радиусом качения в ведомом режиме и нормальной нагрузкой ,	30

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЯ!

В отделе научно-технической информации НАМИ имеется в наличии нижеперечисленная научно-техническая литература, которая может быть выслана по просьбе организаций, а также отдельных лиц наложенным платежом или в счет перечисленных ранее денег (номерные издания высылаются только организациям):

1. Пути повышения надежности и долговечности автомобилей. Материалы отраслевой научно-технической конференции. Март, 1964 г. Три книги (издание номерное). Цена 3-х книг без пересылки 4 руб.

2. Повышение долговечности автотракторных двигателей. Материалы второй научно-технической конференции. Май 1962 г. Три книги. Цена 3-х книг 5 руб. 37 коп.

3. Применение математических машин при конструировании и испытаниях автомобилей и двигателей. Материалы Всесоюзной научно-технической конференции. Ноябрь, 1962 г. Цена 1 руб. 88 коп.

4. Материалы отраслевого координационного совещания по вопросам применения стеклопластиков в автомобилестроении. Март, 1962 г. (Издание номерное). Цена 1 руб. 42 коп.

5. Труды семинара по проблеме уменьшения шума автомобилей. Июль, 1961 г. Выпуск 1. Цена 70 коп.

6. О. В. Тамручи, Е. Г. Смирнов, Л. А. Колбут, Л. А. Смирнова. Применение и перспективы потребления автомобильных деталей из пластических масс. Примерная номенклатура деталей. Цена 76 коп.

7. Труды совещания по арочным шинам. Апрель, 1960 г. Цена 60 коп.

8. Отраслевые нормал:

Н 1978—61. Спецификация типовых деталей шасси автомобилей и прицепов. Цена 1 руб. 82 коп.

Н 1979—61. Спецификация типовых деталей кузова автомобилей и прицепов. Цена 40 коп.

Н 2648—62. Профили резиновых уплотнителей автомобильных кузовов. Цена 1 руб. 90 коп.

Обращаться по адресу: Москва, А-438, Автомоторная ул., 2. НАМИ, Отдел научно-технической информации.

Труды НАМИ, вып. 69

Ответственный редактор А. А. Липгарт

Научный редактор Л. А. Егоров

Редактор В. Р. Ворон. Техн. редактор С. М. Печникова

Корректоры: Ю. Я. Пытель, Р. П. Махова, Э. А. Шаухина

Л 72401. Подп. к печ. 13/Х 1964 г. Форм. бум. 60×90^{1/16}

Печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,8. Зак. 329. Тир. 600. Цена 20 коп.

Типография НАМИ. Москва, А-438, Автомоторная ул., 2

Цена 20 коп.