

ТРУДЫ
НАМИ

Выпуск 63

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА
ЛЕГКИХ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ**

Сборник третий

— 1964 —

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЯ

Имеются в наличии **первый** и **второй** сборники статей «Некоторые вопросы расчета легких газотурбинных двигателей»:

Труды НАМИ, вып. 36. М., НАМИ, 1961, 68 стр., ц. 28 коп.

В. М. Чернин. Определение напряжений в лопатках радиальных газовых турбин вариационным методом Кастилиано. В. Ф. Столяров. Колебания несбалансированного ротора на упруго-демпферных опорах. Э. Е. Шварцман. Исследование дифференциальной схемы автомобильного газотурбинного двигателя.

Труды НАМИ, вып. 55. М., НАМИ, 1963, 136 стр., ц. 58 коп.

Э. Е. Шварцман. Выбор параметров трехвального автомобильного газотурбинного двигателя. Н. А. Заварцева. Расчет на прочность дисков радиальных турбомашин. В. М. Чернин. Напряжения в лопатках радиальных газовых турбин.

Издания НАМИ можно приобрести за наличный расчет или выписать по адресу: **А-428, Автомобильный институт, Москва**, сектор информации.

Государственный комитет автотракторного и сельскохозяйственного
машиностроения при Госплане СССР

Управление по развитию автомобильной промышленности

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ НАУЧНО-
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АВТОМОБИЛЬНЫЙ И АВТОМОТОРНЫЙ ИНСТИТУТ

НАМИ

ТРУДЫ
НАМИ

Выпуск 63

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА
ЛЕГКИХ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Сборник третий

ОТДЕЛ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Москва

1964

В сборнике рассматриваются некоторые вопросы расчета легких газотурбинных двигателей.

В первой статье инж. В. М. Чернина приводится расчетный метод определения напряжений, возникающих в лопатках радиальных турбомашин от вращения и неравномерного нагрева их в осевом и радиальном направлениях. Лопатка рассматривается как пластина переменной толщины, произвольной формы, упруго закрепленная в диске. Задача решается методом сеток.

Во второй статье инж. С. И. Левитана рассматриваются колебания ротора высокооборотного газотурбинного двигателя с учетом влияния масляной пленки подшипника скольжения. Предлагается способ расчета амплитудно-частотной характеристики, а также исследуется изменение ее протекания в зависимости от величины зазора в подшипнике, температуры подводимого к подшипнику масла и величины дисбаланса.

В третьей статье инж. С. И. Левитана на основании допущения об абсолютной жесткости вала ротора выводятся простые зависимости для приближенного определения критического числа оборотов двухпорного ротора высокооборотного газотурбинного двигателя. Анализируется точность предлагаемых зависимостей, а также границы их применения.

В статьях сборника применены единицы международной системы СИ, введенной в СССР с 1.1.63 г. (Гост 9867—61), для предпочтительного применения во всех областях науки, техники и народного хозяйства. Соотношение между единицами системы СИ и единицами некоторых других систем см. в издании: Единицы международной системы СИ, установленные государственным стандартом СССР. М., НАМИ, 1963.

Труды НАМИ, вып. 63

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА ЛЕГКИХ ГАЗОТУРБИНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Сборник третий

Ответственный редактор А. А. Липгарт

Научный редактор А. Е. Балтер. Редактор С. В. Стрекалов

Технический редактор С. М. Печникова. Корректоры: Ю. Я. Пытель, В. И. Гуськова

Л 70520. Подп. к печ. 2/III-64 г. Форм. бум. 60×90/16

Печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,2. Зак. 513. Тир. 650. Цена 16 коп.

Типография НАМИ. Москва, А-438. Автомоторная ул., 2.

В. М. Чернин

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЛОПАТОК РАДИАЛЬНЫХ ТУРБОМАШИН

Высокие окружные скорости и большие градиенты температур требуют определения напряжений в лопатках радиальных турбомашин с большой степенью точности. Этому вопросу посвящена статья автора [3], в которой лопатка рассматривается в форме кольцевого сектора постоянной толщины, жестко заделанного по наружной дуге (фиг. 1). В настоящей статье эти ограничения снимаются, а также более точно удовлетворяются граничные условия на торцах лопатки.

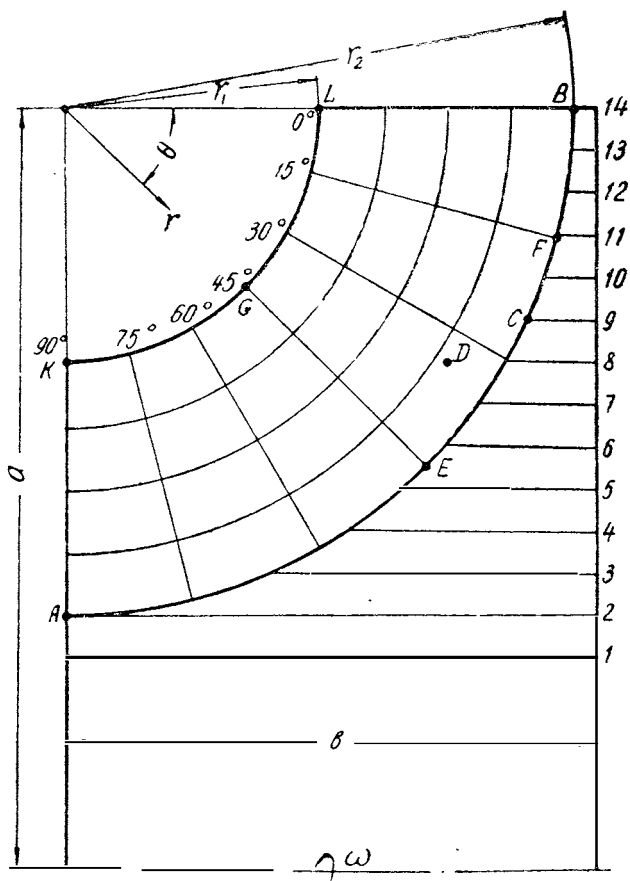
ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОЛЬЦЕВОМ СЕКТОРЕ МЕТОДОМ СЕТОК

При решении вышеуказанной задачи с интегральным удовлетворением граничных условий на торцах лопатки [3] следовало ожидать погрешностей при определении напряжений вблизи торцов. Чтобы уточнить решение, напряжения, возникающие в секторе от контурной нагрузки на торцах [3, формула (33)], были найдены методом конечных разностей в перемещениях [1] с использованием полярной сетки (см. фиг. 1).

В качестве неизвестных приняты радиальное u и окружное v перемещения узлов сетки. Задача описывается двумя дифференциальными уравнениями равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} - u + \\ + \frac{1+\mu}{2} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{3-\mu}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0; \\ \frac{1+\mu}{2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{3-\mu}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\mu}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \\ + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1-\mu}{2} v = 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\rho = \frac{r}{r_2}$; θ — координаты точки сектора (см. фиг. 1);
 μ — коэффициент Пуассона.



Фиг. 1. Радиальное колесо.

Эти уравнения преобразуем в конечно-разностную форму путем замены частных производных первого и второго порядка центральными разностями. Тогда получаем систему алгебраических уравнений, которые при $\mu = 0,3$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{0,35}{\varphi^2} (u_q + u_n) + x(x + 0,5) u_s + x(x - 0,5) u_k - \\
 & - \left(2x^2 + \frac{0,7}{\varphi^2} + 1 \right) u_t + 0,1625 \frac{x}{\varphi} (v_0 - v_t + v_m - v_p) - \\
 & \quad - \frac{0,675}{\varphi} (v_q - v_n) = 0 ; \\
 & 0,1625 \frac{x}{\varphi} (u_0 - u_t + u_m - u_p) + \frac{0,675}{\varphi} (u_q - u_n) + \\
 & \quad + \frac{1}{\varphi^2} (v_q + v_n) + 0,35x(x + 0,5) v_s + \\
 & \quad + 0,35x(x - 0,5) v_k - \left(0,7x^2 + \frac{2}{\varphi^2} + 0,35 \right) v_t = 0 ,
 \end{aligned} \right\} (1)$$

где $x = \frac{r_i}{h}$;

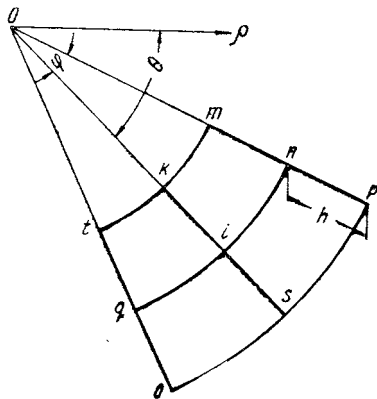
$h = \Delta\rho$ — шаг сетки по радиусу;

φ — шаг сетки по углу в радианах,

а индекс при неизвестном указывает узел сетки (фиг. 2).

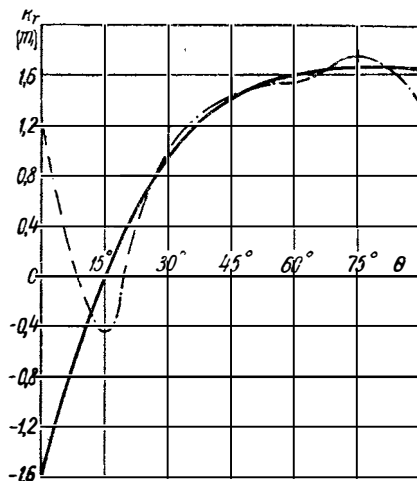
Число таких уравнений равно удвоенному числу внутренних узлов сетки. В данном примере — 30 уравнений (см. фиг. 1). В них входят, кроме перемещений внутренних узлов сетки, перемещения контурных узлов. Последние находятся из граничных условий, причем на трех участках контура AK , KL и LB , в том числе и в точках A и B , они определяются в функции контурной нагрузки и перемещений узлов предконтурных точек путем использования обобщенного закона Гука и зависимостей между деформациями и перемещениями Коши, записанными также в конечно-разностной форме. В остальных узлах контура перемещения в данном случае равны нулю.

Используя симметрию сектора относительно радиуса, направленного под углом $\theta = 45^\circ$, расщепляем систему 30 линейных алгебраических уравнений на две по 15, раскладывая



Фиг. 2. Полярная сетка.

контурную нагрузку на торцах на симметричную и антисимметричную [1]. Решив системы, находим перемещения узлов сетки, а по ним и компоненты напряжений в этих точках от обеих нагрузок. Наконец, вычитая последние из напряжений, определяемых формулами (31) статьи [3], получаем напряжения, возникающие в лопатке от вращения.

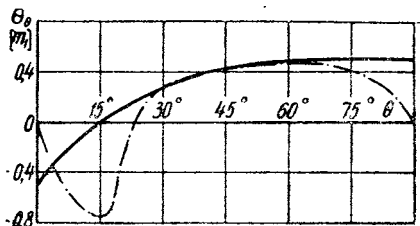


Фиг. 3. Радиальные напряжения.

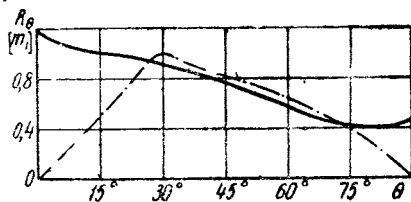
На фиг. 3, 4, 5 приведены графики изменения радиального R_r , окружного Θ_θ и касательного R_θ напряжений по углу θ в заделке в единицах

$$m_1 = \gamma \omega^2 \frac{r_2^2}{4},$$

где γ — плотность материала лопатки;
 ω — угловая скорость вращения колеса,



Фиг. 4. Окружные напряжения.



Фиг. 5. Касательные напряжения.

причем сплошными линиями показаны результаты интегрального метода, а штрих-пунктиром — метода сеток.

В рассматриваемом примере $r_1 : r_2 : a = 1 : 2 : 3$ (см. фиг. 1).

Из этих кривых видно, что в наиболее напряженной части лопатки, то есть в заделке при $\theta = 30^\circ \div 60^\circ$, результаты обоих методов различаются весьма незначительно.

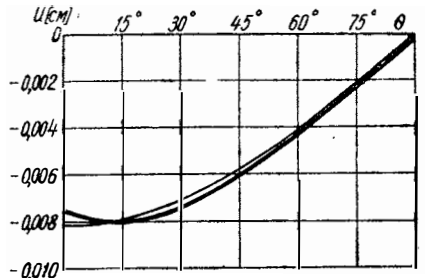
УПРУГОЕ ЗАКРЕПЛЕНИЕ ЛОПАТКИ В ДИСКЕ

В реальном колесе перемещения точек заделки лопатки не равны нулю, а определяются совместной деформацией диска и лопаток. Ввиду того, что решение задачи в точной постановке затруднительно, перемещения точек лопатки на стыке с диском были взяты из расчета на прочность радиального колеса (см. фиг. 1), как оребренной пластины с лопатками в виде стержней, по методу, приведенному в статье [2]. При этом было принято $r_1 = 3$ см; $r_2 = 6$ см; $a = 9$ см; $b = 6,25$ см; толщина лопаток $0,15$ см; число лопаток 13 ; $\gamma = 8000$ кг/м³; $n = 40\,000$ об/мин.

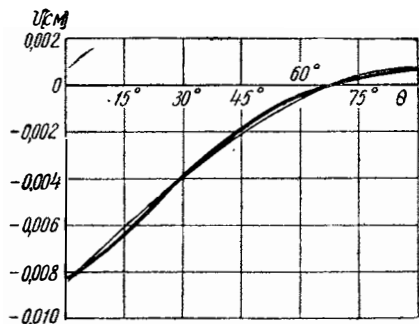
В результате расчета, выполненного по 14 сечениям (см. фиг. 1), были получены радиальные и окружные перемещения точек заделки лопатки, которые изображены на фиг. 6 и 7 жирными линиями. Тонкими линиями показана аппроксимация их формулами:

$$\left. \begin{aligned} u &= c_1 \cos \theta; \\ v &= c_2 - c_3 \sin \theta. \end{aligned} \right\} (2)$$

Взяв в качестве граничного условия зависимости (2), вместо жесткого закрепления, получаем решение, которое отличается от формул (31) статьи [3] дополнительными членами:



Фиг. 6. Радиальные перемещения.



Фиг. 7. Окружные перемещения.

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{E(c_1 - c_3)}{r_2} \cdot \frac{\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3}}{3 - \mu + (1 + \mu)\beta^4} \cos\theta; \\ \Theta_\theta &= \frac{E(c_1 - c_3)}{r_2} \cdot \frac{3\rho + \frac{\beta^4}{\rho^3}}{3 - \mu + (1 + \mu)\beta^4} \cos\theta; \\ R_\theta &= \frac{E(c_1 - c_3)}{r_2} \cdot \frac{\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3}}{3 - \mu + (1 + \mu)\beta^4} \sin\theta, \end{aligned} \right\} (3)$$

где E — модуль нормальной упругости; $\beta = \frac{r_1}{r_2}$.

Эти добавочные напряжения не зависят от c_2 потому, что оно характеризует жесткий поворот лопатки относительно точки O (фиг. 1). При $c_1 = c_3$ они обращаются в нуль, и граничные условия (2) становятся эквивалентны жесткой заделке. Это объясняется тем, что перемещения (2) без учета c_2 дадут в этом случае поворот лопатки относительно точки A (фиг. 1), как жесткого целого.

Как правило радиальные колеса легких газотурбинных двигателей изгибаются в сторону лопаток и поэтому в принятой системе координат $c_1 < 0$; $c_3 < 0$. Кроме того, величины радиальных перемещений и прогибов имеют примерно одинаковые значения. В силу этого $c_1 - c_3$ — невелико и напряжения (3) малы.

В данном случае $c_1 = -0,0082$ см, $c_3 = -0,0092$ см и напряжения в наиболее опасной точке E (см. фиг. 1) изменяются по сравнению с жесткой заделкой незначительно:

$$R_r = 201,0 + 7,7 = 208,7 \text{ Мн/м}^2;$$

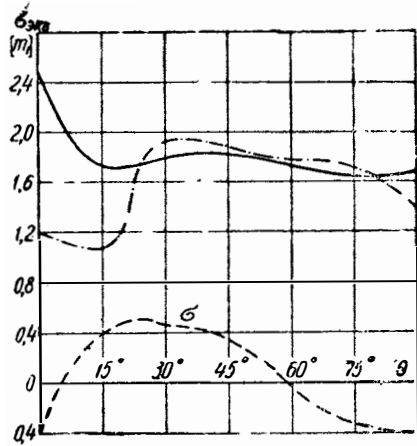
$$\Theta_\theta = 60,3 + 25,5 = 85,8 \text{ Мн/м}^2;$$

$$R_\theta = 97,6 + 7,7 = 105,3 \text{ Мн/м}^2;$$

$$\sigma_{\text{экв}} = 245,2 + 11,8 = 257,0 \text{ Мн/м}^2.$$

Этот же пример позволил оценить погрешность стержневой схемы расчета лопатки, по которой максимальное напряжение получилось в точке C (см. фиг. 1). Величина его $\sigma = 64,1$ Мн/м², то есть в четыре раза меньше, чем по предлагаемому методу.

На фиг. 8 приведены графики изменения в заделке эквивалентных напряжений, полученных интегральным способом (сплошная линия) и методом сеток (штрих-пунктир), а также напряжения, вычисленные по схеме стержня (пунктир).



Фиг. 8. Эквивалентные напряжения.

ЛОПАТКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В реальных конструкциях лопадки по форме отличаются от сектора, что делает невозможным построение аналитического решения для любого случая.

Определить напряжения в лопадке произвольной формы можно методом конечных разностей, заменяя заданную область сеткой (фиг. 9). Чтобы оценить погрешность, которая возникает при такой аппроксимации, был просчитан тот же пример (см. фиг. 1) при жестком закреплении лопадки.

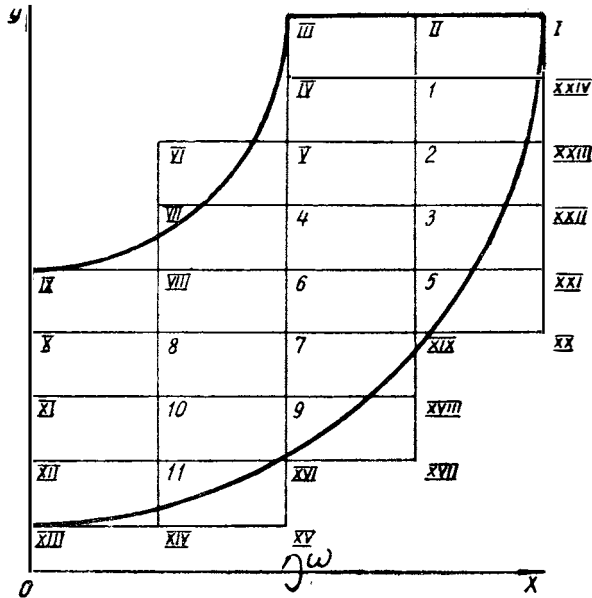
В качестве неизвестных приняты осевое u и радиальное v перемещения узлов сетки. Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, преобразованные в конечно-разностную форму, при $\mu = 0,3$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 0,35x_0^2(u_n + u_q) + u_s + u_k - (0,7x_0^2 + 2)u_i + \\ + 0,1625x_0(v_p - v_o + v_t - v_m) = 0; \\ 0,1625x_0(u_p - u_o + u_t - u_m) + x_0^2(v_n + v_q) + \\ + 0,35(v_s + v_k) - (2x_0^2 + 0,7)v_i = -\kappa U, \end{aligned} \right\} (4)$$

где

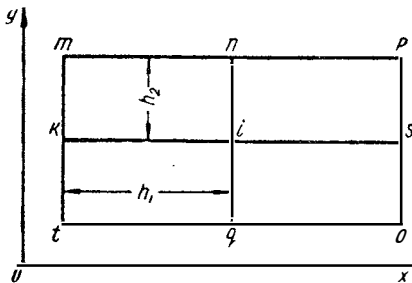
$$x_0 = \frac{h_1}{h_2}; \quad \kappa = \frac{1 - \mu^2}{E} \gamma \omega^2 h_1^2 h_2; \quad y = \frac{y_i}{h_2},$$

а индекс при неизвестном указывает узел сетки (фиг. 10).



Фиг. 9. Схема лопатки.

В рассматриваемом примере таких уравнений будет 22 для точек от 1 до 11. Входящие в них перемещения контурных узлов с I по XXIV исключаем, используя граничные условия. При этом перемещения точек I—XIII находим из условия равенства нулю нормальных и касательных напряжений в этих узлах, а перемещения точек заделки XIV—XXIV полагаем равными нулю. В общем случае последние берутся из расчета диска.



Фиг. 10. Прямоугольная сетка.

Решив систему 22 уравнений, находим перемещения узлов сетки, а по ним и напряжения в этих точках. В результате подсчетов наибольшее напряжение получается в точке 5 (см. фиг. 9) или D (см. фиг. 1), где $\sigma_{\text{экр}} = 178 \text{ Мн/м}^2$, что на 23% меньше, чем вычисленное интегральным методом, и на 27% меньше,

чем вычисленное методом конечных разностей с использованием полярной сетки (фиг. 1), которая точно вписывается в сектор.

С помощью прямоугольной сетки можно аппроксимировать лопатку произвольной формы, однако для лопаток с заделкой, близкой по очертанию к дуге окружности, целесообразнее применять полярную сетку, что снизит погрешность при определении напряжений.

ЛОПАТКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Лопатка радиального колеса конструктивно выполняется в виде слабоизогнутой оболочки линейно-переменной толщины в осевом и радиальном направлении. Поскольку толщина ее по сравнению с габаритными размерами мала, напряжения по толщине, также как и раньше, распределяются равномерно. Обычно лопатка проектируется так, что изгиб из срединной поверхности ее отсутствует. Поэтому дифференциальные уравнения равновесия, записанные в усилиях на единицу длины в плоскости лопатки, будут совершенно аналогичны таковым при постоянной толщине:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 ; \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} &= -\gamma \omega^2 y \delta , \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_x &= X_x \delta ; \\ S_y &= Y_y \delta ; \\ T &= X_y \delta ; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

δ — толщина лопатки;
 X_x ; Y_y ; X_y — компоненты напряжений в прямоугольной системе координат (см. фиг. 9).

Если подставить выражения (6) в уравнения (5) и затем заменить в них компоненты напряжений компонентами перемещений, используя уравнения Коши и обобщенный закон Гука, то получим дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях. Преобразуя их в конечно-разностную форму, приходим к линейным алгебраическим уравнениям, ко-

торые отличаются от системы (4) наличием двух дополнительных членов в левой части каждого уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 &0,35x_0^2(u_n + u_q) + u_s + u_\kappa - (0,7x_0^2 + 2)u_i + \\
 &\quad + 0,1625x_0(v_p - v_0 + v_t - v_m) + \\
 &\quad + 0,25 \frac{\delta_s - \delta_\kappa}{\delta_i} \left[u_s - u_\kappa + 0,3x_0(v_n - v_q) \right] + \\
 &\quad + 0,0875x_0 \frac{\delta_n - \delta_q}{\delta_i} \left[x_0(u_n - u_q) + v_s - v_\kappa \right] = 0; \\
 &0,1625x_0(u_p - u_0 + u_t - u_m) + x_0^2(v_n + v_q) + \\
 &\quad + 0,35(v_s + v_\kappa) - (2x_0^2 + 0,7)v_i + \\
 &\quad + 0,0875 \frac{\delta_s - \delta_\kappa}{\delta_i} \left[x_0(u_n - u_q) + v_s - v_\kappa \right] + \\
 &\quad + 0,25x_0 \frac{\delta_n - \delta_q}{\delta_i} \left[0,3(u_s - u_\kappa) + x_0(v_n - v_q) \right] = -\kappa Y,
 \end{aligned} \right\} (7)$$

где индекс при δ указывает узел сетки (см. фиг. 10), для которого берется толщина лопатки.

В полярных координатах эти уравнения аналогичным образом отличаются от системы (1), чем и определяется единственное различие в решении задачи для лопатки переменной толщины по сравнению с лопаткой постоянной толщины. Соответствующая система представится следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{0,35}{\varphi^2}(u_q + u_n) + x(x + 0,5)u_s + x(x - 0,5)u_\kappa - \\
 &\quad - (2x^2 + \frac{0,7}{\varphi^2} + 1)u_i + 0,1625 \frac{x}{\varphi} (v_0 - v_t + v_m - v_p) - \\
 &\quad - \frac{0,675}{\varphi} (v_q - v_n) + 0,25x \frac{\delta_s - \delta_\kappa}{\delta_i} \left[x(u_s - u_\kappa) + \right. \\
 &\quad + 0,6u_i + \frac{0,3}{\varphi}(v_q - v_n) \left. \right] + \frac{0,0875}{\varphi} \cdot \frac{\delta_q - \delta_n}{\delta_i} \left[\frac{1}{\varphi}(u_q - u_n) + \right. \\
 &\quad \left. + x(v_s - v_\kappa) - 2v_i \right] = m_0(\alpha_0 - \rho_i \sin \theta_i) \rho_i^2 \sin \theta_i; \\
 &0,1625 \frac{x}{\varphi} (u_0 - u_t + u_m - u_p) + \frac{0,675}{\varphi} (u_q - u_n) + \\
 &\quad + \frac{1}{\varphi^2} (v_q + v_n) + 0,35x(x + 0,5)v_s + 0,35x(x - 0,5)v_\kappa -
 \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\begin{aligned}
 & - (0,7x^2 + \frac{2}{\varphi^2} + 0,35) v_i + 0,0875x \frac{\delta_s - \delta_\kappa}{\delta_i} \left[\frac{1}{\varphi} (u_q - u_n) + \right. \\
 & \left. + x(v_s - v_\kappa) - 2v_i \right] + \frac{0,25}{\varphi} \cdot \frac{\delta_q - \delta_n}{\delta_i} \left[0,3x(u_s - u_\kappa) + \right. \\
 & \left. + 2u_i + \frac{1}{\varphi} (v_q - v_n) \right] = m_0 (\alpha_0 - \rho_i \sin \theta_i) \rho_i^2 \cos \theta_i,
 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$m_0 = \frac{1 - \mu^2}{E} \gamma \omega^2 r_2^3; \quad \alpha_0 = \frac{a}{r_2};$$

a — расстояние от центра полярной сетки до оси вращения колеса.

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Задача об определении термоупругих напряжений в лопатке переменной толщины и произвольной формы в математическом отношении совершенно аналогична задаче об определении напряжений в ней от вращения [3]. Дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях будут здесь однородными, однако связь между термоупругими деформациями и напряжениями будет включать в себя температурную деформацию

$$\vartheta = \alpha(t - t_0),$$

где α — коэффициент линейного теплового расширения, $1/^\circ\text{C}$;
 t — температура лопатки, $^\circ\text{C}$;
 $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

Поэтому, если выразить напряжения через термоупругие деформации, которые в свою очередь заменить по уравнениям Коши перемещениями и подставить их в уравнения равновесия, то получим неоднородную систему, где роль массового члена будет играть функция от температурной деформации ϑ . В конечно-разностной форме эта система будет аналогична уравнениям (7) или (8).

В статье [3] был рассмотрен пример расчета термоупругих напряжений в кольцевом секторе постоянной толщины. При этом использование интегрального способа удовлетворения граничных условий на торцах привело к появлению на них самоуравновешенной нагрузки, которая в отдельных точках очень велика. Чтобы уточнить напряжения в лопатке, этот пример был просчитан методом конечных разностей с использованием полярной сетки, изображенной на фиг. 1, аналогично тому, как это было сделано для напряжений от вращения.

В результате расчета наиболее опасными получились те же точки F и G (см. фиг. 1), что и при интегральном способе, однако напряжения в них получились существенно меньше. Максимальное напряжение имеет место в точке F , где $\sigma_{\text{экв}} = 109 \alpha E$ вместо $\sigma_{\text{экв}} = 150 \alpha E$, при интегральном методе. Точка G опасна тем, что в ней возникает значительное окружное напряжение сжатия $\Theta_{\theta} = -78,1 \alpha E$ вместо $\Theta_{\theta} = -96 \alpha E$, при интегральном методе. Оно может привести к потере устойчивости тонкой кромки лопатки.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ М-3

Итак, рассматриваемая задача сводится к системе большого числа линейных алгебраических уравнений. Решение ее обычным методом счета затруднительно. Поэтому была составлена программа для решения ее на электронной вычислительной машине М-3.

Использовался метод последовательных приближений: в каждом уравнении неизвестное с максимальным коэффициентом в строчке выражалось через остальные неизвестные.

Программа рассчитана на 26 уравнений, то есть сетка может содержать 13 внутренних узлов, что обычно достаточно. Если же их меньше, то остальные уравнения дописываются нулями и решение ведется по той же программе.

Достаточное условие сходимости заключается в том, что в каждой строчке модуль коэффициента при неизвестном, которое находится из уравнения, должен быть больше суммы модулей остальных коэффициентов уравнения. Несмотря на отсутствие этого условия, система 15 уравнений задачи с симметричной нагрузкой, изложенной на стр. 6, была решена за 55 приближений, что потребовало 20 минут машинного времени. Причем в нулевом приближении все неизвестные были приняты равными нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Ч. I. Киев, Изд-во АН УССР, 1949. Ч. II. Киев, Изд-во АН УССР, 1952.

2. Заварцева Н. А. Расчет на прочность дисков радиальных турбомашин. В сб.: «Некоторые вопросы расчета легких газотурбинных двигателей». Сб. 2. М., НАМИ, 1963, стр. 34—79 (Труды НАМИ, вып. 55).

3. Чернин В. М. Напряжения в лопатках радиальных газовых турбин. В сб.: «Некоторые вопросы расчета легких газотурбинных двигателей». Сб. 2. М., НАМИ, 1963, стр. 80—135 (Труды НАМИ, вып. 55).

С. И. Левитан

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОТОРА ВЫСОКООБОРОТНОГО ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ МАСЛЯНОЙ ПЛЕНКИ ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ

Рост числа оборотов современных маломощных газотурбинных двигателей определил тенденцию перехода в их конструкции от подшипников качения к подшипникам скольжения. При создании нового двигателя уже в стадии проектирования необходимо знать зоны частот, в которых у данной системы развиваются опасные амплитуды колебаний, с тем, чтобы заранее отстроить эту зону от диапазона рабочих частот. Однако, если для двигателей с подшипниками качения существуют расчетные методы определения амплитудно-частотных характеристик, то для двигателей с подшипниками скольжения такие методы отсутствуют.

Попытке теоретического определения амплитудно-частотной характеристики ротора турбомашин с учетом влияния масляной пленки подшипника скольжения и посвящена настоящая работа.

Как известно, даже при самой тщательной балансировке, вращающийся ротор двигателя всегда нагружен силой дисбаланса, вектор которой вращается с частотой вращения вала ω . Наличие этой силы позволяет предположить, что в диапазоне числа оборотов, по крайней мере до первой критической скорости, ротор обкатывается в подшипнике с частотой вращения вала ω , т. е. совершает прямую синхронную процессию (фиг. 1).

Из фиг. 1 следует, что линейная скорость шипа относительно подшипника в месте минимального зазора равна

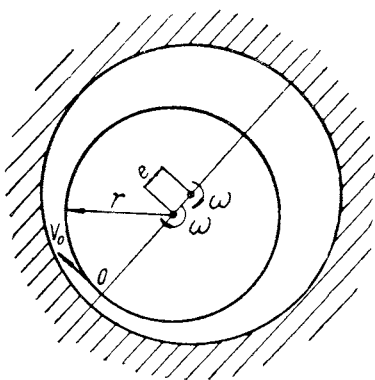
$$V_0 = \omega(e + r_1),$$

где e — абсолютный эксцентриситет;
 r_1 — радиус шипа.

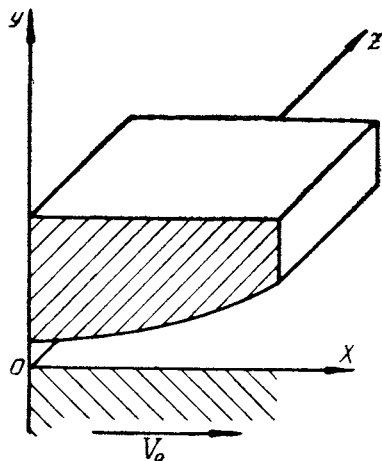
Имея в виду, что величина абсолютного эксцентриситета e значительно меньше радиуса шипа r_1 , приближенно можно считать

$$V_0 = \omega r_1 . \quad (1)$$

Обращая движение, представленное на фиг. 1, т. е. считая шип и действующую на него силу дисбаланса неподвижными, а подшипник вращающимся в противоположную сторону со скоростью V_0 , рассмотрим течение жидкости в зазоре подшипника, причем оси координат выберем так, как это показано на фиг. 2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Будем считать смазку вязкой несжимаемой жидкостью. Уравнения движения ламинарного течения такой жидкости, как известно, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} ; \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} ; \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} ; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а уравнения напряжений в такой жидкости:

$$\left. \begin{aligned}
 p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \\
 p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\
 p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right); \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \\
 \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),
 \end{aligned} \right\} (3)$$

где v_x, v_y, v_z — проекции скорости жидкости в данной точке на оси прямоугольной системы координат;

ρ — плотность жидкости;

μ — динамический коэффициент вязкости смазки;

p — гидродинамическое давление в слое смазки;

p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — компоненты нормальных напряжений в смазке;

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ — компоненты касательных напряжений в смазке;

X, Y, Z — компоненты интенсивности массовых сил.

Пренебрегая в уравнениях (2) инерционными и массовыми силами и подставляя в полученные выражения значения напряжений из уравнения (3), получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \\
 \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right); \\
 \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).
 \end{aligned} \right\} (4)$$

Имея в виду малую величину зазора по сравнению с другими размерами подшипника, предположим, что v_y значительно меньше, чем v_x и v_z , что приводит к постоянству давления

в масляном слое по толщине. Предположим также, что $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ значительно больше по величине, чем $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ и $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, а величина $\frac{\partial v_z}{\partial y}$ значительно больше, чем $\frac{\partial v_z}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_z}{\partial z}$. В этом случае уравнения (4) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} ; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 ; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} ; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а уравнения для касательных напряжений —

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} ; \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \frac{\partial v_z}{\partial y} ; \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интегрируя выражения (4) и используя граничные условия,

$$y = 0 ; \quad v_x = V_0 ; \quad v_z = 0 ;$$

$$y = h ; \quad v_x = 0 ; \quad v_z = 0 ,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} y^2 - \left(\frac{V_0}{h} + \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} h \right) y + V_0 ; \\ v_z &= \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} y^2 - \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} h y , \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где h — толщина масляного слоя в месте минимального зазора,

Подставляя полученные значения v_x и v_y в уравнение неразрывности и интегрируя полученное выражение по толщине масляного слоя, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) - 6V_0 \frac{\partial h}{\partial x} + 12V = 0, \quad (8)$$

где V — скорость сближения шипа и подшипника.

Если пренебречь поступательным движением шипа, рассматривая только вращение его в подшипнике, и считать течение жидкости плоским, то для цилиндрических шипа и подшипника ($x = r_1 \varphi$) с учетом выражения (1) уравнение (8) примет вид

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d}{r_1 d\varphi} \left(h^3 \frac{dp}{r_1 d\varphi} \right) - 6\omega \frac{dh}{d\varphi} = 0. \quad (9)$$

Следуя Зоммерфельду, толщину масляного слоя можно представить в виде

$$h = e \cos \varphi + r_2 - r_1,$$

где r_2 — радиус подшипника.

Вводя величину радиального зазора

$$\Delta = r_2 - r_1,$$

получим

$$h = e \cos \varphi + \Delta.$$

Используя полученное выражение и переходя к безразмерным величинам, уравнение (9) получим в виде

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\bar{h}^3 \frac{d\bar{p}}{d\varphi} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\varphi}, \quad (10)$$

где \bar{p} , ψ , \bar{h} и χ — следующие безразмерные величины:

$$\bar{p} = \frac{\psi^2}{2\omega\mu} p \quad \text{— гидродинамическое давление;}$$

$$\psi = \frac{\Delta}{r_1} \quad \text{— радиальный зазор;}$$

$$\bar{h} = \frac{h}{\Delta} = 1 + \chi \cos \varphi \quad \text{— толщина масляного слоя;}$$

$$\chi = \frac{e}{\Delta} \quad \text{— эксцентриситет.}$$

Последовательное двойное интегрирование уравнения (10) дает

$$\frac{d\bar{p}}{d\varphi} = 3 \frac{\bar{h} - H}{\bar{h}^3} \quad (11)$$

и

$$\bar{p}(\varphi) = 3 \int \frac{d\varphi}{\bar{h}^2} - 3H \int \frac{d\varphi}{\bar{h}^3} + C. \quad (12)$$

Постоянные интегрирования H и C определяются из условия протяженности масляного слоя. В качестве первого приближения будем считать, что масляный слой начинается в месте максимального зазора и кончается в месте минимального зазора. В этом случае граничные условия для определения постоянных интегрирования будут иметь вид:

$$\text{при } \varphi = 0 \quad \bar{p}(\varphi) = 0,$$

$$\text{при } \varphi = \pi \quad \bar{p}(\varphi) = 0.$$

Подставляя граничные условия в выражения (11) и (12), после несложных преобразований найдем, что

$$C = 0, \text{ а } H = \frac{2(1 - \chi^2)}{2 + \chi^2}.$$

Зная распределение давления по шипу, можно найти равнодействующую сил со стороны шипа на жидкость (фиг. 3).

Проектируя действующие силы на линию центров и направление ей перпендикулярное, получим

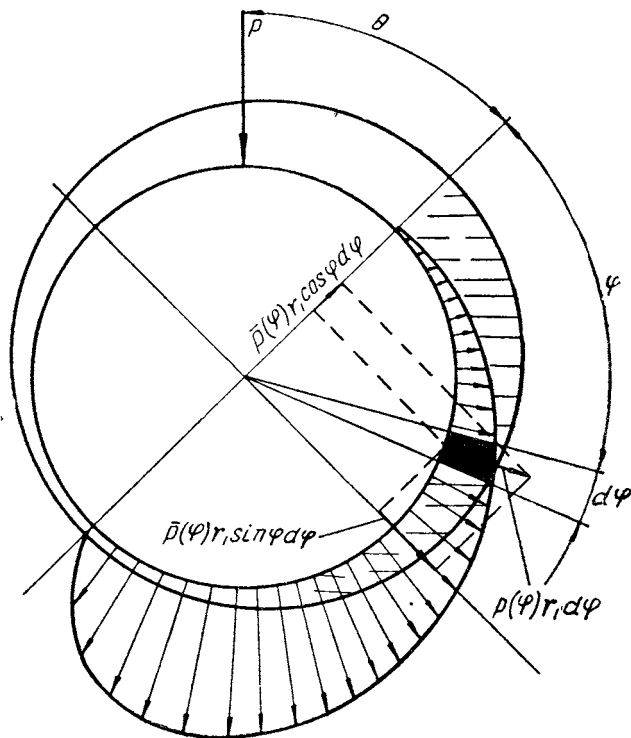
$$\left. \begin{aligned} \bar{P} \sin \theta &= r_1 \int_0^{\pi} \bar{p}(\varphi) \sin \varphi d\varphi; \\ \bar{P} \cos \theta &= -r_1 \int_0^{\pi} \bar{p}(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где \bar{P} — безразмерная равнодействующая сил воздействия шипа на жидкость;

θ — угол между линией действия равнодействующей и линией центров.

Полученное выражение (13) интегрированием по частям может быть преобразовано к виду:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} \sin \theta &= r_1 \int_0^{\pi} \frac{d\bar{p}(\varphi)}{d\varphi} \cos \varphi d\varphi ; \\ \bar{P} \cos \theta &= r_1 \int_0^{\pi} \frac{d\bar{p}(\varphi)}{d\varphi} \sin \varphi d\varphi . \end{aligned} \right\} (14)$$



Фиг. 3.

Подставляя в эти выражения значение $\frac{d\bar{p}\varphi}{d\varphi}$ из формулы (11) и имея в виду, что

$$\bar{h} = 1 + \chi \cos \varphi ,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} \sin \theta &= 3r_1 \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^2} - 6r_1 \frac{1 - \chi^2}{2 + \chi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^3}; \\ \bar{P} \cos \theta &= 3r_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^2} - 6r_1 \frac{1 - \chi^2}{2 + \chi^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^3}. \end{aligned} \right\} (15)$$

Из последних выражений могут быть найдены значения $\frac{\bar{P}}{r_1}$ и $\operatorname{tg} \theta$:

$$\frac{\bar{P}}{r_1} = \sqrt{\left(3I_1 - \frac{6(1 - \chi^2)}{2 + \chi^2} I_2\right)^2 + \left(3I_3 - \frac{6(1 - \chi^2)}{2 + \chi^2} I_4\right)^2} \quad (16)$$

$$\text{и} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{I_1 - \frac{2(1 - \chi^2)}{2 + \chi^2} I_2}{I_3 - \frac{2(1 - \chi^2)}{2 + \chi^2} I_4}, \quad (17)$$

где

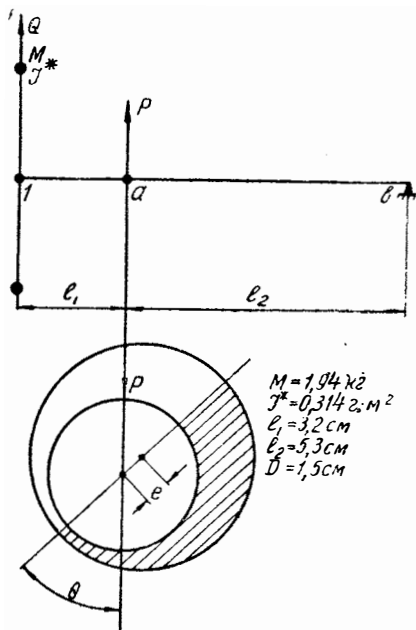
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^2}; & I_2 &= \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^3}; \\ I_3 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^2}; & I_4 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 + \chi \cos \varphi)^3}. \end{aligned}$$

Действительное значение равнодействующей силы P связано с безразмерным значением \bar{P} следующим образом:

$$P = \frac{\bar{P}}{r_1} \cdot \frac{2\omega r_1 \mu}{\psi^2}. \quad (18)$$

Как видно из равенства (16), выражение для равнодействующей сил давления нелинейно относительно χ и, следовательно, при изучении колебаний систем, имеющих хотя бы один подшипник скольжения, должен быть применен аппарат нелинейной механики, что приводит даже в простейших случаях к значительным математическим трудностям. В данной работе применен следующий прием, позволяющий избежать решения нелинейных уравнений. Рассматриваемая система

расчленяется на собственно ротор и опоры, причем действие отсеченных частей заменяется силами. Такое расчленение системы позволяет для отсеченного от опор ротора, считая его системой линейно-деформируемой, воспользоваться хорошо



Фиг. 4.

разработанным методом динамических податливостей и получить перемещение ротора в местах отсеченных опор в зависимости от действующих на него сил.

Требование совместности перемещений ротора и опоры в месте их сочленения приводит к уравнению равновесия, из которого для каждого значения угловой скорости вращения ротора ω может быть получено равновесное значение перемещения.

Рассмотрим ротор, представленный на фиг. 4, одна из опор которого подшипник скольжения, а другая — абсолютно жесткая. Ротор представляет из себя вал диаметром D , на котором консольно расположен диск с массой M и приве-

денным моментом инерции I^* . Приведенный момент инерции, как известно, равен

$$I^* = I_d - I_0,$$

где I_d и I_0 — соответственно диаметральный и полярный массовые моменты инерции.

Условие совместности перемещений ротора и опоры приводит к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_a &= P e_{aa} \pm Q e_{1a}; \\ y_a &= -\Delta \chi \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где y_a — перемещение центра вала в месте сочленения с опорой;

Q — сила от дисбаланса;

P — реакция опоры;
 e_{aa} и e_{1a} — динамические податливости безопорного ротора.
 Сила от дисбаланса, как известно, равна

$$Q = d\omega^2, \quad (20)$$

где d — величина дисбаланса.

Решая систему (19) и используя выражения (20) и (18), получим уравнение амплитудно-частотной характеристики

$$e_{aa} = \pm \frac{d\psi^2}{2\mu r_1} \cdot \frac{1}{\bar{P}} \cdot e_{1a}\omega - \frac{\Delta\psi^2}{2\mu r_1} \cdot \frac{\chi \cos\theta}{\bar{P}} \cdot \frac{1}{\omega}. \quad (21)$$

Следует подчеркнуть, что вследствие примененного способа решения полученное уравнение позволяет найти лишь амплитудно-частотную характеристику системы и, не являясь уравнением колебаний, не затрагивает вопросы характера колебательного процесса, устойчивости движения и т. д.

Полученное уравнение, описывающее амплитудно-частотную характеристику вынужденных колебаний системы, при величине дисбаланса $d \rightarrow 0$ переходит в характеристику собственных колебаний

$$e_{aa} = - \frac{\Delta\psi^2}{2\mu r_1} \cdot \frac{\chi \cos\theta}{\bar{P}} \cdot \frac{1}{\omega}. \quad (22)$$

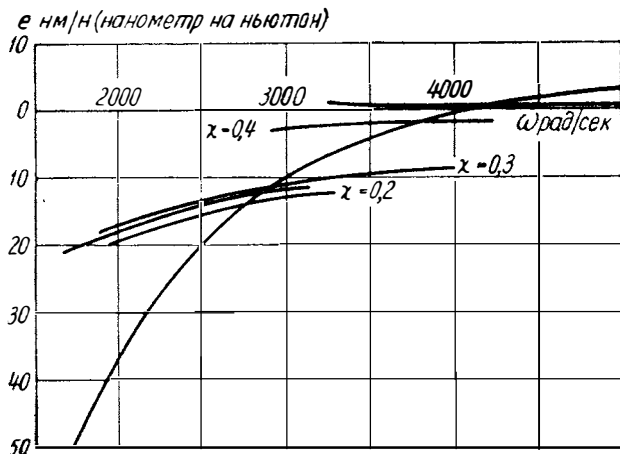
Как видно из сравнения выражений (21) и (22), амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний располагается симметрично относительно собственных.

Выражения (21) и (22) в виду их сложности не могут быть решены чисто аналитически, тем более, что величины динамических податливостей, как правило, задаются таблицами. Для нахождения амплитудно-частотной характеристики здесь применен графоаналитический способ решения путем построения в координатах e , ω левых и правых частей уравнений.

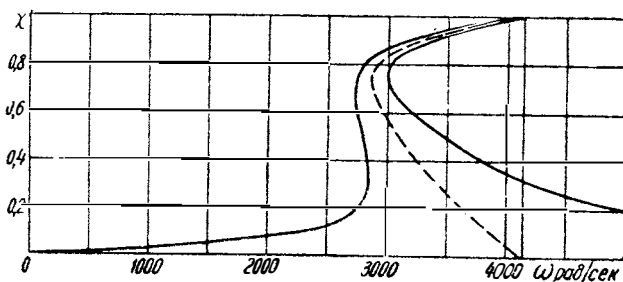
На фиг. 5. показано решение уравнения (21) для случая, когда зазор в подшипнике $\Delta = 0,005$ см, температура смазки $t = 100^\circ\text{C}$ и величина дисбаланса $d = 1$ г·м, а на фиг. 6 приведена соответствующая амплитудно-частотная характеристика. Сплошной линией нанесена амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний, а пунктиром — собственных. Величина $\omega = 4140$ рад/сек является собственной

частотой колебаний исследуемого ротора на двух абсолютно жестких опорах.

Как видно из приведенной фигуры, полученная форма амплитудно-частотной характеристики полностью реализована быть не может. Вероятно, на практике будут наблюдаться переходы с одной ветви кривой на другую. В данной работе эти вопросы устойчивости движения, как уже упоминалось, не рассматриваются.

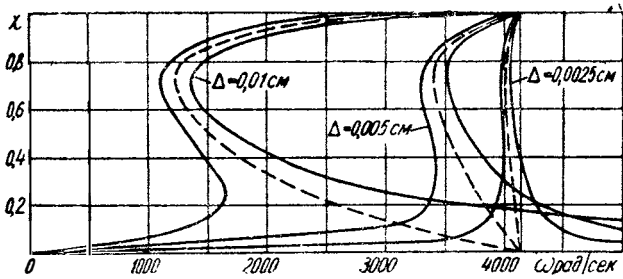


Фиг. 5.

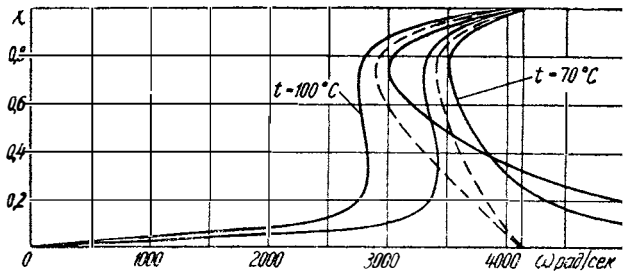


Фиг. 6.

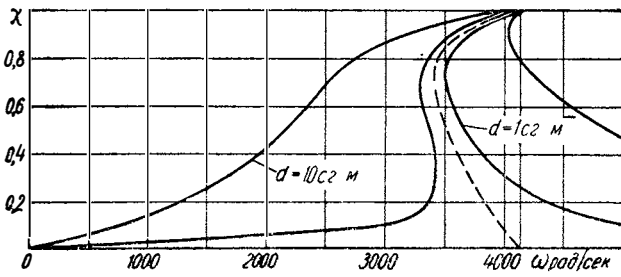
Аналогичные расчеты по выражениям (21) и (22) были проведены для различных значений зазора и дисбаланса, а также для различных значений температуры подводимого к подшипнику масла,



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Как видно из фиг. 7, уменьшение зазора в подшипнике приводит к увеличению частоты, при которой достигается максимальная амплитуда и к сужению зоны больших амплитуд, однако абсолютная величина этих амплитуд с уменьшением зазора увеличивается. Примерно так же как и уменьшение зазора влияет на амплитудно-частотную характеристику и уменьшение температуры подводимого к подшипнику масла (фиг. 8).

На фиг. 9 приведены амплитудно-частотные характеристики для двух различных значений дисбалансов. Как видно, увеличение дисбаланса приводит не только к увеличению абсолютной величины амплитуды, но и к расширению зоны существования больших амплитуд.

На всех приведенных фигурах в случае упора шипа в подшипник полученные амплитудно-частотные характеристики вырождаются в прямую линию и переходят в обычную амплитудно-частотную характеристику для систем без масляной пленки.

* * *

Таким образом:

1) полученные результаты показывают резко выраженный нелинейный характер колебаний вала на масляной пленке подшипника скольжения;

2) исследование влияния зазора в подшипнике на амплитудно-частотную характеристику двигателя показало, что уменьшение максимальной амплитуды колебаний ротора путем увеличения зазора приводит к расширению зоны существования больших амплитуд;

3) в силу принятых в работе допущений (о границах смазочного слоя, о бесконечности длины подшипника и др.) полученные количественные зависимости являются приближенными.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ОБОРОТОВ ДВУХОПОРНОГО РОТОРА ВЫСОКООБОРОТНОГО ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Быстроходные газотурбинные двигатели, совершающие до 60 000 *об/мин*, имеют малые габариты, малую массу и, следовательно, небольшую жесткость опорных и корпусных деталей. Пренебрежение податливостью опорных устройств при определении критических скоростей таких двигателей приводит к недопустимо большим ошибкам (обычно в два раза и даже более).

Существующие способы определения критической скорости двигателей с учетом податливости его опор [1], [2], [3] весьма сложны и трудоемки, даже в случае расчета на электронной вычислительной машине [4].

В настоящей статье предлагается приближенный способ расчета критической скорости двухопорного ротора быстроходного газотурбинного двигателя с произвольным числом и расположением дисков. В основу предлагаемого способа положено допущение об абсолютной жесткости вала ротора*. Иными словами, влиянием гибкости вала на критическое число оборотов системы в данной работе пренебрегается.

Рассмотрим двухопорный ротор газотурбинного двигателя с произвольным числом и расположением дисков, находящийся в колебательном движении (фиг. 1). Отбрасывая опоры и заменяя их действительными силами, из условия совместности колебаний ротора и упругих опор, придем, как известно, к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_n(e_{nn} + \delta_n) + X_{pe_{np}} &= 0; \\ X_n e_{pn} + X_p(e_{pp} + \delta_p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* Допущение предложено автору канд. техн. наук А. Е. Балтером.

где X_n, X_p — реакции опор;
 δ_n, δ_p — податливости опор *;
 $e_{pn}, e_{nn}, e_{np}, e_{pp}$ — динамические податливости безопорного ротора.

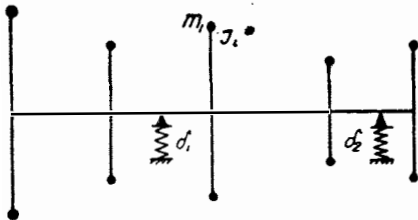
Из системы уравнений (1) при прогибах в опорах, не равных нулю, а следовательно, при $X_n \neq 0$ и $X_p \neq 0$ вытекает уравнение для определения критической скорости системы:

$$\begin{vmatrix} e_{nn} + \delta_n & e_{np} \\ e_{pn} & e_{pp} + \delta_p \end{vmatrix} = 0.$$

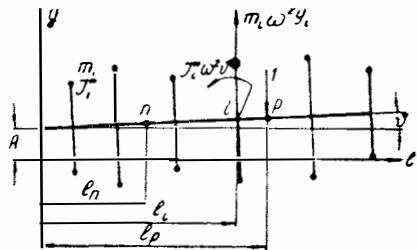
Или, имея в виду, что $e_{pn} = e_{np}$, получим

$$(e_{nn} + \delta_n)(e_{pp} + \delta_p) = e_{np}^2. \quad (2)$$

Для определения динамических податливостей e_{nn}, e_{np} и e_{pp} , входящих в последнее равенство, рассмотрим безопорный ротор, находящийся в колебательном движении под действием единичной гармонической силы (фиг. 2). Имея в виду, что колебания ротора рассматриваются как колебания абсолютно жесткого тела, составим уравнение перерезывающих сил и изгибающих моментов, учитывая, что и сила и момент на конце ротора равны нулю.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Уравнение перерезывающих сил будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^k m_i (A + l_i \vartheta) \omega^2 - 1 = 0,$$

* Динамическая податливость опор в данной работе отождествляется со статической.

а уравнение изгибающих моментов

$$\sum_{i=1}^{\kappa} m_i (A + l_i \vartheta) l_i \omega^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \vartheta \omega^2 - l_p = 0,$$

где A — амплитуда перемещения левого конца ротора;
 ϑ — угол наклона ротора к оси l ;
 ω — угловая скорость вращения ротора;
 m_i — сосредоточенная масса, приложенная в i -й точке;
 I_i^* — приведенный момент инерции диска, приложенный в i -й точке;
 l_i — расстояние от начала координат до i -й точки;
 l_p — координата места приложения единичной возбуждающей силы;
 κ — число сосредоточенных масс;
 κ_1 — число гироскопических моментов.

Приведенный момент инерции диска I^* для прямой синхронной прецессии, как известно, равен

$$I^* = I_d - I_0,$$

где I_d и I_0 — соответственно диаметральный и полярный массовые моменты инерции диска.

Полученную систему алгебраических уравнений перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} A \sum_{i=1}^{\kappa} m_i \omega^2 + \vartheta \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \omega^2 &= 1; \\ A \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \omega^2 + \vartheta \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 \omega^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \omega^2 \right) &= l_p. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда следует

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \omega^2 \\ l_p & \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 \omega^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{\kappa} m_i \omega^2 & \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \omega^2 \\ \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \omega^2 & \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 \omega^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \omega^2 \end{vmatrix}}$$

или

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* - l_p \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i}{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \right) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \right)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}.$$

Аналогично

$$\vartheta = \frac{l_p \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i}{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \right) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \right)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}.$$

Амплитудное перемещение в точке n вала

$$A_n = A + l_n \vartheta,$$

а динамическая податливость e_{np}

$$e_{np} = -A_n = -(A + l_n \vartheta).$$

Знак минус указывает, что перемещение ротора противоположно направлению действия силы.

Подставляя в последнее равенство значения A и ϑ , получим

$$e_{np} = - \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* + l_n l_p \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - (l_n + l_p) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i}{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \right) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \right)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}.$$

Остальные податливости e_{nn} и e_{pp} получаются из приведенной формулы путем замены соответствующих индексов:

$$e_{nn} = - \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* + l_n^2 \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - 2l_n \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i}{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \right) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \right)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2};$$

$$e_{pp} = - \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* + l_p^2 \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - 2l_p \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i}{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \right) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \right)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}.$$

В случае, если податливости опор одинаковы

$$\delta_n = \delta_p = \delta,$$

то уравнение (2) примет вид

$$(e_{nn} + \delta)(e_{pp} + \delta) = e_{np}^2.$$

Подставляя в последнее равенство полученные ранее значения динамических податливостей e_{nn} , e_{pp} и e_{np} и решая уравнение относительно квадрата критической угловой скорости, найдем

$$\omega_{кр}^2 = \frac{1}{\delta} \left(\frac{B}{C} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 2L^2C}}{C} \right), \quad (3)$$

где

$$B = 2 \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\kappa_1} l_i^* + (l_n^2 + l_p^2) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - 2(l_n + l_p) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i;$$

$$C = 2 \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^{\kappa_1} l_i^* \right) \sum_{i=1}^{\kappa} m_i - 2 \left(\sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_i \right)^2;$$

$L = l_p - l_n$ — расстояние между опорами.

Выражение (3) позволяет для рассматриваемой системы с двумя степенями свободы получить два значения критической скорости, причем низшее значение $\omega_{кр}$ соответствует знаку минус. Однако оба значения критической скорости оказываются действительными только до определенного значения гироскопии, поскольку, как известно, внесение в систему достаточно большой гироскопической нагрузки приводит к появлению мнимого значения частоты. В этом случае следует принимать во внимание только действительное значение $\omega_{кр}$.

Из выражения (3), кроме того, следует, что величина критической угловой скорости ротора, установленного на двух равноподатливых опорах, обратно пропорциональна корню квадратному из величины податливости опор.

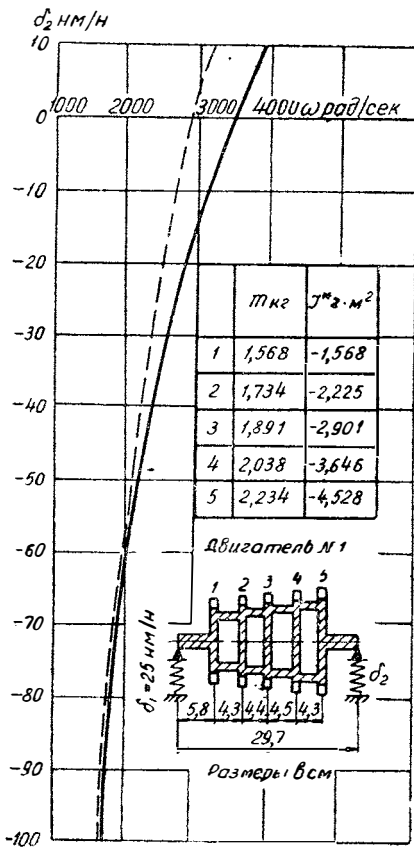
Если же податливость опор не одинакова, то целесообразнее применить графо-аналитический способ решения уравнения (2), для чего его следует преобразовать к виду

$$e_{pp} - \frac{e_{np}^2}{e_{nn} + \delta_n} = -\delta_p. \quad (4)$$

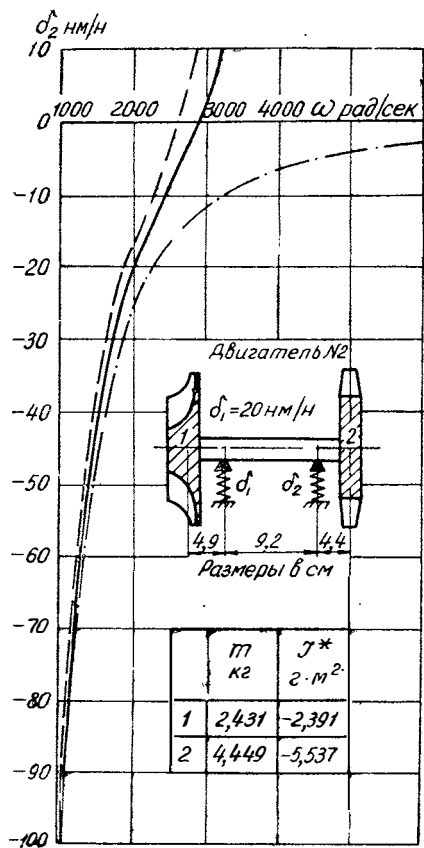
Вычислив заранее динамические податливости безопорного ротора e_{nn} , e_{np} , и e_{pp} в зависимости от изменения угловой ско-

рости вращения ω , задаваясь податливостью одной из опор (удобнее — менее нагруженной) как параметром, можно найти левую часть выражения (4) в функции ω . Точка пересечения графика полученной кривой и графика правой части уравнения (4), который в выбранных координатах представляет собой прямую линию, параллельную оси ω , и дает искомую величину критической угловой скорости $\omega_{кр}$.

На фиг. 3 и 4 нанесены кривые изменения критической скорости для двух различных двигателей в зависимости от величины наиболее нагруженной опоры δ_2 при выбранном значении δ_1 , причем сплошными линиями нанесены кривые, подсчитанные по предлагаемой методике, а пунктиром — точ-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

ным методом с учетом гибкости вала ротора. Поскольку податливость опор для рассматриваемого класса двигателей не бывает меньше 10—15 нм/н *, то, как следует из приведенных графиков, максимальное отклонение от точного решения для двигателя № 1 составляет 14%, а для двигателя № 2 — 6%. Следует заметить, что на точность предлагаемого способа благоприятно влияет тот факт, что заранее известен знак ошибки, поскольку величина $\omega_{кр}$, вычисленная этим способом, всегда получается с избытком. Кроме того, с увеличением податливости δ_2 эта погрешность прогрессивно уменьшается. Так, при значении $\delta_2 = 50$ нм/н, что имеет место для обоих рассматриваемых двигателей, погрешность для двигателя № 1 составляет 7%, а для двигателя № 2 — менее 4%. Приведенные графики позволяют определить как критическую скорость системы при заданном δ_2 , так и подобрать податливость опоры таким образом, чтобы обеспечить нужное значение критической скорости $\omega_{кр}$.

Если конструктивная схема рассчитываемого двигателя такова, что одна из опор нагружена значительно сильнее, чем другая (в два раза и более), то, поскольку влияние податливости менее нагруженной опоры на первую критическую скорость, как известно, весьма невелико, им можно пренебречь, т. е. считать опору абсолютно жесткой. Это положение может быть применено при расчете роторов одноступенчатых турбокомпрессоров с разнесенными дисками, поскольку диск турбины обычно тяжелее диска компрессора примерно в 3 раза, при расчете турбокомпрессоров, у которых диски турбины и компрессора насажены рядом и расположены консольно по отношению к опорам, и вообще во всех тех случаях, когда неравномерность нагрузки опор очевидна.

Для получения расчетных зависимостей при такой схематизации рассмотрим колебания ротора, одна из опор которого податлива, а другая — абсолютно жесткая ($\delta = 0$). Расчленив рассматриваемую систему в месте присоединения податливой опоры и заменяя действие отброшенных частей силами, вместо системы уравнений (1) будем иметь

$$eX = -\delta X,$$

где X — реакция податливой опоры;

δ — податливость опоры;

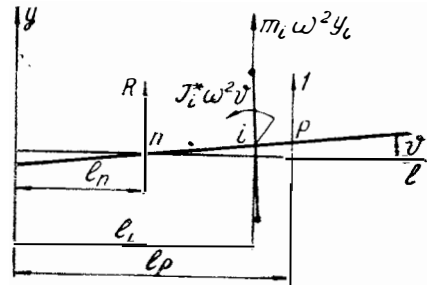
e — динамическая податливость ротора, установленного на одной абсолютно жесткой опоре в точке расположения податливой опоры.

* То есть 10—15 нанометров на ньютон; 1 нм = $1 \cdot 10^{-9}$ м.

А уравнение для определения критической скорости системы примет вид

$$e = -\delta. \quad (5)$$

Для определения величины e , стоящей в левой части полученного уравнения, снова рассмотрим колебания ротора как абсолютно жесткого тела под действием единичной гармонической силы, но теперь уже не свободного, а установленного на одной абсолютно жесткой опоре (фиг. 5).



Фиг. 5.

Аналогично предыдущему составим уравнения перерезывающих сил и изгибающих моментов:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\kappa} m_i \omega^2 (l_i - l_n) \vartheta + R + 1 &= 0; \\ \sum_{i=1}^{\kappa} m_i \omega^2 (l_i - l_n) l_i \vartheta + \sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* \omega^2 \vartheta + R l_n + l_p &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где R — реакция абсолютно жесткой опоры.

Из этой системы уравнений следует, что

$$\vartheta = - \frac{l_p - l_n}{\sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* + \sum_{i=1}^{\kappa} m_i (l_i - l_n)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2},$$

а динамическая податливость e найдется как

$$e = (l_p - l_n) \vartheta = - \frac{(l_p - l_n)^2}{\sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* + \sum_{i=1}^{\kappa} m_i (l_i - l_n)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}.$$

Подставляя значение e в (5), получим

$$\delta = \frac{L^2}{\sum_{i=1}^{\kappa_1} I_i^* + \sum_{i=1}^{\kappa} m_i l_{0i}^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}, \quad (6)$$

где L — расстояние между опорами;

l_{0i} — расстояние от i -й массы до жесткой опоры.

Для определения критической скорости по известному значению податливости опоры δ выражение (6) удобнее разрешить относительно критической скорости $\omega_{кр}$:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{1}{\delta} \cdot \frac{L^2}{\sum_{i=1}^{k_1} I_i^* + \sum_{i=1}^k m_i l_{0i}^2}} \quad (7)$$

Полученные выражения (6) и (7) весьма просты и удобны для практических расчетов. Что касается точности их, то она достаточна, если податливость опоры не менее, чем 20—30 нм/н (что встречается в большинстве практических случаев), так как при $\delta \rightarrow 0$ выражения (5) и (6) переходят в зависимости для абсолютно жесткого тела, и, в соответствии с этим, дают $\omega_{кр} \rightarrow \infty$.

На фиг. 4 штрих-пунктиром нанесена кривая изменения критической скорости ротора двигателя № 2 при условии абсолютной жесткости компрессорной опоры, подсчитанная по выражению (6). Как видно, удовлетворительная точность получается при податливости турбинной опоры не менее, чем 20—25 нм/н. В действительности эта опора имела податливость $\delta = 50$ нм/н, в этом случае погрешность не превышала 7%. При податливостях, меньших 20 нм/н погрешность в данном случае превышает 15%. Следует иметь в виду, что и здесь величина критической скорости получается всегда с избытком.

Расчет по этим формулам двигателя № 1, имеющего многодисковый ротор, не имеет смысла, поскольку условие существенно различной нагруженности опор здесь не выполняется.

* * *

Таким образом:

1) допущение об абсолютной жесткости вала ротора позволяет существенно упростить расчет критического числа оборотов двигателей;

2) точность предлагаемых выражений (3) и (4) практически удовлетворительна, тем более, что всегда заранее известен знак ошибки, причем эта ошибка прогрессивно уменьшается с увеличением податливости опор;

3) для прикидочных расчетов роторов, имеющих различно нагруженные опоры, рекомендуется пользоваться выражениями (6) и (7).

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
8	21-я снизу	без учета	с учетом
9	2-я снизу	$y = \frac{y_i}{h_2}$	$Y = \frac{y_i}{h_2}$
24	2-я сверху	безопорного	одноопорного

Труды НАМИ, вып. 63

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуров А. Ф. Изгибные колебания деталей и узлов авиационных газотурбинных двигателей. М., Оборонгиз, 1959.
2. Крюков К. А. Табличный метод расчета критических угловых скоростей многодисковых роторов. В сб.: «Труды». Вып. 55. М., Оборонгиз, 1956, стр. 5—62. (Моск. авиационный ин-т).
3. Огуречников А. Н. Динамические жесткости вращающихся валов. В сб.: «Труды». Вып. 55. М., Оборонгиз, 1956, стр. 93—135. (Моск. авиационный ин-т).
4. Левитан С. И. Определение критического числа оборотов турбомашин, имеющей податливые опоры. В сб.: «Применение математических машин при конструировании и испытаниях автомобилей и двигателей». М., НАМИ, 1963, стр. 123—128 (НАМИ — НТО Машпром).

СОДЕРЖАНИЕ

В. М. Чернин. Расчет на прочность лопаток радиальных турбомашин	3
С. И. Левитан. Определение амплитудно-частотной характеристики ротора высокооборотного газотурбинного двигателя с учетом влияния масляной пленки подшипника скольжения	15
С. И. Левитан. Приближенный способ определения критического числа оборотов двухопорного ротора высокооборотного газотурбинного двигателя	28

Цена 16 коп.

Содержание

1. Введение 1
2. Глава I 10
3. Глава II 20
4. Глава III 30
5. Глава IV 40
6. Глава V 50
7. Глава VI 60
8. Глава VII 70
9. Глава VIII 80
10. Глава IX 90
11. Глава X 100
12. Глава XI 110
13. Глава XII 120
14. Глава XIII 130
15. Глава XIV 140
16. Глава XV 150
17. Глава XVI 160
18. Глава XVII 170
19. Глава XVIII 180
20. Глава XIX 190
21. Глава XX 200
22. Глава XXI 210
23. Глава XXII 220
24. Глава XXIII 230
25. Глава XXIV 240
26. Глава XXV 250
27. Глава XXVI 260
28. Глава XXVII 270
29. Глава XXVIII 280
30. Глава XXIX 290
31. Глава XXX 300
32. Глава XXXI 310
33. Глава XXXII 320
34. Глава XXXIII 330
35. Глава XXXIV 340
36. Глава XXXV 350
37. Глава XXXVI 360
38. Глава XXXVII 370
39. Глава XXXVIII 380
40. Глава XXXIX 390
41. Глава XL 400
42. Глава XLI 410
43. Глава XLII 420
44. Глава XLIII 430
45. Глава XLIV 440
46. Глава XLV 450
47. Глава XLVI 460
48. Глава XLVII 470
49. Глава XLVIII 480
50. Глава XLIX 490
51. Глава L 500

Содержание

1. Введение 1
2. Глава I 10
3. Глава II 20
4. Глава III 30
5. Глава IV 40
6. Глава V 50
7. Глава VI 60
8. Глава VII 70
9. Глава VIII 80
10. Глава IX 90
11. Глава X 100
12. Глава XI 110
13. Глава XII 120
14. Глава XIII 130
15. Глава XIV 140
16. Глава XV 150
17. Глава XVI 160
18. Глава XVII 170
19. Глава XVIII 180
20. Глава XIX 190
21. Глава XX 200
22. Глава XXI 210
23. Глава XXII 220
24. Глава XXIII 230
25. Глава XXIV 240
26. Глава XXV 250
27. Глава XXVI 260
28. Глава XXVII 270
29. Глава XXVIII 280
30. Глава XXIX 290
31. Глава XXX 300
32. Глава XXXI 310
33. Глава XXXII 320
34. Глава XXXIII 330
35. Глава XXXIV 340
36. Глава XXXV 350
37. Глава XXXVI 360
38. Глава XXXVII 370
39. Глава XXXVIII 380
40. Глава XXXIX 390
41. Глава XL 400
42. Глава XLI 410
43. Глава XLII 420
44. Глава XLIII 430
45. Глава XLIV 440
46. Глава XLV 450
47. Глава XLVI 460
48. Глава XLVII 470
49. Глава XLVIII 480
50. Глава XLIX 490
51. Глава L 500