

ЗВЁЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ

В. ЗОНН
и
К. РУДНИЦКИЙ

В. ЗОНН, К. РУДНИЦКИЙ

ЗВЁЗДНАЯ
АСТРОНОМИЯ

И * Л

*Издательство
иностранной
литературы*

* .

WŁODZIMIERZ ZONN * KONRAD RUDNICKI

**ASTRONOMIA
GWIAZDOWA**

WARSZAWA 1957

**PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO
NAUKOWE**

В. ЗОНН, К. РУДНИЦКИЙ

ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ

**АВТОРИЗОВАННЫЙ
ПЕРЕВОД С ПОЛЬСКОГО
В. ЗОННА**

**Под редакцией
П. П. ПАРЕНАГО**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА, 1959**

АННОТАЦИЯ

Курс звездной астрономии, предназначенный для студентов специализирующихся в области звездной астрономии и астрофизики, представляет интерес для специалистов в области физико-математических наук. Построение книги таково, что она в своей значительной части доступна и любителям астрономии, не имеющим специальной подготовки в области точных наук.

Изложение предмета отличается от обычных курсов звездной астрономии в том отношении, что основное внимание уделяется методам, т. е. конкретные результаты исследований в той или другой области звездной астрономии подаются как иллюстрация общих методов.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Книга директора астрономической обсерватории Варшавского университета проф. В. Зонна и доктора К. Рудницкого „Звездная астрономия“ представляет собой учебник для студентов-астрономов 4 курса польских университетов. Однако эта книга содержит, несомненно, больше материала, чем учебник, и скорее всего является монографией. Расположение материала в ней строго методическое, вследствие чего к одному и тому же типу объектов приходится возвращаться несколько раз. Содержание книги Зонна и Рудницкого шире моего „Курса звездной астрономии“, и потому студенты-астрономы могут с пользой прочитать как изложение тех же самых разделов, но изложенных по-другому (это особенно ценно), так и новых разделов, часть из которых в систематизированном виде еще нигде не была изложена.

Книга будет полезна специалистам-астрономам, студентам и аспирантам астрономических специальностей, а также специалистам смежных областей (физикам, геофизикам, механикам), желающим ознакомиться с предметом.

Перевод на русский язык сделал один из авторов (В. Зонн), причем в ряде случаев он внес в текст существенные изменения и дополнения. От этого перевод только выиграл. Примеры этому можно найти в пп. 34 (добавлены новые результаты автора), 41, 64, 73 и других. Текст перевода мною был приведен в соответствие с установившейся у нас терминологией и номенклатурой, были исправлены также мелкие погрешности. Обозначение галактического потенциала заменено с $\mathfrak{Z}$ на более привычное у нас Φ , а расстояние от оси симметрии Галактики с $\tilde{\omega}$ на более употребительное у нас R (как, кстати сказать, поступают и сами авторы в своем 7-м дополнении польского оригинала). Кандидат физико-математических наук Е. Д. Павловская в качестве ведущего редактора издания очень много потрудились над стилем перевода и систематически проверила все выводы формул.

*Посвящается профессору
Владиславу Дзевульскому*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга „Звездная астрономия“ предназначена прежде всего для студентов, специализирующихся по астрономии; однако мы одновременно стремились к тому, чтобы нашей работой могли также пользоваться специалисты других, родственных наук — физики и математики, а также любители астрономии.

Главная цель нашей книги заключается в том, чтобы ознакомить читателей с методами, которыми пользуются ученые в исследованиях по звездной астрономии; этой теме посвящена большая часть книги, причем результаты исследований приводятся часто только как иллюстрация соответствующих методов. Систематическому обзору важнейших результатов исследований мы посвятили только одну отдельную главу (VI).

Чтобы облегчить изучение данной книги читателям, не имеющим систематической подготовки, мы поместили все важнейшие общие сведения по астрономии, необходимые для усвоения следующих глав, в гл. I. Глава эта может быть пропущена читателями с серьезной астрономической подготовкой. В последующих главах мы занимаемся прежде всего вопросами пространственного распределения звезд и межзвездной материи (гл. II), а затем кинематикой звезд (гл. III). Проблемам эволюции мы посвятили отдельную IV гл., несмотря на то, что в этих исследованиях мы пользуемся разнообразными методами. Затем излагаются вопросы динамики звездных систем (гл. V) и в конце дается краткий обзор всех полученных результатов; попутно затрагиваются вопросы современной космологии (гл. VI).

Такое разделение в значительной степени соответствует также разделению по изучаемым объектам. Первые четыре главы, относятся исключительно к населению нашей Галактики. Глава V является универсальной, так как относится к разным звездным системам. В последней главе мы имеем дело с другими галактиками, среди которых выступает также и наша Галактика как одна из представительниц этой группы космических объектов.

В дополнениях мы поместили изложение некоторых специальных математических проблем, пропущенных в тексте для того, чтобы

избежать отклонений от главной мысли. Кроме того, в дополнениях приведены некоторые полезные таблицы и графики.

Следуя главной цели нашей книги, мы старались представить большое разнообразие методов иногда даже за счет количества затрагиваемых проблем. Среди методов мы выбрали те, которые казались нам самыми интересными и побуждающими к размышлению.

Работая над книгой „Звездная астрономия“, мы пользовались многими учебниками и монографиями, список которых приведен в конце книги. Там же даем краткую характеристику этих книг.

Авторы выражают сердечную благодарность проф. др. Я. Мергенталеру, магистру Марии Карпович, магистру В. Кржеминскому и многим молодым варшавским астрономам, которые своими советами и замечаниями помогли нам в работе.

Отдельно выражаем сердечную благодарность проф. др. В. Круликовскому, написавшему раздел о теории спиральной структуры галактик Линдблада.

А в т о р ы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Предмет звездной астрономии

Звездная астрономия — в современном значении этого слова — это отрасль астрономии, целью которой является изучение строения вселенной, происходящих в ней явлений и общих законов, которым она подчинена как целое¹⁾.

Стремясь к этой цели, звездная астрономия часто пользуется данными, полученными в других отраслях астрономии, особенно теми, которые касаются массовых явлений и могут, таким образом, быть использованы при выводе общих закономерностей. Одновременно мы часто избегаем частных проблем астрономии, если, конечно, они не являются чем-то типичным для данной группы космических тел. При выводе общих закономерностей мы пользуемся статистическими методами, пригодными при изучении большого числа объектов.

Звездная астрономия образовалась в результате слияния нескольких отраслей астрономии, которые раньше считались отдельными дисциплинами: статистической астрономии, которая занималась главным образом изучением пространственного распределения звезд и статистикой физических свойств звезд и звездных групп; звездной динамики, изучавшей движение звезд и силы, действующие в звездных системах; космологии, цель которой была тождественна с целью звездной астрономии, но которая прежде отличалась от нее более спекулятивным подходом к проблеме строения вселенной и изучению тех законов, которым вселенная подчинена; и, наконец, космогонии, главной задачей которой являлось изучение эволюции тех форм материи, с которыми мы встречаемся во вселенной.

Современную звездную астрономию можно с методической точки зрения разделить на три части: на статистическую астроно-

¹⁾ Выражение „как целое“ отнюдь не внушает какой-либо уверенности в том, что вселенная конечна. Бесконечную вселенную можно и следует также считать чем-то целым, если мы твердо убеждены в единстве материи и единстве законов, которым она подчинена. Зная, например, законы, которым подчинены элементарные частицы, или же закон всемирного тяготения, мы непосредственно усваиваем законы, которым подчинена вся вселенная, хотя всю вселенную мы вряд ли когда-либо будем в состоянии наблюдать.

мию, интересующую пространственным распределением звезд и других объектов, кинематику, изучающую их движение, и динамику, которая теоретически объясняет зависимости между распределением звезд и межзвездной материи, с одной стороны, и их движением — с другой. Гораздо труднее провести разделение звездной астрономии с точки зрения тех объектов, которыми занимается эта наука. Можно было бы здесь выделить такие группы проблем, как, например, строение Галактики, строение звездных скоплений, космология, космогония и т. п.

Однако, все эти отрасли звездной астрономии так неразрывно связаны между собой (в чем можно убедиться, ознакомившись с содержанием нашей книги), что сохранение их автономии совершенно немыслимо. Поэтому мы соединяем их в одно целое, называя данный раздел науки „звездной астрономией“. К сожалению, это название слишком односторонне отражает его содержание. Материя во вселенной выступает во многих формах, не только в форме звезд; мы знаем о существовании так называемой межзвездной рассеянной материи и о других формах, отличающихся довольно резко от формы материи, заключенной в типичных звездах. Значение слова „звездная“, таким образом, ограничивает разнообразие тематики звездной астрономии. Тем не менее мы пользуемся и сейчас этим названием для сохранения астрономической терминологии. Возможно, что частые реформы терминологии в астрономии могут принести ей больше вреда, чем употребление давно введенных терминов, которые оказываются ошибочными или неполностью отражают содержание той или другой научной дисциплины.

§ 2. Координаты

1. Система координат. Экваториальная система координат, которой часто пользуются в астрономии для определения положений небесных светил, не может играть существенной роли в звездной астрономии, так как распределение и движение звезд ни в коем случае не связано с плоскостью земного экватора. По тем же причинам эклиптическая система координат также является непригодной. Этими системами пользуются только как переходными, позволяющими определять положение тел в иной системе, связанной с особенностями движения звезд и некоторыми свойствами их пространственного распределения.

Такой именно системой является так называемая галактическая система координат, весьма удобная при решении многих задач звездной астрономии, относящихся к нашей Галактике. Система галактических координат является единственной специально выбранной системой, так как до сих пор не было надобности вводить другие системы координат в звездную астрономию. Галактическая система координат непосредственно связана с существованием в нашей Галактике сильной концентрации многих объектов вблизи одной пло-

скости. Перенесем условно эту плоскость в центр небесной сферы, не изменяя направления, и назовем пересечение ее с небесной сферой *галактическим экватором*; поместим в этой плоскости основную плоскость (xy) галактической системы координат, направляя ось x в точку пересечения этой плоскости с плоскостью экватора в его восходящем узле, т. е. в точке, около которой склонение галактического экватора является возрастающей функцией прямого восхождения. Две точки, удаленные на 90° от галактического экватора, называются галактическими полюсами; северный полюс находится в северном полушарии неба, южный — в южном.

Положение галактической системы координат относительно всякой иной системы определяется двумя величинами, например, относительно экваториальной системы координат — величинами A и D , т. е. прямым восхождением и склонением северного полюса Галактики, относящимися к определенной эпохе. Вместо них можно ввести две другие величины, например, прямое восхождение восходящего узла α_0 и наклонение плоскости галактического экватора к земному экватору i . Эти величины связаны с двумя предыдущими очевидной зависимостью

$$\alpha_0 = 90^\circ + A, \quad i = 90^\circ - D.$$

Сферические координаты в этой системе называются *галактической долготой* (l) и *галактической широтой* (b).

Галактическая долгота — это двугранный угол между плоскостью большого круга, проходящего через галактический полюс и данную точку на небесной сфере, и плоскостью большого круга, проходящего через полюс и восходящий узел галактического экватора. Галактической широтой называется угловое расстояние данной точки от галактического экватора.

Основываясь на формулах сферической тригонометрии, мы легко получим соотношения, при помощи которых можно перейти от галактических координат l и b к экваториальным α , δ и обратно. Рассматривая сферический треугольник GBB' (рис. 1), в котором B — полюс экватора, B' — полюс Галактики и G — данная точка, получим

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A), \\ \cos b \cos l &= \cos \delta \sin(\alpha - A), \\ \cos b \sin l &= \sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A); \end{aligned} \quad (1.1)$$

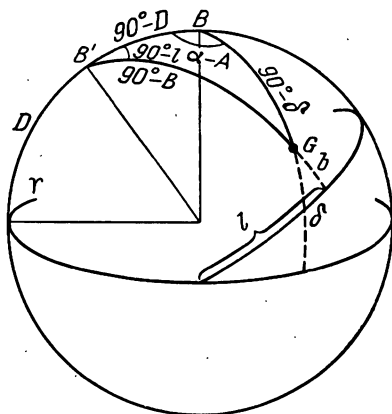


Рис. 1.

при обратном переходе можно пользоваться формулами

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin b \sin D + \cos b \cos D \sin l, \\ \sin (\alpha - A) \cos \delta &= \cos b \cos l, \\ \cos (\alpha - A) \cos \delta &= \sin b \cos D - \cos b \sin D \sin l.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Обычно приходится вычислять галактические координаты l и b по данным экваториальным координатам α и δ . Чтобы сэкономить многим астрономам время, составлены специальные таблицы и графики, значительно облегчающие эти вычисления¹⁾.

В этих таблицах и графиках обычно северный полюс Галактики помещается в точке

$$A = 190^\circ = 12^h 40^m, \quad D = +28^\circ (1900, 0),$$

хотя, недавно найденные величины (для той же эпохи)

$$A = 191^\circ = 12^h 44^m, \quad D = +27^\circ, 5$$

несколько отличаются от принятых.

2. Определение положения галактического полюса и расстояния Солнца от галактической плоскости. Как мы уже упоминали, галактическим экватором называется большой круг на небесной сфере, плоскость которого параллельна плоскости наибольшего сгущения большинства объектов в нашей Галактике. Объекты, находящиеся в этой плоскости и одинаково удаленные от нас, будут находиться на малом круге, параллельном галактическому экватору. Вследствие существования дисперсии этот малый круг определяется из следующего условия: сумма квадратов угловых расстояний избранных объектов от этого круга должна быть минимальной. Это условие дает нам возможность определить искомый круг и, следовательно, определить координаты галактического полюса, а также расстояние Солнца от плоскости галактического экватора.

Остановимся на следующем давно известном методе определения этих величин: прежде всего определим приближенные галактические координаты l и b рассматриваемых объектов по формулам (1.1) или при помощи готовых таблиц. Обозначим искомые координаты галактического полюса в принятой системе координат через L и B . В таком случае угловое расстояние φ какого-либо объекта (рис. 2) от полюса B_0 выразится формулой

$$\cos \varphi = xX + yY + zZ,$$

¹⁾ Наибольшей известностью пользуются таблицы Ольссона [Ohlsson J., *Annals Observatory Lund*, 3 (1932)] и недавно вышедшие в свет лундские таблицы (Lund, 1956).

правая часть этого равенства является скалярным произведением векторов OG и OB_0 , модули которых равны единице. Здесь

$$\begin{aligned} x &= \cos l \cos b, & X &= \cos L \cos B, \\ y &= \sin l \cos b, & Y &= \sin L \cos B, \\ z &= \sin b, & Z &= \sin B. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так как B мало отличается от 90° , то можно принять $\sin B = 1$. Следовательно,

$$\cos \varphi = xX + yY + z.$$

Обозначим через σ расстояние искомого малого круга от галактического полюса. Разность

$$\cos \varphi - (-\cos \sigma) = v$$

очень близка к угловому расстоянию данного объекта G от этого малого круга, так как углы φ и σ очень мало отличаются от 90° (минус при $\cos \sigma$ мы поставили потому, что, согласно наблюдениям, σ больше 90°). Итак, мы получаем систему условных уравнений

$$x_i X + y_i Y + z_i + \cos \sigma = v_i, \quad (2.2)$$

с неизвестными X , Y и $\cos \sigma$. Решая их методом наименьших квадратов (исходя из условия $[v_i v_i] = \min$), получим численные значения неизвестных и вычислим величины L и B ; действительно,

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X}, \quad \cos B = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad p = \sigma - 90^\circ.$$

Величину p часто называют глубиной галактической плоскости, связанной с расстоянием z_0 Солнца от этой плоскости.

На практике не решают несколько сот условных уравнений, а чаще всего объединяют объекты, расположенные в небольших интервалах l , вычисляя их средние $\bar{l}$ и $\bar{b}$ или $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$, и эти величины подставляют в уравнения (2.2). Таким образом, имеем число условных уравнений (2.2), равное числу составленных групп.

Так как рассматриваются объекты, находящиеся практически на одинаковом расстоянии r от Солнца, то легко вычислить z_0 — расстояние Солнца от галактической плоскости, ибо

$$z_0 = r \sin p \approx rp.$$

В тех случаях, когда известно расстояние каждого рассматриваемого объекта от Солнца, обычно применяют другой метод,

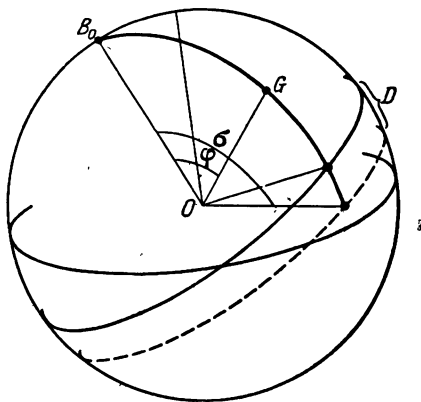


Рис. 2.

а именно, определяют сначала прямоугольные координаты x_k, y_k, z_k каждого объекта в произвольной системе координат. Пусть искомую галактическую плоскость определяет уравнение

$$ax + by + cz = z_0, \quad (2.3)$$

в котором $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Неизвестные коэффициенты этого уравнения находятся из условия: сумма квадратов расстояний объектов от искомой плоскости должна быть минимальной. Подставляя вместо x, y и z величины x_k, y_k, z_k , получим систему уравнений

$$ax_k + by_k + cz_k - z_0 = v_k, \quad (2.4)$$

которую и решим методом наименьших квадратов, т. е. при условии

$$[v_k v_k] = \min,$$

и одновременном условии $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдя величины a, b, c и z_0 , можно сразу определить искомые координаты A и D галактического полюса, зная, что

$$a = \cos A \cos D, \quad b = \sin A \cos D, \quad c = \sin D;$$

отсюда

$$\operatorname{tg} A = \frac{b}{a}, \quad \sin D = c;$$

z_0 является расстоянием Солнца от галактической плоскости, выраженным в тех же единицах, в которых даны величины x_k, y_k и z_k .

В 1942 г. ван Тульдер¹⁾ нашел, что величины

$$\left. \begin{aligned} A &= 12^{\text{h}}44^{\text{m}}, 0 = 191^{\circ}, 0 (\pm 0^{\circ}, 3), \\ D &= 27^{\circ}, 5 (\pm 0^{\circ}, 2), \\ z_0 &= 13, 5 (\pm 1, 7) \text{ пс} \end{aligned} \right\} \quad (1900.0)$$

практически одинаковы для различных групп объектов, сравнительно сильно концентрирующихся вблизи галактической плоскости: для классических цефеид, звезд типа B , звезд типа Вольфа-Райе, сверхгигантов различных спектральных классов, рассеянных звездных скоплений и планетарных туманностей. В своей работе ван Тульдер пользовался разными методами в зависимости от того, с какой точностью можно было вычислять расстояния тех или иных объектов, по которым он определял величины A и D . Фотометрические расстояния вычислялись с учетом межзвездного поглощения (см. § 12), которое автор определял на основании имеющихся избытков цвета звезд; в тех же случаях, когда этих данных не было, автор вводил среднее поглощение, предполагая, что межзвездная материя в Галактике образует однородный плоскопараллельный слой, симметрич-

¹⁾ BAN (*Bull. Astron. Inst. Netherlands*), 9, 315 (1942).

ный относительно галактического экватора, причем коэффициент поглощения (см. стр. 126) принимался равным $1^m,0$ на 1 кпс . При этом автор считал, что Солнце находится в плоскости галактического экватора.

Значительное отклонение от найденных координат северного полюса Галактики обнаруживают лишь близкие звезды типа B (ярче $7^m,5$). Это явление, известное в астрономии под названием *пояса Гулда*, связано с существованием так называемой местной системы (которой мы посвятим § 71).

Подчинение уравнений (2.4) условию $[v_k v_k] = \min$, в сущности, ничем не обосновано. По нашему мнению, определение плоскости галактического экватора должно основываться на ином принципе, а именно, на том, что средняя плотность звезд D — как это следует из наблюдений и из некоторых динамических соображений — является экспоненциальной функцией расстояния z звезды от галактической плоскости

$$D = D_0 e^{-\frac{|z|}{\beta}},$$

где D_0 и β — постоянные, имеющие различные числовые значения для разных групп звезд. Так как D определяет также вероятность нахождения звезды на расстоянии z от галактической плоскости, то наиболее вероятной должна быть плоскость, удовлетворяющая условию

$$D(z_1) D(z_2) \cdots D(z_n) = \max$$

или

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = \min,$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ — расстояния отдельных звезд от искомой плоскости. Этими расстояниями являются величины $|v_k|$ в формулах (2.2) и (2.4). Следовательно, постоянные a, b, c и z_0 должны быть решениями системы уравнений (2.4) не при условии $[v_k v_k] = \min$, а при условии

$$[|v_k|] = \min$$

с одновременным соблюдением условия

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

§ 3. Собственные движения звезд

3. Общие сведения. Все окружающие нас небесные тела так или иначе движутся относительно Солнца или относительно какой-либо другой произвольно выбранной системы координат. В связи с этим изменяются их гелиоцентрические координаты на небе; это изменение координат в единицу времени называется собственным движением рассматриваемых объектов.

Чаще всего для определения собственных движений в экваториальной системе координат измеряется изменение координат α и δ какой-либо звезды, соответствующее обычно интервалу времени порядка нескольких десятков лет. Чтобы освободить это изменение от влияния движения Земли, мы пользуемся координатами, отнесенными к одной эпохе равноденствия.

Собственным движением по прямому восхождению называется выражение

$$\mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t} = \frac{\Delta\alpha}{t} \left[\frac{\text{сек. времени}}{\text{год}} \right],$$

в котором α_2 и α_1 — наблюдаемые прямые восхождения звезды (отнесенные к одной эпохе) в моменты, разделенные интервалом времени t . Отношение $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t}$ мы отождествляем здесь с производной по времени, предполагая при этом, что собственное движение звезд по крайней мере в первом приближении равномерно.

Аналогично определяется собственное движение по склонению

$$\mu_\delta = \frac{d\delta}{dt} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t} = \frac{\Delta\delta}{t} \left[\frac{\text{угловых сек.}}{\text{год}} \right];$$

здесь δ_2 и δ_1 — наблюдаемые склонения звезды (отнесенные к одной эпохе) в моменты, разделенные интервалом времени t .

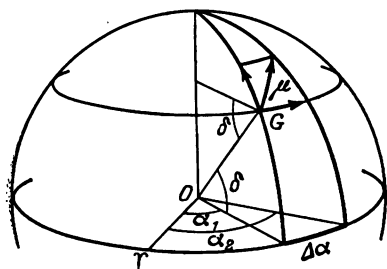


Рис. 3.

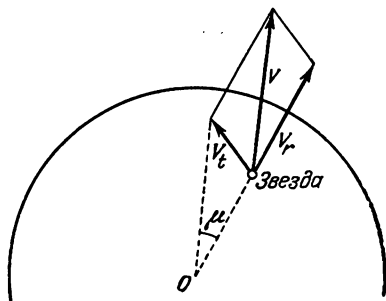


Рис. 4.

В обоих случаях время принято выражать в тропических годах.

Легко убедиться (рис. 3), что угловое смещение звезды в единицу времени μ должно быть равно

$$\mu = \sqrt{(15\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2}. \quad (3.1)$$

Если вектор скорости звезды V разложить на две составляющие: V_r — по направлению звезда — наблюдатель (эта составляющая называется лучевой скоростью звезды) и V_t — в плоскости, перпендикулярной к этому направлению (тангенциальная скорость), — то вторую составляющую можно легко выразить через μ (рис. 4):

$$V_t = k\mu r = k \frac{\mu}{\pi}, \quad (3.2)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц, r — расстояние звезды от наблюдателя, π — ее годичный параллакс.

Если π и μ выразить в одинаковых единицах, например, в угловых секундах, то отношение μ/π будет тангенциальной скоростью, выраженной в астрономических единицах в год. Чтобы превратить V_t в км/сек, нужно умножить ее на число километров в астрономической единице и разделить на число секунд в тропическом году. Следовательно,

$$k = \frac{149 \cdot 10^6}{31\,557\,000} = 4,74;$$

таким образом, получим

$$V_t = 4,74 \frac{\mu}{\pi} = 4,74 \mu r \left[\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right], \quad (3.3)$$

где r выражено в парсеках, μ и π — в одинаковых единицах.

Следует обратить внимание на то, что принятые предположения о равномерности движения звезд приводят к выводу, что как μ , так и V_r должны изменяться согласно формулам

$$\frac{d\mu}{dt} = -102 \cdot 10^{-8} \pi \mu V_r, \quad \frac{dV_r}{dt} = 230 \cdot 10^{-7} \frac{\mu^2}{\pi}, \dots$$

где V_r , μ и π выражены в тех единицах, о которых речь была выше; величины $\frac{d\mu}{dt}$ и $\frac{dV_r}{dt}$

соответствуют интервалу времени в один год. Действительно, рассмотрим изменение угла θ (рис. 5). Пусть A и B — два положения звезды, разделенные интервалом времени в один год. Угол AOB (в радианах) равен $\mu \sin 1''$, и, следовательно,

$$\theta' - \theta = -\mu \sin 1'',$$

согласно соотношению (3.3), имеем

$$\frac{\mu' - \mu}{t} = \frac{d\mu}{dt} = \frac{V_t'}{4,74} \pi' - \frac{V_t}{4,74} \pi = \frac{V}{4,74} (\pi' \sin \theta' - \pi \sin \theta).$$

Как расстояние r , так и параллакс звезды π , изменяются настолько медленно, что можно принять

$$\pi = \pi', \quad \cos \frac{\theta' + \theta}{2} = \cos \theta, \quad \sin \frac{\theta' - \theta}{2} = \frac{1}{2}(\theta' - \theta) = -\frac{1}{2} \mu \sin 1'',$$

$$\sin \frac{\theta' + \theta}{2} = \sin \theta,$$

тогда, помня, что $V \cos \theta = V_r$, получим

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\sin 1''}{4,74} \mu \pi V_r, \quad \frac{dV_r}{dt} = 4,74 (\sin 1'') \frac{\mu^2}{\pi}.$$

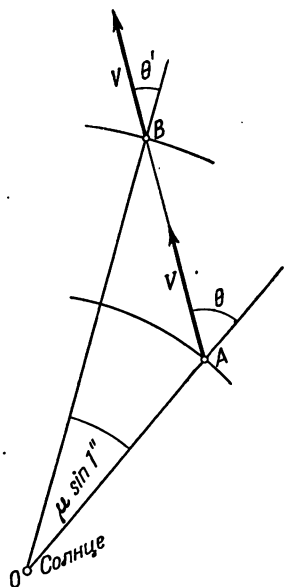


Рис. 5.

Подставляя вместо $\sin l''$ его числовое значение, получим приведенные выше формулы. Этими формулами можно пользоваться только тогда, когда мы имеем дело с объектами, собственное движение которых наблюдается с большим „опозданием“, достигающим миллионов лет вследствие большого удаления их от наблюдателя. Чтобы получить собственное движение этих объектов, отнесенное к настоящему времени, нужно „поправить“ его при помощи приведенных выше формул, приводя, таким образом, собственные движения и лучевые скорости далеких и близких объектов к одной эпохе.

С собственными движениями звезд связаны две теоремы, доказанные Клейбером в конце прошлого столетия. Эти теоремы основаны на предположении, что собственные движения звезд хаотичны; точнее говоря, предполагается, что любые направления векторов скоростей равновероятны. В этом случае справедливы теоремы:

1. *Средняя величина модулей составляющих векторов в произвольном направлении равна половине средней величины модулей векторов.*

2. *Средняя величина модулей составляющих векторов в произвольной плоскости равна произведению $\pi/4$ на среднюю величину модулей векторов.*

Если обозначить модули векторов через V , модули их составляющих в произвольном направлении — V_r , а в произвольной плоскости — V_t , то сформулированные

теоремы можно соответственно записать в виде

$$\bar{V}_r = \frac{1}{2} \bar{V}, \quad \bar{V}_t = \frac{\pi}{4} \bar{V}.$$

Для доказательства вообразим шар, описанный радиусом, равным $\bar{V}$, с центром в начале координат (рис. 6). Концы векторов, согласно нашему предположению, будут равномерно покрывать поверхность шара; иначе говоря, число концов векторов в данном элементе поверхности шара dS будет пропорционально dS . Следовательно, число векторов, составляющих с произвольной плоскостью угол, заключенный в границах $\theta, \theta + d\theta$, будет пропорционально $1/2 \cos \theta d\theta$. Среднее значение модулей проекций векторов на эту плоскость будет равно $\bar{V} \cos \theta$; среднее же значение модулей составляющих векторов в произвольном направлении будет пропорционально $\bar{V} \sin \theta$. Умножая каждую из этих величин на соответствующую ей вероятность (пропорциональную $\cos \theta d\theta$) и интегрируя

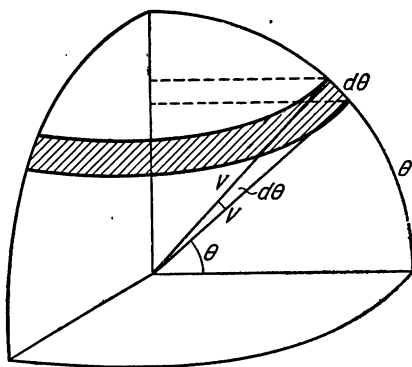


Рис. 6.

по θ , получим искомые средние

$$\bar{V}_t = \frac{\int_0^{\pi/2} \bar{V} \cos \theta \cos \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta} = \frac{\pi}{4} \bar{V};$$

$$\bar{V}_r = \frac{\int_0^{\pi/2} \bar{V} \sin \theta \cos \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta} = \frac{1}{2} \bar{V}.$$

Если произвольным направлением будет прямая, соединяющая наблюдателя со звездой, произвольной же плоскостью — плоскость, перпендикулярная этому направлению, то полученные средние будут представлять собой среднее значение модулей лучевых скоростей и среднее значение модулей тангенциальных скоростей звезд. Вот почему мы поставили индексы r и t в введенных выше обозначениях.

Из этих зависимостей вытекает

$$\frac{\pi}{2} \bar{V}_r = \bar{V}_t = 4,74 \frac{\bar{\mu}}{\pi} = 4,74 \bar{\mu} r, \quad (3.4)$$

где $\bar{\mu}$ — средняя абсолютная величина собственного движения в секундах дуги в год, r — расстояние данной группы звезд в парсеках.

Недавно М. Г. Колхидашвили¹⁾ рассмотрел также случай эллипсоидального распределения скоростей звезд, который чаще всего наблюдается среди различных групп звезд (см. п. 56).

Теоремами Клейбера или же их обобщением, сделанным Колхидашвили, пользуются при поисках систематических ошибок определения параллаксов звезд π .

Принципиально можно определять параллакс избранной группы звезд, сравнивая их среднюю лучевую скорость $\bar{V}_r$ с собственным движением μ , например, по формуле (3.4), однако, на практике это почти неприменимо из-за наличия больших систематических ошибок.

4. Пекулярное и параллактическое движение звезд. Зная компоненты собственного движения какого-либо объекта, например, в экваториальной системе координат μ_α , μ_δ , можно легко определить компоненты собственного движения в любой другой системе, например, в галактической системе координат, которая играет довольно

¹⁾ АЖ (Астрономический журнал), 29, 76 (1952).

существенную роль при изучении нашей Галактики. Обозначая эти составляющие через μ_l и μ_b , мы легко найдем формулы перехода от одной системы к другой (рис. 7)

$$\mu_l \cos b = \mu_\alpha \cos \delta \cos \varphi - \mu_\delta \sin \varphi,$$

$$\mu_b = \mu_\alpha \cos \delta \sin \varphi + \mu_\delta \cos \varphi,$$

где φ — угол между кругом склонения, проходящим через звезду G и полюс B , и большим кругом, проходящим через звезду и галактический полюс BG . Этот угол определяем по формулам сферической тригонометрии из соответствующего сферического треугольника,

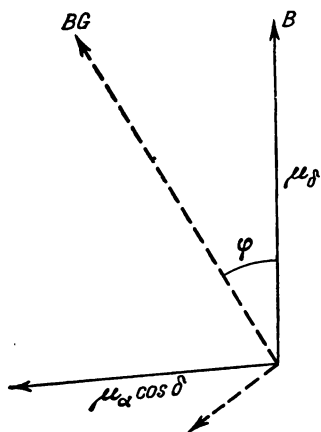


Рис. 7.

например, из сферического треугольника, изображенного на рис. 9, но в этом случае точка A будет соответствовать не апексу, а полюсу Галактики. Чтобы избежать повторения вычислений, величина этого угла дана во многих таблицах преобразования экваториальных координат в галактические и обратно (см. стр. 12).

При определении собственных движений звезд (*motus proper*) мы исключаем из наблюдений влияние суточного параллакса, равно как и годового (см. § 8). Таким образом, получается скорость (в угловой мере) относительно Солнца, т. е. гелиоцентрическая скорость звезды.

Часто нас интересует движение звезды в иной системе отсчета, например, в системе, связанной с так называемым центроидом

выбранной группы звезд. Центроидом группы звезд мы называем их геометрический центр, т. е. точку, относительно которой сумма координат звезд равна нулю. Движение звезды в такой системе отсчета называется *пекулярным* (*motus peculiaris*). Ясно, что полное собственное движение звезды равно сумме пекулярного движения и так называемого параллактического движения, вызванного движением Солнца относительно центроида данной группы звезд.

Обозначим модуль вектора скорости движения Солнца относительно центроида какой-либо группы звезд через V_0 , а координаты точки, к которой направлен этот вектор (если его начало находится в месте наблюдения), через α_0 и δ_0 . Эта точка называется *апексом* движения Солнца. Выведем формулы, связывающие величины V_0 , α_0 , δ_0 с компонентами полного собственного движения звезды μ_α и μ_δ и компонентами пекулярного движения этой же звезды μ'_α и μ'_δ .

Рассматривая рис. 8, видим, что тангенциальная составляющая параллактического движения звезды равна $V_0 \sin \lambda$, где λ — угловое

расстояние звезды от апекса A . Итак, параллактическое собственное движение звезды равно

$$\frac{\pi V_0 \sin \lambda}{4,74},$$

и, следовательно, ее пекулярное движение μ'_α и μ'_δ выражается формулами

$$\begin{aligned} \mu'_\alpha \cos \delta = \\ = \mu_\alpha \cos \delta - \frac{\pi V_0 \sin \lambda}{4,74} \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\mu'_\delta = \mu_\delta - \frac{\pi V_0 \sin \lambda}{4,74} \cos \varphi,$$

где φ — угол между кругом склонения звезды и кругом, проходящим через звезду и апекс.

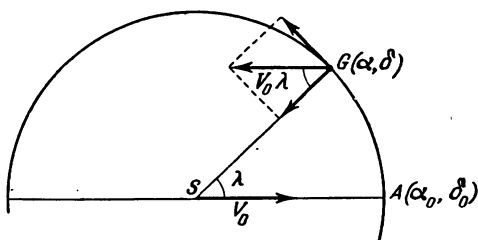


Рис. 8.

Аналогично получим пекулярную лучевую скорость V'_r

$$V'_r = V_r - V_0 \cos \lambda,$$

где V_r — лучевая гелиоцентрическая скорость.

Величины λ и φ легко определяются из сферического треугольника, вершины которого лежат в точках: звезда, апекс и полюс (рис. 9)

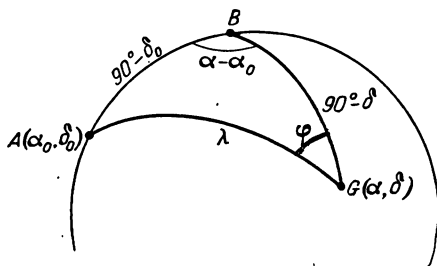


Рис. 9.

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \sin \delta \sin \delta_0 + \\ &+ \cos \delta \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0), \\ \sin \lambda \sin \varphi &= \cos \delta_0 \sin (\alpha - \alpha_0), \\ \sin \lambda \cos \varphi &= \\ &= \cos \delta \sin \delta_0 - \sin \delta \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0). \end{aligned}$$

Введем вспомогательные величины

$$n \sin N = \sin \delta_0,$$

$$n \cos N = \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0)$$

и после простых преобразований получим

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\cos (\alpha - \alpha_0)}; \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{\cos N \operatorname{tg} (\alpha - \alpha_0)}{\sin (\delta - N)}; \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} (\delta - N)}{\cos \varphi}.$$

5. Определение абсолютных собственных движений. Если собственное движение звезды определяется по абсолютным измерениям величин α и δ , то полученный результат называется *абсолютным*¹⁾ собственным движением данного объекта в отличие от резуль-

¹⁾ Слово „абсолютный“ не содержит какого-нибудь глубокого физического значения и является только техническим термином.

татов, полученных путем сравнения собственного движения данного объекта и соседних звезд. В этом последнем случае мы определяем *относительное* собственное движение данной звезды, причем часто предполагаем при этом, что среднее собственное движение звезд сравнения равно нулю или же другой величине, принятой а priori.

На практике абсолютные собственные движения звезд обычно определяются путем сравнения положений этих звезд в двух или более каталогах; в последнем случае мы получаем большую точность результатов, чем при сравнении только двух каталогов.

Пусть α_i — прямое восхождение звезды в момент t_i в каталоге, имеющем вес p_i . Тогда собственное движение по прямому восхождению определяется из системы уравнений

$$\alpha_i = \alpha_0 + \mu_\alpha (t_i - t_0),$$

где неизвестными будут величины μ_α и α_0 .

Величину t_0 удобно выбрать так, чтобы она равнялась среднему моменту наблюдений

$$t_0 = \frac{\sum p_i t_i}{\sum p_i}.$$

Введем обозначение $t_i - t_0 = \Delta t_i$ и, следовательно, получим нормальные уравнения вида

$$\alpha_0 \sum p_i = \sum p_i \alpha_i,$$

$$\mu_\alpha \sum p_i (\Delta t_i)^2 = \sum p_i (\alpha_i - \alpha_0) \Delta t_i,$$

из которых определим неизвестные

$$\alpha_0 = \frac{\sum p_i \alpha_i}{\sum p_i}, \quad \mu_\alpha = \frac{\sum p_i (\alpha_i - \alpha_0) \Delta t_i}{\sum p_i (\Delta t_i)^2}$$

и средние ошибки полученных неизвестных

$$\varepsilon(\alpha_0) = \pm \frac{\varepsilon_0 \sec \delta}{\sqrt{\sum p_i}}; \quad \varepsilon(\mu_\alpha) = \pm \frac{\varepsilon_0 \sec \delta}{\sqrt{\sum p_i (\Delta t_i)^2}}.$$

Здесь $\varepsilon_0 \sec \delta$ — средняя ошибка по прямому восхождению, соответствующая весу, равному 1. Босс принимал ε_0 равным $\pm 0^s,030$.

Аналогично поступают при определении собственного движения по склонению μ_δ ; в этом случае имеем

$$\delta_0 = \frac{\sum p_i \delta_i}{\sum p_i}, \quad \mu_\delta = \frac{\sum p_i (\delta_i - \delta_0) \Delta t_i}{\sum p_i (\Delta t_i)^2},$$

$$\varepsilon(\delta_0) = \pm \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\sum p_i}}, \quad \varepsilon(\mu_\delta) = \pm \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\sum p_i (\Delta t_i)^2}}.$$

Для каталога Босса $\varepsilon_0 = \pm 0'',45$.

При этом очень важно учесть все систематические ошибки используемых каталогов. Ошибки эти связаны прежде всего с явлением прецессии, которая вызывает изменение как прямого восхождения, так и склонения звезды. Приводя наши наблюдения к одной равноденственной эпохе, необходимо знать постоянные прецессии, нутации и вековые изменения движения Земли, при помощи которых можно освободить наблюдаемые собственные движения звезд от влияния движения Земли.

Здесь следует затронуть вопрос, относящийся по существу к проблемам астрометрии, но, однако, в значительной мере касающийся и звездной астрономии. А именно, до сих пор все движения Земли, в том числе прецессии, нутации и вековые движения Земли, определялись по наблюдениям положения точки весеннего равноденствия и полюса относительно звезд.

Таким образом, создается порочный круг: мы определяем собственные движения звезд относительно полюса и точки весеннего равноденствия и одновременно движения этих двух точек определяем из наблюдений их положений относительно звезд.

Однако, можно поступать следующим образом: сначала определять $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ звезд, не приводя наблюдения к одной равноденственной эпохе, т. е. определять $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ непосредственно по положениям звезд в соответствующих каталогах. Полученные таким образом изменения прямого восхождения и склонения рассматривать как сумму собственного движения звезд и движения оси вращения Земли. Далее предполагаем, что среднее собственное движение всех звезд равно нулю, и определяем постоянные прецессии и нутации методом наименьших квадратов, считая при этом собственные движения звезд ошибками наблюдений. После определения этих постоянных определяем собственные движения звезд, отождествляя их с отклонениями от вычисленного их движения при определении значений постоянных прецессии, нутации и векового изменения положения оси вращения Земли.

Принципиально говоря, такой метод ошибочен, так как нет никаких оснований предполагать, что среднее собственное движение звезд равно нулю. Тем более, что мы знаем, например, о наличии систематического движения групп звезд, близкого к вращательному движению вокруг оси, перпендикулярной к плоскости галактического экватора (см. § 15). Хотя движение происходит в плоскости, наклоненной под сравнительно большим углом к плоскости эклиптики, а это обстоятельство уменьшает влияние указанного движения на определение постоянной прецессии и других постоянных, касающихся движения Земли, тем не менее существование систематических движений групп звезд принципиально противоречит нашему предположению о том, что сумма собственных движений всех звезд должна быть равна нулю.

Принимая во внимание все сказанное, астрономы уже давно наметили выход из этого трудного положения путем создания новой системы отсчета, имеющей больше оснований считаться неподвижной, чем применяемая в настоящее время система, основанная на средних местах так называемых фундаментальных звезд. Новая система будет основана на средних местах многих тысяч галактик, которые находятся значительно дальше звезд. Если бы даже галактики двигались с очень большими скоростями порядка 100 км/сек, то их собственные движения были бы порядка 10^{-8} угловых секунд в год (самые слабые галактики, которые можно наблюдать, находятся от нас на расстоянии порядка 10^8 парсеков). Значит, практически среднее положение группы галактик можно считать неизменным. Необходимо новую

систему отсчета привязать к существующей при помощи звезд более слабых, чем фундаментальные звезды используемой в настоящее время системы. Вот почему все это предприятие названо „Каталогом слабых звезд“¹⁾.

Вернемся, однако, к вопросу определения абсолютных собственных движений звезд. Описанный выше метод, в котором собственные движения рассматриваются как отклонения при определении постоянных прецессии, нутации и вековых изменений оси Земли, должен применяться к наблюдениям большого числа звезд; только в этом случае полученные собственные движения будут заслуживать доверие. Поэтому точность полученных таким образом результатов зависит не только от точности каталожных позиций звезд, но также и от числа звезд, входящих в наши вычисления.

Однако, часто собственные движения сравнительно небольшого числа звезд определяются на основании каталогов, которые не были обработаны описанным выше способом, или же собственное движение какой-нибудь звезды определяется непосредственно путем сравнения двух или большего числа наблюдений данной звезды в достаточно отдаленные моменты времени.

В этих случаях мы обыкновенно приводим наблюдения к одной равноденственной эпохе с помощью прецессионных постоянных Ньюкома. Хотя значения этих постоянных не вполне точны, однако ими очень удобно пользоваться, так как они положены в основу многих весьма подробных таблиц.

Вычислив таким образом собственное движение звезд, можно исправить его за неточность постоянных Ньюкома. Согласно работе Вилсона и Раймонда (1938), эти поправки можно представить в виде

$$\Delta\mu_{\alpha} = +0^s,00016 - 0^s,00025 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

$$\Delta\mu_{\delta} = -0'',0038 \cos \alpha.$$

Величины $\Delta\mu_{\alpha}$ и $\Delta\mu_{\delta}$ надо *прибавить* к компонентам собственного движения звезды, полученным приведением двух или больше наблюдений к одной эпохе при помощи постоянных Ньюкома.

6. Определение относительных собственных движений. Относительным собственным движением какого-либо объекта мы называем его движение относительно произвольно выбранной группы звезд; точнее говоря, движение относительно системы координат, определяемой положением центроида выбранной группы звезд.

На практике относительное движение звезд определяется одним из двух изложенных ниже методов.

¹⁾ Более подробное изложение вопроса о „Каталоге слабых звезд“ имеется, например, в *Trans. Intern. Astron. Union.*, 8, 755—801 (1954) или см. Дейч А. Н., Использование внегалактических объектов для построения абсолютной системы собственных движений звезд, 1952.

1. Измерение двух фотографий, разделенных большим интервалом времени.

Измеряется положение изучаемой звезды и звезд сравнения на двух снимках в произвольных прямоугольных системах координат; пусть система величин x_n и y_n соответствует первому снимку, а система величин x'_n , y'_n — второму.

Как доказал Тэрнер ¹⁾, переход от одной системы к другой может быть с большой точностью представлен линейными соотношениями

$$x_n = A + Bx'_n + Cy'_n, \quad y_n = D + Ex'_n + Fy'_n,$$

если только звезды сравнения занимают небольшую область на снимке.

Значения постоянных $A, B, \dots, F$ находим методом наименьших квадратов и с помощью этих величин приводим измеренные положения звезд к одной системе. Уравнениями Тэрнера учитывается влияние дифференциальной рефракции, дифференциальной аберрации, разности масштабов двух снимков, а также влияние вращений и перемещения координатных осей. Чтобы избежать систематических ошибок, надо выбирать звезды сравнения так, чтобы их звездные величины возможно меньше отличались от звездной величины изучаемого объекта. Кроме того, звезды сравнения рекомендуется выбирать таким образом, чтобы их центр тяжести (на фотографии) находился бы недалеко от изучаемой звезды. Если какая-нибудь из звезд сравнения обнаруживает большое смещение при переходе от одной системы координат к другой, то ее следует отбросить.

В результате мы получаем разности координат изучаемого объекта в одной системе. Эти разности являются движением объекта, выраженным в числе оборотов микрометрического винта, при помощи которого проводилось измерение снимков, и соответствующим интервалу времени между фотографиями. Переводя обороты винта в секунды дуги и деля полученный результат на интервал времени между обоими снимками, получим компоненты собственного движения звезды в нашей системе координат, которую нужно еще повернуть так, чтобы ось x была направлена в сторону возрастающих прямых восхождений, а ось y — в сторону возрастающих склонений. После этого получим величины $15 \mu_\alpha \cos \delta$ и μ_δ .

2. Часто используется более простой метод, когда измеряются непосредственно величины $\Delta x = x - x'$ и $\Delta y = y - y'$, т. е. смещения звезды, а не ее положение. Для непосредственных измерений этих смещений обычно пользуются блинкмикроскопом или стереокомпаратором — приборами, с помощью которых можно одновременно видеть оба снимка и измерять смещение исследуемой звезды при переходе от одного снимка к другому.

¹⁾ См. Блажко С. Н., Курс практической астрономии, изд. 3, М. — Л., 1951, стр. 385.

Другой метод непосредственных измерений смещений звезд состоит в следующем: второй снимок изучаемой области неба получается сквозь стекло. Потом обе пластинки складываются эмульсиями и на них измеряются смещения снятых звезд Δx и Δy . Обозначая компоненты относительного собственного движения звезды в нашей системе координат через μ_x и μ_y , а время, протекшее между первым и вторым снимком, через t , получим два уравнения

$$\Delta x = A + Bx + Cy + t\mu_x,$$

$$\Delta y = D + Ex + Fy + t\mu_y,$$

причем постоянные $A, B, \dots, F$ определяются методом наименьших квадратов из системы уравнений, полученных для звезд сравнения,

$$\Delta x_n = A + Bx_n + Cy_n,$$

$$\Delta y_n = D + Ex_n + Fy_n.$$

Здесь Δx_n и Δy_n — смещения звезд сравнения, а x_n и y_n — координаты этих звезд. В данном случае можно пользоваться неточными значениями координат звезд, например, только с точностью 0,1 мм, и благодаря этому обстоятельству описываемый метод является более удобным по сравнению с предыдущим, в котором требуется точное знание самих координат звезд. Кроме того, преимущество последнего метода состоит в том, что мы измеряем здесь очень малые величины Δx и Δy , которые вследствие этого содержат сравнительно небольшие систематические ошибки.

Полученные таким образом величины μ_x и μ_y можно преобразовать в компоненты собственного движения в экваториальной системе координат; для этого надо знать две величины: число секунд дуги, соответствующее одному обороту микрометрического винта, и γ — угол между осью x и направлением возрастающих прямых восхождений. Тогда

$$\mu_\alpha \cos \delta = k(\mu_x \sin \gamma - \mu_y \cos \gamma),$$

$$\mu_\delta = k(\mu_x \cos \gamma + \mu_y \sin \gamma).$$

Зная относительное собственное движение какого-нибудь объекта, можно определить его абсолютное движение, если известно абсолютное собственное движение по крайней мере одной из звезд сравнения. В этом случае следует к компонентам относительного движения изучаемого объекта прибавить разность между компонентами абсолютного и относительного движения звезды сравнения. Если же среди звезд сравнения нет ни одной звезды с известным абсолютным движением, то можно пользоваться другими методами.

Предположим, что пекулярные движения звезд сравнения хаотичны и потому их сумма равна нулю. В таком случае среднее абсолютное собственное движение звезд сравнения равно их параллактическому движению, являющемуся отражением движения Солнца

в направлении апекса. Зная направление этого движения и его скорость, можно вычислить параллактическое смещение каждой звезды, вызванное движением Солнца, если нам известно ее расстояние (годовой параллакс). Если же расстояния отдельных звезд неизвестны, то вычисляем средний параллакс звезд сравнения по их средней видимой величине (см. п. 23), при этом предполагаем, что все звезды сравнения находятся на одном и том же расстоянии, равном среднему; затем определяем среднее параллактическое собственное движение звезд сравнения и прибавляем его к относительному движению изучаемого объекта. Таким образом мы находим его абсолютное собственное движение ¹⁾.

§ 4. Лучевые скорости

7. Определение. Как мы уже говорили, составляющая скорости светила в направлении луча зрения называется „лучевой скоростью“ данного светила и обыкновенно обозначается через V_r ; эту составляющую мы находим на основании измерений смещения линий в спектре данного светила, пользуясь при этом принципом Доплера,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{V_r}{c},$$

где c — скорость света в вакууме, равная $2,99793 \cdot 10^{10}$ см/сек, λ_0 — длина волны линии в спектре сравнения, т. е. в спектре тела, неподвижного относительно наблюдателя, а λ — наблюдаемая длина волны линии в спектре изучаемого тела. По приведенной выше формуле определяется лучевая скорость V_r в тех же единицах, в которых выражена скорость света.

8. Приведение лучевых скоростей к Солнцу. Наши наблюдения проводятся в подвижной системе координат, связанной с данной точкой Земли. Зная географическую широту φ и долготу λ места наблюдения, а также экваториальные координаты α и δ наблюдаемого светила, можно перейти от системы, связанной с местом наблюдения к геоцентрической системе, т. е. вычислить, какова была бы лучевая скорость данного тела, если бы наблюдатель находился в центре Земли.

Линейная скорость наблюдателя, находящегося на широте φ , равна $v_0 \cos \varphi$, где v_0 — скорость точки на экваторе, равная $0,465$ км/сек (считаем землю шарообразной, что в нашем случае вполне приемлемо). Эта скорость направлена на восток, т. е. к точке E на рис. 10.

Вычислим угол χ между скоростью наблюдателя и направлением к данному светилу G . Рассматривая сферический треугольник WBG

¹⁾ Подробности этого метода и таблицы, облегчающие вычисления, приведены в работах: van Rhijn, Bok, *Gron. Publ.*, 45 (1931) или Пареманго П. П. [АЖ, 23, 2 (1946)].

(B — полюс), в котором сторона $BW = 90^\circ$, а сторона $GW = 180^\circ - x$, и применяя формулу косинусов, имеем

$$-\cos x = \cos \delta \sin t,$$

где t — часовой угол светила, равный $S - \alpha$, т. е. звездное время момента наблюдения минус прямое восхождение светила. Следовательно, проекцией скорости наблюдателя в направлении OG является вектор v_d , равный

$$v_d = -0,465 \cos \varphi \cos \delta \sin t \left[\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right].$$

Эту величину нужно прибавить к наблюдаемой лучевой скорости, чтобы получить геоцентрическую лучевую скорость изучаемого тела.

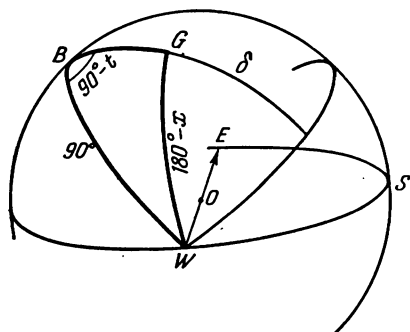


Рис. 10.

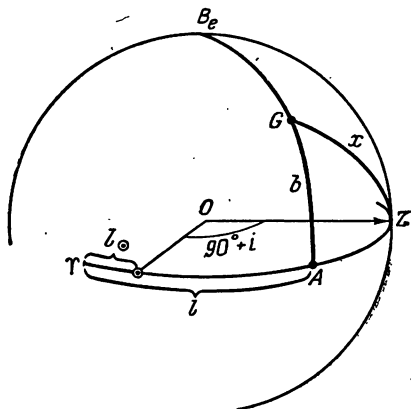


Рис. 11.

Так как величина эта очень незначительна (не больше $0,5 \text{ км/сек}$), то при не очень точных измерениях можно эту поправку не вводить и считать, что наблюдаемая скорость равна геоцентрической лучевой скорости тела.

Гораздо большее значение имеет поправка, которую нужно прибавить к геоцентрической лучевой скорости, чтобы получить гелиоцентрическую лучевую скорость тела, т. е. лучевую скорость в системе координат, связанной с центром Солнца. Вычислим эту поправку.

На рис. 11 B_e — полюс эклиптики, G — наблюдаемое тело, γ — точка весеннего равноденствия, $\odot$ — положение Солнца.

Угол между направлением скорости Земли OZ в момент наблюдения и направлением к Солнцу мы обозначим $90^\circ + i$ (если бы Земля двигалась по круговой орбите, то угол этот равнялся бы 90° ; i является „результатом“ эллиптичности орбиты Земли).

Рассмотрим треугольник ZGA , в котором угол $A = 90^\circ$. Сторонами треугольника являются: эклиптическая широта b , дуга x , измеряемая

углом между направлением скорости движения Земли OZ и направлением от Земли к изучаемому объекту, а также дуга $AZ = 90^\circ + i + l_\odot - l$ (здесь l и $l_\odot$ — соответственно эклиптические долготы рассматриваемого объекта и Солнца). Следовательно,

$$\cos x = -\cos b \sin (l_\odot - l + i)$$

и проекция скорости Земли на луч зрения равна

$$v_a = -V_a \cos b \sin (l_\odot - l + i),$$

где V_a — скорость Земли на орбите. Во многих случаях можно положить $V_a = \text{const}$ и $i = 0^\circ$ (т. е. приближенно считать орбиту Земли окружностью). Если же мы располагаем более точными измерениями лучевой скорости, то необходимо отбросить предыдущее предположение и ввести величины V_a и i , определяемые формулами небесной механики

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i &= \frac{e \sin (l_\odot - \pi)}{1 + e \cos (l_\odot - \pi)}, \\ V_a &= \frac{2\pi a}{T \sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 + 2e \cos (l_\odot - \pi) + e^2} \approx \\ &\approx \frac{2\pi a}{T \sqrt{1 - e^2}} [1 + e \cos (l_\odot - \pi)], \end{aligned}$$

где e — эксцентриситет земной орбиты, a — большая полуось этой орбиты, T — звездный год в секундах, π — долгота перигелия.

Значение v_a надо прибавить к наблюдаемой лучевой скорости в геоцентрической системе, чтобы получить скорость в гелиоцентрической системе координат. Величина V_a может достигать 30 км/сек, следовательно, эту поправку необходимо учитывать при всех измерениях лучевых скоростей звезд.

Кроме приведенных выше поправок, при очень точных измерениях следует учитывать еще возмущения в движении Земли, вызванные влиянием Луны и больших планет — Юпитера и Сатурна, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} V_L &= -0,14 \sin (l - L) \cos b \text{ км/сек} && (\text{Луна}), \\ V_J &= -0,012 \sin (l - L) \cos b \text{ км/сек} && (\text{Юпитер}), \\ V_S &= -0,003 \sin (l - L) \cos b \text{ км/сек} && (\text{Сатурн}), \end{aligned}$$

где l и b — эклиптические координаты звезды, L — эклиптическая долгота каждого из тел, вызывающего возмущение движения Земли.

Обычно мы этих поправок не вводим, так как их величина ни в коем случае не превышает 0,15 км/сек. Однако, они играют довольно существенную роль при решении обратной задачи, а именно, при определении орбиты Земли, в частности, полуоси a на основании наблюдений лучевой скорости какой-нибудь звезды. Зная a , можно определить также экваториальный горизонтальный параллакс Солнца

$p = \frac{r}{a \sin 1''}$ (r — экваториальный радиус Земли). В этом случае необходимо освободить наблюдаемые лучевые скорости звезды от влияния возмущения от Луны и больших планет. „Освобожденные“ геоцентрические скорости v_0 должны удовлетворять уравнению

$$v_0 = -V_a \sin(l_\odot - l + i) \cos b + \text{const.}$$

Решая систему таких уравнений, можно определить величины V_a и i , а затем, зная их, вычислить a , e и горизонтальный параллакс Солнца.

В обсерватории на мысе Доброй Надежды были проведены наиболее точные определения параллакса Солнца, основанные на лучевых скоростях семи звезд (наблюдения проводились при помощи спектрографов с наибольшей дисперсией), лежащих близ эклиптики. В результате получено

$$p = 8'',802 \pm 0'',004.$$

9. Техника наблюдений лучевых скоростей. Измерения лучевых скоростей проводятся, как правило, на снимках спектров звезд. Снимок со спектром звезды и со спектром сравнения, содержащим чаще всего эмиссионные линии железа, а иногда линии других элементов, измеряется на специальном приборе, в котором при помощи микрометрического винта перед неподвижным микроскопом передвигается снимок. Этот прибор часто называется компаратором. Число оборотов винта при переходе от одной линии к другой является относительной координатой x данной линии. Зная длину волны λ каждой спектральной линии, можно, на основании этих измерений, установить эмпирическую зависимость

$$x = f(\lambda).$$

На снимках, полученных при помощи спектрографов, эта зависимость приближенно хорошо представляется формулой

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{C}{(x - x_0)^n},$$

в которой постоянные x_0 , C , n и λ_0 следует определять методом наименьших квадратов. Эту формулу, довольно часто употребляемую в спектроскопии, называют формулой Гартмана. Упрощением ее является так называемая формула Корню

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{C}{x - x_0}, \quad (9.1)$$

имеющая только три постоянные.

Определив по измерениям спектра сравнения числовые значения постоянных, можно вычислить Δx , т. е. смещение линий относительно их „нормального“ положения, известного из таблиц или тео-

ретических расчетов. Чаще всего смещения Δx отождествляются с дифференциалом dx , так как смещения Δx очень малы,

$$dx = \Delta x = \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda$$

и таким образом определяется искомая лучевая скорость

$$V_r = \frac{299\,793}{\lambda} \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{c} dx \left[\frac{\text{км}}{\text{сек}} \right].$$

Применимость этой формулы, конечно, обусловлена применимостью формулы (9.1). Таким образом, значительно упрощается перевод измеренных смещений dx в лучевые скорости V_r .

При обработке результатов измерений спектральных линий следует учесть многие систематические ошибки; прежде всего ошибки, вызванные искривлением спектральных линий¹⁾; кроме этого, систематические ошибки могут возникнуть из-за того, что мы сравниваем измерения темных линий поглощения в спектре изучаемой звезды с яркими эмиссионными линиями спектра сравнения.

Хотя авторы всегда стараются исключить все возможные систематические ошибки, тем не менее результаты наблюдений одних и тех же звезд, полученные на разных обсерваториях, часто оказываются различными. При создании однородной системы лучевых скоростей принято считать „безошибочными“ результаты, полученные на Ликской обсерватории. Сравнивая лучевые скорости, полученные на другой обсерватории, со скоростями, приведенными в ликских каталогах, можно определить и учесть все систематические отклонения полученных данных от соответствующих данных Ликской обсерватории.

По соглашению, все астрономы пользуются при определении лучевых скоростей одними и теми же линиями сравнения, специально выбранными для каждого спектрального класса. Длины волн этих линий, многократно измеренные и сопоставленные с результатами лабораторных измерений, публикуются в изданиях Международного Астрономического Союза.

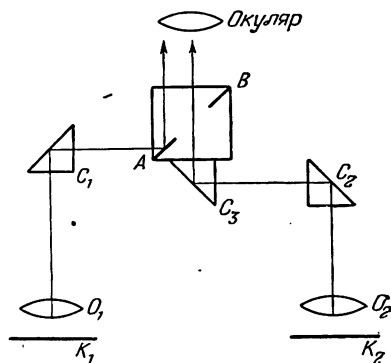


Рис. 12.

При измерениях доплеровских смещений линий часто пользуются специальным прибором, позволяющим измерять непосредственно смещения Δx , не уменьшая при этом точности измерений. Чаще всего этим прибором бывает так называемый компаратор Гартмана, схема которого дана на рис. 12.

¹⁾ Объяснение этого эффекта см., Курс астрофизики и звездной астрономии, т. I, М.—Л., 1951, стр. 308.

Под двумя объективами микроскопов O_1 и O_2 помещены пластинки K_1 и K_2 со снимками спектров, освещенные снизу. Лучи, идущие от K_1 и K_2 , попадают на призмы полного внутреннего отражения C_1 и C_2 и потом на систему призм C_3 с частично посеребренной гранью AB , в которой оставлен непосеребренный пояс.

В окуляре OK в центре поля зрения видна часть снимка K_2 , а над ним и под ним — снимок K_1 . Передвигая нить окуляра, можно непосредственно измерять смещения линий при переходе от одного спектра к другому. Если один из спектров свободен от эффекта Допплера, то эти смещения, переведенные в единицы длин волн, являются доплеровскими смещениями тела, спектр которого сфотографирован на другом снимке. При этом довольно важным обстоятельством является практическая возможность сравнения снимков с разной дисперсией. В сущности дисперсия одного спектрального снимка несколько отличается от дисперсии любого другого снимка, полученного на одном и том же инструменте, вследствие влияния на инструмент во время экспозиции разности температур и других факторов. В таком случае спектральные линии на одном снимке не будут точно совпадать с линиями второго снимка. Однако, можно устранить это специальным приспособлением, позволяющим передвигать одно „плечо“ инструмента влево и вправо и тем самым укорачивать или удлинать оптический путь луча в одном плече компаратора, изменяя таким образом масштаб наблюдаемого изображения одного спектра.

Полученные отсчеты микрометрического винта переводятся затем в длины волн, для этого надо знать цену одного оборота винта и дисперсию спектрографа; последнюю обычно определяют „раз и навсегда“ для разных мест спектра как функцию длины волн. Умножив число оборотов винта на обе эти величины, сразу получают доплеровское смещение в спектре данной звезды.

10. Определение лучевых скоростей с помощью бесщелевых спектрографов. В последнее время был предпринят ряд успешных попыток определения лучевых скоростей звезд по снимкам, полученным с помощью бесщелевых спектрографов. Эти работы имеют громадное значение в звездной астрономии, так как они обещают дать нам в будущем возможность изучать очень слабые звезды и таким образом иметь в своем распоряжении богатый статистический материал о движении многих звезд. Точность полученных таким образом лучевых скоростей будет, конечно, значительно уступать точности определений, проведенных с помощью щелевых спектрографов, однако, благодаря богатству материала эти данные могут внести много нового в наши сведения о кинематике и динамике Галактики.

Хотя эти пробы были начаты очень давно, только лишь в последнее время получены удовлетворительные по точности результаты и — что самое важное — результаты, не отягощенные серьезными систематическими ошибками.

Главным препятствием в практическом осуществлении этой идеи служило то обстоятельство, что одновременно со спектральным снимком звезд нельзя получить снимки спектров сравнения. Поэтому при определении лучевых скоростей с помощью бесщелевых спектрографов чаще всего пользуются так называемым *реверсионным* методом, предложенным Пикерингом и развитым затем Шварцшильдом.

Согласно этому методу, два раза снимают спектр звезды, причем второй снимок получают после поворота объективной призмы на 180° .

Пусть оба снимка находятся один над другим (рис. 13). Измерим расстояние Δx между одной и той же линией с длиной волны λ на обоих снимках. Если бы лучевая скорость звезды равнялась нулю, то

$$\Delta x = 2 \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta \lambda} (\lambda - \lambda_0) f = A(\lambda) + B(\lambda_0),$$

где λ_0 — длина волны того места в спектре, координата x которого при повороте призмы остается неизменной, $\Delta \varepsilon / \Delta \lambda$ — средняя дисперсия в интервале $(\lambda - \lambda_0)$, f — коэффициент, зависящий от выбранных единиц измерений.

Если же линия смещена на $\Delta x'$, то

$$\Delta x' = A(\lambda) + B(\lambda_0) + 2 \frac{d\varepsilon}{d\lambda} f d\lambda,$$

где $d\lambda$ — доплеровское смещение $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{V_r}{c}$, $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}$ — дисперсия спектра в данном месте. Неизвестными здесь являются величины

$$[A(\lambda) + B(\lambda_0)], \quad V_r, \quad \frac{d\varepsilon}{d\lambda}.$$

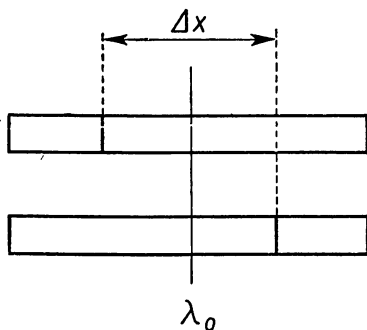


Рис. 13.

Первое и последнее неизвестное постоянны для всех звезд, находящихся в небольшой области снимка, и потому их можно определить на основании измерений по крайней мере двух звезд с известными лучевыми скоростями V_r . Как мы уже сказали, величину $d\varepsilon/d\lambda$ можно считать постоянной только в достаточно малой области неба. На практике гораздо лучше было бы иметь не две звезды с известными лучевыми скоростями V_r , а несколько таких звезд; это позволило бы нам не только точнее определить неизвестные $A(\lambda) + B(\lambda_0)$ и $d\varepsilon/d\lambda$ и убедиться, действительно ли эти величины постоянны, но также установить размеры областей на снимке, в которых $d\varepsilon/d\lambda$ можно считать постоянной.

11. Пространственные скорости звезд. Зная компоненты собственного движения μ_α и μ_δ какого-нибудь объекта, его лучевую скорость V_r и расстояние $r = \pi^{-1}$, можно вычислить пространственную скорость данного объекта V и ее составляющие u , v , w в произвольной системе координат, например, в прямоугольной экваториальной системе, т. е. системе, основная плоскость которой совпадает с плоскостью экватора, а ось X направлена в точку весеннего равноденствия.

Дифференцируя по времени формулы

$$x = r \cos \delta \cos \alpha,$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha,$$

$$z = r \sin \delta,$$

находим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \delta \cos \alpha - \frac{d\delta}{dt} r \sin \delta \cos \alpha - \frac{d\alpha}{dt} r \cos \delta \sin \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \delta \sin \alpha - \frac{d\delta}{dt} r \sin \delta \sin \alpha + \frac{d\alpha}{dt} r \cos \delta \cos \alpha,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \delta + \frac{d\delta}{dt} r \cos \delta.$$

Обозначая

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

и помня, что

$$\frac{dr}{dt} = V_r, \quad \frac{d\delta}{dt} = k\mu_\delta, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 15 k\mu_\alpha,$$

где k — коэффициент, определенный в § 3, получим

$$u = V_r \cos \delta \cos \alpha - \frac{k\mu_\delta}{\pi} \sin \delta \cos \alpha - \frac{15 k\mu_\alpha}{\pi} \cos \delta \sin \alpha, \quad (11.1)$$

$$v = V_r \cos \delta \sin \alpha - \frac{k\mu_\delta}{\pi} \sin \delta \sin \alpha + \frac{15 k\mu_\alpha}{\pi} \cos \delta \cos \alpha,$$

$$w = V_r \sin \delta + \frac{k\mu_\delta}{\pi} \cos \delta.$$

Следовательно,

$$V^2 = \frac{k^2}{\pi^2} [(15 \mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2] + V_r^2.$$

Из формул (11.1) также получим

$$k \frac{15 \mu_\alpha}{\pi} \cos \delta = -u \sin \alpha + v \cos \alpha,$$

$$k \frac{\mu_\delta}{\pi} = -u \cos \alpha \sin \delta - v \sin \alpha \sin \delta + w \cos \delta, \quad (11.2)$$

$$V_r = u \cos \alpha \cos \delta + v \sin \alpha \cos \delta + w \sin \delta.$$

Следует обратить внимание читателей на то, что средние ошибки величин u , v и w являются функциями координат α и δ и, следовательно, различны для разных направлений на небе.

Можно вывести формулы для компонентов скорости звезды в других системах координат, например, в прямоугольной галактической системе, в которой чаще всего рассматривается движение звезд, принадлежащих к нашей Галактике.

§ 5. Блеск, цвета и спектры звезд

12. Шкала звездных величин. Хотя блеск звезд является предметом изучения астрофизики, тем не менее в звездной астрономии этот параметр также играет очень существенную роль. Большинство методов определения расстояний до звезд и других объектов основано на сравнении их видимого блеска с так называемой *абсолютной яркостью*, о которой речь будет ниже, а знание расстояний является одним из главных условий успешного изучения строения как нашей Галактики, так и других галактик. Правильное определение фотометрических расстояний целиком зависит от правильности принятой фотометрической шкалы. Допуская, например, существование систематической ошибки в принятой шкале звездных величин, мы тем самым искажаем размеры нашей Галактики, других галактик, а также все расстояния звезд и других объектов, в чем легко убедиться из дальнейшего изложения.

Кроме того, проблема звездных величин звезд играет немаловажную роль во многих вопросах эволюции звезд, а также во многих исследованиях межзвездной материи. Поэтому в звездной астрономии мы так много внимания уделяем вопросам звездной фотометрии и, естественно, много места этому вопросу уделяем и в нашей книге.

В основу фотометрии астрономических объектов положен несколько иной принцип, чем во многих других системах.

Это отличие вызвано тем обстоятельством, что все космические тела наблюдаются сквозь земную атмосферу, а в земной атмосфере имеет место атмосферная экстинкция, которая изменяется с течением времени и с высотой наблюдателя над уровнем моря. Чтобы освободить наши фотометрические эталоны от влияния экстинкции, необходимо поместить их вне земной атмосферы; следовательно, мы должны отказаться от лабораторных эталонов и выбрать несколько звезд, которые, таким образом, становятся фотометрическими эталонами астрономов. Экстинкция в земной атмосфере одинаково влияет на блеск изучаемой звезды и на блеск звезд, расположенных на небе недалеко от звезды-эталона; сравнивая их, мы автоматически освобождаемся от влияния экстинкции. По многим причинам нельзя при этом ограничиться одной звездой. Прежде всего потому, что это осложнило бы измерение блеска звезд, сильно отличающихся по блеску от эталона. Кроме того, мы должны быть уверены, что блеск звезды-эталона постоянен. Такой гарантии при одной звезде у нас нет и не будет. Поэтому в качестве эталона была выбрана группа звезд, содержащая звезды от самых ярких до самых слабых. Самым удобным оказался выбор звезд вблизи полюса, так как их высота практически постоянна; таким эталоном в настоящее время является так называемый Северный полярный ряд (North Polar Sequence)¹⁾.

¹⁾ Были попытки ввести такой же эталон на южном полушарии неба, но они до сих пор еще не осуществлены.

Фотометрическая шкала, которой пользуются астрономы, также отличается от шкал, используемых при других измерениях. Астрономы пользуются логарифмической шкалой, приняв, что звездная величина m какого-либо светила является линейной функцией логарифма освещенности, создаваемой этим светилом в месте наблюдения. Если мы обозначим освещенность через I , то звездная величина m светила равна выражению

$$m = a \log I + b$$

с постоянными a и b .

Определенная таким образом фотометрическая шкала удовлетворяет многим требованиям. Прежде всего она согласуется с глазомерными оценками блеска, произведенными еще в древности. В те времена блеск звезды измерялся непосредственно зрительным ощущением. Условно было принято, что самым ярким звездам давалась оценка 1 (звезды первой величины), самым слабым, видимым нормальным глазом, — 6 (звезды шестой величины). Блеск звезд, заключенных в этом интервале (звезд второй, третьей, четвертой и пятой величины), определялся путем интерполирования вызванного ими зрительного ощущения между зрительным ощущением, вызываемым звездами первой и шестой величины.

Слово „величина“ (*magnitudo*), по всей вероятности, возникло вследствие ошибочного убеждения в том, что яркие звезды обладают большими размерами, слабые — малыми. Несмотря на то, что эта терминология ошибочна, она сохранена и до настоящего времени.

Глазомерные оценки блеска звезд оказались довольно удобной основой для позднейшей объективной шкалы звездных величин. Пользуясь законом Вебера — Фехнера, можно связать ощущение W с раздражением I выражением

$$W = a \log I + b.$$

Определив объективными методами величины I большого числа звезд и вычислив соответствующие величины W , можно сравнить их затем с результатами определений этой величины древними астрономами. Изучая многочисленные разности

$$W_i - W_j = a \log \frac{I_i}{I_j},$$

где i и j относятся к произвольной паре звезд, можно определить среднюю величину $a = -2.5$. Так как измерения I могут быть только относительными, то мы должны были ограничиться определением a в согласии с древними глазомерными оценками блеска звезд. Таким образом был сделан первый шаг по согласованию древних фотометрических измерений с современными.

Теперь наша шкала определяется формулой

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{I}{I_0}, \quad (12.1)$$

в которой m и m_0 — звездные величины двух звезд, I и I_0 — соответствующие им освещенности¹⁾ в некотором интервале длин волн. Таким образом, нет необходимости определять I в абсолютных единицах и можно ограничиться исключительно относительными измерениями освещенности. Приняв, например, за единицу освещенности создаваемую звездой нулевой величины ($m_0 = 0$, если $I_0 = 1$), получим простую формулу

$$m = -2,5 \log I. \quad (12.2)$$

У нас нет эталонов звезд нулевой величины, поэтому на практике обычно сравнивают блеск изучаемой звезды с блеском m_0 какой-либо звезды Северного полярного ряда. Звездные величины этих звезд определены путем тщательных измерений отношений создаваемых ими освещенностей, при этом нульпункт звездных величин выбран не произвольно, а так, чтобы он по возможности согласовывался с древними наблюдениями — второй шаг к согласованию современной фотометрической шкалы со старыми глазомерными оценками. Практически же к определенным по формуле (12.1) разностям звездных величин прибавлена постоянная поправка, найденная так, чтобы полученные звездные величины m были по возможности близки древним оценкам звездных величин звезд.

Довольно удобным в астрономической шкале звездных величин является следующее: измерениям, имеющим одинаковые относительные ошибки dI , соответствует одинаковая абсолютная ошибка dm . Действительно, дифференцируя (12.2), получим

$$dm = -2,5 \operatorname{Mod} \frac{dI}{I} = -1,086 \frac{dI}{I}.$$

$$\text{Приблизленно } |dm| \approx \left| \frac{dI}{I} \right|.$$

Чаше всего мы имеем дело именно с такими случаями; в данной серии фотометрических измерений относительная ошибка измерений бывает обычно постоянной и, следовательно, $dm = \text{const}$.

13. Светимости звезд. Видимый блеск светила прежде всего зависит от двух величин: от его светимости в данной длине волны и от его расстояния r .

Во многих случаях бывает желательно освободиться от второго фактора и пользоваться какой-либо величиной, зависящей только от светимости данного объекта. С этой целью мысленно переместим все изучаемые тела на одинаковое условное расстояние r_0 и вычислим для каждого объекта звездную величину M , которую мы наблюдали бы в этом случае; эта звездная величина M называется *абсолютной звездной величиной* данного светила.

¹⁾ Освещенность — физически более правильное понятие, чем блеск, который все же употребляется в астрономии. — *Прим. ред.*

Зная видимую величину m , можно легко определить абсолютную величину M , помня, что увеличению (или уменьшению) расстояния в отношении r/r_0 соответствует уменьшение (или увеличение) освещенности или блеска в отношении $(r_0/r)^2$. Следовательно,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{r_0^2}{r^2}, \quad (13.1)$$

и абсолютная величина M определяется по формуле

$$m - M = -2,5 \log \frac{I}{I_0} = 5 \log r - 5 \log r_0. \quad (13.2)$$

Примем для звезд расстояние r_0 равным 10 пс. Таким образом, если r выражено в парсеках, то

$$M = m + 5 - 5 \log r$$

или

$$M = m + 5 + 5 \log \pi, \quad (13.3)$$

где π — годичный параллакс звезды в секундах дуги.

Обе формулы (13.3) справедливы только в том случае, если между наблюдателем и светилом нет рассеивающей свет материи. Если же эта материя существует, то часть разницы $m - M$ следует отнести за счет рассеяния света этой материей. Следовательно,

$$m - M = 5 \log r - 5 + A, \quad (13.4)$$

где A — так называемое межзвездное поглощение. Этим термином мы называем и величину изменения блеска, выраженную в звездных величинах, и само явление, как это часто практикуется в астрономии. К сожалению, термин неточен; в дальнейшем мы убедимся, что изменение блеска в очень малой степени вызвано поглощением света, а главным образом его рассеянием в межзвездной среде. Однако, будем употреблять это название как общепринятое в астрономии.

14. О разных фотометрических системах. Вначале мы не интересовались длиной волны, для которой находили разные зависимости. Эти зависимости были справедливы для любой длины волны, причем между освещенностью $I(\lambda)$ и раздражением глаза или другого приемника $I'(\lambda)$ должна существовать зависимость

$$I'(\lambda) = k(\lambda) I(\lambda),$$

где $k(\lambda)$ — коэффициент, зависящий только от длины волны λ воспринимаемого излучения. До сих пор не было надобности вводить этот коэффициент в наши выводы. Действительно, при монохроматическом излучении освещение всегда пропорционально раздражению. Однако, переходя к интегральным измерениям, т. е. к таким, при которых измеряется излучение, заключающееся в широких пределах длин волны, часто приходится учитывать этот коэффициент $k(\lambda)$. На практике же обычно имеют дело с интегральной фотометрией.

Разложим мысленно излучение, посылаемое каким-либо светилем, по длинам волн; таким образом получим некоторую зависимость интенсивности излучения от длины волны, в данном случае интенсивностью мы называем количество энергии излучения, посылаемое данным телом в единицу времени на единицу поверхности. Эту зависимость обозначим $I(\lambda)$ и назовем распределением излучения данного тела.

Это излучение прежде всего проходит сквозь земную атмосферу; в результате неодинакового рассеяния света различных длин волн наблюдатель получит измененное распределение энергии, а именно:

$$p_1(\lambda) I(\lambda),$$

где $p_1(\lambda)$ является коэффициентом прозрачности земной атмосферы. Коэффициент прозрачности равен единице, если атмосфера пропускает весь свет данной длины волны, и равен нулю, если задерживает его полностью. В промежуточных случаях $p_1(\lambda)$ равно отношению интенсивности пропущенного света к интенсивности света, падающего на границу атмосферы. Затем луч света, прошедший сквозь атмосферу, падает на оптику инструмента, с помощью которого ведутся наблюдения. Здесь распределение излучения опять изменяется вследствие неодинаковой прозрачности инструментальной оптики для различных длин волн. Получается новое распределение вида

$$p_1(\lambda) p_2(\lambda) I(\lambda),$$

причем $p_2(\lambda)$ является коэффициентом прозрачности оптики, определенным так же, как и коэффициент прозрачности атмосферы.

В конце концов луч света падает на измерительную аппаратуру (глаз, фотографическая пластинка, фотоэлемент), чувствительность которой $p_3(\lambda)$ также является функцией длины волны. Эту функцию можно, например, определить следующим образом: вообразим излучение, интенсивность которого одинакова во всех длинах волн, конечно, в каком-либо небольшом интервале длин волн. В данном случае реакция нашей измерительной аппаратуры будет пропорциональна $p_3(\lambda)$. Мы можем ее как-нибудь нормировать, приняв, например, что в точке максимума величина $p_3(\lambda)$ равна единице. Тогда все значения этой функции будут не больше единицы.

Таким образом, объектом наших измерений является функция

$$p_1(\lambda) p_2(\lambda) p_3(\lambda) I(\lambda) = k(\lambda) I(\lambda),$$

причем измеряется суммарный эффект. Следовательно, реакция нашей измерительной аппаратуры I' будет пропорциональна

$$I' \approx \int_0^{\infty} k(\lambda) I(\lambda) d\lambda.$$

Переходя к звездным величинам, получим

$$m = -2,5 \log I' = -2,5 \log \int_0^{\infty} k(\lambda) I(\lambda) d\lambda + C, \quad (14.1)$$

причем $C = \text{const.}$

Так как все наши фотометрические измерения являются относительными, то мы не определяем постоянную C ; приняв какую-нибудь звезду за звезду сравнения и зная относительное распределение излучения $I_0(\lambda)$ в спектре этой звезды, можно определить звездную величину m любой звезды

$$m - m_0 = -2,5 \log \frac{\int_0^{\infty} k(\lambda) I(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} k(\lambda) I_0(\lambda) d\lambda}. \quad (14.2)$$

Зависимость коэффициента прозрачности $p_1(\lambda)$ от длины волны практически одинакова для всех наблюдений, так как химический состав атмосферы над разными точками Земли практически одинаков. Известную роль здесь может играть только высота наблюдаемой звезды; однако, звездную величину этой звезды можно привести к зениту, учитывая разности экстинкции для разных длин волн. Величина $p_2(\lambda)$ также практически постоянна, если, конечно, наблюдения проводятся в видимой части спектра и при этом используется стеклянная оптика или зеркала.

Сильнее всего в зависимости от измерительной аппаратуры изменяется функция $p_3(\lambda)$; чувствительность глаза, например, сильно отличается от чувствительности фотоэлемента, фотографической пластинки или термоэлемента. Поэтому принципиально каждому инструментальному комплексу соответствует какая-то только ему присущая функция $k(\lambda)$, и, следовательно, результаты измерений блеска звезд этим комплексом будут отличаться от результатов измерений, полученных с помощью иного комплекса.

Тем не менее часто пренебрегают небольшими различиями функций $k(\lambda)$ и вводят понятие фотометрической системы; в этом случае предполагают, что $k(\lambda) = p_1(\lambda) p_2(\lambda) p_3(\lambda)$ одинаково для многих наблюдений и многих наблюдателей. Если при наблюдениях используется стеклянная оптика или зеркала, а измерительной аппаратурой является наш глаз, то полученные результаты называют *визуальными* звездными величинами и говорят о визуальной фотометрической системе. Если при тех же условиях измерительной аппаратурой является обыкновенная несенсибилизированная фотографическая пластинка, то мы получаем фотографические величины (система фотографических величин).

Часто используются сенсibilизированные фотографические пластинки, подобранные таким образом, чтобы кривая $p_3(\lambda)$ была похожа на кривую чувствительности глаза; в этом случае полученные величины называют *фотовизуальными*, отождествляя их иногда с визуальными звездными величинами.

Известны еще *фотокрасные* звездные величины, получаемые с помощью панхроматических пластинок и красного фильтра, а также разного рода фотоэлектрические величины, зависящие от рода фотоэлементов, с помощью которых проводятся наблюдения.

Кроме того, в астрономии вводится некая идеализированная фотометрическая система, так называемая *болометрическая* система, в которой все три функции $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$ и $p_3(\lambda)$ постоянны. Это равносильно предположению, что наблюдатель находится вне земной атмосферы, что оптика его инструмента одинаково прозрачна для всех длин волн и что он измеряет излучение при помощи прибора, чувствительность которого одинакова во всех длинах волн. Такими свойствами обладает, между прочим, болометр, поэтому эта фотометрическая система называется болометрической. Однако, кроме болометра, некоторые другие приборы также обладают этим свойством, например, радиометр, актинометр и др.

Чтобы определить болометрический блеск звезды, нет надобности измерять ее блеск непосредственно при помощи одного из вышеупомянутых приборов. Можно определить его, зная блеск звезды в какой-либо другой фотометрической системе, если, конечно, известна, функция $k(\lambda)$, соответствующая данной системе, и $I(\lambda)$. Действительно,

$$m = -2,5 \log \int_0^{\infty} k(\lambda) I(\lambda) d\lambda + C,$$

приняв какую-нибудь величину C , можно найти

$$m_{bol} = -2,5 \log \int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda + C.$$

Если предположить, что излучение звезды подчинено законам излучения абсолютно черного тела, то

$$I(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}.$$

В этом случае разность между болометрической звездной величиной и звездной величиной в данной фотометрической системе, т. е. так называемая *болометрическая поправка*, является функцией только одного аргумента, а именно, функцией температуры

$$\Delta_{bol} = m_{bol} - m = \Delta_{bol}(T).$$

Если чувствительность нашего прибора ограничена довольно узким интервалом длин волн, то нашу фотометрическую систему можно считать монохроматической и соответствующей длине волны λ_0 . В этом случае легко определить зависимость между болометрической поправкой и температурой

$$m = -2,5 \log I(\lambda_0, T) + C',$$

причем $I(\lambda, T)$ является распределением излучения абсолютно черного тела. На основании закона Стефана — Больцмана получим

$$m_{bol} = -2,5 \log \int_0^{\infty} I(\lambda, T) d\lambda + C = -2,5 \log \sigma T^4 + C,$$

следовательно,

$$\Delta_{bol} = -10 \log T + 2,5 \log I(\lambda_0, T) + K.$$

Если мы удовлетворимся приближенной формой функции $I(\lambda, T)$, например, приближением Вина

$$I(\lambda, T) \approx \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}},$$

то выражение для болометрической поправки примет вид

$$\Delta_{bol} = -10 \log T - 12,5 \log \lambda_0 - 1,086 \frac{c_2}{\lambda_0 T} + C''.$$

Если же вычислять поправку более точно, то следует принять точное выражение для $I(\lambda, T)$; в этом случае

$$\Delta_{bol} = -10 \log T - 12,5 \log \lambda_0 + 2,5 \log \left(e^{\frac{c_2}{\lambda_0 T}} - 1 \right) + C''.$$

Величина постоянной C'' условно определяется так, чтобы болометрическая поправка для звезд типа F0 (температура около 6800°K) была равна нулю. Легко убедиться, что в этом случае болометрическая поправка для звезд других спектральных классов будет иметь всегда отрицательное значение.

Для визуальной и фотовизуальной системы $\lambda_0 = 5290 \text{ \AA}$ и, следовательно,

$$\Delta_{bol} = m_{bol} - m_V = -10 \log T - \frac{29\,500}{T} + 42,53.$$

В случае фотографической системы ($\lambda_0 = 4250 \text{ \AA}$) имеем

$$\Delta_{bol} = m_{bol} - m_{pg} = -10 \log T - \frac{36\,750}{T} + 32,85.$$

Выведенные нами для монохроматических наблюдений соотношения (13.3) и (13.4) между видимой и абсолютной звездными величинами какого-либо тела справедливы также для любой фотометрической

системы. Помещая звезду на расстояние, равное 10 пс , вместо величины $I(\lambda, T)$ получим выражение

$$I(\lambda, T) \frac{r^2}{10^2},$$

где r — расстояние звезды. Подставляя это выражение в соотношение (13.2), получим зависимость (13.3)

$$m - M = 5 \log r - 5, \quad (14.3)$$

справедливую только при условии, что m и M определены в одной и той же фотометрической системе.

Следует обратить внимание на то, что обратная пропорциональность освещенности квадрату расстояния справедлива только в оптически пустой среде. Если же свет проходит через среду, заполненную оптически активной материей, то зависимость между видимой величиной m и абсолютной M примет вид (13.4)

$$m - M = 5 \log r - 5 + A.$$

Здесь A — межзвездное поглощение, выраженное в звездных величинах.

Если межзвездная среда обладает всюду одинаковыми оптическими свойствами, а ее плотность $D(r)$ в данном направлении является функцией только расстояния, то мы легко найдем зависимость A от r .

Относительная потеря света, имеющего интенсивность I , на элементарном пути dr равна

$$-\frac{dI}{I} = k(\lambda) D(r) dr,$$

причем $k(\lambda)$ — функция длины волны проходящего света. Интегрируя в пределах от 0 до r , получим

$$I = I_0 10^{-K(\lambda) \int_0^r D(r) dr}, \quad (14.4)$$

где $K(\lambda) = \text{Mod } k(\lambda)$.

Чтобы перейти к звездным величинам, прологарифмируем обе части и умножим их на $-2,5$

$$A = \Delta m = -2,5 \log \frac{I}{I_0} = K'(\lambda) \int_0^r D(r) dr, \quad (14.5)$$

$$K'(\lambda) = 1,036 k(\lambda).$$

A зависит от λ ; значит, величина межзвездного поглощения для одной и той же звезды зависит от фотометрической системы, в которой проводятся наблюдения и, следовательно, ее нужно снабжать соответствующим индексом pg , v или pv в зависимости от того, в какой фотометрической системе определяется межзвездное поглощение.

Соотношение между абсолютной величиной M и видимой m на расстоянии r в общем случае будет иметь вид

$$m - M = 5 \log r - 5 + K'(\lambda) \int_0^r D(r) dr. \quad (14.6)$$

15. Показатели цвета (цветовые эквиваленты). Предположим, что функция $I(\lambda)$ в формулах (14.1) и (14.2) зависит также от температуры звезды, т. е. имеем $I(\lambda, T)$. В таком случае результатом интегрирования этой функции должна быть какая-либо иная функция температуры T и постоянной C . Вообразим, далее, звезду, абсолютная величина которой в двух фотометрических системах равна M_1 и M_2 . Вычитая одно число из другого, получим

$$M_1 - M_2 = f(T) + B = CI.$$

Здесь $B = \text{const.}$ Так как правая часть зависит только от температуры T , от которой в свою очередь зависит цвет звезды, то эта разность называется показателем цвета (colour index).

Чаще всего используются показатели цвета, полученные как разность между фотографической M_{pg} и визуальной M_v абсолютными звездными величинами. Иногда пользуются другими фотометрическими системами, называя полученные разности цветовыми эквивалентами¹⁾.

Мы не делали никаких предположений как относительно формы функции $I(\lambda, T)$, так и относительно физического смысла параметра T . Этот параметр может и не быть температурой. Важно лишь то, что функция $I(\lambda, T)$ зависит только от двух параметров, и, следовательно, выбирая две длины волны или же две фотометрические системы, можно получить показатели цвета (цветовые эквиваленты), зависящие только от одного параметра.

Функцию $f(\lambda, T)$ можно определить эмпирическим путем, зная, например, величину T для нескольких звезд и приняв произвольное значение постоянной B . По наблюдаемым показателям цвета можно построить кривую $B + f(T)$ и затем использовать ее для определения T на основании наблюдаемых показателей цвета всех звезд.

Предположим, что излучение звезд подчиняется закону излучения абсолютно черного тела (формула Планка), и, кроме того, предположим, что наши фотометрические системы близки к монохроматическим, соответствующим длинам волн λ_1 и λ_2 , тогда показатель цвета выразится следующим образом:

$$CI = M_1 - M_2 = -2,5 \log \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^5 \frac{e^{\frac{c_2}{\lambda_2 T}} - 1}{e^{\frac{c_2}{\lambda_1 T}} - 1} + B.$$

¹⁾ Часто их также называют показателями цвета, отличая их каким-нибудь определением. — *Прим. ред.*

Если вместо формулы Планка применить приближенную формулу Вина, то получится более простое выражение

$$CI = M_1 - M_2 = -12,5 \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1,086 \frac{c_2}{T} (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) + B.$$

При использовании фотографической и визуальной систем, длины волн соответственно будут равны $\lambda_1 = 4250 \text{Å}$, $\lambda_2 = 5290 \text{Å}$ (эти значения соответствуют максимумам чувствительности обеих систем). В данном случае получим

$$CI = \frac{7200}{T} - 0,64,$$

причем постоянная B подобрана так, чтобы показатель цвета звезд типа A0 ($T = 11\,250^\circ \text{K}$) был равен нулю.

Предположим, что на пути между звездой и наблюдателем нет рассеивающей межзвездной материи, тогда разность абсолютных величин в двух фотометрических системах будет равна разности их видимых величин в тех же системах

$$CI = M_1 - M_2 = m_1 - m_2.$$

Здесь величины M_1 и m_1 относятся к одной системе, а m_2 и M_2 — к другой. Если это условие не соблюдено, то

$$m_1 - m_2 = M_1 - M_2 + [K'(\lambda_1) - K'(\lambda_2)] \int_0^r D(r) dr = M_1 - M_2 + CE.$$

Выражение $CE = (m_1 - m_2) - (M_1 - M_2)$ называется *избытком цвета* (colour — excess), иногда его называют межзвездным покраснением. Это название указывает на то, что межзвездное поглощение увеличивается с уменьшением длины волны, т. е. это поглощение больше всего для коротковолновой радиации. Поэтому мы действительно наблюдаем „покраснение“ тех звезд, в направлении которых имеется сильное межзвездное поглощение. Такого же рода „покраснение“ вызывается, как известно, атмосферной экстинкцией; например, светила, наблюдаемые вблизи горизонта, обнаруживают этот эффект.

Практически определять непосредственно разности $M_1 - M_2$ нельзя; зато можно определять разности $m_1 - m_2$, которые часто называют „наблюдаемыми показателями цвета“, в отличие от разностей $M_1 - M_2$, которые называются „абсолютными показателями цвета“. Зная температуру звезды, например, на основании ее спектрального класса, можно определить, пользуясь эмпирической зависимостью $M_1 - M_2 = f(T) + B$ ¹⁾, теоретический показатель цвета этой звезды. Можно также вывести эту зависимость из закона излучения абсолютно

¹⁾ Влияние межзвездного поглощения на ближайшие звезды настолько мало, что во многих случаях мы можем для них предположить, что $m_1 - m_2 = M_1 - M_2$, и, таким образом, эмпирически определить $f(T) + B$.

черного тела, предполагая, конечно, что излучение звезды подчинено этому закону. Тогда можно определить избыток цвета CE , вычитая $m_1 - m_2$ из $M_1 - M_2$; полученная величина характеризует исключительно физические свойства той межзвездной среды, через которую проходит луч света.

Данные об избытках цвета звезд играют большую роль в изучении физических свойств и пространственного распределения межзвездной материи в нашей Галактике. Поэтому мы еще вернемся к этому вопросу далее, в одном из следующих параграфов (см. § 42).

16. Фотометрические каталоги. Звездные величины звезд и других объектов играют решающую роль при изучении пространственного распределения звезд и туманностей, а также при изучении их движений. Как мы убедимся впоследствии из дальнейших глав этой книги, почти все современные методы изучения пространственного распределения звезд базируются прежде всего на данных, касающихся видимых звездных величин звезд. Поэтому астрономы стремятся к тому, чтобы определить звездные величины для возможно большего числа объектов, сильно различающихся по своему блеску. Результаты этих определений приводятся в фотометрических каталогах ¹⁾.

Хотя мы при помощи звезд Северного полярного ряда однозначно определяем как шкалу звездных величин, так и нульпункт последней, тем не менее на практике мы встречаемся с наличием неизбежных систематических разностей для каждой пары фотометрических каталогов; обнаружение последних, несомненно, играет большую роль при статистических исследованиях.

Возникновение этих разностей обусловлено, в первую очередь, различием применяемых фотометрических систем. Даже в тех случаях, когда пользуются одним сортом фотографических пластинок или же одним типом звездных фотометров, все же существуют кое-какие различия в коэффициенте прозрачности оптики, используемой при наблюдениях. Эти различия влияют на определенные звездные величины звезд, имеющих *различный* цвет, и потому в первом приближении можно считать их линейными функциями показателя цвета CI .

Кроме того, мы часто имеем дело также с систематическими ошибками принятого нульпункта фотометрической шкалы и с ошибками самой шкалы. Поэтому, разлагая все функции в ряд и ограничиваясь членами первой степени, мы должны получить следующее соотношение между звездными величинами m_1 и m_2 какого-нибудь объекта в двух каталогах:

$$m_2 - m_1 = a + bm_1 + c(CI).$$

¹⁾ Подробные данные относительно существующих фотометрических каталогов даны в статье Паренаго П. П., *Усп. астрон. наук*, IV, 257 и след. (1948).

Постоянные a , b и c представляют соответственно ошибку нуля-пункта шкалы, ошибку самой шкалы и цветовую ошибку.

Если показатели цвета неизвестны, то можно заменить их спектральными классами звезд Sp , так как в первом приближении показатели цвета являются монотонной функцией спектрального типа, в чем мы убедимся в последующих главах. Следовательно,

$$m_2 - m_1 = a + bm_1 + c(Sp).$$

При этом спектральные типы звезд Sp надо выразить числами, определенным образом поставленными в соответствие со спектральными классами звезд.

В качестве примера приведем результат сравнения фотографических величин звезд Северного полярного ряда, определенных на обсерватории Маунт Вилсон (m_{MW}), с фотографическими величинами тех же звезд по определениям на гарвардской обсерватории (m_H)

$$m_{MW} - m_H = -0,04 + 0,015m_{MW} + 0,21CI.$$

Несмотря на то, что наблюдения велись на односортовых фотографических пластинках, коэффициент C получился очень большим, равным 0,21. Следует предположить, что причиной этого расхождения были различия в оптических свойствах объективов.

Рассмотрим некоторые последствия наличия систематических разностей между фотометрическими каталогами. Итак, если мы изучаем пространственное распределение звезд, определяя их расстояния на основании данных о видимых величинах, содержащихся в двух различных каталогах, то расстояния r , определенные по одному каталогу, будут отличаться от расстояний r' , полученных по другому каталогу. В том случае, когда можно пренебречь межзвездным поглощением, легко найти соотношение, связывающее r и r' ,

$$\log r = 0,2(m - M) + 1,$$

$$\log r' = 0,2(m' - M) + 1,$$

где m и m' — видимые величины звезд в двух разных каталогах. Отсюда получим

$$\frac{r'}{r} = 10^{0,2(m' - m)} = 10^{0,2(a + bm + cCI)}.$$

Определенные таким образом расстояния будут систематически отличаться друг от друга, причем это расхождение будет увеличиваться по мере увеличения звездной величины рассматриваемых объектов.

Кроме того, систематические ошибки каталога могут привести к ошибочному заключению относительно существования межзвездного „покраснения“ (межзвездного поглощения) в тех случаях, когда на действительности его не существует, или же, наоборот, замаскировать это явление. Систематические ошибки каталогов являются

также источниками ошибочных определений расстояний отдельных темных туманностей и величины поглощения в одном облаке, искажая, таким образом, результаты исследований структуры Галактики. Вот почему мы так внимательно относимся к вопросу существования систематических ошибок фотометрических каталогов, считая его одной из существенных проблем звездной астрономии, и обращаем на него особое внимание всех работающих в этой области.

§ 6. Спектральная классификация

17. Гарвардская классификация. При исследованиях, характерных для звездной астрономии, довольно редко приходится изучать детальные физические свойства отдельных звезд; зато возникает необходимость введения какой-либо систематики тех физических свойств звезд, которые можно непосредственно наблюдать. Ясно, что первые шаги в этом направлении были сделаны при создании системы классификации звездных спектров, которые содержат гораздо больше сведений о физических свойствах звезды, чем другие физические параметры, полученные непосредственно из наблюдений.

Одним из главных требований, которые мы в свое время поставили и ставим спектральной классификации звезд, является возможность определения физических данных для большого числа рассматриваемого класса звезд при сравнительно несложных операциях над спектром; эти операции обыкновенно сводятся к глазомерной оценке спектров звезд, полученных при помощи спектрографов с малой дисперсией.

Спектральная классификация, которой пользуются в настоящее время, введена гарвардскими астрономами в начале этого столетия и потому ее принято называть гарвардской спектральной классификацией. В ее создании главную роль сыграли Пикеринг и Кэннон.

Отдельные группы звезд в этой классификации принято обозначать буквами

O, B, A, F, G, K, M,

причем каждую группу — спектральный класс — часто разбивают на десять подклассов, обозначая их арабскими цифрами от 0 до 9, которые ставят после обозначения класса

A0, A1, A2, ..., A9, F0, F1, ...

То обстоятельство, что обозначения спектральных классов не следуют в алфавитном порядке, является результатом многих изменений, введенных уже после реализации первого проекта; а именно, некоторые классы приходилось переставлять местами, иные — удалять.

В основу гарвардской классификации положен *линейчатый спектр* звезды; точнее говоря, оценки относительных интенсивностей раз-

ных линий, чаще всего линий поглощения, в спектре звезды данного класса. Хотя непрерывный спектр звезд также изменяется при изменении спектрального класса, следовательно, он мог бы быть критерием спектральной классификации, однако, по многим причинам, этим критерием не пользуются.

а) Прежде всего потому, что в видимой части спектра горячих звезд довольно значительные изменения температуры вызывают очень небольшие изменения непрерывного спектра; следовательно, в области высоких температур классификация, основанная на непрерывном спектре, была бы весьма неточна.

б) Очень часто непрерывный спектр звезд не согласуется с законами излучения абсолютно черного тела. Причиной этого несоответствия может, например, быть присутствие в спектре звезды молекулярных полос, особенно в спектре сравнительно холодных звезд. Межзвездное покраснение также может сильно исказить непрерывный спектр звезды и быть источником многих недоразумений при классификации, основанной на непрерывном спектре звезд.

в) С чисто практической точки зрения линейчатый спектр имеет много преимуществ перед непрерывным. Глазомерные оценки линейчатого спектра очень быстры и во многих случаях не требуют никаких объективных измерений, тогда как оценки непрерывного спектра „на глаз“ вряд ли вообще имели бы какое-нибудь значение из-за большой неточности такого рода оценок. Оценки линейчатого спектра звезд „на глаз“ настолько точны, что этим способом пользуется большинство астрономов, работающих в области звездной астрономии, сравнивая спектр каждой звезды со спектрами некоторых звезд сравнения.

Следует помнить, однако, что при таком методе классификации звезд неизбежно должны существовать систематические „личные“ ошибки наблюдателей; эти ошибки следует выявлять путем сравнения результатов, полученных разными наблюдателями. Хотя ошибки эти, вообще говоря, малы, но тем не менее их следует иметь в виду и по возможности устранять, особенно в статистических работах.

На основании многих астрофизических исследований известно, что химический состав звездных атмосфер незначительно отличается от некоторого среднего состава для типичных представителей данного спектрального класса и даже от всех вообще звезд. Следовательно, характер спектра, в первую очередь, зависит только от температуры и давления, господствующих в атмосфере звезды. Но давление играет второстепенную роль по сравнению с температурой, и потому можно принять, что различия в спектрах звезд различных спектральных типов в основном обусловлены различием температур поверхностей звезд. Однако, иногда различия давлений могут вызывать некоторые различия в спектральной классификации звезд, имеющих одинаковую температуру; такого рода неоднозначность действительно наблюдается среди звезд тех классов, в которых имеется разделение

на гиганты и карлики. Неодинаковость давлений является причиной того, что спектры гигантов и карликов, имеющих одинаковую температуру, несколько различны. Иначе говоря, гиганты и карлики, принадлежащие к одному спектральному классу или подклассу, имеют несколько различную температуру.

Таким образом, гарвардская классификация, о которой все время идет речь, является в принципе классификацией одномерной и непрерывной. Первое означает, что место звезды в этой классификации однозначно определяется температурой. Второе же определение указывает на то, что между двумя спектральными классами или подклассами существует плавный переход, т. е., что принципиально в классификации нет никаких ограничений, из-за которых звезды не могли бы занимать всех промежуточных положений между двумя произвольными классами или подклассами.

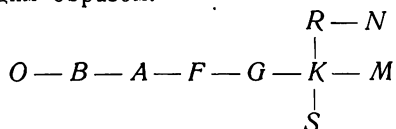
Гарвардская классификация начинается с самых горячих звезд класса *O*, в спектре которых видны только линии поглощения нейтрального водорода и гелия, а также ионизованного гелия. Часто одновременно с линиями поглощения заметны эмиссионные линии других элементов. В классе *B* самыми интенсивными линиями также являются линии водорода и гелия; наряду с ними видны более слабые линии однократно и двукратно ионизованного кислорода и азота, а также более слабые линии кремния и углерода. Спектры звезд, принадлежащих к классу *A*, уже совсем не содержат линий гелия; зато линии водорода достигают максимальной интенсивности. Как правило, в спектрах звезд этого класса не наблюдается эмиссионных линий; видны только сильные линии поглощения водорода и более слабые линии многих металлов.

В более поздних классах постепенно линии водорода становятся все более слабыми, а линии металлов усиливаются. Итак, в спектрах звезд класса *F*, кроме многих линий других металлов, хорошо видны две сильные линии ионизованного кальция; линии *H* и *K*. Типичным представителем звезд класса *G* является Солнце, в спектре которого водородные линии уже не выделяются на фоне множества других линий металлов. В спектрах звезд класса *G* впервые наблюдаются молекулярные полосы (полоса Свана, обязанный своим происхождением присутствию молекулы углерода C_2 в атмосфере звезд этого класса).

Спектр звезд класса *K* содержит множество металлических линий и наряду с ними довольно сильную полосу окиси титана, интенсивность которой быстро возрастает по мере перехода к звездам более поздних подклассов. Эта полоса является самой интенсивной в спектре звезд данного класса; кроме нее видно большое число более слабых линий металлов, а линии *H* и *K* едва заметны.

В области классов *K—M* обнаружена своего рода неполноценность гарвардской классификации, а именно: исследователи открыли сравнительно небольшое число звезд со спектрами, вообще говоря,

похожими на спектры звезд, принадлежащих к классам K и M , но, однако, отличающимися от спектров нормальных звезд указанных классов тем, что вместо полос окиси титана в спектрах этих звезд появляется полоса окиси циркония (ZrO) или молекулы углерода (C_2). Первая группа звезд классов K и M обозначается буквой S и называется циркониевыми, вторую же группу обозначают буквами $R-N$ и называют углеродными звездами. В соответствии с указанными особенностями гарвардская классификация была несколько модифицирована следующим образом:



Тем читателям, которых интересуют более подробные критерии спектральных классов и подклассов, мы рекомендуем специальную литературу ¹⁾.

Ниже приводится таблица, содержащая данные о температурах T , показателях цвета CI и болометрических поправках Δ звезд, принадлежащих к различным спектральным классам (табл. 1).

Таблица 1

ТЕМПЕРАТУРА T , ПОКАЗАТЕЛИ ЦВЕТА CI И БОЛОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОПРАВКИ ЗВЕЗД
РАЗЛИЧНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАССОВ
(по данным Койпера и Паренаго)

Класс	T	CI	Δ	Класс	T	CI	Δ
$O5$	$50\,000^\circ K$	$-0^m,50$	—	$dK5$	3900	$+1^m,08$	$-0,85$
$B0$	21 000	$-0,50$	$-2^m,70$	$dM0$	3600	$+1,3$	$-1,43$
$B5$	15 500	$-0,40$	$-1,58$	$dM5$	3000	$+1,8$	$-3,1$
$A0$	10 700	$-0,15$	$-0,72$	$gG0$	5200	$+0,58$	$-0,25$
$A5$	8 500	0,00	$-0,31$	$gG5$	4600	$+0,76$	$-0,39$
$F0$	7 500	$+0,12$	$-0,09$	$gK0$	4200	$+1,02$	$-0,54$
$F5$	6 500	$+0,24$	$-0,00$	$gK5$	3500	$+1,42$	$-1,35$
$dG0$	6 000	$+0,38$	$-0,06$	$gM0$	3400	$+1,44$	$-1,55$
$dG5$	5 400	$+0,64$	$-0,10$	$gM5$	2800	$+1,48$	$-3,4$
$dK0$	4 800	$+0,87$	$-0,11$				

Заметим, кстати, что современная спектральная классификация базируется главным образом на фотографической части спектра, т. е.

¹⁾ Принятая гарвардская классификация подробно описана в книге Курс астрофизики и звездной астрономии, т. I, М.—Л. 1951, стр. 293, и также в *Trans. Int. Astron. Union*, 5, 180 (1935).

на той его части, которую регистрирует несенсибилизированная фотографическая пластинка (3900—5000 Å). Это ограничение вызвано, конечно, практическими условиями наблюдений.

Как уже упоминалось, линейчатый спектр звезды зависит, в первую очередь, от ее температуры, а затем уже от давления в атмосфере звезды. В атмосферах звезд, принадлежащих к классам *O*, *B*, *A* и *F*, нет больших различий в давлении. В звездах же более поздних классов установлены резкие различия в давлениях, обусловившие разделение этих звезд на две группы — на гиганты и карлики; более высокое давление, естественно, имеет место в атмосферах карликов, а в атмосферах гигантов давление значительно ниже. Чтобы разделить оба эти случая, уже давно в спектральную классификацию введены некоторые добавочные обозначения, связанные с давлением в атмосфере звезды.

Сначала довольствовались разделением каждого спектрального класса на три группы. При таком разделении звезды, обладающие самым низким давлением и обнаруживающие вследствие этого очень резкие линии в спектре, обозначаются буквой *c* перед спектральным классом и называются сверхгигантами (например, *cF2* или *cK5* обозначают сверхгигантов соответствующих спектральных классов). Вторая группа — так называемых гигантов — обозначается буквой *g* (например, *gG0*, *gK0*). Критерием, на основании которого звезды причисляются к этой группе, является отношение интенсивности линий ионизованных элементов к нейтральным или же отношение интенсивности других пар линий, „чувствительных“ к изменению давления. Звезды, для которых отношение этих линий указывает на сравнительно высокое давление, обозначаются буквой *d* и называются карликами; к ним принадлежит, например, Солнце, которое в этой спектральной классификации обозначается *dG4*.

18. Двумерная классификация Моргана, Кинана и Келльман. Группа американских астрономов во главе с Морганом в 1943 г. предложила более точную спектральную классификацию, улучшенную в смысле более подробных критериев давления, господствующего в звездных атмосферах, а, следовательно, и в смысле критериев абсолютных величин звезд, ибо последние связаны с давлением в атмосферах звезд. Вопрос спектральных критериев абсолютных величин звезд был предметом тщательных исследований целой плеяды шведских и американских астрономов. Морган применял наиболее наглядные из существующих критериев, которые могли быть использованы при глазных оценках и не требовали довольно трудоемких спектрофотометрических измерений снимков спектров.

В классификации Моргана, Кинана и Келльман каждый спектральный подкласс делится по абсолютной величине еще на пять групп, обозначаемых римскими цифрами I, II, ..., V, причем цифра I указы-

вает на то, что звезда — сверхгигант, II — яркий гигант, III — нормальный гигант, IV — субгигант и V — карлик, а вернее, указывает на то, что звезда принадлежит к главной последовательности на диаграмме спектр — светимость (диаграмме Герцшпрунга — Рассела).

Для удобства практического применения предложенной классификации авторы составили каталог типичных спектров звезд различных спектральных классов и абсолютных величин ¹⁾.

19. Попытки введения новых классификаций. Недавно группа французских астрономов во главе с Барбье и Шалонжем предложила новую спектральную классификацию звезд, радикально отличающуюся от обеих предыдущих. Главным в этой классификации является введение еще одного параметра, определяющего химический состав звезд, кроме двух параметров — температуры и давления, которые в классификации Шалонжа и Барбье характеризуются иным способом, чем в предыдущих схемах. Введение этой классификации может сыграть большую роль как в астрофизике, так и во многих вопросах космогонии ²⁾.

Главной идеей новой классификации является определение относительного содержания водорода в атмосфере звезды, от которого зависит относительная высота бальмеровского „скачка“ на границе серии Бальмера в спектре звезды.

Пусть кривая на рис. 14 является кривой распределения интенсивности в спектре звезды около границы серии Бальмера ($\lambda = 3650 \text{ \AA}$). Отрезок D , равный разности уровней до и после границы серии, является характеристикой бальмеровского скачка. Величина этого отрезка принята в качестве

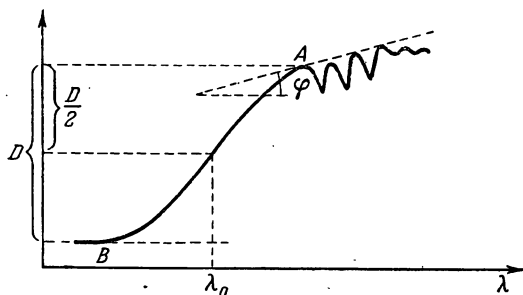


Рис. 14.

одного из параметров, определяющих спектральный тип звезды, зависящий, в свою очередь, от относительного содержания водорода в атмосфере звезды.

Вторым параметром является длина волны λ_0 , соответствующая той точке, в которой интенсивность спектра уменьшается на половину величины D . Величина λ_0 зависит от давления в атмосфере звезды. Дело в том, что в спектрах звезд с плотными атмосферами все линии шире, чем у звезд с разреженными атмосферами. Вследствие этого линии, ближайшие к границе бальмеровской серии, настолько размыты, что „начало“ скачка передвинуто в сторону длинных волн по сравнению со спектрами звезд с разреженными

¹⁾ An Atlas of the Stellar Spectra, University of Chicago Press, 1943.

²⁾ Шалонж Д., АЖ, 33, 490 (1956).

атмосферами. Таким образом, величина λ_0 является мерой давления, господствующего в атмосфере звезды.

В качестве третьего параметра этой трехмерной классификации берется средний градиент непрерывного спектра φ в его фотографической части; этот градиент является мерой температуры звезды.

В настоящее время многие астрономы пытаются на практике применять трехмерную спектральную классификацию французских астрономов к звездам. Трудно угадать, насколько эта классификация окажется применимой на практике и будет ли возможным использовать ее в звездной астрономии в большом масштабе. Может случиться, что трехмерная классификация окажется лишь интересной попыткой, применимой только при изучении некоторых специальных проблем.

Очень часто нельзя определить спектральный класс рассматриваемых звезд, например, потому, что эти звезды очень слабы или же расположены так близко одна от другой, что их спектры налагаются друг на друга. В этих случаях вместо спектральных классов используются показателями цвета звезд; известно, что показатель цвета является однозначной функцией температуры, а, следовательно, в первом приближении — однозначной функцией спектрального класса звезды. Предполагая, что найденная для ближайших звезд зависимость между показателем цвета и спектральным классом справедлива также и для рассматриваемых звезд ¹⁾, можно определить спектральные классы этих звезд на основании их наблюдаемых показателей цвета. В этих случаях полученные результаты часто обозначают соответствующими малыми буквами; так, например, запись $b5$ или $f2$ указывает, что показатели цвета данных звезд соответствуют спектральному классу $B5$ или $F2$. Как известно, для звезд поздних спектральных классов нарушается однозначная зависимость между показателем цвета и спектральным классом, поэтому в этих случаях необходимо знать, имеем ли мы дело с гигантом или карликом. Однако, различие показателей цвета гигантов и карликов, принадлежащих к одному спектральному классу, довольно мало, так что во многих случаях им можно пренебречь.

Во всех указанных случаях надо пользоваться показателями цвета, не искаженными влиянием межзвездного поглощения. В противном случае может оказаться, что мы отнесем звезду к более позднему спектральному классу, чем это имеет место в действительности, так как межзвездное поглощение увеличивает показатели цвета звезд и, таким образом, как бы перемещает их в сторону более поздних спектральных классов.

¹⁾ Обращаем внимание читателей на то, что это предположение может часто быть ошибочным. Недавно обнаружено, что для звезд, принадлежащих к шаровым скоплениям, имеет место иная зависимость между показателями цвета и спектральными классами, чем для звезд в окрестностях Солнца [см. Baun W. A., *Astron. Journ.*, 57, 222 (1952); Sandage A. R., *Astron. Journ.*, 58, 61 (1953); 59, 162 (1954)].

§ 7. Классификация различных космических объектов

20. Скопления и туманности. Кроме одиночных и двойных звезд звездная астрономия занимается изучением звездных скоплений, туманностей и галактик.

Звездные скопления — это более или менее тесные группы звезд. На основании внешнего вида скоплений и численности звезд, входящих в них, звездные скопления делят на *рассеянные*, содержащие сравнительно мало звезд и имеющие неправильную форму, и *шаровые*, содержащие большое число звезд, сильно сконцентрированных в центре скопления, и обладающие хорошо заметной шаровой симметрией. Известны также так называемые *движущиеся* скопления звезд, отличающиеся от произвольно выбранных звезд на небе одинаковым пространственным движением.

Образованиями, похожими на скопления, являются звездные *ассоциации*. Этим словом мы определяем весьма компактные группы звезд, имеющих похожий спектральный тип, одинаковые свойства переменности или же другие общие физические свойства. Звездные ассоциации не легко отличить от звезд фона, однако их присутствие можно обнаружить статистическими методами.

Туманностями мы называем сгущения или части сгущений межзвездной материи. С точки зрения наблюдений, различают *светлые* туманности, наблюдаемые непосредственно, и *темные*, которые можно видеть лишь только тогда, когда они наблюдаются на фоне какого-нибудь звездного сгущения или светлой туманности. В других случаях о существовании темных туманностей становится известно, например, на основании подсчетов звезд или из наблюдений межзвездных линий в спектрах звезд, лежащих за данной туманностью.

В настоящее время мы убеждены в том, что между темными и светлыми туманностями нет принципиальных различий и что светлые туманности — это та же материя, но только освещенная светом соседней звезды. Поэтому часто области темных туманностей, освещенные звездами, описываются как отдельные светлые туманности.

Среди светлых туманностей различают два типа: *пылевые*, спектр которых не отличается от спектра освещающей звезды, и *газовые* туманности, обладающие эмиссионным (линейчатым) спектром. Такое разделение является только феноменологическим, так как до сих пор неизвестно, есть ли какое-либо существенное различие между газовыми и пылевыми туманностями или различие их спектров вызвано разным воздействием света звезд на материю, заключенную в принципиально одинаковых космических телах, которые называются туманностями. Эта проблема, однако, относится к астрофизике, и поэтому мы не будем больше ею заниматься.

Планетарные туманности, образующие отдельную группу, отличаются от предыдущих тем, что имеют круглую форму, и в их геометрическом центре, как правило, находится освещающая звезда

(фото II). К другой изолированной группе относятся так называемые *цирусные* туманности (фото I), отличающиеся особой структурой и похожие на облака, известные в метеорологии под тем же названием.

21. Галактики. Около 50 лет тому назад было установлено, что объекты, известные ранее под названием *внегалактических* туманностей (спиральных, эллиптических и неправильных), в сущности, являются объектами, похожими на нашу Галактику, т. е. объектами, состоящими из звезд и межзвездной материи; масса этих объектов, а также распределение звезд и межзвездной материи в них похожи

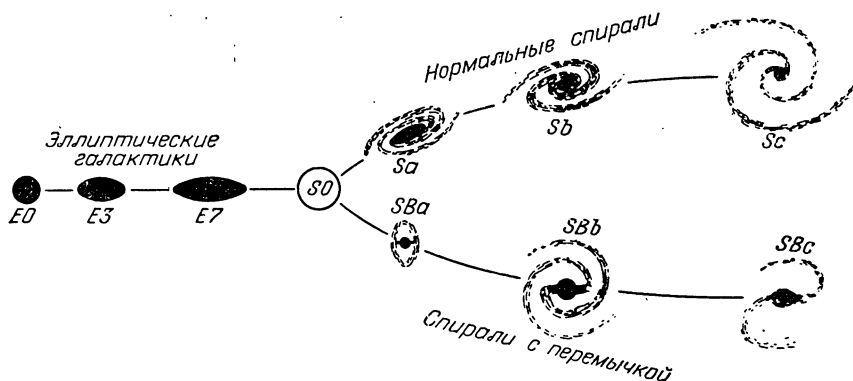


Рис. 15.

на массу и распределение тех же объектов в нашей Галактике. Полное число звезд в этих туманностях такого же порядка, как в нашей Галактике. Поэтому астрономы решили переименовать эти объекты, чтобы избежать слова туманность и называть их галактиками. Все же многие до сих пор пользуются старыми названиями: спиральные туманности, эллиптические туманности.

На основании легко обнаруживаемых различий вида и структуры галактики разделены на группы, причем первоначально казалось, что это разделение имеет эволюционный смысл. Однако, исследования последних лет не подтвердили этих предположений, и потому сейчас эту классификацию считают только лишь феноменологической.

Все галактики делят на три главных класса: эллиптические, спиральные и неправильные.

Эллиптические галактики подразделяют на группы по степени сжатия их проекции на небесной сфере. Сжатие определяется отношением $(a - b)/a = \epsilon$, где a и b суть большая и малая полуоси эллипса, который является проекцией галактики на небесную сферу, причем пишут только десятые доли этого отношения. Итак, E1 обозначает

группу галактик, форма которых соответствует $\epsilon = 0,1$; наиболее сжатые эллиптические галактики принадлежат к типу E7.

Вторую группу — спиральные галактики — делят на две параллельные подгруппы: нормальные галактики, обозначаемые буквой S, и галактики с перемычкой (barred), которые обозначают SB. В каждой подгруппе различают три класса, отличающиеся отношением размеров ядра галактики к размерам спиральных ветвей.

К классу *a* принадлежат галактики с едва заметными спиральными ветвями, к классу *b* — галактики с явно выраженными спиральными ветвями и, наконец, в классе *c* находятся галактики, размеры спиральных ветвей которых значительно превышают размеры ядра.

Автор этой классификации Хаббл ввел еще класс S0, являющийся чем-то переходным от группы эллиптических галактик к спиральным. У объектов этого класса сильно сплюсненное ядро должно быть окружено короной звезд, не обнаруживающих спиральной структуры. Схема классификации Хаббла дана на рис. 15, заимствованном из его работы.

Третьей группой являются так называемые неправильные галактики, отсутствующие на представленной схеме; эти галактики обозначают буквой I (irregular).

§ 8. Параллаксы звезд

22. Тригонометрические параллаксы. Тригонометрические параллаксы играют очень важную роль во многих исследованиях звездной астрономии. Поэтому, несмотря на то, что большинство читателей знакомо с этими вопросами из элементарных курсов астрономии, нам кажется полезным изложить их в данной книге. Одним из главных условий успешного развития всей звездной астрономии и разрешения многих отдельных проблем является возможность точного определения расстояний звезд и других космических тел.

Известно, что расстояния ближайших к Солнцу звезд во много тысяч раз больше их средних диаметров. Это значит, что механическое взаимодействие звезд должно быть очень незначительным и, следовательно, их движение должно быть прямолинейным и равномерным, если, конечно, рассматривать его в системе координат, движущейся вместе с какой-либо звездой, например, с Солнцем.

Переместим систему координат из центра Солнца в центр Земли. В этом случае к равномерному и прямолинейному движению звезды прибавится еще движение центра Земли вокруг Солнца, т. е. движение принятой системы координат. Предположим, что это движение происходит по кругу с радиусом a , равным среднему расстоянию Земли от Солнца, и с периодом, равным звездному году. Следовательно, каждая звезда участвует в двух движениях — прямолинейном и равномерном движении, а также в движении по кругу, плоскость которого параллельна плоскости эклиптики. Проектируя оба движения

на плоскость, касательную к небесной сфере (рис. 16) в той точке, где находится звезда, получим прямолинейное движение и движение по эллипсу, большая полуось которого будет равна a , малая же — равна $a \sin \beta_0$, причем β_0 является эклиптической широтой звезды. Действительно, угол β_0 равен углу наклона плоскости кругового движения звезды к плоскости проекции, и, следовательно, проекция круга на эту плоскость будет эллипсом с малой полуосью, равной $a \sin \beta_0$.

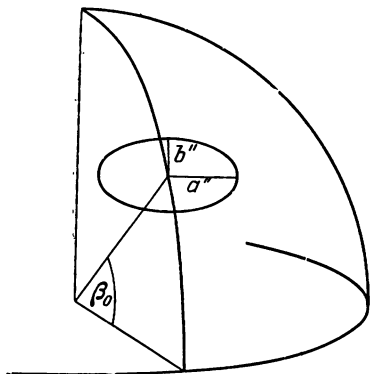


Рис. 16.

Видимое из центра Земли движение звезды можно представить в эклиптической системе координат уравнениями

$$\lambda - \lambda_0 = \mu_\lambda t + \frac{a}{r} \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

$$\beta - \beta_0 = \mu_\beta t + \frac{a}{r} \sin \beta_0 \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

где t — время; r — расстояние звезды от Солнца; $\frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость движения Земли по орбите и, следовательно, наблюдаемого перемеще-

ния звезды по эллипсу; μ_λ и μ_β — компоненты собственного движения звезды в радианах в год в эклиптической системе координат; λ_0 и β_0 — координаты центра эллипса, по которому движется звезда, если $\mu_\lambda = \mu_\beta = 0$.

Выражение a/r равно синусу угла, под которым со звезды виден радиус земной орбиты, перпендикулярный к лучу зрения; этот угол, выраженный в секундах дуги, называется годичным параллаксом звезды

$$\pi = \frac{a}{r}.$$

Следовательно, можно переписать уравнения движения звезды в следующем виде, выражая величины в угловых секундах и звездных годах,

$$\lambda - \lambda_0 = \mu_\lambda'' t + \pi \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad \beta - \beta_0 = \mu_\beta'' t + \pi \sin \beta_0 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Неизвестными здесь являются λ_0 , β_0 , μ_λ'' , μ_β'' и π . Чтобы найти их, нужно иметь по крайней мере три положения звезды в какой-либо системе координат, например, в экваториальной, которой обычно пользуются при таких наблюдениях. Это значит, что для определения годичного параллакса звезды необходимо произвести не менее трех определений положения изучаемой звезды, чтобы при этом получить также ее собственное движение.

Обратная теорема не была бы справедлива. Для определения собственного движения какой-либо звезды нет необходимости параллельно определять ее годичный параллакс и, следовательно, можно довольствоваться только двумя наблюдениями при условии, что между ними пройдет время, равное кратному числу звездных лет. Тогда вторые члены в уравнениях движения будут равны и сократятся при их решении.

Из сказанного следует, что для определения годичного параллакса звезды можно измерять только одну из ее координат. Выгоднее, конечно, определять λ , потому что в уравнении, содержащем λ , неизвестный коэффициент при периодическом члене равен π , т. е. больше, чем во втором уравнении, где он равен $\pi \sin \beta_0$.

На практике обычно измеряют изменения прямого восхождения и по ним определяют годичные параллаксы звезд.

Параллаксы, полученные описанным методом, называются тригонометрическими в отличие от параллаксов, определенных иными методами, с которыми мы познакомимся на следующих страницах.

К сожалению, абсолютные измерения прямых восхождений, т. е. измерения с помощью меридианного круга или пассажного инструмента, настолько неточны, что не могут быть использованы при определении тригонометрических параллаксов, и потому до сих пор пользуются исключительно *относительными* измерениями положений избранной звезды по отношению к соседним звездам. Таким образом, определяется разность между параллаксом данной звезды и средним параллаксом звезд сравнения. Независимыми методами, о которых речь будет ниже, определяют этот средний параллакс звезд сравнения и, прибавляя его к полученному относительному параллаксу, получают в конце концов абсолютный параллакс данной звезды ¹⁾. Эти величины публикуются в разных каталогах ²⁾.

Средняя ошибка определения тригонометрических параллаксов колеблется между $\pm 0",013$ и $\pm 0",004$ в зависимости от блеска звезды, инструмента и числа произведенных на нем наблюдений. Большая средняя ошибка определения параллакса часто является причиной отрицательных параллаксов; так, например, если в действительности параллакс звезды равен $\pm 0",008$, а средняя ошибка измерений также равна $\pm 0",008$, то, как известно из теории ошибок, для 16% этих звезд получим отрицательные параллаксы.

Индивидуальные отрицательные параллаксы не имеют, конечно, большого практического значения, как и все вообще измерения, в которых величина ошибки достигает самой измеряемой величины. Однако, при статистических исследованиях необходимо учитывать звезды с отрицательными параллаксами; в противном случае полученные

¹⁾ Методы определений тригонометрических параллаксов довольно подробно описаны в книге Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 33.

²⁾ Самым полным каталогом тригонометрических параллаксов является Jenkins L. F., General Catalogue of Trigonometric Parallaxes, Yale University Observatory, 1952.

результаты будут искажены влиянием селекции. В качестве примера приведем результаты исследования эмпирической зависимости между тригонометрическими и спектральными параллаксами звезд (см. следующий параграф). Эта зависимость может нас интересовать, между прочим, и потому, что при определении спектральных параллаксов не учитывалось межзвездное поглощение, которое совсем не влияет на тригонометрические параллаксы. В. Дзевульский ¹⁾ получил эту зависимость, определяя наивероятнейшее значение спектрального параллакса для данного интервала тригонометрических параллаксов, с учетом, конечно, также и отрицательных параллаксов. Результаты, касающиеся одного из каталогов спектральных параллаксов, даны

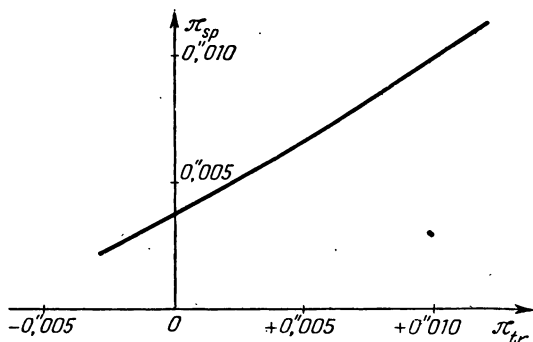


Рис. 17.

на рис. 17 (для других каталогов зависимость, вероятно, получилась бы несколько иной).

Зная параллакс звезды π в угловых секундах, можно вычислить ее расстояние r от Солнца

$$r = \frac{206\,265}{\pi} a$$

в тех же единицах, в которых выражено a — среднее расстояние Земли от Солнца ($149,5 \cdot 10^6$ км). Приняв это расстояние за единицу, получим

$$r = \frac{206\,265}{\pi} \text{ а. е.}$$

Астрономическая единица слишком мала для измерения расстояний звезд, поэтому она очень редко используется в звездной астрономии. В свое время группа шведских астрономов во главе с Шарлье пыталась ввести в звездную астрономию новую единицу измерения расстояний, точнее говоря, они предложили назвать 10^6 а. е. *сирометром* и этой единицей измерять расстояния звезд. Однако, это

¹⁾ *Biuletyn Obs. Astr. U. M. K. w Torunlu*, 10, 5 (1951).

предложение вскоре было отвергнуто из-за его непрактичности. Перевод измеренных этой единицей расстояний в метрическую систему или вычисление по ним годичного параллакса требует введения довольно неудобных числовых коэффициентов. Эта единица была бы удобна только в тех случаях, когда одновременно рассматриваются вопросы планетной и звездной астрономии; однако, таких общих проблем почти совсем нет, за исключением тех редких специальных задач, в которых наша планетная система сравнивается с двойными звездными системами.

Чаще всего встречается необходимость перевода расстояний звезд в годичные параллаксы, и обратно. Поэтому Зеелигер предложил несколько увеличить сирометр так, чтобы соответствующий ему параллакс был равен $0'',200$ (1 сирометру соответствует параллакс, равный $0'',206\,265$). Однако, и это предложение оказалось менее удобным, чем более поздний проект Тэрнэра, который в 1912 г. предложил за единицу расстояний принять расстояние, соответствующее годичному параллаксу, в точности равному $1''$. Название этой единицы „парсек“ получилось от соединения двух слов: параллакс и секунда (символы *pc*, *ps*, *рс*).

Таким образом, расстояние в парсеках равно обратной величине параллакса, выраженной в угловых секундах: $r = \pi^{-1}$. Это обстоятельство значительно сокращает многие вычисления. Производной парсека является килопарсек (символы *kpc*, *kps*, *крс*) и мегапарсек (символы *mpc*, *mps*, *мрс*).

Правда, эту единицу грудно связать с метрической системой, а также с астрономической единицей, однако, преимущества ее в актуальных проблемах звездной астрономии заставляют нас забыть об упомянутых недостатках.

Кроме парсека, иногда пользуются еще другой единицей — *световым годом* (символ *ly* от английского *light year*), равной расстоянию, проходимому светом в вакууме за год (один световой год равен $9,46 \cdot 10^{12}$ км = $0,31$ пс, т. е. около $1/3$ пс). Эта единица обладает всеми недостатками парсека, так как она не связана простым соотношением ни с километром, ни с астрономической единицей, а кроме того, не имеет никаких преимуществ последнего. Поэтому световым годом почти не пользуются, за исключением популярной астрономии, в которой эта единица считается более наглядной, чем парсек. Нам кажется, что здесь она не скоро уступит место другим единицам.

Идеалом была бы такая единица, которая, будучи наглядной, одновременно была бы удобной в смысле вычислений. Близкой к этому идеалу была единица, равная 10^{13} км, предложенная недавно Б. Линдбладом. Автор назвал ее „гершелем“. Эта единица просто связана с метрической системой, кроме того, она только на 5% больше светового года и, следовательно, во многих случаях можно было бы ее отождествлять с этой распространенной единицей. Однако предложение Линдблада было отвергнуто, по всей вероятности, потому, что парсек, несомненно, является наиболее удобной единицей в звездной астрономии, а при изучении вопросов звездной астрономии мало кого интересует единица, связанная с метром.

Единица, связанная с метром, может интересовать только астрофизиков, занимающихся главным образом строением звезд и межзвездной материи.

Однако, при исследовании внутреннего строения звезд не было обычно никакой надобности одновременно рассматривать и строение звездных систем. Поэтому до сих пор никому не приходилось сравнивать сантиметр с парсеком, и, таким образом, никому не мешало то обстоятельство, что парсек и сантиметр не связаны простым соотношением.

Только в одной области астрономии — в космогонии — часто появляется необходимость рассмотрения вопросов звездной астрономии в совокупности с вопросами физического состояния материи в звездах. Авторы работ по космогонии обычно большие расстояния выражают в парсеках и одновременно в метрической системе. Кроме этого, в некоторых специальных гравитационных проблемах, как в классических, так и релятивистских, также прибегают к метрической системе. Однако, этих проблем сравнительно немного; зато очень часто приходится вычислять расстояния на основании известных параллаксов звезд и потому в астрономии, по всей вероятности, еще некоторое время удержится единица, не связанная непосредственно с метром. В этом отношении астрономия является редким исключением среди других точных наук. Можно, однако, предвидеть, что рано или поздно астрономия порвет со своей традиционной системой единиц и введет гершель или другую аналогичную единицу длины; это будет тогда, когда развитие космогонии и более тесное сотрудничество астрономии с другими точными науками заставит астрономов пойти на этот шаг.

В дополнении 10 (в конце книги) приводится таблица сравнения различных единиц длины, используемых в астрономии.

23. Спектральные параллаксы звезд. В этом пункте будет рассмотрен метод определения расстояний звезд, который правильнее было бы назвать методом определения абсолютных величин звезд, а не расстояний, ибо расстояния определяются здесь на основании полученных абсолютных величин изучаемых объектов. Следовательно, более правильным было бы называть этот метод методом спектрального определения абсолютных величин звезд. Тем не менее старое название сохранилось до сих пор, и не будем его изменять.

Из астрофизических данных известно, что вид спектра звезды определяется главным образом двумя параметрами: температурой и давлением в атмосфере звезды (см. п. 17). Незначительные различия химического состава не играют решающей роли, поэтому в первом приближении можно ими пренебречь, хотя при более подробном изучении спектров мы будем учитывать также и это обстоятельство.

Рассматривая звезды, принадлежащие к одному и тому же спектральному классу и, следовательно, практически имеющие одинаковую температуру, можно обнаружить некоторые различия их спектров, которые возникают вследствие различия давлений в атмосферах этих звезд. Различия эти в свою очередь являются функциями абсолютных величин звезд, так как в звездах гигантах давление ниже, чем в звездах карликах.

Различия в спектрах проявляются в первую очередь в относительных интенсивностях линий ионизованных и нейтральных элементов. Очевидно, что в сильно разреженной атмосфере вероятность рекомбинации ионов значительно больше, чем в плотной атмосфере

при той же температуре, поэтому относительное содержание ионов в атмосферах звезд гигантов больше, чем в атмосферах звезд карликов.

Это обстоятельство было использовано астрофизиками для определения абсолютных величин звезд, принадлежащих к одному и тому же спектральному классу, причем эти определения базируются на чисто эмпирических зависимостях.

Эти зависимости устанавливаются следующим образом: выбирают группу звезд с известными абсолютными величинами, принадлежащих к одному и тому же спектральному классу, и на основании спектрофотометрических исследований спектров этих звезд подбирают пары линий: одну, принадлежащую ионизованному элементу, другую — нейтральному, отношение интенсивностей которых „чувствительно“ к изменению абсолютной величины. Точнее говоря, это отношение является быстро возрастающей или убывающей функцией абсолютной величины звезды. Кроме того, желательно, чтобы выбранные линии находились в части спектра, легко доступной исследованию, и не сливались бы с соседними спектральными линиями.

Отношение интенсивностей выбранной таким образом пары линий мы называем критерием абсолютной величины M звезды. Определив эмпирическим путем зависимость

$$k = f(M),$$

можно использовать потом эту зависимость для определения абсолютной величины M по известным значениям k .

Зная же абсолютную величину M и видимую величину m , можно легко вычислить параллакс звезды π без учета межзвездного поглощения по формуле

$$M - m = 5 \log \pi + 5.$$

Для того, чтобы учесть влияние поглощения света, необходимо знать функцию $A(\pi)$, выражающую зависимость между межзвездным поглощением и параллаксом звезды или ее расстоянием. Решая уравнение

$$M - m = 5 \log \pi + 5 - A(\pi)$$

относительно π , получаем искомый параллакс звезды.

Итак, совершенно очевидно, что описанным методом непосредственно определяется абсолютная величина звезды; параллакс же вычисляется на основании добавочных данных относительно оптических свойств той среды, через которую проходит луч света. Следовательно, спектральные параллаксы могут содержать добавочные систематические ошибки, связанные с межзвездным поглощением, и мы обращаем на это обстоятельство внимание всех астрономов, которые будут пользоваться в работах по звездной астрономии спектральными параллаксами.

Главную работу по выбору пар спектральных линий, „чувствительных“ к изменению абсолютной величины, проделала группа шведских астрономов во главе с Б. Линдбладом; они стремились выбрать такие линии, которые можно было бы использовать при определении абсолютных величин звезд по спектрам с малой дисперсией, полученным с объективной призмой.

Для разных спектральных классов были выбраны различные пары линий, так, например, для звезд ранних спектральных классов использовалась линия К (Ca II) и одна из линий водорода, H_γ или H_δ . В звездах более поздних спектральных классов удобным критерием является отношение линии ионизованного гелия $\lambda 4200 \text{ \AA}$ к сильной линии $\lambda 4227 \text{ \AA}$ нейтрального кальция.

Иногда на практике оказывается более удобным применение некоторых функций интенсивности двух нейтральных линий, которые сильно зависят от давления в атмосфере. Таким именно критерием является выражение $H_\gamma = \frac{1}{3} (2H_\gamma + 0,9H_\delta)$, где H_γ и H_δ обозначают интенсивности соответствующих водородных линий. Для звезд более поздних спектральных классов хорошие результаты получаются при использовании отношения интенсивности полосы циана $\lambda 4180 \text{ \AA}$ к выбранному участку непрерывного спектра.

Применение этих критериев к спектрам малой дисперсии дает результаты со средними ошибками порядка $\pm 0^m,8$. Гораздо меньшие ошибки получаются при определении абсолютных величин звезд по спектрам с большей дисперсией, т. е. по спектрам, полученным с помощью щелевых спектрографов. В этих случаях средняя ошибка равна $\pm 0^m,3$, с такими ошибками определены, например, абсолютные величины около 7000 звезд на обсерватории Маунт Вилсон. К спектрам, полученным с объективной призмой и с щелевым спектрографом, применяются, вообще говоря, различные критерии.

Зная среднюю ошибку определения абсолютных величин M , можно вычислить среднюю ошибку полученных параллакс звезд,

$$dM = 2,17 \frac{d\pi}{\pi},$$

и, следовательно, средняя ошибка параллакса $d\pi$

$$d\pi \approx 0,5 \pi dM.$$

При использовании спектров с большой дисперсией эта ошибка составляет около 15%, а с малой — около 40%.

Несколько лет тому назад начались попытки использования описанного принципа определения абсолютных величин звезд в интегральной фотометрии в узких участках спектра, содержащих специально выбранные линии или полосы. Различия интенсивностей этих

линий или полос должны вызывать соответствующие различия интегральных величин данной звезды в двух фотометрических системах, если, конечно, области чувствительности этих систем достаточно узки. При этом основная трудность связана с разработкой соответствующих фильтров и с необходимостью значительного уточнения измерений интегральных величин звезд, чтобы обнаружить сравнительно небольшие их разности. Первые работы в этой области произвел Беккер, пользуясь методом фотографической фотометрии и комбинируя разные сорта пластинок с соответствующими фильтрами. В настоящее время еще лучшие результаты получил фотозлектрическим путем Стремгрен, употребляя поляризационно-интерференционные фильтры.

24. Средние параллаксы, определенные по собственным движениям звезд. Чтобы кратко изложить основную идею этого метода, вернемся к методу тригонометрических параллаксов (см. п. 22). В этом случае видимые смещения звезд, вызванные годичным движением Земли, являлись мерой расстояния звезд от Солнца.

В описываемом методе вместо годичного движения Земли используется ее движение вместе с Солнцем к апексу (см. п. 4). Измеряя видимые смещения звезд, вызванные этим движением, можно определить расстояние последних, так как угловые смещения звезд обратно пропорциональны их расстояниям от Солнца.

Очень удобным в рассматриваемом методе является то, что видимые смещения звезд увеличиваются с течением времени; вследствие этого можно измерять сравнительно большое угловое расстояние, пройденное звездой за довольно большой промежуток времени. Смещения же, вызванные годичным движением Земли, накапливать нельзя, так как они являются периодическими.

Недостатком метода является наличие у всех звезд, кроме движения, вызванного движением Солнца, еще своего пекулярного движения, которое часто трудно бывает надлежащим образом отделить от параллактического движения. Однако, при некоторых упрощающих предположениях, приняв, например, что пекулярное движение звезд хаотично, можно исключить это движение для сравнительно многочисленной группы звезд и получить „чистое“ параллактическое движение, т. е. вызванное только движением Солнца в направлении апекса. Если параллактическое движение известно, то легко определить среднее расстояние данной группы звезд. Говоря о хаотическом движении, мы имеем в виду сферическое распределение скоростей, т. е. такое распределение, при котором все направления векторов скоростей одинаково вероятны.

Напомним, что пекулярным движением называется движение звезды относительно геометрического центра рассматриваемой группы звезд. На практике пекулярное движение вычисляется как разность между вектором скорости движения звезды и вектором скорости центроида рассматриваемой группы звезд в произвольно выбранной системе координат.

Пусть звезда G (рис. 18) находится на расстоянии $r = \pi^{-1}$ от Солнца, движущегося со скоростью V_0 в направлении апекса A . Пусть V обозначает скорость звезды относительно Солнца. Следовательно,

$$V = V^{(s)} + V_0,$$

где $V^{(s)}$ — скорость пекулярного движения звезды относительно той же группы звезд, по отношению к которой определена скорость Солнца. Разложим каждый из этих трех векторов на три составляющие: первая составляющая направлена по прямой звезда — Солнце, вторая — по касательной к окружности, проходящей через звезду с центром

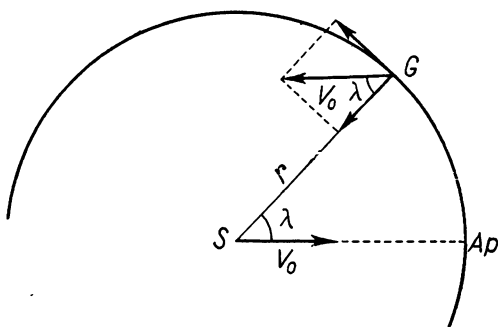


Рис. 18.

в Солнце, плоскость которой проходит через вектор V_0 , третья составляющая направлена по прямой, перпендикулярной к двум предыдущим (на рис. 18 не видна). Первые составляющие являются лучевыми скоростями, две другие — тангенциальными. Компонентами вектора V_0 являются величины, $V_0 \cos \lambda$, $V_0 \sin \lambda$, 0, где λ — угловое расстояние звезды от апекса.

Выразим тангенциальные составляющие векторов V и $V^{(s)}$ через параллакс звезды и компоненты собственного движения, последние обозначим соответственно через v , τ и $v^{(s)}$ и $\tau^{(s)}$. Следовательно, компонентами векторов будут величины

$$\begin{aligned} V & \left(V_r, 4,74 \frac{v}{\pi}, 4,74 \frac{\tau}{\pi} \right), \\ V^{(s)} & \left(V_r^{(s)}, 4,74 \frac{v^{(s)}}{\pi}, 4,74 \frac{\tau^{(s)}}{\pi} \right), \\ V_0 & (V_0 \cos \lambda, V_0 \sin \lambda, 0). \end{aligned}$$

Займемся прежде всего вторыми составляющими. Ясно, что

$$4,74 \frac{v}{\pi} = 4,74 \frac{v^{(s)}}{\pi} + V_0 \sin \lambda.$$

Вычислим средние величины для группы звезд; в этом случае первый член в правой части будет равен нулю

$$\frac{1}{n} \sum 4,74 \frac{v^{(s)}}{\pi} = \frac{4,74}{n} \sum \frac{v^{(s)}}{\pi} = 0,$$

так как, согласно принятой гипотезе о хаотичности пекулярных движений, у нас будет столько же звезд с положительными $v^{(s)}$, сколько и с отрицательными.

В таком случае отклонения v

$$v = v - \frac{V_0 \bar{\pi} \sin \lambda}{4,74}$$

можно рассматривать как ошибки наблюдений и определять неизвестный средний параллакс $\bar{\pi}$ данной группы звезд по формуле

$$\bar{\pi} = \frac{4,74 v \sin \lambda}{V_0 \sin^2 \lambda} \quad (24.1)$$

при условии $[vv] = \min$.

Если нам известны также лучевые скорости звезд данной группы, то можно таким же образом получить

$$V_r = V_r^{(s)} + V_0 \cos \lambda.$$

Чтобы ввести в это выражение средний параллакс $\bar{\pi}$, вспомним, что в случае сферического распределения пекулярных скоростей (равно, как и в случае распределения, имеющего форму поверхностей вращения около оси, касательной к окружности, соединяющей звезду с апексом) можно вместо $V_r^{(s)}$ взять составляющую $4,74 \frac{\tau^{(s)}}{\pi}$ или же равную ей $4,74 \frac{\tau}{\pi}$. Переходя к модулям и вычисляя средние значения, получим

$$|V_r^{(s)}| = |V_r - V_0 \cos \lambda| = 4,74 \frac{|\tau|}{\pi}, \quad \bar{\pi} = 4,74 \frac{|\tau|}{|\bar{V}_r|} \quad (24.2)$$

где $V_r' = V_r - V_0 \cos \lambda$. (Эти величины вычисляются по лучевым скоростям звезд, если известна скорость движения Солнца к апексу.)

Лучевые скорости звезд могут быть использованы для определения среднего параллакса при помощи совершенно другого метода, основанного на существовании в нашей Галактике вращения звезд вокруг ее центра (см. п. 67). Если рассматриваемая группа звезд принимает участие во вращении Галактики, то их лучевые скорости можно представить в виде

$$V_r = A r \sin 2(l - l_0),$$

где V_r — лучевая скорость, освобожденная от влияния движения Солнца в направлении апекса, $\bar{r}$ — среднее расстояние от Солнца группы звезд, A — постоянная, равная $0,020 \text{ км/сек/нс}$, l — галак-

1) Обращаем внимание читателей на то обстоятельство, что на величину $|\tau|$ систематически влияют ошибки наблюдений, увеличивая эту величину; они также увеличивают $|\bar{V}_r|$. Это обстоятельство сильно понижает точность определения параллаксов по формуле (24.2); в то же время мало влияет на точность определения параллаксов по формулам (24.1).

тическая долгота звезды, l_0 — галактическая долгота центра Галактики, равная примерно 328° .

Вследствие наличия больших пекулярных скоростей звезд указанная зависимость не будет точной. Обозначим через v разности вида

$$v = V_r - \bar{A}r \sin 2(l - l_0);$$

величины v можно считать ошибками наблюдений и, следовательно, решая эти уравнения методом наименьших квадратов (при условии $[vv] = \min$), определять неизвестное $\bar{r}$.

Нужно, однако, помнить, что написанная выше зависимость является лишь первым приближением, справедливым только для расстояний r , значительно меньших, чем расстояние Солнца от центра Галактики, т. е. меньших, чем 8 *кпс*. Кроме того, следует заметить, что эта зависимость справедлива только для групп звезд, принадлежащих к так называемой плоской составляющей нашей Галактики (см. п. 76). Поэтому прежде, чем применять ее к конкретным объектам, следует удостовериться, принадлежат ли эти объекты к плоской составляющей.

ПАРАЛЛАКСЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

25. Групповые параллаксы. Остановимся теперь на частных случаях определения параллаксов, когда рассматриваемые звезды обладают особыми физическими или кинематическими свойствами, отличающими их от всех остальных звезд.

Казалось бы, параллаксы таких объектов не могут играть существенной роли в звездной астрономии, так как чаще всего они относятся к звездам нетипичным, т. е. сильно отличающимся от всех остальных звезд. Однако, в действительности получается наоборот: точность этих параллаксов значительно превосходит точность параллаксов, определенных упомянутыми выше методами. Поэтому они играют большую роль в астрономии.

Рассмотрим сначала метод так называемых групповых параллаксов, применимый только к звездам, одинаково движущимся в пространстве; векторы скоростей таких звезд одинаковы. Указанные группы звезд называются движущимися скоплениями. К ним относятся и так называемые рассеянные скопления (см. п. 20). Параллаксы звезд, принадлежащих к движущимся скоплениям, определяются очень точно на основании следующих простых рассуждений.

Рассмотрим плоскости, проходящие через векторы скоростей звезд и Солнце, расположенное в точке O . Все эти плоскости вследствие параллельности векторов скоростей звезд пересекутся по одной прямой OZ (рис. 19). Опишем шар произвольного радиуса с центром в точке O , представляющий собой небесную сферу (рис. 20). Большие круги, являющиеся линиями пересечения упомянутых плоскостей

с поверхностью шара, пересекутся в двух точках: в точке Z и в точке, диаметрально противоположной; назовем первую точкой сходимости (радиант), а вторую — точкой расходимости нашего скопления. Собственные движения звезд будут направлены по касательным к этим окружностям; причем — и это является самым важным в нашем методе — *угловое расстояние каждой звезды от радианта скопления θ_k равно углу между вектором скорости данной звезды и направлением Солнце — звезда.*

Зная собственные движения звезд скопления μ_k , которые не должны быть равными, так как расстояния звезд различны, надо определить сначала графическим или каким-либо другим методом

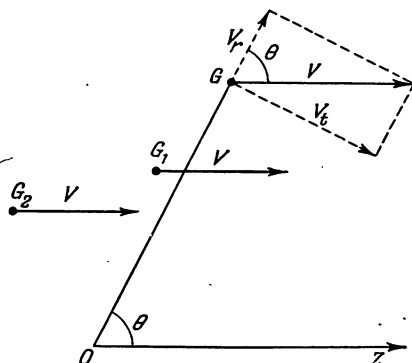


Рис. 19.

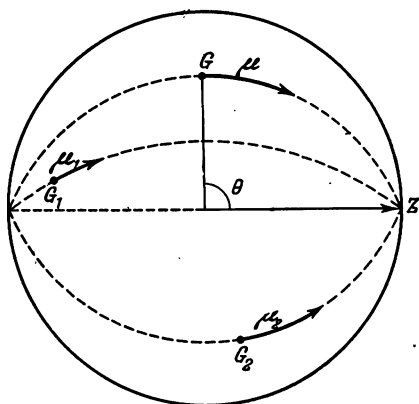


Рис. 20.

радиант, для этого продолжим собственные движения звезд до точки их пересечения на сфере и вычислим сферические координаты этой точки. Затем вычислим θ_k — угловое расстояние звезды от радианта и, зная лучевую скорость каждой звезды $V_r^{(k)}$, определим ее тангенциальную скорость по формуле

$$V_t^{(k)} = V_r^{(k)} \operatorname{tg} \theta_k,$$

отсюда найдем параллакс звезды

$$\pi_k = \frac{4,74 \mu_k}{V_t^{(k)}} = \frac{4,74 \mu_k}{V_r^{(k)} \operatorname{tg} \theta_k}.$$

В наших предыдущих рассуждениях мы нигде не пользовались равенством модулей векторов скоростей звезд; поэтому мы, естественно, получим менее точные результаты, чем при использовании всех доступных нам данных. Обозначая этот модуль через V , получим для каждой звезды равенство

$$V = V_r^{(k)} \sec \theta_k;$$

вычисляя среднее, имеем

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_r^{(k)} \sec \theta_k.$$

Отсюда определяем индивидуальные параллаксы звезд π_k

$$\pi_k = \frac{4,74 \mu_k}{\bar{V} \sin \theta_k}$$

Если рассматриваемое скопление невелико по сравнению с расстоянием до него, то можно считать, что все звезды, образующие это скопление, находятся от Солнца на одинаковом расстоянии. В этом случае получим более уверенный средний параллакс

$$\bar{\pi} = \frac{4,74}{n \bar{V}} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\sin \theta_k}.$$

Определенные таким образом параллаксы звезд, относящихся к скоплению, обладают очень большой точностью; кроме того, они свободны от систематических ошибок. В самом деле, величины θ_k практически лишены ошибок. Вполне надежной является также величина $\bar{V}$, если она определена по многим звездам. Следовательно, средняя ошибка определения $\varepsilon(\pi_k)$ индивидуального параллакса

$$\varepsilon(\pi_k) \approx \frac{4,74}{\bar{V} \sin \theta_k} \varepsilon(\mu_k)$$

зависит только от средней ошибки собственного движения $\varepsilon(\mu_k)$, которая в благоприятных случаях не превышает $\pm 0'',001$. Более надежно определяется средний параллакс $\bar{\pi}$. Соответствующая ему средняя ошибка равна

$$\varepsilon(\bar{\pi}) = \frac{\varepsilon(\pi_k)}{\sqrt{n}} \approx \frac{4,74}{\bar{V} \sin \theta_k} \frac{\varepsilon(\mu_k)}{\sqrt{n}},$$

где n — число звезд, $\overline{\sin \theta_k}$ — средняя величина $\sin \theta_k$.

26. Динамические параллаксы. Метод динамических параллаксов применим только к визуально-двойным звездам. В основу излагаемого метода положено предположение, что массы компонентов этих систем не отличаются от средних масс одиночных звезд, принадлежащих к тем же самым спектральным классам с учетом разделения на карлики и гиганты в более поздних спектральных классах.

Эта гипотеза не должна вызывать особых возражений, так как известно, что дисперсия масс звезд, вообще говоря, очень мала по сравнению с дисперсией всех других параметров, определяющих физические условия в звездах ранних спектральных классов.

Приняв *a priori* на основании спектральных классов компонентов¹⁾ величину их масс, можно определить параллакс данной двойной звезды, применяя к ней общие законы динамики. Вот почему полученные таким образом параллаксы и называются динамическими.

1) Рассмотрим случай, когда нам известна относительная орбита звезды, т. е. мы знаем период P и большую полуось эллипса a'' в угловых секундах.

На основании третьего закона Кеплера имеем

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{a^3}{P^2},$$

где a — большая полуось орбиты в астрономических единицах, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — массы компонентов, выраженные в массах Солнца, P выражено в звездных годах. Параллакс π в угловых секундах равен $\pi = a''/a$, следовательно,

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{a''^3}{P^2 \pi^3}$$

и отсюда

$$\pi = \frac{a''}{\sqrt[3]{(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) P^2}}.$$

Подставляя вместо $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ их значения, находим искомый параллакс.

2) Параллакс двойной звезды можно определить также и в том случае, когда нам неизвестна ее орбита и мы знаем только угловое расстояние ρ компонентов и угловую скорость их вращения σ в момент наблюдения. На практике очень часто встречается именно такой случай, когда период обращения звезды настолько велик, что всей орбиты мы еще „не успели“ пронаблюдать.

Одним из основных уравнений движения является уравнение вида

$$rv^2 = G(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \left(2 - \frac{r}{a}\right),$$

где v — линейная скорость одного тела относительно другого, а r — расстояние между ними. В нашем случае

$$r = \frac{\rho}{\pi \sin i}, \quad v = \frac{\sigma}{\pi \sin j},$$

здесь i — угол между радиусом вектором и лучом зрения, j — угол между вектором скорости данного компонента и лучом зрения, π — параллакс звезды, т. е.

$$\frac{\rho \sigma^2}{4\pi^3 G} = (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \left(2 - \frac{r}{a}\right) \sin i \sin^2 j,$$

¹⁾ И светимостей, которые известны, если известен искомый параллакс; таким образом, на практике приходится применять метод последовательных приближений.²⁾ — *Прим. ред.*

обозначая

$$\left(2 - \frac{r}{a}\right) \sin i \sin^2 j = K,$$

получим

$$\pi = \sqrt[3]{\frac{\rho \sigma^2}{4KG(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}}.$$

Если за единицу расстояния принять астрономическую единицу, за единицу времени — звездный год, за единицу массы — массу Солнца, то гравитационная постоянная будет равна

$$G = (2\pi)^2 = 39,44.$$

Величину K можно считать постоянной для всех двойных звезд, так как в действительности она изменяется очень незначительно при переходе от одной системы к другой. Основываясь на теории вероятностей и предполагая, что все значения углов наклона плоскостей орбит двойных звезд равновероятны, можно определить среднее значение K^1 :

$$\bar{K} = \frac{1}{32} (3,14) (5 - 2\bar{e}^2),$$

причем $\bar{e}$ — среднее квадратичное из эксцентриситетов орбит двойных звезд

$$\bar{e} = \sqrt{\frac{[ee]}{n}}.$$

Приняв на основании многих наблюдательных данных $\bar{e} = 0,561$, находим

$$\bar{K} = 0,429.$$

Следует обратить внимание на то, что в формуле для определения параллакса как величина $(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$, так и величина K находятся под корнем третьей степени; следовательно, ошибки этих величин в небольшой степени влияют на результат. Итак, если бы вместо действительной величины $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ подставить ее утроенную величину, то полученный параллакс увеличился бы только в 1,4 раза.

27. Параллаксы затменных переменных. Для этих систем часто известны относительные орбиты, основанные исключительно на фотометрических наблюдениях, и, следовательно, нам известен относительный радиус ρ каждого из компонентов

$$\rho = \frac{r}{R},$$

где r — „абсолютный“ радиус данного компонента, R — расстояние между компонентами.

¹) Russel H. N., *Astron. Journ.*, 38, 89 (1928).

Предполагая, что массы компонентов подчинены зависимости масса — светимость, можно составить четыре уравнения, связывающие массу $\mathcal{M}$ одного из компонентов с его температурой T , светимостью L и периодом P ,

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} (1 + \alpha) = c_1 R^3 P^{-2},$$

$$L = c_2 \mathcal{M}^8,$$

$$L = c_3 r^2 T^4,$$

$$r = \rho R,$$

причем будем считать, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$ — масса первого, более яркого компонента, больше $\mathcal{M}_2$ — массы второго, менее яркого компонента. Первое уравнение выражает III закон Кеплера; второе — зависимость масса — светимость, третье — закон Стефана — Больцмана. Последнее не требует пояснений, c_1 , c_2 и c_3 — постоянные, зависящие от выбора единиц; α представляет собой отношение масс компонентов.

Если допустить, что α известно, то можно определить четыре неизвестных: $\mathcal{M}$, L , R и r . Нас интересует только величина L , причем будем вместо нее определять величину M_{bol} , которая связана с искомой величиной L соотношением

$$M_{bol} = -2,5 \log L.$$

Зная на основании известной температуры T болометрическую поправку, найдем абсолютную величину компонента в выбранной фотометрической системе и, зная видимую величину m в той же системе, определим параллакс звезд так же, как мы определяли его в методе спектральных параллаксов (см. п. 23).

Следует, конечно, учесть еще абсолютную величину второго компонента, которую надо „фотометрически“ прибавить к абсолютной величине первого. В этом случае в качестве видимой величины берется величина затменной переменной в максимуме, т. е. ее величина вне затмения.

Некоторые сомнения может вызвать то обстоятельство, что мы приняли известным отношение α массы менее яркого компонента к массе более яркого. На основании зависимости масса — светимость известно, что α должно быть заключено между 0 и 1; однако, величины, близкие к нулю, маловероятны. Действительно, в этом случае компоненты должны были бы сильно отличаться по абсолютным величинам, а вероятность открытия таких затменных звезд сравнительно мала.

Таким образом, чисто *статистическая* селекция наших данных о затменных переменных приводит к величине α только немного меньшей единицы. Основываясь на довольно многочисленном наблюдательном материале, автор этого метода Гапошкин определил $\alpha = 0,75$ с дисперсией $\pm 0,14$.

Можно ввести некоторые уточнения, задавая величину α а priori, однако, это не сильно изменит получаемые результаты.

Пользуясь этим методом, Гапошкин определил абсолютные величины 250 затменных систем, находя также их массы, радиусы, средние плотности и другие физические характеристики¹⁾.

28. Параллаксы переменных звезд. Многие переменные звезды обнаруживают более или менее хорошо выраженную зависимость абсолютной величины M от периода P . Обычно эта зависимость выражается формулой $M = f(\log P)$ и называется зависимостью период — светимость. В качестве M обычно берут медианную абсолютную величину данной переменной, хотя существуют также зависимости, в которых M является, например, максимальной звездной величиной звезды.

Мы не будем приводить здесь чисто астрофизических рассуждений, которые во многих случаях теоретически доказывают существование такого рода зависимостей. Тем не менее полученные зависимости не являются точными, и мы вынуждены считать их лишь статистическими зависимостями с различной величиной дисперсии абсолютных величин σ_M для разных групп переменных звезд.

Бывает также, что для определенной группы переменных звезд принятая зависимость период — светимость является результатом наложения двух разных зависимостей, как, например, в случае звезд типа *RR Lyr* по исследованиям Б. В. Кукаркина²⁾ и В. Ивановской³⁾. Возможно, что среди других типов переменных звезд можно также установить существование нескольких зависимостей период — светимость; это обстоятельство следует иметь в виду в тех случаях, когда зависимость период — светимость используется при определении расстояний переменных звезд. Несмотря на это, описанный выше метод широко применяется при определении расстояний различных звездных систем, в которых открыты переменные звезды, например, шаровых скоплений и разного рода галактик. Это объясняется тем, что в таких случаях расстояния могут определяться по очень слабым звездам, к которым нельзя, например, применить метод спектральных параллаксов или другие методы по причине большой удаленности этих объектов.

Определение расстояния переменной звезды сводится к определению ее периода P на основании более или менее точных фотометрических наблюдений и ее видимой величины m . Подставляя значение P в выражение $M = f(\log P)$, определяем, пренебрегая межзвезд-

¹⁾ Harvard Reprint, 201, 1940.

²⁾ Кукаркин Б. В., Исследования строения и развития звездных систем на основе изучения переменных звезд, 1949, стр. 206.

³⁾ *Blulelyn Obs. Astron. U. M. K в Toruntu*, 12 (1953).

ным поглощением; параллакс π по формуле

$$m - M = m - f(\log P) = -5 - 5 \log \pi.$$

$$\pi = 10^{-0,2(m-M)-1}.$$

Лучше пользоваться формулой, учитывающей поглощение A ,

$$m - M = -5 - 5 \log \pi + A.$$

В этом случае для определения расстояния необходимо знать величину межзвездного поглощения света данного объекта.

Часто бывает известна только зависимость межзвездного поглощения от расстояния r [$A(r)$] или же параллакс $\pi = r^{-1}$. В этом случае определение параллакса связано с решением уравнения

$$m - M = 5 \log r - 5 + A(r)$$

или

$$m - M = -5 \log \pi - 5 + A(\pi)$$

относительно неизвестного r или π соответственно.

Попробуем оценить среднюю ошибку определения параллакса этим методом. Дифференцируя первое уравнение, получим

$$|dM| = \left(\frac{2,17}{r} + \frac{dA}{dr} \right) dr.$$

Отождествляя dM с дисперсией σ_M , а dr со средней ошибкой расстояния $\varepsilon(r)$, имеем

$$\sigma_M = \left(\frac{2,17}{r} + \frac{dA}{dr} \right) \varepsilon(r) = \left(\frac{2,17}{\pi} - \frac{dA}{d\pi} \right) \varepsilon(\pi),$$

так как $d\pi = -\frac{dr}{r^2}$.

Второй член скобки обычно мал по сравнению с первым. Поэтому с достаточной степенью точности можно написать

$$\sigma_M = \frac{2,17}{\pi} \varepsilon(\pi),$$

т. е.

$$\frac{\varepsilon(\pi)}{\pi} = \frac{\sigma_M}{2,17}.$$

Следовательно, относительная средняя ошибка определения параллаксов таким способом постоянна и зависит только от σ_M . Поэтому независимо от значения σ_M метод определения параллаксов по зависимости период — светимость имеет то преимущество перед методом тригонометрических параллаксов, что первый метод можно применять с одинаковой точностью ко всем доступным нашим наблюдениям объектам, тогда как определение тригонометрических параллаксов теряет смысл при расстояниях больших 1000 пс. Однако, как мы

уже упоминали, параллаксы переменных звезд могут содержать очень большие систематические ошибки, о которых речь будет впереди.

Займемся теперь определением зависимостей период — светимость для различных типов переменных звезд. Чаще всего эти зависимости устанавливаются по переменным звездам какого-нибудь сравнительно далекого звездного скопления или галактики. В этом случае можно получить зависимость период — светимость непосредственно, например, откладывая по одной оси видимые величины m переменных звезд данного типа, а по другой — их периоды P . В рассматриваемом случае видимые величины звезд отличаются от их абсолютных величин на постоянную величину m_0 , так как все изучаемые звезды находятся практически на одинаковых расстояниях r от Солнца. Следовательно, $m = 5 \log r - 5 + A(r) + M$; так как $r = \text{const}$, то обозначим

$$m_0 = 5 \log r - A(r).$$

Тогда

$$M = m - m_0.$$

Полученный график $m = M + m_0 = f(\log P) + m_0$ дает нам правильную форму зависимости $M = f(\log P)$, оставляя открытым вопрос так называемого нуля этой кривой, т. е. остается неизвестной величина m_0 .

Чтобы определить эту величину m_0 , необходимо знать хотя бы для одной звезды расстояние r и межзвездное поглощение $A(r)$. На практике, конечно, выгоднее знать эти величины для многих объектов, так как в этом случае среднее значение их будет свободно от влияния случайных ошибок расстояния и межзвездного поглощения. При этом все же остается еще влияние систематических ошибок этих величин, и потому вопрос определения нуля некоторых зависимостей период — светимость доставляет нам много хлопот. Так, например, недавно была обнаружена ошибочность нуля кривой хорошо установленной зависимости период — светимость для переменных типа δ *Sep*, причем, по всей вероятности, ошибка эта достигает $1^m,3$. Это значит, что все расстояния, определенные по старой кривой период — светимость, содержат значительную систематическую ошибку. Нетрудно определить эту ошибку: пусть r' обозначает ошибочные, а r — „правильные“ расстояния цефеид, т. е. расстояния, освобожденные от систематической ошибки. Используя соотношения

$$m - M' = 5 \log r' - 5,$$

$$m - M = 5 \log r - 5,$$

где $M' - M = \Delta M$ — ошибка нуля, получим

$$r = r' 10^{0,2\Delta M}.$$

Отсюда, если $\Delta M = 1,3$, то $r = 1,8 r'$.

Следовательно, старые расстояния почти вдвое меньше действительных.

При этих вычислениях мы пренебрегли влиянием межзвездного поглощения, которое, однако, не должно играть большой роли, если его вычислять на основании непосредственных наблюдений, например, по избыткам цвета звезд. Если же вычисление межзвездного поглощения основано на ошибочных расстояниях, то его влияние может быть, конечно, значительным.

Приведем несколько зависимостей $M = f(\log P)$ для разных типов переменных звезд. Среди переменных звезд самыми лучшими индикаторами расстояния являются цефеиды и переменные типа *RR Lyr*, хотя до настоящего времени нет достаточной уверенности в правильности нульпунктов этих зависимостей. Зато некоторой компенсацией этого является очень незначительная дисперсия абсолютных величин этих звезд σ_M , равная примерно $\pm 0^m, 3$. Следовательно, средняя ошибка параллакса равна

$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{\sigma_M}{2,17} = 14\%.$$

Ошибка получается такая же, как и в случае спектральных параллаксов, определенных при помощи спектрографов с большой дисперсией. При определении параллаксов по зависимости период — светимость все вычисления очень просты. Кроме того, этот метод применим к очень слабым звездам, которые оставляют едва заметный след на снимках. Поэтому-то так часто переменные звезды используются как индикаторы расстояний, несмотря на упомянутый выше недостаток рассматриваемого метода (неуверенность нульпункта зависимости период — светимость).

I. Переменные типа *RR Lyr* с периодами меньше 1 дня, называемые иногда короткопериодическими цефеидами, обнаруживают зависимость ¹⁾ вида

$$M_{pg} = 0,44 - 0,20 \log P, \quad P < 1^d.$$

Коэффициент при $\log P$ очень мал, следовательно, можно считать, что абсолютные величины всех звезд типа *RR Lyr* практически одинаковы и равны $+0^m, 5$.

II. Классические цефеиды с периодом больше 1 дня показывают две зависимости ²⁾.

Для периодов P , меньших 9 дней,

$$M_{pg} = -1,42 - 1,67 \log P,$$

¹⁾ См. Кукаркин Б. В., *Усп. астрон. наук*, IV, 195 (1948).

²⁾ См. Паренаго П. П., *Переменные звезды*, 10, 231 (1955); Zonn W., *Acta Astronomica*, 7, 152 (1957).

а для периодов P , больших 9 дней,

$$M_{pg} = -1,03 - 2,08 \log P,$$

причем дисперсия всех трех зависимостей порядка $\pm 0^m,3$.

Однако, нужно помнить, что среди цефеид существует группа звезд, которые не подчиняются приведенным выше зависимостям; эти цефеиды принадлежат к сферической составляющей нашей Галактики. Часто их называют переменными типа *W Vir* по одной из представительниц этого класса переменных звезд. Можно предположить, что кривая период — светимость этих переменных смещена по отношению к кривой классических цефеид на $1^m,7$, т. е. ее нульпункт на $1^m,7$ больше нульпункта классических цефеид.

III. Для долгопериодических переменных типа Миры Кита также известна зависимость период — светимость, однако, в этом случае мы имеем дело с большой дисперсией $\sigma_M = \pm 1^m,0$, значительно снижающей точность определяемых параллаксов.

Т а б л и ц а 2
ЗАВИСИМОСТЬ $M_{pg} = f(P)$ ДЛЯ ЗВЕЗД
ТИПА МИРЫ КИТА
(по данным Б. В. Кукаркина)

P (дни)	M_{pg}	P (дни)	M_{pg}
100	$-2^m,1$	350	$-0^m,4$
150	$-2,3$	375	$-0,2$
175	$-2,5$	400	$-0,0$
200	$-2,2$	425	$+0,1$
225	$-1,8$	450	$+0,2$
250	$-1,5$	475	$+0,3$
275	$-1,2$	500	$+0,4$
300	$-0,9$	550	$+0,5$
325	$-0,4$	600	$+0,6$

представить в форме таблицы (см. табл. 2). В столбце M_{pg} таблицы приводится абсолютная величина этих звезд в *максимуме* блеска, причем из-за некоторой неправильности изменения блеска за максимальную величину принимают величину в самом ярком из всех наблюдавшихся до сих пор максимумов блеска данной звезды.

IV. Остальные долгопериодические и неправильные переменные класса M следует разделить на две группы: одну — со средней абсолютной величиной в максимуме блеска $M = 0^m,0$ и дисперсией $\sigma_M = \pm 1^m,0$ и другую, имеющую ту же дисперсию, но

средняя абсолютная величина в максимуме звезд этой группы $M = -4^m,0$. Такое разделение получается по существующим в настоящее время наблюдательным данным, но, однако, до сих пор не известны критерии, на основании которых можно было бы относить звезду к одной из двух упомянутых групп. Поэтому найденная зависимость не имеет пока никакого практического значения.

V. Абсолютная величина новых звезд в максимуме блеска зависит от их поведения после максимума. Пусть от момента максимума

до того момента, когда блеск новой звезды уменьшится на 3^m , пройдет t_3 суток, тогда

$$M = -10^m,8 + 2,20 \log t_3.$$

Дисперсия этой эмпирической зависимости σ_M равна $\pm 0^m,3$.

VI. Об абсолютных величинах сверхновых звезд известно только, что в максимуме они равны приблизительно $-13^m,3$, причем дисперсия этой величины равна $\pm 1^m,3$.

29. Расстояния, основанные на измерениях интенсивности межзвездных линий в спектрах звезд. В спектре многих звезд, в особенности звезд, расположенных вблизи галактического экватора, наблюдаются линии поглощения, которые образовались не в атмосферах звезд, а в пространстве между наблюдателем и звездой. Эти линии называют *межзвездными* ¹⁾ в отличие от линий, возникающих в атмосфере звезды.

Предположим, что плотность межзвездного газа очень мала и одинакова во всем пространстве, тогда мы должны ожидать, что интенсивность межзвездных линий будет прямо пропорциональна расстоянию r звезды от наблюдателя. Выражая интенсивность линии через ее эквивалентную ширину, можно установить эмпирическую зависимость между этой величиной и расстоянием r .

Используя наблюдения 182 звезд класса *O* и ранних подклассов *B*, Бильс и Оке ²⁾ получили следующие зависимости:

$$r = 34,83 K, \quad r = 30,75 D,$$

где K и D — эквивалентные ширины линий ионизованного кальция (Ca II) и дублета натрия (Na I), выраженные в км/сек^3 ; r дано в парсеках.

Эти две линии чаще всего наблюдаются в спектрах звезд ранних спектральных классов, так как среди линий, возникающих в атмосферах этих звезд, отсутствуют линии H и K кальция и дублет натрия D .

Следовательно, в этих случаях мы имеем дело с чисто межзвездными линиями; в остальных же случаях межзвездные линии налагаются на „звездные“ и поэтому невозможно измерять интенсивность межзвездных линий.

Применимость этого метода на практике сильно ограничена предположением о постоянстве плотности межзвездного газа в пространстве. Это предположение справедливо только для объектов, распо-

¹⁾ О межзвездных линиях речь будет в п. 46 нашей книги.

²⁾ *MN.*, (*Monthly Notices*), 113, 530, (1954).

³⁾ Относительную ширину линии $\Delta\lambda/\lambda$ можно выразить в км/сек , отождествляя $\Delta\lambda$ с доплеровским смещением. В этом случае $v = c \Delta\lambda/\lambda$ и в единицах, указанных выше, мы выражаем $\Delta\lambda/\lambda$.

ложенных в галактической плоскости; для звезд же с галактическими широтами, отличающимися от нуля, это предположение явно не выполняется, так как средняя плотность межзвездного газа довольно быстро убывает с удалением от галактической плоскости. Другой недостаток рассматриваемого метода заключается в том, что его можно применять только исключительно к звездам ранних спектральных классов. В спектрах звезд класса *A* и всех более поздних классов обнаружить чисто межзвездные линии невозможно, так как они, как правило, образуют бленды со „звездными“ линиями поглощения в спектре звезды.

Средняя ошибка определения параллакса по межзвездным линиям поглощения для специально выбранных звезд не превышает $\pm 25\%$.

30. Расстояния галактик. Расстояния ближайших галактик определяются по расстояниям или параллаксам отдельных звезд, входящих в состав данной галактики. Так как в этих случаях мы имеем дело со сравнительно большими расстояниями, выражающимися в мегапарсеках, то пользуемся здесь исключительно методами, применяемыми к слабым звездам. Чаще всего используются методы, рассмотренные в п. 28. Расстояние наиболее удаленных галактик определяется по сверхновым звездам, максимальная светимость которых нередко превышает светимость галактик, в которых наблюдается вспышка сверхновых звезд. К сожалению, этот метод не очень надежен вследствие неточности наблюдательных данных относительно абсолютных величин сверхновых звезд в максимуме.

Расстояния ближайших галактик можно также определять методом спектральных параллаксов, применяемым к самым ярким звездам классов *B* и *O* или же к звездам Вольфа—Райе. В этих случаях, довольно редких из-за чисто инструментальных причин, связанных с трудностями фотографирования спектров отдельных звезд, предполагают, что звезды, находящиеся в различных галактиках, но обладающие одинаковыми морфологическими характеристиками, имеют одинаковые абсолютные величины. Хотя у нас нет прямых доказательств справедливости такого предположения, тем не менее оно до сих пор не вызывает каких-либо принципиальных возражений.

При определении расстояний очень удаленных галактик, в которых нельзя выделить отдельные звезды или же невозможно определить морфологические характеристики отдельных звезд, приходится использовать специальные методы, основанные на наблюдении данной галактики как целого, а не отдельных звезд, из которых она состоит.

Таким методом является, между прочим, метод, основанный на известном эффекте „красного смещения“ в спектрах галактик.

Действительно, измеряя смещения спектральных линий в спектрах многих галактик, расстояния которых определены другими независимыми методами, удалось статистически установить, что эти смещения, выраженные при помощи отношения $\Delta\lambda/\lambda$, прямо пропорцио-

нальны расстоянию рассматриваемых галактик от нашей Галактики. Приняв чисто формально, что в данном случае мы имеем дело с доплеровским смещением, найдем коэффициент пропорциональности, равный приблизительно 300 км/сек/мкс . Распространяя эту зависимость на все доступное нам пространство, можно определять расстояние отдельных галактик по измеренному в их спектре смещению, пользуясь при этом упомянутой выше зависимостью. При этом необходимо только знать лучевые скорости галактик, которые легко можно определить по снимкам спектров с небольшой дисперсией; требуемая точность очень невелика, порядка $\pm 100 \text{ км/сек}$.

Другим методом, имеющим то преимущество, что его можно применять к наиболее удаленным галактикам, является фотометрический метод, основанный на предположении, что абсолютные величины всех галактик постоянны, т. е. не зависят от их расстояний. К звездам этот метод неприменим потому, что абсолютные величины звезд изменяются в очень широких пределах (примерно 28^m).

Абсолютные величины галактик изменяются в значительно более узком интервале, от -10^m до -19^m . Хотя разность 9^m и значительна, однако за неимением никаких других данных можно ею пренебречь.

Описанный метод можно значительно уточнить, если для более близких галактик ввести классификацию (см. п. 21), основанную на их внешнем виде. Известно, что самыми яркими являются спиральные галактики, абсолютные величины которых изменяются от -15^m до -19^m ; самыми же слабыми — эллиптические галактики, абсолютные величины этих объектов заключены в пределах от -10^m до -14^m . Абсолютные величины неправильных галактик находятся „посередине“ между абсолютными величинами спиральных и эллиптических галактик и изменяются в интервале от -13^m до -17^m . На практике обычно пользуются следующими средними абсолютными величинами галактик:

Спиральные галактики $M = -17^m$,

Неправильные „ $M = -15^m$,

Эллиптические „ $M = -12^m$.

— Приведенные данные основаны на старом значении нуля периода — светимости для классических цефеид¹⁾, отличающимся от нового на $-1^m,3$, поэтому их следует соответственно исправить (см. п. 28).

¹⁾ См. Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 278.

Можно было бы определять расстояния галактик по их угловым размерам, считая, что линейные диаметры галактик одинаковых типов не зависят от расстояния. Однако этот метод не применяется на практике из-за того, что наблюдаемые угловые размеры галактик в значительной степени зависят от времени экспозиции снимков, от видимой звездной величины галактики и от того, каким образом на снимке определяется ее угловой диаметр. Поэтому указанный метод может использоваться только для грубой оценки. Однако если применять описанный метод при статистических исследованиях, то следует обратить особое внимание на неизбежные систематические ошибки наблюдаемых угловых диаметров галактик.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗВЕЗД И МЕЖЗВЕЗДНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКЕ

§ 9. Подсчеты звезд

31. Функции $N(m)$ и $A(m)$. При исследованиях пространственного распределения звезд в Галактике нам часто по многим причинам приходится отказываться от применения индивидуальных методов и использовать статистические методы для решения этой проблемы. Это приходится делать прежде всего потому, что число звезд с известными тригонометрическими или спектральными параллаксами сравнительно невелико, кроме того, нам известны параллаксы исключительно ближайших звезд. Причина такого отказа заключается также и в том, что индивидуальные методы очень трудоемки, особенно в тех случаях, когда мы имеем дело с большим числом объектов.

Из этого, однако, не следует делать вывода, что в звездной астрономии совсем не применяются индивидуальные методы. Наоборот, изучая пространственное распределение специально выбранных объектов, например переменных звезд какого-нибудь типа или звезд, принадлежащих к одному спектральному классу, часто пользуются индивидуальным методом, а именно: определяют три координаты каждой звезды, а затем подсчитывают число рассматриваемых объектов в элементах объема в разных местах окружающего нас пространства. Притом следует обратить особое внимание на возможность существования селекции в том материале, который используется при таких исследованиях.

Однако такой подход к проблеме распределения звезд все же не является типичным для звездной астрономии, несмотря на то, что им довольно часто пользуются астрономы. Типичным же является другой метод, основанный на подсчетах звезд, содержащихся в каталогах или на фотографических снимках, причем обычно в какой-нибудь области неба подсчитывают число всех звезд ярче определенной звездной величины m , и это число обозначают $N(m)$. Принято $N(m)$ относить к телесному углу, равному единице. При некоторых упрощающих предположениях на основании этих данных можно определить пространственное распределение звезд в данном направлении.

Часто вместо $N(m)$ пользуются ее производной

$$A(m) = \frac{dN(m)}{dm}, \quad (31.1)$$

причем на практике часто эту величину отождествляют с числом звезд в телесном углу, равном единице, величины которых заключены в пределах $m - 1/2$ и $m + 1/2$

$$A(m) = N\left(m + \frac{1}{2}\right) - N\left(m - \frac{1}{2}\right). \quad (31.2)$$

В этом случае $dm = 1^m$.

Прежде чем описывать методы, основанные на подсчетах звезд, мы познакомим читателя с некоторыми простыми теоремами, касающимися функций $N(m)$ и $A(m)$.

Предположим, что звезды равномерно заполняют окружающее нас пространство и что межзвездное поглощение в этом пространстве совершенно отсутствует. Рассмотрим прежде всего звезды с абсолютной величиной M_1 .

В этом случае $N_1(m) \approx r^3$, где r — расстояние звезд m -й величины. На основании зависимости

$$m = M + 5 \log r - 5$$

находим

$$r = 10^{1+0,2(m-M)} = \text{const } 10^{0,2m},$$

следовательно,

$$N_1(m) = C_1 10^{0,6m}.$$

Если применить те же рассуждения к звездам с абсолютными величинами $M_2, M_3, \dots$, то можно получить аналогичные формулы, отличающиеся только коэффициентами C :

$$N_2(m) = C_2 10^{0,6m},$$

$$N_3(m) = C_3 10^{0,6m}.$$

$$\dots \dots \dots$$

Суммируя, получим $N(m)$, т. е. число *всех* звезд, видимая звездная величина которых не превышает m :

$$N(m) = C 10^{0,6m}. \quad (31.3)$$

Пользуясь этой формулой, легко определить отношение числа звезд ярче $m + 1$ величины к числу звезд ярче m величины; имеем

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} = 10^{0,6} \approx 4.$$

Найдем аналогичное соотношение для $A(m)$

$$A(m) = \frac{dN(m)}{dm} = D 10^{0,6m}, \quad (31.4)$$

следовательно,

$$\frac{A(m+1)}{A(m)} = 10^{0,6} \approx 4.$$

На основании существующих подсчетов звезд можно убедиться, что в действительности ни $N(m)$, ни $A(m)$ не изменяются согласно формулам (31.3) и (31.4). Как правило, числа звезд растут *медленнее*, чем получается по этим двум формулам. Вначале казалось, что этот факт служит доказательством того, что Солнце находится в месте наибольшего сгущения звезд, т. е. в центре гипотетической звездной системы. Однако вскоре было показано, что межзвездное поглощение является главной причиной медленного роста обеих функций.

Пусть m будет наблюдаемая звездная величина, а m' — звездная величина, исправленная на межзвездное поглощение света. В таком случае выражение $m - m' = f(m)$ должно быть положительной и возрастающей функцией m . Подставляя в формулы (31.3) и (31.4) вместо m величины m' , получим

$$\begin{aligned} N(m') &= C 10^{0,6m} \cdot 10^{-0,6f(m)}, \\ A(m') &= D 10^{0,6m} \cdot 10^{-0,6f(m)}. \end{aligned}$$

Последний множитель является *убывающей* функцией m .

32. Главные результаты подсчетов звезд. Сирс, ван Райн, Джойнер и Ричмонд ¹⁾ в 1925 и последующих годах провели большую работу по подсчету звезд.

На основании полученных ими и известных ранее данных были вычислены величины $N(m)$ и $A(m)$ во многих направлениях до 18^m .

Средние величины $A(m)$ довольно хорошо представляются эмпирической формулой

$$A(m) = \frac{dN(m)}{dm} = 10^{a+bm-cm^2}, \quad (32.1)$$

где a , b и c — постоянные, зависящие от галактической широты и долготы. Для звезд на всем небе имеем

$$\begin{aligned} \log A(m_v) &= 5,010 + 0,7130m_v - 0,0128m_v^2, \\ \log A(m_{pg}) &= 5,134 + 0,6796m_{pg} - 0,0115m_{pg}^2, \end{aligned}$$

где m_v обозначает визуальные звездные величины, а m_{pg} — фотографические. Величины $A(m)$ даны на один квадратный градус.

Пользуясь этими зависимостями, легко подсчитать полное число звезд $N(m)$ ярче 18^m . Действительно,

$$N(m) = \int_{-\infty}^m e^{\text{Mod}^{-1}(a+bm-cm^2)} dm.$$

¹⁾ *ApJ. (Astrophysical Journal)*, 62, 320 (1925); 67, 24 (1928), и *Gron. Publ.*, 43 (1929).

Приводя этот интеграл к виду $\int_{-\infty}^t e^{-t^2} dt$, получим

$$N(m) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{B(m-C)} e^{-x^2} dx,$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\text{Mod } \pi}{c}} 10^{a + \frac{b^2}{4c}}; \quad B = \sqrt{\frac{c}{\text{Mod}}}; \quad C = \frac{b}{2c}.$$

Интегрируя в пределах от $-\infty$, до $+\infty$,¹⁾ получим число всех звезд в Галактике в телесном углу, равном одному квадратному градусу, $N(\infty) = A$. Если выразить A через величины a , b и c , определенные для всех звезд на небе, и помножить эту величину на число квадратных градусов на всем небе (41 253), то можно получить полное число звезд в Галактике. При этом предполагается, что эмпирическая зависимость (32.1) справедлива также для звезд слабее 18^m . Такие вычисления приводят к значению $3 \cdot 10^{10}$ звезд. Полученный результат находится в хорошем согласии с данными о полном числе звезд в Галактике, найденными иными, более уверенными методами.

Выясним еще смысл постоянной C . При $C = m$

$$N(C) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{A}{2} = \frac{N(\infty)}{2},$$

следовательно, число звезд ярче звездной величины $m = C$ равно числу звезд слабее ее, т. е. эта звездная величина делит все звезды на две равные группы. Таким образом, C является медианной звездной величиной звезд.

Для различных направлений на небе получаются различные значения величины C ; максимальному значению $C = 30^m,6$ соответствует плоскость галактического экватора ($b = 0^\circ$). Для $b = 30^\circ$ $C = 25^m,4$; для $b = 60^\circ$ $C = 24^m,0$, и, наконец, направлению $b = 90^\circ$ соответствует значение $C = 23^m,9$. Все это указывает на то, что в направлении больших галактических широт Галактика „оканчивается“ раньше, чем в направлении галактического экватора ($b = 0^\circ$). Зная функцию $A(m)$ для различных направлений, можно определить количество света, получаемое от всех звезд; для этого следует только величину $A(m)$ умножить на количество света, получаемое от одной звезды данной величины m , и затем проинтегрировать полученное выражение по всем m в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Сирс таким способом нашел, что свет всех звезд равен свету 1092 звезд первой визуальной величины.

¹⁾ См. дополнение 3.

Непосредственные измерения интегрального света неба, произведенные Интемой, привели к числу 1350 звезд первой величины; таким же образом ван Райн пришел к выводу, что интегральный свет неба равен свету 1440 звезд первой величины. Оба значения превышают величину, полученную Сирсом по подсчетам звезд; это объясняется, по всей вероятности, тем, что при непосредственных измерениях к свету звезд прибавляются свечение атмосферы, зодиакальный свет и рассеянный свет туманностей.

Сирс и ван Райн составили таблицы сглаженных значений $N(m)$ на один квадратный градус в разных направлениях, при этом не учитывались случайные колебания $N(m)$ для разных галактических долгот. Затем они вычислили разности между наблюдаемыми $N(m)$ и числами указанной таблицы для значений $m = 9^m, 11^m, 13^m, 5$ и 18^m и начертили кривые одинаковых разностей¹⁾. На опубликованных картах можно легко обнаружить области больших положительных или отрицательных разностей. Первые объясняются существованием направлений с большой концентрацией звезд; вторые — отрицательные разности — существованием в соответствующих направлениях больших облаков темной межзвездной материи, поглощающей свет звезд.

Кроме того, обнаружены еще некоторые другие особенности распределения звезд: так, например, южное галактическое полушарие содержит на 10% больше звезд от 9^m до $13^m, 5$, чем северное (для более слабых звезд это различие исчезает). Упомянутый выше наблюдательный факт является следствием того, что Солнце находится на несколько парсеков выше плоскости галактического экватора, т. е. в направлении северного полюса Галактики.

В направлении $l = 270^\circ$ заметно значительное сгущение звезд $9^m - 13^m, 5$ (область № 7 в таблице 3). Зато более слабые звезды $16^m - 18^m$ больше всего концентрируются в направлении $l = 320^\circ$ (см. табл. 3, область № 9). Первая площадка соответствует направлению на центр так называемой местной системы, вторая — на центр Галактики.

Большие круги, проходящие через области наибольшего сгущения звезд различных звездных величин, для ярких звезд довольно значительно отклоняются от галактического экватора, а потом по мере перехода ко все более слабым звездам постепенно приближаются к нему. Для самых ярких звезд (4^m) угол наклона этого круга к галактическому экватору равен 17° . Здесь мы сталкиваемся с явлением, названным „поясом Гулда“, по имени астронома, обнаружившего его в 1879 г. Это явление связано с существованием местной системы, о которой речь будет впереди (см. п. 71).

Таблицы Сирса, ван Райна и др. используются иногда в совершенно иных целях, а именно для определения звездной величины какой-нибудь звезды на снимке, не содержащем звезд сравнения, т. е. звезд с известными

1) См. *Усп. астрон. наук*, IV, 78—81 (1948).

Таблица 3

ОБЛАСТИ, В КОТОРЫХ $N(m)$ СИЛЬНО ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ СРЕДНЕЙ ВЕЛИЧИНЫ

№ области	l	b	Диаметр области	Отклонение $\log N(m)$	Созвездие
1	109°	+4°	15°	-0,50	Camelopardalis
2	128	-19	12	-0,65	Taurus — Perseus
3	155	-35	10	-0,40	Taurus
4	234	-33	10	+0,20	Pictor
5	175	-9	10	-0,40	Orion
6	187	+7	15	+0,20	Monoceros
7	260	0	20	+0,60	Centaurus
8	0	0	15	-1,18	Aquila — Scutum — Serpens
9	330	-19	20	+0,60	Sagittarius
10	35	-2	5	+0,30	Cygnus — Vulpecula

видимыми величинами. В этих случаях на снимке просто подсчитывают число звезд ярче данной звезды, получая таким образом величину $N(m)$. Зная эту величину, можно по таблицам определить соответствующий ей аргумент m для данной области неба. Этот метод очень неточен; хотя случайная ошибка и невелика, порядка $\pm 0^m,2$, однако при этом могут возникнуть опасные систематические ошибки. Поэтому-то указанный метод используется лишь в исключительных условиях, когда все другие методы неприменимы. Таким образом, ван Маанен находил звездные величины слабых карликов и других слабых звезд, для которых он определял тригонометрические параллаксы.

33. Замечание о технике подсчетов звезд. Необходимо сказать несколько слов о технике подсчетов звезд. До сих пор подсчеты звезд проводились на основании существующих фотометрических каталогов избранных областей неба. Следовательно, подсчетам предшествовало определение блеска всех звезд вплоть до некоторой предельной звездной величины m в данной области неба.

Иногда подсчеты проводятся непосредственно на фотографических снимках. В этом случае снимок проектируется на координатную сетку; одновременно нужно спроектировать туда же изображения нескольких „образцовых“ звезд (искусственных или натуральных) с известной звездной величиной, с которыми мы сравниваем изучаемые звезды. Таким образом, переходя от одной площадки к другой, подсчитывают в каждой из них число звезд ярче определенной звездной величины $N(m)$ или же число звезд, заключенных в определенном интервале звездных величин $A(m)$. Этот метод требует исключительной предосторожности и внимания к систематическим ошибкам, которые в данном случае легко могут проникнуть в результаты подсчетов и, таким образом, значительно исказить последние. Поэтому этот метод используется только в исключительных случаях.

В связи с широким применением в астрономии светосильных короткофокусных камер часто получают снимки, на которых изображения звезд расположены так „тесно“, что невозможно измерять звездные величины отдельных звезд. Поэтому здесь приходится прибегать к специальным методам, которые еще не полностью разработаны. Ниже мы приводим один из предложенных методов¹⁾. Однако о практической применимости этого метода пока еще ничего нельзя сказать.

С полученного снимка делают два одинаковых негативных отпечатка на стекле, на которых звезды выходят в виде прозрачных кружков, фон же снимков черный. Оба отпечатка складывают так, чтобы изображения звезд по возможности точно совпадали, а затем помещают их в пучке параллельных лучей, собираемых какой-нибудь линзой на фотоэлементе. Фотоэлемент регистрирует количество падающего света при помощи гальванометра или какого-нибудь другого измерительного прибора.

Медленно передвигая один отпечаток относительно другого, регистрируют величину передвижения x и соответствующую силу света $I(x)$, получая таким образом график этой зависимости.

Затем закрывают всю пластинку, за исключением звезды, величина которой равна m_r , и повторяют всю процедуру, получая в этом случае новую зависимость $i(m_r, x)$, после этого ту же процедуру проделывают со звездой m_{r+1} звездной величины, m_{r+2} величины и т. д.

Очевидно, что

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(m, x) A(m) dm,$$

где $A(m)$ — искомое число звезд в интервале величин m , $m + dm$ [см. (31.1) и (31.2)].

Зная функции $I(x)$ и $i(m, x)$, можно определить $A(m)$, решая написанное выше интегральное уравнение. Так как функции эти даны в виде таблиц, то удобнее интеграл тоже заменить суммой

$$I(x_s) = \sum_{r=0}^{r_0} i(m_r, x_s) A(m_r) \Delta m;$$

суммирование здесь производится от 0 до r_0 (m_{r_0} — предельная звездная величина на данном снимке). Фиксируя на кривой несколько точек x_s , получим систему s уравнений первой степени с r_0 неизвестными. В случае $r_0 < s$ можно решить их методом наименьших квадратов и определить величины $A(m_1)$, $A(m_2)$, ..., $A(m_{r_0})$, т. е. числовые значения функции $A(m)$.

¹⁾ Butler H. E., *Observatory*, 73, 80 (1953); *Vistas in Astronomy*, I, 509 (1955).

Этот метод, несомненно, очень остроумен и не требует большого времени, так как при определении $i(m, x)$ нам нужно иметь очень немного звезд с известными звездными величинами; таким образом, нет необходимости проводить необычайно трудоемкую работу по определению звездных величин всех звезд в изучаемой области.

§ 10. Методы исследования пространственного распределения звезд в Галактике (основные интегральные уравнения звездной статистики)

34. Аналитические методы. Одной из главных задач звездной статистики является определение пространственного распределения звезд в произвольном направлении, определяемом, например, заданной галактической долготой и широтой. Нашей задачей в этом случае является определение звездной плотности $D(r)$ в функции расстояния, причем *звездной плотностью мы называем число звезд в единице объема в данном месте неба*. Под $D(r)$ можно понимать как плотность всех звезд вообще, так и плотность звезд, выделенных на основании каких-либо их свойств. Обычно такими свойствами являются некоторые физические характеристики звезд, легко поддающиеся определению, или же какие-нибудь кинематические свойства. Такого рода свойства мы называем *морфологическими*. Можно, например, говорить о плотности звезд, принадлежащих к одному и тому же спектральному классу или к одному типу переменности, а также о плотности звезд с большим или малым собственным движением.

Методы определения звездной плотности чаще всего основываются на подсчетах звезд, хотя иногда для этой цели используют также средние параллаксы избранной группы звезд или же их средние собственные движения.

Решение этой задачи может быть получено либо аналитическими методами, либо численными. *Аналитические* методы были предложены Зеелигером и в дальнейшем развиты Шарлье и Шварцшильдом. *Численные* методы были разработаны Каптейном и его последователями — Сирсом, ван Райном и Боком.

В настоящее время почти все астрономы пользуются численными методами как более эффективными в применении к актуальным задачам звездной астрономии. В последнее время установлено, что в пространственном распределении звезд имеются неправильности, которые аналитические методы не в состоянии учесть. В этом случае численные методы проявляют необходимую эластичность, способную охватить все те случаи, в которых действительность довольно далека от того, что можно заранее предполагать. А с такими именно случаями приходится часто иметь дело при изучении нашей Галактики, хотя бы по причине ее спиральной структуры, а также вследствие того, что многие звезды ранних спектральных классов обнаруживают тенденцию группировки в отдельные „гнезда“.

Тем не менее следует также ознакомиться и с аналитическими методами хотя бы потому, что они во многих случаях являются тем математическим фундаментом, на основе которого создаются численные методы.

Начнем описание аналитических методов с изложения основной идеи определения звездной плотности $D(r)$, которая сводится к нахождению уравнений, связывающих эту функцию с результатами подсчетов звезд, величинами $N(m)$ и $A(m)$.

Рассмотрим элемент объема dr , находящийся на расстоянии r от центра шара (рис. 21).

Пусть нам известна функция светимости $\varphi(M)$, т. е. функция распределения абсолютных величин звезд, представляющая собой отношение числа звезд с абсолютной величиной в интервале M и $M + dM$ к числу всех звезд в данном объеме. Будем и в дальнейшем указанную функцию называть *функцией светимости*. Предположим также, что эта функция не изменяется во всем доступном нам пространстве. В таком случае число звезд в рассматриваемом элементе объема равно

$$D(r) \varphi(M) r^2 dr dM,$$

и, следовательно, оно будет равно числу звезд $\delta(m, r)$ с видимой

величиной от m до $m + dm$, находящихся в этом же элементе объема,

$$\delta(m, r) dm dr = D(r) \varphi(m + 5 - 5 \log r) r^2 dm dr,$$

так как при $r = \text{const}$

$$dm = dM.$$

В указанной выше формуле не учтено межзвездное поглощение. Если же его учесть, то получим [согласно (13.4)]

$$\delta(m, r) dm, dr = D(r) \varphi[m + 5 - 5 \log r - A(r)] r^2 dm dr, \quad (34.1)$$

где $A(r)$ — межзвездное поглощение, являющееся функцией расстояния.

Число всех звезд с видимой величиной от m до $m + dm$, т. е. то, что было раньше обозначено $A(m)$, получим, интегрируя $\delta(m, r)$ по всем расстояниям,

$$A(m) dm = dm \int_0^{\infty} \delta(m, r) dr = dm \int_0^{\infty} D(r) \varphi[m + 5 - 5 \log r - A(r)] r^2 dr. \quad (34.2)$$

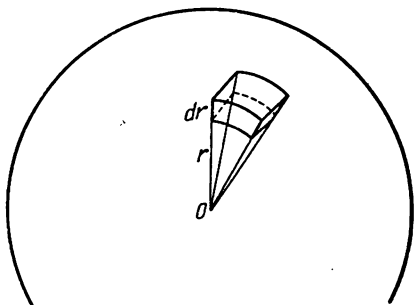


Рис. 21.

Таким образом, мы получили первое интегральное уравнение Шварцшильда [в оригинальных уравнениях автора отсутствовал член $A(r)$], которое дает возможность определять $D(r)$, если известны величины $A(m)$, $\varphi(M)$ и $A(r)$.

Если же функция светимости $\varphi(M)$ неизвестна, то надо ввести второе уравнение, содержащее две неизвестные функции $D(r)$ и $\varphi(M)$, а также другие функции, определяемые из наблюдений, например средний параллакс $\bar{\pi}(m)$ звезд с видимой величиной от m до $m + dm$.

Для того, чтобы получить средний параллакс, надо умножить параллакс каждой звезды $\pi = r^{-1}$ на число звезд в единице объема с видимой звездной величиной m , т. е. на $D(r) \varphi(M) r^2 dr dm$, проинтегрировать в пределах от нуля до бесконечности и полученный результат разделить на число звезд видимой величины m , т. е. на величину $A(m)$. Следовательно,

$$\bar{\pi}(m) A(m) dm = dm \int_0^{\infty} D(r) \varphi [m + 5 - 5 \log r - A(r)] r dr. \quad (34.3)$$

Таким образом, получаем второе интегральное уравнение Шварцшильда, в котором $\pi(m)$ и $A(m)$ должны быть известны из наблюдений. Два уравнения можно решить и определить из них неизвестные функции $D(r)$ и $\varphi(M)$.

Легко обобщить наши выводы, вводя вместо m любой другой параметр x , величина которого каким-либо образом зависит от расстояния r . Таким параметром может быть, например, собственное движение звезд μ , зависящее, как известно, от расстояния r и тангенциальной скорости V_t :

$$\mu = \frac{1}{4,74} \frac{V_t}{r};$$

в этом случае именно V_t играет роль искомого параметра. Обозначим через X абсолютную величину этого параметра, понимая под этим то значение x , которое соответствует условно принятому расстоянию $r = r_0$. Пусть $\varphi(X) dX$ будет относительным числом звезд, у которых рассматриваемый параметр заключен в пределах от X до $X + dX$ [функция $\varphi(X)$ нормирована так же, как и функция $\varphi(M)$,

$$\text{т. е. } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X) dX = 1].$$

Число звезд в элементе объема $r^2 dr$, имеющих параметр X в пределах от X до $X + dX$, равно

$$D(r) \varphi(X) r^2 dr dX.$$

Так как внутри рассматриваемого объема $r = \text{const}$, то $dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx$, и, следовательно, имеем

$$D(r) \varphi(X) \frac{\partial X}{\partial x} r^2 dr dx.$$

Интегрируя это выражение по r в пределах от 0 до ∞ , получим число всех звезд $A(x)dx$, видимая величина параметра которых заключена в интервале $x, x+dx$

$$A(x)dx = dx \int_0^{\infty} D(r) \varphi(X) \frac{\partial X}{\partial x} r^2 dr.$$

Введем также средний параллакс $\bar{\pi}(x)$ звезд с видимой величиной параметра, заключенной в интервале $x, x+dx$. Средний параллакс должен быть равен интегралу по r произведения $\pi = r^{-1}$ на число звезд $D(r) \varphi(X) r^2 dr dX$, деленному на $A(x)dx$, т. е.

$$\bar{\pi}(x) A(x)dx = dx \int_0^{\infty} D(r) \varphi(X) \frac{\partial X}{\partial x} r dr.$$

Таким образом, мы получили два основных уравнения звездной статистики.

Наши предыдущие выводы можно обобщить на два и больше абсолютных параметров, которые мы обозначим через $X_1, X_2, \dots$. Пусть $\varphi(X_1, X_2, \dots)$ является относительным числом звезд, параметры которых заключены в интервалах $X_1, X_1+dx_1; X_2, X_2+dx_2$ и т. д. $A(x_1, x_2, \dots)$ будет наблюдаемым числом звезд с видимой величиной параметров $x_1, x_1+dx_1; x_2, x_2+dx_2; \dots$. Пусть x_1 является функцией только X_1 и r , x_2 — функцией X_2 и r и т. д., в этом случае имеем

$$\begin{aligned} A(x_1 x_2 \dots) dx_1 dx_2 \dots &= \\ &= dx_1 dx_2 \dots \int_0^{\infty} r^2 D(r) \varphi(X_1, X_2, \dots) \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \dots dr, \\ \bar{\pi}(x_1 x_2 \dots) A(x_1, x_2 \dots) dx_1 dx_2 \dots &= \\ &= dx_1 dx_2 \dots \int_0^{\infty} r D(r) \varphi(X_1 X_2 \dots) \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \dots dr. \end{aligned}$$

X_1 и x_1 могут, например, быть соответственно абсолютной (M) и видимой (m) звездной величиной; X_2 и x_2 — тангенциальной скоростью V_t и собственным движением μ и т. д.

Общее решение этих уравнений довольно трудно получить, поэтому мы редко им пользуемся¹⁾.

¹⁾ См. Pahlen E., Lehrbuch der Stellarstatistik, Lpz., 1937, стр. 413; Паренато П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, § 41 и 42, или оригинальную работу Schwarzschild K., AN (Astronom. Nachr.), 185 (4422), 21 (1910) и 190 (4587), 361 (1912).

Чаще всего мы предполагаем, что $D(r)$ и $\varphi(M)$ достаточно точно аппроксимируются известными функциями, в которых неизвестными являются только параметры.

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$D(r) = 10^{h+kx-lx^2}, \quad (34.4)$$

где

$$x = 5 \log r - 5,$$

а

$$\varphi(M) = 10^{p+qM-tM^2}, \quad (34.5)$$

где

$$M = m + 5 - 5 \log r = m - x.$$

В таком случае первое уравнение Шварцшильда будет иметь вид

$$A(m) = \frac{10^3}{5\text{Mod}} \int_{-\infty}^{+\infty} 10^{h+p+qm-tm^2+(k-q+2tm+0,6)x-(l+t)x^2} dx. \quad (34.6)$$

Интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} 10^{A+Bx-Cx^2} dx$$

простой подстановкой легко приводится к интегралу Лапласа¹⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi};$$

таким образом, имеем

$$I = \sqrt{\frac{\pi\text{Mod}}{C}} 10^{A+\frac{B^2}{4C}}.$$

Следовательно, интегрируя уравнение (34.6), приходим к выводу, что функция $A(m)$ является экспоненциальной функцией второй степени, т. е.

$$A(m) = 10^{a+bm-cm^2}. \quad (34.7)$$

Справедлива также обратная теорема: Если $A(m)$ является экспоненциальной функцией второй степени относительно m , а $\varphi(M)$ является такой же функцией относительно M , то звездная плотность $D(r)$ должна быть также экспоненциальной функцией второй степени относительно $\log r$.

Сравнивая коэффициенты при различных степенях m в уравнении (34.7) и в том уравнении, которое является результатом интегрирования уравнения (34.6), получаем следующие три равенства,

¹⁾ См. дополнение 3.

которые можно считать уравнениями относительно неизвестных h , k и l ,

$$h = -3 + \log 5 - 0,5 \log \frac{\pi}{\text{Mod}} + a - p + 0,5 \log \frac{t^2}{t-c} - \frac{(b-q)^2}{4(t-c)},$$

$$k = \frac{bt-cq}{t-c}, \quad l = \frac{tc}{t-c}. \quad (34.8)$$

Величины h , k , l можно определить, если функции $A(m)$ и $\varphi(M)$ заданы, т. е. если известны коэффициенты a , b , c , p , q и t .

Если считать функцию светимости неизвестной, то для решения задачи необходимо привлечь также второе уравнение Шварцшильда (34.2), которое в этом случае примет вид,

$$\bar{\pi}(m) A(m) = \frac{10^2}{5\text{Mod}} \int_{-\infty}^{+\infty} 10^{h+p+qm-tm^2+(k-q+2tm+0,4)x-(l+t)x^2} dx. \quad (34.9)$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\bar{\pi}(m) A(m) = 10^{D+Em-Fm^2}.$$

Пусть

$$\bar{\pi}(m) = 10^{d+em-fm^2}. \quad (34.10)$$

Тогда, подставляя $A(m) = 10^{a+bm-cm^2}$ и приравнявая коэффициенты при различных степенях m в обеих частях выражения, полученного в результате интегрирования второго уравнения Шварцшильда, имеем

$$d = \frac{0,1(q-k)-0,05}{l+t} - 1, \quad e = \frac{0,2t}{t+l}; \quad f = 0. \quad (34.11)$$

Следовательно, средний параллакс является *линейной* экспоненциальной функцией m , если, конечно, наши предположения о виде функций $D(r)$ и $\varphi(M)$ [см. (34.4) и (34.5)] правильны. В этом случае, как и в предыдущем, справедлива также и обратная теорема.

Пусть функции $A(m)$ и $\bar{\pi}(m)$ заданы, т. е. нам известны величины a , b , c , d , e , тогда, прибавив к системе уравнений (34.8) и (34.11) еще одно уравнение, являющееся условием нормирования функции $\varphi(M)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M) dM = \int_{-\infty}^{+\infty} 10^{p+qM-tM^2} dM = 1$$

или

$$p = 0,5 \log \frac{t}{\pi \text{Mod}} - \frac{q^2}{4t}, \quad (34.12)$$

можно определить неизвестные p , q , t , h , k и l .

При рассмотрении интегральных уравнений Шварцшильда влияние межзвездного поглощения света не принималось во внимание, однако это может быть исправлено следующим образом.

Пусть $A(r)$ — межзвездное поглощение в звездных величинах в данной фотометрической системе. Следовательно, вместо выражения $\varphi(m+5-5\log r)$ всюду должно быть

$$\varphi[m+5-5\log r-A(r)].$$

Вместо переменной r введем новую переменную r_0 так, что

$$\log r_0 = \log r + 0,2 A(r),$$

т. е.

$$r_0 = r \cdot 10^{0,2 A(r)} = r e^{P(r)}, \quad (34.13)$$

$$P(r) = \frac{0,2 A(r)}{\text{Mod}}.$$

Отсюда найдем

$$r^2 dr = r_0^2 dr_0 \frac{e^{-3P(r)}}{1+r \frac{dP}{dr}} = r_0^2 dr_0 \frac{10^{-0,6A(r)}}{1+\frac{0,2}{\text{Mod}} \frac{dA}{dr} r}.$$

Эту новую переменную r_0 можно ввести в уравнение (34.2); обозначим

$$\Delta(r_0) = D(r) \frac{10^{-0,6A(r)}}{1+\frac{0,2}{\text{Mod}} \frac{dA}{dr} r}, \quad (34.14)$$

тогда

$$A(m) = \int_0^\infty \Delta(r_0) \varphi(m+5-5\log r_0) r_0^2 dr_0,$$

т. е. получили уравнение такого вида, как и (34.2). Определив из этого уравнения $\Delta(r_0)$, легко вычислить затем звездную плотность $D(r)$, пользуясь выражениями (34.13) и (34.14).

Если сделать такую же подстановку в уравнении (34.3), то получим второе интегральное уравнение звездной статистики

$$\bar{\pi}(m) A(m) = \int_0^\infty \Delta(r_0) \varphi(m+5-5\log r_0) r_0 dr_0.$$

В наших уравнениях не учтено еще одно обстоятельство, а именно то, что межзвездная материя образует отдельные облака, а не распределяется в пространстве непрерывно (см. п. 43). Это может искажать полученные результаты¹⁾.

Рассмотрим снова элемент объема $r^2 dr$, соответствующий телесному углу, равному единице (рис. 21).

Число звезд $\delta(M, r, x) dM dr dx$, находящихся в этом объеме и имеющих расстояние от r до $r+dr$, абсолютную звездную величину от M до $M+dM$, свет которых проходит через число облаков в пределах от x до $x+dx$, расположенных на данном расстоянии, равно $\delta(M, r, x) dM dr dx = D(r) \varphi(M) f(x) r^2 dM dr dx =$

¹⁾ См. W. Zonn and J. Stodółkiewicz, Warsaw Reprint 71 (1958).

$= D(r) \varphi [m + 5 - 5 \log r - \varepsilon x] f(x) r^2 dm dr dx$. Здесь ε — среднее поглощение в одном облаке, а $f(x)$ — вероятность пересечения лучом зрения x облаков. Следовательно, число всех звезд, имеющих видимую звездную величину от m до $m + dm$, $A(m) dm$ должно быть равно

$$A(m) dm = dm \int_0^{\infty} D(r) r^2 dr \int_0^{\infty} \varphi (m + 5 - 5 \log r - \varepsilon x) f(x) dx.$$

Предположим, что функцию $\varphi (m + 5 - 5 \log r - \varepsilon x)$ можно разложить в ряд в интервале $x - x_0$, где x_0 — среднее число пересеченных на данном расстоянии облаков, тогда второй интеграл можно преобразовать с точностью до членов третьего порядка следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi (m + 5 - 5 \log r - \varepsilon x) f(x) dx = & \varphi (m + 5 - 5 \log r - \varepsilon x_0) + \\ & + \frac{\partial^2 \varphi (m + 5 - 5 \log r - \varepsilon x_0)}{\partial x^2} \frac{\sigma^2}{2!}, \end{aligned}$$

при этом были использованы известные свойства функции вероятности $f(x)$, а именно

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_0^{\infty} (x - x_0) f(x) dx = 0, \quad \int_0^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx = \sigma^2,$$

где σ — дисперсия величины x . Так как поглощение $A = \varepsilon x$, среднее же поглощение $A_0 = \varepsilon x_0$, то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial m^2}$$

и

$$\begin{aligned} A(m) = & \int_0^{\infty} D(r) r^2 \left\{ \varphi [m + 5 - 5 \log r - A_0(r)] + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi [m + 5 - 5 \log r - A_0(r)]}{\partial m^2} \right\} dr. \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ имеет вид распределения Пуассона, то все центральные моменты четного порядка равны x_0 ; следовательно,

$$\begin{aligned} A(m) = & \int_0^{\infty} D(r) r^2 \left\{ \varphi [m + 5 - 5 \log r - A_0(r)] + \right. \\ & \left. + \varepsilon \frac{A_0(r)}{2} \frac{\partial^2 \varphi [m + 5 - 5 \log r - A_0(r)]}{\partial m^2} \right\} dr. \end{aligned} \quad (34.15)$$

В результате учета „клочковатости“ межзвездной материи вместо уравнения (34.2) получаем уравнение (34.15), которое можно короче записать так

$$A(m) = \int_0^{\infty} D(r) r^2 \left[\varphi(M) + \epsilon \frac{A_0(r)}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial M^2} \right] dr, \quad (34.16)$$

где

$$M = m + 5 - 5 \log r - A_0(r). \quad (34.17)$$

Аналогичное изменение следует ввести также и во второе интегральное уравнение звездной статистики; однако вряд ли это имеет смысл, так как в данном случае совместное решение обоих уравнений с неизвестными $D(r)$ и $\varphi(M)$ будет чрезвычайно трудно с практической точки зрения.

35. Аналитические методы в приложении к избранным звездам.

Изучение пространственного распределения звезд с одной и той же абсолютной величиной или же звезд с близкими абсолютными величинами, несомненно, является более легкой задачей. В первом случае вместо уравнения (34.2) будем иметь выражение

$$A(m) dm = r^2 D(r) dr,$$

где $D(r)$ обозначает, как и раньше, звездную плотность. В самом деле, звезды, находящиеся в элементе объема, будут иметь одну и ту же видимую величину, так как $M = \text{const}$,

$$m = M - 5 + 5 \log r + A(r).$$

Дифференцируя это выражение по r , найдем

$$dm = \left(\frac{5 \text{ Mod}}{r} + \frac{dA}{dr} \right) dr,$$

где $A(r)$ — межзвездное поглощение, как и в предыдущем пункте.

Вследствие малости величины $\frac{dA}{dr}$ можно ею пренебречь; следовательно,

$$D(r) = 5 \text{ Mod} \frac{A(m)}{r^3}. \quad (35.1)$$

Рассмотрим второй случай, когда абсолютные величины звезд только немного отличаются от некоторой средней величины M_0 . Для этого случая Мальмквист в 1920 г. ¹⁾ получил два простых соотношения: одно между средней абсолютной величиной звезд $\bar{M}(m)$, имеющих видимую величину m , и аргументом m , а второе — между наблюдаемой и действительной дисперсией этих величин.

Эти соотношения получены в предположении, что функция светимости $\varphi(M)$ имеет вид функции Гаусса с дисперсией σ , т. е.

$$\varphi(M) = K e^{-\frac{(M - M_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (35.2)$$

¹⁾ *Lund Medd.*, II, № 22 (1920).

Средняя абсолютная величина $\bar{M}(m)$ звезд с видимой величиной m равна

$$\bar{M}(m) = \frac{\int_0^{\infty} M \delta(m, r) dr}{\int_0^{\infty} \delta(m, r) dr},$$

где $\delta(m, r)$ — число звезд в элементе объема с видимой величиной от m до $m + dm$.

Привлекая формулу (34.2), получим

$$\begin{aligned} \bar{M}(m) &= \\ &= \frac{1}{A(m)} \int_0^{\infty} r^2 D(r) [m + 5 - 5 \log r - A(r)] \varphi[m + 5 - 5 \log r - A(r)] dr. \end{aligned}$$

Подставим выражение (35.2) в уравнение (34.2), тогда

$$A(m) = K \int_0^{\infty} r^2 D(r) e^{-\frac{(m+5-5 \log r - A(r) - M_0)^2}{2\sigma^2}} dr;$$

дифференцируя полученное выражение по m , имеем

$$\frac{dA(m)}{dm} = -\frac{K}{\sigma^2} \int_0^{\infty} r^2 D(r) \times$$

$$\times [m + 5 - 5 \log r - A(r) - M_0] e^{-\frac{(m+5-5 \log r - A(r) - M_0)^2}{2\sigma^2}} dr,$$

т. е.

$$\frac{dA(m)}{dm} = -\frac{1}{\sigma^2} [A(m) \bar{M}(m) - A(m) M_0].$$

Из этого следует, что

$$\bar{M}(m) = M_0 - \frac{\sigma^2}{A(m)} \frac{dA(m)}{dm},$$

или в более удобном логарифмическом виде

$$\bar{M}(m) = M_0 - \frac{\sigma^2}{\text{Mod}} \frac{d \log A(m)}{dm}. \quad (35.3)$$

Таким же образом получим выражение для квадрата наблюдаемой дисперсии абсолютных величин $\sigma^2(m)$

$$\sigma^2(m) = \int_0^{\infty} (M - M_0)^2 \delta(m, r) dr : \int_0^{\infty} \delta(m, r) dr.$$

Вычислим вторую производную $\frac{d^2 A(m)}{dm^2}$ по m ; преобразовав полученное выражение, имеем

$$\sigma^2(m) = \sigma^2 + \frac{\sigma^4}{\text{Mod}} \frac{d^2 \log A(m)}{dm^2}. \quad (35.4)$$

Следует обратить внимание на то, что формулы (35.3) и (35.4) не содержат $D(r)$, следовательно, они справедливы при любом пространственном распределении звезд. Эти формулы справедливы также и в том случае, когда мы, учитывая клочковатую структуру межзвездной материи, вместо уравнения (34.2) пользуемся уравнением (34.16). В этом случае с помощью преобразований, аналогичных описанным выше, можно в конце концов получить формулы (35.3) и (35.4), которые и используются в следующем пункте.

Вернемся, однако, к определению $D(r)$ в том случае, когда функция светимости представляется формулой (35.2) и дисперсия σ абсолютных величин сравнительно мала.

Если бы $\sigma = 0$, т. е. все звезды имели бы одну и ту же абсолютную величину M_0 , то пространственная плотность определялась бы по формуле (35.1), которую мы перепишем в виде

$$D(r) = \frac{5 \text{ Mod}}{r^3} A_0(m) = \frac{5 \text{ Mod}}{r^3} A_0(M_0 + 5 \log r - 5 + A(r)). \quad (35.5)$$

Здесь $A_0(m)$ — некоторая „идеальная“ функция m , которая соответствует случаю $\sigma = 0$, т. е. $M = M_0 = \text{const}$. Так как отклонения наблюдаемой функции $A(m)$ от идеальной являются результатом влияния на наши подсчеты случайных ошибок величины m , подчиняющихся закону Гаусса, то, зная $A(m)$, можно вычислить величину $A_0(m)$ способом, предложенным Эддингтоном еще в 1913 г.¹⁾

В применении к рассматриваемому случаю этот способ сводится к вычислению $A_0(m)$ по формуле

$$A_0(m) = A(m) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 A}{dm^2} + \frac{\sigma^4}{8} \frac{d^4 A}{dm^4} - \dots$$

Принципиально говоря, согласно формуле (35.4), дисперсия $\sigma(m)$ является функцией m , однако на практике часто величину $d^2 \log A(m)/dm^2$ можно считать постоянной, а, следовательно, постоянной также будет величина $\sigma^2(m)$. Ограничиваясь первыми двумя членами последнего равенства, можно определить $A_0(m)$. Затем по формуле (35.5) легко вычислить $D(r)$; при этом величина r определяется по известным величинам m , $A(r)$ и $\bar{M}(m)$; последняя величина вычисляется по формуле (35.3).

Все же аналитические методы не дают результатов настолько близких действительности, насколько близки к ней результаты, полученные численными методами звездной статистики при одних и тех же предположениях. Поэтому мы считаем необходимым заняться в следующем пункте именно этими методами.

36. Численные методы (схема Каптейна — Бока). Астрономы, как мы уже упоминали, предпочитают пользоваться численными методами звездной статистики главным образом потому, что звездная плот-

¹⁾ Содержание этой работы излагается в дополнении 4. Этот способ широко используется в статистике.

ность в окрестностях Солнца часто изменяется довольно неправильно. В этом случае большинство аналитических методов теряет свою силу; это заставляет нас использовать численные методы, которые и в этих случаях вполне применимы и дают довольно правильные и точные решения.

Идея численного решения проблемы пространственного распределения звезд принадлежит Каптейну, который ее реализовал в начале нашего столетия в виде схемы, названной его именем. Впоследствии эту схему несколько изменил Бок¹⁾. Мы предлагаем ее читателям в именно этой измененной форме, более удобной и практичной, чем классическая схема Каптейна.

Предположим, что функция светимости $\varphi(M)$ одинакова во всем изучаемом нами пространстве и что это пространство оптически пусто. Впоследствии можно будет отбросить оба эти предположения.

Рассмотрим в телесном углу, равном единице, сферические слои, ограниченные сферическими поверхностями с радиусами $r_1, r_2, \dots$, выбранными так, что

$$\log r_1 = 0,1,$$

$$\log r_2 = 0,3,$$

$$\log r_3 = 0,5,$$

$$\dots$$

Так как эти слои тонки, то можно принять, что все звезды, заключенные в k -м слое, имеют одинаковое расстояние

$$\log r_k = \frac{2k}{10} \quad \text{и} \quad \log \pi_k = -\frac{2k}{10}, \quad (36.1)$$

следовательно,

$$k = 5 \log r_k = -5 \log \pi_k.$$

В этом случае зависимость между абсолютной звездной величиной M и видимой m выражается следующим образом:

$$M = m + 5 - k. \quad (36.2)$$

Если функция светимости $\varphi(M)$ известна, то легко определить относительное число звезд, имеющих видимую звездную величину в пределах от $m - 1/2$ до $m + 1/2$, равное $\varphi(m + 5 - k)$.

Предположим временно, что звездная плотность $D(r)$ постоянна во всем изучаемом нами пространстве и равна единице. В таком случае число звезд $\delta_{m,k}$, находящихся в слое с номером k и имеющих видимую величину в пределах от $m - 1/2$ до $m + 1/2$, равно

$$\delta_{m,k} = \varphi(m + 5 - k) V_k, \quad (36.3)$$

где V_k — объем k -го слоя.

¹⁾ См., например, Bok B. J., The Distribution of the Stars in Space, Chicago, 1937, 26.

Таблица 4

(м, log π) для $b = 0^\circ$

r	m	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\log V$
10		7,03	7,11	7,19	7,24	7,29	7,33	7,37						9,31
16		7,40	7,50	7,58	7,66	7,71	7,76	7,80	7,84					9,78
25		7,88	8,00	8,10	8,18	8,26	8,31	8,36	8,40	8,44				0,38
40		8,33	8,48	8,60	8,70	8,78	8,86	8,91	8,96	9,00	9,04			0,98
63		8,77	8,93	9,08	9,20	9,30	9,38	9,46	9,51	9,56	9,60	9,64		1,58
100		9,04	9,37	9,53	9,68	9,80	9,90	9,98	0,06	0,11	0,16	0,20	0,24	2,18
158		9,55	9,64	9,97	0,13	0,28	0,40	0,50	0,58	0,66	0,71	0,76	0,80	2,78
251		9,72	0,15	0,24	0,57	0,73	0,88	1,00	1,10	1,18	1,26	1,31	1,36	3,38
400		9,66	0,32	0,75	0,84	1,17	1,33	1,48	1,60	1,70	1,78	1,86	1,91	3,98
630		9,65	0,26	0,92	1,35	1,44	1,77	1,93	2,08	2,20	2,30	2,38	2,46	4,58
1000		9,93	0,25	0,86	1,52	1,95	2,04	2,37	2,53	2,68	2,80	2,90	2,98	5,18
1580		0,03	0,53	0,85	1,46	2,12	2,55	2,64	2,97	3,13	3,28	3,40	3,50	5,78
2500		0,03	0,63	1,13	1,45	2,06	2,72	3,15	3,24	3,57	3,73	3,88	4,00	6,38
4000		0,05	0,63	1,23	1,73	2,05	2,66	3,32	3,75	3,84	4,17	4,33	4,48	6,98
6300		0,65	1,23	1,83	2,33	2,65	2,93	3,26	3,92	4,35	4,44	4,77	4,93	7,58
10000		1,25	1,83	2,43	2,93	3,25	3,5	3,86	4,52	4,95	5,04	5,37	5,81	8,18

ТАБЛИЦА (m , $\log \pi$) для $b=10^\circ$

z	$r \backslash m$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\log V$
2	10	7,03	7,11	7,19	7,24	7,29	7,33	7,37						9,31
3	16	7,40	7,50	7,58	7,66	7,71	7,76	7,80	7,84					9,78
4	25	7,88	8,00	8,10	8,18	8,26	8,31	8,36	8,40	8,44				0,38
7	40	8,33	8,48	8,60	8,70	8,78	8,86	8,91	8,96	9,00	9,04			0,98
11	63	8,77	8,93	9,08	9,20	9,30	9,38	9,46	9,51	9,56	9,60	9,64	M	1,58
17	100	9,04	9,37	9,53	9,68	9,80	9,90	9,98	0,06	0,11	0,16	0,20	0,24	2,18
27	158	9,49	9,62	9,97	0,13	0,28	0,40	0,50	0,58	0,66	0,71	0,76	0,80	2,78
44	251	9,49	0,05	0,19	0,57	0,73	0,88	1,00	1,10	1,18	1,26	1,31	1,36	+13
70	400	9,23	9,97	0,55	0,76	1,17	1,33	1,48	1,60	1,70	1,78	1,86	1,91	3,38
110	630	8,70	9,66	0,42	1,00	1,26	1,70	1,88	2,03	2,15	2,25	2,37	2,46	3,98
175	1000	8,65	9,03	0,03	0,80	1,35	1,67	2,12	2,34	2,53	2,70	2,80	2,94	+11
270	1580	8,45	8,95	9,35	0,36	1,13	1,68	1,96	2,45	2,73	3,00	3,20	3,32	+9
430	2500	8,18	8,78	9,28	9,67	0,65	1,37	1,92	2,21	2,76	3,05	3,38	3,63	+7
700	4000	7,72	8,30	8,90	9,40	9,78	0,76	1,52	2,10	2,37	2,97	3,22	3,63	6,38
1100	6300		7,62	8,20	8,80	9,30	9,68	0,66	1,47	2,12	2,46	3,00	3,26	6,98
1700	10000			7,17	7,75	8,35	8,85	9,23	0,21	1,02	1,67	2,01	2,55	7,58
					-5		-3		-1	+1		+3		8,18

слоя в табл. $(m, \log \pi)$. (В таблице для $b = 10^\circ$ это обстоятельство учтено.) Схема Каптейна — Бока в противоположность всем существующим аналитическим методам исследования пространственного распределения звезд позволяет учесть изменение функции светимости с удалением от плоскости Галактики.

Эта схема пригодна также и при наличии межзвездного поглощения, которое может быть учтено, если, конечно, известна его величина A_k для каждого слоя. В этом случае вместо (36.3) напомним

$$\varphi(M) = \varphi(m + 5 - k - A_k),$$

т. е. всю k -ю строку надо передвинуть вправо на отрезок, равный A_k . Указанный отрезок может не выражаться целым числом, однако это неважно, так как функцию светимости можно интерполировать между целыми значениями m . Умножая каждое полученное путем интерполирования значение функции $\varphi(m + 5 - k - A_k)$ на V_k , получим новые данные для таблицы $(m, \log \pi)$; по этой таблице, в конце концов, вычислим звездные плотности Δ_k . В данном случае нас совершенно не интересует аналитический вид зависимости межзвездного поглощения от расстояния. Необходимо только каким-либо образом определить величину поглощения A_k , соответствующую каждому слою; это можно сделать по эмпирическим формулам или же на основании данных, которыми мы должны располагать, чтобы построить правильную таблицу.

Некоторое изменение описанного метода было сделано Сирсом в 1931 г.¹⁾; это изменение облегчает решение системы полученных уравнений и, кроме того, позволяет учесть изменение функции светимости с расстоянием. Однако оно не изменяет основной идеи Каптейна, поэтому мы не излагаем его здесь, отсылая за подробностями к специальной литературе.

В схемах, рассматриваемых до сих пор, не учитывалось того, что межзвездная поглощающая материя имеет клочковатую структуру (стр. 135), а учет этого обстоятельства может изменить получаемые результаты. В связи с этим один из авторов недавно предложил несколько изменить схему Каптейна — Бока (так же как это уже было сделано в конце п. 34)²⁾.

В самом деле, пусть ϵ есть среднее поглощение в одном облаке межзвездной материи, а $f(x)$ — вероятность того, что луч зрения пересечет x облаков. Так как обычно это число невелико, то можно предположить, что вероятность $f(x)$ вычисляется по формуле распределения Пуассона³⁾

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},$$

¹⁾ *ApJ.*, 74, 268 (1931).

²⁾ *Warsaw Reprint* 71 (1958).

³⁾ См. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 1950, стр. 91, или Ястремский Б. С., Математическая статистика, 1956, стр. 104.

где λ — среднее число пересеченных на данном расстоянии облаков. Следовательно, среднее поглощение на данном расстоянии равно $A_k = \varepsilon \lambda$.

Число звезд, находящихся в слое с номером k и имеющих видимую величину в интервале $m - 1/2$, $m + 1/2$, должно быть равно

$$\delta_{m,k} = \sum_{x=0}^{\infty} \varphi(m+5-k-\varepsilon x) f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \varphi(m+5-k-\varepsilon x) \times \\ \times e^{-\frac{A_k}{\varepsilon}} \left(\frac{A_k}{\varepsilon}\right)^x \frac{1}{x!}.$$

Таким образом, определив соответствующие величины $f(x)$ при помощи готовых статистических таблиц, можно по приведенной выше формуле вычислить таблицу $(m, \log \pi)$, кроме того, можно разложить функцию $\varphi(m+5-k-\varepsilon x) f(x)$ в ряд так же, как это было сделано в п. 41; ограничиваясь членами второго порядка, получим

$$\delta_{m,k} = \varphi(m+5-k-A_k) + \varepsilon \frac{A_k}{2} \frac{\partial^2 \varphi(m+5-k-A_k)}{\partial m^2},$$

здесь A_k — среднее поглощение в k -м слое; правильнее пользоваться именно этой формулой при вычислении таблицы $(m, \log \pi)$.

Схему Каптейна — Бока можно применять также в случае, когда вместо функции $A(m)$ известна, например, функция $f(\mu)$, если, конечно, известно распределение тангенциальных скоростей звезд в данном направлении, т. е. известна функция $F(V_t)$.

Необходимым условием применимости схемы Каптейна — Бока является полнота наблюдательных данных, другими словами, необходимо знать видимые величины m или собственные движения μ всех изучаемых звезд в данном телесном углу, конечно до определенной предельной величины m или μ , зависящей от используемого материала. Поэтому Каптейн еще в 1906 г. предложил выбрать на небе некоторое число площадок и в этих площадках изучить все доступные нам физические характеристики звезд, играющие важную роль в звездной астрономии, а именно: видимые и абсолютные величины, спектральные классы, собственные движения, лучевые скорости, показатели цвета и т. д.

Этот проект под названием *плана избранных площадей* (Plan of Selected Areas) был принят всеми астрономами. Размер площадок $3^\circ \times 3^\circ$. К сожалению, до сих пор это серьезное и полезное предприятие не доведено до конца, хотя на многих обсерваториях получен богатый материал для исследования звезд в 206 таких избранных площадках (Selected Areas), расположенных по всему небу. Последнее обстоятельство вызывает теперь самые серьезные возражения, так как для изучения строения Галактики необходимо иметь значительно больше площадок в Млечном Пути, чем это получается при их равномерном распределении на небе, то же самое относится и к полюсу Галактики. В этих областях следовало бы увеличить число площадок даже за счет сокращения числа их в промежуточных галактических широтах, изучение которых имеет второстепенное значение. Поэтому многие астрономы в настоящее время предпринимают аналогичные исследования в специально выбранных областях неба; это является своего рода расширением плана избранных площадей.

Схемы, аналогичные схеме Каптейна — Бока, можно применять также к звездам, дисперсия абсолютных величин которых невелика, т. е. к звездам, функция светимости которых имеет вид

$$\varphi(M) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(M-M_0)^2}{2\sigma^2}},$$

причем воспользуемся здесь так же, как и при рассмотрении аналитических методов (см. п. 35), выражениями, полученными Мальмквистом [см. формулы (35.3) и (35.4)] для средней абсолютной величины $\bar{M}(m)$ и средней дисперсией $\sigma(m)$.

По подсчетам звезд определяем функцию $A(m)$, на основании которой вычисляем затем $\bar{M}(m)$ и $\sigma(m)$ по формулам (35.3) и (35.4). Следовательно, принятая нами функция светимости будет для каждого m несколько иной, а именно

$$\varphi_m(M) = \frac{1}{\sigma(m) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[M - \bar{M}(m)]^2}{2\sigma^2(m)}}.$$

Можно сначала построить таблицу (m, M) , подставляя в нее результаты умножения $A(m)$ на соответствующие $\varphi_m(M)$, а затем величины M заменить соответствующими им значениями r , вычисленными по формуле

$$M - m = 5 - 5 \log r$$

или

$$M - m = 5 - 5 \log r - A(r)$$

в зависимости от того, надо ли учитывать межзвездное поглощение или нет.

Суммируя величины, стоящие в каждой строке таблицы (m, r) (если, конечно, $r = \text{const}$ соответствует строка, а не столбец), и деля сумму на V_k , т. е. на объем каждого слоя, получим звездную плотность $D(r)$ как функцию расстояния r . Технические подробности этого метода излагаются в оригинальных работах и монографиях ¹⁾.

37. Метод Вашакидзе — Оорта. Применение всех описанных выше методов требует знания функции светимости $\varphi(M)$, которая в том или ином виде входит во все наши рассуждения. Эту функцию необходимо знать а priori при исследовании пространственного распределения звезд методами, описанными в предыдущих параграфах.

Известно, что звезды различных спектральных классов распределены в нашей Галактике по-разному. Это различие проявляется особенно ярко в неодинаковой степени концентрации звезд к галакти-

¹⁾ Schalen C., *Uppsala Medd.*, 37 (1928); Lindblad B., *Stockh. Ann.*, 18, № 9 (1933); Pahlen E., *Lehrbuch der Stellarstatistik*, Lpz., 1937, стр. 543.

ческой плоскости. Звезды ранних спектральных классов гораздо сильнее концентрируются к плоскости галактического экватора, чем звезды более поздних спектральных типов. Следовательно, функция светимости всех звезд должна сильно зависеть от расстояния рассматриваемого элемента объема от галактической плоскости, так как среди звезд более поздних спектральных классов преобладают карлики, в то время как звезды ранних классов в подавляющем большинстве относятся к гигантам.

Главное достоинство недавно предложенного метода Вашакидзе — Оорта ¹⁾ заключается в том, что при его применении не надо знать функции светимости. Кроме того, в этом методе очень остроумно учитывается влияние межзвездного поглощения света, которое причиняло немало трудностей при использовании различных методов, описанных выше.

Метод Вашакидзе — Оорта, однако, можно применять только исключительно к областям неба на галактических широтах, больших по модулю 10° — 15° .

Ниже мы приводим метод Вашакидзе — Оорта в несколько измененном виде, согласно работе Бока и Мак Ри ²⁾.

Предположим временно, что поверхности одинаковой звездной плотности суть плоскости, параллельные галактической, и что функция светимости $\varphi(M, z)$ является функцией только абсолютной величины M и расстояния z от галактической плоскости (т. е. эта функция постоянна в каждой точке плоскости, параллельной галактической). Это значит, что произведение $\varphi(M, z) D(r)$, т. е. произведение функции светимости на звездную плотность $D(r)$, также является функцией только z и M , следовательно,

$$\varphi(M, z) D(r) = F(M, z),$$

где $F(M, z)$ — число звезд с абсолютной величиной от M до $M + dM$, находящихся в слое толщиной dz на расстоянии z от галактической плоскости.

В таком случае интегральные уравнения Шварцшильда (34.2) и (34.3) для галактической широты b будут иметь вид

$$A_b(m) = \frac{1}{\sin^3 b} \int_0^\infty F_b(M, z) z^2 dz, \quad (37.1)$$

$$\bar{\pi}_b(m) A_b(m) = \frac{1}{\sin^2 b} \int_0^\infty F_b(M, z) z dz, \quad (37.2)$$

так как $z = r \sin b$.

¹⁾ Бюлл. Абастум. астроф. obs., 1, 87 (1937); BAN, № 308 (1938).

²⁾ Annals New York Acad. of Sci., 42, 219 (1941).

Рассмотрим звезды видимой величины m , расположенные на галактической широте b . Очевидно, что звезды, имеющие ту же самую абсолютную величину и находящиеся в том же самом плоскопараллельном слое, но только в направлении полюса Галактики ($b = 90^\circ$), будут иметь видимую величину m_{90} , связанную с величиной m следующим соотношением:

$$m - 5 \log z + 5 \log \sin b + 5 - A_b = m_{90} - 5 \log z + 5 - A_{90};$$

откуда

$$m_{90} = m + 5 \log \sin b - \Delta A, \quad (37.3)$$

где ΔA — разность межзвездного поглощения в направлении галактической широты b и в направлении полюса Галактики.

Таким образом, на основании сделанных выше предположений можно считать, что для одинаковых z

$$F_b(M, z) = F_{90}[(m + 5 \log \sin b - \Delta A), z] = F(m_{90}, z).$$

Сопоставляя полученное уравнение с уравнениями (37.1) и (37.2), имеем

$$A_b(m) = \frac{1}{\sin^3 b} A_{90}(m_{90}), \quad (37.4)$$

$$\bar{\pi}_b(m) = \bar{\pi}_{90} \sin b, \quad (37.5)$$

где m_{90} определяется по формуле (37.3).

Используя эти равенства, можно прежде всего убедиться, насколько правильны наши предположения о плоскопараллельном распределении звезд и зависимости функции светимости только от координаты z . Ясно, что оба равенства имеют смысл только для значений b , сильно отличающихся от нуля.

Т а б л и ц а 5

ЗНАЧЕНИЯ $A_{90}(m_{90})$ и $\bar{\pi}_{90}(m_{90})$
(по данным Бока и Мак Ри)

m_{90}	A_{90}	$\bar{\pi}_{90}$	m_{90}	A_{90}	$\bar{\pi}_{90}$
6,0	0,045	—	13,0	19,3	0'',0028
7,0	0,130	—	14,0	34	0'',0022
8,0	0,36	—	15,0	64	—
9,0	0,91	0'',0080	16,0	117	—
10,0	2,08	0'',0063	17,0	217	—
11,0	4,3	0'',0048	18,0	375	—
12,0	9,4	0'',0036			

На основании многих данных Бок и Мак Ри вычислили выравненные функции $A_{90}(m_{90})$ и $\bar{\pi}_{90}(m_{90})$, приведенные в табл. 5. Зная эти

функции, легко вычислить функции $A_b(m)$ и $\bar{\pi}_b(m)$ для произвольных значений b . Для примера приведем выполненное Боком сопоставление некоторых „теоретических“ кривых $A(m)$ и $\bar{\pi}(m)$ с наблюдаемыми, свидетельствующее в пользу сделанных нами вначале предположений. Наблюдаемые данные взяты из работы ван Райна ¹⁾.

Т а б л и ц а 6

НАБЛЮДЕННЫЕ И ВЫЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $\log A_b(m_b)$
(по данным Бока и Мак Ри)

m_b	$\log A_{50}(m_{50})$		$\log A_{40}(m_{40})$		m_b	$\log A_{50}(m_5)$		$\log A_{40}(m_{40})$	
	вычисленные	наблюдённые	вычисленные	наблюдённые		вычисленные	наблюдённые	вычисленные	наблюдённые
6,0	8,75	8,72	8,81	8,76	13,0	1,43	1,42	1,54	1,54
7,0	9,18	9,15	9,25	9,20	14,0	1,73	1,73	1,84	1,88
8,0	9,61	9,58	9,68	9,64	15,0	2,00	2,03	2,13	2,18
9,0	0,05	9,99	0,11	0,05	16,0	2,27	2,30	2,39	2,46
10,0	0,46	0,38	0,54	0,46	17,0	2,51	2,52	2,64	2,69
11,0	0,80	0,76	0,89	0,85	18,0	2,75	2,76	2,89	2,90
12,0	1,10	1,08	1,21	1,22					

Вернемся же вновь к методу Вашакидзе — Оорта, применение которого вовсе не сводится только к контролю правильности предположений, положенных в его основу. Этот метод позволяет обнаруживать и оценивать отклонения от принятых предположений.

При применении рассматриваемого метода поступаем так же, как и при использовании схемы Каптейна — Бока: иначе говоря, мы прежде всего, зная функцию $F(M, z)$ для направления $b = 90^\circ$, строим таблицу $(m, \log \pi)$.

Затем, зная $A_b(m)$ в данном направлении, вычисляем $A_{90}(m_{90})$ по формуле $A_{90}(m_{90}) = A_b(m) \sin^3 b$, где

$$m_{90} = m + 5 \log \sin b - \Delta A.$$

Отбросим теперь предположение о постоянстве звездной плотности в плоскопараллельных слоях и введем в уравнение (37.1) новую функцию $D(z)$, определяющую во сколько раз действительная звездная плотность превышает плотность на данном расстоянии z от галактической плоскости в направлении $b = 90^\circ$.

Т а б л и ц а 7

ЗНАЧЕНИЯ $\bar{\pi}_b(m_b)$ для $b = 51^\circ$
(по данным Бока
и Мак Ри)

m_{51}	Вычисленные	Наблюдённые
12,0	0",0041	0",0043
13,0	0",0027	0",0028
14,0	0",0020	0",0022
15,0	0",0017	0",0014

¹⁾ *Gron. Publ.*, 43 (1929).

Следовательно, уравнение (37.1) изменится следующим образом:

$$A_{90}(m_{90}) = \int_0^{\infty} D(z) F(M, z) z^2 dz.$$

Чтобы определить из этого уравнения $D(z)$, следует прежде всего передвинуть каждую строку таблицы $(m, \log \pi)$ вправо на величину ΔA , соответствующую данному z , и потом составить систему уравнений, аналогичную системе (36.5), т. е. поступить так, как мы обычно поступаем в случае применения схемы Каптейна — Бока, а именно

$$\begin{aligned} A_{90}(9) &= P(9) + D(z_{11})\delta_{9,11} + D(z_{12})\delta_{9,12} + \dots, \\ A_{90}(10) &= P(10) + D(z_{11})\delta_{10,11} + D(z_{12})\delta_{10,12} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

В этих уравнениях δ_{ij} обозначает соответствующую данным значениям m и z величину $F_{90}(M, z) V_j$. В результате решения этой системы уравнений находим искомые величины $D(z_{11}), D(z_{12}), \dots$

Если дисперсия абсолютных величин M звезд мала, то наши уравнения сильно упрощаются и все вычисления сводятся к вычислению схемы, аналогичной той, которая рассматривалась на стр. 100.

Если предположить, что плотность D зависит еще и от абсолютной величины звезд M , то приведенная выше методика определения звездных плотностей совершенно неприменима и мы вынуждены искать иные пути определения функции $D(z, M)$.

В этом случае решение может быть получено только, если нам известны абсолютные величины рассматриваемых звезд. Тогда можно разделить звезды на группы по величине M и для каждой группы отдельно определить $D(z, M)$.

Займемся теперь одним довольно важным в этом методе вопросом, а именно учетом межзвездного поглощения. Обратим внимание на то, что во все уравнения входит только разность поглощений ΔA в данном направлении b и в направлении полюса Галактики ($b = 90^\circ$) на одних и тех же координатах z .

При рассмотрении звезд, достаточно удаленных от галактической плоскости ($|z| \geq 300$ пс), можно считать, что все они находятся практически вне области, занимаемой межзвездной материей и, следовательно, их свет испытывает такое же поглощение, как и свет далеких объектов, например галактик.

Используя подсчеты галактик, пространственную плотность которых в первом приближении можно считать постоянной, легко определить межзвездное поглощение $A(\infty)$ в данном направлении по формуле

$$A(\infty) = \frac{2,17 - \log N}{0,55},$$

(вывод этой формулы приводится в п. 40), где N — число наблюдае-

мых галактик до 20^m на один квадратный градус на галактической широте b . Подставляя соответствующее значение N , мы моментально находим величину $A(\infty)$ для данного направления.

Для упрощения этого метода предположим, что межзвездная материя распределена в Галактике так же, как и звезды, т. е. что поверхностями одинаковой плотности материи являются плоскости, параллельные плоскости галактического экватора. В таком случае межзвездное поглощение на сравнительно больших координатах z в направлении галактической широты b будет равно

$$A_b(\infty) = A_{90}(\infty) \operatorname{cosec} b,$$

где $A_{90}(\infty)$ — величина поглощения для объектов, находящихся вне слоя поглощающей материи в направлении полюса Галактики. Следовательно,

$$\Delta A = A_{90}(\infty) (\operatorname{cosec} b - 1).$$

Если мы исследуем звезды, расположенные вблизи галактической плоскости, то вместо величины $A_{90}(\infty)$ всюду войдет величина $A_{90}(z)$, которую необходимо определить каким-либо образом „раз и навсегда“. Наши выводы можно уточнить, если принять во внимание клочковатую структуру межзвездной материи.

На основании рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в конце п. 34 [см. формулу (34.16)], вместо формул (37.1) и (37.4) получим следующие формулы.

Для широты b

$$\begin{aligned} A_b(m) &= \frac{1}{\sin^3 b} \int_0^\infty \left[F(M, z) + \varepsilon \frac{A_b}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \right] z^2 dz = \\ &= \frac{1}{\sin^3 b} \int_0^\infty \left[F(m_{90}, z) + \varepsilon \frac{A_b}{2} \frac{\partial^2 F(m_{90}, z)}{\partial m^2} \right] z^2 dz \quad (37.6) \end{aligned}$$

и для широты $b = 90^\circ$

$$A_{90}(m) = \int_0^\infty \left[F(m_{90}, z) + \varepsilon \frac{A_{90}}{2} \frac{\partial^2 F(m_{90}, z)}{\partial m^2} \right] z^2 dz, \quad (37.7)$$

где A_b и A_{90} обозначают соответственно среднее поглощение на расстоянии z в данном направлении b и в направлении галактического полюса.

Если предположить, что изучаемые объекты находятся далеко от плоскости Галактики, то $A_b = \operatorname{const}$ и $A_{90} = \operatorname{const}$.

Тогда, умножая уравнение (37.7) на $1/\sin^3 b$ и вычитая его из уравнения (37.6), получим

$$A_b(m_{90}) = \frac{1}{\sin^3 b} \left[A_{90}(m) + \varepsilon \frac{A_{90}}{2} \left(\frac{A_b}{A_{90}} - 1 \right) \frac{\partial^2 A_{90}(m)}{\partial m^2} \right]. \quad (37.8)$$

Определив „раз и навсегда“ величины $A_{90}(m)$ и $\frac{\partial^2 A_{90}(m)}{\partial m^2}$, надо сначала пользоваться формулой (37.8) вместо выведенной авторами метода формулы $A_b(m_{90}) = A_{90}(m) \operatorname{cosec}^3 b$, а после этого поступать так же, как и при применении метода Вашакидзе — Оорта.

§ 11. Функция светимости $\varphi(M)$

38. Общие замечания. Функция светимости играет очень большую роль при исследовании пространственного распределения звезд. Немалую роль играет эта функция и в других проблемах звездной астрономии, например при определении массы некоторых частей Галактики, а также во многих проблемах современной космогонии. Поэтому функции светимости будет уделено сравнительно много внимания в данной книге.

В первую очередь следует обратить внимание на то, что в определении функции светимости имеется некоторая неопределенность. Иногда эту функцию определяют так, как это сделано в предыдущем параграфе, т. е. через $\varphi(M)$ мы обозначили относительное число звезд с абсолютными величинами в интервале от M до $M + dM$. Следовательно, функция $\varphi(M)$ должна подчиняться условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M) dM = 1.$$

Одновременно другие исследователи функцией светимости $\Phi(M)$ называют абсолютное число звезд в единице объема (обычно в 10^3 пс^3) с абсолютной величиной от M до $M + dM$. Таким образом, функция $\Phi(M)$ должна быть связана с функцией $\varphi(M)$ следующим соотношением:

$$\Phi(M) = D \varphi(M),$$

где D — звездная плотность в данной точке пространства. Функция $\Phi(M)$ отличается от функции $\varphi(M)$ только постоянным множителем, который, однако, не всегда можно определить. Это является вполне достаточным оправданием существующей неоднозначности в определении функции светимости, тем более, что до сих пор ничего неизвестно об относительном содержании абсолютно слабых звезд ($M > 15^m$) в ближайших окрестностях Солнца. Это значит, что мы не в состоянии вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M) dM,$$

значение которого определяет нормирующий множитель $1/D$. Сравнительно недавно Лютен¹⁾ изучил слабые звезды до 18^m и, таким образом, получил функцию $\Phi(M)$ вплоть до $M = 21^m$.

39. Метод Лютена. Рассмотрим один из наиболее часто используемых методов определения функции светимости всех звезд без разделения по типам в ближайших окрестностях Солнца. Этот метод, предложенный в свое время Лютеном, применяется астрономами и в настоящее время.

Известно, что между параллаксами звезд π , их собственными движениями μ и видимыми величинами m существует статистическая зависимость, являющаяся следствием того, что две последние величины явно зависят от расстояния звезды, т. е. от ее годовичного параллакса π . Эта статистическая зависимость довольно хорошо представляется эмпирической формулой

$$\log \pi(m, \mu) = a + b m + c \log \mu \quad (39.1)$$

с дисперсией σ_π величин π . Абсолютная величина звезд M без учета межзвездного поглощения определяется по формуле

$$M = m + 5 + 5 \log \pi.$$

Подставив вместо $\log \pi$ выражение (39.1), получим после небольших преобразований

$$M = c(m + 5 + 5 \log \mu) + d + (1 - c + 5b)m,$$

где $d = 5(1 + a - c)$.

Лютен обратил внимание на то, что коэффициент $(1 - c + 5b)$ при m очень мал и, следовательно, можно этим членом пренебречь.

Таким образом, получается следующая зависимость:

$$M = cH + d, \quad (39.2)$$

где

$$H = m + 5 + 5 \log \mu. \quad (39.3)$$

Лютен определил коэффициенты этой статистической зависимости, а также функцию $f(H)$, т. е. функцию распределения величин H , на основании полученных им данных относительно собственных движений и видимых величин приблизительно 100 000 звезд в южном полушарии неба:

$$\bar{M} = -3,5 + 0,86H. \quad (39.4)$$

Подставляя в функцию $f(H)$ вместо H соответствующую ей величину M , вычисленную по формуле (39.4), Лютен определил искомую функцию светимости, а именно,

$$\varphi(M) = f\left(\frac{\bar{M} + 3,5}{0,86}\right).$$

¹⁾ *Minnesota Publ.*, II, № 7 (1939).

На стр. 117 приводится полученная Льюитеном функция светимости для абсолютных фотографических величин, несколько измененная Боком после сопоставления результатов Льюитена с результатами некоторых предыдущих работ, в частности работ ван Райна.

Для иллюстрации значения функции светимости в других проблемах звездной астрономии приведем здесь некоторые выводы Льюитена, основанные на найденной им функции светимости. Если предположить, что все звезды подчиняются зависимости масса — светимость¹⁾, то можно вычислить общую массу звезд в единице объема; для этого надо ординаты кривой функции светимости умножить на соответствующее данному аргументу M значение массы и проинтегрировать полученную функцию в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, Льюитен пришел к выводу, что в 1 лс^3 в окрестностях Солнца содержится приблизительно 0,08 солнечных масс.

На основании динамических соображений получено значение 0,089 солнечных масс в 1 лс^3 , что хорошо согласуется с определением Льюитена. Зная приведенную выше величину, можно довольно точно определить массу межзвездной материи в единице объема в окрестностях Солнца.

Таблица 8

ФУНКЦИЯ СВЕТИМОСТИ
(для ФОТОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЕЛИЧИН)

$D\varphi(M)$ — число звезд в 10^3 лс^3 с абсолютной величиной в пределах $M \pm \frac{1}{2}$, $\varphi(M)$ — относительное число звезд в тех же пределах (по данным П. П. Паренaго)

M	$\log D\varphi(M)$	$\log \varphi(M)$	M	$\log D\varphi(M)$	$\log \varphi(M)$
-6^m	5,10—10	3,13—10	9^m	0,49—10	8,52—10
-5	6,07	4,10	10	0,64	8,67
-4	6,65	4,68	11	0,81	8,84
-3	7,25	5,28	12	0,97	9,00
-2	7,75	5,78	13	1,00	9,03
-1	8,07	6,10	14	1,04	9,07
0	8,68	6,71	15	1,04	9,07
1	9,34	7,37	16	0,98	9,01
2	9,77	7,80	17	0,87	8,90
3	9,86	7,89	18	0,66	8,69
4	0,19	8,22	19	0,28:	8,31:
5	0,35	8,38	20	9,58:	7,61:
6	0,49	8,52	21	8,88: :	6,91: :
7	0,53	8,56	$\log \Sigma D\varphi(M) = 1,97$		
8	0,46	8,49			

Действительно, исходя из общих законов динамики, можно определить массу всей материи во внешних частях Галактики, следовательно, вычитая

¹⁾ См., например, Блажко С. Н., Курс общей астрономии, изд. 1, М.—Л., 1947.

из нее массу звезд в единице объема, можно определить массу межзвездной материи также в единице объема; получается величина того же порядка, что и масса звезд.

Некоторые критические замечания по поводу работы Люитена были высказаны Р. Б. Шацовой¹⁾, которая обнаружила, что постоянные c и d в формуле (39.2) в большей степени зависят от абсолютных величин рассматриваемых звезд, чем от их собственных движений. Учитывая это обстоятельство, Р. Б. Шацова получила несколько иную функцию светимости без максимума в области

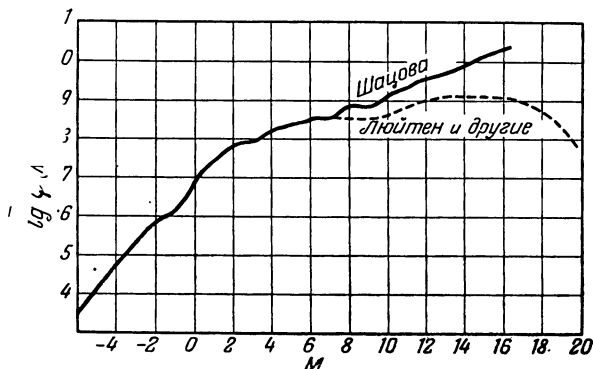


Рис. 22.

$8^m \leq M \leq 17^m$ (рис. 22), как это получалось у Люитена, непрерывно возрастающую с увеличением M . Этот вывод имеет громадное космогоническое значение, так как он свидетельствует в пользу того, что в нашей Галактике нет существенной разницы между звездами и телами небольших размеров и масс, какими являются, например, планеты. Следовательно, весьма вероятным кажется предположение о том, что планеты могут быть одним из этапов эволюции звезд.

Аналогичными методами определяется функция светимости звезд, принадлежащих к одному и тому же спектральному классу или подклассу. В этих случаях можно представить общую функцию светимости в виде суммы нескольких нормальных распределений:

$$\varphi(M) = \frac{A}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(M-M_0)^2}{2\sigma^2}} + \frac{Q'A}{\sigma_1 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(M-M')^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{Q''A}{\sigma_2 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(M-M'')^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (39.5)$$

¹⁾ АЖ, 29, 574 (1952), и Труды II совещания по вопросам космогонии, М., 1953, стр. 567.

Таблица 8а

Sp	$A \times 10^4$	M_0	σ	Q'	M'_0	σ'	Q''	M''_0	σ''
A	1,2	+2,0	$\pm 1^m,1$	—	—	—	—	—	—
F	8,8	4,0	1,2	—	—	—	—	—	—
G	15,5	6,0	1,1	0,02	+2,0	$\pm 0^m,8$	10^{-4}	-2,5	$\pm 0^m 7,5$
K	27	+9,0	$\pm 1,8$	0,05	+2,0	$\pm 0,7$	—	—	—

В табл. 8а приводятся значения параметров распределения AQ' , AQ'' , ..., согласно определению ван Райна и Швасманна, причем все эти величины относятся к фотографической системе звездных величин. A обозначает здесь интервал спектров $A0—A9$, F —интервал $F0—F9$... и т. д. Для класса B данных нет, потому что в этом классе различия функции светимости (в зависимости от подкласса звезд) настолько велики, что нам кажется нецелесообразным с этой точки зрения объединять их в одну общую группу.

§ 12. Межзвездная материя

Пылевая составляющая межзвездной материи

40. Введение; зона „избегания“. Открытие в первых десятилетиях нашего века рассеянной космической материи в межзвездном пространстве, несомненно, было переломным моментом в истории астрономии. Была открыта новая форма существования материи, притом материи, разреженной в такой степени, в какой ее еще никто не наблюдал ни в физических лабораториях, ни во вселенной. Естественно, что изучение этой формы материи стало одной из самых актуальных задач астрономии, в частности астрофизики и звездной астрономии. Поэтому, оставляя в стороне чисто астрофизические проблемы межзвездной материи, мы займемся здесь ею только с точки зрения звездной астрономии.

Прежде всего обратим внимание читателей на некоторые трудности, вызванные этим открытием. В продолжение нескольких столетий астрономы широко и, как казалось, с большим успехом применяли различные фотометрические методы определения расстояний звезд и других космических объектов. Методы эти по существу сводились к следующему: на основании тех или иных астрофизических или статистических предпосылок мы а priori определяли абсолютную величину изучаемых объектов M , затем, сравнивая полученную абсолютную величину с видимой величиной m , вычисляли расстояния r' по формуле

$$\log r' = 0,2(m - M) + 1.$$

[Эта формула является простым преобразованием формулы (13.3).]

Ясно, что с момента открытия межзвездной материи эта формула перестала быть правильной; ее нужно было заменить другой, а именно,

$$\log r = 0,2(m - M) + 1 - 0,2A, \quad (40.1)$$

где A , как известно, обозначает потерю света в звездных величинах в результате прохождения его через межзвездную среду. Определенные ранее расстояния r' оказались преувеличенными, так как, сравнивая две приведенные формулы, имеем

$$r' = r \cdot 10^{0,2A},$$

причем $A \geq 0$. Таким образом, открытие межзвездной материи повлекло за собой уменьшение почти всех измеренных раньше расстояний. Так, например, размеры нашей Галактики уменьшились примерно вдвое; однако размеры других галактик почти не изменились, потому что эти объекты наблюдаются на небе в тех направлениях, где межзвездное поглощение практически отсутствует.

Вопрос правильного учета влияния межзвездного поглощения все еще остается открытым, причиняя астрономам массу трудностей при определении расстояний звезд и других тел. Несмотря на то, что с момента открытия этого явления и до настоящего времени прошло более 20 лет, мы считаем, что положение вещей в этой области до сих пор неудовлетворительно и требует мобилизации всех сил.

Прежде чем говорить о межзвездной материи, обратим внимание наших читателей в связи с этой темой на некоторые вопросы терминологии. Луч света, проходящий через межзвездную материю, участвует во многих процессах: в первую очередь в процессе неселективного и селективного рассеяния, а также в процессе линейного и непрерывного поглощения газами, входящими в состав межзвездной материи. Все эти процессы, по существу, неправильно называются *межзвездным поглощением*, хотя более правильным названием была бы «*межзвездная экстинкция*». Одновременно этим же словом, как нам уже известно, называется величина межзвездного поглощения, т. е. величина A , входящая в формулу (40.1) и во многие последующие формулы и определяющая потерю света в звездных величинах в данной фотометрической системе в результате влияния всех процессов, о которых речь была выше.

Займемся теперь самыми простыми и убедительными доказательствами существования межзвездной материи в нашей Галактике и попытками учета влияния этой материи при изучении строения Галактики.

Наиболее очевидным доказательством, как нам кажется, является давно известный факт существования на небе так называемой зоны избегания галактик, которая тянется вдоль всего Млечного Пути. Если на карту нанести число наблюдаемых галактик ярче некоторой предельной звездной величины в телесном углу, равном единице, то сразу же можно убедиться в том, что наибольшее число галактик

находится около обоих галактических полюсов; вблизи галактической плоскости галактики практически отсутствуют. Поэтому в 1917 году область Млечного Пути была названа зоной избегания (zone of avoidance) галактик.

В то время природа галактик еще не была известна; казалось, что эти объекты являются чем-то похожим на газовые или пылевые туманности. И поэтому их тогда ошибочно называли спиральными и эллиптическими туманностями. В то время указанные особенности распределения галактик на небе объяснялись тем, что галактики действительно избегают плоскости галактического экватора.

В 1917 г. были открыты первые новые звезды в спиральной туманности Андромеды, а в 1924 г. Хаббл удалось сфотографировать отдельные звезды, принадлежащие той же туманности. С этого времени стало ясно, что спиральные и эллиптические „туманности“ являются звездными системами, похожими на нашу Галактику.

Следовательно, данное ранее объяснение существования зоны избегания галактик, естественно, надо было отбросить, так как предположение о том, что наша Галактика могла или может каким-либо образом влиять на пространственное распределение других галактик, ничем не обосновано.

Тогда же отсутствие галактик в Млечном Пути было правильно объяснено существованием в нашей Галактике поглощающей материи. Вполне естественно предположить, что галактики распределены в пространстве равномерно—в статистическом значении этого слова, — а их видимое распределение на небе является результатом существования в Галактике межзвездной материи, которая заслоняет некоторые области неба, и поэтому там мы галактик не видим.

Таким образом, открытие природы спиральных и эллиптических „туманностей“ привело нас снова к открытию существования межзвездной материи в нашей Галактике.

Видимое распределение галактик на небе (рис. 23) сразу же заставляет предположить, что поглощающая материя располагается в Галактике в виде плоскопараллельного слоя, симметричного относительно плоскости галактического экватора, так как зона избегания почти точно совпадает с областью Млечного Пути.

Итак, предположим, что межзвездная материя распределена в Галактике так, что ее плотность является функцией только расстояния z от галактической плоскости; относительно формы этой функции не будем пока делать никаких предположений. В таком случае ослабление света какой-нибудь галактики, находящейся на галактической широте b , должно выражаться формулой

$$\frac{I}{I_0} = e^{-k(\lambda) \cos b}, \quad (40.2)$$

где I —наблюдаемая интенсивность света данной галактики, I_0 —интенсивность, которая наблюдалась бы при отсутствии в нашей

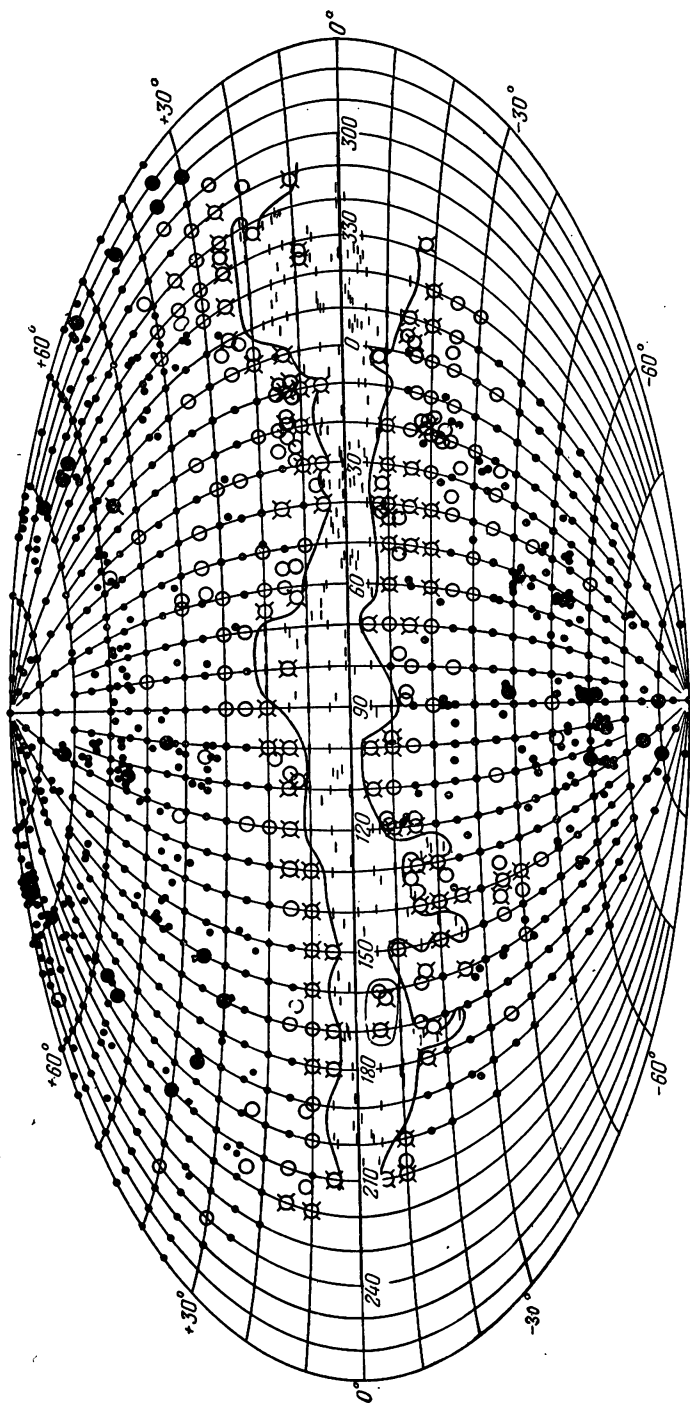


Рис. 23.

Галактике поглощающей материи; λ — длина волны наблюдаемого излучения; $k(\lambda) \operatorname{cosec} b$ — оптическая толщина слоя на пути от данной галактики к наблюдателю.

Чтобы выразить ослабление света галактики в звездных величинах, надо прологарифмировать обе части выражения (40.2) и умножить их на $-2,5$, в результате имеем

$$A = 2,5 \operatorname{Mod} k(\lambda) \operatorname{cosec} b.$$

Величину A называют „межзвездным поглощением света“.

Предположим далее, что галактики равномерно заполняют все пространство, доступное нашим наблюдениям. Можно проверить справедливость этого предположения, подсчитывая число галактик в каком-либо направлении. Если допустить, что в межгалактическом пространстве отсутствует поглощение света, то число всех галактик ярче величины $m' [N(m')]$, согласно формуле (31.5), должно быть равно

$$N(m') = K \cdot 10^{0,6m'},$$

и, следовательно,

$$A(m') = L \cdot 10^{0,6m'},$$

так как галактическое поглощение A в данном направлении постоянно:

$$A = f(m') = \operatorname{const.}$$

Даже самые близкие галактики находятся на очень большом расстоянии от Солнца, поэтому видимая звездная величина всех галактик в данном направлении должна быть ярче на

$$A = 1,086 k(\lambda) \operatorname{cosec} b.$$

Результаты подсчетов галактик в разных направлениях подтверждают наше предположение об их равномерном распределении в пространстве, так как эти результаты довольно хорошо согласуются с обеими приведенными выше формулами.

Сравнивая результаты подсчетов галактик в разных направлениях, можно, прежде всего, заметить, что их видимая величина m' при отсутствии галактического поглощения должна быть связана с наблюдаемой в действительности видимой величиной m зависимостью

$$m' = m - A = m - 1,086 k(\lambda) \operatorname{cosec} b.$$

Следовательно, число наблюдаемых в единице телесного угла галактик в направлении галактической широты b должно быть равно

$$N(m, b) = K \cdot 10^{0,6(m-A)},$$

т. е.

$$\log N(m, b) = c + 0,6m - 0,651 k(\lambda) \operatorname{cosec} b. \quad (40.3)$$

Используя подсчеты галактик до $m_{ph} = 20^m$, Хаббл получил следующую эмпирическую зависимость:

$$\log N(20, b) = 2,115 - 0,15 \operatorname{cosec} b, \quad (40.4)$$

подтверждающую правильность формулы (40.3). Сравнивая формулы (40.3) и (40.4), имеем

$$0,651k(\lambda) = 0,15,$$

$$k(\lambda) = 0,23.$$

Это значит, что для $b = 90^\circ$ поглощение света

$$A_{90} = 1,086k(\lambda) \operatorname{cosec} b = 0^m,25.$$

Последующая обработка данных Хаббла с более точным учетом влияния „покраснения“ галактик¹⁾ в результате смещения их спектров в сторону больших длин волн привела Оорта к несколько иному результату:

$$\log N(20, b) = 2,17 - 0,17 \operatorname{cosec} b. \quad (40.5)$$

Причем оказалось, что во всех направлениях при $b = \text{const}$

$$N(m) = K \cdot 10^{0,55m}, \quad (40.6)$$

т. е.

$$\log N(m) = 0,55m + \text{const}.$$

Величина const меняется от направления к направлению. Изменение коэффициента при m в формуле (40.6) (вместо 0,6 имеем 0,55) вызвано „покраснением“ галактик.

Из этих соотношений следует, что объектам, находящимся на больших расстояниях в направлении полюса Галактики ($b = 90^\circ$), т. е. находящимся практически вне слоя межзвездной материи, соответствует поглощение

$$A(\infty, 90^\circ) = \frac{0,17}{0,55} = 0^m,31^2).$$

П. П. Паренаго заново обработал данные Хаббла и получил для межзвездного поглощения в направлении галактического полюса следующую величину:

$$A(\infty, 90^\circ) = 0^m,338 \pm 0^m,007;$$

приведенные данные относятся к фотографической системе звездных величин.

¹⁾ См. п. 13.

²⁾ Знак ∞ обозначает здесь условно, что дело идет о поглощении света объектов, находящихся вне слоя межзвездной материи. В некоторых направлениях соответствующее расстояние может быть невелико, например для $b = 90^\circ$ расстояние это должно быть немногим больше 200—300 пс.

Если предположить, что плотность межзвездной материи является функцией только расстояния z от галактической плоскости, то для больших расстояний будет правильным соотношение

$$A(\infty, b) = A(\infty, 90^\circ) \operatorname{cosec} b.$$

Но это предположение можно также отбросить, приняв, что галактики равномерно заполняют окружающее нас пространство, и, следовательно, правильной является формула Оорта (40.6)

$$N(m') = K \cdot 10^{0,55m'},$$

причем m' — звездная величина, освобожденная от влияния межзвездного поглощения, но не освобожденная от влияния „покраснения“ галактик. Будем рассматривать объекты, находящиеся вне слоя межзвездной материи. В этом случае при наличии поглощения A число наблюдаемых галактик до видимой величины $m = m' + A$ должно быть равно

$$\log N_{ob}(m) = \text{const} + 0,55(m - A) = C - 0,55A. \quad (40.7)$$

Величина C равна логарифму числа галактик ярче предельной величины m (в нашем случае $m = 20$) при отсутствии межзвездного поглощения. Как видно из формулы (40.5), эта величина равна 2,17. Следовательно, для галактик ярче 20^m в конце концов получаем следующую формулу для определения поглощения A :

$$A = \frac{2,17 - \log N_{ob}}{0,55} \quad (40.8)$$

Таким образом, подсчитывая число галактик в каком-нибудь направлении, можно найти величину $\log N_{ob}(m)$ и, пользуясь формулой (40.8), сразу же определить поглощение в данном направлении в предположении, что рассматриваемые объекты находятся достаточно далеко от галактической плоскости. Аналогичные формулы можно получить и для других предельных звездных величин галактик.

41. Пространственное распределение пылевой составляющей межзвездной материи. Описанные выше исследования не могут дать ответа на вопросы, касающиеся распределения межзвездной материи, например, в направлении оси z , т. е. в направлении оси, перпендикулярной к плоскости галактического экватора, или же распределения ее вблизи галактической плоскости, т. е. на небольших галактических широтах b . Во втором случае формула (40.8) теряет смысл, так как в зоне избегания галактик N_{ob} практически равно нулю и, следовательно, $A \rightarrow \infty$.

Для того чтобы ответить на поставленные вопросы, надо было предположить, что плотность межзвездной материи может быть пред-

ставлена при помощи а priori взятой функции, параметры которой можно определить из сопоставления с наблюдениями.

Вначале предполагалось, что межзвездная материя заполняет объем пространства, ограниченный двумя плоскостями, параллельными плоскости галактического экватора и находящимися от нее на расстоянии примерно 200—300 пс, а также, что плотность межзвездной материи в этом объеме постоянна, т. е. $D(r) = \text{const}$.

В этом случае межзвездное поглощение будет равно

$$I = I_0 e^{-k(\lambda) D(r) r},$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения, I — интенсивность наблюдаемого излучения, $k(\lambda)$ — функция длины волны, характеризующая оптические свойства пылевой составляющей межзвездной материи. В дальнейшем будет рассмотрен вопрос о том, почему мы приписываем явление межзвездного поглощения именно только пылевой составляющей.

Переходя к шкале звездных величин, получим

$$A = -2,5 \log \frac{I}{I_0} = \alpha(\lambda) r.$$

Это значит, что в каждой фотометрической системе межзвездное поглощение прямо пропорционально расстоянию. Коэффициент $\alpha(\lambda)$ равен поглощению на единицу длины в межзвездной материи, поэтому его часто называют „коэффициентом межзвездного поглощения“.

В качестве примера приведем несколько методов определения коэффициента межзвездного поглощения $\alpha(\lambda)$, первым из которых был метод Трюмплера, основанный на измерении видимых диаметров рассеянных звездных скоплений.

Как известно, эти скопления сильно концентрируются к плоскости Млечного Пути, т. е. так же, как и межзвездная материя. Поэтому в данном случае можно не сомневаться, что все интересующие нас объекты находятся в области, занятой межзвездной материей.

Трюмплер, прежде всего, измерил угловые диаметры ρ многих рассеянных скоплений в угловых единицах, затем определил их расстояния при помощи довольно распространенного метода, сводящегося к следующему: зная спектральные классы многих звезд, входящих в скопление, можно построить диаграмму спектр — светимость (диаграмму Герцшпрунга — Рассела), откладывая по оси ординат видимые звездные величины m звезд скопления. Предполагая далее, что полученная таким образом диаграмма спектр — светимость должна совпадать с диаграммой для ближайших к Солнцу звезд с известными абсолютными величинами M , можно определить расстояние скопления r' по формуле

$$m - M = 5 \log r' - 5 \quad (41.1)$$

и затем вычислить линейные диаметры скоплений d' :

$$d' = r' \sin \rho. \quad (41.2)$$

При этом оказалось, что найденные таким образом линейные диаметры d' систематически увеличивались с увеличением расстояния r' ; создавалось впечатление, что около Солнца находятся скопления с наименьшими диаметрами. Ясно, что этот вывод неверен, так как положение Солнца в Галактике не дает никаких оснований к такого рода предположениям. Это явление легко объяснить, если принять, что в Галактике существует межзвездное поглощение; следовательно, линейные диаметры скоплений, определяемые при помощи ошибочных расстояний r' , также будут неверны. При наличии поглощения света вместо выражения (41.1) имеем

$$m - M = 5 \log r - 5 + \alpha r. \quad (41.3)$$

Коэффициент α можно выбрать так, чтобы линейные диаметры скоплений d , вычисленные по формуле (41.2), были постоянны, при этом, конечно, следует иметь в виду, что некоторая дисперсия наблюдаемых диаметров будет являться следствием реальной дисперсии диаметров скоплений.

Величину α Трюмплер определил следующим образом: вычисленные без учета межзвездного поглощения величины d' были сгруппированы в отдельных интервалах d' . Среднее значение $\bar{d}'$ для каждой группы было подставлено в формулу (41.2)

$$\log \bar{d}' = \log r' + \log \sin p.$$

Сопоставляя полученное выражение с выражением

$$\log d = \log r + \log \sin p,$$

имеем, при условии $\log d = \text{const}$,

$$x + 0,2\alpha r = \log \bar{d}'.$$

Решая систему таких уравнений, можно определить x и α , зная r . Решение проводилось методом последовательных приближений, сначала вместо r брались соответствующие расстояния r' . После определения таким образом величин α' и x' проводилось второе приближение, теперь расстояния r' вычислялись по формуле

$$5 \log r = 5 \log r' - \alpha' r'$$

и снова решалась система уравнений. Этот процесс следует закончить тогда, когда сумма квадратов уклонений

$$v = \log d' - x - 0,2\alpha r$$

перестанет уменьшаться. В этом случае полученные величины будут удовлетворять по точности нашим данным.

Таким способом Трюмплер нашел $\alpha_{pg} = 0^m,67$ на 1 клс.

Однако при применении этого метода могут возникнуть серьезные систематические ошибки, как это было обнаружено К. А. Бархатовой¹⁾. Дело в том, что в звездных скоплениях абсолютно яркие звезды сильнее концентрируются к центру скопления, чем абсолютно слабые звезды. В далеких скоплениях мы не видим абсолютно слабых звезд, и поэтому определяемые нами угловые размеры этих скоплений несколько меньше, чем следовало бы ожидать, если бы в них не было эффекта большей концентрации абсолютно ярких звезд к центру скопления. В близких скоплениях мы наблюдаем также и абсолютно слабые звезды. Учитывая это обстоятельство, К. А. Бархатова получила гораздо большую величину α_{pg} , равную примерно $3^m,5$ на 1 *кпс*. Эта величина соответствует b , близкому к нулю, так как все рассеянные скопления находятся практически в галактической плоскости.

Методы, похожие на описанный метод Трюмплера, применялись многими авторами, которые с помощью этих методов определяли среднее поглощение в разных направлениях²⁾.

Чаще всего авторы сравнивали расстояния звезд, определенные методами, не зависящими от поглощения света, с расстояниями, полученными фотометрическими способами, т. е. путем сравнения видимой величины m с абсолютной M . Обозначая в первом случае расстояние через r , а во втором — через r' , легко получим следующее соотношение для каждой отдельной звезды:

$$m - M = 5 \log r - 5 + \alpha r,$$

$$m - M = 5 \log r' - 5,$$

следовательно,

$$r' = r \cdot 10^{0,2\alpha r}.$$

Зная r и r' , легко определить α , т. е. коэффициент межзвездного поглощения.

Расстояниями, не искаженными влиянием поглощения, были расстояния, вычисленные по тригонометрическим параллаксам или по средним параллаксам, которые, в свою очередь, определяются по собственным движениям звезд (см. п. 24). В некоторых случаях использовались параллаксы, вычисленные по лучевым скоростям звезд в предположении существования вращения Галактики (см. п. 24).

Фотометрические же расстояния определялись методом спектральных параллаксов, при этом непосредственно определяется абсолютная величина звезд M , а расстояние r' вычисляется затем по формуле

$$\log r' = 0,2 (m - M) + 1.$$

¹⁾ АЖ, 26, 251 (1949).

²⁾ Довольно подробное изложение этих методов содержится в книге Becker W., *Materie im interstellaren Raum, Fortschritte der Astronomie*, Bd. 1, Lpz., 1938.

Для цефеид абсолютные величины определялись по зависимости период — светимость. Иногда рассматривались объекты, для которых можно было принять $M = \text{const}$, например звезды типа B и A .

Авторы многочисленных работ по этому вопросу получали различные результаты; так, например, значение коэффициента поглощения в фотографических лучах изменялось в пределах от $0^m,5$ до $4^m,0$ на 1 клс.

Главная причина этих расхождений заключается, по всей вероятности, в том, что плотность межзвездной материи никак нельзя считать постоянной; она очень быстро падает с удалением от галактической плоскости. Поэтому, рассматривая в галактической плоскости область, соответствующую большому телесному углу, мы, естественно, будем иметь дело в среднем с меньшим поглощением, чем в случае области малого телесного угла в той же галактической плоскости; в первом случае мы привлекаем области, расположенные дальше от галактической плоскости, чем во втором. Ясно, что в первом случае коэффициент межзвездного поглощения будет меньше, чем во втором.

Второй причиной расхождения полученных результатов является неправильная структура межзвездной материи, в чем мы постараемся убедить читателя в дальнейших главах нашей книги (см. п. 43). Результатом неправильной структуры межзвездной материи является то, что, имея в своем распоряжении данные, освобожденные от влияния систематических ошибок, мы, тем не менее, получаем различные результаты относительно среднего межзвездного поглощения.

Из этого, прежде всего, следует, что предположение о равномерном распределении межзвездного вещества неправильно и, следовательно, межзвездное поглощение, вообще говоря, нужно считать функцией трех координат $A(r, b, l)$. Однако, не имея до сих пор достаточно точных данных, нельзя определить эту функцию чисто эмпирическим путем, поэтому мы вынуждены вводить некоторые предположения относительно вида этой функции.

Вильямс в 1932 г.¹⁾, а позже, на основании некоторых динамических соображений, П. П. Паренaго²⁾ предложили следующую функцию распределения плотности $D(z)$ межзвездной материи в направлении оси z :

$$D(z) = D(r, b) = D(0) e^{-\frac{|r \sin b|}{\beta}}.$$

Здесь $D(0)$ — плотность в окрестностях Солнца, β — постоянная,

$$|z| = |r \sin b|.$$

Поглощение света какой-либо звезды на пути dr , согласно известной формуле, выражается следующим образом (см. рис. 24):

$$-\frac{dI}{I} = kD(0) e^{-\frac{|z|}{\beta}} \operatorname{cosec} b dz,$$

¹⁾ *ApJ.*, 75, 386 (1932).

²⁾ *АЖ*, 17, № 4 (1940); 22, № 3 (1945).

где k — коэффициент, зависящий только от длины волны. Интегрируя это выражение от 0 до r и умножая полученный результат на $-2,5$, получим межзвездное поглощение в звездных величинах для данных r и b

$$A(r, b) = -2,5 \log \frac{I}{I_0} = a_0 \beta \operatorname{cosec} b \left(1 - e^{-\frac{|z|}{\beta}} \right), \quad (41.4)$$

где a_0 — постоянная, зависящая от длины волны, I — интенсивность наблюдаемого излучения, I_0 — интенсивность излучения при отсутствии межзвездного поглощения.

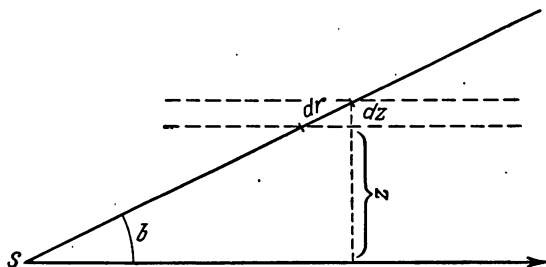


Рис. 24.

Легко установить смысл постоянных a_0 и β . Действительно, предположим, что звезда находится точно в галактической плоскости ($b = 0^\circ$). Тогда после раскрытия неопределенности имеем

$$A(r, 0) = a_0 r. \quad (41.5)$$

Следовательно, a_0 является коэффициентом межзвездного поглощения точно в плоскости Галактики.

Вычислим теперь величину A для $r = \infty$. Это соответствует наблюдению объектов, находящихся далеко от галактической плоскости, т. е. объектов, расположенных практически вне слоя межзвездной материи.

В этом случае имеем

$$A(\infty, b) = a_0 \beta \operatorname{cosec} b;$$

предположим еще, что $b = 90^\circ$, тогда

$$A(\infty, 90^\circ) = a_0 \beta.$$

Итак, величина $a_0 \beta$ равна поглощению во всем слое межзвездной материи с одной стороны от галактической плоскости при прохождении луча света перпендикулярно к этой плоскости. Тогда поглощение во всем слое межзвездной материи при прохождении луча

света перпендикулярно к галактической плоскости должно быть равно $2a_0\beta$, если наше предположение о том, что Солнце находится в галактической плоскости, правильно. В действительности же Солнце находится так недалеко от этой плоскости (см. п. 2), что во многих случаях можно этим пренебречь.

Зная величины a_0 и β для определенной области неба, можно вычислить коэффициент межзвездного поглощения в предположении постоянства плотности межзвездной материи в этой области.

Для этого необходимо еще знать пространственное распределение изучаемых объектов относительно галактической плоскости, т. е. функцию $D(z)$, дающую число звезд в единице объема на расстоянии z от плоскости Галактики.

Среднее межзвездное поглощение света изучаемых объектов на расстоянии r будет равно

$$\bar{A}_r = \frac{\int_0^\infty a_0\beta \operatorname{cosec} b \left(1 - e^{-\frac{|z|}{\beta}}\right) D(z) dz}{\int_0^\infty D(z) dz}.$$

Если, согласно многим данным, предположить, что

$$D(z) = D_0 e^{-\frac{|z|}{\gamma}},$$

где D_0 и γ имеют разные значения для различных групп звезд, то, заменяя $\operatorname{cosec} b = r/z$, получим

$$\bar{A}_r = \frac{a_0\beta}{\gamma} r \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|z|}{\gamma}} \left(1 - e^{-\frac{|z|}{\beta}}\right)}{z} dz = \frac{a_0\beta}{\gamma} r \ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right)^1.$$

Следовательно, среднее межзвездное поглощение во всем слое межзвездной материи пропорционально расстоянию, причем коэффициентом межзвездного поглощения является величина

$$\alpha = \frac{a_0\beta}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right).$$

П. П. Паренаго, исследуя межзвездное поглощение в разных направлениях, пришел к выводу, что величину β в формуле (41.4) можно с достаточной степенью точности считать постоянной для всех галактических долгот и широт; сильнее изменяется величина a_0 . Полученная П. П. Паренаго величина $\beta = 100$ пс несколько меньше более поздних определений этой величины вследствие неучета эффекта клочковатой структуры межзвездной материи²⁾. Окончательно следует принять $\beta = 125$ пс и среднее значение $a_0 = 2,7$ на 1 клс. Следо-

¹⁾ См. Gröbner W., Hofreiter N., Integraltafeln, II, 1950, стр. 56.

²⁾ См., например, Зонн В., АЖ, 33, 855 (1956).

вательно, для $r = \infty$ и $b = 90^\circ$ имеем, в полном согласии с определениями других исследователей (см. п. 40),

$$a_0\beta = 0^m,34.$$

Для различных направлений величина a_0 изменяется от $0^m,6$ до $8^m,0$ на 1 *кпс*. По мнению П. П. Паренаго, причины колебания этой величины заключаются главным образом в неточности наших данных о звездах, хотя, несомненно, большую роль здесь играет также неоднородность межзвездной материи, которая, по мнению других исследователей, является главной причиной изменения величины a_0 .

В упомянутых исследованиях Вильямс, Паренаго и другие авторы пользовались методом определения межзвездного поглощения, отличным от тех, которые были изложены выше. В этом методе мерой межзвездного поглощения в данном направлении и на данном расстоянии было так называемое селективное поглощение, которым мы сейчас и займемся.

42. Селективное межзвездное поглощение. Под селективным поглощением мы понимаем изменение цвета, вернее говоря, изменение распределения интенсивности в спектре звезды в результате прохождения света этой звезды через межзвездную среду, в которой происходит селективное рассеяние и поглощение.

Предположим, что какой-нибудь объект наблюдается в двух областях спектра с соответствующими длинами волн λ_1 и λ_2 . Рассеяние и поглощение в межзвездной материи зависит от длины волны. Предполагая, что оптические свойства межзвездной материи в данном направлении на разных расстояниях одинаковы, получим величину поглощения, интегрируя уравнение (см. п. 14)

$$-\frac{dI}{I} = k(\lambda) D(r) dr$$

в пределах от нуля до расстояния наблюдаемого объекта r . $D(r)$ — плотность межзвездной материи в функции расстояния. Вычислим межзвездное поглощение в звездных величинах

$$\begin{aligned} A(\lambda_1) &= -2,5 \log \frac{I}{I_0} = 1,086k(\lambda_1) \int_0^r D(r) dr, \\ A(\lambda_2) &= 1,086k(\lambda_2) \int_0^r D(r) dr. \end{aligned} \quad (42.1)$$

Следовательно,

$$\frac{A(\lambda_1)}{A(\lambda_2)} = \frac{k(\lambda_1)}{k(\lambda_2)}$$

или

$$\frac{A(\lambda_1) - A(\lambda_2)}{A(\lambda_1)} = \frac{k(\lambda_1) - k(\lambda_2)}{k(\lambda_1)} = \frac{CE}{A(\lambda_1)} = f(\lambda_1, \lambda_2). \quad (42.2)$$

Величина $CE = A(\lambda_1) - A(\lambda_2)$ называется избытком цвета звезды (colour excess). Выясним физический смысл этой величины.

Пусть звезда излучает таким образом, что ее звездные величины для длин волн λ_1 и λ_2 при отсутствии межзвездного поглощения равны соответственно m_1 и m_2 , а показатель цвета звезды равен $CI = m_1 - m_2$. После прохождения света звезды через межзвездную материю величины m_1 и m_2 увеличатся соответственно на $A(\lambda_1)$ и $A(\lambda_2)$. Следовательно, наблюдаемый показатель цвета CI' будет отличаться от действительного, т. е. неискаженного влиянием межзвездного поглощения показателя цвета на величину CE ,

$$CI' = m_1' - m_2' = m_1 + A(\lambda_1) - m_2 - A(\lambda_2) = CI + CE.$$

Действительные показатели цвета CI можно определять по спектральным классам звезд; последние не зависят от межзвездного поглощения, так как спектральная классификация основана на линейчатом спектре звезд. Вычитая определенный таким образом действительный показатель цвета звезды из ее видимого показателя, можно определить избыток цвета CE .

На основании соотношения

$$\frac{CE}{A(\lambda_1)} = f(\lambda_1, \lambda_2)$$

можно сразу же, не зная ни расстояния звезды, ни плотности $D(r)$ межзвездной материи вдоль луча зрения, определить межзвездное поглощение A для данной длины волны λ , если известна функция $f(\lambda_1, \lambda_2)$. Поэтому этот метод определения межзвездного поглощения считается самым надежным и точным. Именно этот метод и применил П. П. Паренаго, потом его применяли также многие другие исследователи.

Используя равенство (42.1), можно получить более общую зависимость, а именно,

$$\frac{A(\lambda_1) - A(\lambda_2)}{A(\lambda_3)} = \frac{CE}{A(\lambda_3)} = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (42.3)$$

Правая часть здесь является функцией только длин волн наблюдаемого излучения. Следовательно, *избыток цвета CE пропорционален величине межзвездного поглощения в произвольной длине волны*. Зная, например, фотометрические избытки цвета по наблюдениям в двух участках спектра, можно вычислить по ним межзвездное поглощение в фотографических ($\lambda_3 = 4260 \text{ \AA}$) или визуальных ($\lambda_3 = 5430 \text{ \AA}$) лучах.

В случае $\lambda_1 = \lambda_3 = 4260 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5430 \text{ \AA}$, на основании многих наблюдательных данных, получаем

$$\frac{A(\lambda_1) - A(\lambda_2)}{A(\lambda_1)} = \frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{4}.$$

Во многих случаях нам важно знать общий вид функции $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, которая связана с функцией $k(\lambda)$, входящей во многие формулы (см. п. 14).

До сих пор астрономы пользовались приближенным выражением

$$k(\lambda) = c + b\lambda^{-n}, \quad (42.4)$$

в котором величина c , не зависящая от длины волны, определяет нейтральное поглощение. Ясно, что $n \leq 4$, так как $n = 4$ только в исключительном случае равенства диаметров рассеивающих частиц длине волны (рэлеевское рассеяние). Чем сильнее размеры частиц отличаются от длины волны, тем меньше n ; последнее становится равным нулю, когда размеры рассеивающих частиц значительно отличаются от длины волны.

Первые определения величины n привели к значению $n = 1$. Однако, этот результат частично является следствием того, что разности температур звезд одного и того же спектрального класса могут вызвать кажущееся межзвездное „покраснение“ согласно формуле (42.4) при $n = 1$.

В самом деле, рассмотрим две звезды, имеющие соответственно температуры T_1 и T_2 , и вычислим изменение разности их величин $\Delta m'$ в зависимости от длины волны λ . В качестве аргумента примем $v = \lambda^{-1}$.

Согласно закону излучения абсолютно черного тела, имеем

$$\Delta m' = -2,5 \log \frac{e^{-\frac{c_2 v}{T_1}} - 1}{e^{-\frac{c_2 v}{T_2}} - 1},$$

$$\frac{d\Delta m'}{dv} = -1,086 \left[\frac{c_2}{T_1} \left(1 - e^{-\frac{c_2 v}{T_1}} \right)^{-1} - \frac{c_2}{T_2} \left(1 - e^{-\frac{c_2 v}{T_2}} \right)^{-1} \right].$$

Оба выражения в скобках близки к единице. Так как для $T = 10\,000^\circ\text{K}$ и $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ $\frac{c_2 v}{T} = 2,86$ ($c_2 = 1,43$ в системе CGS), следовательно, практически

$$\frac{d\Delta m'}{dv} = \text{const}, \text{ т. е. } \frac{d\Delta m'}{d\lambda} = -\frac{\text{const}}{\lambda^2}.$$

Тот же результат получим, рассматривая межзвездное поглощение при $n = 1$. Действительно, в этом случае

$$\Delta m = C(c_1 - c_2) + (b_1 - b_2)\lambda^{-1} \quad (42.5)$$

и, следовательно, $\frac{d\Delta m}{d\frac{1}{\lambda}} = \text{const}$.

Таким образом, исследуя спектр звезды, свет которой проходит через межзвездную материю, т. е. звезды с большим избытком цвета, и другой звезды с „нормальным“ показателем цвета, нельзя отличить влияние межзвездного поглощения от эффекта, вызванного неизбежными различиями температур звезд.

Однако, более поздние фотоэлектрические наблюдения звезд во многих участках спектра позволили установить точную зависимость межзвездного поглощения $A(\lambda)$ от длины волны ¹⁾.

Эти наблюдения дают разности Δm , вызванные межзвездным поглощением в разных длинах волн. Результаты представлены на рис. 25 с произвольным нульпунктом величин Δm , т. е. приведен график $\Delta m = k(\lambda) + c$ [см. (42.4)], согласно работе Уитфорда ²⁾.

Из этого графика следует, что в интервале длин волн $3500 \text{ \AA} - 10000 \text{ \AA}$ зависимость эта близка к виду $a + b\lambda^{-0,6}$.

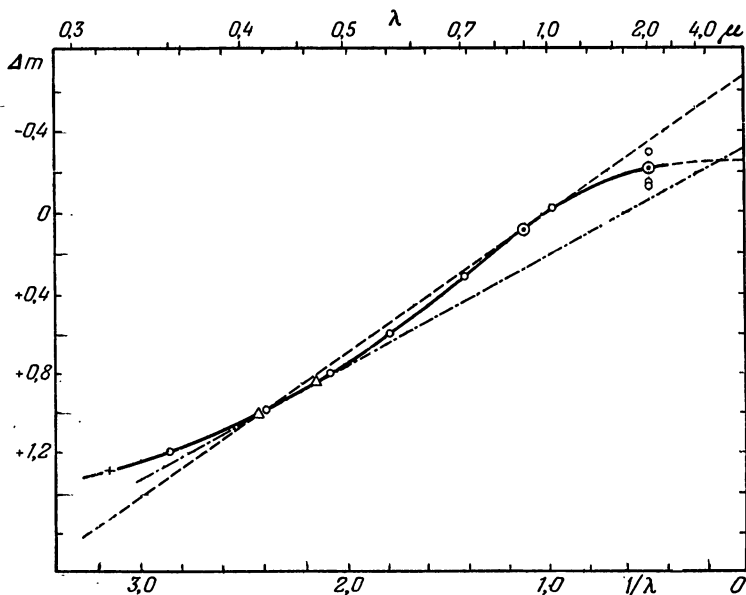


Рис. 25.

Пользуясь полученным выражением для вычисления коэффициента пропорциональности зависимости избытка цвета от полного поглощения [см. формулу (42.2)], можно, прежде всего, заметить, что коэффициент пропорциональности C в формуле (42.5) должен быть близок к значению $\Delta m(\infty)$. Действительно, второй член зависимости (42.4) равен нулю при $\lambda^{-1} = 0$, таким образом $C = \Delta m(\infty)$.

Следовательно, уравнение (42.2) в случае сравнения фотографических величин ($\lambda = 4260 \text{ \AA}$) с визуальными или фотовизуальными

¹⁾ Более подробное изложение этого вопроса читатель найдет в книге Нунек J. A., *Astrophysics*, 1951, глава *Interstellar Matter*.

²⁾ *ApJ.*, 107, 102 (1948).

($\lambda = 5430 \text{ \AA}$) можно переписать в виде

$$A_{pg} = \gamma CE = \frac{1}{f(\lambda_1, \lambda_2)} CE,$$

где

$$\gamma = \frac{k(4260)}{k(4260) - k(5430)} = \frac{\Delta m(4260)}{\Delta m(4260) - \Delta m(5430)}.$$

Согласно приведенной на рис. 25 зависимости, имеем

$$\Delta m(4260) = 1^m,0; \quad \Delta m(5430) = 0^m,7; \quad \Delta m(\infty) = -0^m,25;$$

следовательно, $\gamma \approx 4$.

Таким же образом можно вычислить коэффициент пропорциональности для других фотометрических систем. Так, например, для фотоэлектрических наблюдений Стеббинса, Хаффера и Уитфорда¹⁾, соответствующих длинам волн $4260 \text{ \AA}$ и $4770 \text{ \AA}$, получим

$$\Delta m(4260) - \Delta m(4770) = 0^m,16,$$

$$\Delta m(4260) - \Delta m(\infty) = 1^m,25 \text{ и } \gamma \approx 8.$$

На основании разных исследований можно было убедиться в том, что величина $k(\lambda)$ практически постоянна для различных направлений на небе и разных расстояний; следовательно, постоянной можно считать также величину γ . Эта величина играет огромную роль в звездной астрономии. Если из наблюдений известен избыток цвета CE , то можно сразу же вычислить межзвездное поглощение света данной звезды $A = \gamma \cdot CE$ в любой фотометрической системе. Зная абсолютную величину звезды M в той же фотометрической системе, можно определить ее расстояние r по формуле

$$r = 10^{0,2(m-M-\gamma \cdot CE)+1}.$$

Этот метод кажется нам самым надежным при определении расстояний звезд, в особенности далеких, для которых все другие методы дают очень неуверенные результаты, отягощенные к тому же большими систематическими ошибками.

43. „Клочковатая“ структура межзвездной материи. Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что межзвездная материя является непрерывной средой; поэтому можно было считать межзвездное поглощение функцией расстояния r от наблюдателя, т. е. имело место соотношение

$$A(r) = k(\lambda) \int_0^r D(r) dr. \quad (43.1)$$

¹⁾ *ApJ.*, 91, 20 (1940).

Отбросим, однако, это предположение, введя вместо него другое, а именно: предположим теперь, что межзвездная материя состоит из отдельных облаков сферической формы с разными радиусами R . Пусть $f(R)$ является функцией распределения радиусов этих облаков.

Докажем, что наши предыдущие выводы и в этом случае не потеряют своего значения, только $A(r)$ будет теперь средним межзвездным поглощением на расстоянии r . Рассмотрим цилиндр, площадь основания которого равна единице, а высота dr . Пусть $D(r)$ обозначает число облаков в единице объема, тогда число их в нашем цилиндре будет равно $D(r)dr$. Вероятность того, что прямая, параллельная оси цилиндра, пересечет облако радиуса R , равна πR^2 . Следовательно, среди $D(r)f(R)dRdr$ облаков с радиусами от R до $R+dR$, находящихся в цилиндре, наша прямая в среднем пересечет

$$\pi R^2 D(r) f(R) dR dr$$

облаков. Среднее число всех пересеченных на пути dr облаков $\bar{n}$ получим, интегрируя это выражение по R в пределах от 0 до ∞ ,

$$\bar{n} = D(r) dr \int_0^{\infty} \pi R^2 f(R) dR = \sigma D(r) dr.$$

Здесь $\sigma = \pi \overline{R^2}$ является средней площадью проекции облака на плоскость. Обозначая среднее поглощение в одном облаке через ϵ , имеем для среднего поглощения на пути dr следующее выражение:

$$\epsilon \bar{n} = \epsilon \sigma D(r) dr.$$

Среднее поглощение на всем пути будет равно

$$A(r) = \epsilon \sigma \int_0^r D(r) dr = \pi \epsilon \overline{R^2} \int_0^r D(r) dr, \quad (43.2)$$

если, конечно, $f(R)$ и ϵ не зависят от расстояния. В противном случае имеем

$$A(r) = \pi \int_0^r \epsilon \overline{R^2} D(r) dr. \quad (43.3)$$

Величина ϵ зависит от длины волны, поэтому ее следует обозначать $\epsilon(\lambda)$.

Таким образом мы получили формулу, похожую на формулу (43.1), с той только разницей, что $D(r)$ обозначает теперь не плотность, а среднее число туманностей в единице объема пространства, которое, конечно, пропорционально средней плотности межзвездной материи при правильности сделанных нами предположений.

Чтобы заменить средний квадрат радиуса туманности $\bar{R}^2$ квадратом ее среднего радиуса, надо знать вид функции распределения радиусов туманностей $f(R)$. П. П. Паренаго¹⁾ предположил, что радиусы туманностей R распределяются по закону Максвелла, т. е. имеем

$$f(R) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 R^2} R^2.$$

В таком случае после ряда преобразований получаем

$$\bar{R}^2 = \frac{3}{8} \pi \bar{R}^2$$

и, следовательно,

$$A(r) = \frac{3}{8} \varepsilon(\lambda) \pi^2 \bar{R}^2 \int_0^r D(r) dr.$$

Предполагая далее, что средняя плотность межзвездной материи является экспоненциальной функцией расстояния от галактической плоскости z (см. п. 41)

$$D(r) = D(0) e^{-\frac{|z|}{\beta}},$$

приходим к выводу, что

$$A(r) = \frac{3}{8} \pi^2 \varepsilon(\lambda) \bar{R}^2 \frac{\beta}{\sin b} \left(1 - e^{-\frac{|r \sin b|}{\beta}} \right) D(0).$$

Сравнивая это выражение с выражением (41.4), легко получить новое выражение для величины a_0

$$a_0 = \frac{3}{8} \pi^2 \varepsilon(\lambda) \bar{R}^2 D(0).$$

Зная величину $a_0 = 0^m, 0035$ на 1 пс , определенную П. П. Паренаго для фотографической системы звездных величин, и приняв $\varepsilon = 0^m, 25$ на основании исследований, о которых речь будет дальше, а также $D(0) = 7 \cdot 10^{-4}$ облаков в 1 пс^3 на основании подсчетов темных облаков вблизи Солнца, получим

$$\bar{R} = 2,3 \text{ пс}.$$

По мнению некоторых авторов²⁾, лучшее согласие с имеющимися данными получится, если принять, что функция распределения облаков является убывающей функцией их радиусов. Примем, например, что

$$f(R) = C e^{-kR}.$$

¹⁾ Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 266.

²⁾ Хавтаси Д. Ш., *Бюлл. Абастум. астроф. обс.*, 18, 29 (1955); Зонн В., *АЖ*, 23, 863 (1956).

В таком случае $\overline{R^2} = 2\overline{R}^2$ и окончательно получим

$$\overline{R} = 1,75 \text{ пс.}$$

Следовательно, значение среднего радиуса туманности не особенно сильно зависит от принятой функции распределения $f(R)$.

Какие же у нас доводы в пользу того, что межзвездная материя не является непрерывной средой, а состоит из отдельных облаков?

Одним из самых убедительных аргументов в пользу этого являются результаты изучения дисперсии числа галактик в разных направлениях.

Если бы межзвездная материя была непрерывной средой с распределением плотностей в ней, симметричным относительно галактической плоскости (о чем была речь уже в п. 40), то дисперсия величин поглощения A практически не зависела бы от галактической широты b . Действительно, в этом случае наблюдаемая дисперсия являлась бы следствием реальной дисперсии числа галактик, а также следствием неравенства оптической толщины слоя межзвездной материи для различных направлений. Обе эти причины не должны зависеть от галактической широты.

Если же предположить, что межзвездная материя состоит из отдельных облаков, то легко убедиться, что в этом случае дисперсия должна быть — хотя бы в первом приближении — пропорциональна корню из среднего числа облаков, пересеченных лучом зрения, т. е. пропорциональна корню из наблюдаемого поглощения.

Действительно, так как число пересеченных лучом зрения облаков, вообще говоря, невелико, то их распределение должно подчиняться закону Пуассона¹⁾, согласно которому дисперсия равна квадратному корню из среднего числа λ пересекаемых облаков

$$\sigma = \sqrt{\lambda}.$$

Если предположить, что поверхностями одинаковой плотности межзвездной материи являются плоскости, параллельные галактической, то λ должна быть пропорциональна $\cos b$. Следовательно, дисперсия наблюдаемых величин поглощения σ_A должна быть пропорциональна $\sqrt{\cos b}$. Исследуя эту дисперсию по подсчетам числа галактик или же других объектов, расположенных далеко от галактической плоскости, мы неоднократно убеждались в правильности этого вывода, т. е. в пропорциональности дисперсии σ_A величине $\sqrt{\cos b}$.

Индивидуальные величины A обычно вычисляются по формуле (40.8)

$$A = \frac{2,17 - \log N_{ob}}{0,55},$$

¹⁾ См., например, Ястремский Б. С., Математическая статистика, 1956, стр. 104 или Гнеденко Б. М., Курс теории вероятностей, 1950, стр. 91.

где $N_{об}$ — число наблюдаемых галактик на один кв. градус ярче $m = 20^m$ в данном месте неба; средние величины $\bar{A}$ определяются по формуле, выведенной в п. 40, а именно:

$$A = A(90^\circ, \infty) \operatorname{cosec} b,$$

где $A(90^\circ, \infty)$ — выравненная величина поглощения в направлении галактического полюса. Следовательно,

$$\sigma_A^2 = \frac{\Sigma (A - \bar{A})^2}{N - 1},$$

где N — число изученных площадок в данном направлении. На основании существующих подсчетов легко убедиться в том, что величина σ_A изменяется пропорционально $\sqrt{\operatorname{cosec} b}$, а, следовательно, наше предположение о клочковатой структуре межзвездной материи, т. е. материи, поглощающей свет галактик, вполне правильно.

Еще более убедительное доказательство наличия клочковатой структуры межзвездной материи предложили В. А. Амбарцумян и Ш. Г. Горделадзе¹⁾, которые доказали, что светлые диффузные туманности, принципиально говоря, являются теми же космическими объектами, что и облака темной межзвездной материи, о которых речь была выше. Это значит, что темная межзвездная материя образует облака, которые, встречаясь случайно с горячими звездами, становятся видимыми светлыми диффузными туманностями.

Рассмотрим звезду с абсолютной величиной

$$M = -2,5 \log L + \text{const},$$

где L — светимость звезды. Единица объема внутри туманности на расстоянии R от звезды получает в единицу времени количество энергии, пропорциональное

$$\frac{L}{4\pi R^2};$$

так как поверхностная яркость не зависит от расстояния до наблюдателя, то наблюдаемая поверхностная яркость туманности пропорциональна этой величине.

Пусть $S_0 = \frac{L}{4\pi R^2}$ будет той минимальной поверхностной яркостью, которую может регистрировать данный инструмент. Определяя из этого равенства радиус R , а затем соответствующий этому радиусу объем шара V , имеем

$$V(M) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{L^3}{64\pi S_0^2}}.$$

¹⁾ Бюлл. Абастум. астроф. обс., 2, 37 (1938).

Логарифмируя полученное выражение и подставляя в него вместо L значение M , получим

$$\log V(M) = \text{const} - 0,6 M,$$

т. е.

$$V(M) = A \cdot 10^{-0,6 M},$$

где $A = \text{const}$.

Здесь $V(M)$ — тот объем пространства, окружающий звезду с абсолютной величиной M , внутри которого каждое облако темной межзвездной материи должно быть светлой диффузной туманностью.

Следовательно, та часть единицы объема, в которой каждое облако темной материи становится светлой туманностью при плотности звезд D и функции светимости $\varphi(M)$ (см. § 11), будет равна

Таблица 9

Спектральный класс	P	n
O	0,00002	47
$B0$	0,00004	23
$B1 - B9$	0,00026	122
A	0,00007	28
F	0,00004	6
G	0,000014	1
K	0,000035	5
M	0,000004	2
Всего	0,00048	234

$$P = D \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M) V(M) dM,$$

т. е. P — вероятность того, что темное облако будет наблюдаться как светлая туманность. Если наше предположение относительно клочковатой структуры межзвездной материи правильно и облака этой материи случайным образом распределены в пространстве, то величина P для звезд разных спектральных классов должна быть пропорциональна наблюдаемому числу освещаемых ими светлых диффузных туманностей.

В табл. 9 приводятся результаты подсчета числа туманностей n , освещаемых звездами разных спектральных классов, и соответствующие им вычисленные величины P .

Действительно, величины n пропорциональны P , за исключением спектральных классов O и $B0$, но освещаемые этими звездами туманности являются, как правило, газовыми туманностями, к которым нельзя применить тех выводов, которые были сделаны относительно диффузных туманностей.

Приведенные данные показывают, что только 0,0005 часть всех облаков межзвездной материи является светлыми туманностями. Следовательно, число этих облаков в рассматриваемом объеме пространства должно быть $234 \cdot 2000 = 5 \cdot 10^5$. Объем этого пространства равен объему цилиндра с радиусом примерно 1500 пс (далее мы не можем наблюдать туманности) и высотой, равной приблизительно 200 пс, так как выше 100 пс от плоскости Галактики диффузные туманности не наблюдаются.

Следовательно, среднее число облаков межзвездной материи в 1 кпс^3 равно $3,5 \cdot 10^5$. Это значение находится в довольно хорошем

согласии с более поздними определениями указанной величины в окрестностях Солнца.

Б. В. Кукаркин решил ту же задачу, основываясь на фотоэлектрических наблюдениях избытков цвета галактик, шаровых скоплений и отдельных звезд, находящихся далеко от галактической плоскости, т. е. объектов, расположенных практически вне слоя межзвездной материи ¹⁾. Предположим, что распределение плотностей этой материи симметрично относительно галактической плоскости, тогда средние избытки цвета $\overline{CE}$ должны удовлетворять следующей зависимости:

$$\overline{CE} = CE_0 \operatorname{cosec} b,$$

где CE_0 — средний избыток цвета в направлении галактического полюса.

В результате многих исследований можно считать, что $CE_0 = 0^m, 024$. Обозначим средний избыток цвета в одном облаке межзвездной материи через e_0 , а среднее число пересеченных лучом зрения облаков через $\bar{n}$. Если бы причиной дисперсии наблюдаемых CE являлась бы только дисперсия числа пересеченных облаков, то дисперсия избытков цвета σ равнялась бы

$$\sigma = e_0 \sqrt{\bar{n}}.$$

Однако, на практике на эту величину влияют еще ошибки наблюдений, поэтому наблюдаемая дисперсия избытков цвета σ_0 должна равняться

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 + \mu^2 = e_0^2 \bar{n} + \mu^2,$$

здесь μ является средней ошибкой наблюдений. Среднее число пересеченных облаков $\bar{n}$ на галактической широте b связано со средним числом облаков, пересекаемых в направлении полюса Галактики $\bar{n}_0$ ($b = 90^\circ$), следующим соотношением:

$$\bar{n} = \bar{n}_0 \operatorname{cosec} b.$$

Из наблюдений известно, что $CE_0 = 0^m, 024 = e_0 \bar{n}_0$, следовательно,

$$\sigma_0^2 = 0,024 e_0 \operatorname{cosec} b + \mu^2.$$

Разделим всю небесную сферу на зоны с разными галактическими широтами и вычислим для каждой зоны квадрат наблюдаемой дисперсии σ_0^2 , в таком случае получим систему уравнений с неизвестными e_0 и μ^2 , которые можно определить методом наименьших квадратов. Описанным способом Б. В. Кукаркин для фотоэлектрической системы

¹⁾ Доклады АН СССР, 42, № 6, 251 (1944).

показателей цвета Стеббинса, Хаффера и Уитфорда ¹⁾ получил

$$e_0 = 0^m,027.$$

Зная отношение γ общего фотографического поглощения к селективному, равное в данном случае 12,5, можно сразу же вычислить среднее поглощение в одном облаке в фотографических лучах

$$\varepsilon = 0^m,34.$$

В своих вычислениях Б. В. Кукаркин, так же, как и многие другие исследователи, не учитывал дисперсии величин e и величин ε , однако, учет этих величин может привести к несколько иным результатам ²⁾.

В самом деле, непосредственно в результате наших измерений получаем показатель цвета CI , равный действительному показателю цвета CI_0 плюс избыток цвета, возникающий вследствие прохождения света через межзвездную среду, т. е.

$$CI = CI_0 + \sum e_i,$$

где $\sum e_i$ — сумма избытков цвета, а e_i — избыток цвета в одном облаке. Наблюдаемая дисперсия

$$\sigma^2 = \sigma^2(CI_0) + \sigma^2(\sum e_i) = \sigma_0^2 + \varepsilon(\sum e_i)^2 - [\varepsilon(\sum e_i)]^2,$$

где $\sigma^2(CI_0)$ — квадрат дисперсии, вызванной ошибками наблюдений и действительной дисперсией показателей цвета выбранных звезд; ε — математическое ожидание величины, стоящей в скобке.

Легко доказать, что, если величины e и n независимы (n — число пересеченных облаков), то

$$\varepsilon(\sum e_i) = \varepsilon(n) \varepsilon(e),$$

$$\varepsilon(\sum e_i)^2 = \varepsilon(n) \sigma^2(e) + [\varepsilon(e)]^2 \varepsilon(n^2),$$

где $\sigma(e)$ — дисперсия величин e . Следовательно,

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + [\varepsilon(e)]^2 \sigma^2(n) + \varepsilon(n) \sigma^2(e), \text{ так как } \sigma^2(n) = \varepsilon(n^2) - [\varepsilon(n)]^2,$$

или же, вводя предыдущие обозначения,

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + e_0^2 \sigma_n^2 + \bar{n} \sigma_e^2.$$

В нашем случае $\sigma_n^2 = \bar{n}$.

Таким образом, помня, что $e_0 \bar{n} = CE_0$, получим формулу

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + CE_0 \left(e_0 + \frac{\sigma_e^2}{e_0} \right) \operatorname{cosec} b = \sigma_0^2 + CE_0 e_0 \left(1 + \frac{\sigma_e^2}{e_0^2} \right) \operatorname{cosec} b,$$

которая совпадает с формулой, выведенной Б. В. Кукаркиным, при $\sigma_e = 0$.

¹⁾ *ApJ.*, 84, 132 (1936); 86, 247 (1937).

²⁾ Зонн В., *АЖ*, 33, 862 (1956).

Если предположить, что функция распределения величин e является убывающей функцией e , например, функцией вида¹⁾

$$f(e) = Ca^{-ke},$$

то легко показать, что в этом случае $\sigma_e^2 = e_0^2$, и, следовательно, полученная выше формула будет иметь вид

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + 2e_0CE_0 \operatorname{cosec} b.$$

Эта формула отличается от формулы, полученной Б. В. Кукаркиным.

Сходным методом пользовался П. П. Паренаго²⁾ при исследовании объектов вблизи галактической плоскости, а именно: звезд ранних спектральных классов, не исследованных Б. В. Кукаркиным. П. П. Паренаго определял средние избытки для групп звезд, находящихся практически на одинаковом расстоянии от Солнца и в одном направлении, а затем вычислял квадраты дисперсий этих величин. Предполагая, как и Б. В. Кукаркин, что квадрат наблюдаемой дисперсии равен сумме квадратов средней ошибки и действительной дисперсии, а квадрат последней пропорционален среднему числу пересеченных облаков в данном направлении и на данном расстоянии, П. П. Паренаго пришел к следующей зависимости:

$$\sigma_{ob}^2 = \bar{n} + \mu^2, \quad (e_0\sigma_{ob})^2 = e_0^2 \bar{n} + m^2,$$

где $m = e_0\mu$ — средняя ошибка наблюдений в звездных величинах. Зная а priori эту величину, можно вычислить „действительную“ дисперсию $\sigma^2 = e_0^2 \bar{n} = e_0CE_0$, или же, переводя эти величины в полное поглощение, имеем

$$\sigma^2 = \varepsilon \frac{CE_0}{\gamma},$$

где γ — отношение общего поглощения к селективному. Незвестной является здесь величина ε , которую и определил П. П. Паренаго

$$\varepsilon = 0^m, 27.$$

Иным путем определил эту величину В. А. Амбарцумян^{3,4)}. Вместо среднего поглощения в одном облаке ε введем величину q , связанную с величиной ε следующим соотношением:

$$\varepsilon = -2,5 \log q, \quad q = 10^{-0,4\varepsilon}. \quad (43.4)$$

Будем рассматривать объекты, достаточно удаленные от галактической плоскости в направлении галактической широты b . Пусть n

¹⁾ См. Хавтаси Д. Ш., *Бюлл. Абастум. астроф. obs.*, 18, 29 (1955); Зонн В., *АЖ*, 33, 863 (1956).

²⁾ *АЖ*, 22, 144 (1945).

³⁾ *Trans. Intern. Astronom. Union*, 7, 452 (1950).

⁴⁾ Величину ε впервые определил еще в 1940 г. В. А. Амбарцумян по флуктуациям чисел галактик (*Бюлл. Абастум. астроф. obs.*, 4, 17 (1940). — *Прим. ред.*

обозначает число облаков, пересеченных лучом зрения. Предположим, что число облаков подчиняется распределению Пуассона

$$p(n) = e^{-\lambda_b} \frac{\lambda_b^n}{n!}, \quad \sum_0^{\infty} p(n) = 1, \quad (43.5)$$

где λ_b — среднее число пересеченных облаков в направлении b . Примем, что среднее число галактик ярче звездной величины m в телесном углу, равном единице, $[\bar{N}(m)]$ подчиняется зависимости (31.3), полученной для случая равномерного пространственного распределения объектов, тогда

$$\bar{N}_m = N_0 \cdot 10^{0,6m} \cdot \overline{10^{-0,6A}},$$

где A — межзвездное поглощение; $A = n\varepsilon$. На основании формулы (43.4) имеем

$$10^{-0,6A} = q^{1,5n},$$

следовательно,

$$\bar{N}_m = N_0 10^{0,6m} q^{1,5n}.$$

Вычислим отдельно величину $\overline{q^{1,5n}}$

$$\overline{q^{1,5n}} = \sum_0^{\infty} q^{1,5n} \frac{e^{-\lambda_b}}{n!} \lambda_b^n = \frac{e^{-\lambda_b}}{e^{-\lambda_b q^{1,5}}} \sum_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_b q^{1,5}} (\lambda_b q^{1,5})^n}{n!}.$$

На основании формулы (43.5) имеем $\sum_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_b q^{1,5}} (\lambda_b q^{1,5})^n}{n!} = 1$; значит,

$$\overline{q^{1,5n}} = e^{-\lambda_b (1-q^{1,5})}$$

и

$$\bar{N}_m = N_0 10^{0,6m} e^{-\lambda_b (1-q^{1,5})}.$$

Аналогично вычислим величину $\overline{N_m^2}$

$$\overline{N_m^2} = N_0^2 10^{1,2m} \overline{q^{3n}}; \quad \overline{q^{3n}} = \frac{e^{-\lambda_b}}{e^{-\lambda_b q^3}} \sum_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_b q^3} (\lambda_b q^3)^n}{n!} = e^{\lambda_b (1-q^3)}.$$

Следовательно,

$$\overline{N_m^2} = N_0^2 \cdot 10^{1,2m} e^{-\lambda_b (1-q^3)}.$$

Вычислим теперь выражение

$$\frac{(\overline{N_m} - \bar{N}_m)^2}{\overline{N_m^2}} = \frac{\overline{N_m^2} - 2\bar{N}_m^2 + \bar{N}_m^2}{\overline{N_m^2}} = \frac{\overline{N_m^2} - \bar{N}_m^2}{\overline{N_m^2}}.$$

Пусть плотность межзвездной материи является функцией только расстояния z от галактической плоскости, тогда

$$\lambda_b = \lambda_0 \operatorname{cosec} b.$$

Следовательно, для данного b

$$\frac{(N_m - \bar{N}_m)^2}{N_m^2} = e^{\lambda_0 (1 - q^{1.5})^2 \operatorname{cosec} b} - 1.$$

Из подсчетов галактик известны величины N_m и $\bar{N}_m$. Подставляя эти величины для различных b в написанное выше уравнение, получим систему уравнений с одним неизвестным $\lambda_0 (1 - q^{1.5})^2$. Определив это неизвестное и считая среднее поглощение в направлении галактического полюса A_0 известным, можно вычислить отдельно величины ϵ и λ_0 . В самом деле, нам известны величины $\lambda_0 (1 - q^{1.5})^2$ и $A_0 = \lambda_0 \epsilon$, кроме того, согласно формуле (43.4), $q = 10^{-0.4\epsilon}$, следовательно, можно определить неизвестные ϵ , λ_0 и q . В. А. Амбарцумян, приняв $A_0 = 0^m,32$, получил $\epsilon = 0^m,25$, что находится в хорошем согласии с результатами Б. В. Кукаркина и П. П. Паренаго.

В довольно интересных с теоретической точки зрения новых исследованиях предполагается, что межзвездная материя является непрерывной средой, имеющей, однако, случайные флуктуации плотности. Эти исследования все же не внесли еще пока ничего существенно нового в вопрос структуры межзвездной материи, и поэтому мы ограничимся здесь лишь кратким сообщением об этой работе, отсылая интересующихся к специальной литературе¹⁾.

44. Исследования отдельных темных туманностей. В существовании отдельных темных облаков межзвездной материи, которые по традиции будем называть темными туманностями, можно убедиться, применяя, например, метод, предложенный еще в 1922 г. Вольфом.

Этот метод применим только в тех случаях, когда у нас имеются какие-либо основания предполагать существование в данном направлении темной туманности. Такими основаниями могут быть, например, приближенные подсчеты звезд, которые показывают, что в данном направлении имеется явно выраженный дефицит звезд по сравнению с соседними областями. Порою таким основанием является наличие в данном направлении светлой туманности, которая может рассматриваться как часть гораздо большей невидимой темной туманности. Важно отметить, что при отсутствии туманности метод дает отрицательный ответ, устраняя таким образом опасность ложных результатов.

Метод Вольфа состоит в следующем: производится подсчет числа звезд в области предполагаемой темной туманности, а также

¹⁾ Chandrasekhar S., Münch G., *ApJ.*, 115, 103 (1952); Limber D. N., *ApJ.*, 117, 145 (1953).

в соседней области, в которой нет темных туманностей. Полученные результаты изображаются графически, при этом на горизонтальной оси откладываются звездные величины m , а на вертикальной $\log N(m)$ — логарифмы чисел звезд ярче данной звездной величины в каком-либо телесном углу (рис. 26).

Предположим временно, что все звезды имеют одинаковую абсолютную величину. В таком случае обе кривые будут одинаковы до звездной величины m_0 , соответствующей тому расстоянию, на котором начинается темная туманность. С этой точки кривая чисел звезд

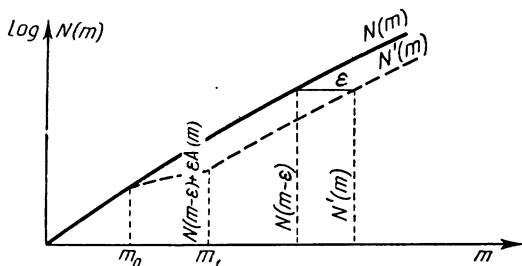


Рис. 26.

в области темной туманности будет отклоняться вниз от кривой для „чистой“ области, так как темная туманность поглощает свет находящихся за ней звезд. От значения m_1 , соответствующего концу темной туманности, обе кривые пойдут параллельно, потому что при одинаковом распределении звездной плотности звездная величина m звезд, находящихся в поглощенной области и имеющих некоторую плотность, будет больше на ϵ по сравнению с величиной звезд, имеющих ту же звездную плотность, но только расположенных в области сравнения.

Все это графически представлено на рис. 26, причем для области туманности — пунктирная кривая, а для области сравнения — сплошная. „Начало“ туманности находится на расстоянии, соответствующем звездной величине m_0 , „конец“ — звездной величине m_1 .

Расстояние, соответствующее этим видимым величинам, определяется по формуле

$$m - M = 5 \log r - 5.$$

Если луч зрения встретит затем еще вторую темную туманность, то опять кривая $N'(m)$ отклонится и будет проходить еще ниже, чем кривая $N(m)$ для области, не занятой туманностью.

Полученные результаты, однако, очень неточны, так как предположение о том, что абсолютные величины звезд одинаковы, далеко от действительности.

Многие исследователи, применяя метод Вольфа, принимали некоторую среднюю абсолютную величину M_0 звезд и совершенно

пренебрегали дисперсией абсолютных величин, а, следовательно, получали неверные результаты. К. Ф. Огородников¹⁾ показал, что неучет дисперсии абсолютных величин звезд при применении метода Вольфа приводит к ошибочным расстояниям начала и конца туманности; т. е. туманности вследствие этого сильно удлиняются, величина же полного поглощения в туманности ϵ в этом случае мало искажается, несмотря на неточность метода.

Полученные этим методом величины поглощения в туманности ϵ в отдельных случаях достигают 3^m , но в среднем они равны 1^m . Это значение ни в коем случае не следует считать противоречащим величине среднего поглощения $0^m,25$ в одном облаке темной материи, определенной методом, описанным в предыдущем пункте. Дело в том, что метод Вольфа применим только к очень большим облакам темных туманностей или же к облакам, вызывающим исключительно сильное поглощение. Небольшие облака остаются попросту незамеченными, так как метод Вольфа не дает никаких указаний относительно существования и расположения облаков. Естественно также, что никто не исследовал все небо методом Вольфа.

Кроме того, метод Вольфа не применим к малым туманностям из-за статистических флуктуаций чисел звезд $N(m)$; влияние последних на кривые $N(m)$ часто неотличимо от влияния поглощения в темных туманностях.

Более точный метод определения поглощения в темных туманностях и расстояний до них предложил несколько раньше (1921 г.) Паннекук²⁾. В этом методе предполагается, что размеры темных туманностей настолько малы (в сравнении с расстоянием звезд), что ими можно просто пренебречь.

Тогда для звезд, находящихся перед туманностью, можно написать интегральное уравнение звездной статистики (34.2) в виде

$$k_1 A(m) dm = dm \int_0^{r_0} r^2 D(r) \varphi(m + 5 - 5 \log r) dr,$$

где k_1 — величина (меньшая единицы), зависящая от расстояния темной туманности r_0 , так как интеграция проводится здесь в пределах от нуля до r_0 . Для звезд, расположенных за туманностью, имеем

$$k_2 A(m - \Delta m) dm = dm \int_{r_0}^{\infty} r^2 D(r) \varphi(m + 5 - 5 \log r - \Delta m) dr,$$

где k_2 также является функцией r_0 , а Δm обозначает поглощение в изучаемой туманности. Все остальные обозначения такие же, как

¹⁾ Доклады АН СССР, 19, 39 (1938); Изв. Главн. астр. обс., Пулково, 16, № 3 (132), 1—40 (1939).

²⁾ Proc. Royal Akad. Amsterdam, 23, 5 (1921).

обычно (см. п. 34). Следовательно, наблюдаемая функция $A'(m)$ должна быть вида

$$A'(m) = k_1 A(m) + k_2 A(m - \Delta m). \quad (44.1)$$

Имея $A(m)$ для соседней „прозрачной“ области неба, можно, если функция $\varphi(M)$ известна, найти функцию $D(r)$ и, зная обе эти функции, определить методом испытаний величины r_0 и Δm так, чтобы они удовлетворяли соотношению (44.1).

В методе Паннекука учитывается дисперсия абсолютных величин звезд, но, тем не менее, этот метод нельзя считать достаточно точным хотя бы потому, что при применении его мы пренебрегаем размерами туманностей; кроме того, предположение о постоянстве функции светимости на различных расстояниях и даже в разных направлениях также может быть источником ошибок. Поэтому самым надежным является применение наиболее точного из всех предложенных до сих пор методов — метода К. Ф. Огородникова¹⁾.

Остановимся на изложении этого метода. Перепишем основные уравнения звездной статистики в несколько иной, чем обычно, форме; пусть единицей расстояния будет декапарсек, а кроме этого, введем следующие обозначения:

$$\rho = 5 \log r, \quad r = e^{c\rho}, \quad c = \frac{1}{5 \text{ Mod}}; \quad \rho = m - M.$$

В этом случае уравнения (34.2) и (31.1) примут вид

$$\begin{aligned} A(m) &= c \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \varphi(m - \rho) d\rho, \\ N(m) &= c \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} d\rho \int_{-\infty}^m \varphi(m - \rho) dm, \end{aligned} \quad (44.2)$$

где

$$D(e^{c\rho}) = \Delta(\rho).$$

Ясно, что

$$\int_{-\infty}^m \varphi(m - \rho) dm = \int_{-\infty}^{m-\rho} \varphi(m) dm.$$

Следовательно, второе уравнение можно переписать в виде

$$N(m) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} d\rho \int_{-\infty}^{m-\rho} \varphi(m) dm = c \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \Phi(m - \rho) d\rho, \quad (44.3)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 147.

причем $\Phi(m)$ является дистрибуантой функции светимости $\varphi(m)$ (т. е. $\Phi(m) = \int_{-\infty}^m \varphi(m) dm$). Уравнения (44.2) и (44.3) справедливы в тех направлениях, где поглощение света отсутствует. В направлении же темной туманности, поглощение в которой ϵ , имеем

$$A'(m) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \varphi(m - \rho - \epsilon) d\rho, \quad (44.4)$$

$$N'(m) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \Phi(m - \rho - \epsilon) d\rho. \quad (44.5)$$

а) Рассмотрим самый простой случай: абсолютные величины всех звезд одинаковы, т. е. $M = \text{const}$, и, следовательно, дисперсия этих величин равна нулю.

В этом случае интегральные уравнения для обеих областей примут вид

$$\begin{aligned} A(m) &= c\Delta(\rho) e^{3c\rho}, \\ A'(m) &= c\Delta(\rho') e^{3c\rho'}, \end{aligned} \quad (44.6)$$

$\rho = m - M$ для $m < m_0$ и $\rho' = m - M - \epsilon$ для $m \geq m_0$, причем m_0 соответствует расстоянию темной туманности r_0

$$\rho_0 = m_0 - M, \quad r_0 = e^{c\rho_0}.$$

Следовательно,

$$N(m) = \int_{-\infty}^m A(m) dm = c \int_{-\infty}^m \Delta(m - M) e^{3c(m-M)} dm,$$

$$N'(m) = c \int_{-\infty}^{m_0} \Delta(m - M) e^{3c(m-M)} dm + c \int_{m_0}^m \Delta(m - M - \epsilon) e^{3c(m-M-\epsilon)} dm.$$

Первый интеграл во втором уравнении можно разбить на три интеграла

$$\begin{aligned} N'(m) &= c \int_{-\infty}^{m-\epsilon} \Delta(m - M) e^{3c(m-M)} dm + c \int_{m-\epsilon}^{m_0-\epsilon} \Delta(m - M) e^{3c(m-M)} dm + \\ &+ c \int_{m_0-\epsilon}^{m_0} \Delta(m - M) e^{3c(m-M)} dm + c \int_{m_0}^m \Delta(m - M - \epsilon) e^{3c(m-M-\epsilon)} dm. \end{aligned}$$

Сумма второго и четвертого интегралов равна нулю, в чем легко убедиться, произведя в четвертом интеграле подстановку $m - \epsilon = x$, в результате которой получим второй интеграл с переставленными пределами интегрирования.

Если ϵ мало, то третий интеграл можно заменить [на основании (44.6)] выражением $\epsilon c \Delta(\rho_0) e^{3c\rho} = \epsilon A(m_0)$. Следовательно,

$$N'(m) = N(m - \epsilon) + \epsilon A(m_0) \text{ для } m > m_0 \quad (44.7)$$

и

$$N'(m) = N(m) \text{ для } m < m_0. \quad (44.8)$$

Выражение $N(m_0 - \epsilon)$ можно разложить в ряд для $m = m_0$; ограничиваясь членами первого порядка, получим

$$N(m_0 - \epsilon) = N(m_0) - \epsilon A(m_0).$$

Для случая $m = m_0$ имеем

$$N'(m_0) = N(m_0) \quad (44.9)$$

Зависимости (44.7) — (44.9) являются аналитическим выражением рассмотренного выше метода Вольфа; при $m = m_0$ обе кривые одинаковы (см. рис. 26), потом они расходятся. Так как $N'(m)$ и $N(m - \epsilon)$ являются быстро растущими функциями m , то $A(m_0)$ вскоре становится практически равным нулю по сравнению с обеими величинами в левой части последнего уравнения, содержащего $\epsilon A(m_0)$. Следовательно, для достаточно больших m обе функции равны: $N(m) \approx N(m - \epsilon)$, а это означает, что обе кривые параллельны.

б) Получим теперь более точное выражение $N'(m)$, отбросив предположение о том, что абсолютные величины звезд одинаковы; допустим, однако, что дисперсия абсолютных величин звезд невелика; с таким случаем мы имеем дело, например, при изучении звезд данного спектрального класса.

Предположим, что функция светимости имеет вид

$$\varphi(M) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(M - M_0)^2}. \quad (44.10)$$

Перепишем выражение (44.5) в виде

$$N'(m) = c \int_{-\infty}^{\rho_0} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \Phi(m - \rho) d\rho + c \int_{\rho_0}^{\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \Phi(m - \rho - \epsilon) d\rho.$$

Прибавим и вычтем из правой части выражение

$$c \int_{-\infty}^{\rho_0} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \Phi(m - \rho - \epsilon) d\rho.$$

Тогда

$$\begin{aligned} N'(m) = & c \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \Phi(m - \rho - \epsilon) d\rho + \\ & + c \int_{-\infty}^{\rho_0} \Delta(\rho) e^{3c\rho} [\Phi(m - \rho) - \Phi(m - \rho - \epsilon)] d\rho. \end{aligned} \quad (44.11)$$

Первое слагаемое в правой части — это $N(m - \varepsilon)$ [см. формулу (44.3)]. Для малых ε выражение в квадратных скобках во втором слагаемом можно заменить выражением $\varepsilon \varphi(m - \rho)$. В таком случае

$$N'(m) = N(m - \varepsilon) + \varepsilon c \int_{-\infty}^{\rho_0} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \varphi(m - \rho) d\rho.$$

Предположим, что звездная плотность между наблюдателем и темной туманностью постоянна и равна D_0 , тогда, производя подстановку

$$x = \frac{\rho - m + M_0 - 3c\sigma^2}{\sigma\sqrt{2}}$$

и принимая во внимание уравнение (44.10), получим

$$N'(m) = N(m - \varepsilon) + \frac{\varepsilon c D_0}{\sqrt{\pi}} e^{3c(m - M_0) + 4,5c^2\sigma^2} \int_{-\infty}^Q e^{-x^2} dx,$$

где

$$Q = \frac{\rho_0 - m + M_0 - 3c\sigma^2}{\sigma\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ получаем выражение (44.7). Если же предположить, что σ мало, т. е., что можно пренебречь σ^2 , то

$$N'(m) = N(m - \varepsilon) + \frac{\varepsilon c D_0}{\sqrt{\pi}} e^{3c(m - M_0)} \int_{-\infty}^{Q'} e^{-x^2} dx,$$

где

$$Q' = \frac{\rho_0 - m + M_0}{\sigma\sqrt{2}}$$

и $cD_0 e^{3c(m - M)} = A(m)$, согласно выражению (44.6).

Итак,

$$N'(m) = N(m - \varepsilon) + \varepsilon A(m) \int_{-\infty}^{Q'} e^{-x^2} dx. \quad (44.12)$$

Таков должен быть результат в предположении, что дисперсия абсолютных величин σ очень мала. Если же дисперсия больше, то верхний предел интегрирования Q' должен быть заменен на Q .

Вернемся теперь снова к интерпретации кривых Вольфа. Очень часто исследователи обнаруживали второе отклонение кривой $N(m)$ в области $m = 13^m$ и объясняли его существованием второй темной туманности в данном направлении. Однако, это объяснение неправильно, так как существование второго отклонения вытекает из некоторых свойств функции светимости. Рассмотрим уравнения (44.3)

и (44.11). Если во втором уравнении прибавить и вычесть величину

$$c \int_{\rho_0}^{\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \Phi(m - \rho) d\rho,$$

а затем заменить

$$\Phi(m - \rho) - \Phi(m - \rho - \varepsilon) \approx \varepsilon \varphi(m - \rho),$$

то получим

$$\Delta N(m) = N(m) - N'(m) = c\varepsilon \int_{\rho_0}^{\infty} \Delta(\rho) e^{3c\rho} \varphi(m - \rho) d\rho.$$

Функция светимости для звезд всех спектральных классов имеет минимум при значении $M = 8^m$, а потом очень быстро возрастает. Если расстояние до первой туманности равно, например, 100 пс, то $\rho = 5$, и когда $m = 13^m$, то $m - \rho = 8^m$. С этого места разность функций $N(m)$ и $N'(m)$ начинает быстро расти, создавая ложное впечатление второй туманности, которой в действительности нет.

в) Рассмотрим теперь самый общий случай, т. е. не будем делать никаких предположений относительно дисперсии абсолютных величин звезд. Метод, который применяется в этом случае, собственно говоря, и является методом К. Ф. Огородникова; в нем предполагается только, что звездную плотность D можно представить формулой

$$D(r) = D_0 r^{-\lambda}.$$

Для сравнительно небольших расстояний это предположение не должно вызывать возражений, если, конечно, соответствующим образом подобрать величину λ . Это допущение, как мы вскоре убедимся, равнозначно тому, что $\log N(m)$ в непоглощенной области является линейной функцией m , что, вообще говоря, довольно близко к действительности.

Приведенное выше равенство перепишем в виде

$$\Delta(\rho) e^{3c\rho} = D_0 e^{c(3-\lambda)\rho}.$$

Вычитая из выражения (44.3) выражение (44.5), имеем

$$\Delta N(m) = cD_0 \int_{\rho_0}^{\infty} e^{c(3-\lambda)\rho} \Phi(m - \rho) d\rho - cD_0 \int_{\rho_0}^{\infty} e^{c(3-\lambda)\rho} \Phi(m - \rho - \varepsilon) d\rho.$$

Мы интегрируем здесь от „начала“ темной туманности, т. е. от ρ_0 .

Введем новые переменные: в первом интеграле

$$z = m - \rho,$$

а во втором

$$z = m - \rho - \varepsilon.$$

Таким образом, в результате указанной подстановки получим

$$\Delta N(m) = cD_0 e^{c(3-\lambda)m} \left[\int_{-\infty}^{m-\rho_0} e^{-c(3-\lambda)z} \Phi(z) dz - \int_{-\infty}^{m-\rho_0-\varepsilon} e^{-c(3-\lambda)(z+\varepsilon)} \Phi(z) dz \right]. \quad (44.13)$$

Формула (44.3) в новых обозначениях имеет вид

$$N(m) = cD_0 e^{c(3-\lambda)m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c(3-\lambda)z} \Phi(z) dz. \quad (44.14)$$

Из двух последних равенств имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N(m)}{N(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c(3-\lambda)z} \Phi(z) dz &= \int_{-\infty}^{m-\rho_0} e^{-c(3-\lambda)z} \Phi(z) dz - \\ &- \int_{-\infty}^{m-\rho_0-\varepsilon} e^{-c(3-\lambda)(z+\varepsilon)} \Phi(z) dz. \end{aligned}$$

Дифференцируя обе части по m и помня о произведенной замене, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} \left(\frac{\Delta N(m)}{N(m)} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c(3-\lambda)z} \Phi(z) dz &= e^{-c(3-\lambda)(m-\rho_0)} \Phi(m-\rho_0) - \\ &- e^{-c(3-\lambda)(m-\rho_0-\varepsilon)} \Phi(m-\rho_0-\varepsilon). \end{aligned}$$

Умножим обе части на $cD_0 e^{c(3-\lambda)m}$ и учтем выражение (44.14), тогда

$$N(m) \frac{d}{dm} \left[\frac{\Delta N(m)}{N(m)} \right] = cD_0 e^{c(3-\lambda)\rho_0} [\Phi(m-\rho_0) - \Phi(m-\rho_0-\varepsilon)].$$

Выполним дифференцирование по m , приняв во внимание, что

$$A(m) = \frac{d}{dm} N(m) \quad \text{и} \quad \Delta N(m) = N(m) - N'(m).$$

Для упрощения записи не будем писать аргумент функций, стоящих в левой части равенства,

$$N' \left(\frac{A}{N} - \frac{A'}{N'} \right) = cD_0 e^{c(3-\lambda)\rho_0} [\Phi(m-\rho_0) - \Phi(m-\rho_0-\varepsilon)]. \quad (44.15)$$

Если ε невелико, порядка $1^m - 2^m$, то можно упростить выражение (44.15), а именно:

$$N' \left(\frac{A}{N} - \frac{A'}{N'} \right) = c\varepsilon D_0 e^{c(3-\lambda)\rho_0} \varphi(m-\rho_0), \quad (44.16)$$

где φ является известной нам функцией светимости.

Постоянную λ легко определить по подсчетам звезд в областях, свободных от межзвездной материи. Из уравнения (44.14) следует, что

$$N(m) = N(0) e^{c(3-\lambda)m},$$

т. е.

$$\log N(m) = \frac{3-\lambda}{5} m + \text{const.}$$

Представим полученную кривую $\log N(m)$ прямой с угловым коэффициентом $0,2(3-\lambda)$; следовательно, определив угловой коэффициент прямой, можно сразу же вычислить величину λ .

Прологарифмируем выражение (44.16) и обозначим $P = e c e^{c(3-\lambda)\rho_0}$, тогда

$$\log N' \left(\frac{A}{N} - \frac{A'}{N'} \right) = \log P + \log D_0 \varphi(m - \rho_0) = \log P + \log D_0 \varphi(M).$$

Второй член правой части равенства представляет собой произведение известной функции светимости на D_0 ; это будет число звезд в единице объема с абсолютной величиной M . Эта функция известна, и, следовательно, ее можно изобразить графически. На другом листе прозрачной бумаги изображаем функцию $\log N' \left(\frac{A}{N} - \frac{A'}{N'} \right)$ в том же самом масштабе и затем накладываем этот график на предыдущий так, чтобы обе оси координат совпали. Передвигая параллельно осям один чертеж относительно другого, можно достигнуть того, что обе кривые наилучшим образом совпадут, тогда мы непосредственно определим величины $\log P$ и $\rho_0 = m - M$, на основании которых вычислим затем искомые величины ρ_0 и e , т. е. расстояние темной туманности и полное поглощение в ней.

45. Строение межзвездной материи. Изучая вопрос строения межзвездной материи, можно, как это сделал в 1938 г. О. Струве¹⁾, прийти к существенным выводам, рассматривая некоторые предположения и отбрасывая или принимая их в зависимости от того, согласуются ли они с существующими наблюдательными данными и проверенными теориями оптики или же не согласуются.

Частицы, имеющие размеры от 10^{-1} до 10^{-2} см, не могут быть причиной межзвездного поглощения, так как в этом случае произошло бы только экранирование света звезд, при котором, как известно, *поглощение света не зависит от длины волны*. Это явно противоречит наблюдениям. Кроме того, выдвинутое предположение приводит еще к другому противоречию: если допустить, что именно такие частицы являются причиной межзвездного поглощения, то, вычислив общую массу поглощающего вещества, легко убедиться в том, что она будет значительно превышать ту величину, которая

¹⁾ *Annales d'Astrophysique*, 1, 143—172 (1938).

получается, на основании простых динамических соображений, для массы всей Галактики.

Предположим далее, что размеры частиц межзвездной материи порядка 10^{-3} см. В таком случае, как в этом легко убедиться на основании законов оптики, мы должны были бы наблюдать сильное явление дифракции около звезд, находящихся за облаками межзвездной материи; иначе говоря, эти звезды должны были бы быть окружены легко обнаруживаемыми дополнительными дифракционными кольцами, чего в действительности вовсе не наблюдается. Кроме того, при таких размерах частиц (10^{-3} — 10^{-4} см) межзвездное поглощение должно быть так же, как и в предыдущем случае, неселективным, что также противоречит наблюдениям.

Только лишь в случае частиц порядка 10^{-5} см получается согласие с наблюдениями, так как при таких размерах частиц межзвездное поглощение может быть пропорционально λ^{-1} , что и имеет место в действительности.

Уменьшение размеров частиц до 10^{-6} — 10^{-7} см приводит нас к выводу, что в этом случае межзвездное поглощение должно было бы подчиняться закону Рэлея, т. е. быть пропорциональным λ^{-4} , а это явно противоречит наблюдениям.

Переходя к еще меньшим размерам частиц, мы входим в область газовых молекул и свободных электронов, которые ни в коем случае не могут быть причиной такого сильного межзвездного поглощения потому, что в этом случае общая масса этих частиц должна была бы во много раз превышать массу всей Галактики. Этот вопрос более подробно рассматривается в следующем пункте.

Таким образом, мы приходим к довольно надежному выводу, что непрерывное межзвездное поглощение главным образом вызывается частицами, размеры которых порядка 10^{-5} см. Совокупность этих частиц часто называется пылевой составляющей межзвездной материи в отличие от газовой составляющей, размеры частиц которой значительно меньше и которая практически не участвует в том межзвездном поглощении, о котором речь была выше.

ГАЗОВАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ МЕЖЗВЕЗДНОЙ МАТЕРИИ

46. Межзвездные линии в спектрах звезд. Как уже упоминалось, все наши предыдущие рассуждения относились к пылевой составляющей межзвездной материи, так как наблюдаемые явления могут быть вызваны материей только в твердом или жидком состоянии. Но жидкое состояние материи в межзвездном пространстве является очень маловероятным, поэтому явление межзвездного поглощения приписывается исключительно твердому веществу, т. е. пылевой составляющей межзвездной материи.

Если предположить, что причиной межзвездного поглощения является газовая составляющая, то среди всевозможных процессов, ведущих к непрерывному поглощению, единственно возможным было бы рассеяние на свободных электронах. Два других процесса, т. е. связанно-свободные и свободно-свободные переходы электронов, приходится признать невероятными из-за малой плотности межзвездной материи. Рассеяние на свободных электронах является наиболее вероятным процессом потому, что вследствие малой плотности рекомбинация ионов почти невозможна. Это значит, что большинство частиц межзвездного газа должно быть ионами и свободными электронами. Так как преобладающим элементом в межзвездном газе является водород, в чем мы скоро убедимся, то, следовательно, этот элемент можно считать главным поставщиком свободных электронов.

Предполагая далее, что плотность межзвездной материи $D(z)$ является функцией только расстояния z от галактической плоскости (это согласуется с данными, приведенными в предыдущем параграфе), попытаемся вычислить массу водорода, допуская, что только водород является причиной непрерывного межзвездного поглощения. Полное поглощение в направлении, перпендикулярном к галактической плоскости, согласно наблюдениям, равно $0^m,70$ в фотографической системе звездных величин. Пусть s обозначает коэффициент рассеяния света на единицу массы водорода; в случае рассеяния на электронах он не зависит от длины волны. Изменение интенсивности света звезды, находящейся в направлении галактического полюса, вследствие поглощения межзвездной материей должно выражаться следующим образом:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\int_0^\infty D(z) s dz}$$

Обозначим

$$\tau = \int_0^\infty D(z) s dz.$$

Известно, что

$$-2,5 \log \frac{I}{I_0} \approx 0^m,35.$$

Следовательно,

$$2,5 (\log e) \tau = 1,09 \tau = 0^m,35,$$

т. е.

$$\tau = 0,32.$$

Коэффициент рассеяния s равняется

$$s = s_0 n_H,$$

где s_0 — коэффициент рассеяния при плотности, равной одному электрону на 1 см^3 , n_H — число электронов и, следовательно, число атомов водорода в единице объема. Известно, что

$$s_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 0,7 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \quad n_H = \frac{1}{m_H};$$

здесь e — заряд электрона, m — его масса, m_H — масса протона и c — скорость света.

Принимая во внимание предположение относительно изменения плотности межзвездной материи $D(z)$, попытаемся вычислить массу $\mathcal{M}$ всей Галактики, умножая массу m , заключенную в цилиндре, площадь основания которого равна единице, а ось направлена к полюсу Галактики, на площадь сечения Галактики в ее экваториальной плоскости. Действительно,

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} D(z) dz.$$

Приняв радиус экваториального сечения $R = 3 \cdot 10^{22} \text{ см}$, получим

$$\mathcal{M} = \pi R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} D(z) dz = \frac{2\pi R^2}{s} \int_0^{+\infty} s D(z) dz = \frac{2\pi R^2}{s} \tau = 2\pi R^2 m_H \frac{\varepsilon}{s_0}.$$

Подставляя вместо s_0 , m_H и τ числовые значения, приходим к выводу, что масса

$$\mathcal{M} = 10^{45} \text{ з.}$$

т. е. получили величину в несколько десятков раз больше, чем масса всей Галактики. Это противоречие является очевидным доказательством несостоятельности нашего предположения о том, что причиной непрерывного поглощения в межзвездной материи является водород.

Если вместо водорода в наши рассуждения ввести другой газ, имеющий большую атомную массу, то порядок полученной величины не изменится. Так или иначе следует признать, что причиной непрерывного поглощения и „покраснения“ света в межзвездной среде может быть только пылевая составляющая межзвездной материи. В существовании же газовой составляющей можно убедиться иным путем.

Наблюдая спектры многих звезд, находящихся вблизи галактической плоскости, исследователи обнаружили в этих спектрах линии поглощения, которые образуются не в атмосферах звезд, а в межзвездной материи, находящейся на пути луча света звезды. В пользу того, что происхождение этих линий таково, свидетельствует, между прочим, иное доплеровское смещение для них, чем для линий, возникающих в атмосферах звезд. Межзвездные линии (так будем кратко называть линии, возникающие в межзвездной среде,) гораздо

тоньше звездных линий из-за малой плотности межзвездного газа. Кроме того, межзвездные линии поглощения, как правило, соответствуют переходам электрона с основного уровня в атоме, что является довольно редким в звездных атмосферах.

К сожалению, межзвездные линии часто блендируются линиями, образовавшимися в атмосферах звезд, и поэтому мы не в состоянии наблюдать всех межзвездных линий в доступной нашим наблюдениям области спектра. В этом смысле очень удобными объектами являются звезды ранних спектральных классов, в спектре которых наблюдается сравнительно немного линий, принадлежащих атмосфере звезды. Таким образом, большинство данных о межзвездном газе мы получаем, изучая спектры звезд ранних спектральных классов; в част-

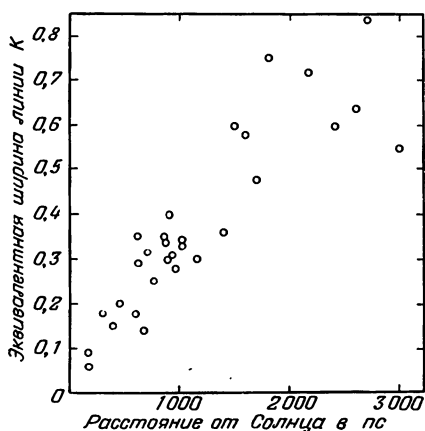


Рис. 27.

ного распределения газа [$D(r) = \text{const}$] интенсивность межзвездной линии должна быть просто пропорциональна расстоянию r . Действительно, результаты многих исследований интенсивности межзвездных линий показывают, что это соотношение в первом приближении правильно (см. рис. 27), однако, лишь в первом приближении. При более точных исследованиях оказалось, что упомянутая пропорциональность нарушается по причине известного факта отклонения кривой роста от прямой пропорциональности. Кроме того, межзвездные линии часто являются результатом наложения нескольких линий с различным доплеровским смещением вследствие разного движения отдельных облаков газа, в которых эти линии образуются. Это сильно изменяет профиль линий, что в свою очередь влияет на измерения их интенсивности, в частности, изменяет эквивалентную ширину линий.

Исследования межзвездных линий с большой дисперсией (около $3 \text{ \AA}$ на $m\mu$) показали, что около 80% наблюдаемых линий H и K (Ca II)

ности, в них наблюдаются две сильные межзвездные линии Ca II (линии H и K), дублет Na I (линия D) и неоттождествленная до сих пор полоса $\lambda 4430 \text{ \AA}$.

Для сильно разреженного газа можно предположить, что интенсивность линии поглощения, возникающей при прохождении света через газ, пропорциональна массе газа на луче зрения; иначе говоря, пропорциональна выражению

$$\int_0^r D(r) dr,$$

где $D(r)$ — плотность межзвездного газа. В случае же равномер-

являются мультиплетами, состоящими из 2, 3 и даже 5 составляющих. Используя приближенные данные относительно расстояний звезд, в спектре которых эти линии наблюдались, можно было заключить, что средний диаметр облаков межзвездного газа равен примерно 700 пс. На основании тех же данных установлено, что облака межзвездного газа участвуют во вращении Галактики (см. § 15). Так наблюдаемые средние лучевые скорости линий межзвездного газа довольно точно удовлетворяют соотношению

$$V_r = A\bar{r} \sin 2(l - l_0),$$

где l и l_0 — галактические долготы данного направления и центра Галактики ($l_0 = 328^\circ$); A — постоянная, равная примерно 20 км/сек/кпс; $\bar{r}$ — среднее расстояние наблюдаемой на данной долготе группы объектов. Для межзвездного газа $\bar{r}$ бралось равным примерно половине расстояния от наблюдателя до звезды, в спектре которой наблюдаются межзвездные линии. Так как в данном случае все изучаемые звезды находятся вблизи галактической плоскости, то в приведенной выше формуле принято $\cos^2 b = 1$ [см. формулу (67.7)].

Следует заметить, что сильная концентрация межзвездного газа к галактической плоскости, которую до сих пор отмечали почти все исследователи, является лишь видимым явлением, вызванным сильной концентрацией звезд, которые используются при исследованиях межзвездного газа, главным образом, звезд типа В. В действительности же концентрация газовой составляющей еще меньше, чем пылевой составляющей межзвездной материи. По исследованиям Смака¹⁾, основанным на многих каталогах эквивалентной ширины межзвездных линий, средняя плотность межзвездного газа довольно хорошо представляется формулой

$$D = D_0 e^{-\frac{|z|}{\beta}},$$

где z — расстояние от галактической плоскости, $\beta = 300$ пс. Для пылевой составляющей $\beta = 125$ пс (см. п. 41).

Мунч в 1953 г.²⁾ обнаружил, что межзвездные линии звезд с галактическими долготами $60^\circ - 140^\circ$ чаще всего являются двойными, но каждый компонент удовлетворяет соотношению

$$V_r = A\bar{r} \sin 2(l - l_0),$$

причем одной из составляющих соответствует значение $\bar{r} = 400$ пс, второй $\bar{r} = 3000$ пс. Все это заставляет нас подозревать существование двух спиральных ветвей межзвездного газа, находящихся на расстояниях 400 и 3000 пс от Солнца и простирающихся в направлении $60^\circ - 140^\circ$ галактической долготы.

1) Warsaw Reprint 67-Acta Astronomica 8, 43 (1958).

2) Publ. Astronom. Soc. Pacific, 65, 179 (1953).

Химический состав межзвездного газа изучается обычно типично астрофизическими методами; а именно: измеряются интенсивности отдельных линий и тем или иным способом по измерениям строится кривая роста. Зная статистические веса, соответствующие отдельным линиям, можно с помощью этой кривой вычислить относительное содержание различных элементов в межзвездном газе. Отсылая тех читателей, которые заинтересуются этим вопросом, к специальной литературе, приводим здесь только следующую таблицу, содержащую основные данные относительно химического состава газовой составляющей межзвездной материи.

Таблица 10

ЧИСЛО ЭЛЕКТРОНОВ, АТОМОВ И ИОНОВ В 1 см^3 МЕЖЗВЕЗДНОГО ГАЗА

Степень ионизации	Электроны	Водород	Натрий	Калий	Кальций	Титан
I	$14,4 \cdot 10^6$	$0,7 \cdot 10^6$	0,050	0,00083	0,00004	$0,91 \cdot 10^{-6}$
II	—	$14,4 \cdot 10^6$	90,0	2,96	0,14	0,0013
III	—	—	21,0	11,8	5,65	0,042
IV	—	—	—	0,69	0,61	0,030
Сумма	$14,4 \cdot 10^6$	$15,1 \cdot 10^6$	111	15,5	6,4	0,073
Парциальная плотность $g/\text{см}^3$		$1,7 \cdot 10^{-23}$	$4 \cdot 10^{-27}$	$7 \cdot 10^{-28}$	$7 \cdot 10^{-28}$	$8 \cdot 10^{-30}$

47. Результаты исследований эмиссионных линий межзвездного водорода. В последние годы многие астрономы занялись поисками возможных способов наблюдения эмиссионных линий межзвездного газа, прежде всего, водорода, так как его относительное содержание в межзвездном газе, как уже упоминалось, очень велико. Естественно, что эмиссия водорода может возникать только около сравнительно горячих звезд, способных ионизовать атомы водорода. В результате рекомбинации ионов происходит эмиссия в линиях водорода, среди которых одной из доступных и удобных для наблюдений является линия H_α серии Бальмера. Области, в которых наблюдается эта линия, называются областями H II в отличие от областей H I, о которых еще будет речь. Наблюдения обычно проводятся с помощью интерференционно-поляризационного фильтра, вырезающего очень узкую область спектра около H_α ; фотографируя небо при помощи широкоугольных камер с упомянутым фильтром, удается получить отдельные светлые точки или пятна — области H II. Расстояния этих областей приравниваются расстояниям тех групп

звезд классов *O* и *B*, относительно которых в каждом отдельном случае можно предполагать, что их свет ионизует межзвездный водород. Зная, кроме того, сферические координаты этих точек, можно определить их положение в пространстве.

По исследованиям Моргана, Шарплесса и Остербрука¹⁾, области Н II явно располагаются в форме двух спиральных ветвей. На рис. 28 схематически изображено пространственное распределение наблюдаемых областей Н II. На краю рис. 28 указаны галактические

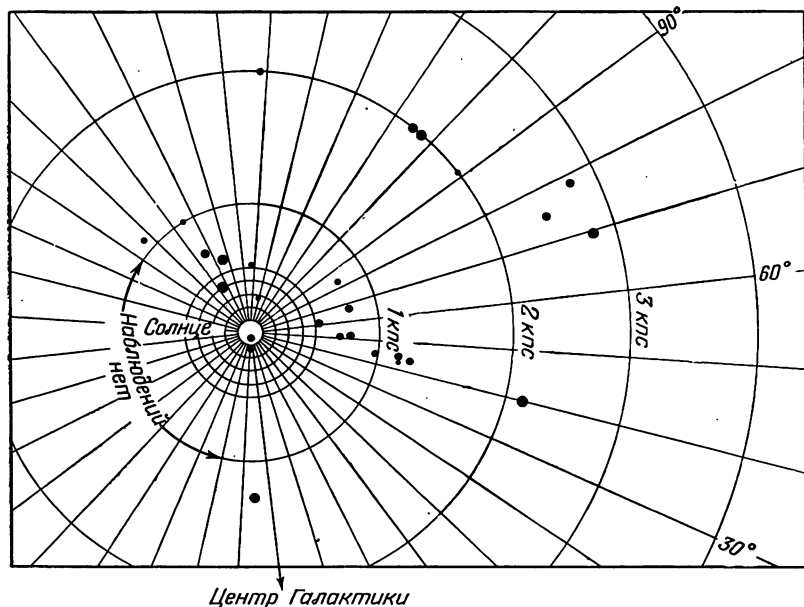


Рис. 28.

долготы; расстояния в *кпс* написаны около соответствующих кругов. В области, отмеченной стрелкой, наблюдений не производилось, так как эта область недоступна наблюдателям, находящимся в северном полушарии Земли.

На рис. 28 отчетливо видны две ветви, идущие почти перпендикулярно к направлению на центр Галактики ($l_0 = 328^\circ$). Одна из них находится на расстоянии примерно 350 *пс*, вторая — 2000 *пс*. Весьма вероятно, что изолированная точка внизу рисунка является частью третьей ветви, которую, однако, не удалось пронаблюдать, так как остальная часть этой ветви находится в области неба, не охваченной наблюдениями.

¹⁾ *Sky and Telescope*, 11, № 6, 138 (1952).

Сравнительно недавно астрономы нашли способ наблюдения нейтрального межзвездного водорода, т. е. так называемых областей H I, используя в данном случае радиоизлучение нейтрального водорода на волне 21 см. Радиобизлучение нашей атмосферы на этой длине волны очень невелико, следовательно, оно нисколько не мешает наблюдениям областей H I.

Интересен метод определения расстояний этих областей, примененный Оортом, Ван де Холстом и Муллером¹⁾.

Однако, ввиду того, что этот метод целиком опирается на кинематические выводы, которые будут рассмотрены в следующей главе, мы не приводим его здесь, а помещаем в дополнении 7.

¹⁾ *BAN*, 12, № 452 (1954).

КИНЕМАТИКА ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

§ 13. Движение Солнца относительно окружающих звезд

48. Общие сведения. В наблюдаемых движениях звезд можно обнаружить много закономерностей; некоторые из них являются просто следствием движения Земли: так, например, суточное движение звезд, абберационное, параллактическое, прецессионное и нутационное движение и др. Этими движениями занимается сферическая астрономия. Все же иные движения звезд изучает звездная астрономия.

Брадлей в 1742 г. обнаружил, что средние собственные движения звезд отличны от нуля и параллельны некоторому определенному направлению в пространстве. Изображая на небесной сфере векторы средних собственных движений различных групп ярких звезд, можно убедиться в том, что продолжения этих векторов пересекаются в окрестностях одной точки, лежащей в созвездии Голубя. Казалось естественным рассматривать это явление как результат движения Солнца относительно ближайших звезд. Та точка на небесной сфере, к которой направлено движение Солнца, называется *апексом движения Солнца*, или просто *апексом*, а диаметрально противоположная ей точка на небесной сфере — *антиапексом*; само движение Солнца носит название движения к апексу.

Составляющая собственного движения звезд, вызванная движением Солнца к апексу, иногда называется вековым параллаксом, в отличие от годовичного параллакса, являющегося следствием движения Земли; совокупность же этих двух движений называется параллактическим движением звезды.

Так как в звездной астрономии рассматриваются движения звезд, освобожденные от влияния годовичного параллакса, то, говоря о параллактическом смещении звезд, будем понимать под этим составляющую собственного движения, вызванную исключительно движением Солнца к апексу.

В старых учебниках и монографиях движение Солнца к апексу трактовалось как пространственное движение Солнца, причем под этим понималось движение в некоторой инерциальной системе отсчета. В действительности же это не так; движение Солнца является относительным, а система отсчета в данном случае явно не инер-

циальна, так как все окружающие нас звезды, как мы скоро убедимся (см. п. 64), принимают участие в некотором вращательном движении вокруг центра Галактики.

Можно рассматривать движение Солнца к апексу относительно всех наблюдаемых звезд или же относительно звезд, выбранных по какому-нибудь признаку, а также относительно других объектов, например, определенного типа туманностей или же относительно галактик. В каждом случае, как легко видеть из дальнейшего, результаты будут разные.

Обычно движение Солнца определяется экваториальными координатами апекса и линейной скоростью движения Солнца. Можно, конечно, характеризовать это движение иными величинами, например, галактическими координатами апекса и скоростью Солнца или просто тремя компонентами скорости Солнца в произвольной системе координат.

49. Определение апекса по пространственным скоростям звезд. Если пространственные скорости звезд рассматриваемой группы известны, то легко определить движение Солнца к апексу, пользуясь средними скоростями $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. В самом деле, имеем

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i, \quad \bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i,$$

где u_i , v_i и w_i — компоненты вектора скорости звезды в прямоугольной экваториальной системе координат. Ясно, что определенные таким образом компоненты средней скорости группы звезд равны компонентам скорости Солнца ($u_\odot$, $v_\odot$, $w_\odot$) с обратным знаком, т. е.

$$\begin{aligned} u_\odot &= -\bar{u} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i, \\ v_\odot &= -\bar{v} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i, \\ w_\odot &= -\bar{w} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i. \end{aligned} \tag{49.1}$$

Компоненты скорости Солнца $u_\odot$, $v_\odot$, $w_\odot$ в экваториальной системе сферических координат выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_\odot &= V_\odot \cos A \cos D, \\ v_\odot &= V_\odot \sin A \cos D, \\ w_\odot &= V_\odot \sin D, \end{aligned} \tag{49.2}$$

где A и D — экваториальные координаты апекса, а $V_{\odot}$ — модуль скорости Солнца.

Если относить движение Солнца к центру масс звезд, то формулы (49.1) должны быть переписаны в виде

$$u_{\odot} = -\frac{\sum \mathcal{M}_i u_i}{\sum \mathcal{M}_i}, \quad v_{\odot} = -\frac{\sum \mathcal{M}_i v_i}{\sum \mathcal{M}_i}, \quad w_{\odot} = -\frac{\sum \mathcal{M}_i w_i}{\sum \mathcal{M}_i}; \quad (49.3)$$

здесь $\mathcal{M}_i$ обозначает массу i -й звезды.

Формулы (49.1) впервые применил в 1912 г. В. Дзевульский, а формулы (49.3) — В. Г. Фесенков и К. Ф. Огородников в 1924 г., в последнем случае массы звезд определялись по *зависимости масса — светимость*.

Описанным выше методом можно пользоваться только в том случае, когда нам известны собственные движения звезд, их параллаксы и лучевые скорости, т. е. этот метод можно применять только к сравнительно близким звездам. Параллаксы далеких звезд определяются очень неточно, следовательно, две составляющие их пространственного движения, полученные в результате умножения собственных движений на расстояние, будут вносить большие ошибки.

Используя спектральные параллаксы, можно, с одной стороны, уточнить результаты, а с другой стороны, ввести довольно серьезные систематические ошибки вследствие неуверенности в учете межзвездного поглощения. Поэтому использование в данном случае тригонометрических параллаксов кажется нам более целесообразным.

Следует помнить, что величины, определяющие движение Солнца, содержат, как правило, довольно значительные случайные ошибки, возникающие вследствие того, что пространственные движения звезд отличаются от их среднего движения и, следовательно, сумма квадратов отклонений от среднего движения будет всегда отлична от нуля. Большая точность может быть достигнута исключительно путем увеличения числа исследуемых звезд, что редко удается, так как звезд с известными параллаксами, собственными движениями и лучевыми скоростями совсем не так много.

Умножая обе части выражения (49.3) на $\sum \mathcal{M}_i$ и используя соотношение (11.1), имеем

$$\begin{aligned} -u_{\odot} \sum \mathcal{M} &= + \sum \mathcal{M} r_{\mu_a} k \, 15 \sin \alpha \cos \delta + \\ &\quad + \sum \mathcal{M} r_{\mu_b} k \cos \alpha \sin \delta - \sum \mathcal{M} V_r \cos \alpha \cos \delta, \\ -v_{\odot} \sum \mathcal{M} &= - \sum \mathcal{M} r_{\mu_a} k \, 15 \cos \alpha \cos \delta + \\ &\quad + \sum \mathcal{M} r_{\mu_b} k \sin \alpha \sin \delta - \sum \mathcal{M} V_r \sin \alpha \cos \delta, \\ -w_{\odot} \sum \mathcal{M} &= - \sum \mathcal{M} r_{\mu_b} k \cos \delta - \sum \mathcal{M} V_r \sin \delta. \end{aligned} \quad (49.4)$$

(Здесь для простоты записи отброшен индекс i .) Эти формулы принципиально ничем не отличаются от формул (49.3), однако, они имеют

то преимущество, что в них компоненты собственного движения и лучевые скорости входят отдельно. Написанные формулы можно применять также и в том случае, когда какие-либо из входящих в них величин, либо собственные движения, либо лучевые скорости неизвестны. В таком случае можно заменить недостающие данные некоторыми гипотетическими величинами; действительно, так как в формулу входят лишь суммы величин для всех звезд, то вместо них можно подставить некоторые средние значения, полученные по другому наблюдательному материалу.

Формулы (49.4) впервые вывел в 1843 г. Бравэ; в то время лучевые скорости звезд еще не были известны. Эти формулы являются основой метода, названного его именем. Впервые этот метод был применен в 1908 г. в виде, не требующем знания лучевых скоростей¹⁾.

В настоящее время метод этот имеет лишь историческое значение.

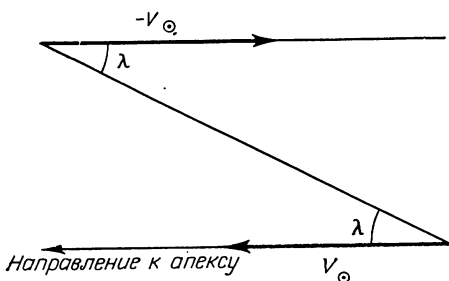


Рис. 29.

50. Определение апекса по лучевым скоростям. Пусть λ — угловое расстояние звезды от апекса, тогда параллакти-

ческую составляющую лучевой скорости звезды V_r'' можно выразить через скорость движения Солнца к апексу $V_\odot$ следующим образом (см. рис. 29):

$$-V_r'' = V_\odot \cos \lambda. \quad (50.1)$$

Правая часть является скалярным произведением вектора скорости Солнца на единичный вектор положения звезды на небесной сфере. Направляющие косинусы этого вектора равны

$$k = \cos \alpha \cos \delta,$$

$$l = \sin \alpha \cos \delta,$$

$$m = \sin \delta.$$

Следовательно,

$$-V_r'' = u_\odot \cos \alpha \cos \delta + v_\odot \sin \alpha \cos \delta + w_\odot \sin \delta. \quad (50.2)$$

Обозначая разность $V_r - V_r'' = V_r'$, получим

$$u_\odot \cos \alpha \cos \delta + v_\odot \sin \alpha \cos \delta + w_\odot \sin \delta + V_r = V_r'. \quad (50.3)$$

¹⁾ Более подробно этот метод изложен в книге Паренго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 97.

Здесь известными являются величины α , δ и V_r , а неизвестными — $u_\odot$, $v_\odot$ и $w_\odot$. Отклонения лучевых скоростей звезд от средней лучевой скорости, т. е. от параллактической составляющей, в каждой области неба можно считать случайными ошибками¹⁾, поэтому правую часть уравнения (50.3) можно приравнять нулю и решить систему уравнений

$$u_\odot \cos \alpha_i \cos \delta_i + v_\odot \sin \alpha_i \cos \delta_i + w_\odot \sin \delta_i + V_{r_i} = 0 \quad (50.4)$$

методом наименьших квадратов.

Величина V'_r очень часто больше величины V_r , следовательно, для того, чтобы получить реальные решения, необходимо располагать большим числом звезд; только в исключительных случаях можно применять этот метод к малочисленным группам звезд.

Если определять движение Солнца по отношению к центру масс, а не к геометрическому центру, то каждое уравнение (50.4) надо брать с весом, пропорциональным массе звезды.

Определив величины $u_\odot$, $v_\odot$ и $w_\odot$, можно вычислить величины A , D и $V_\odot$ по формулам (49.2).

Изложенный метод астрономы начали применять с восьмидесятых годов прошлого столетия, когда впервые удалось определить визуальным методом лучевые скорости звезд. Тем не менее надежные результаты получены только лишь в двадцатых годах нашего столетия; к этому времени были известны сравнительно точные лучевые скорости многих звезд. Изложенный выше метод особенно удобен при использовании сравнительно далеких и одновременно ярких звезд; ярких потому, что определение лучевой скорости возможно только лишь для сравнительно ярких звезд. Астрономы и до настоящего времени пользуются этим методом наряду с методом определения движения Солнца к апексу по пространственным скоростям звезд.

51. Определение апекса по собственным движениям. Методы определения апекса по собственным движениям звезд имели широкое распространение тогда, когда еще не умели определять лучевых скоростей, а параллаксы были известны для очень небольшого числа звезд. Ясно, что, располагая только проекциями скоростей звезд на небесную сферу и не зная их параллакс, можно говорить лишь об определении направления движения Солнца, но не величины скорости этого движения.

В. Гершель впервые в истории астрономии определил направление движения Солнца. Потом появились другие методы определения апекса только по собственным движениям звезд, однако, сейчас они

¹⁾ Их сумма, по определению, должна быть равна нулю. Однако, это не значит, что отклонения V'_r должны быть распределены по закону Гаусса. В них заключены еще фактические ошибки наблюдений.

имеют лишь историческое значение, так как все они уступают по точности другим методам, и, кроме того, не дают возможности определить величину скорости движения Солнца.

В качестве примера рассмотрим метод, примененный в 1818 г. Бесселем¹⁾. Каждой звезде с известным собственным движением поставим в соответствие две точки P_1 и P_2 (рис. 30), находящиеся на расстоянии 90° от большого круга, касательного к собственному движению данной звезды. Если бы собственные движения звезд были чисто параллактическими, то все они были бы направлены по касательным к большим кругам, проходящим через апекс и антиапекс, следовательно, геометрическим местом точек P_1 и P_2 был бы

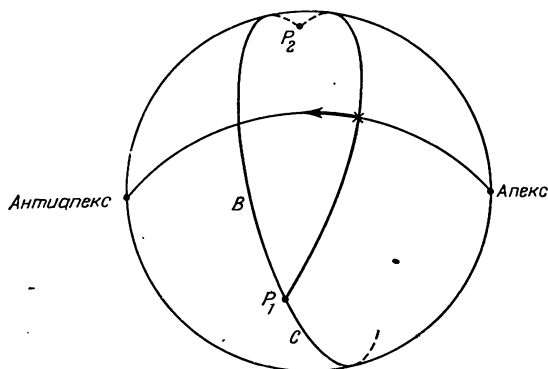


Рис. 30.

большой круг, перпендикулярный к направлению апекс — антиапекс, полюса которого являлись бы искомыми точками апекса и антиапекса. Вследствие того, что собственные движения звезд не являются чисто параллактическими, будет иметь место некоторая дисперсия точек P_1 и P_2 ; все же местом максимальной плотности этих точек должен быть круг, положение которого можно определить методом наименьших квадратов.

Несомненное преимущество этого метода, так же, как и метода определения апекса только по лучевым скоростям звезд, заключается в том, что нет необходимости привлекать параллаксы звезд, а, следовательно, применение этого метода не опирается ни на какие гипотетические предположения.

52. Метод Ковальского — Эри. В этом методе, предложенном в середине прошлого столетия, используются собственные движения звезд и одновременно их расстояния; если последние неизвестны, то

¹⁾ Изложение других методов можно найти, например, в книге P a h l e n E., Lehrbuch der Stellarstatistik, 1937, стр. 694.

приходится вводить некоторые общие предположения относительно этих расстояний. Этот метод так же, как и метод Бравэ, основывается на формулах (11.1). Как легко убедиться, решая эти уравнения относительно трех составляющих (двух тангенциальных и радиальной), приходим к уравнению (11.2). Третье решение тождественно с выражением (50.2); первые же два можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 15kr\mu_\alpha \cos \delta &= -u \sin \alpha + v \cos \alpha, \\ kr\mu_\delta &= -u \sin \delta \cos \alpha - v \sin \delta \sin \alpha + w \cos \delta. \end{aligned} \quad (52.1)$$

Полученные формулы являются основой метода Ковальского — Эри.

Допуская, что скорости звезд являются чисто параллактическими и что отклонения можно отождествить с ошибками наблюдений, можно уравнения (52.1) решить методом наименьших квадратов и определить выравненные величины

$$u_\odot = -\bar{u}, \quad v_\odot = -\bar{v}, \quad w_\odot = -\bar{w}.$$

Если расстояния звезд известны, то можно написать уравнения (52.1) для каждой звезды. В этом случае левые части уравнений являются величинами одного порядка, так как собственные движения, вообще говоря, обратно пропорциональны расстояниям. В этом виде метод Ковальского — Эри был успешно применен в 1939 г. П. П. Паренаго к 600 ближайшим звездам. Однако, к более далеким звездам этот метод применять нельзя из-за большой неточности расстояний этих звезд.

Если индивидуальные расстояния звезд или их средние расстояния неизвестны, то можно обе части уравнений (52.1) разделить на среднее расстояние r , предполагая при этом, что для различных направлений на небе средние расстояния звезд одинаковы. В этом случае неизвестными будем считать величины $\bar{u}/r$, $\bar{v}/r$ и $\bar{w}/r$. Так как на практике при вычислениях обычно используется большое число звезд, то удобно всю небесную сферу разделить на области и в каждой из них вычислить средние значения $\bar{\alpha}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\mu}_\alpha$ и $\bar{\mu}_\delta$. Предположение о равенстве средних расстояний звезд, вообще говоря, не должно вызывать сомнений, хотя необходимо помнить о возможности появления довольно значительных систематических ошибок. Так, например, известно, что среднее расстояние звезд в области галактических полюсов меньше, чем среднее расстояние звезд той же звездной величины вблизи галактической плоскости¹⁾.

Составляя условные уравнения, нужно помнить о весах, которые обычно пропорциональны площадям областей.

Решение указанных уравнений дает нам пространственные прямоугольные компоненты скорости Солнца, умноженные на $1/r$. Применение этого измененного метода Ковальского — Эри так же, как и

¹⁾ О том, как избежать влияния этих ошибок, можно узнать из книги P a h l e n E., Lehrbuch der Stellarstatistik, 1937, стр. 703.

других методов, использующих только собственные движения звезд, дает нам лишь направление движения Солнца, т. е. координаты апекса. Этот метод отличается от предыдущих только тем, что в нем введено предположение об одинаковом среднем расстоянии звезд во всех исследуемых областях неба.

Хотя метод Ковальского — Эри становится все менее и менее актуальным из-за успешно конкурирующих с ним методов определения апекса по лучевым скоростям звезд, все же этот метод применяется, например, при исследовании близких и одновременно слабых звезд, т. е. карликов, для которых нет спектральных данных, необходимых для определения лучевых скоростей, а имеются хорошо определенные астрометрические данные.

53. Результаты определения апекса Солнца. Как уже указывалось, В. Гершель в конце XVIII в. впервые определил координаты апекса, используя известные в то время собственные движения всего лишь 13 звезд, и случайно получил результат, исключительно близкий к действительности. После этого последовала целая серия работ по определению координат апекса, причем сам Гершель повторил свою первую работу, привлекая собственные движения 36 звезд. Однако, полученный им результат оказался хуже предыдущего.

В настоящее время работы по определению только апекса Солнца являются редким исключением; чаще проводится совместное определение апекса и величин, определяющих иные закономерности движения звезд. Так как определение последних требует предварительного исправления собственных движений и лучевых скоростей звезд за движение Солнца к апексу, то гораздо лучше определить заново параметры этого движения по имеющимся данным, чем пользоваться «чужими» определениями, относящимися, как правило, к иной группе звезд.

В табл. 11 приводятся результаты определения апекса до 1925 г. Определения последних десятилетий дают большие расхождения не вследствие неточности имеющихся данных или применяемых методов, а, главным образом, потому, что эти определения относятся к звездам, принадлежащим к генетически различным группам. Поэтому полученные в последнее время результаты не стремятся к какому-либо определенному пределу и, следовательно, не уточняют данных о движении Солнца относительно ближайших звезд.

На основании современных определений можно, в качестве заслуживающих наибольшего доверия, принять следующие величины ¹⁾:

$$A = 270^\circ, \quad D = +30^\circ, \quad V_\odot = 19,5 \text{ км/сек.}$$

Более точное определение этих средних величин, собственно говоря, не имеет уже смысла. Представляет интерес определение дви-

¹⁾ Относительно ярких звезд примерно до $5^m - 6^m$. — *Прим. ред.*

Т а б л и ц а 11

СВОДКА ОПРЕДЕЛЕНИЙ АПЕКСА

Год	Авторы	Метод	Число звезд	A		D	V _☉ , км/сек
				1900,0			
1783	Гершель	Собственные движения	13	262°	+26°	—	
1783	Прево	” ”	Все звезды каталога Майера	231	+25	—	
1806	Гершель	” ”		36	247	+49	—
1859	Ковальский	Ковальского—Эри		3136	260,1	+35,4	—
1899	Ньюкомб	” ”	3171	273,4	+31,3	—	
1900	Каптейн	Среднее значение, полученное по определениям апекса различными методами	3136	271,8	+29,0	—	
1908	Веерсма	Бравэ	3616	268,0	+31,4	—	
1911	Босс	Ковальского — Эри	5413	270,8	+34,3	—	
1922	Дзевульский	Пространственные скорости	456	273,9	+34,8	28,9	
1924	Гюлленберг и Мальмквист	Лучевые скорости	2189	270,6	+29,7	20,0	
1925	Фесенков	” ”	2666	271,3	+30,5	19,4	

жения Солнца относительно группы звезд, выделенных на основании каких-либо общих свойств. Таким образом были открыты большие отклонения движения Солнца относительно звезд, имеющих различные морфологические характеристики, например, обнаружено большое различие параметров движения Солнца относительно переменных типа Миры Кита и звезд типа *RRLyr*; в последнем случае имеем

$$A = 306^{\circ}, D = +47^{\circ}, V_{\odot} = 109,0 \text{ км/сек.}$$

Совершенно другие результаты получены относительно ближайших галактик

$$A = 305^{\circ}, D = +56^{\circ}, V_{\odot} = 344 \text{ км/сек.}$$

Похожие результаты получаются при изучении движения Солнца относительно шаровых скоплений, хотя модуль скорости Солнца в этом случае несколько иной, а именно, 286 км/сек. В § 15 будут рассмотрены некоторые выводы из приведенных выше фактов.

§ 14. Закономерности в звездных движениях

54. Пекулярные движения звезд. Скорости звезд после исключения параллактического движения называются пекулярными скоростями. Так как параллактическая скорость является средней скоростью звезд данной группы относительно Солнца, то пекулярные движения звезд являются отклонениями их индивидуальных скоростей от средней скорости движения данной группы звезд. Пекулярное движение звезды может изменяться в зависимости от того, к какой группе эта звезда отнесена, т. е. в зависимости от принятой скорости движения Солнца. Поэтому рекомендуется при вычислении пекулярных скоростей звезд определять движение Солнца относительно тех же самых звезд.

Открыто много закономерностей в пекулярных движениях звезд. Самой простой из них является различие дисперсий пекулярных скоростей звезд с различными морфологическими характеристиками. В частности, обнаружена корреляция между дисперсией этих скоростей и спектральным типом исследуемых звезд. В табл. 12 приводятся средние дисперсии скоростей звезд и других объектов в трех направлениях (по данным Стремберга¹⁾).

55. Движущиеся звездные скопления. При изучении движений легко обнаружить звезды, принадлежащие к какому-нибудь скоплению, так как движение таких объектов одинаково; этим, в частности, члены скопления отличаются от всех остальных звезд. Причина здесь заключается в том, что члены звездного скопления движутся в пространстве как единое целое. Такие группы называются *движущимися скоплениями* звезд.

С этой точки зрения нет разницы между движущимися и рассеянными скоплениями звезд; следовательно, иногда можно встретиться с промежуточным случаем, когда неизвестно, к какой из двух упомянутых групп следует отнести рассматриваемое скопление. В этих случаях можно руководствоваться тем, что к движущимся скоплениям относятся только те скопления, звезды которых не образуют явно выраженного сгущения на небе, среди членов таких скоплений на небе могут находиться звезды, не принадлежащие к скоплению²⁾.

Вследствие общности пространственных движений звезд, принадлежащих к скоплению, продолжения направлений этих движений

¹⁾ Эти данные взяты из книги Паренaго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 136.

²⁾ Лучше руководствоваться правилом, что условно скопление называется движущимся, если при продолжении собственных движений членов скопления на сфере вперед или назад они пересекаются в радианте, о чем сказано ниже. — *Прим. ред.*

Т а б л и ц а 12
СРЕДНИЕ ПЕКУЛЯРНЫЕ СКОРОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ЗВЕЗД
(по данным Стремберга)

Группа звезд	Координаты апекса		Скорость движения Солнца от- носительно данной группы	Дисперсия пекулярных скоростей в направлениях			Число звезд или объек- тов
	A	D		$l=0^\circ$ $b=0^\circ$	$l=90^\circ$ $b=0^\circ$	$b=90^\circ$	
Гиганты F—M	270°	+34°	17,7	18,7	13,0	15,1	626
Карлики K4—M9	301	+12	19,6	52,2	11,1	35,1	79
Звезды B6—A9	267	+15	18,3	16,4	14,6	9,1	492
Звезды B0—B5	286	+36	21,2	7,8	10,8	9,5	249
Межзвездный кальций	276	+37	20,4	5	5	—	64
Планетарные туманности	268	+49	28,4	64,7	23,9	(15)	107
Долгопериодические це- феиды	283	+24	11,5	17,3	10,0	(10)	37
Короткопериодические цефеиды	306	+47	109	74	74	74	26
Долгопериодические переменные	287	+41	65,2	52	57	46	86
Долгопериодические пе- ременные с $150^\circ < P <$ $< 200^\circ$	301	+57	162	88	88	88	13
Шаровые скопления . .	306	+62	286	117	117	117	18
Звезды с наибольшими V	303	+60	281	207	108	82	22
Галактики	305	+56	344	300	300	300	44

на небесной сфере должны пересечься в одной точке, которая называется радиантом движущегося скопления, аналогично радианту метеорного потока. На рис. 31 изображены собственные движения звезд, принадлежащих к скоплению Гиад; эта группа звезд является примером движущегося скопления. В табл. 13 приводятся данные о семи известных движущихся скоплениях разного типа. Гиады, собственно говоря, являются обычным рассеянным скоплением с довольно большим угловым диаметром, примерно 15° , и явно выраженным сгущением звезд в центре. Скопление Большой Медведицы, наоборот, состоит из звезд, разбросанных по всему небу; Солнце находится внутри этого скопления. В состав рассматриваемого движущегося скопления входят β , γ , δ , ϵ , ξ и 37 Большой Медведицы, а также Сириус, α Северной короны, β Возничего и δ Льва¹⁾. В этом случае критерием принадлежности тех или иных звезд к скоплению является исключительно их собственное движение. Очень характерным является

¹⁾ Принадлежность четырех последних звезд к движущемуся скоплению Большой Медведицы является спорной. — *Прим. ред.*

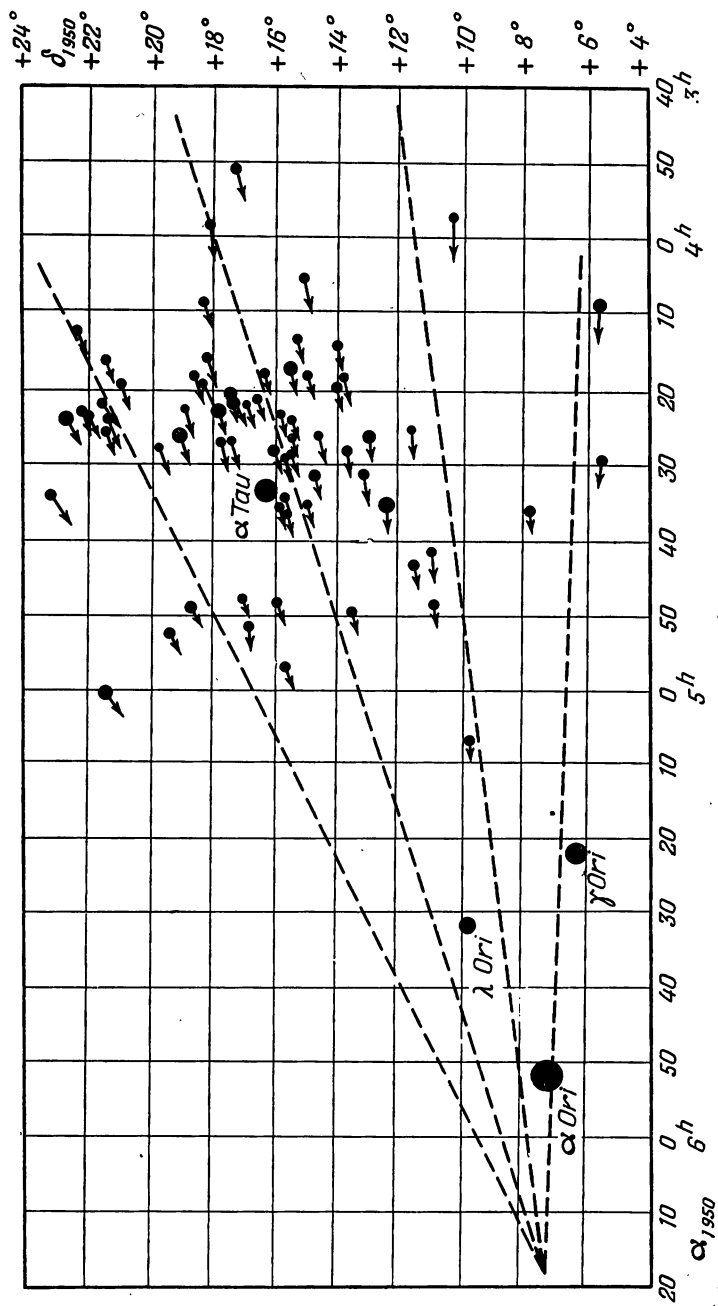


Рис. 31.

Т а б л и ц а 13

ДАННЫЕ О НЕКОТОРЫХ ДВИЖУЩИХСЯ СКОПЛЕНИЯХ

Название скопления	Наблюденный радиант		Общая скорость относительно Солнца <i>км/сек</i>	Радикант после учета параллактической составляющей (стандартные данные)				Общая скорость после учета параллактической составляющей	Средний параллакс звезд	Число звезд
				Экваториальные координаты		Галактические координаты				
	α	δ		α	δ	l	b			
Гиады . .	91°	+8°	42	90°	—4°	172°	—7°	59	0",028	140
Большая Медведица . .	300	—34	17	285	+1	3	—4	31	0,040	11
Плеяды . .	285	—43	20	292	—44	323	—5	5	0,010	280
Ясли . . .	—	—	—	95	+5	174	—2	41	0,008	191
Персей . .	108	—36	26	99	+4	176	+1	6	0,008	30
Скорпион—Центавр	110	—48	26	193	—73	271	—11	12	0,006	83
Волосы Вероники .	128	—42	8	252	+18	5	+32	14	0,014	30

расположение радиантов всех скоплений вблизи галактической плоскости.

Так как собственные движения звезд направлены в разные стороны, то, выбрав на небесной сфере произвольную точку, всегда можно найти большее или меньшее число звезд, собственное движение которых будет направлено к этой именно точке. Следовательно, в каждом случае необходимо, используя методы теории вероятностей, выяснить, является ли данная группа звезд действительно движущимся скоплением или же общность движений звезд рассматриваемой группы следует считать случайным явлением. В действительности не всегда удастся отличить движущееся скопление от случайного псевдоскопления. Так, например, до сих пор не ясен вопрос, принадлежат ли многие звезды, имеющие такое же собственное движение, как Гиады, но разбросанные по всему небу, к упомянутому скоплению или нет. Порою изучение морфологических характеристик звезд помогает установить, является ли данное скопление реальным или нет. Так, например, все члены скопления Скорпиона—Центавра, содержащего звезды, расположенные в области неба, занятой созвездиями Скорпиона, Центавра, Волка, Ворона и Мухи, принадлежат к спектральному классу *B*.

Если определять радиант движущегося скопления по собственным движениям, не исправленным за движение Солнца к апексу, то вместо

радианта скопления мы получим антиапекс движения Солнца относительно звезд, входящих в данное скопление. Однако, для звезд движущегося скопления не только средние пространственные скорости должны быть одинаковы, но также и отклонения индивидуальных скоростей членов скопления от средней скорости скопления не должны превышать ошибок наблюдений. Поэтому не каждый апекс группы звезд может рассматриваться как радиант и не каждая группа звезд с одинаковым средним движением — как движущееся скопление.

Общность собственных движений звезд, принадлежащих к движущемуся скоплению, является основной метода определения их параллаксов, о чем уже упоминалось в п. 25.

56. Общие закономерности движений звезд. Если собственные движения звезд исправить за движение Солнца и исключить из рассмотрения звезды, принадлежащие к движущимся скоплениям, то можно ожидать, что полученные пекулярные движения звезд будут распределены по закону случайных ошибок; иными словами, все направления

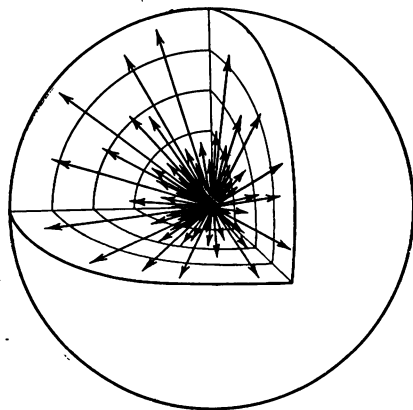


Рис. 32.

пекулярных движений будут равновероятными, а вероятность модуля скорости будет уменьшаться согласно распределению Максвелла. Иначе говоря, если все векторы скоростей поместить в одной точке, то поверхности одинаковой плотности концов этих векторов должны быть сферами (рис. 32).

Однако, уже первые статистические исследования собственных движений звезд, проведенные в конце XIX в., показали, что предположение о беспорядочности пекулярных движений ошибочно. В 1904 г. Каптейн, исследуя собственные движения звезд, нашел, что имеется некоторое предпочтительное направление, в котором движется большинство звезд. При дальнейших исследованиях было обнаружено, что в этом направлении движутся звезды, имеющие также наибольшие пекулярные скорости.

Введем функцию распределения векторов скоростей $f(V)$. В таком случае имеем

$$f(V) dV = dN,$$

где dN — число звезд, векторы пекулярных скоростей которых заключены между V и $V + dV$. Если бы распределение векторов скоростей было случайным, то вероятность компонента скорости u , так же

как и вероятность двух других компонентов, выражалась бы следующим образом (закон Гаусса):

$$f(u) du = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} du.$$

Следовательно, вероятность того, что компоненты вектора скорости будут заключены в пределах $u, u + du; v, v + dv; w, w + dw$, будет равна

$$\begin{aligned} \varphi(u, v, w) du dv dw &= f(u) df(v) df(w) dw = \\ &= \frac{h^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-h^2(u^2+v^2+w^2)} du dv dw. \end{aligned}$$

Обозначая через N число исследуемых звезд, можно функцию распределения векторов $\mathbf{V}$ записать в виде

$$\begin{aligned} f(\mathbf{V}) d\mathbf{V} &= N \varphi(u, v, w) du dv dw = f(u, v, w) du dv dw = \\ &= \frac{N h^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-h^2(u^2+v^2+w^2)} du dv dw. \end{aligned} \quad (56.1)$$

Однако, эта функция оказалась неудобной для представления действительного распределения векторов скоростей, так как она не учитывает открытое Каптейном явление предпочтительного движения звезд.

Чтобы лучше представить действительное распределение скоростей, можно разделить звезды на две группы и считать, что в каждой из них скорости распределяются случайным образом, причем одна

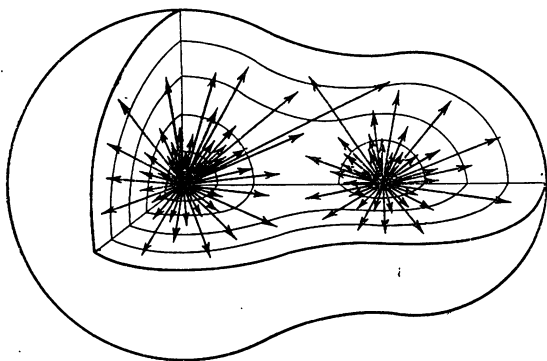


Рис. 33.

группа движется относительно другой с определенной скоростью (рис. 33). В этом случае распределение скоростей будет симметричным, причем ось симметрии будет параллельна вектору относительной скорости движения одной группы относительно другой. Поверхности одинаковой плотности концов векторов будут вытянуты в указанном

направлении. Пусть одна из осей системы координат, например, ось u , совпадает с этим направлением, в таком случае функцию распределения скоростей звезд можно записать в виде

$$f(u, v, w) du dv dw = \left\{ \frac{N_1 h_1^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-h_1^2 [(u-u_1)^2 + v^2 + w^2]} + \right. \\ \left. + \frac{N_2 h_2^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-h_2^2 [(u-u_2)^2 + v^2 + w^2]} \right\} du dv dw. \quad (56.2)$$

Здесь N_1 и N_2 — числа звезд первой и второй группы, u_1 и u_2 — средние скорости каждой группы относительно начала координат, h_1 и h_2 — коэффициенты, зависящие от дисперсии скоростей σ в каждой группе ($h_1 = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2}}$, $h_2 = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2}}$).

Так как мы имеем дело с пекулярными движениями, среднее из которых должно быть, как правило, равно нулю, то надо так выбрать систему координат, чтобы

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{u_2}{u_1}. \quad (56.3)$$

При таком представлении две группы звезд называются *двумя потоками*, а вся теория — теорией двух потоков. Автор этой теории Каптейн предполагал сначала, что эти потоки являются чем-то вполне реальным, например, двумя скоплениями звезд, аналогичными движущимся звездным скоплениям. Однако, более поздние статистические исследования движения звезд не подтвердили этих предположений. Не было обнаружено никаких различий в морфологических характеристиках звезд, принадлежащих к разным потокам. Поэтому сейчас теорию двух потоков рассматривают лишь как удобную статистическую аппроксимацию распределения скоростей звезд, не имеющую, однако, более глубокого значения с точки зрения объективной реальности. Следует заметить, что эта теория не дает никакой возможности относить отдельные звезды к одному из двух потоков.

В 1905—1915 гг. Эддингтон дал точную математическую разработку этой теории. Почти одновременно Шварцшильд (1907 г.) предложил так называемую *эллипсоидальную* теорию распределения скоростей звезд. Вместо того, чтобы вводить два потока с различной средней скоростью движения и со случайным распределением скоростей внутри каждого, Шварцшильд предположил, что в Галактике существует одно распределение скоростей, но с различными дисперсиями в разных направлениях.

В таком случае, выбирая определенным образом систему координат, можно функцию распределения скоростей записать в виде

$$f(u, v, w) du dv dw = \frac{N h k l}{\sqrt{\pi^3}} e^{-h^2 u^2 - k^2 v^2 - l^2 w^2} du dv dw; \quad (56.4)$$

здесь величины h , k и l характеризуют дисперсии скоростей соответственно в направлении осей u , v , w ¹⁾.

Если

$$f(u, v, w) = \text{const},$$

то

$$h^2 u^2 + k^2 v^2 + l^2 w^2 = C = \text{const}.$$

Это значит, что поверхности одинаковых плотностей концов векторов скоростей, вообще говоря, эллипсоиды, в частном случае это могут быть эллипсоиды вращения (рис. 34). В дальнейшем, говоря об эллипсоиде скоростей, будем понимать под этим эллипсоид, соответствующий такой величине C , при которой длина каждой полуоси равна дисперсии скоростей в данном направлении.

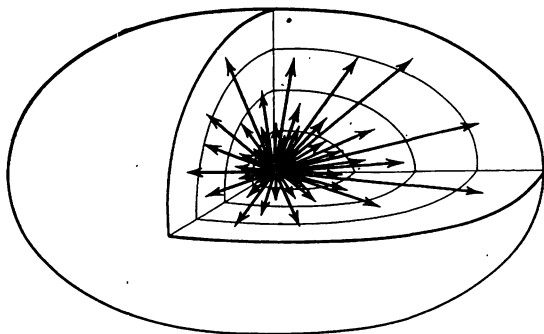


Рис. 34.

Хотя эллипсоидальная теория в принципе отличается от теории двух потоков, тем не менее обе эти теории с одинаковым успехом представляют существующее в действительности распределение скоростей звезд. Поэтому выбор теории зависит от тех конкретных вопросов, которые рассматриваются в той или иной проблеме.

При применении эллипсоидальной теории необходимо определить шесть величин, а именно: величины h , k , l и три угла, определяющие ориентировку эллипсоида. Последние иногда трудно найти из-за той неопределенности, с которой мы встречаемся при этом. Вид функции (56.4) довольно удобен при рассмотрении многих вопросов звездной динамики; на эту функцию опирается, в частности, динамическая теория галактик.

Применение теории двух потоков также требует определения шести величин, т. е. величин u_1 , u_2 , h_1 , h_2 , и двух направляющих косинусов вектора относительной скорости обоих потоков. Отношение

¹⁾ Шварцшильд в свое время предполагал, что $k=l$, т. е. что в двух направлениях дисперсии равны.

чисел звезд двух потоков определяется соотношением (56.3). Во многих случаях неизвестные величины теории двух потоков определяются на практике легче, чем параметры эллипсоидальной теории. Однако, главным преимуществом теории двух потоков является то, что ее можно по мере надобности уточнять, присоединяя третий, четвертый и т. д. потоки. Тремя потоками пользовался Эддингтон (1910—1911 гг.) при исследовании закономерностей в собственных движениях звезд¹⁾. Вообще говоря, можно строить теорию многих потоков, относительные скорости которых могут быть направлены в пространстве совершенно произвольно.

ТЕОРИЯ ДВУХ ПОТОКОВ

57. Определение параметров двух потоков на основании изучения собственных движений звезд. Теория двух потоков оказывается весьма удобной, если известны лишь собственные движения звезд. В этом случае весьма трудно и даже совсем невозможно определить параллактическое движение звезд; поэтому при определении параметров двух потоков мы просто обходим этот вопрос.

Пусть V_1 и V_2 (рис. 35) суть векторы скоростей обоих потоков относительно средней скорости всех звезд, $V_\odot$ — вектор скорости Солнца в той же системе координат. Следовательно, вектор $-V_\odot$ является средней скоростью всех звезд относительно Солнца, а векторы V'_1 и V'_2 — средними скоростями обоих потоков также относительно Солнца. В нашем случае удобнее неизвестными считать векторы V'_1 и V'_2 , являющиеся просто параллактическими составляющими каждого потока отдельно. Вектор $-V_\odot$ является полусуммой векторов V'_1 и V'_2 , если, конечно, $N_1 = N_2$ (см. рис. 35). В противном случае нужно брать среднее взвешенное, причем веса должны быть пропорциональны числам звезд, принадлежащих к отдельным потокам.

Займемся сначала одним потоком: будем рассматривать звезды, находящиеся в сравнительно небольшой области неба; предположим, что эти звезды находятся на одинаковом расстоянии от Солнца. Согласно нашим предположениям, распределение тангенциальных составляющих скоростей в этой области неба будет

$$f(u, v) du dv = \frac{N h^2}{\pi} e^{-h^2 (u^2 + v^2)} du dv,$$

¹⁾ MN, 71, 40 (1910), см. также Smart, Stellar Dynamics, Cambridge, 1938, стр. 135.

где u и v — тангенциальные составляющие скоростей относительно средней скорости потока. Обозначая тангенциальную составляющую последней через V' (рис. 36), тангенциальную составляющую скорости звезды относительно Солнца через S , а углы между этими

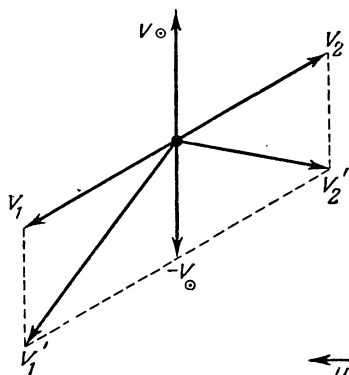


Рис. 35.

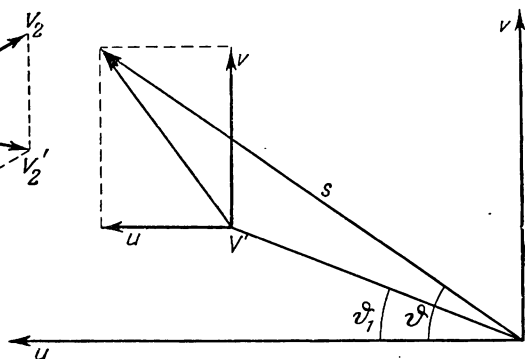


Рис. 36.

составляющими и произвольной осью, лежащей в плоскости, касательной к небесной сфере в данной области, через ϑ_1 и ϑ , получим

$$u^2 + v^2 = S^2 + V'^2 - 2SV' \cos(\vartheta - \vartheta_1),$$

$$du dv = S d\vartheta dS.$$

Следовательно, распределение скоростей будет иметь вид

$$f(\vartheta, S) S d\vartheta dS = \frac{Nh^2}{\pi} e^{-h^2 \{S^2 + V'^2 - 2SV' \cos(\vartheta - \vartheta_1)\}} S d\vartheta dS.$$

Чтобы ограничиться направлениями собственных движений и не принимать во внимание их модули, проинтегрируем полученное выражение по S

$$f(\vartheta) d\vartheta = \frac{Nh^2}{\pi} d\vartheta \int_0^\infty e^{-h^2 \{S^2 + V'^2 - 2SV' \cos(\vartheta - \vartheta_1)\}} S dS$$

и введем следующие обозначения:

$$t = hS - hV' \cos(\vartheta - \vartheta_1),$$

$$\tau = hV' \cos(\vartheta - \vartheta_1).$$

Таким образом, имеем

$$t^2 = h^2 S^2 - 2SV' h^2 \cos(\vartheta - \vartheta_1) + \tau^2,$$

$$S = \frac{t}{h} + \frac{\tau}{h},$$

$$dS = \frac{1}{h} dt.$$

Произведя подстановку, получим

$$\begin{aligned} f(\vartheta) d\vartheta &= \frac{Nh^2}{\pi} d\vartheta e^{-h^2V'^2} \int_{-\tau}^{\infty} e^{\tau^2-t^2} \frac{t+\tau}{h^2} dt = \\ &= \frac{N}{\pi} d\vartheta e^{-h^2V'^2} e^{\tau^2} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-t^2} (t+\tau) dt. \end{aligned} \quad (57.1)$$

После преобразования выражения под интегралом имеем

$$f(\vartheta) d\vartheta = \frac{N}{\pi} d\vartheta e^{-h^2V'^2} \left\{ \frac{1}{2} + \tau e^{\tau^2} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-t^2} dt \right\}. \quad (57.2)$$

Значение интеграла Лапласа ¹⁾, стоящего в правой части равенства (57.2), дается в таблицах. Обозначая

$$q(\tau) = \left\{ \frac{1}{2} + \tau e^{\tau^2} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-t^2} dt \right\},$$

получим

$$f(\vartheta) d\vartheta = \frac{N}{\pi} d\vartheta e^{-h^2V'^2} q(\tau),$$

где $q(\tau) = q\{hV' \cos(\vartheta - \vartheta_1)\}$ может быть легко вычислено и табулировано.

Интегрируя функцию распределения скоростей по всем модулям, мы автоматически освобождаемся от предположения об одинаковом расстоянии звезд, так как направления движения звезд не зависят от их расстояний.

Распределение направлений собственных движений звезд двух потоков является, конечно, суммой распределений этих величин внутри каждого потока. Следовательно, в любой области неба

$$f(\vartheta) = \frac{N_1}{\pi} e^{-h_1^2V_1'^2} q\{h_1V_1' \cos(\vartheta - \vartheta_1)\} + \frac{N_2}{\pi} e^{-h_2^2V_2'^2} q\{h_2V_2' \cos(\vartheta - \vartheta_2)\}. \quad (57.3)$$

Зная из наблюдений распределение направлений собственных движений, можно, деля ϑ на произвольные интервалы, определить неизвестные h_1V_1' , h_2V_2' , ϑ_1 , ϑ_2 , N_1 и N_2 из системы уравнений, написанных для каждого интервала отдельно; индексы 1 и 2 относятся к первому и второму потоку. Определить отдельно величины h_1 , h_2 , V_1' и V_2' , конечно, нельзя, так как в уравнения входят только их произведения; поэтому мы вынуждены предположить, что $h_1 = h_2 = h$.

Так как функция $q(\tau)$ дана не в аналитическом виде, а в форме таблиц, то удобнее решать уравнения (57.3) методом последователь-

¹⁾ См. дополнение 11.

ных приближений, принимая некоторые приближенные значения величин V'_1 , V'_2 , ϑ_1 , ϑ_2 , N_1 и N_2 (h играет здесь роль нормирующего множителя). Мы чертим полярную диаграмму, откладывая в каждом направлении отрезок, пропорциональный числу звезд, собственные движения которых имеют данное направление. Соединяя плавной кривой концы отрезков, получим фигуру Каптейна (рис. 37, а). Сравнивая теоретические фигуры Каптейна с кривыми, полученными из наблюдений, можно определить приближенные значения искоемых параметров. На рис. 37, б изображена наблюдаемая кривая, полученная Каптейном.

Можно вычислить также теоретические фигуры Каптейна для одного потока, соответствующего сферическому (случайному) распределению скоростей и некоторой средней скорости потока. Такая кривая изображена на рис. 37, с. Нетрудно заметить, что кривая с гораздо хуже представляет наблюдаемое распределение направлений скоростей, чем кривая а.

Анализ фигур Каптейна сыграл большую роль в астрономии и дал нам первые доказательства того, что движения звезд никак нельзя считать случайными¹⁾.

58. Общие замечания о теории двух потоков. Зная направления ϑ_1 и ϑ_2 для разных областей на небе, можно определить точки их пересечения на небесной сфере; указанные точки называются *вертексами* движений звезд. Рис. 38 служит иллюстрацией графического метода Эддингтона определения одного из вертексов на основании изучения собственных движений звезд в 17 площадках.

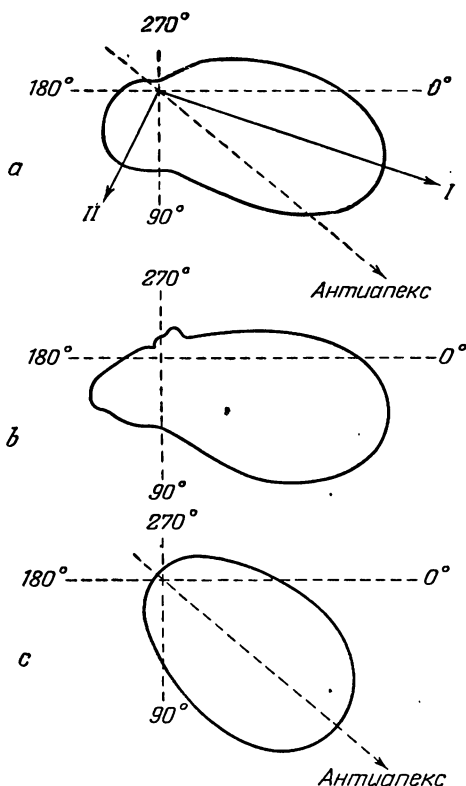


Рис. 37.

¹⁾ Фигуры Каптейна употреблялись уже в середине XIX в. Пользовался ими, например, М. А. Ковальский [*Rech. Astron. de l'Observatoire de Kasan*, №1, 43 (1859)]. Однако, Каптейн был первым, кто сделал из них существенные заключения.

Зная положения вертексов и величины N_1 и N_2 , можно определить направление движения Солнца к апексу, а также направления векторов V_1 и V_2 , относительно которых мы в данном случае предполагаем, что они параллельны и противоположно направлены (см. рис. 35). Иногда направления векторов V_1 и V_2 называются истинными вертексами в отличие от наблюдаемых вертексов, находящихся в направлении векторов V'_1 и V'_2 . Используя только собственные движения звезд, можно получить лишь 5 независимых параметров

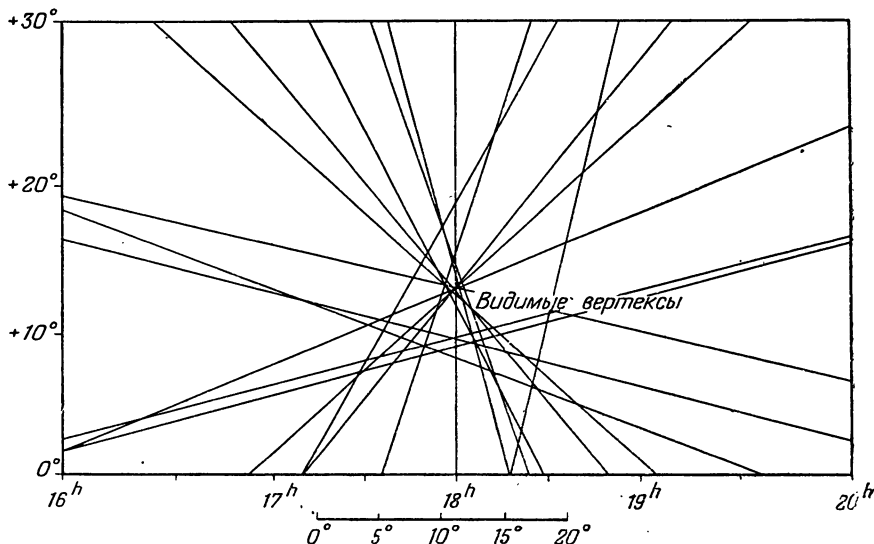


Рис. 38.

из 6, определяющих оба потока; например, два направляющих косинуса относительной скорости потоков и величины N_1 , N_2 и hV_1 .

Общие рассуждения, приведенные выше, являются той основой, на которой базируется много различных методов определения параметров двух потоков, методов, отличающихся математической трактовкой и некоторыми упрощениями. В действительности же каждый исследователь применяет свой собственный метод, несколько измененный в зависимости от имеющегося в его распоряжении наблюдательного материала.

Существенным преимуществом теории двух потоков является возможность определения не только средних величин N_1 , N_2 и hV для всего неба, но также определение этих величин для каждой области неба отдельно. Таким способом можно исследовать различия в распределении скоростей звезд в разных областях пространства.

Если пространственные скорости звезд известны, то можно пользоваться также методом Шарлье, дающим возможность определять параметры двух потоков на основании теории корреляции. При помощи этого метода можно определить отдельно величины h_1 и h_2 .

Одной из наиболее обширных работ в этой области является работа Эддингтона¹⁾, который обработал собственные движения всех звезд I каталога Босса и нашел следующие параметры двух потоков:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{2};$$

наблюдаемые вертексы:

$$\alpha = 90^\circ,8; \quad \delta = -14^\circ,6,$$

$$\alpha = 287^\circ,8; \quad \delta = -64^\circ,1,$$

$$hV'_1 = 1,516; \quad V'_1 = 18,4 \text{ км/сек};$$

$$hV'_2 = 0,855; \quad V'_2 = 32,4 \text{ км/сек}; \quad |V_1 - V_2| = 40,2 \text{ км/сек}.$$

Сравнивая относительную скорость движения Солнца к апексу, полученную в результате решения уравнений (57.3), со скоростью Солнца, определенной по лучевым скоростям звезд, можно было относительные скорости потоков выразить в км/сек.

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

59. Метод Дзевульского определения параметров эллипсоида скоростей звезд. Зная пространственные скорости, легко определить параметры эллипсоида скоростей звезд. Рассмотрим один из самых простых методов определения этих параметров, предложенный в 1916 г. В. Дзевульским²⁾. В указанном методе используется зависимость между радиусом-вектором эллипсоида и числом векторов скоростей, параллельных этому радиусу. Чтобы вывести эту зависимость, перепишем функцию распределения скоростей (56.4) в виде

$$Ce^{-h^2u^2 - k^2v^2 - l^2w^2} du dv dw, \quad (59.1)$$

и введем сферические координаты

$$u = \rho \cos \varphi \cos \vartheta,$$

$$v = \rho \sin \varphi \cos \vartheta,$$

$$w = \rho \sin \vartheta.$$

Подставляя их в выражение (59.1), получим

$$Ce^{-\rho^2 Q^2} \rho^2 d\rho \cos \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (59.2)$$

¹⁾ MN, 71, 4 (1911).

²⁾ Bulletin de l'Academie des Sciences Cracovie, Classe d. s. Mathem. et naturelles, A, 542 (1916).

где

$$Q^2 = h^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + l^2 \sin^2 \vartheta. \quad (59.3)$$

Чтобы получить функцию $f(\varphi, \vartheta)$ распределения векторов скоростей независимо от их модулей в направлении (φ, ϑ) , надо проинтегрировать выражение (59.2) по ρ ; действительно,

$$f(\varphi, \vartheta) = C \int_0^\infty (e^{-\rho^2 Q^2} \rho^2 \cos \vartheta d\vartheta d\varphi) d\rho.$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty e^{-\rho^2 Q^2} \rho^2 d\rho = \frac{1}{4Q^2} \sqrt{\frac{\pi}{Q^2}}.$$

Таким образом, имеем

$$f(\varphi, \vartheta) d\varphi d\vartheta = \frac{C \sqrt{\pi}}{4Q^3} \cos \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (59.4)$$

Введем вместо Q новую переменную r

$$r = \frac{1}{Q}.$$

Подставляя эту переменную в уравнения (59.3) и (59.4), получим

$$1 = r^2 (h^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + l^2 \sin^2 \vartheta) \quad (59.5)$$

и

$$f(\varphi, \vartheta) d\vartheta d\varphi = \frac{C \sqrt{\pi}}{4} r^3 \cos \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (59.6)$$

Сравнивая полученные формулы, приходим к выводу, что частота векторов в данном направлении пропорциональна кубу радиуса-вектора эллипсоида скоростей в данном направлении.

Разделим всю небесную сферу на области с одинаковой площадью и подсчитаем число звезд, скорости которых направлены к данной области. Кубический корень из этого числа будет пропорционален радиусу-вектору эллипсоида скоростей в данном направлении. Можно перейти от сферических координат к какой-нибудь системе прямоугольных координат u, v, w . В таком случае, подставляя компоненты вектора скорости звезды в этой системе u_j, v_j, w_j в уравнение эллипсоида, имеем

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fvw + 2gwi + 2huv + H = 0.$$

Решая полученную систему уравнений методом наименьших квадратов, определим таким способом неизвестные коэффициенты $a, b, \dots, H$.

¹⁾ См. Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.—Л., 1951, стр. 169, формула 3.271.

После этого можно определить направление главных осей эллипсоида скоростей и отношение его полуосей.

На практике удобнее разделить небесную сферу на зоны галактическими или экваториальными параллелями, а затем каждую зону — на равные по площади части, чем делить все небо на равные площадки, но в таком случае при вычислении длины радиуса-вектора необходимо число векторов, направленных к данной площадке, разделить на отношение поверхности данной площадки к поверхности какой-нибудь площадки, выбранной в качестве стандарта.

В методе Дзевульского используются исключительно направления векторов скоростей звезд и не принимаются во внимание их модули; это обстоятельство следует считать недостатком метода, хотя благодаря ему значительно упрощаются все вычисления и идея метода становится очень ясной и простой. Пользуясь рассмотренным методом, можно определять только направления осей эллипсоида скоростей и их отношение, но нельзя определить их абсолютных размеров, т. е. дисперсии скоростей в данных направлениях (см. п. 56). Определение абсолютных размеров полуосей эллипсоида скоростей весьма просто, для этого надо вычислить средние квадратичные скорости σ_u , σ_v , σ_w в трех направлениях, соответствующих трем главным осям эллипсоида. Так как при нормальном распределении (см. дополнение 3) имеем

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2}, \quad \sigma_v^2 = \overline{v^2}, \quad \sigma_w^2 = \overline{w^2},$$

то, следовательно, можно определить абсолютные величины полуосей эллипсоида скоростей, т. е.

$$\sigma_u = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad \sigma_v = \frac{1}{k\sqrt{2}}, \quad \sigma_w = \frac{1}{l\sqrt{2}}.$$

60. Определение эллипсоида скоростей по собственным движениям звезд. Существует много методов определения параметров эллипсоида скоростей в зависимости от характера наблюдательных данных. Ниже приводится метод определения параметров эллипсоида скоростей по собственным движениям звезд, аналогичный соответствующему методу в теории двух потоков.

Рассмотрим распределение тангенциальных скоростей в небольшой области неба, которую вследствие этого можно считать плоской; в таком случае имеем распределение вида

$$f(u, v) du dv = \frac{N h k}{\pi} e^{-h^2(u-u_0)^2 - k^2(v-v_0)^2} du dv,$$

где u_0 , v_0 — паралактические составляющие движения звезд. Обозначая угол между направлением тангенциальной составляющей движения звезды и осью u через ϑ (см. рис. 36), можно написать

$$u = S \cos \vartheta, \quad v = S \sin \vartheta,$$

следовательно,

$$f(S, \vartheta) S dS d\vartheta = \frac{N h k}{\pi} e^{-h^2 (S \cos \vartheta - u_0)^2 - k^2 (S \sin \vartheta - v_0)^2} S dS d\vartheta.$$

Интегрируя по всем скоростям, получим

$$f(\vartheta) d\vartheta = \frac{N h k}{\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} e^{-h^2 (S \cos \vartheta - u_0)^2 - k^2 (S \sin \vartheta - v_0)^2} S dS. \quad (60.1)$$

Показатель степени можно переписать в виде

$$-S^2 (h^2 \cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta) + 2S (h^2 u_0 \cos \vartheta + k^2 v_0 \sin \vartheta) - h^2 u_0^2 - k^2 v_0^2.$$

Обозначим

$$p = h^2 \cos^2 \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta, \quad (60.2)$$

$$\tau = \frac{h^2 u_0 \cos \vartheta + k^2 v_0 \sin \vartheta}{\sqrt{p}}, \quad (60.3)$$

$$t = S \sqrt{p} - \tau,$$

следовательно,

$$t^2 = p S^2 - 2\tau S \sqrt{p} + \tau^2,$$

$$S \sqrt{p} = \tau + t,$$

$$dS \sqrt{p} = dt,$$

$$S dS = \frac{(\tau + t) dt}{p}.$$

Это значит, что уравнение (60.1) можно представить в виде, аналогичном уравнению (57.1), т. е. имеем

$$f(\vartheta) d\vartheta = \frac{N h k}{\pi} d\vartheta e^{-h^2 u_0^2 - k^2 v_0^2} \frac{1}{p} \left[e^{\tau^2} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-t^2} (\tau + t) dt \right].$$

В квадратных скобках стоит то же выражение, что и в уравнении (57.1). Следовательно,

$$f(\vartheta) d\vartheta = \frac{N h k}{\pi} d\vartheta e^{-h^2 u_0^2 - k^2 v_0^2} \frac{1}{p} q(\tau). \quad (60.4)$$

Обозначая постоянный множитель через C , получим

$$f = C \frac{1}{p} q(\tau). \quad (60.5)$$

Анализируя наблюдаемое распределение направлений собственных движений с помощью формулы (60.4), можно поступать так же, как и в случае применения теории двух потоков (см. п. 57). Однако, можно воспользоваться еще тем, что, согласно формуле (60.2),

p является периодической функцией ϑ с периодом 180° . Следовательно,

$$p(\vartheta) = p(\vartheta + 180^\circ),$$

кроме того, на основании соотношения (60.3) имеем

$$\tau(\vartheta) = -\tau(\vartheta + 180^\circ);$$

таким образом, отношение

$$\frac{f(\vartheta)}{f(\vartheta + 180^\circ)} = \frac{p(\vartheta + 180^\circ)}{p(\vartheta)} \cdot \frac{q(\vartheta)}{q(\vartheta + 180^\circ)} = \frac{q(\vartheta)}{q(\vartheta + 180^\circ)} \quad (60.6)$$

зависит только от τ , которое можно из него определить. На практике удобнее поступать следующим образом: сначала вычислить таблицу, содержащую отношения (60.6) для различных значений τ , а затем, зная из наблюдений величину отношения, определить по таблице путем интерполирования величину τ для разных значений ϑ . Зная τ , можно вычислить $q(\tau)$ для различных значений ϑ и после этого по формуле (60.5) найти величину p . В эту формулу входит неизвестная постоянная величина C , однако, ее легко определить, помня, что число всех звезд N должно быть равно

$$N = c \int_0^{2\pi} \frac{1}{p} q d\vartheta.$$

Теперь параметры распределения скоростей на небесной сфере можно определить методом наименьших квадратов, пользуясь формулами (60.2) и (60.3). Введем обозначения: пусть

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad r_2 = \tau \sqrt{p},$$

тогда уравнение эллипса (60.2) можно переписать в виде

$$h^2 r_1^2 \cos^2 \vartheta + k^2 r_1^2 \sin^2 \vartheta = 1,$$

а уравнение прямой (60.3) будет иметь вид

$$r_2 = h^2 u_0 \cos \vartheta + k^2 v_0 \sin \vartheta.$$

Отношение полуосей эллипса равно h^2/k^2 ; величины u_0 и v_0 являются параметрами прямой. Большая полуось эллипса направлена к истинному вертексу на небесной сфере.

В эллипсоидальной теории рассматривается только направление истинного вертекса. В ней нет понятия, аналогичного понятию наблюдаемого вертекса в теории двух потоков.

Особенностью эллипсоидальной теории является то, что данные, полученные на основании изучения какой-нибудь одной области неба, не имеют непосредственной физической интерпретации. Только, определив направление вертекса по многим областям неба, например, методом „радиантов“, описанным в п. 58, можно на основании

эллипсов, полученных в разных областях неба, вычислить параметры эллипсоида скоростей h , k и l .

В том случае, когда эллипсоид вращения достаточно хорошо представляет наблюдаемое распределение скоростей, можно определить параметры этого эллипсоида после определения направления вертекса на основании наблюдаемого двухмерного распределения скоростей в одной или многих площадках на небе. Для определения же трехосного эллипсоида необходимо использовать, по крайней мере, два двухмерных распределения в двух далеко отстоящих друг от друга площадках неба. На практике, конечно, используют возможно большее число площадок, чтобы получить результаты, наиболее близкие к действительности.

Таким образом, при применении теории двух потоков можно определить некоторые параметры распределения скоростей на основании изучения только лишь одной площадки на небе, чего нельзя сделать, пользуясь эллипсоидальной теорией.

Кроме описанных выше методов определения параметров эллипсоида скоростей, существует много других, опирающихся, например, на корреляционные принципы. Однако, все эти методы настолько сложны, что мы считаем неуместным приводить их в нашей книге, отсылая интересующихся читателей к специальной литературе ¹⁾.

61. Общие замечания, связанные с определением параметров распределения скоростей звезд. Параметры распределения скоростей звезд определяются по теории двух потоков или же по эллипсоидальной теории тремя путями: опираясь на лучевые скорости звезд, их собственные движения и, наконец, на пространственные скорости звезд. В первом случае учитывается только лишь проекция скоростей на прямую, перпендикулярную к небесной сфере в данной точке; во втором случае — проекция скоростей звезд на плоскость, касательную к небесной сфере; в третьем же — используем пространственные скорости звезд. В первых двух случаях нам необходимо иметь в своем распоряжении проекции скоростей на *многие* направления или плоскости, т. е. иметь данные для многих областей неба. Такое определение параметров распределения скоростей звезд будет правильным только в том случае, если распределение скоростей звезд в различных областях неба одинаково. К сожалению, у нас часто нет не только доказательств правильности этого предположения, но даже, наоборот, существуют факты, противоречащие ему: так, например, часто звезды с одинаковыми морфологическими свойствами имеют различное распределение скоростей в разных областях неба ²⁾.

¹⁾ Изложение этих методов дается, например, в книге Pahlen E., *Lehrbuch der Stellarstatistik*, Lpz., 1938, стр. 739 и след.

²⁾ Rudnicki K., *Acta Astronomica*, № 47, 38 (1956); *Sprawozdanie Pol. Tow. Astronom.*, IV, 59 (1953).

Поэтому, применяя методы определения параметров распределения скоростей звезд по их лучевым скоростям или собственным движениям, следует принимать исключительные предосторожности и помнить, что полученные величины относятся только к некоторому среднему распределению. Вычисляя параметры распределения скоростей по пространственным скоростям звезд, можно, принципиально говоря, ограничиваться звездами, находящимися в весьма небольшой области неба. Однако, в этом случае возникают иного рода трудности, а именно: в малой области неба при вычислении тангенциальных составляющих пространственных скоростей, т. е. составляющих, направленных по касательным к небесной сфере, будут использоваться собственные движения звезд, имеющие гораздо большие случайные ошибки, чем лучевые скорости, которые используются при вычислении компонентов пространственной скорости по лучу зрения. Ведь в тангенциальные составляющие, кроме ошибок собственных движений, входят еще ошибки параллаксов, которые во многих случаях превышают величину самого параллакса.

Предполагая, например, что дисперсия скоростей звезд равна нулю, т. е., что скорости всех звезд одинаковы, мы все же получим большую или меньшую дисперсию скоростей вследствие существования ошибок наблюдений; притом, очевидно, получится эллипсоид вращения, малая полуось которого будет направлена перпендикулярно к небесной сфере, так как в этом направлении ошибки меньше, чем в направлении, касательном к небесной сфере. Иллюстрацией сказанного является рис. 39, а, на котором m_r обозначает среднюю ошибку лучевых скоростей, а m_t — тангенциальных скоростей.

Если в действительности дисперсия скоростей звезд отлична от нуля (рис. 39, б), то мы будем наблюдать наложение двух распределений (рис. 39, с). Форма полученного суммарного распределения может значительно отличаться от реального распределения скоростей, а определяемое на основании полученного распределения скоростей направление вертекса может быть ошибочным. Поэтому при применении такого рода методов необходимо тщательно учитывать ошибки наблюдений. К сожалению, это возможно лишь в некоторых специальных случаях¹⁾; у нас до сих пор нет никакого общего метода

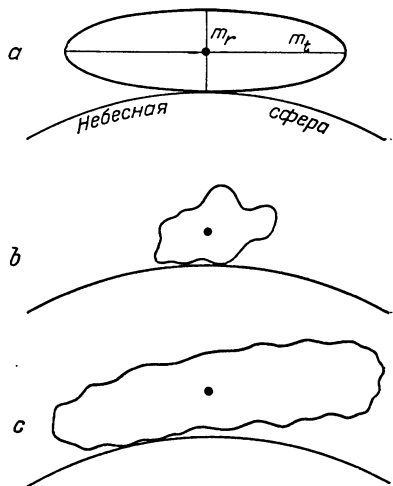


Рис. 39.

¹⁾ См. предыдущую сноску.

учета ошибок наблюдений при вычислении параметров распределения скоростей звезд по их пространственным скоростям.

Аналогичные ошибки возникают при применении многих других методов, использующих параллаксы звезд. Поэтому эти методы применяются только лишь к близким звездам, ошибки параллакса которых не превышают величины самого параллакса. Казалось бы, в этих случаях лучше пользоваться спектральными параллаксами, чем тригонометрическими, однако, при этом войдут систематические ошибки, которые часто бывают опаснее, чем даже большие случайные ошибки. Все это относится к тем случаям, когда невозможно установить источник систематических ошибок, которым, прежде всего, может быть межзвездное поглощение и ряд других факторов, влияющих на определение спектральных параллаксов.

Значительно меньшие ошибки возникают при использовании методов определения параметров распределения скоростей исключительно по собственным движениям звезд, лучевые же скорости звезд во многих случаях можно считать практически безошибочными.

§ 15. Движения центроидов. Вращение Галактики

62. Понятие центроида. Собственное движение звезд мы делим на peculiarное движение и среднее движение данной группы звезд. Последнее движение, как мы убедились, различно для звезд с различными морфологическими или другими характеристиками, например, для звезд с различной дисперсией скоростей (см. п. 54). Кроме того, звезды, находящиеся в различных областях пространства, обладают различными средними групповыми скоростями, на что мы обращаем особое внимание читателей.

Уточним теперь понятие средней скорости в данной области пространства. Для этого будем постепенно уменьшать область вокруг выбранной точки, и тот предел, к которому будет при этом стремиться средняя скорость звезд, находящихся в данной области, назовем средней скоростью в данной точке. Эта скорость называется *скоростью центроида* в данной точке, причем под центроидом мы понимаем некоторую точку, находящуюся в выбранном элементе объема и движущуюся со средней скоростью звезд, заключенных в этом элементе объема. При таком определении скорости центроида вводится предположение, что средняя скорость звезд в рассматриваемой области пространства стремится к определенному пределу независимо от того, каким образом мы уменьшаем элемент объема вокруг данной точки.

На практике, конечно, нельзя слишком сильно уменьшать область вокруг выбранной точки, так как при этом может оказаться, что, начиная с некоторого момента, внутри области или совсем не будет звезд, или же их будет так мало, что большую роль начнут играть случайные отклонения скоростей звезд от некоторой средней вели-

чины. Если внутри области окажется только одна звезда, то ее скорость следует считать скоростью центроида. В точке же, лежащей между двумя звездами с различными скоростями, скорость центроида окажется разной в зависимости от того, каким образом мы будем уменьшать элемент объема пространства около данной точки. Поэтому во всех исследованиях при определении средней скорости центроида следует брать довольно большие области порядка 100 *пс* или еще больше. Так как изменение скорости центроидов в окрестностях Солнца сравнительно невелико, порядка 10 *км/сек/кпс*, то можно вычислять скорость центроида в какой-нибудь точке путем интерполирования.

Совершенно ясно, что с одинаковым успехом можно рассматривать скорости центроидов всех звезд, равно как и звезд, выбранных по какому-нибудь признаку.

Так как разности скоростей центроидов в двух близких точках, вообще говоря, очень незначительны, то можно при теоретических расчетах предполагать, что в каждой звездной системе существуют непрерывные поля скоростей центроидов произвольно выбранных звезд, являющиеся однозначной функцией координат пространства, а может даже и времени, а также поля средних центроидов (т. е. поля, относящиеся ко всем звездам с теми же свойствами). Наблюдательные данные до сих пор не противоречили высказанным только что предположениям.

Обычно при определении движения центроидов рассматривают конечные области пространства, и полученную при этом среднюю скорость звезд приписывают точке, координаты которой являются средними из координат всех рассматриваемых звезд, т. е. центроиду звезд. В этом случае центроид является как бы центром масс изучаемых звезд в предположении, что массы этих звезд равны. Скорость движения Солнца к апексу относительно какой-нибудь группы звезд (см. § 13) представляет собой одновременно скорость центроида рассматриваемой группы звезд относительно Солнца. Точнее говоря, движение Солнца к апексу является пекулярным движением Солнца относительно центроида тех звезд, которые используются при определении движения Солнца к апексу.

Итак, мы встретились с двумя определениями центроида: первый раз мы определили его как геометрический центр рассматриваемой группы звезд (центр масс, в предположении, что массы всех звезд одинаковы); в другой раз центроид был определен как точка, движущаяся со скоростью, равной средней скорости звезд в данной области пространства, размеры которой стремятся к нулю. Первое определение очень удобно в практическом отношении, например, при обработке наблюдательных данных, второе же — в теоретических работах. Хотя два указанных выше определения центроида не являются тождественными, однако, на практике можно считать их эквивалентными и пользоваться ими как одним понятием.

Определение движения центроидов сводится практически (с некоторыми оговорками) к определению параметров движения Солнца к апексу. Методы определения последних, описанные в § 13, становятся очень неудобными, если апекс определяется по сравнительно удаленным звездам. Поэтому движения центроидов звезд с определенными морфологическими характеристиками, находящихся вблизи Солнца, известны гораздо точнее, чем движения центроидов звезд, расположенных в областях, далеких от Солнца, хотя для второго случая разработано несколько специальных методов, которыми мы и займемся в следующем пункте.

63. Асимметрия звездных движений. Как уже упоминалось, если определять движение Солнца к апексу по звездам с различными морфологическими или иными характеристиками, то получим различные результаты. Рассмотрим эти результаты в проекции на галактическую плоскость; возьмем диаграмму с осями u , v , т. е. по осям координат отложим компоненты скорости движения центроидов различных групп звезд относительно Солнца; таким образом, точки на этой диаграмме изображают концы векторов скоростей центроидов различных групп звезд (рис. 40). Кроме того, около каждой точки нарисуем еще соответствующий данной группе звезд эллипс скоростей, т. е. проекцию эллипсоида скоростей данной группы звезд на галактическую плоскость в том же масштабе, в каком изображены величины u и v . Таким образом, получилась известная *диаграмма Стремберга* (рис. 40). На этой диаграмме не указаны эллипсы скоростей самых быстрых звезд и галактик, так как эти кривые не помещаются в рамках данного чертежа. Центры этих эллипсов отмечены заштрихованными кругами. Ось u направлена к точке с координатами $l=0^\circ$, $b=0^\circ$.

Рассматривая рис. 40, легко заметить, прежде всего, явную асимметрию центров эллипсов, т. е. скоростей центроидов, которые практически расположены на одной прямой в направлении галактических долгот 55° — 235° , не пересекающей начала координат. Кроме того, размеры эллипсов и, следовательно, дисперсия скоростей, увеличиваются по мере удаления центров эллипсов от начала координат.

Можно составить еще другую диаграмму, изображая на ней вместо скоростей центроидов скорости отдельных звезд (рис. 41). Если нанести на эту диаграмму лишь скорости звезд с большим собственным движением, то легко убедиться, что в направлениях, соответствующих галактическим долготам от 100° до 10° , распределение скоростей в проекции на плоскость будет случайным с максимумом около нуля. В интервале же долгот 10° — 100° , т. е. примерно в направлении, обозначенном на рис. 40 стрелкой, распределение скоростей явно ограничено с одной стороны; этот предел отмечен на рис. 41 пунктирной линией. Указанное явление носит на-

звание асимметрии Стремберга. (На диаграмме не приведены звезды, скорость которых относительно Солнца меньше 20 км/сек.)

Линдблад предложил следующее объяснение наблюдаемой асимметрии звездных движений: предположим, что Галактика вра-

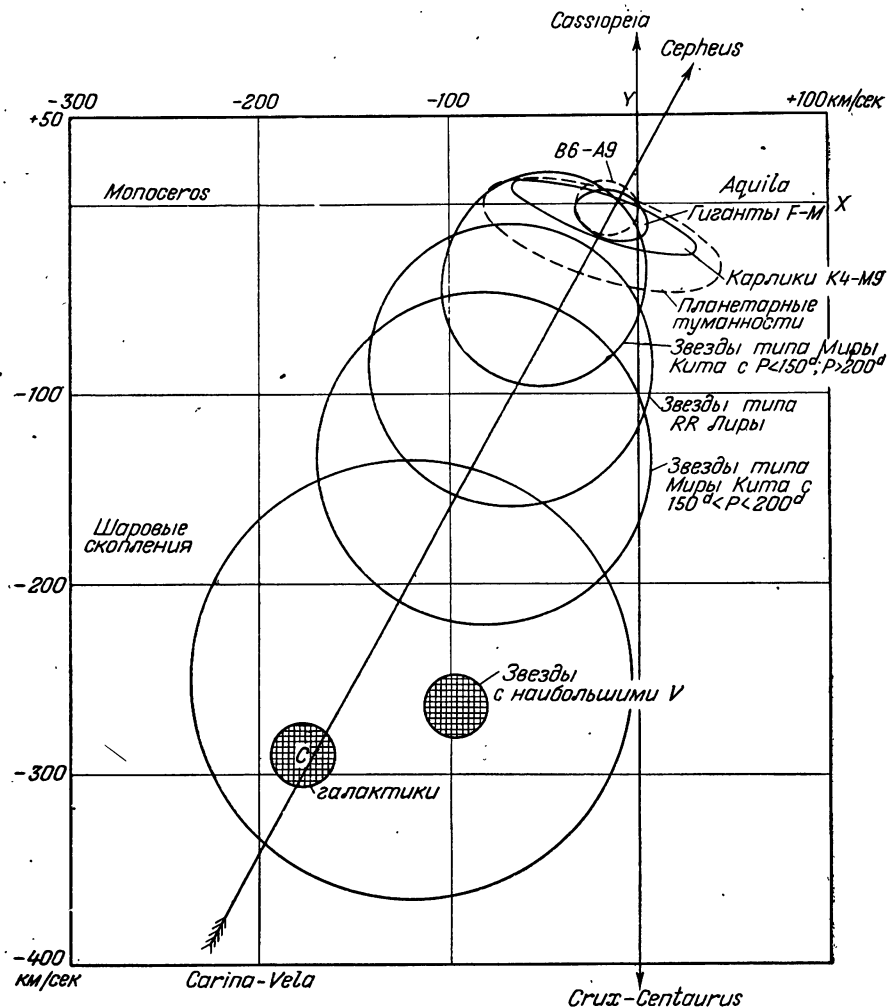


Рис. 40.

щается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рис. 40 и 41 и пересекающей галактическую плоскость в направлении галактической долготы $l = 320^\circ$. В этом случае все объекты будут двигаться в направлении, перпендикулярном к направлению $l = 320^\circ$ и обозначен-

ном на рис. 40 стрелкой, т. е. скорости всех центроидов будут иметь одинаковое направление, однако, модули их не будут равны вследствие неодинаковых угловых скоростей вращения различных групп звезд. Поэтому точки на диаграмме (рис. 40) будут расположены на одной прямой, но в разных местах последней. Линдبلاد

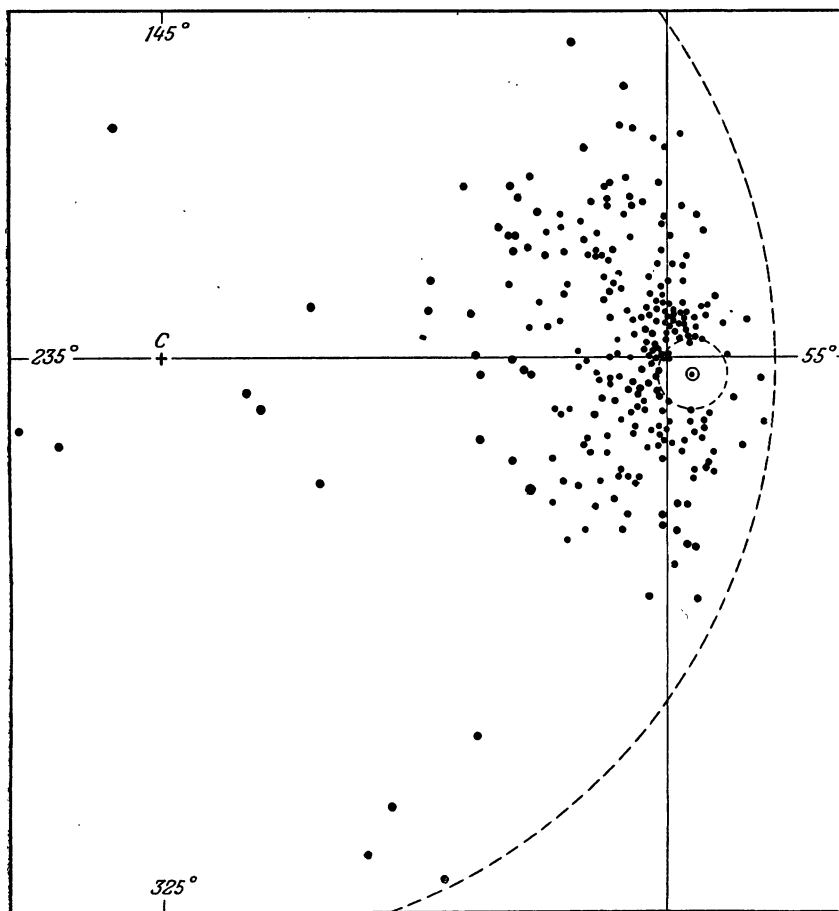


Рис. 41.

предположил, что звезды в Галактике принадлежат к различным подсистемам, которые отличаются друг от друга не только скоростями вращения вокруг центра Галактики, но также дисперсией этих скоростей, пространственным распределением, а, может быть, даже физические характеристики звезд, принадлежащих к различным подсисте-

мам, неодинаковы. Последующие исследования полностью подтвердили правильность высказанного Линдбладом предположения (см. гл. IV).

Если бы Солнце двигалось по круговой орбите, то соответствующая его скорости точка (начало координат на рис. 40) должна была бы находиться на общей прямой. Но, так как в действительности этого нет, то, значит, Солнце движется не по кругу и, таким образом, имеет относительно центроида „нормальных звезд“ некую отличную от нуля пекулярную составляющую скорости, перпендикулярную к направлению вращения.

На рис. 40 указана также скорость центроида галактик; при этом элемент объема, в котором определялась средняя скорость, естественно, измерялся кубическими мегапарсеками. Если предположить, что центроид галактик определяет начало инерциальной системы отсчета, то точке на диаграмме, соответствующей этому центроиду, следует приписать скорость, равную нулю, и вычислять скорости остальных центроидов относительно этой именно точки, которая на рис. 40 и 41 обозначена буквой C .

Наша Галактика может, конечно, как целое двигаться относительно центроида других галактик, в этом случае скорость какого-нибудь объекта относительно точки C будет суммой скоростей данного объекта относительно центра Галактики и скорости центра Галактики относительно центроида других галактик. Однако, отсутствие наблюдательных данных заставляет предположить, что пекулярное движение нашей Галактики относительно центроида других галактик равно нулю, поэтому скорости центроидов относительно точки C рассматриваются как скорости их вращения внутри Галактики.

Из всего сказанного выше следует, что звезды, обладающие большой скоростью движения относительно Солнца, очень медленно вращаются вокруг центра Галактики; и, наоборот, „нормальные“ звезды, т. е. звезды с малыми скоростями относительно Солнца, обладают быстрым вращательным движением в Галактике.

Если считать нашу Галактику стационарной, то можно предположить, что в ней нет звезд с параболическими скоростями относительно центра Галактики, т. е. звезд, которые должны уйти из Галактики. Прерывистая линия (рис. 41), ограничивающая наблюдаемые галактоцентрические скорости, очень близка к кругу, описанному вокруг точки C с радиусом, равным 350—400 км/сек. Следовательно, параболическая скорость в окрестностях Солнца равняется 350—400 км/сек (см. п. 70).

64. Кинематическая теория вращения Галактики. При более точных исследованиях вращения Галактики необходимо иметь какую-нибудь теорию, связывающую наблюдаемые параметры движения центроидов звезд с параметрами их движения в какой-нибудь неподвижной системе отсчета, близкой к инерциальной. Рассмотрим прямоугольную систему координат X, Y, Z и обозначим в ней скорость

данного центроида звезд вектором $V_1 = (u_1, v_1, w_1)$, а скорость центроида, в котором находится наблюдатель, вектором $V_0 = (u_0, v_0, w_0)$; следовательно, относительная скорость данного центроида будет равна

$$\Delta V = V_1 - V_0 = (u_1 - u_0, v_1 - v_0, w_1 - w_0).$$

Поместим начало координат O в центре Галактики (рис. 42), а ось Z направим перпендикулярно к галактической плоскости. Предположим далее, что наблюдатель, связанный с центроидом S_0 , находится в галактической плоскости; в действительности же Солнце

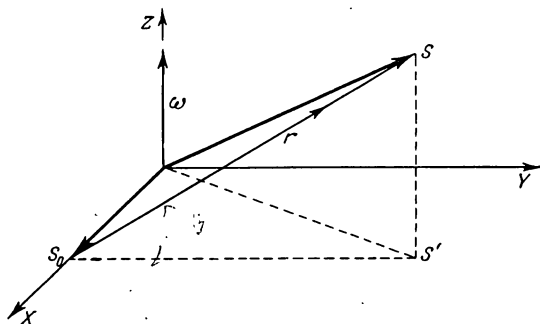


Рис. 42.

очень близко к этой плоскости (см. п. 133). Ось X направим к центроиду S_0 .

Пусть исследуемый центроид S находится в произвольной точке пространства; обозначим векторы положения обоих центроидов через R_0 и R соответственно, а их угловые скорости — через ω_0 и ω . Положение центроида S относительно центроида S_0 будет определяться вектором r , равным

$$r = R - R_0.$$

Пусть точка S' будет проекцией центроида S на галактическую плоскость. Если движение центроидов является результатом вращения Галактики, то

$$V_0 = \omega_0 \times R_0,$$

$$V_1 = \omega \times R,$$

следовательно,

$$\Delta V = \omega \times R - \omega_0 \times R_0.$$

Чтобы применить полученную формулу к наблюдательным данным, необходимо написать ее в системе координат, связанной с положением Солнца в Галактике, т. е. в галактических координатах r, l

и b . Обозначая единичные векторы через $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{l}_0$, $\mathbf{b}_0$, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ \mathbf{l}_0 &= \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{\omega r \cos b}, \\ \mathbf{b}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{l}_0 = \frac{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{\omega r^2 \cos b} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}^2 - \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}{\omega r^2 \cos b}.\end{aligned}$$

Вычислим проекции вектора ΔV на соответствующие направления, т. е.

$$\begin{aligned}\Delta V_r &= \mathbf{r}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_0) = \frac{1}{r} [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{R}_0 \times \mathbf{r})] = \\ &= \frac{1}{r} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) (\mathbf{R}_0 \times \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (64.1)$$

(здесь использовалось равенство $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$);

$$\begin{aligned}\Delta V_l &= \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_0)}{\omega r \cos b} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}) - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}_0 (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_0)}{\omega r \cos b} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2}{\omega r \cos b} = \frac{\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{\omega r \cos b}\end{aligned}\quad (64.2)$$

(так как $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_0) = 0$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = r^2 + \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$).

Аналогично

$$\Delta V_b = \frac{[\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}^2 - \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})] \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_0]}{\omega r^2 \cos b} = \frac{(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_0) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}{\omega r^2 \cos b}.\quad (64.3)$$

При этом использовалось равенство

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_0) = \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0.$$

Угол OS_0S' равен разности галактических долгот ($l_0 - l$) центра Галактики и рассматриваемого центроида, а расстояние S_0S' равно $r \cos b$. Таким образом,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_0) &= -(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) r R_0 \sin(l - l_0) \cos b, \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_0 &= r R_0 \cos b \cos(l - l_0), \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} &= \omega r \sin b, \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 &= \omega^2 r^2 \cos^2 b.\end{aligned}$$

Учитывая это, можно формулы (64.1)–(64.3) переписать в окончательном виде

$$\Delta V_r = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) R_0 \cos b \sin(l - l_0),\quad (64.4)$$

$$\Delta V_l = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) R_0 \cos(l - l_0) + \omega r \cos b.\quad (64.5)$$

$$\Delta V_b = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) R_0 \sin b \sin(l - l_0).\quad (64.6)$$

Эти три формулы являются общим решением проблемы галактического вращения. Они связывают наблюдаемые величины ΔV_r , ΔV_t и ΔV_b с параметрами вращения. Полученные формулы можно несколько уточнить, отбросив предположение о том, что Солнце находится в галактической плоскости, однако, те наблюдательные данные, которыми мы располагаем в настоящее время, еще не настолько точны, чтобы это стоило делать.

Приведенный здесь вывод всех трех формул принадлежит К. Ф. Огородникову. Первую формулу вывел несколько раньше Боттлингер, вторую — Пиловский.

65. Функция Камма. Формулу (64.4) можно непосредственно использовать для исследования галактического вращения по имеющимся в нашем распоряжении лучевым скоростям звезд. Умножая обе части этой формулы на $\operatorname{cosec}(l-l_0) \sec b$, получим уравнение

$$\Delta V_r \operatorname{cosec}(l-l_0) \sec b = R_0 (\omega - \omega_0),$$

в левой части которого находятся только наблюдаемые лучевые скорости звезд и их галактические координаты, в правой же части — угловая скорость вращения и расстояние Солнца от центра Галактики. Предполагая, что скорость вращения зависит только от расстояния R от центра Галактики, можно последнюю формулу переписать в окончательном виде

$$\Delta V_r \operatorname{cosec}(l-l_0) \sec b = R_0 [\omega(R) - \omega(R_0)] = f(R, R_0). \quad (65.1)$$

Правая часть, обозначенная нами через $f(R, R_0)$ и являющаяся функцией только расстояния, называется функцией Камма (в честь астронома, который первым ввел ее в звездную астрономию)¹⁾.

Следует помнить, что функцию Камма можно применять только после исправления лучевых скоростей звезд за движение Солнца к апексу. Кроме того, чтобы избавиться от влияния пекулярных движений, надо пользоваться средними лучевыми скоростями звезд, находящихся практически на одинаковом расстоянии от центра Галактики. Следует также помнить, что при малых значениях $(l-l_0)$ и $(l-l_0-180^\circ)$ величина $\operatorname{cosec}(l-l_0)$ становится очень большой, поэтому ошибки ΔV_r будут в этом случае увеличены в несколько раз. То же относится и к большим значениям b . Следовательно, звезды, находящиеся в направлении центра или антицентра Галактики, могут сильно искажать результаты; поэтому такие звезды следует просто отбрасывать или брать с весами, пропорциональными величине $\sin(l-l_0) \cos b$.

Для того, чтобы применять функцию Камма, необходимо знать расстояние Солнца от центра Галактики, направление последнего, а также расстояния R всех изучаемых звезд от центра Галактики. Эти величины непосредственно входят в формулу.

¹⁾ MN, 99, 71 (1938).

Вычислив функцию Камма для разных расстояний от центра Галактики, определяем затем разности $\omega(R) - \omega(R_0)$. Угловую скорость вращения центроида звезд в окрестностях Солнца $\omega(R_0)$ можно вычислить или, если известна линейная скорость центроида относительно центра Галактики и его расстояние, или другими методами, которые будут рассмотрены ниже. Зная $\omega(R_0)$, можно определить угловые скорости вращения на различных расстояниях R от центра Галактики по формуле

$$\omega(R) = \frac{1}{R_0} f(R, R_0) + \omega(R_0)$$

и, конечно, также линейные скорости вращения центроидов звезд.

П. П. Паренаго в 1941 г.¹⁾ применил этот метод к звездам, имеющим небольшую скорость движения относительно Солнца и небольшую дисперсию скоростей, и получил результаты, приведенные в составленной им таблице, при этом предполагалось, что $R_0 = 7,2$ кпс и линейная скорость вращения в окрестностях Солнца составляет 234 км/сек.

Расстояние (кпс)	$f(R, R_0)$ (км/сек)	Угловая скорость вращения (км/сек/кпс)	Линейная скорость вращения (км/сек)
0	(+255)	(68)	0
1	(+220)	(63)	(63)
2	(+184)	(58)	(116)
3	(+148)	(53)	(160)
4	(+112)	(48)	(192)
5	+82	43,9	219
6	+52	39,7	238
7	+10	33,9	237
7,2	0	32,5	234
8	-30	28,3	226
9	-58	24,4	220
10	-79	21,5	215
11	-95	19,3	212

Применение функции Камма — очень простой с теоретической точки зрения — требует, однако, знания параллаксов звезд, расстояния Солнца от центра Галактики, а также скорости вращения центроида звезд в окрестностях Солнца; указанные величины необходимо определить иными независимыми методами. Все это являлось причи-

¹⁾ См. Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, 1954, стр. 168.

ной сравнительно редкого использования функции Камма в прошлом; хотя метод Камма является единственно применимым для исследования вращения Галактики в произвольной точке и не содержащим никаких предположений, кроме предположения о том, что центроиды звезд движутся в Галактике с круговой скоростью. В последнее время многие исследователи начали успешно применять этот метод к различным проблемам¹⁾.

Функцию Камма $f(R, R_0)$ можно также получить путем преобразования равенства (64.5), после чего вращение Галактики можно исследовать по собственным движениям звезд. Этот метод впервые применила М. Карпович²⁾ при изучении вращения звезд, входящих в местную систему (см. п. 71).

Формулу (64.6) до сих пор еще никто не применял.

Очень остроумное применение функции Камма позволило определить расстояния областей $H I$, т. е. областей, излучающих линию $\lambda = 21$ см, об этом уже упоминалось на стр. 162 и подробно написано в дополнении 7.

66. Формулы Оорта. При исследовании галактического вращения сравнительно близких звезд можно ввести некоторые упрощения и таким образом избавиться от многих величин, часто неизвестных нам с достаточной точностью, но необходимых при применении метода Камма.

Формулы Оорта, к рассмотрению которых мы сейчас переходим, являются дифференциальными формулами, поэтому их можно применять только к небольшим расстояниям, отождествляемым с дифференциалом расстояния.

Отбросим предположение о круговом движении центроидов и будем только предполагать, что это движение параллельно галактической плоскости.

Изменения компонентов скорости в поле скоростей центроидов при изменении координат на dx , dy и dz можно представить в виде

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (66.1)$$

На основании сделанного нами предположения $dw = 0$; если рассматривать движение в окрестностях Солнца (на это указывает индекс 0 при соответствующих величинах), то следует принять

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = 0,$$

¹⁾ См, например, Stibbs D., *MN*, 116, № 4, 453 (1956).

²⁾ Warsaw Reprint, 59 (1957).

так как Солнце находится в галактической плоскости, относительно которой движение симметрично.

Следовательно,

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 dy,$$

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 dy,$$

$$d\omega = 0.$$

В каждой точке небесной сферы введем три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{l}_0$, $\mathbf{b}_0$; пусть первый направлен по

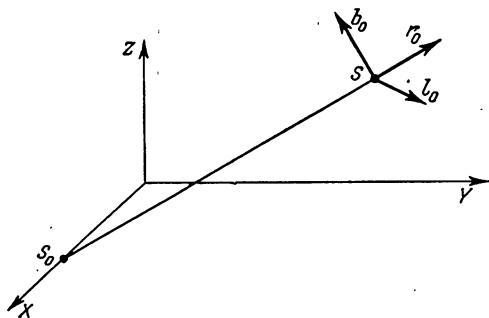


Рис. 43.

лучу зрения, второй — в направлении возрастающих галактических долгот и третий — в направлении возрастающих широт (рис. 43). Легко вычислить координаты x , y и z этих единичных векторов

$$\mathbf{r}_0 = [-\cos b \cos(l-l_0), -\cos b \sin(l-l_0), \sin b],$$

$$\mathbf{l}_0 = [\sin(l-l_0), -\cos(l-l_0), 0],$$

$$\mathbf{b}_0 = [\sin b \cos(l-l_0), \sin b \sin(l-l_0), \cos b].$$

Помня, что $\mathbf{r}_0$ является единичным вектором $\mathbf{r}$, получим

$$dx = -dr \cos b \cos(l-l_0),$$

$$dy = -dr \cos b \sin(l-l_0).$$

Итак, имеем следующие формулы для дифференциалов скоростей центроидов в галактической системе координат:

$$dV_r = dr \cos^2 b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \cos^2(l-l_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \sin^2(l-l_0) + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \right] \sin(l-l_0) \cos(l-l_0) \right\}.$$

$$dV_l = dr \cos b \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \cos^2 (l - l_0) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \sin^2 (l - l_0) - \right. \\ \left. - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \right] \sin (l - l_0) \cos (l - l_0) \right\}, \quad (66.2)$$

$$dV_b = -dr \sin b \cos b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \cos^2 (l - l_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \sin^2 (l - l_0) + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \right] \sin (l - l_0) \cos (l - l_0) \right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \right], \quad B = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \right], \\ K = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \right], \quad C = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \right], \quad (66.3)$$

в таком случае, после простых тригонометрических преобразований, получим вместо формул (66.2) следующие формулы:

$$dV_r = dr \cos^2 b [K + C \cos 2(l - l_0) + A \sin 2(l - l_0)], \quad (66.4)$$

$$dV_l = dr \cos b [B + A \cos 2(l - l_0) - C \sin 2(l - l_0)], \quad (66.5)$$

$$dV_b = -dr \sin b \cos b [K + C \cos 2(l - l_0) + A \sin 2(l - l_0)] = \\ = -dV_r \operatorname{tg} b. \quad (66.6)$$

Практически вместо dr можно подставлять расстояния от Солнца, если они, конечно, достаточно малы.

Приведенные выше формулы вывел в 1932 г. К. Ф. Огородников¹⁾; однако, будем их называть обобщенными формулами Оорта, так как некоторые из них в упрощенной форме вывел Оорт еще в 1927 г.

67. Физическая интерпретация формул Оорта. Легко видеть, что две постоянные в формулах (66.3) имеют простую физическую интерпретацию, а именно:

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{V}, \\ B = \left| \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V} \right|. \quad (67.1)$$

Второе равенство опирается на предположение, что движения центроидов параллельны галактической плоскости и, следовательно, ротация имеет только одну составляющую в направлении оси z . Итак, величина K является мерой общего расширения (или сжатия) звезд в окрестностях Солнца, а величина B — мерой общего вращения.

¹⁾*Zeitschrift für Astrophysik*, 4, 190, (1932).

Постоянные A и C можно выразить через одну постоянную A' , если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= A' \cos 2\varphi, \\ C &= A' \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (67.2)$$

и

$$l_0 + \varphi = l_1. \quad (67.3)$$

В этом случае формулы (66.4) — (66.6) примут более простой вид

$$\Delta V_r = r \cos^2 b \{A' \sin 2(l - l_1) + K\}, \quad (67.4)$$

$$\Delta V_l = r \cos b \{A' \cos 2(l - l_1) + B\}, \quad (67.5)$$

$$\Delta V_b = -r \sin b \cos b \{A' \sin 2(l - l_1) + K\}$$

Вместо дифференциалов dr вводим конечные расстояния r .

Для того, чтобы установить физический смысл величины A' , предположим временно, что $K=0$, и рассмотрим звезды, находящиеся в галактической плоскости внутри круга с радиусом r . По истечении интервала времени, равного единице, расстояния этих же звезд от Солнца изменятся, т. е. будем иметь

$$r + dV_r = r [1 + A' \sin 2(l - l_1)].$$

Следовательно, звезды будут находиться внутри гипоциклоиды, изображенной на рис. 44. Итак, A' является мерой деформации элемента пространства в окрестностях Солнца, причем, согласно сделанному

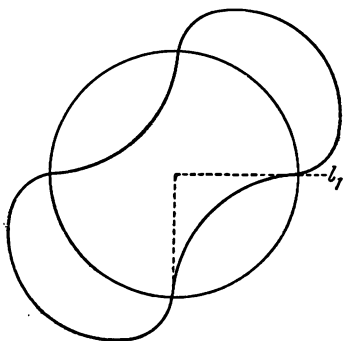


Рис. 44.

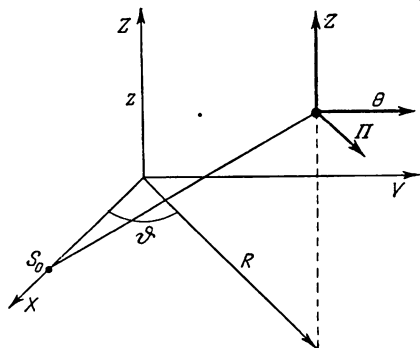


Рис. 45.

предположению, эта деформация происходит только параллельно галактической плоскости.

Чтобы выяснить смысл постоянных A , B , C и K , перейдем к системе цилиндрических координат, которая часто применяется в динамике звездных систем. Вместо Галактики рассмотрим произвольную звездную систему и введем систему цилиндрических коор-

динат R , ϑ и z с началом в центре звездной системы; компоненты скоростей в этой системе координат обозначим через Π , Θ и Z (рис. 45). Принимая во внимание, что в точке наблюдения направление R тождественно с направлением оси x , получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \Pi}{\partial R}\right), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} - \frac{\Theta}{R}\right)_0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R}\right)_0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + \frac{\Pi}{R}\right)_0.\end{aligned}$$

В цилиндрической системе координат постоянные A , B , C и K будут равны соответственно

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R} - \frac{\Theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} \right)_0, \\ B &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{\Theta}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} \right)_0, \\ C &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial R} - \frac{\Pi}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right)_0, \\ K &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial R} + \frac{\Pi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right)_0.\end{aligned}$$

Если бы движение центроидов было чистым вращением без расширения или сжатия, то

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = \Pi = 0,$$

следовательно,

$$C = K = 0$$

и

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R} - \frac{\Theta}{R} \right)_0, \\ B &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{\Theta}{R} \right)_0.\end{aligned}\tag{67.6}$$

В этом случае формулы (66.4) — (66.6) имели бы вид

$$\Delta V_r = rA \sin 2(l - l_0) \cos^2 b,\tag{67.7}$$

$$\Delta V_l = rA \cos 2(l - l_0) \cos b + rB \cos b,\tag{67.8}$$

$$\Delta V_b = -rA \sin 2(l - l_0) \sin b \cos b.$$

Формулы (67.7) и (67.8) принято называть необобщенными формулами Оорта, так как эти формулы были выведены им еще в 1927 г.¹⁾

¹⁾ ВАН, 3, 275 (1927),

68. Графическая интерпретация формул Оорта. Рассмотрение формул Оорта показывает, что лучевые и тангенциальные скорости звезд должны давать двойную волну (период 180°) вдоль оси l с амплитудой, равной A' . В случае, соответствующем формулам (67.7) и (67.8), легко графически представить себе существование двойной волны.

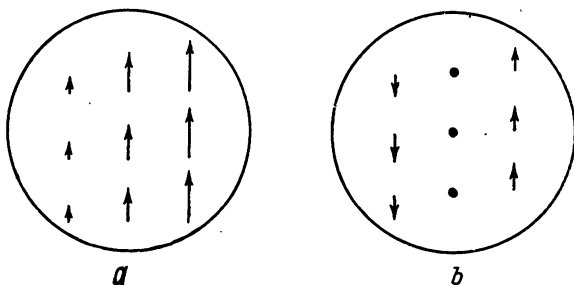


Рис. 46.

В самом деле, рассмотрим небольшую область в галактической плоскости и каждой точке этой области поставим в соответствие вектор скорости вращения центроида (рис. 46, *a*). Пусть Солнце находится внутри этой области. Так как рассматриваемая область мала, то векторы скоростей можно считать параллельными между собой и перпендикулярными направлению от Солнца к галактическому центру, причем все дальнейшие рассуждения будут справедливы независимо от того, растут или убывают модули векторов скоростей при изменении расстояния от центра Галактики.

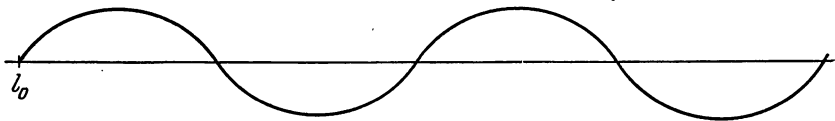


Рис. 47.

Из всех векторов вычтем вектор скорости того центроида, с которым связано Солнце; в таком случае получим наблюдаемое распределение скоростей в окрестностях Солнца (рис. 46, *b*). Рассматривая этот рисунок, легко понять, почему наблюдаемые лучевые скорости будут показывать два максимума и два минимума и четыре раза будут равны нулю, т. е. получается что-то вроде двойной синусоиды (рис. 47), существование которой предсказывается формулой (67.7). Таким же образом можно представить себе графически формулу (67.8), однако, при этом появятся некоторые дополнительные трудности.

Предлагаем читателям проделать это, предупреждая их о необходимости использования формулы (67.1).

Выше была изложена кинематическая теория движения центроидов в элементе объема Галактики в предположении, что движения их параллельны галактической плоскости. Это и есть теория Огородникова, результатом которой являются формулы (66.4) — (66.7), показывающие, что распределение лучевых и тангенциальных скоростей звезд по галактической долготе должно быть синусоидой с периодом 180° , *независимо от закона изменения скоростей звезд при изменении расстояния от центра Галактики*.

Теорию Огородникова обобщил Милн в 1935 г.¹⁾ Он показал, что если рассматривать движение центроидов в произвольной системе сферических координат и не делать никаких предположений относительно характера этого движения, кроме предположения, что скорости центроидов являются непрерывной функцией положения, то мы приходим к тем же самым результатам, т. е. получим синусоиды с периодом 180° во всех трех компонентах скоростей; конечно, при этом необходимо рассматривать лишь небольшую область пространства, в которой изменения скоростей можно отождествить с их дифференциалами.

Некоторые исследователи пытались вывести соотношения, аналогичные формулам Оорта, но не отождествляя при этом изменения компонентов скоростей с их дифференциалами. Практически это означает, что при разложении в ряд (66.2) следует учитывать также члены высших степеней; такая именно теория была создана Хэйфорд в 1932 г.²⁾ Полученные ею формулы позволяют изучать галактическое вращение далеких от Солнца объектов. Теория эта, однако, не имеет широкого применения, так как в тех случаях, когда изучаются далекие объекты, лучше применять формулы (64.4) — (64.6), чем формулы, полученные Хэйфордом.

69. Практическое применение формул Оорта. На практике широко используются только две первые формулы Оорта (67.4) и (67.5). В третью формулу входит $\sin b$, значение которого обычно близко к нулю, так как почти все далекие звезды концентрируются вблизи галактической плоскости. Поэтому вычисленные значения ΔV_b настолько малы, что имеющиеся в нашем распоряжении наблюдательные данные не позволяют определять их с необходимой точностью.

Несмотря на то, что по внешнему виду формулы (67.4) и (67.5) очень похожи, их практическое применение весьма различно; поэтому мы рассмотрим отдельно применение каждой из этих формул к конкретным задачам звездной астрономии.

¹⁾ *MN*, 95, 560 (1935). См. также Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 409.

²⁾ *Lick Observatory Bull.*, 16, 53 (1932).

Проекция разности скоростей движений центроида рассматриваемых звезд и центроида, с которым связано Солнце, на луч зрения, входящая в левую часть уравнения (67.4), просто является наблюдаемой лучевой скоростью. Если бы все звезды двигались так, как движется их центроид, то их наблюдаемые лучевые скорости, исправленные за движение Солнца, удовлетворяли бы уравнению

$$V_r = rA' \sin 2(l - l_1) \cos^2 b + rK \cos^2 b. \quad (69.1)$$

Если же наблюдаемые (гелиоцентрические) лучевые скорости звезд не исправлены за движение Солнца, то они должны удовлетворять уравнению

$$V_r = -V_{\odot} \cos \lambda + rA' \sin 2(l - l_1) \cos^2 b + rK \cos^2 b. \quad (69.2)$$

Для того, чтобы исправить лучевые скорости за движение Солнца, надо учесть проекцию скорости движения Солнца относительно центроида рассматриваемых звезд на луч зрения. Вычитая последнюю величину из наблюдаемой лучевой скорости, получим ту скорость, которую мы наблюдали бы, двигаясь вместе с центроидом изучаемой группы звезд.

Используя уравнение (69.2), можно одновременно определять параметры движения Солнца к апексу и параметры вращения Галактики по выбранной группе звезд. Такой путь совместного определения указанных величин следует предпочесть любым методам раздельного определения этих величин, так как в последнем случае при определении параметров движения Солнца к апексу предполагается, что центроиды всех рассматриваемых звезд движутся одинаково, а это справедливо только в отношении ближайших к Солнцу звезд. Но, принимая во внимание относительные движения центроидов, можно использовать также весьма удаленные звезды.

Так как все звезды, кроме параллактического, имеют еще пекулярное движение, то уравнения (69.1) и (69.2) являются приближенными; если предположить при этом, что пекулярные движения распределены по закону случайных ошибок, то указанные уравнения следует решать методом наименьших квадратов; конечно, $\cos \lambda$ в этом случае удобнее выразить через галактические координаты звезды.

Имея данные для многих звезд, можно таким образом определить параметры вращения A' , K и l_1 , а также координаты апекса и значение скорости Солнца $V_{\odot}$. При этом близкие звезды можно сгруппировать и пользоваться соответствующими средними.

Формула Оорта (69.1), выражающая изменение лучевых скоростей, может быть использована также для определения групповых параллаксов (о чем была речь в п. 24).

Переходя к рассмотрению формулы (67.5), следует, прежде всего, заметить, что левая часть этой формулы не является непосредственно результатом наблюдений, поэтому ее надо выразить через собственное

движение по галактической долготе μ_l ; согласно формуле (3.3), имеем

$$\Delta V_l = \frac{\mu_l k}{\pi} = 4,74 \mu_l r;$$

следовательно,

$$\mu_l = \frac{A'}{k} \cos 2(l - l_1) \cos b + \frac{B}{k} \cos b. \quad (69.3)$$

Итак, мы совершенно избавились от расстояния r , т. е. собственное движение центроидов по галактической долготе, вызванное вращением Галактики, не зависит от расстояния. Это обстоятельство особенно важно потому, что параллактический компонент собственного движения, а также пекулярное движение звезд уменьшаются пропорционально расстоянию; следовательно, если рассматривать движение далеких звезд, то можно практически свести на нет влияние всех факторов, кроме галактического вращения. Естественно, что отмеченное явление заставляет исследователей пользоваться, при определении параметров галактического вращения по формуле (69.3), самыми далекими звездами, а это часто ведет к неточностям. Кроме того, необходимо помнить, что эта формула справедлива только при небольших, по сравнению с размерами Галактики, расстояниях звезд, порядка сотен парсек. При больших расстояниях следует использовать формулы (64.4) и (64.5).

Отсутствие расстояний во второй формуле Оорта делает применение этой формулы очень удобным; действительно, группируя звезды, не надо принимать во внимание их расстояния, следовательно, можно объединять в одну группу звезды, находящиеся на различных расстояниях от Солнца.

Используя обе формулы Оорта, можно определить только постоянные A' , B , K и l_1 ; определить же отдельно величины A , C и направление l_0 нельзя. Однако, если l_0 известно, например, по исследованию пространственного распределения звезд, то можно, применяя последовательно формулы (67.3) и (67.2), определить сначала φ , а затем постоянные A и C .

70. Обсуждение результатов, полученных из формул Оорта. Впервые постоянные в своих формулах определил сам Оорт в 1927 г.; при этом он пользовался формулами (67.7) и (67.8). В табл. 14¹⁾ дается сводка всех определений этих постоянных. В качестве среднего можно принять

$$A = +0,019 \text{ км/сек/пс} = +0'',0041/\text{год},$$

$$B = -0,013 \text{ км/сек/пс} = -0'',0027/\text{год}.$$

¹⁾ Эта таблица взята из книги Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 156.

Постоянная K равна нулю, конечно, в пределах той точности, с какой ее удавалось определять до сих пор. Только лишь для самых близких звезд спектральных типов O и B постоянная K положительна и равна $+4,3$ км/сек/кпс. Это явление кратко называется K -эффектом. До сих пор нет надежного объяснения K -эффекта; наряду с объяснением этого явления реальным расширением системы этих звезд выдвинуто также предположение, что указанное смещение спектральных линий может быть вызвано воздействием на излучение звезды сильных гравитационных полей. Звезды типов B и O очень массивны, на их поверхностях господствует сильный гравитационный потенциал, который может вызвать довольно значительное „покраснение“ света этих звезд согласно принципу теории относительности (K -эффект определяется по лучевым скоростям звезд).

Известны также попытки объяснения K -эффекта явлениями, возникающими при прохождении света звезд через фотонные поля общего излучения Галактики.

Учитывая все это, а также то, что значение l_1 очень близко к значению l_0 , полученному в результате исследования пространственного распределения звезд, можно принять, что

$$l_1 = l_0, \quad K = C = 0, \quad A' = A.$$

Равенство нулю величин K и C считается доказательством того, что величины $\partial\Theta/\partial\theta$ и Π также равны нулю, хотя, принципиально говоря, это неправильно, так как из равенства нулю двух последних величин следует, что $K = 0$ и $C = 0$, обратная же теорема неверна (см. п. 67). Если предположить, однако, что величины Π и $\partial\Theta/\partial\theta$ действительно равны нулю, то, зная R_0 , можно, привлекая формулу (67.6), вычислить скорость вращения центроида Солнца

$$(B - A)R_0 = \Theta = 256 \text{ км/сек}, \quad (70.1)$$

а также ее производную по R

$$B + A = \frac{\partial\Theta}{\partial R} = +0,006 \text{ км/сек/пс} \quad (70.2)$$

в той точке, где находится Солнце. Полученная таким образом угловая скорость вращения Галактики в окрестностях Солнца равна

$$\frac{\Theta}{R} = B - A = -0'',0068/\text{год};$$

это соответствует одному полному обороту за 190 000 000 лет¹⁾.

¹⁾ Обычно $\frac{\Theta}{R} = A - B = +0'',0068/\text{год}$, а $A + B = \frac{\partial\Theta}{\partial R} = +0,006 \text{ км/сек/пс}$, так как вводятся обозначения

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{R} - \frac{\partial\Theta}{\partial R} \right)_0, \\ B = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{R} + \frac{\partial\Theta}{\partial R} \right)_0$$

в отличие от обозначений, принятых в настоящей книге (см. стр. 206).—
Прим. ред.

ПОСТОЯННЫЕ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ВРАЩЕНИЯ
(сводная таблица, составленная П. П. Паренаго)

Автор	Год	Материал	Число звезд	A'	B	l_0
Раймонд и Вилсон	1931	V (все звезды)	4 233	$+0,015$	$-0,016$	329°
Пласкетт и Пирс	1934	$V_r(O-B7)$	849	$+0,021$	—	324
Пласкетт и Пирс	1934	$\mu(O-B7)$	717	$(+0,013)$	$-0,012$ ± 3	312
Нордстрем	1936	$V_r(A-M)$	847	$+0,021$ ± 5	—	336 ± 7
Оорт	1937	μ слабых звезд	18 000	—	$-0,015$ ± 2	—
Ван де Камп и Высотский	1937	" "	18 000	$(+0,014)$ ± 3	$-0,014$ ± 3	321
Вилсон и Раймонд	1938	μ (звезды каталога Босса GC)	33 432	$(+0,012)$	$-0,012$	326
Джой	1939	V_r цефеид	156	$+0,021$	—	325
Глизе	1940	μ (каталог $FK3$)	1 535	$(+0,013)$ ± 6	$-0,012$	317 ± 12
Паренаго	1941	V_r цефеид, звезд $O-B$ и др.	769	$+0,0197$ ± 4	—	—
Высотский и Вильямс	1948	$\mu FK3$	69 000	$+0,0190$ ± 14	$-0,0076$ ± 14	—
Высотский и Вильямс	1948	μGC	69 000	$+0,0152$	$-0,0133$	—
Шацова	1950	μGC	31 922	$+0,018$	$-0,009$	330
Морган и Оорт	1951	$FK3, N30$		$+0,020$ ± 2	$-0,007$ $\pm 1,5$	—
Бакулин	1953	Звезды B , сверхгиганты, долгопериодические цефеиды (GC)	870	$+0,014$ ± 1	$-0,012$ ± 1	317 ± 3
Бакулин	1953	Звезды B , сверхгиганты, долгопериодические, цефеиды ($FK3$)	870	$+0,015$ ± 1	$-0,008$ ± 1	320 ± 3

Следует заметить, что вычисленная скорость вращения центроида Солнца несколько меньше той же скорости, полученной по диаграмме Стремберга (см. п. 63). Таким образом, точку C на рис. 40 и 41 следует несколько передвинуть в направлении вращения, а, следовательно, необходимо также уменьшить и параболическую скорость в Галактике в окрестностях Солнца до 300 км/сек.

Зная постоянные Оорта, можно определить массу Галактики, не привлекая никаких специальных динамических теорий. Для этого необходимо лишь предположить, что скорость вращения центроидов равняется скорости вращения отдельных звезд, входящих в их состав. В этом случае сила притяжения центром Галактики должна быть равна центробежной силе F , т. е.

$$F = \frac{\theta^2}{R}.$$

Можно еще предположить, что часть массы Галактики сосредоточена в ее центре, остальная же масса распределена равномерно в экваториальной плоскости Галактики. Таким образом, произвольная точка притягивается, во-первых, массой, сосредоточенной в центре Галактики, с силой, прямо пропорциональной квадрату расстояния, а во-вторых, массой Галактики, находящейся в экваториальной плоскости последней, с силой, прямо пропорциональной расстоянию от центра Галактики. Следовательно, равнодействующая сила F равна

$$F = F_1 + F_2 = \alpha R^{-2} + \beta R. \quad (70.3)$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \beta - 2\alpha R^{-3}. \quad (70.4)$$

Так как обе величины F и $\partial F/\partial R$ можно определить, зная постоянные Оорта, то, решая систему уравнений (70.3) и (70.4), находим величины α и β . Первая из этих величин дает нам массу, сосредоточенную в центре Галактики, а величина β позволяет определить массу остальной части Галактики, если использовать законы теоретической механики.

Приняв $A = +0''.0042/\text{год}$ и $B = -0''.0028/\text{год}$, получим массу ядра Галактики, равную $9,0 \cdot 10^{10}$ масс Солнца, масса же остальной части Галактики получается равной $4 \cdot 10^{10}$ масс Солнца.

Этим методом, хотя и не вполне точным, впервые в истории астрономии определена общая масса Галактики¹⁾.

Естественно предположить, что постоянные Оорта будут различны для звезд, центроиды которых движутся в Галактике неодинаково; так это и оказалось в действительности. Поэтому, если используют

¹⁾ Еще в 1927 г. Оорт в работе, ссылка на которую имеется на стр. 206, получил соотношение между постоянными вращения Галактики и некоторыми ее динамическими характеристиками.

постоянные Оорта без каких-либо оговорок, то обычно имеют ввиду средние величины этих постоянных для всех звезд.

71. Вращение местной системы. Как формулы [(64.4)—(64.6)], вытекающие из кинематической теории вращения звездной системы, так и формулы Оорта [(66.4)—(66.6)] позволяют определить некоторые параметры вращения в предположении, что это вращение существует; однако, согласие наблюдательных данных с этими формулами не является строгим доказательством существования вращения, тем более, оно не может быть использовано для определения центра вращения. В методе Камма центр вращения должен быть известен заранее (см. п. 65), формулы же Оорта позволяют определить центр вращения l_0 с точностью до $\pi/2$ (т. е. определить галактическую долготу, в которой лучевая скорость равна нулю), но при этом необходимо предположить, что нет расширения всей системы, следовательно, $\Pi = 0$, и что скорость вращения является только функцией расстояния, т. е. $\partial\Theta/\partial\vartheta = 0$. (Если знак постоянной A известен, то вместо четырех решений получаем два.) Среди четырех возможных решений выбираем значение l_0 , близкое к 330° , т. е. к тому направлению, в котором, согласно исследованиям пространственного распределения звезд, находится центр Галактики.

А. Минёр в 1930 г.¹⁾ обратил внимание на то, что наблюдаемые закономерности движения звезд можно объяснить также вращением ближайших к Солнцу звезд вокруг центра местной системы (см. п. 32), т. е. вокруг точки с галактической долготой, равной $l = 240^\circ = 330^\circ - \frac{\pi}{2}$.

Каждое неслучайное скопление звезд должно каким-то образом вращаться вокруг центра массы; поэтому в местной системе, которую трудно рассматривать как случайную временную концентрацию, можно предполагать наличие вращения звезд.

Впервые существование этого вращения обнаружил В. Дзевульский в 1938 г.²⁾ Исследуя исправленные за движение Солнца и эффект галактического вращения движения звезд типа A , он вычислил проекцию на галактическую плоскость средних скоростей в четырех точках и обнаружил явно выраженное местное вращение звезд (рис. 48).

Итак, звезды в окрестностях Солнца вращаются, во-первых, вокруг центра Галактики, а во-вторых, вокруг некоторого центра, расположенного вблизи центра местной системы. Естественно, возникает вопрос: как оба эти эффекта проявляются совместно и каким образом можно отделить одно вращение от другого? Метод Оорта в данном случае неприменим, так как направление на центр одного вращения практически перпендикулярно направлению на центр другого. Поэтому эффекты обоих вращений будут удовлетворять одной

¹⁾ *MN*, 90, 516 (1930).

²⁾ *Bull. de l'Obs. Astr. de Wilno*, I, № 21, 3 (1938).

и той же формуле с одинаковыми значениями l_0 и других постоянных, являющихся результатом наложения обоих вращений. Нужно, однако, помнить, что расстояние до центра местной системы равно приблизительно 100 пс, поэтому формулы Оорта неприменимы к звездам этой системы, находящимся на расстоянии порядка нескольких десятков парсек. В этом случае постоянные Оорта перестают быть постоянными.

На это уже давно было обращено внимание; постоянные Оорта, определенные по звездам на различных расстояниях от Солнца, систематически изменяются с изменением расстояния. Такую зависимость от расстояния величины l_0 обнаружил А. Минёр еще в 1930 г.¹⁾

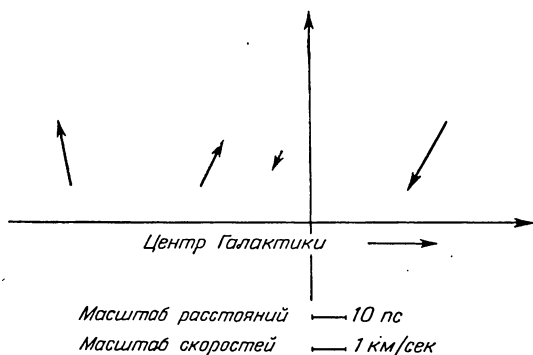


Рис. 48.

Еще более удивительную зависимость постоянных Оорта от расстояния звезд (величин l_1 и A') обнаружила в 1955 г. М. Карпович²⁾ при исследовании звезд ранних спектральных классов, которые, как известно, сильно концентрируются к центру местной системы. Для близких звезд, находящихся от Солнца на среднем расстоянии 109 пс, $A' = 14,3$ км/сек/кпс и $l_1 = 265^\circ$, тогда как для звезд, среднее расстояние которых составляет 546 пс, имеем

$$A' = +31,3 \text{ км/сек/кпс} \quad \text{и} \quad l_1 = 325^\circ.$$

В последнее время разработано несколько специальных методов исследования вращения местной системы³⁾. Установлено, что звезды с различными морфологическими характеристиками вращаются в местной системе по-разному; некоторые звезды, находящиеся даже вблизи ее центра, не обнаруживают никакого вращения, в то время, как

¹⁾ MN, 90, 789 (1930).

²⁾ Karpowicz M., Zonn W., *Acta Astronomica*, 5, 78 (1955).

³⁾ См., например, Schmidt H., *Veröff. der Universitäts Sternwarte zu Bonn*, № 35 (1949); Огородников К. Ф., *Уч. зап. ЛГУ, серия матем. наук.*, 22, 3 (1950); Шацова Р. Б., там же, стр. 113.

другие, например, яркие гиганты, расположенные на расстоянии нескольких сот парсек от центра местной системы, показывают явное вращение вокруг последнего, участвуя одновременно в общем вращении вокруг центра Галактики.

Вращение местной системы можно в первом приближении рассматривать, как вращение твердого тела с угловой скоростью около $1'',6$ в сто лет; это равносильно одному полному обороту за 60 млн. лет. Одновременно с этим местная система, как целое, совершает один полный оборот вокруг центра Галактики за 190 млн. лет.

Некоторые исследователи обнаружили небольшие изменения параметров эллипсоида скоростей звезд, находящихся вблизи центра местной системы по отношению к звездам, не принадлежащим к ней.

Итак, местная система, несомненно, является реальным объектом в нашей Галактике, отличающимся от звезд фона своей кинематикой. Однако, размеры ее пока еще не ясны. Некоторые исследователи отождествляют местную систему с одним из небольших звездных облаков, которые часто встречаются в нашей Галактике, другие же, как, например, Шмидт¹⁾, приходят к выводу, что диаметр местной системы достигает 2 *kpc* и что она обнаруживает спиральную структуру; таким образом, они считают Галактику двойной звездной системой, одним из компонентов которой является местная система. В настоящее время едва ли можно согласиться с такими предположениями, однако, у нас нет достаточных оснований для того, чтобы их опровергнуть.

¹⁾ *Veröf. der Universitäts Sternwarte zu Bonn*, № 35 (1949).

ВОПРОСЫ ЭВОЛЮЦИИ ЗВЕЗД

§ 16. Диаграмма спектр — светимость (Герцшпрунга — Рессела)

72. Наблюдательные данные. В звездной астрономии, как и во многих других естественных науках, имеющих дело с множеством объектов, необходимо ввести некоторую *систематику*, которая, прежде всего, помогла бы упорядочить имеющиеся наблюдательные данные. Научная ценность той или иной систематики в большой степени зависит от выбора признаков, на которых эта систематика основывается. Слишком формальный подход к этому вопросу не только не приближает нас к истине, но может даже в ряде случаев скрыть имеющиеся в наблюдательном материале закономерности и соотношения, в то время, как систематика, надлежащим образом учитывающая возможность существования различных соотношений, может привести нас к открытиям новых явлений и процессов эволюционного характера. Многочисленные доказательства этого положения имеются в других науках, например, в химии, биологии и геологии. Введение глубоко продуманной систематики сыграло очень существенную роль в развитии этих наук и в ряде случаев позволило правильно поставить многие эволюционные проблемы, например, проблему происхождения и эволюции жизни на Земле.

Естественно, что и астрономы, вводя систематику в свою науку, не ограничиваются только лишь формальным упорядочением наблюдательного материала, но стремятся также приблизиться к решению проблемы эволюции звезд, и это им, по крайней мере, частично удалось.

Вполне понятно, что наша систематика гораздо примитивнее, чем, например, систематика у биологов, по той простой причине, что мы располагаем весьма немногими наблюдательными данными. Данные же, полученные на основании различных теорий, не могут служить прочной основой какой-либо систематики вследствие их неуверенности и также потому, что такие данные часто имеют большие систематические ошибки, являющиеся следствием неизбежной односторонности большинства теорий. Всякая систематика должна как можно вернее представлять действительное положение вещей; она может служить основой различных теорий, но ни в коем случае не может из них вытекать.

Какими же наблюдательными данными о физическом состоянии звезд мы располагаем в настоящее время? Это, прежде всего, спектральный класс, являющийся в первом приближении однозначной функцией поверхностной температуры звезды, и абсолютная величина (визуальная, фотографическая или болометрическая). Все другие величины: масса, средняя плотность, химический состав и т. д. — известны для очень немногих звезд, и чаще всего они определяются теоретическим путем на основании некоторых упрощенных предположений, не всегда даже уместных; поэтому в настоящее время указанные величины не могут служить надежной основой систематики звезд.

Кроме рассмотренных величин, известны также положения звезд и их движения. Эти параметры, как это выяснилось лишь недавно, играют довольно существенную роль в систематике звезд, хотя долгое время на них не обращалось должного внимания. Поэтому первая систематика, введенная Герцшпрунгом и Ресселом, была основана лишь на двух параметрах, а именно: абсолютной величине и спектральном классе звезд. Это так называемая диаграмма Герцшпрунга—Рессела, которую часто называют также диаграммой спектр—светимость. Этим названием мы и будем пользоваться в дальнейшем. Диаграммы спектр—светимость для различных групп звезд значительно различаются между собой; так, например, диаграмма спектр—светимость для звезд в окрестностях Солнца (рис. 49) сильно отличается от соответствующей диаграммы для звезд, входящих в состав ядер галактик или в состав рассеянных (рис. 50) и шаровых (рис. 51) звездных скоплений.

Некоторые незначительные различия могут возникать в результате ошибок абсолютных величин звезд, зависящих в свою очередь от ошибок определения параллакса, которые могут быть значительными. Вызванная этими ошибками дисперсия абсолютных величин может довольно сильно влиять на распределение звезд на диаграмме спектр—светимость. В некоторых случаях эту дисперсию можно учесть с помощью методов математической статистики (один из этих методов излагается в дополнении 4) и получить „исправленную“ диаграмму спектр—светимость. Исправленная таким способом диаграмма спектр—светимость для звезд в окрестностях Солнца изображена на рис. 52. В этом случае абсолютные величины определялись по тригонометрическим параллаксам, средние ошибки которых известны; это позволяет учесть влияние указанных ошибок и вычислить реальную дисперсию абсолютных величин звезд на диаграмме спектр—светимость. На рис. 52 заштрихованы области, занятые звездами на исправленной диаграмме спектр—светимость, несплошная штриховка в горизонтальном направлении является следствием отсутствия непрерывности в спектральной классификации.

Изучение групп звезд, имеющих общее происхождение и одинаковый возраст, приводит к выводу, что дисперсия, соответствующая

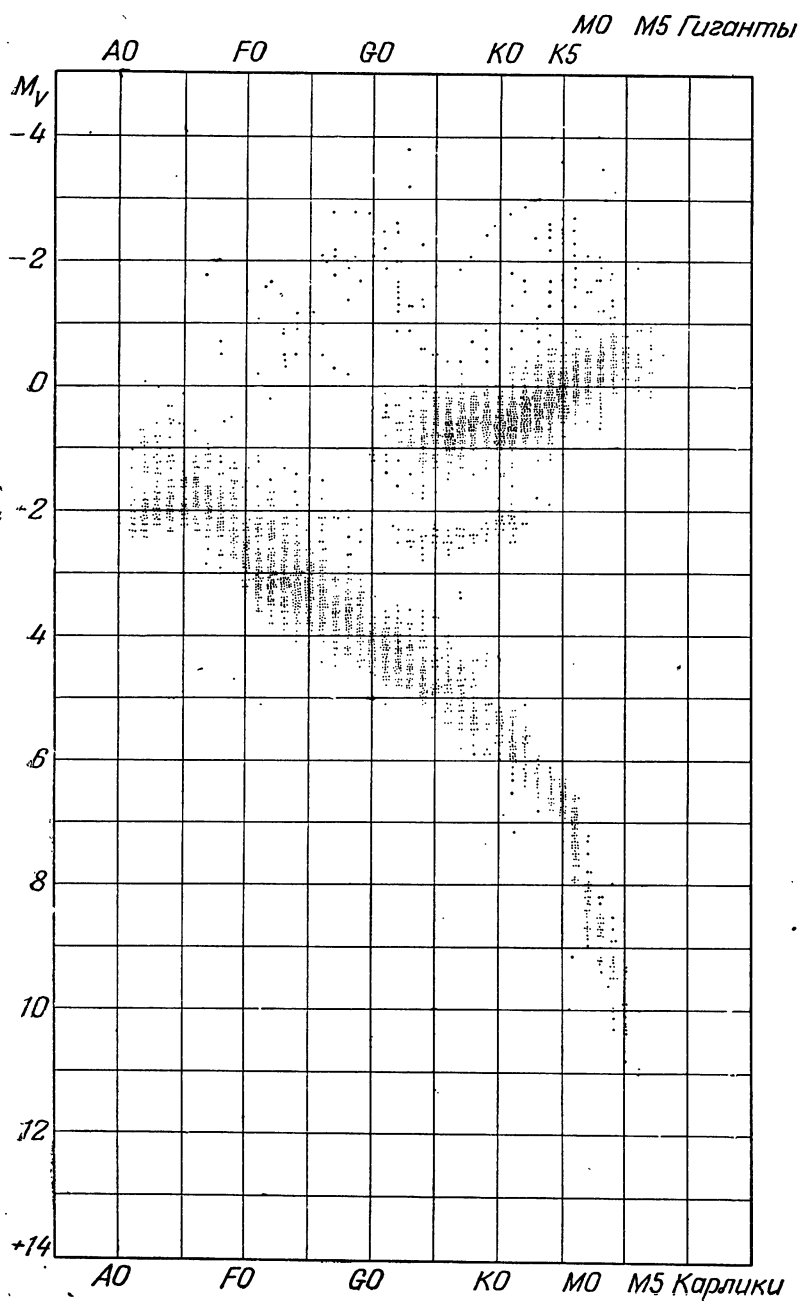


Рис. 49.

такой группе диаграммы спектр — светимость, очень невелика; в качестве примера можно привести диаграмму спектр — светимость звезд, принадлежащих к какому-нибудь рассеянному звездному скоплению, например, к Яслям (рис. 50)¹⁾. На этой диаграмме звезды располагаются почти точно вдоль некоторой кривой. Немногие звезды, находящиеся примерно на $0^m,75$ выше кривой, вероятнее

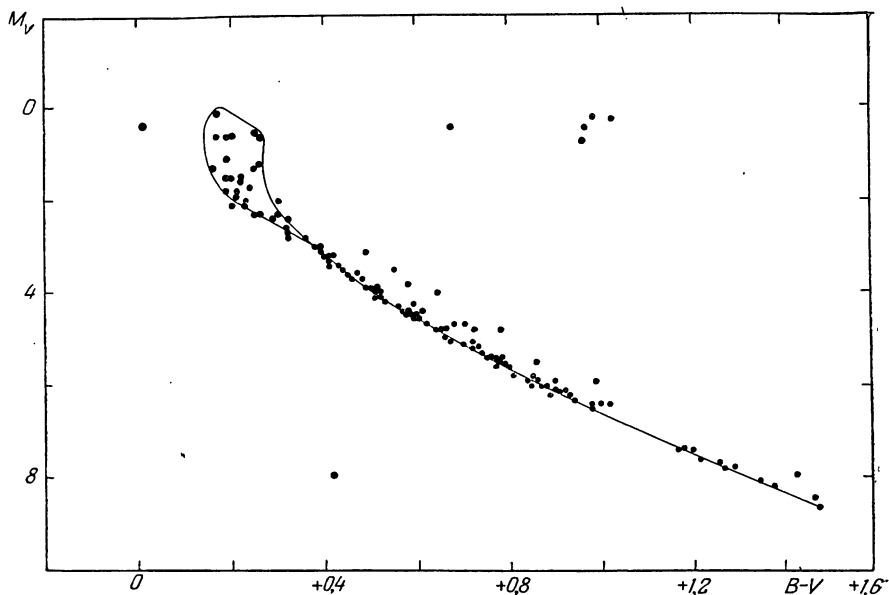


Рис. 50.

всего, являются двойными звездами, каждый из компонентов которых находился бы на кривой, но „фотометрическая“ сумма звездных величин двух одинаково ярких звезд больше звездной величины каждой из них на $0^m,75$, поэтому точки, соответствующие двойным звездам, находятся над кривой именно на таком расстоянии.

После открытия „линейных“ диаграмм спектр — светимость рассеянных звездных скоплений начались поиски отдельных последовательностей на диаграммах спектр — светимость для произвольно выбранных звезд, точнее говоря, поиски звезд, образующих некоторые кривые с учетом неизбежной дисперсии, вызванной ошибками наблюдений. В результате этих поисков было установлено, что диаграмма спектр — светимость для всех доступных нашим наблюдениям звезд в ближайших окрестностях Солнца (рис. 49) является

¹⁾ *ApJ.*, 120, 327 (1954); вместо спектральных классов на диаграмме отложены показатели цвета.

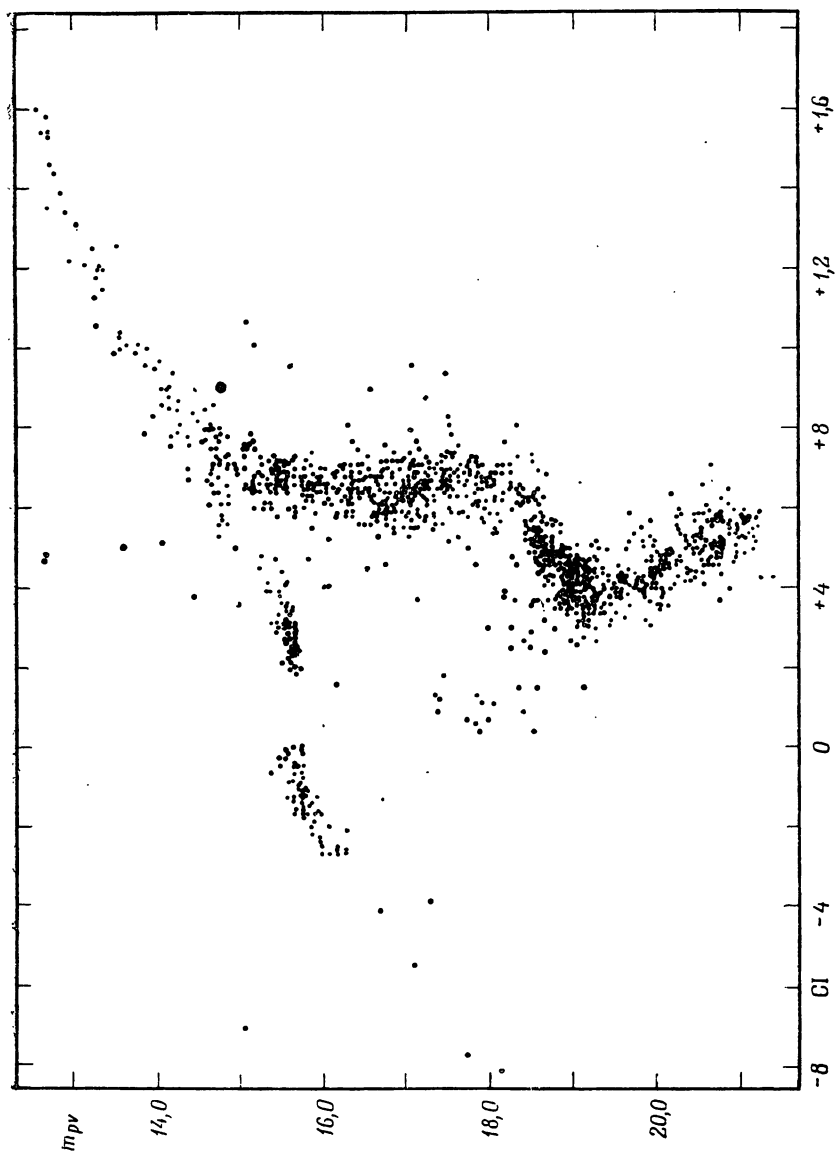


Рис. 51.

результатом наложения различных последовательностей звезд одинакового происхождения. Попытаемся сначала выяснить теоретический смысл последовательностей на диаграмме спектр — светимость, а затем вернемся к этому вопросу.

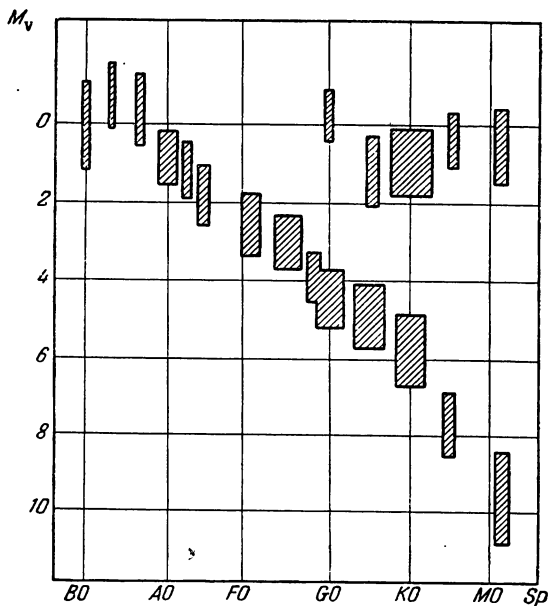


Рис. 52.

73. Теоретический смысл диаграммы спектр — светимость.

Прежде чем приступить к выяснению теоретического смысла диаграммы спектр — светимость, напомним читателям о широко известной в теоретической астрофизике теореме Фогта — Рассела, согласно которой *все параметры, определяющие физическое состояние звезды, находящейся в состоянии равновесия, зависят только лишь от массы звезды $\mathcal{M}$ и ее химического состава*, определяемого количественно при помощи среднего молекулярного веса μ вещества, из которого состоит звезда. Иначе говоря, из данной массы газа с определенным химическим составом можно построить только одну звезду с однозначно заданным внутренним строением, определяющим все физические параметры (абсолютная величина, поверхностная температура, распределение плотности и т. п.). Итак, все параметры, а, следовательно, и те, которые имеются на диаграмме спектр — светимость (абсолютная величина M и спектральный класс Sp), можно представить в виде

$$\begin{aligned} M &= M(\mathcal{M}, \mu), \\ Sp &= Sp(\mathcal{M}, \mu). \end{aligned} \quad (73.1)$$

Эту зависимость следует несколько уточнить, вводя относительное содержание водорода X , гелия Y и остальных элементов $Z = 1 - X - Y$. В этом уточнении мы не должны идти еще дальше, так как средний молекулярный вес более тяжелых элементов близок к 2 (средний молекулярный вес водорода $1/2$, гелия же $3/4$)¹⁾. Это заставляет нас отказаться от дальнейшего уточнения химического состава звезды, выделив в нем из всех элементов лишь водород и гелий.

Поэтому перепишем выражения (73.1) в виде

$$\begin{aligned} M &= M(\mathfrak{M}, X, Y), \\ S_p &= S_p(\mathfrak{M}, X, Y). \end{aligned} \quad (73.2)$$

Далее можно исключить массу звезды $\mathfrak{M}$; имеем

$$M = M(S_p, X, Y).$$

Следовательно, система уравнений (73.2) представляет собой некоторую кривую в системе координат (M, S_p) , т. е. на диаграмме спектр — светимость, при условии

$$\begin{aligned} &X = \text{const} \text{ и } Y = \text{const}, \\ \text{или} \quad &X = X(\mathfrak{M}), \text{ и } Y = Y(\mathfrak{M}). \end{aligned} \quad (73.3)$$

Таким образом, на диаграмме спектр — светимость вдоль некоторой кривой должны располагаться только те звезды, для которых или химический состав одинаков, или относительное содержание водорода и гелия является одинаковой функцией их массы [условие (73.3)].

Из этого, однако, не следует, что эволюция этих звезд должна происходить также вдоль этой „начальной“ кривой, так как при этом параметры, характеризующие физическое состояние звезды, не должны подчиняться условиям (73.3). Эволюционируя, звезды могут в каждый момент находиться на иной кривой или рассеиваться на диаграмме спектр — светимость.

Если предположить, что главным фактором эволюции звезды является убыль ее массы, а изменения химического состава очень незначительны и не играют при этом существенной роли, то на всех этапах эволюции звезды ее физические параметры будут удовлетворять условиям (73.3). Следовательно, звезды будут эволюционировать

¹⁾ Эти величины вычислены в предположении полной ионизации всех элементов внутри звезды. В таком случае средний молекулярный вес близок к атомному весу данного элемента, деленному на число электронов плюс единица, так как атомное ядро также следует принимать в расчет. Следовательно,

$$\mu \approx \frac{A}{z + 1}.$$

вдоль той кривой, на которой они возникают, т. е. вдоль „начальной“ кривой. Небольшие различия химического состава будут вызывать лишь незначительную дисперсию точек около этой кривой.

Эти два возможных пути эволюции звезд являются, одновременно, двумя различными подходами к вопросу эволюции в современной астрономии. Большинство западноевропейских астрономов считает главным фактором эволюции звезд изменение в их химическом составе, вызванное главным образом „сжиганием“ в недрах звезды водорода, точнее говоря, ядерного синтеза водорода в гелий и затем в более тяжелые элементы. Легко убедиться, используя данные теоретической астрофизики, что такие изменения должны приводить к увеличению светимости звезды. Следовательно, звезды должны перемещаться на диаграмме спектр—светимость снизу вверх; путь же их на этой диаграмме зависит, прежде всего, от того, является ли ядро звезды изолированным от внешних слоев или же имеет место перемешивание.

Во втором случае количество „топлива“ в такой звезде гораздо больше, чем в звезде с изолированным ядром, поэтому эволюционный путь звезд с изолированным ядром должен быть иным, чем путь звезд, в которых все время идет перемешивание. По расчетам многих астрофизиков в первом случае звезда, возникающая на главной последовательности, сначала некоторое время практически движется вверх вдоль главной последовательности; затем, когда в ядре звезды выгорит весь водород, наступает резкое изменение поведения звезды: звезда начинает быстро перемещаться в сторону красных гигантов, вычерчивает петлю, приближаясь к белым гигантам, а затем спускается к белым карликам. В этом периоде главным „топливом“ звезды является сначала гелий, потом еще более тяжелые элементы. Если в звезде все время происходит перемешивание вещества, то звезда передвигается вдоль главной последовательности, несколько уклоняясь от нее в сторону субгигантов.

Иначе подходят к вопросам эволюции те астрономы, которые убыль массы звезды в результате корпускулярного излучения считают главным фактором эволюции звезд. Это мнение основано, главным образом, на том, что в спектре многих молодых звезд обнаружены эмиссионные линии, контур которых явно свидетельствует о выбрасывании материи звездой. Кроме того, таким способом можно объяснить всем известный факт быстрого вращения звезд ранних спектральных классов по сравнению со звездами классов F и G , период вращения которых порядка нескольких десятков дней. Действительно, уменьшение вращательного момента звезды может быть только следствием выброса материи, т. е. корпускулярного излучения, поэтому указанный процесс следует считать доминирующим в вопросах эволюции. В результате корпускулярного излучения звезды перемещаются на диаграмме спектр—светимость сверху вниз вдоль главной последовательности, вопрос же эволюции красных гигантов

остается пока открытым, хотя и здесь выдвинуто много заслуживающих внимания гипотез.

Так можно кратко изложить современные взгляды на эволюцию звезд, оставляя в стороне подробное рассмотрение астрофизических вопросов, которое читатель найдет в специальной литературе¹⁾.

74. Диаграммы спектр — светимость звезд, принадлежащих к разным группам. Некоторые предположения относительно эволюции звезд можно сделать, изучая диаграммы спектр — светимость звезд, принадлежащих к определенным группам, прежде всего, звезд, входящих в рассеянные звездные скопления. Звездные скопления, по всей вероятности, эволюционируют одинаково и отличаются друг от друга только возрастом; звезды же, принадлежащие к одному и тому же скоплению, несомненно, имеют одинаковый возраст.

Обратим, прежде всего, внимание на то, что звезды рассеянного скопления, находящиеся на главной последовательности диаграммы спектр — светимость, располагаются почти точно вдоль некоторой кривой, причем наложение диаграмм спектр — светимость различных рассеянных скоплений дает такую же картину, а именно: все абсолютно слабые звезды располагаются вдоль одной кривой, представляющей главную последовательность, звезды же абсолютно яркие (гиганты и сверхгиганты) находятся в каждом скоплении на различных кривых. Все это видно на рис. 53, заимствованном из работы Джонсона²⁾. Номера кривых на этом рисунке относятся к следующим скоплениям: 1 — *NGC* 2362, 2 — Плеяды, 3 — *M* 39, 4 — скопление в Волосах Вероники, 5 — Ясли, 6 — *NGC* 752, 7 — *M* 67. Следует обратить внимание на то, что кривая 7 очень похожа на диаграмму спектр — светимость для шаровых скоплений. Некоторые исследователи относят скопление *M* 67 к последним, хотя во многом оно похоже на рассеянное скопление.

Можно по-разному интерпретировать результаты, приведенные на рис. 53. Согласно взглядам В. Г. Фесенкова, А. Г. Масевич и П. П. Паренаго, т. е. сторонников идеи корпускулярного излучения, звезды, находящиеся над главной последовательностью, являются самыми молодыми и, следовательно, еще нестационарными звездами, которые вследствие этого не подчиняются теореме Фогта — Рассела. Звезды эти быстро „падают“ на главную последовательность и потом медленно эволюционируют вдоль нее. Если принять эту точку зрения, то самым старым скоплением надо считать скопление *NGC* 2362 (№ 1 на рис. 53), а самым молодым — скопление *M* 67 (№ 7 на рис. 53).³⁾

¹⁾ Фесенков В. Г., *АЖ*, 26, 67 (1949); Фесенков В. Г., Корпускулярная радиация как фактор эволюции звезд и Солнца, М., 1952; Сафонов В. С., *АЖ*, 28, 244 (1951).

²⁾ *ApJ.*, 120, 330 (1954).

³⁾ Сторонники корпускулярной эволюции прилагали ее лишь к наиболее ярким звездам главной последовательности. — *Прим. ред.*

Сторонники же другой точки зрения предполагают, что звезды возникают на главной последовательности, а затем отходят от нее в сторону красных гигантов. В таком случае самым молодым будет скопление *NGC* 2362, обозначенное № 1, так как звезды этого скопления еще не успели перейти в область красных гигантов; а самым старым — скопление *M* 67 (№ 7), в котором большая часть звезд уже перешла в область красных гигантов.

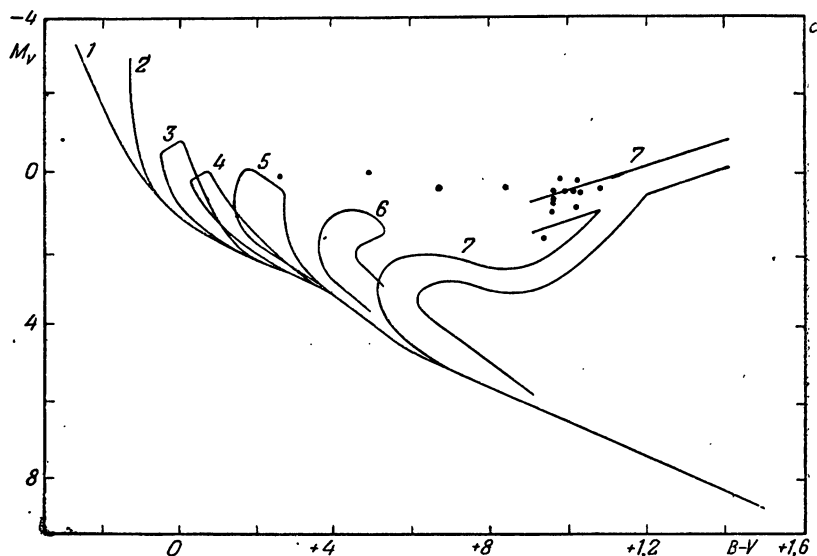


Рис. 53.

Вероятно, большинство читателей уже обратили внимание на то, что диаграмма спектр—светимость для звезд, принадлежащих к шаровым скоплениям, совсем не похожа на аналогичную диаграмму для рассеянных скоплений. Чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить между собой рис. 50 и 51. К этому обстоятельству мы вернемся в следующем параграфе.

§ 17. Звездное население и подсистемы

75. Население I и II типа. Бааде в 1944 г.¹⁾ получил диаграмму спектр—светимость для ярких звезд ядра спиральной галактики в Андромеде (*M* 31) и такой же галактики в Треугольнике и обнаружил, что верхняя часть этой диаграммы похожа на диаграмму спектр—светимость звезд в шаровых скоплениях (рис. 51) (нижней части указанной диаграммы до сих пор не удалось получить

¹⁾ *ApJ.*, 100, 137 (1944). = *MWC*, № 696, 1944.

из-за чисто технических трудностей). Этот факт Бааде связал с другим важным обстоятельством, известным раньше, а именно: с тем, что такая же точно диаграмма получается для так называемых „бегунов“, т. е. звезд, скорость которых относительно центроида обычных звезд превышает 50 км/сек.

Совсем другой вид имеет диаграмма для звезд в окрестностях Солнца; в этом случае диаграмма спектр—светимость очень похожа на аналогичную диаграмму для рассеянных звездных скоплений (см. рис. 50).

На основании полученных данных Бааде заключил, что все население Галактики можно разделить на две группы, различающиеся своими физическими характеристиками; это различие, прежде всего, проявляется в их неодинаковом расположении на диаграмме спектр—светимость. К I типу населения Бааде отнес население спиральных ветвей Галактики и, следовательно, также ближайших окрестностей Солнца, за исключением „бегунов“, попавших сюда случайно. К I типу населения принадлежат также звезды спектральных классов *O*, *B* и *A*, рассеянные звездные скопления, классические цефеиды, кроме того, межзвездная пыль и газ, находящиеся, как правило, в спиральных ветвях нашей Галактики.

Ко II типу населения Бааде причислил звезды, входящие в ядро Галактики, шаровые звездные скопления, „бегуны“ и переменные звезды типа *RR Lyr*, которые также являются „бегунами“. Диаграммы спектр—светимость обоих типов населения схематически изображены на рис. 54. Диаграмма для звезд I типа населения похожа на диаграмму спектр—светимость для ближайших к Солнцу звезд. Самыми яркими звездами на ней являются белые сверхгиганты. На диаграмме для звезд II типа населения самыми яркими являются красные сверхгиганты класса *K*, более яркие, чем принадлежащие к этому же типу населения белые звезды. Ко второму типу населения относятся также открытые Койпером и Паренго так называемые субкарлики, находящиеся под главной последовательностью (рис. 54).

Разделение звезд и других объектов на два типа населения, произведенное, в первую очередь, на основании их различного расположения на диаграмме спектр—светимость, т. е. различия чисто астрофизического, оказалось в то же время их разделением по пространственному распределению и движению в Галактике. Объекты,

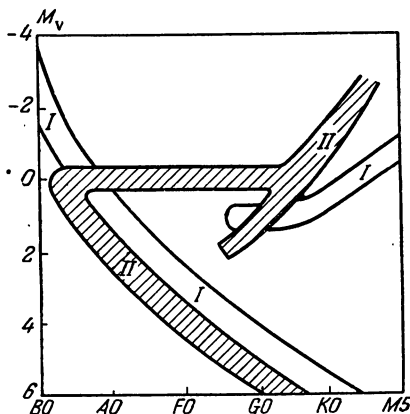


Рис. 54.

принадлежащие к I типу населения, вращаются вокруг галактического центра весьма правильно, поэтому их пекулярные движения относительно центроидов, к которым они принадлежат, не превышают нескольких десятков км/сек . Скорость ближайшего к Солнцу центроида этих звезд составляет примерно 250 км/сек . Все эти объекты сильно концентрируются к галактической плоскости, как в нашей Галактике, так и во всех других спиральных галактиках.

Совсем иначе распределены в пространстве объекты, принадлежащие ко II типу населения; поверхностями одинаковой плотности в этом случае являются сферы с центром в центре Галактики, причем плотность их очень быстро падает с удалением от последнего.

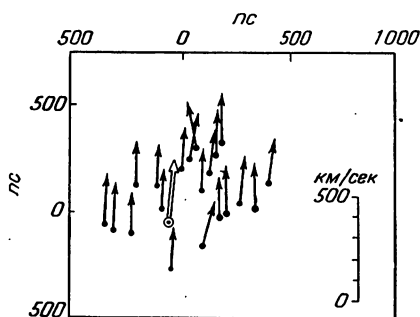


Рис. 55.

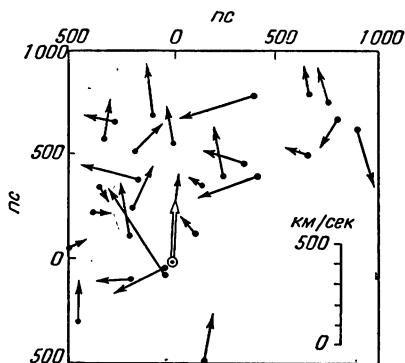


Рис. 56.

Если удалить из нашей Галактики все объекты, принадлежащие к I типу населения, и рассматривать только объекты II типа населения, то Галактика будет иметь вид сферической поверхности с быстро возрастающей плотностью в направлении к центру. Если же, наоборот, рассматривать только объекты I типа населения, то Галактика будет представляться нам совершенно плоским объектом, похожим на цилиндр с исчезающе малой высотой, радиус основания которого равняется радиусу Галактики ($13\,000 \text{ пс}$). Вероятно, этот цилиндр был бы в середине пустым, так как ядро Галактики состоит из объектов II типа населения. Все сказанное выше относится также и к другим спиральным галактикам.

Звезды II типа населения отличаются от звезд I типа населения большими пекулярными скоростями, достигающими нескольких сотен км/сек , а также сравнительно небольшими скоростями вращения центроидов. Кроме того, различные группы звезд II типа населения, находящиеся на одном и том же расстоянии от центра Галактики, имеют различные скорости вращения.

На рис. 55 и 56 изображены векторы индивидуальных галактоцентрических скоростей некоторых звезд, принадлежащих к I и II типам

населения соответственно, причем центр Галактики находится в положительном направлении оси x на расстоянии примерно 8000 пс от Солнца. Вектор скорости Солнца на обоих рисунках изображен двойной линией.

Ясно, что, наблюдая с Земли движения звезд I типа населения, мы обнаружим сравнительно небольшие разности векторов скоростей (пекулярные движения звезд), модули которых не превышают 60 км/сек; при изучении же движений звезд II типа населения можно встретиться с очень большими пекулярными скоростями, достигающими 500 км/сек. Поэтому-то звезды II типа населения были в свое время названы „бегунами“; тогда не было известно еще, что их скорости относительно центра Галактики не больше скоростей звезд, принадлежащих к I типу населения.

Большинство астрономов придерживается точки зрения, что средний возраст звезд I типа населения гораздо меньше возраста объектов II типа населения. Это предположение частично основано на оценке среднего возраста рассеянных скоплений, которые должны распасться в течение 10^9 лет ¹⁾ вследствие приливного действия галактического ядра. Физические характеристики звезд I типа населения очень похожи на характеристики звезд рассеянных скоплений, похожи также диаграммы спектр — светимость этих объектов, следовательно, естественным кажется предположение, что и возраст рассматриваемых объектов одного порядка с возрастом звезд рассеянных скоплений.

Средний возраст шаровых скоплений значительно больше, чем рассеянных, и, по всей вероятности, того же порядка, что и возраст Галактики. Время распада шаровых скоплений порядка 10^{12} — 10^{13} лет, что, по-видимому, значительно превышает возраст современного состояния Галактики. Так как физические свойства звезд, принадлежащих к II типу населения, очень похожи на свойства звезд шаровых скоплений и ядра Галактики, то естественно предположить, что возраст звезд II типа населения того же порядка, что и возраст ядра Галактики и шаровых скоплений, т. е. примерно порядка 10^{11} — 10^{12} лет.

76. Подсистемы звезд. Несколько иначе подошел к проблеме возраста и происхождения звезд Б. В. Кукаркин ²⁾, который своеобразно использовал и развил идею Линдблада о существовании в нашей Галактике различных звездных подсистем (см. п. 63). Некоторые выводы Б. В. Кукаркина и В. Бааде весьма похожи, но, тем не менее, их идеи различаются между собой, так же, как различаются принципиально их подходы к вопросу эволюции звезд.

¹⁾ Оценка возраста звездных скоплений дана в работах: Амбарцумян В. А., *Труды ЛГУ*, 19 (1938) и Chandrasekhar S., *ApJ*, 98, 34 (1943).

²⁾ *АЖ*; 24, № 5 (1947); см. также Кукаркин Б. В., Исследование строения и развития звездных систем на основе изучения переменных звезд, 1949.

Главная мысль Б. В. Кукаркина сводится к тому, чтобы обратить особое внимание на другие критерии, позволяющие разделить звезды, имеющие различное происхождение, в первую очередь, на пространственное распределение звезд и на их движение в Галактике, определяемое параметрами эллипсоида скоростей. По мнению Б. В. Кукаркина, эти два критерия являются самыми „прочными“, так как пространственное распределение звезд и их движение в Галактике изменяются с течением времени значительно медленнее, чем спектральный класс или абсолютная величина звезды. В самом деле, движение звезды в Галактике изменяется в среднем очень медленно вследствие исключительно малой вероятности близких прохождений двух звезд, т. е. таких сближений, во время которых можно было бы ожидать обмена энергией между звездами (см. п. 82). Поэтому параметры, определяющие движение какой-либо группы звезд, например, параметры эллипсоида скоростей (см. п. 56), следует считать наиболее „прочными“ величинами и, следовательно, наиболее надежными индикаторами возраста и происхождения различных групп звезд.

Все изложенное выше относится также и к пространственному распределению звезд, в частности, к степени концентрации звезд вблизи галактической плоскости. Изменение распределения звезд относительно галактической плоскости должно происходить очень медленно, значительно медленнее, чем, например, изменение физических характеристик звезды, которые в эволюционном масштабе времени изменяются, по мнению Б. В. Кукаркина, очень быстро.

Итак, Б. В. Кукаркин, основываясь на движении звезд и их пространственном распределении, разделил все звезды на подсистемы (под словом „система“ Б. В. Кукаркин понимает всю Галактику или же иные галактики).

К подсистемам, совокупность которых была названа *плоской составляющей* Галактики, Б. В. Кукаркин отнес большинство объектов I типа населения по классификации Бааде, т. е. такие объекты, поверхностями одинаковой пространственной плотности которых являются *плоскости*, параллельные галактической (отсюда и название плоские). Полуоси эллипсоидов скоростей этих объектов невелики, а скорость Солнца относительно центроидов звезд плоских подсистем составляет приблизительно 20 км/сек^1 .

Другой группой являются подсистемы, совокупность которых Б. В. Кукаркин назвал *сферической составляющей* Галактики. Поверхностями одинаковой пространственной плотности в этом случае являются сферические поверхности с центром в ядре Галактики. Полуоси эллипсоидов скоростей объектов, принадлежащих к сферическим подсистемам, как правило, велики, скорость Солнца относительно центро-

¹) В большинстве случаев движение Солнца к апексу определяется по отношению к ближайшим звездам, принадлежащим именно к плоским подсистемам; полученную в этом случае скорость часто называют стандартной.

идов этих объектов порядка 100 км/сек . Практически эти объекты тождественны с объектами, отнесенными ко II типу населения по классификации Бааде.

Кроме того, Б. В. Кукаркин выделяет еще промежуточные подсистемы, т. е. группы звезд, движение и пространственное распределение которых является чем-то промежуточным между теми же величинами объектов сферической и плоской составляющих. Поверхностями одинаковой пространственной плотности объектов этих подсистем являются эллипсоиды вращения, малые полуоси которых направлены к полюсу Галактики, а отношение малой полуоси к большой может изменяться при переходе от одной подсистемы к другой.

К плоским подсистемам относятся генетически различные группы звезд с различными физическими характеристиками, например, классические цефеиды, звезды спектральных классов O и B , рассеянные звездные скопления и т. д., т. е. звезды неодинакового происхождения. Чтобы, тем не менее, объединить их одним общим названием, так как все эти подсистемы обладают общими кинематическими свойствами и одинаково распределены в пространстве, Б. В. Кукаркин недавно предложил назвать их плоской составляющей Галактики. Аналогично к промежуточной, составляющей он отнес переменные типа Миры Кита, белые карлики, звезды типа S , долгопериодические переменные, а также неправильные переменные спектральных классов R и N ; к сферической составляющей — подсистему шаровых скоплений, субкарликов, подсистему переменных звезд типа $RR \text{ Lyr}$ и подсистему цефеид II типа населения, называемых также звездами типа $W \text{ Vir}$.

Следовательно, критериями, на основании которых можно ту или иную группу звезд отнести к соответствующей составляющей, являются, например, градиенты логарифма пространственной плотности в окрестностях Солнца в направлении центра Галактики и в направлении, перпендикулярном галактической плоскости. Согласно принятым обозначениям, запишем эти градиенты в виде

$$\frac{\partial \log D}{\partial R}, \quad \frac{\partial \log D}{\partial z};$$

при этом необходимо, чтобы обе эти величины относились к окрестностям Солнца.

Первый градиент близок к нулю для объектов плоской составляющей, но в этом случае модуль второго градиента велик. Для объектов сферической составляющей, наоборот, модуль первого градиента больше, чем для объектов плоской, а модуль второго — меньше, так что оба градиента в этом случае почти равны.

Так, например, для классических цефеид имеем

$$\frac{\partial \log D}{\partial R} = -0,11/\text{кпс}, \quad \frac{\partial \log D}{\partial z} = -9,86/\text{кпс};$$

для звезд типа *RR Ly*

$$\frac{\partial \log D}{\partial R} = -0,27/\text{кпс}, \quad \frac{\partial \log D}{\partial z} = -0,22/\text{кпс},$$

а для переменных типа *Миры Кита*, являющихся промежуточной подсистемой, имеем следующие величины:

$$\frac{\partial \log D}{\partial R} = -0,25/\text{кпс}; \quad \frac{\partial \log D}{\partial z} = -0,86/\text{кпс}.$$

На основании тех же соображений, которые изложены в предыдущем пункте, Б. В. Кукаркин пришел к выводу, что объекты, принадлежащие к сферической составляющей, гораздо старше, чем объекты плоской составляющей. Ясно, что здесь речь идет только о среднем возрасте без учета возможной дисперсии возрастов отдельных звезд.

Критическое сопоставление обеих классификаций — Кукаркина и Бааде — является довольно трудной задачей отчасти потому, что первая из них основана на принципах и методах звездной астрономии, в то время, как вторая является результатом чисто астрофизического подхода к вопросам эволюции звезд. Критерии классификации Кукаркина позволяют довольно быстро разделить группы звезд, имеющих различное происхождение и возраст, поэтому в настоящее время эта классификация, несомненно, более эффективна и удобна. Однако, она принципиально не дает возможности классифицировать отдельные звезды, так как все критерии Б. В. Кукаркина, в принципе, являются статистическими, т. е. относящимися, как правило, только к группам звезд. Критерии же Бааде применимы также к отдельным звездам, и во многих случаях астрономам удалось сформулировать индивидуальные критерии принадлежности звезд к I и II типам населения. В настоящее время эти критерии основаны на изучении спектров звезд с большой дисперсией¹⁾, однако, следует ожидать, что в будущем аналогичные критерии будут применены также и к спектрам с малой дисперсией; тогда у нас появится возможность классификации отдельных звезд в эволюционном смысле этого слова.

Обе классификации взаимно дополняют друг друга, так как различия в возрасте и происхождении звезд должны вызывать большие или меньшие различия в их строении, химическом составе и многих других величинах, определяющих физическое состояние звезды. К сожалению, эти различия не проявляются количественно в такой степени, чтобы их легко можно было обнаружить, в то время, как величины, положенные Б. В. Кукаркиным в основу его классификации, обнаруживаются легко и определяются весьма точно. Вот почему классификацию Б. В. Кукаркина следует, по нашему мнению, предпочесть во многих случаях классификации Бааде.

¹⁾ Довольно интересные результаты в этом направлении получены на Торунской обсерватории [см. *Bulletin Torún*, № 9 (1950)].

Таблица 15

ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ЗВЕЗД К ПОДСИСТЕМАМ
(по данным П. П. Паренаго)

	m	l	β ($лс$)	Число известных объектов (n)	Предпола- гаемое полное число объ- ектов (N)
<i>Подсистемы плоской составляющей</i>					
Долгопериодические цефеиды	0,11	9,86	44	500	30 000
Звезды типа <i>B</i>	?	9,5	46	10 ⁴	150 000
Рассеянные звездные скопления	0,11	8,2	53	500	33 000
Звезды типа <i>O</i>	0,10	7,5	58	200	6 500
Темные (пылевые) туманности	(0,16)	4,34	100	10 ⁴	10 ⁸
Сверхновые звезды	0,15 :	5,1 :	85:	5	—
<i>Подсистемы промежуточной составляющей</i>					
Новые звезды	0,22	2,39	182	100	10 ⁶
Переменные типа <i>RV Tau</i> . .	0,23	2,2	200	80	10 ⁴ —10 ⁵
Звезды типа <i>R, N</i> , неправильные переменные	(0)	4,3	100	130	13 000
Звезды типа <i>R, N</i> правильные переменные	(0)	2,5	175	45	4 500
Звезды типа <i>R, N</i> , постоянного блеска	(0)	1,3	335	260	16 000
Планетарные туманности . .	0,4 :	2,00	217	350	130 000
Звезды типа <i>S</i>	0,14	1,20	360	90	5 000
Белые карлики	0,36 :	(1,08)	(400)	100	5 · 10 ⁹
Долгопериодические переменные звезды	0,26 :	0,86	500	3000	1,3 · 10 ⁶
<i>Подсистемы сферической составляющей</i>					
Долгопериодические переменные с $150^{\circ} < P < 200^{\circ}$. .	(0,26)	0,22	2000	300	10 ⁵
Короткопериодические цефеиды	0,27	0,22	2000	3000	17 · 10 ⁴
Долгопериодические цефеиды типа <i>W Vir</i>	0,25	0,2 :	2000:	50	20 000
Субкарлики	0,27	(0,17)	(2600)	300	10 ¹¹
Шаровые звездные скопления	0,26	0,15	3000	100	250
Все звезды в среднем	(0,25)	1,15	380	10 ⁹	1,2 · 10 ¹¹

В табл. 15 приводятся необходимые для классификации по методу Б. В. Кукаркина данные для различных групп космических объектов. Эти данные, в основном, взяты из работы П. П. Паренаго, но в некоторых случаях они изменены в соответствии с более поздними исследованиями.

Обозначим градиенты логарифма плотности следующим образом: $\frac{\partial \log D}{\partial R} = -m$, $\frac{\partial \log D}{\partial z} = -l$. Зная величины m и l , П. П. Паренаго вычислил общее число различных объектов в Галактике следующим образом. Предположим, что градиенты логарифма плотности повсюду в Галактике сохраняют ту же величину, что и в окрестностях Солнца. В таком случае плотность объектов какой-либо подсистемы выразится формулой

$$D(R, z) = D(0, 0) \cdot 10^{-mR-lz},$$

где $D(0, 0)$ — плотность в центре Галактики. Предположение о том, что плотность является функцией только двух величин R и z , равносильно предположению о существовании в Галактике симметрии относительно оси z и галактической плоскости.

В этом случае число всех звезд, принадлежащих к данной подсистеме, должно быть равно

$$N = 2kD(0, 0) \int_0^{\infty} 10^{-lz} dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} 10^{-mR} dR = \frac{1,03kD(0, 0)}{m^2l},$$

где k — коэффициент, учитывающий некоторое изменение величин l и m в различных частях Галактики. Принимая во внимание только изменение величины m с расстоянием R , П. П. Паренаго нашел, что $k = 1,25$; следовательно,

$$N = \frac{1,3D(0, 0)}{m^2l}.$$

Величина $D(0, 0) = D_0 10^{7,2m}$, так как расстояние Солнца от центра Галактики равно $7,2 \text{ клс}$; D_0 — пространственная плотность изучаемых объектов в окрестностях Солнца.

77. Звездные ассоциации. Как уже упоминалось, исследование звездных скоплений оказало существенную помощь при определении возраста этих образований, произведенном на основании изучения пространственной плотности звезд, образующих данный тип скоплений. Еще большую роль сыграли в этом смысле открытые недавно В. А. Амбарцумяном звездные ассоциации — особый вид звездных скоплений, — пространственная плотность звезд в которых лишь немного больше плотности звезд „фона“. Ассоциации отличаются только большей парциальной плотностью звезд, принадлежащих к ним.

Различают два вида ассоциаций: ассоциации типа O , члены этих образований являются гигантами и сверхгигантами спектральных клас-

сов $O-B2$, и ассоциации типа T , состоящие из переменных звезд типа $T\text{ Tau}$ ($RW\text{ Aur}$) и красных карликов, в спектре которых наблюдаются эмиссионные линии.

Ядрами ассоциаций часто являются рассеянные звездные скопления, а также звездные цепочки и кратные системы типа Трапеции. Системой типа Трапеции принято называть кратные системы, расстояния между компонентами которых являются величинами одного порядка. Как звездные цепочки, так и системы типа Трапеции — все это весьма неустойчивые образования, поэтому наблюдаемые сейчас цепочки и кратные звезды типа Трапеции должны быть очень молодыми.

Пространственная плотность звезд, входящих в ассоциацию, настолько мала, что можно здесь совершенно пренебречь силами взаимного притяжения; при этом предположении легко вычислить среднее время их существования.

Для этого воспользуемся формулой Оорта (67.7), переместив наблюдателя из Солнца в центр ассоциации. Пусть ρ — расстояние звезды от центра ассоциации, l — ее галактическая долгота, l_0 — галактическая долгота центра Галактики (направление от центра ассоциации к центру Галактики). Наблюдаемая лучевая скорость $V_r = \frac{d\rho}{dt}$, следовательно,

$$\frac{d\rho}{dt} = A\rho \sin 2(l - l_0).$$

Интегрируя это уравнение и подставляя два момента времени t_1 и t_2 , получим

$$\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = A(t_2 - t_1) \sin 2(l - l_0).$$

Наибольшее значение ρ_2/ρ_1 соответствует $l - l_0 = 45^\circ$. Приняв значение $A = 20 \text{ км/сек/кпс} = 6,5 \cdot 10^{-16} \text{ сек}^{-1}$, соответствующее ближайшим окрестностям Солнца, приходим к выводу, что удвоение размеров ассоциации, находящейся в галактической плоскости, должно иметь место через

$$t_2 - t_1 = \frac{\ln 2}{6,5 \cdot 10^{-16}} = 3 \cdot 10^7 \text{ лет.}$$

Таким образом мы получили верхнюю границу возраста ассоциаций, причем их действительный возраст должен быть значительно меньше. Действительно, среди многих известных ассоциаций нет ни одной, сильно вытянутой в каком-нибудь направлении. Это свидетельствует в пользу того, что звезды в ассоциациях движутся с большими скоростями, направленными радиально от центра ассоциации, следовательно, распад ассоциаций происходит, видимо, вследствие этого движения звезд, поэтому их средний возраст должен быть значительно меньше, чем $3 \cdot 10^7$ лет.

Этот вывод удалось в некоторых случаях проверить непосредственно. Блау в 1952 г., исследуя собственные движения звезд в ассоциации Персей II, убедился в существовании „центробежных“ скоростей звезд, причем эти скорости оказались в первом приближении пропорциональными расстоянию звезд от центра ассоциации. Для этой ассоциации Блау нашел следующее значение коэффициента пропорциональности:

$$0'',0027 \pm 0'',0004 \text{ на } 1^\circ \text{ в год},$$

что соответствует линейной скорости приблизительно 10 км/сек на 1° .

Исследование собственных движений звезд в ассоциации Цефей II, проведенное Б. Е. Маркаряном, приводит к следующему значению коэффициента пропорциональности:

$$0'',00079 \pm 0'',00039 \text{ на } 1^\circ \text{ в год}.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что такого рода систематические движения, т. е. движения, направленные от центра вдоль радиуса вектора, обнаружены у звезд некоторых рассеянных скоплений. Ниже приводятся результаты изучения этих скоплений и возрасты их, вычисленные в предположении, что в начальный момент расстояния всех рассматриваемых звезд от центра скопления равнялись нулю. При таком предположении возраст равен обратной величине скорости, выраженной в соответствующих единицах. Во всех случаях получаются величины порядка 10^6 лет (см. табл. 16).

Таблица 16

	Скорость (на 1° в год)	Время существования (в годах)	Число известных звезд
Плеяды	$0'',000\ 0240 \pm 0'',000\ 0084$	$2,5 \cdot 10^6$	280
IC 2602	$0'',000\ 21 \pm 0'',000\ 075$	$3 \cdot 10^5$	15
α Персея	$0'',000\ 0078 \pm 0'',000\ 0042$	$8 \cdot 10^6$	160

Большой интерес представляют упрощенные вычисления, проведенные В. А. Амбарцумяном, числа звезд в нашей Галактике, поставляемых в единицу времени звездными ассоциациями. Эти вычисления показывают, что распад ассоциаций является главным, если не единственным, источником возникновения звезд, принадлежащих в дальнейшем к плоской составляющей нашей Галактики.

В своих расчетах В. А. Амбарцумян предположил, что население плоской составляющей Галактики находится в состоянии „равновесия“. Точнее говоря, число объектов, уходящих из ассоциации в единицу времени, равно числу звезд, возраст которых превышает средний возраст звезд плоской составляющей, т. е. 10^9 лет. При таком предположении число звезд на различных этапах эволюции пропорцио-

нально продолжительности пребывания звезды в данной стадии. В первой стадии эволюции звезда является членом ассоциации, и в этом состоянии она находится 10^6 лет.

Сколько же звезд в Галактике находится в данной стадии? В настоящее время известно 20 ассоциаций, расположенных на расстояниях, меньших или равных 2 *кпс* от Солнца. Так как ассоциации принадлежат к плоской составляющей Галактики, то число их пропорционально квадрату расстояния; следовательно, число всех ассоциаций в Галактике равно $20 \times (14:2)^2$, т. е. порядка 10^3 . По расчетам В. А. Амбарцумяна среднее число объектов в каждой ассоциации порядка 10^3 ; таким образом, 10^6 звезд в Галактике являются членами ассоциаций.

Число звезд, принадлежащих к плоской составляющей Галактики, равно 10^8 — 10^9 , отношение же этого числа к числу звезд, входящих в ассоциации, порядка 10^2 — 10^3 , т. е. равно отношению среднего возраста звезды ко времени ее пребывания в ассоциации. Это согласие мы считаем подтверждением правильности нашего предположения, что все звезды плоской составляющей возникают в ассоциациях.

В. А. Амбарцумян и Б. В. Кукаркин считают *T*-ассоциации главными поставщиками звезд промежуточной составляющей. Вычисления, аналогичные приведенным выше, но относящиеся к звездам промежуточной составляющей и членам *T*-ассоциаций, убеждают нас в правдоподобности такого предположения. Следует принять, что массы звезд, возникающих в *T*-ассоциациях, сравнительно невелики, следовательно, они более подвержены диссипирующему влиянию внешних сил. „Подвижность“ этих звезд велика, поэтому они могут гораздо дальше отходить от галактической плоскости, чем члены *O*-ассоциаций.

П. П. Паренаго в своей интересной работе об ассоциациях в области большой туманности в Орионе ¹⁾ привел очень веский аргумент в пользу только что рассмотренной гипотезы. Он показал, что в изучаемой области находится много *O*- и *T*-ассоциаций. Полученная им диаграмма спектр — светимость звезд, принадлежащих к этим ассоциациям, изображена на рис. 57; кружками отмечены переменные звезды, точками — звезды постоянного блеска, причем большими точками изображены звезды с известными спектрами, а малыми — такие звезды, положение которых на диаграмме спектр — светимость определено по их показателям цвета, так как спектры этих звезд неизвестны.

Суммарная диаграмма (рис. 57) явно свидетельствует в пользу существования ассоциаций двух различных типов, а именно: *O*-ассоциаций, занимающих левый верхний угол диаграммы, и *T*-ассоциаций, находящихся в правом нижнем углу. Отсутствие непрерывности между этими двумя группами доказывает справедливость высказанного предположения о том, что эволюция звезд, возникших

¹⁾ *Труды ГАИШ*, 25 (1954).

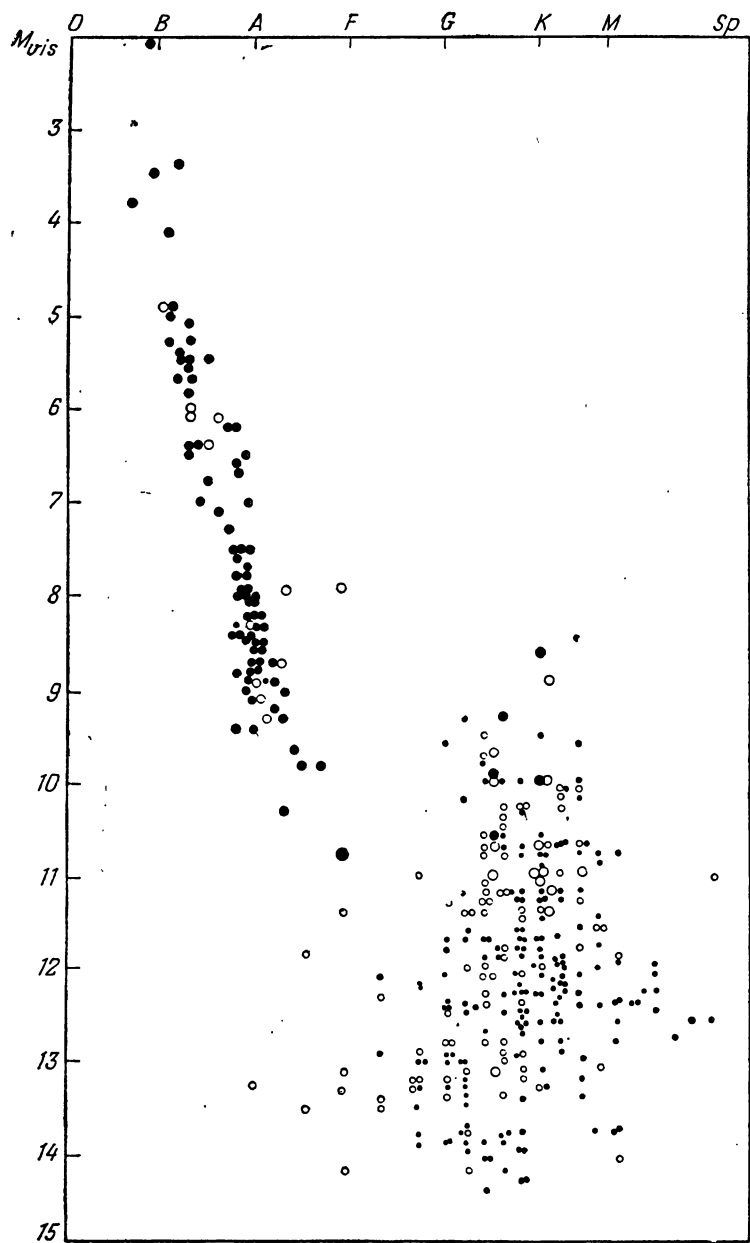


Рис. 57.

в O -ассоциациях, заканчивается в спектральном классе F , а звезды, возникшие в T -ассоциациях, являются субгигантами спектральных классов G или K и находятся над главной последовательностью; затем они „падают“ на главную последовательность, и их эволюция заканчивается на главной последовательности в спектральном классе M или же еще более позднем, не известном нам пока вследствие невозможности наблюдения спектров этих звезд.

Это предположение заслуживает большого доверия также и потому, что оно хорошо согласуется с рядом других фактов, обнаруженных П. П. Паренаго ¹⁾.

Изучая кинематические характеристики звезд главной последовательности, П. П. Паренаго обнаружил резкое изменение этих величин у звезд спектрального класса F , являющегося граничным между звездами, возникающими в O - и T -ассоциациях. Все сказанное выше графически изображено на рис. 58, взятом из работы Паренаго ²⁾. На этом рисунке показаны зависимости между спектральными классами звезд главной последовательности и следующими величинами: $V_{\odot}$ — скорость Солнца относительно центроида ближайших звезд данного спектрального класса, L и B — галактическая долгота и широта апекса, L_V — галактическая долгота вертекса и α_1 , α_2 и α_3 — три полуоси эллипсоида скоростей. Нетрудно заметить, что между классами F и G всюду имеет место „скачок“, указывающий на то, что рассматриваемые объекты следует разделить на две отдельные группы ³⁾. Необходимо обратить внимание также на то, что субгиганты, обозначенные на рис. 58 кружками, обладают теми же самыми кинематическими характеристиками, что и звезды главной последовательности тех же спектральных классов.

Неясной остается проблема так называемых „протозвезд“, т. е. объектов, материнских по отношению к ассоциациям. По мнению В. А. Амбарцумяна, этими объектами являются „глобулы“, т. е. небольшие круглые темные туманности, наблюдаемые только лишь на фоне больших светлых туманностей; поглощение в этих туманностях в среднем составляет около 5^m ; отсюда можно сразу заключить, что глобулы обладают сравнительно большими массами.

Иного мнения придерживается Эпик, который считает, что ассоциации возникают в результате взрывов, происходящих в сверхновых звездах, окруженных межзвездной материей. При взрыве массы газов, быстро удаляющиеся от звезды, встречают на своем пути межзвездную материю и постепенно сжимают ее, образуя вокруг сверхновой

¹⁾ АЖ, 27, 150 (1950).

²⁾ То же.

³⁾ Зависимости масса — светимость и масса — радиус для звезд главной последовательности, согласно исследованию П. П. Паренаго и А. Г. Масевич (1950), также испытывают разрыв в начале спектрального класса G . — Прим. ред. :

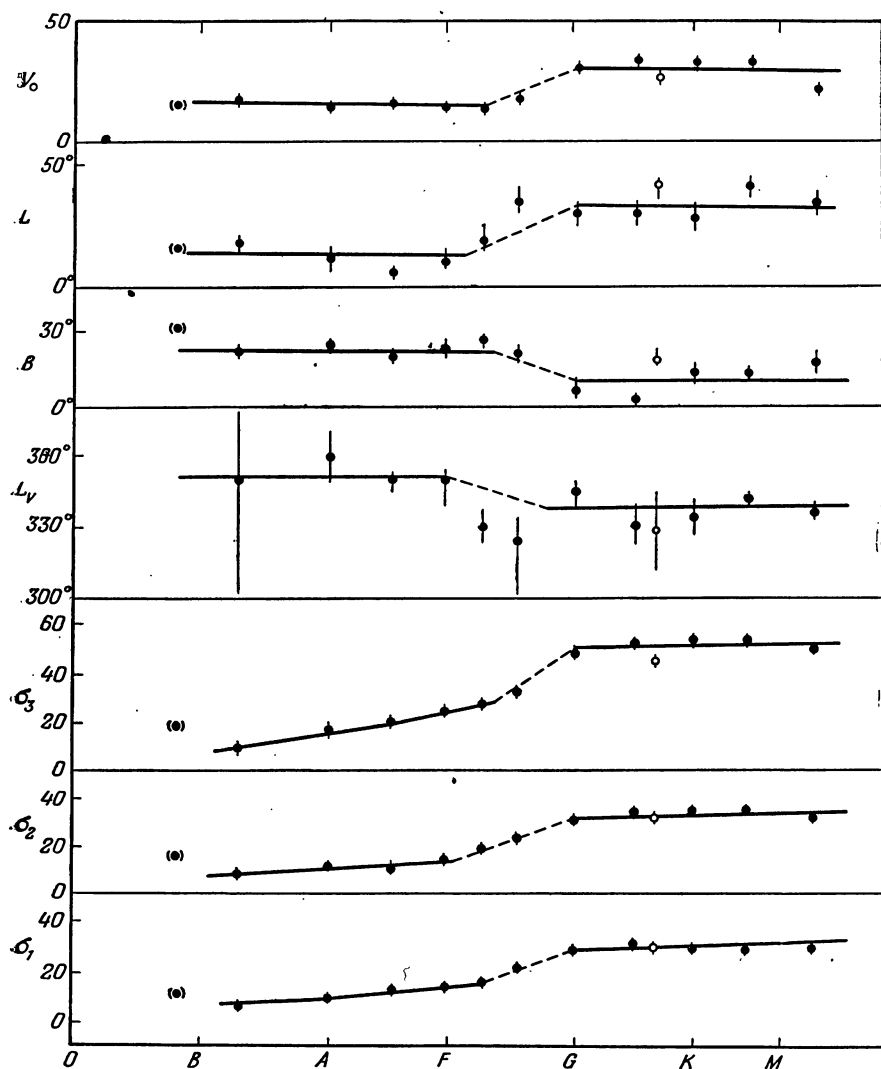


Рис. 58.

сферическое кольцо материи. Плотность материи в этом кольце быстро увеличивается и вскоре достигает такого состояния, при котором в различных частях кольца начинают происходить ядерные реакции; таким образом, эти случайные сгущения становятся звездами, образующими вначале сферическое кольцо и быстро удаляющимися от его центра, — короче говоря, появляется ассоциация.

Скорость удаления звезд должна быть гораздо меньше начальной скорости выброса газов, достигающей у сверхновых нескольких десятков тысяч км/сек, так как большая часть кинетической энергии газов, выброшенных сверхновой, утрачивается на сжатие межзвездной материи вокруг нее; эта „остаточная“ скорость все же настолько велика, что приводит ассоциацию к быстрому распаду, как это предвидел В. А. Амбарцумян.

ДИНАМИКА ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

§ 18. Общие сведения

78. Введение. Динамика звездных систем, или, короче, звездная динамика, занимается изучением сил, действующих в звездных системах. Каждое распределение звезд и других объектов в пространстве однозначно определяет те силы, которым подчинены движения звезд в данной звездной системе. Движения звезд, в свою очередь, изменяют пространственное распределение звезд в рассматриваемой системе. Поэтому звездную динамику можно считать теоретической частью звездной астрономии, дающей возможность синтеза данных, касающихся распределения звезд и их движений. Если существует достаточно обоснованная теория, то некоторые недостающие наблюдательные данные, касающиеся, например, распределения звезд, можно заменить результатами, полученными на основании изучения движений этих звезд, или наоборот.

Существует другая точка зрения, согласно которой звездная динамика является лишь теоретическим дополнением кинематики звезд. Эту точку зрения можно объяснить тем, что в настоящее время наши теоретические данные о пространственном распределении звезд, полученные на основании их движений, еще настолько ограничены, что часто роль звездной динамики на практике сводится лишь к теоретическому истолкованию наблюдаемого распределения скоростей звезд. Однако, в будущем границы применения звездной динамики будут несомненно шире; даже и сейчас можно, например, оценить довольно грубо массу невидимого ядра Галактики (см. п. 70), основываясь на очень упрощенных предположениях.

Так как в последнее время в астрономии все большую роль начинает играть межзвездная материя, то следовало бы динамику этой материи также включить в звездную динамику. Однако, мы этого не сделали потому, что авторы первых работ в указанной области пользуются, главным образом, методами магнитной гидродинамики, очень далекими от методов, применяемых в звездной динамике, и касающимися физики отдельных объектов, а этим занимается, в основном, астрофизика.

В проблемах звездной динамики мы имеем дело с такими большими расстояниями, что форма звезд не играет никакой роли; так

как средняя плотность материи очень мала, а средние скорости звезд также невелики, то вследствие этого нет необходимости вводить релятивистские поправки в соответствующие уравнения. Требуемая точность решений также мала по сравнению, например, с классическими проблемами небесной механики. Все это приводит нас к выводу, что звездная динамика, в сущности, сводится к классической ньютоновской проблеме n точек, которая в конечном виде неразрешима (см. дополнение 2). Правда, в отдельных случаях можно получить методами качественной теории дифференциальных уравнений некоторые интересные результаты только из самой формы системы уравнений, не имеющих решения¹⁾. Особенно полезными здесь могут быть методы так называемой общей теории динамических систем, являющиеся результатом применения некоторых разделов топологии. Однако, такого рода заключения обычно не дают нам числовых результатов, необходимых при изучении конкретных звездных систем, и потому имеют лишь чисто теоретическое значение.

Следует заметить, что если бы даже было возможным точное теоретическое решение проблемы n тел, то все же для получения конкретных результатов надо было бы подставить в соответствующие общие формулы начальные скорости и положения *всех* звезд в рассматриваемой системе (например, в Галактике). Получить эти данные невозможно как по чисто инструментальным причинам, так и потому, что число объектов в звездных системах обычно очень велико. Кроме того, чтобы хоть немного ориентироваться в результатах, относящихся к каждой звезде отдельно, следовало бы соединять их в группы и, в конце концов, вводить статистические методы исследований.

В начале этого века собранные наблюдательные данные были настолько обширны, что это заставило астрономов заняться поисками непосредственных статистических методов решения проблем звездной динамики, при этом они, прежде всего, пробовали использовать идею Кельвина, который предлагал изучать совокупность звезд, движущихся в различных направлениях, теми же методами, что и совокупность молекул газа, и применять к ним методы статистической механики.

Сначала многим казалось, что совокупность звезд можно действительно формально трактовать как „звездный газ“, отличающийся от настоящих газов только численными значениями параметров. Однако, вскоре было установлено, что многие свойства „звездного газа“ принципиально отличаются от свойств обыкновенных газов. Во-первых, в „звездном газе“ нет соударений частиц и, следовательно, в нем не действует закон равнораспределения энергии. Во-вторых, все теории рассматривают газы в замкнутых сосудах, в то время, как в звездных системах нет никаких стенок; кроме того, звездные системы часто

¹⁾ Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2, М., 1949.

нельзя рассматривать даже как изолированные в пространстве, потому что вследствие низкой плотности „газов“ диффузия наступает в них почти моментально (в масштабе времени, зависящем от размеров системы). В-третьих, между молекулами газа действуют силы, убывающие с расстоянием гораздо быстрее, чем силы тяготения, которыми в этом случае практически можно пренебречь. В звездных же системах действуют исключительно силы тяготения, убывающие с расстоянием довольно медленно. Так, например, потенциальную энергию газа можно считать величиной аддитивной, потому что в газах не надо учитывать силы притяжения между двумя соседними объемами газа; там рассматриваются только межмолекулярные силы, действующие в каждом объеме. Следовательно, общая потенциальная энергия обоих объемов, принятых за одно целое, равна сумме энергий каждого объема отдельно. В звездных же системах общая потенциальная энергия двух частей системы не будет равна сумме энергий каждой из частей, потому что в этом случае нужно еще учесть гравитационные силы, вызванные притяжением звезд одной системы звездами другой.

Поэтому звездная динамика, опираясь на некоторые идеи термодинамики, должна была все же создать собственные методы. При этом оказалось, что, основываясь на многих чисто статистических данных, можно все же получить некоторые сведения об орбитах отдельных звезд. В таких исследованиях обычно применяются методы, аналогичные методам небесной механики планетной системы.

79. Регулярные и иррегулярные силы. Изучение зависимости между движениями звезд и их положениями в звездных системах усложняется из-за большого числа входящих в них звезд. Тысячи, миллионы и миллиарды точек (размерами звезды можно пренебречь) составляют очень сложное гравитационное поле, которое изменяется со временем вследствие движения звезд. Поэтому точное выражение потенциала системы при помощи какой-либо простой функции, к которой можно было бы применить методы математического анализа, является практически невыполнимой задачей. Однако, *общая форма* звездных систем (галактик, звездных скоплений) может или оказаться постоянной, или изменяться со временем очень медленно и притом изменяться правильно.

Поэтому во многих случаях при изучении какой-либо звездной системы можно забыть о существовании отдельных звезд, принять некоторую „выравненную“ (сглаженную) форму гравитационного поля и рассматривать движение отдельной звезды в нем так, как мы в электродинамике рассматриваем движение пробного заряда в электростатическом поле. Или же, решая обратную задачу, можно получить некоторые выводы относительно этого сглаженного поля на основании движения одной или нескольких выбранных звезд. Однако, такой путь может привести к ошибочным результатам.

Реальное движение звезды в данной системе будет похоже на ее движение в сглаженном поле только в том случае, если путь звезды расположен далеко от всех других соседних звезд. Если же звезда приближается к одной из соседних звезд, то ее движение может сильно измениться по сравнению со „сглаженным“ движением, может даже случиться, что сила притяжения одной звезды будет превышать действие гравитационных сил всей системы.

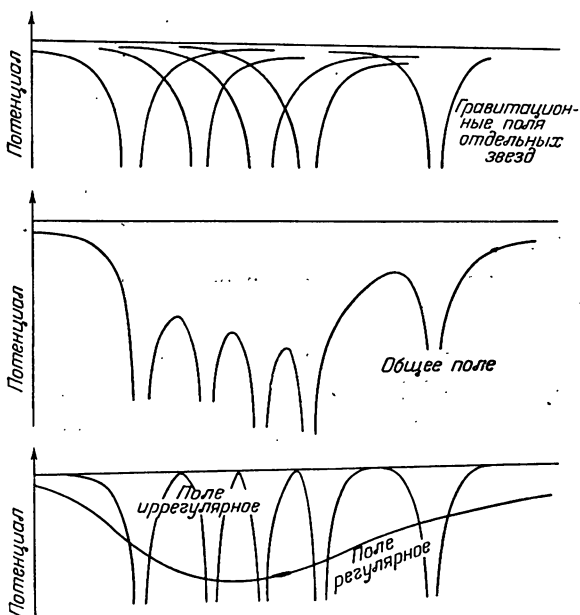


Рис. 59.

Энергия звезды, движущейся в сглаженном гравитационном поле, должна быть постоянна или же правильно изменяться в зависимости от изменения поля; в действительности же близкие прохождения звезд могут приводить к обмену энергией между встречающимися звездами.

В динамике звездных систем при изучении движений звезд принято гравитационное поле раскладывать на две составляющие: на *регулярную*, которая медленно изменяется во времени и пространстве и которую поэтому можно представить в виде некоторой математической функции, и на *иррегулярную*, являющуюся разностью между действительным и сглаженным полями. Общая схема выделения указанных составляющих дана на рис. 59.

Силы, происходящие от регулярного поля, называются *регулярными силами*, а вызванное ими движение — *регулярным*; такого типа

силы и движение можно изучать точными методами. Аналогично силы и движение, вызванные существованием иррегулярных полей, называются *иррегулярными силами* и *иррегулярным движением*; эти движения поддаются лишь изучению методами статистики ¹⁾.

Разделение гравитационного поля на регулярную и иррегулярную составляющие довольно произвольно, и нет никаких правил, позволяющих нам относить какую-либо нерегулярность гравитационного поля к одной из двух его составляющих. В принципе можно рассматривать все поле как регулярную составляющую, так, например, мы поступим во вступительных рассуждениях в § 20. Обычно решающим моментом является здесь практическая возможность применения в данной системе тех или иных методов. Иногда одну и ту же проблему можно решить двумя путями, т. е. предполагая, что все силы, действующие в данной системе или иррегулярны, или регулярны. Так, например, теорию шаровых скоплений можно принципиально получить в предположении действия в них исключительно иррегулярных сил. Однако, решение основного уравнения динамики звездных систем в случае существования только регулярных сил и потенциала с осевой симметрией оказывается также применимым к теории шаровых скоплений (см. п. 99).

В системах с большой пространственной плотностью движение звезд зависит, главным образом, от иррегулярных сил. Поэтому динамика звездных скоплений основывается на теории иррегулярных сил. Наоборот, основные выводы динамики галактик основаны на рассмотрении регулярных сил, и во многих случаях иррегулярными силами можно пренебречь.

Изучая иррегулярные силы, мы отказываемся от учета многих закономерностей движений и пространственного распределения звезд, предполагая, чаще всего, что направления и скорости движения звезд являются случайными величинами.

Методы изучения регулярных и иррегулярных сил, строго говоря, различаются между собой даже и в тех случаях, когда они применяются к одним и тем же объектам; поэтому мы рассмотрим их отдельно.

§ 19. Иррегулярные силы

80. Сближения звезд. Обмен энергией молекул в газе происходит во время их соударения. В звездных системах соударения звезд исключительно редки; кроме того, эти соударения неупруги, так как при них происходит превращение механической энергии в тепловую и в другие виды энергии. Таким образом, звездная динамика не занимается изучением этих явлений, тем более, что это требует знания внутреннего строения звезд.

¹⁾ Понятие о регулярных и иррегулярных силах впервые ввел Амбарцумян В. А. — *Прим. ред.*

Таковую же роль, какую в газах играют соударения молекул, в звездных системах играют близкие прохождения звезд. Под этим словом мы понимаем все случаи таких сближений звезд, при которых может наступить обмен энергией. Трудно установить здесь точную границу между близкими и далекими прохождениями звезд, так как каждая пара звезд оказывает влияние на движение каждой из звезд пары, и, вообще говоря, эти звезды обмениваются энергиями. Установление максимального расстояния близких прохождений является поэтому несколько неопределенным, равно как и установление разделения на регулярные и иррегулярные силы.

Рассмотрим сближение двух звезд, которые обозначим A и B (рис. 60). Пусть масса первой из них будет M_0 , а второй — M . Систему координат свяжем со звездой A . Звезда B приходит из бесконечности и после сближения со звездой A удаляется в бесконечность. Если пренебречь сближениями с другими звездами, то относительная орбита звезды B должна быть ветвью гиперболы, в фокусе которой находится звезда A . Поместим начало координат O в точке пересечения асимптот этой гиперболы, а ось x направим по прямой OA . Вследствие симметрии гиперболы относительно оси x действие составляющей силы притяжения в направлении оси y не вызывает никаких изменений скорости до и после сближения звезд, поэтому будем рассматривать только составляющую силы притяжения в направлении оси x .

В данном случае движение подчиняется интегралу площадей

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = h,$$

где ϑ — угол между осью x и отрезком прямой, соединяющей обе звезды, длина этого отрезка равна r . Движение звезды в бесконечности происходит по асимптоте, следовательно, площадь, пройденная в единицу времени, равна $bV = h$, где b — расстояние звезды A от асимптоты, V — скорость звезды B в бесконечности. Итак,

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = bV. \quad (80.1)$$

Составляющая ускорения в направлении оси x в каждой точке орбиты звезды равна

$$\frac{GM}{r^2} \cos \vartheta,$$

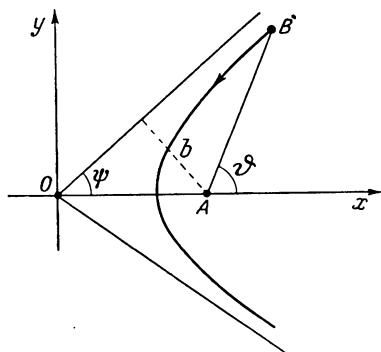


Рис. 60.

где G — постоянная тяготения. Таким образом, полное изменение скорости, вызванное сближением звезд, вычисляется по формуле

$$\Delta V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G\mathfrak{M}}{r^2} \cos \vartheta dt.$$

Произведем под интегралом замену переменных, используя формулу (80.1); тогда

$$\Delta V = \int_{-\psi}^{+\psi} \frac{G\mathfrak{M}}{bV} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{2G\mathfrak{M}}{bV} \sin \psi. \quad (80.2)$$

Здесь ψ — половина угла между асимптотами. Заметим, что расстояние фокуса от асимптоты равно мнимой полуоси гиперболы, следовательно,

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{a}{b},$$

где a — действительная полуось гиперболы; в таком случае

$$\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}}. \quad (80.3)$$

Подставляя написанное значение $\sin \psi$ в формулу (80.2), получим полное изменение скорости, выраженное через величины $\mathfrak{M}$, V , a и b ; здесь V — относительная скорость звезды B перед сближением, b — наименьшее расстояние между звездами, если бы в момент сближения не действовали никакие силы. Это расстояние кратко назовем расстоянием сближения.

Величине a не соответствует никакой физический параметр, поэтому выразим ее через другие величины. Как известно, интеграл площадей при движении по гиперболе можно записать в виде

$$b^2 V^2 = h^2 = \frac{G(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_0) b^2}{a},$$

следовательно,

$$a = \frac{G(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_0)}{V^2}. \quad (80.4)$$

Подставив выражение (80.4) сначала в соотношение (80.3), а затем значение $\sin \psi$ в формулу (80.2), получим

$$\Delta V = \frac{2G\mathfrak{M}}{bV} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{G^2(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_0)^2}{b^2 V^4}}}; \quad (80.5)$$

при больших значениях b величина b^2 очень велика, поэтому можно подкоренное выражение в формуле (80.5) считать равным 1.

Следовательно,

$$\Delta V \approx \frac{2G\mathfrak{M}}{bV}. \quad (80.6)$$

Формулу эту вывел В. А. Амбарцумян. При значении $\mathfrak{M}$, равном массе Солнца, $V = 20$ км/сек (средняя скорость звезд I типа населения) и $b = 4,45$ а. е. (приблизительно равно среднему расстоянию Юпитера от Солнца) получим, производя вычисления по формуле (80.5),

$$\Delta V = 0,707V.$$

Это значит, что в данном случае скорость звезды изменится на 70% от начальной скорости. При расстоянии сближения на порядок больше (расстояние несколько больше, чем среднее расстояние Плутона от Солнца) имеем

$$\Delta V = 0,1V.$$

В этом случае можно пользоваться уже формулой (80.6).

81. Результат действия многих сближений на одиночную звезду. Так как в наших рассуждениях предполагалось, что скорости звезд распределены случайным образом, то, следовательно, увеличение и уменьшение скорости звезды в результате сближения с другими звездами одинаково вероятно, т. е. изменение скорости ΔV можно отождествить с ошибками многократных измерений какой-то величины V . В таком случае они будут суммироваться наподобие случайных ошибок, т. е. квадрат ошибки суммы равен сумме квадратов всех ошибок и, следовательно, общее изменение скорости ΔV будет связано с изменениями скорости ΔV_i при каждой встрече следующим образом:

$$(\Delta V)^2 = \sum_i (\Delta V_i)^2. \quad (81.1)$$

Пусть рассматриваемая звезда движется среди других звезд, причем пространственную плотность звезд, компоненты скоростей которых в направлении движения данной звезды заключены в пределах V , $V + dV$, обозначим через $f(V)dV$. В таком случае число звездных сближений на расстоянии b , $b + db$ и в интервале времени Δt будет равно

$$2\pi b db f(V) V dV \Delta t.$$

Каждое сближение вызывает изменение скорости, определяемое формулой (80.6). Значит, общее изменение скорости ΔV , вызванное сближениями на расстоянии b , $b + db$ с относительной скоростью V , $V + dV$, будет, согласно формуле (81.1), выражаться следующим образом:

$$(\Delta V)^2 = 2\pi b f(V) V \left(\frac{4G^2 \mathfrak{M}^2}{b^2 V^2} \right) db dV \Delta t = 8\pi G^2 \mathfrak{M}^2 \frac{db}{b} \frac{f(V)}{V} dV \Delta t.$$

Следовательно, изменение скорости, вызванное сближениями на расстояниях между b_1 и b_2 , при всевозможных значениях скоростей V будет равно

$$(\Delta V)^2 = 8\pi G^2 \mathfrak{M}^2 \Delta t \int_{b_1}^{b_2} \frac{db}{b} \int_0^\infty \frac{f(V)}{V} dV = 8\pi G^2 \mathfrak{M}^2 \Delta t \ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right) \int_0^\infty \frac{f(V)}{V} dV.$$

Интеграл по V от функции $f(V) dV$ равен пространственной плотности D всех звезд, т. е.

$$\int_0^\infty \frac{f(V) dV}{V} = D \cdot \left(\frac{1}{V}\right),$$

тогда

$$(\Delta V)^2 = 8\pi G^2 \mathfrak{M}^2 \ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right) D \cdot \left(\frac{1}{V}\right) \Delta t. \quad (81.2)$$

Если расширить пределы интегрирования по b и принять их равными 0 и ∞ , учитывая тем самым все возможные встречи, то получим бесконечность, так как и для $b_1 = 0$, и для $b_2 = \infty$ имеем $(\Delta V)^2 = \infty$. Введение в качестве верхней границы интегрирования значения $b_2 = \infty$ было бы ошибочным с физической точки зрения. Удаляясь на большое расстояние от звезды, мы, естественно, попадаем в область с плотностью D , равной нулю, так как она расположена *вне* пределов нашей звездной системы, которая в данном случае рассматривается как изолированная.

Кроме того, на больших расстояниях мы будем иметь дело уже не с отдельными звездами, а с их совокупностью, и в этом случае появятся многократные встречи, которых не касается наша теория.

Главной же причиной является то, что в большой области пространства гравитационные воздействия звезд теряют случайный характер, так как в ней появляется регулярное гравитационное поле, зависящее от структуры данной системы.

Аналогичным образом нельзя принимать $b_1 = 0$, так как приближенная формула (80.6) дает в этом случае $\Delta V = \infty$, а более точная формула (80.5) приводит к неопределенности. Все это является следствием лежащего в основе наших рассуждений предположения о том, что звезды практически являются точками, не имеющими размеров; в этом случае все формулы должны терять физический смысл при $b_1 = 0$.

82. Время релаксации. Этим термином мы обозначаем промежуток времени T_0 , по истечении которого среднее изменение скорости звезды, обладающей средней массой, равно ее средней скорости. Пусть

$$\Delta t = T_0, \quad \Delta V = \bar{V}, \quad \mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{M}},$$

тогда, на основании формулы (81.2), имеем

$$T_0 = \frac{(\bar{V})^2}{8\pi G^2 \bar{M}^2 \ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right) D \cdot \left(\frac{\bar{V}}{V}\right)}.$$

Итак, время релаксации T_0 зависит от средней скорости, средней плотности и средней массы звезд в рассматриваемой системе.

Вычислим теперь время релаксации в Галактике. Пусть b_1 равно размерам солнечной системы, b_2 — среднему расстоянию между двумя соседними звездами в Галактике. Сближения звезд на больших расстояниях теряют уже случайный характер, поэтому они не могут быть учтены. Сближения звезд на расстояниях, меньших чем размеры солнечной системы, так маловероятны, что ими можно пренебречь.

Чтобы убедиться в этом, вычислим вероятность сближения на меньшем расстоянии. Представим себе цилиндр с радиусом основания, равным b_1 , и высотой Vt . Пусть звезда движется вдоль оси цилиндра. Число звезд N в этом цилиндре равно

$$N = \pi b_1^2 V t D.$$

Полагая, что $N = 1$, можно определить тот промежуток времени, по истечении которого внутри цилиндра появится еще одна звезда, т. е. произойдет одно сближение на расстоянии, меньшем чем b_1 . Пусть $V = 20$ км/сек (для звезд I типа населения), D равно одной звезде на 10^3 и $b_1 = 40$ а. е.; в таком случае

$$t = 1,1 \cdot 10^{24} \text{ лет.}$$

Итак, средний интервал времени, в течение которого происходит одно сближение на расстояние, меньшее чем 40 а. е., составляет 10^{24} лет. Так как в Галактике мы рассматриваем только процессы, продолжительность которых не превышает 10^{11} лет, то таких тесных сближений можно не учитывать совсем.

К. Ф. Огородников¹⁾, приняв приведенные выше значения b_1 и b_2 , средней скорости звезд и средней плотности и считая для простоты

$$\left(\frac{\bar{V}}{V}\right) = \frac{1}{V},$$

нашел время релаксации Галактики, а именно:

$$T_{0 \text{ Гал.}} = 3,02 \cdot 10^{16} \text{ лет.}$$

Время релаксации некоторых частей Галактики, имеющих большую плотность звезд, например, ядра Галактики, шаровых и рассеянных звездных скоплений, естественно, короче и заключено в пределах 10^6 — 10^{12} лет²⁾.

¹⁾ Огородников К. Ф., *Усп. астр. наук*, IV, 25 (1948).

²⁾ Чандрасекхар С., *Принципы звездной динамики*, М., 1948, стр. 210.

Часто время релаксации определяется другим способом, а именно: как время, в течение которого среднее изменение энергии равно средней энергии звезд системы, или как промежуток времени, по истечении которого направление движения звезды вследствие действия иррегулярных сил изменяется в среднем на $\pi/2$. В этих случаях мы получаем другие формулы для вычисления времени релаксации, но порядок величины остается без изменения ¹⁾.

На основании полученных результатов можно заключить, что в спиральных галактиках, а весьма возможно, что также и в эллиптических, действие иррегулярных сил настолько медленно, что ими можно или вовсе пренебречь, или учитывать их действие лишь в первом приближении. Зато в звездных скоплениях, а в особенности в шаровых, эти силы, наоборот, играют решающую роль.

В приведенных выше рассуждениях мы рассматривали влияние иррегулярных сил отдельных звезд. Результат получится несколько иной, если учесть силы притяжения звездных скоплений и случайных флуктуаций звездной плотности. В этом случае время релаксации будет короче ²⁾.

Однако, теория этих сил, в частности, значения параметров, входящих в эти теории, не очень надежны, поэтому неуверенными кажутся нам и получаемые результаты.

83. Период полураспада. Периодом полураспада звездной системы мы называем время, по истечении которого половина всех звезд покинет систему в результате действия иррегулярных сил, сообщаящих звездам гиперболические скорости; точнее говоря, покинуло бы, если бы процесс убегания не изменялся бы вследствие изменений, происходящих в это время в самой системе. В действительности же динамические условия в звездной системе изменяются в результате эволюции звезд и даже в результате их убегания, поэтому изменяется также та скорость, с которой звезды покидают данную систему. Период полураспада, так же, как и время релаксации, является одной из основных динамических характеристик данной звездной системы. К сожалению, период полураспада определяется еще более неуверенно, чем время релаксации.

В нашей книге мы приводим лишь грубые оценки порядка величины периода полураспада, отказываясь от изложения каких-либо сложных теорий.

¹⁾ С различными подходами к определению времени релаксации можно познакомиться, например, в следующих работах: Чандрасекхар С., Принципы звездной динамики, 1948, стр. 53; Паренато П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 367 (в этой работе автор пользуется несколько отличной от нашей терминологией) и P a h l e n E., Einführung in die Dynamik von Sternsystemen, 1947.

²⁾ См., например, Чандрасекхар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., 1947.

Если в звездной системе потенциал Φ медленно изменяется с течением времени, то в такой системе имеет место интеграл живых сил, а именно:

$$\frac{V^2}{2} + \Phi = E,$$

где V — скорость звезды, E — общая энергия звезды, а масса звезды принята равной единице.

При бесконечном удалении звезды из системы потенциал равен нулю и, следовательно,

$$V_{\infty}^2 = 2E \geq 0;$$

это значит, что звезда может удалиться в бесконечность только в том случае, если ее полная энергия положительна.

Обозначая индексом p „параболическую“ скорость звезды, получим

$$V_p^2 + 2\Phi = 0.$$

Круговая скорость в данной системе V_k связана с потенциалом следующим выражением:

$$\frac{V_k^2}{r} = + \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

следовательно,

$$\frac{V_k^2}{V_p^2} = - \frac{r}{2\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Для упрощения примем, что выражение потенциала имеет вид

$$\Phi = -G \frac{M}{r}.$$

Тогда

$$\frac{V_p}{V_k} = \sqrt{2}.$$

По истечении времени релаксации среднее изменение скорости звезды должно быть равно средней скорости. Учитывая в нашем случае только круговые орбиты и имея ввиду случайный характер изменений, получим

$$V_s^2 = V_k^2 + (\Delta V)^2 = 2V_k^2 = V_p^2,$$

где V_s — ожидаемая скорость по истечении времени релаксации. Итак, параболическая скорость является математическим ожиданием скорости звезды по истечении времени релаксации. Это значит, что по истечении этого времени примерно половина всех звезд будет иметь скорость, превышающую параболическую скорость V_p , и, следовательно, перестанет быть членами системы. Таким образом, при сделанных предположениях время релаксации равно периоду полу-распада данной звездной системы.

Следует, однако, заметить, что к этому выводу мы пришли при весьма многих упрощающих проблему предположениях. Во-первых, была принята исключительно простая форма потенциала. Во-вторых, начальные скорости звезд были отождествлены с круговыми скоростями на данном расстоянии r . В-третьих, средняя абсолютная скорость была заменена средней относительной скоростью (пекулярной скоростью), входящей в формулу для времени релаксации, что в принципе допустимо только для случая полностью беспорядочного движения звезд. Упорядоченные же движения центроидов звезд не оказывают никакого влияния на время релаксации. И, наконец, в четвертых, не была учтена возможность утраты звездой ее гиперболической скорости вследствие сближения с соседними звездами перед уходом из системы. Тем не менее, по мнению К. Ф. Огородникова, такой расчет можно считать удовлетворительным для галактик, и, в частности, для нашей Галактики. В защиту этого мнения можно привести следующее соображение: хотя действительное значение V_p/V_k , вычисленное на основании известных нам потенциалов галактик, меньше значения $\sqrt{2}$, что ведет к уменьшению периода полураспада, но существование упорядоченного движения звезд в галактиках увеличивает этот период. Действие обоих этих факторов приводит к значению периода полураспада того же порядка, что и время релаксации.

Остальные предположения относительно круговых орбит звезд и относительно того, что звезды, приобретающие в каждый момент скорость, превышающую параболическую, покидают систему, не вызывают серьезных возражений.

Однако, наше упрощенное рассуждение неприменимо, например, к звездным скоплениям, здесь нужны более сложные теории; довольно точные теории для этого случая развиты в работах Чандрасекхара ¹⁾. Из них следует, что период полураспада звездных скоплений может быть даже в сто раз короче, чем время релаксации.

84. Теорема о вириале. Эта теорема позволяет получить некоторые результаты, касающиеся действия иррегулярных сил в звездных системах. Результаты приближенные, так как предположения, лежащие в основе этой теоремы, почти никогда точно не соблюдаются в действительности.

Пусть r_i обозначает расстояние материальной точки от центра данной системы, а x_i , y_i и z_i — ее прямоугольные координаты. В таком случае момент инерции J системы относительно начала координат выражается в виде

$$J = \mathcal{M} \sum_i r_i^2 = \mathcal{M} \sum_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

где суммирование распространяется на все точки системы, $\mathcal{M}$ — средняя масса одной точки. Предположим далее, что момент инерции изме-

¹⁾ См., например: Чандрасекхар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., 1947.

няется *линейно* с течением времени, т. е.

$$J = J_0 + J_1 t,$$

следовательно,

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 0;$$

это значит, что

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 J}{dt^2} = \frac{\mathfrak{M}}{2} \sum_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \frac{\mathfrak{M}}{2} \sum_i (x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i + z_i \ddot{z}_i) = 0. \quad (84.1)$$

Первый член правой части выражает кинетическую энергию нашей системы T , второй называется *вириалом*; выясним сейчас физический смысл этой величины. Предположим, что силы, действующие в системе, зависят от ее потенциала Φ , т. е.

$$\mathfrak{M} \ddot{x}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \mathfrak{M} \ddot{y}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \mathfrak{M} \ddot{z}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}.$$

В таком случае

$$\frac{\mathfrak{M}}{2} \sum_i (x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i + z_i \ddot{z}_i) = -\frac{1}{2} \sum_i \left(x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \right) = \frac{1}{2} \Phi.$$

Последний член равенства основан на предположении, что потенциал Φ является однородной функцией минус первой степени координат точки.

Подставляя полученное равенство в формулу (84.1), имеем

$$2T + \Phi = 0.$$

Это равенство является аналитическим выражением теоремы о вириале, которая формулируется следующим образом: *в системе точек, момент инерции которой является линейной функцией времени, потенциальная энергия равна удвоенной кинетической энергии с обратным знаком.*

Хотя в нашей Галактике вряд ли соблюдаются условия применимости теоремы о вириале, тем не менее, основываясь на ней, можно сделать кое-какие заключения относительно некоторых параметров Галактики. Можно, например, оценить массу Галактики $\mathfrak{M}^1$), приняв, что

$$2T = \sum_i \mathfrak{M}_i V_i^2 = N \overline{\mathfrak{M}_i} \overline{V_i^2} = \mathfrak{M} \overline{V^2},$$

где N — число звезд в Галактике.

$$\Phi = -G \frac{N^2 \mathfrak{M}_i^2}{r} = -G \frac{\mathfrak{M}^2}{r},$$

¹⁾ С другими применениями теоремы о вириале нас знакомит статья Огородникова К. Ф., *Усп. астр. наук*, IV, 27 (1948).

здесь r — среднее расстояние звезд от центра Галактики, G — постоянная тяготения. Следовательно,

$$\mathfrak{M}\bar{V}^2 - \frac{1}{2}G\frac{\mathfrak{M}^2}{r} = 0,$$

т. е.

$$\mathfrak{M} = \frac{2r\bar{V}^2}{G}.$$

Подставляя в эту формулу среднее расстояние и средний квадрат скорости звезд, можно приближенно оценить массу Галактики. Наше приближение будет, конечно, очень грубым, так как вряд ли можно считать, что момент инерции Галактики является линейной функцией времени. Особенно опасно введение средних масс всех тел в Галактике; при этом мы игнорируем, например, межзвездную материю, масса которой может быть весьма значительна.

Приняв, например, $r = 13$ кпс и $\bar{V}^2 = (250 \text{ км/сек})^2$, получим $\mathfrak{M} = 3,78 \cdot 10^{11}$ масс Солнца; это значение хорошо согласуется с определениями, основанными на других методах (см. п. 70).

85. Тожество Лагранжа. Обозначим прямоугольные координаты точки в системе n тел через x_i, y_i, z_i ; начало координат находится в центре масс (см. дополнение 2). В этом случае можно написать

$$\begin{aligned} 2 \sum_{ij} \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j (x_i - x_j)^2 &= \sum_i \sum_j \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) = \\ &= \sum_i \mathfrak{M}_i x_i^2 \sum_j \mathfrak{M}_j + \sum_i \mathfrak{M}_i \sum_j \mathfrak{M}_j x_j^2 - 2 \sum_i \mathfrak{M}_i x_i \sum_j \mathfrak{M}_j x_j = \\ &= 2 \sum_i \mathfrak{M}_i \sum_j \mathfrak{M}_j x_i^2, \end{aligned}$$

где знак суммы с индексом ij обозначает суммирование по всем парам точек системы. Составляя аналогичные равенства для двух других координат и складывая их почленно, получим

$$\sum_{ij} \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j r_{ij}^2 = \sum_i \mathfrak{M}_i \sum_j \mathfrak{M}_j (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

где r_{ij} — расстояние точки i от точки j . Проинтегрировав дважды по времени и обозначив потенциал через Φ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sum_i \mathfrak{M}_i} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{ij} \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j r_{ij}^2 \right) &= 2 \frac{d}{dt} \left[\sum_i \mathfrak{M}_i (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i) \right] = \\ &= 2 \sum_i \mathfrak{M}_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + 2 \sum_i \mathfrak{M}_i (x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i + z_i \ddot{z}_i) = \\ &= 2 \sum_i \mathfrak{M}_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - 2 \sum_i \left(x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \right) = 4T + 2\Phi. \end{aligned}$$

В последнем преобразовании предполагаем, так же, как и в предыдущем параграфе, что потенциал является однородной функцией минус первой степени координат. Используя выражение интеграла энергии

$$T + \Phi = E$$

(см. дополнение 2), имеем

$$\frac{1}{2} \sum_i \mathfrak{M}_i \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{ij} \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j r_{ij}^2 \right) = 2E - \Phi.$$

Это равенство называется тождеством Лагранжа; оно позволяет производить оценку степени устойчивости звездных систем. Итак, если общая энергия системы E положительна, то правая часть тождества Лагранжа положительна (Φ отрицательно). Это значит, что первая производная суммы расстояний тел является возрастающей функцией времени. Таким образом, если даже она в какой-то момент была отрицательной (что соответствовало отсутствию тенденции расхождения этих тел), то по истечении некоторого промежутка времени эта функция станет положительной, следовательно, расстояния между телами начнут неограниченно увеличиваться, и система распадется. Хотя, строго говоря, возможен также случай неограниченного увеличения расстояния только одного тела (этот случай также удовлетворяет тождеству Лагранжа), однако, будем считать такой случай маловероятным, поэтому тождество Лагранжа можно рассматривать как критерий устойчивости систем; сформулируем следующую теорему.

Необходимым (но не достаточным) условием устойчивости звездной системы является отрицательное значение ее полной внутренней энергии.

Этот критерий можно применять, прежде всего, к небольшим группам звезд, например, к небольшим звездным скоплениям или ассоциациям, в которых можно вычислить полную энергию, зная индивидуальные положения и скорости всех членов скопления или ассоциации. Следует все же заметить, что в системах, которые, согласно нашему критерию, являются неустойчивыми, некоторые звезды могут и после распада оказаться близкими и образовать группу; в частности, около центра масс системы может остаться группа звезд, которая может быть даже устойчивой.

В. А. Амбарцумян, основываясь на приведенном выше критерии, обнаружил неустойчивость некоторых звездных ассоциаций.

§ 20. Регулярные силы

86. Фазовое пространство. При выводе многих основных соотношений, относящихся к регулярным силам, мы будем часто пользоваться понятием фазового пространства. В нашем случае это будет шестимерное пространство, в котором три координаты x , y , z соответствуют трем прямоугольным координатам положения в обычном

пространстве, а три остальные координаты p_x , p_y , p_z являются составляющими импульсов в соответствующих направлениях.

Так как в большинстве случаев вводится предположение о равенстве масс звезд, то, выбрав соответствующую систему единиц, можно принять массы звезд равными единице и, следовательно, отождествить их импульсы с компонентами скоростей u , v , w в соответствующих направлениях x , y , z . Иначе говоря,

$$p_x = u = \frac{dx}{dt}, \quad p_y = v = \frac{dy}{dt}, \quad p_z = w = \frac{dz}{dt}. \quad (86.1)$$

Каждой звезде, таким образом, соответствует одна точка фазового пространства, координаты которой определяют положение и скорость звезды. Эта точка называется *фазовой точкой звезды*.

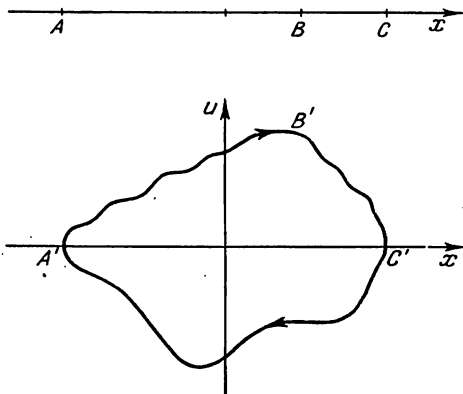


Рис. 61.

Положение и скорость звезды изменяются с течением времени, т. е. в разные моменты времени одной и той же звезде соответствуют различные фазовые точки. Если исключить соударения звезд (что является вполне обоснованным), то изменения скорости и положения звезды происходят непрерывно и, следовательно, непрерывной будет также кривая, по которой движется точка в фазовом пространстве. Будем называть эту кривую траекторией звезды в фазовом пространстве или, короче, фазовой траекторией звезды.

Формулы (86.1) ограничивают возможность движения звезды в фазовом пространстве. Так как эти ограничения будут играть довольно существенную роль в последующих рассуждениях, то выясним их смысл на простом примере.

Рассмотрим движение звезды вдоль оси x в пространстве координат. В этом случае $y=0$, $z=0$, $v=0$ и $w=0$. Следовательно, вся фазовая траектория будет находиться в плоскости (x, u) фазового пространства. На рис. 61 сверху нарисована ось x в пространстве координат, а внизу — плоскость (x, u) фазового пространства. Предположим, что в начальный момент звезда находится в покое в точке A , которой соответствует точка A' фазового пространства. Затем звезда приобретает какую-то скорость и перемещается из точки A в точку B ; в таком случае соответствующая ей точка фазового пространства перемещается в направлении возрастающих значений u и x . Если звезда, пройдя через точку B , продолжает двигаться в перво-

начальном направлении, но с убывающей скоростью, то фазовая траектория начнет опускаться вниз. Пересечению фазовой траектории с осью x соответствует остановка звезды в точке C . Звезда может вернуться в точку A , в этом случае она должна иметь отрицательную скорость, следовательно, соответствующая часть фазовой траектории должна располагаться под осью x . Нетрудно убедиться, что, например, такая же кривая в фазовом пространстве, но с противоположным направлением движения точки (рис. 62) не может соответствовать действительности; в самом деле, тело, двигаясь от точки C к точке B , должно иметь скорость, направленную в положительном

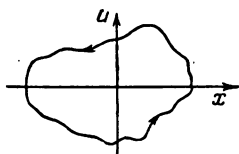


Рис. 62.

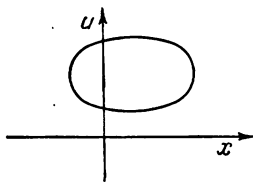


Рис. 63.

направлении оси x и одновременно перемещаться в отрицательном направлении той же оси, что, естественно, является абсурдом. Кривая, изображенная на рис. 63, также не может быть фазовой траекторией (при произвольном направлении движения точки), хотя части этой кривой могут быть фазовыми траекториями звезды.

В конечном интервале времени фазовая траектория звезды может быть точкой только в том случае, если эта точка находится в трехмерной гиперплоскости $u=0$, $v=0$, $w=0$.

87. Функция распределения положений и скоростей. Вообще говоря, движение системы тел в пространстве считается известным, если для каждого тела известна функция, определяющая скорость и положение данного тела в зависимости от времени. Если, однако, отказаться от рассмотрения отдельных тел, то для определения движения всей системы необходимо ввести так называемую *функцию распределения координат и скоростей*, или, короче, функцию распределения. Эту функцию $f(x, y, z, u, v, w, t)$ определим так, чтобы в области фазового пространства Ω и для момента t имело место соотношение

$$N(t)_{\Omega} = \iiint_{\Omega} f(x, y, z, u, v, w, t) dx dy dz du dv dw, \quad (87.1)$$

где $N(t)_{\Omega}$ — число тел (звезд), которым соответствуют точки, находящиеся в области Ω фазового пространства в момент t .

Если проинтегрировать функцию f в области, определенной неравенствами

$$\begin{aligned}x_1 - \Delta x < x < x_1 + \Delta x, \\y_1 - \Delta y < y < y_1 + \Delta y, \\z_1 - \Delta z < z < z_1 + \Delta z, \\u_1 - \Delta u < u < u_1 + \Delta u, \\v_1 - \Delta v < v < v_1 + \Delta v, \\w_1 - \Delta w < w < w_1 + \Delta w,\end{aligned}$$

и предположить, что $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta w$ малы, то, таким образом, можно установить, существует ли в данный момент тело, имеющее координаты, близкие значениям x_1, y_1 и z_1 , и компоненты скорости u_1, v_1 и w_1 . Если для двух различных моментов t_1 и t_2 вблизи одной и той же точки фазового пространства найдем какое-то тело, то функция f не даст возможности установить, является ли тело, находящееся вблизи данной точки в момент t_1 , тем же самым, что и в момент t_2 , или же это разные тела.

Для того, чтобы определить число $N(t)_\omega$ тел, находящихся в произвольной области пространства координат ω и имеющих всевозможные скорости, необходимо вычислить интеграл

$$N(t)_\omega = \int_\omega \int \int \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, u, v, w, t) du dv dw \right] dx dy dz.$$

Следовательно, средняя плотность тел в области $\omega [D(x, y, z, t)_\omega]$ определяется формулой

$$D(x, y, z, t)_\omega = \frac{\int_\omega \int \int \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, u, v, w, t) du dv dw \right] dx dy dz}{\int_\omega \int \int dx dy dz}.$$

Аналогично можно написать формулу, дающую число звезд с определенной скоростью независимо от их положений в данной системе, или же формулу для определения средней плотности точек в данной области фазового пространства Ω .

В качестве примера рассмотрим движение двух тел, причем тело A описывает в плоскости $z=0$ окружность с постоянной скоростью. Тело B находится в центре этой окружности, где находится и начало системы координат.

Движение такой системы в аналитическом виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}x_A &= C_0 \sin C_1 t, & x_B &= 0, \\y_A &= C_0 \cos C_1 t, & y_B &= 0, \\z_A &= 0, & z_B &= 0, \\u_A &= C_1 C_0 \cos C_1 t, & u_B &= 0, \\v_A &= -C_1 C_0 \sin C_1 t, & v_B &= 0, \\w_A &= 0, & w_B &= 0,\end{aligned}$$

где индексы A и B относятся к двум рассматриваемым телам, а C_0 и C_1 — постоянные, определяющие радиус круга и скорость движения тела A .

Функцию распределения координат и скоростей в этом случае можно представить с помощью так называемой дельта-функции Дирака (см. дополнение 6)

$$\begin{aligned}f(x, y, z, u, v, w, t) &= \delta(C_0 \sin C_1 t - x) \delta(C_0 \cos C_1 t - y) \delta(z) \times \\&\times \delta(C_1 C_0 \cos C_1 t - u) \delta(C_1 C_0 \sin C_1 t + v) \delta w + \\&+ \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(u) \delta(v) \delta(w).\end{aligned}\quad (87.2)$$

Легко убедиться, что после подстановки выражения функции f , согласно формуле (87.2), в формулу (87.1) и интегрирования получим величину, равную 2, если в область интегрирования ω попадают оба тела, и равную 1, когда в этой области находится только одно тело. Во всех же остальных случаях $f = 0$.

Применение функции распределения очень удобно, так как в этом случае одной только величиной можно определить состояние системы многих тел. Одновременно следует заметить, что форма этой функции может быть довольно сложной, как, например, в только что рассмотренном случае задачи двух тел.

88. Лемма о несжимаемости фазового пространства. Рассмотрим элемент объема фазового пространства $dx dy dz du dv dw$, в котором находится точка с координатами (x, y, z, u, v, w) , и предположим, что все точки в этом элементе объема независимо от того, соответствуют они реально существующим телам или нет, не остаются в покое, причем каждая точка движется по какой-либо возможной траектории. Кроме того, предположим, что это движение непрерывно по отношению к положению в фазовом пространстве, иначе говоря, что различие движений двух достаточно близких точек произвольно мало. В действительности это соответствует предположению, что движение точки является непрерывной функцией начальных условий — положения и скорости. Двигаясь таким образом, точка с координатами

x, y, z, u, v, w через некоторое время окажется в точке с координатами x', y', z', u', v', w' ; следовательно, можно написать

$$\begin{aligned}x' &= x + \delta x, & u' &= u + \delta u, \\y' &= y + \delta y, & v' &= v + \delta v, \\z' &= z + \delta z, & w' &= w + \delta w,\end{aligned}\quad (88.1)$$

причем дифференциалы перемещений мы обозначили через $\delta x, \dots, \delta w$, чтобы не путать их с величинами $dx, \dots, dw$, обозначающими размеры элемента фазового пространства. Далее

$$\begin{aligned}x' &= x + \frac{\delta x}{\delta t} \delta t = x + u \delta t, & u' &= u + \frac{\delta u}{\delta t} \delta t = u + X \delta t, \\y' &= y + \frac{\delta y}{\delta t} \delta t = y + v \delta t, & v' &= v + \frac{\delta v}{\delta t} \delta t = v + Y \delta t, \\z' &= z + \frac{\delta z}{\delta t} \delta t = z + w \delta t, & w' &= w + \frac{\delta w}{\delta t} \delta t = w + Z \delta t,\end{aligned}\quad (88.2)$$

здесь большими буквами X, Y и Z обозначены компоненты ускорения. Объем элемента $dx' dy' dz' du' dv' dw'$, полученного в результате перемещения, равен

$$dx' dy' dz' du' dv' dw' = \frac{\partial (x', y', z', u', v', w')}{\partial (x, y, z, u, v, w)} dx dy dz du dv dw,$$

причем, имея ввиду, что величины (x, y, z, u, v, w) являются независимыми аргументами, а ускорение есть функция положения, получим, согласно формуле (88.2),

$$\frac{\partial (x', y', z', u', v', w')}{\partial (x, y, z, u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \delta t, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & \delta t, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \delta t \\ \frac{\delta X}{\delta x} \delta t, & \frac{\delta X}{\delta y} \delta t, & \frac{\delta X}{\delta z} \delta t, & 1, & 0, & 0 \\ \frac{\delta Y}{\delta x} \delta t, & \frac{\delta Y}{\delta y} \delta t, & \frac{\delta Y}{\delta z} \delta t, & 0, & 1, & 0 \\ \frac{\delta Z}{\delta x} \delta t, & \frac{\delta Z}{\delta y} \delta t, & \frac{\delta Z}{\delta z} \delta t, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}. \quad (88.3)$$

При вычислении детерминанта (88.3) можно пренебречь высшими степенями дифференциала δt , так как из предположения о непрерывности движения по отношению к начальным условиям следует, что все производные, входящие в детерминант, суть конечные величины, поэтому выражения, содержащие высшие степени δt , будут бесконечно малыми высших порядков. Следовательно,

$$\frac{\partial (x', y', z', u', v', w')}{\partial (x, y, z, u, v, w)} = 1,$$

т. е.

$$dx' dy' dz' du' dv' dw' = dx dy dz du dv dw. \quad (88.4)$$

Это значит, что при сделанных допущениях объем движущегося элемента фазового пространства не может измениться, следовательно, он несжимаем. Ясно, что если в некоторых точках фазового пространства находятся реальные физические тела, то при непрерывном движении они все время будут находиться в данном элементе объема, т. е. их фазовая плотность будет неизменной.

89. Основное уравнение звездной динамики. Рассмотрим систему тел с ограниченными скоростями и положениями. Число таких тел N можно, согласно формуле (87.1), выразить следующим образом:

$$N = \int \int \int \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z, u, v, w, t) dx dy dz du dv dw. \quad (89.1)$$

Если предположить непрерывность движения по отношению к начальным условиям, то изменения положения и скорости можно выразить с помощью равенства (88.1), причем число тел N не изменится. Следовательно,

$$\begin{aligned} N &= \int \int \int \int \int \int_{\Omega'} f(x, y, z, u, v, w, t) dx dy dz du dv dw = \\ &= \int \int \int \int \int \int_{\Omega} f(x', y', z', u', v', w', t') dx' dy' dz' du' dv' dw'. \end{aligned} \quad (89.2)$$

Здесь Ω' обозначает область Ω , которая перейдет в Ω' в момент $t' = t + \delta t$. Принимая во внимание формулы (89.2) и (88.4), имеем

$$N = \int \int \int \int \int \int_{\Omega} f(x', y', z', u', v', w', t') dx dy dz du dv dw. \quad (89.3)$$

Так как Ω является произвольной областью, то из сравнения выражений (89.1) и (89.3) следует

$$f(x', y', z', u', v', w', t') = f(x, y, z, u, v, w, t). \quad (89.4)$$

Это значит, что функция распределения не изменяется, если рассматривать область функции, заполненную одними и теми же телами. Предел функции

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f[x_1 + \frac{dx_1}{dt}(t_1 - t), \dots, x_n + \frac{dx_n}{dt}(t_1 - t), t_1] - f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{t_1 - t} = \frac{Df}{Dt},$$

рассматриваемой не в данной точке пространства, а движущейся вместе с системой тел, мы называем стоксовой производной. В нашем случае

$$\frac{Df}{Dt} = 0. \quad (89.5)$$

Это равенство обычно называется *основным уравнением динамики звездных систем*. Обращаем внимание читателей на то, что следствием принципа сохранения материи является существование стоксовой производной даже в тех случаях, когда функция распределения имеет разрыв, а ее производные по координатам фазового пространства во многих точках не существуют, как, например, в случае, приведенном в конце п. 87. Таким образом, основное уравнение звездной динамики во всех случаях имеет смысл.

Строгое изучение движений отдельных материальных точек всегда приводит к функции распределения, имеющей разрыв, которую мы строим с помощью дельта-функций Дирака. Однако, статистическое исследование движений приводит к непрерывной функции, интеграл которой в достаточно больших областях фазового пространства может как угодно мало отличаться от интеграла функции, описывающей данное движение вполне точно. В этом случае можно говорить не только о *средней фазовой плотности* в данной области, но также о фазовой плотности в данной точке, которую будет представлять сама функция $f(x, y, z, u, v, w, t)$. Будет иметь смысл также понятие плотности в данной точке пространства координат, которая определяется формулой

$$D(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, u, v, w, t) du dv dw. \quad (89.6)$$

Непрерывная функция распределения может учитывать также различие масс; для этого указанную функцию строим так, чтобы она давала плотность, выраженную в единицах массы, а не в относительном числе объектов.

Хотя полученные нами выводы касаются сил регулярных, тем не менее, рассуждения, которые привели к этим выводам, вполне применимы также и к силам иррегулярным; в этом случае, разлагая поле на иррегулярные и регулярные силы, мы целост включим во вторую группу сил (см. п. 79); в дальнейшем будем статистическими методами изучать системы, состоящие из многих звезд, и притом только такие, в которых можно предполагать непрерывность функции распределения во всех точках и существование ее вторых производных по координатам фазового пространства и времени. Следовательно, будем рассматривать только довольно ограниченную область регулярного поля. В этом случае можно стоксову производную выразить через обычные частные производные, а именно:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt}.$$

Действительно, умножая обе части приведенного выше равенства на dt , получим приращение функции распределения на пути, пройденном за это время телами, описываемыми данной функцией. Сле-

довательно, основное уравнение звездной динамики обратится в следующее дифференциальное уравнение с частными производными:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt} = 0. \quad (89.7)$$

Это уравнение можно было вывести из уравнения (89.4), разлагая левую часть последнего в степенной ряд около точки (x, y, z, u, v, w, t) , пренебрегая высшими степенями dt , вычитая затем из обеих частей величину $f(x, y, z, u, v, w, t)$ и деля их на dt .

При выводе этого уравнения мы ограничились лишь допущением непрерывности движения по отношению к начальным условиям и сохранения массы; не было введено никаких других ограничений, кроме предположения о возможности движения в фазовом пространстве. В частности, мы совершенно не интересовались происхождением сил, действующих в данной системе. Поэтому уравнение (89.5) или (89.7) имеет скорее геометрическое, чем физическое содержание, хотя и называется уравнением динамики.

Если предположить, что силы, действующие в системе, являются силами определенного потенциала Φ , то можно написать

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

принимая во внимание соотношение (86.1), можно уравнение (89.7) записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (89.8)$$

Такая форма является наиболее удобной для дальнейших рассуждений.

Уравнение (89.8) можно рассматривать как однородное, содержащее неизвестную функцию распределения координат и скоростей f , при заданном потенциале Φ или же, наоборот, как неоднородное уравнение с частными производными относительно неизвестного потенциала при заданной функции распределения.

90. Классификация звездных систем. Если бы функция распределения координат и скоростей была бы в действительности непрерывна хотя бы относительно координат x, y, z , то непрерывным было бы также пространственное распределение масс, поэтому все действующие силы следовало бы считать регулярными. Искусственно введенное при изучении конкретных звездных систем предположение о непрерывности функции приводит к тому, что мы вынуждены рассматривать исключительно регулярные силы, игнорируя существующие в действительности иррегулярные силы, которые играют большую роль при близких звездных прохождениях.

На основании оценки роли регулярных и иррегулярных сил в звездных системах можно провести следующую классификацию этих систем:

1) Системы, находящиеся в *динамическом равновесии*; в таких системах нет иррегулярных сил, а действие регулярных сил таково, что функция распределения не изменяется с течением времени.

2) Системы, находящиеся в *статистическом равновесии*; хотя в этих системах и существуют иррегулярные силы, но их действие взаимно компенсируется и не влияет поэтому на состояние системы. Регулярные силы, так же, как и в предыдущем случае, не меняют функции распределения.

3) *Стационарные системы*, в которых функция распределения меняется с течением времени вследствие действия исключительно иррегулярных сил; регулярные силы не вызывают никаких изменений функции распределения.

4) *Нестационарные системы*, в которых регулярные силы наряду с иррегулярными вызывают изменения функции распределения.

В действительности нет звездных систем, находящихся в динамическом равновесии. Можно создавать лишь фиктивные модели таких систем, например, представить себе систему звезд, расположенных по окружности так, что их линейная плотность постоянна, и движущихся равномерно по этой окружности. Однако, теория систем, находящихся в динамическом равновесии, является основой метода изучения стационарных систем. Стационарные системы можно рассматривать как системы, находящиеся с точки зрения регулярных сил в динамическом равновесии; действие же иррегулярных сил будем учитывать отдельно методами, предложенными в предыдущем параграфе. Так как действие иррегулярных сил, вообще говоря, вызывает очень медленные изменения, в чем мы убедились в предыдущем параграфе, то, даже пренебрегая ими, мы получим довольно правильные результаты для сравнительно небольших интервалов времени.

Теоретически можно легко доказать невозможность существования систем в состоянии статистического равновесия. Действительно, иррегулярные силы, изменяющие случайным образом скорости звезд, постоянно вызывают появление гиперболических скоростей у некоторой части звездного населения данной системы. Такие звезды покидают звездную систему, и эта убыль ничем не компенсируется, так как захват „посторонних“ звезд является чем-то очень маловероятным. Следовательно, в каждой звездной системе, где действуют иррегулярные силы, общее число звезд должно убывать, таким образом, функция распределения должна изменяться с течением времени.

Поэтому мы практически занимаемся лишь изучением стационарных систем, которые рассматриваются при этом как системы, находящиеся в динамическом равновесии, и систем нестационарных.

91. Уравнение Пуассона. Подставив в уравнение (89.7) вместо компонентов сил производные потенциала, мы получили основное уравнение, имеющее не только геометрический, но и физический смысл. Однако, при этом не было высказано никаких предположений

относительно потенциала; он мог быть как гравитационным, так и любым другим по своей природе, а кроме того, мог быть вызван также телами, не принадлежащими к рассматриваемой системе.

Так как в дальнейшем мы будем рассматривать лишь изолированные системы, т. е. такие, движение звезд в которых происходит под действием исключительно сил собственного гравитационного поля, то можно воспользоваться еще одной зависимостью между пространственным распределением звезд и потенциалом системы, а именно, известным уравнением Пуассона¹⁾

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G D.$$

Здесь ∇^2 — лапласиан, D — плотность материи. Подставляя в приведенное уравнение выражение D , согласно формуле (89.6), имеем

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f \, du \, dv \, dw. \quad (91.1)$$

Таким образом, мы получили дополнительное уравнение, которое будем решать совместно с основным уравнением звездной динамики. Уравнение (91.1) можно рассматривать либо как интегральное уравнение относительно функции f , либо как дифференциальное относительно неизвестной функции Φ .

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ И СКОРОСТЕЙ

92. Стационарная система. Уравнение (89.8), как однородное относительно функции f , можно решать методом характеристик (см. дополнение 5). Это уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = -\frac{du}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = -\frac{dv}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = -\frac{dw}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}, \quad (92.1)$$

причем каждый из первых интегралов системы (92.1) является решением уравнения (89.8). Так как переменные x, y, z, u, v и w в системе уравнений (92.1) являются координатами отдельных звезд, то первые интегралы также являются интегралами движения отдельных звезд, отсюда вытекает довольно важная теорема.

Общее решение основного уравнения звездной динамики относительно функции распределения является произвольной функцией

¹⁾ См., например, Planck M., Einführung in die Allgemeine Mechanik, Lpz., 1921.

первых интегралов движения каждой звезды в поле регулярных сил.

Справедливость этой теоремы можно доказать иным путем, а именно: известно, что функция f не меняется при движении любой звезды, т. е. она постоянна на каждой фазовой траектории. Следовательно, эта функция может зависеть лишь от инвариантов движения звезды и изменяться только при переходе от одной траектории к другой.

Обозначая через $I_1, I_2, \dots, I_6$ шесть первых интегралов уравнения (92.1), можно функцию распределения f записать в виде

$$f = f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6).$$

Если при заданном потенциале удастся найти все 6 первых интегралов, то задача решена. Если же найдем лишь некоторые из этих независимых интегралов, то можно рассмотреть несколько частных случаев возможных функций распределения.

Все найденные нетривиальные решения основного уравнения звездной динамики ограничиваются случаями, при которых искомая функция f , а также потенциал Φ не изменяются с течением времени. Эти случаи соответствуют или системе, находящейся в динамическом равновесии, или стационарной системе, с оговоркой, приведенной в п. 90. В указанных случаях уравнение (89.8) можно переписать в более простом виде, а именно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (92.2)$$

следовательно, система (92.1) уменьшится на одно уравнение

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = -\frac{du}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = -\frac{dv}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = -\frac{dw}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}. \quad (92.3)$$

Число независимых первых интегралов в этом случае будет равно 5, и общее решение примет вид

$$f = f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5).$$

Из предположения о неизменяемости функции f с течением времени, так же, как из основного уравнения звездной динамики, следует, что эта функция представляет собой фазовую плотность, которая не меняется вдоль фазовой траектории. Фазовая же траектория при неизменном потенциале зависит только от начальных условий движения; следовательно, через каждую точку фазового пространства проходит все время одна и та же траектория. Из этого следует¹⁾, что орбита может быть или периодической, или же будет заполнять одинаково плотно некоторые гиперповерхности фазового пространства.

¹⁾ См. Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, гл. IV, изд. 2, М., 1949.

Рассмотрим самый простой случай, когда одна орбита заполняет всюду плотно все фазовое пространство. Следовательно,

$$f = \text{const.} \quad (92.4)$$

В таком случае каждая звезда через некоторый промежуток времени должна занять положение и иметь скорость, отличающиеся сколь угодно мало от наперед заданных величин. Хотя выражение (92.4) формально удовлетворяет уравнению (92.2), но, тем не менее, этот случай является невозможным с физической точки зрения, так как при этом все скорости, а, следовательно, и бесконечно большие, являются одинаково вероятными.

Если каждая фазовая траектория заполняет одинаково плотно гиперповерхность, имеющую число измерений на единицу меньше, чем все пространство, то можно фазовое пространство разделить на семейство с одним параметром гиперповерхностей пяти измерений, в которых функция распределения будет постоянна. В этом случае функция

$$f = f(I_1)$$

зависит только от одного интеграла, который изменяется при изменении параметра семейства гиперповерхностей.

При разделении фазового пространства на семейство с двумя параметрами гиперповерхностей четырех измерений наша функция будет зависеть от двух первых интегралов

$$f = f(I_1, I_2)$$

и т. д.

Чем меньше измерений имеют гиперповерхности, заполненные одинаково плотно траекториями, и, следовательно, чем больше параметров содержит семейство гиперповерхностей, тем от большего числа первых интегралов зависит функция распределения. В предельном случае все фазовое пространство делится на отдельные кривые, вдоль которых оно постоянно. Каждая из этих кривых представляет собой отдельную периодическую траекторию. В этом случае функция распределения зависит от всех пяти первых интегралов.

93. I случай: общая форма потенциала. Не делая никаких предположений относительно вида потенциала, кроме предположения, что потенциал не зависит от времени, можно найти только один первый интеграл; действительно, соединяя в уравнениях (92.3) первый член с четвертым, второй с пятым и третий с шестым, а затем складывая почленно полученные выражения, имеем

$$u du + v dv + w dw = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz,$$

т. е.

$$\frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) = -d\Phi.$$

Интегрируя, получим

$$I_1 \equiv u^2 + v^2 + w^2 + 2\Phi = \text{const.} \quad (93.1)$$

Это выражение называется интегралом энергии.

94. II случай: потенциал с осевой симметрией. Чтобы получить другие интегралы движения, необходимо ввести некоторые ограничивающие предположения относительно вида потенциала. Можно предположить, например, что потенциал обладает осевой симметрией;

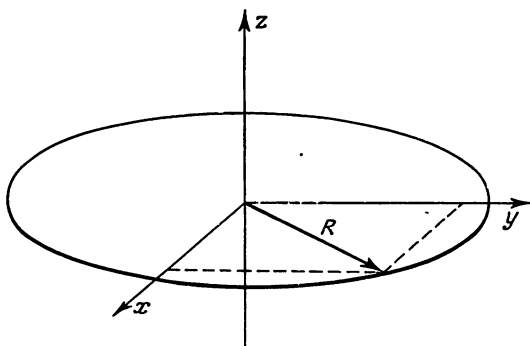


Рис. 64.

пусть ось симметрии совпадает с осью z системы координат. В таком случае потенциал не будет непосредственно зависеть от x и y , а будет зависеть только от R (рис. 64), причем

$$R^2 = x^2 + y^2.$$

Уравнения (92.3) примут в этом случае вид

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = -\frac{du}{\frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x}} = -\frac{dv}{\frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y}} = -\frac{dw}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Соединяя в уравнениях (92.3) первый член со вторым и четвертый с пятым, имеем

$$x dv = y du, \quad v dx = u dy,$$

интегрируя, получаем второй интеграл

$$I_2 \equiv vx - uy = \text{const.} \quad (94.1)$$

Это выражение называется интегралом площадей.

95. III случай: потенциал со сферической симметрией. В этом случае

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = -\frac{du}{\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{x}{r}} = -\frac{dv}{\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{y}{r}} = -\frac{dw}{\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{z}{r}},$$

следовательно,

$$y dw = z dv, \quad z du = x dw, \quad x dv = y du$$

$$w dy = v dz, \quad u dz = w dx, \quad v dx = u dy,$$

т. е. в конце концов, кроме интеграла I_1 , получаем еще три интеграла, а именно:

$$I' \equiv yw - zv = \text{const}, \quad I'' \equiv zu - xw = \text{const},$$

$$I''' \equiv xv - yu = \text{const}^1).$$

Однако, нельзя составить из этих интегралов произвольной функции. Действительно, левая часть уравнения (91.1) обладает сферической симметрией. Следовательно, и правая часть, т. е. функция f , должна также быть симметричной. Поэтому функция распределения может быть лишь такой комбинацией интегралов I' , I'' и I''' , в которую входит только r , но не входят непосредственно координаты x , y , z , т. е. единственно возможным может быть следующее выражение:

$$\begin{aligned} I^2 &\equiv I'^2 + I''^2 + I'''^2 \equiv \\ &\equiv (x^2 + y^2 + z^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (xu + yv + zw)^2, \end{aligned} \quad (95.1)$$

в котором последняя скобка является скалярным произведением радиуса вектора на вектор скорости.

Таким образом, мы получаем решение в виде

$$f = f(I_1, I).$$

96. IV случай: потенциал вида $\Phi(R, z) = \Phi_1(R) + \Phi_2(z)$. Если предположить, что потенциал, кроме осевой симметрии, удовлетворяет еще условию

$$\Phi(R, z) = \Phi_1(R) + \Phi_2(z), \quad (96.1)$$

в котором первое слагаемое зависит только от расстояния R от оси, а второе — от z , то, кроме интеграла I_1 [формула (93.1)] и I_2 [формула (94.1)], можно получить еще один интеграл.

Действительно,

$$-\frac{dw}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = \frac{dz}{w}.$$

¹⁾ Можно доказать, что эти интегралы взаимно независимы.

Это уравнение можно, принимая во внимание равенство (96.1), записать следующим образом:

$$-\frac{dw}{\frac{\partial \Phi_2(z)}{\partial z}} = \frac{dz}{w}.$$

Интегрируя, получаем третий интеграл

$$I_3 \equiv \frac{1}{2} w^2 - \Phi_2(z) = \text{const.}$$

В этом случае решение зависит от трех первых интегралов, т. е.

$$f = f(I_1, I_2, I_3).$$

97. Другие формы потенциала. Если предположить, что потенциал имеет вид

$$\Phi = ar^2,$$

то можно найти два других независимых первых интеграла. К сожалению, это выражение потенциала не имеет реального физического смысла, поэтому не будем приводить других аналогичных примеров. Обратим внимание читателей лишь на то, что для системы, состоящей из центральной массы, сосредоточенной в точке, и звезд, обращающихся вокруг нее, причем суммарная масса звезд пренебрежимо мала по сравнению с центральной массой, можно, не решая совсем основного уравнения, определить все первые интегралы, даже и в случае нестационарной системы. В этом случае движение звезды вокруг центральной массы определяется решениями, полученными в классической задаче двух тел. Таким образом, основываясь на теореме п. 92, можно из известных интегралов движения задачи двух тел получить различные формы функции f . Однако, этот случай не представляет особого интереса с практической точки зрения.

Из приведенных выше примеров следует, что для получения наиболее общего решения необходимо задать возможно более конкретную форму потенциала. В дальнейшем мы убедимся, что указанное обстоятельство не является чем-то случайным, а имеет более глубокие причины.

98. Применение случая II к теории Галактики. Несмотря на то, что нам удалось найти только некоторые частные решения уравнения динамики, попытаемся все же выяснить, могут ли полученные частные решения представить хотя бы приближенно движение звезд в Галактике. Известно, что, не делая никаких предположений относительно вида потенциала, можно получить функцию распределения, зависящую только от интеграла энергии I_1 ; следовательно, все три компонента скорости [см. формулу (93.1)] входят в функцию f симметричным образом: этому случаю соответствует сферическое распределение скоростей. Однако, установлено (гл. III), что в действительности распределение скоростей в Галактике не является сферическим.

Рассмотрим случай II, в котором предполагается существование осевой симметрии. Если принять это предположение, то можно, вводя цилиндрические координаты, так же, как в п. 67, переписать интегралы I_1 и I_2 в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 + 2\Phi(R, z) = \text{const}, \\ I_2 &= R\Theta = \text{const}, \end{aligned}$$

а затем исследовать случай, соответствующий эллипсоидальному распределению скоростей [закон Шварцшильда, см. формулу (56.4)]. Однако, ради общности полученных выводов рассмотрим так называемое обобщенное распределение Шварцшильда, приняв, что функция распределения зависит только от аргумента Q , а именно:

$$Q = a\Pi^2 + b\Theta^2 + cZ^2,$$

где a , b и c зависят от координат.

С одной стороны, функция f должна удовлетворять соотношению

$$f = f(I_1, I_2),$$

а с другой — из существования обобщенного распределения Шварцшильда следует, что аргумент должен иметь вид

$$Q = a\Pi^2 + b\Theta^2 + cZ^2$$

или, если направление осей эллипсоида скоростей и положение его центра неизвестны, то более общий вид

$$\begin{aligned} Q + \sigma &= a\Pi^2 + b\Theta^2 + cZ^2 + 2f\Theta Z + \\ &+ 2gZ\Pi + 2h\Pi\Theta - 2\Delta_1\Pi - 2\Delta_2\Theta - 2\Delta_3Z - \chi, \end{aligned} \quad (98.1)$$

где σ и χ — постоянные, физический смысл которых будет выяснен в дальнейшем (см. п. 101). Следовательно, компоненты скоростей могут входить в функцию распределения только или в первой степени, или в квадрате.

Это значит, что

$$\begin{aligned} f(I_1, I_2) &= f(Q), \\ Q &= I_1 + 2k_1I_2 + k_2I_2^2, \end{aligned}$$

величины a , b , c , Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 — функции координат, так как форма эллипсоида, вообще говоря, изменяется в зависимости от координат. Таким образом,

$$Q + \sigma = \Pi^2 + Z^2 + \Theta^2(1 + k_2R^2) + 2k_1R\Theta + 2\Phi.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= 1 + k_2R^2, \quad \Theta_0 = -\frac{k_1R}{\lambda^2}, \\ \Phi_1 &= \Phi - \frac{1}{2}\lambda^2\Theta_0^2, \end{aligned} \right\} \quad (98.2)$$

в таком случае имеем

$$Q + \sigma = \Pi^2 + Z^2 + \lambda^2 (\Theta - \Theta_0)^2 + 2\Phi.$$

Отсюда следует, что оси эллипсоида скоростей совпадают с направлениями осей R , z , ϑ в каждой точке. Отношение полуосей Π , Z и Θ равно

$$1 : 1 : \frac{1}{\lambda}.$$

Итак, движение центроида, определяемое формулой (98.2), происходит вокруг оси z ; направление же движения зависит от знаков постоянных k_1 и k_2 .

Если $k_2 = 0$, то скорости вращения центроидов увеличиваются пропорционально расстоянию [см. формулы (98.2)]. Следовательно, при этом мы имеем случай вращения Галактики как твердого тела и получаем сферическое распределение скоростей ($\lambda = 1$). Если $k_2 < 0$, то направление большей полуоси эллипсоида должно совпадать с направлением вращения; при $k_2 > 0$ две полуоси эллипсоида должны быть равны, притом одна из них направлена к центру Галактики, другая же — параллельно оси симметрии, т. е. перпендикулярно к галактической плоскости. Как известно, оба эти случая не соответствуют наблюдаемому распределению скоростей в Галактике.

99. Возможность применения случая III к теории шаровых скоплений. Случай III, соответствующий потенциалу со сферической симметрией, не применим к Галактике, однако, его все же можно применить к шаровым скоплениям, обладающим сферической симметрией; эти объекты можно считать в первом приближении изолированными системами. Займемся теми выводами, которые можно получить, сравнивая наши результаты с обобщенным распределением Шварцшильда.

Помня, что последняя скобка в уравнении (95.1) является скалярным произведением двух векторов, обозначая модуль вектора скорости через V , т. е.

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

и вводя угол α между вектором скорости и радиусом вектором, получим

$$I^2 \equiv V^2 r^2 - V^2 r^2 \cos^2 \alpha = V^2 r^2 \sin^2 \alpha = \text{const}$$

и

$$f = f(I_1, I) = f(V^2 + 2\Phi, r^2 V^2 \sin^2 \alpha).$$

Из этого следует, что в данной точке пространства уравнения поверхностей одинаковой плотности концов векторов скоростей зависят только от модуля V и угла α между скоростью и направлением к центру системы. Чтобы лучше исследовать эту зависимость, введем

сферическую систему координат (рис. 65) и обозначим координаты точки через r , φ , ψ , а компоненты скорости—через R , $\tilde{\Phi}$, Ψ . Ясно, что

$$R = \dot{r},$$

$$\Psi = r\dot{\psi},$$

$$\tilde{\Phi} = r \sin \psi \dot{\varphi},$$

следовательно,

$$I_1 = R^2 + \Psi^2 + \tilde{\Phi}^2 + 2\Phi$$

и

$$I \equiv \sqrt{r^2(R^2 + \Psi^2 + \tilde{\Phi}^2) \sin^2 \alpha} = r \sqrt{\Psi^2 + \tilde{\Phi}^2}.$$

Самым общим многочленом второй степени вида (98.1), который можно получить из этих выражений, является многочлен

$$Q + \sigma = I_1 + kI^2 = R^2 + \Psi^2(1 + kr^2) + \tilde{\Phi}^2(1 + kr^2) + 2\Phi.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы приходим к выводу, что отношение полуосей R , Ψ и $\tilde{\Phi}$ эллипсоида скоростей должно равняться

$$1 : \frac{1}{\sqrt{1 + kr^2}} : \frac{1}{\sqrt{1 + kr^2}} = \\ = \sqrt{1 + kr^2} : 1 : 1.$$

При $k > 0$ направление большой полуоси совпадает с направлением к центру (вытянутый эллипсоид вращения); случай $k = 0$ соответствует сферическому распределению скоростей; при $k < 0$ имеем сплюснутый эллипсоид вращения с малой осью R . Этот случай особо интересен тем, что полученное решение имеет смысл только лишь при r , меньших чем

$\sqrt{\frac{-1}{k}} = r_0$. Находящиеся на таком

расстоянии звезды имеют скорости, перпендикулярные к r , и ни одна звезда не может выйти за пределы шара с радиусом r_0 . В центре системы распределение всегда сферическое независимо от k .

К сожалению, у нас слишком мало данных о движениях звезд в шаровых скоплениях для того, чтобы оценить возможность применения этого решения.

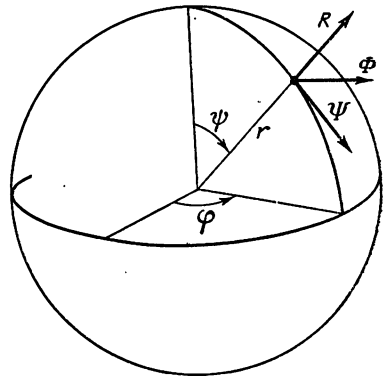


Рис. 65.

100. Другие применения. Для случая IV можно построить эллипсоидальное распределение скоростей с тремя различными полуосями, причем большая полуось будет направлена к центру системы

так, как это наблюдается в Галактике (соответствующие вычисления, аналогичные тем, которые были проведены при рассмотрении предыдущих случаев, легко сделает сам читатель). Однако, этот случай не соответствует действительности, так как в формуле (96.1) нельзя так подобрать функции Φ_1 и Φ_2 , чтобы при бесконечно больших значениях R и z потенциал стремился к нулю (кроме тривиального случая, т. е. $\Phi(R, z) = 0$ для всех значений R и z). Конечному значению потенциала в бесконечности соответствует бесконечно большая система; Галактика же не является такой системой. Не будем останавливаться также на сравнении с наблюдениями случая ньютоновского потенциала¹⁾.

Приведенные примеры показывают, что решение основного уравнения динамики звездных систем дает очень немного сведений относительно функции распределения; тем не менее, это решение имеет некоторую ценность, так, например, решение случая IV можно применять к Галактике, считая, что оно справедливо вблизи центра Галактики, а на окраинах — нет. Можно рассматривать также решение случая II, предполагая при этом, что расхождение теории с наблюдениями, касающееся длины оси Z , является результатом действия некоторых дополнительных возмущающих сил в Галактике. В отдельных случаях можно, таким образом, получить зависимости, находящиеся в согласии с наблюдениями; к этому вопросу мы еще вернемся в п. 108. Принципиально можно, конечно, искать еще другие, более пригодные решения, однако, всюду мы встретимся с одной и той же трудностью, а именно: приняв сложную форму потенциала, невозможно найти большого числа первых интегралов, поэтому полученная кинематическая картина будет слишком примитивной, а, следовательно, не применимой к Галактике. Если же мы будем стремиться получить более сложную форму функции распределения, что можно сделать, только зная большое число первых интегралов, то следует принять очень странную форму потенциала, не соответствующую действительности.

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОТЕНЦИАЛА. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

101. Преобразование уравнения в предположении обобщенного распределения Шварцшильда. Более продуктивным является решение основного уравнения звездной динамики при заданной а priori форме функции распределения. При этом нет надобности задавать функцию распределения полностью, так как, зная только пространственное распределение звезд в некоторый момент времени, можно определить потенциал, пользуясь уравнением Пуассона (91.1) и не прибегая

¹⁾ Интересующихся этим вопросом мы отсылаем к статье: Clerk, *M.N.*, 97, 200 (1937).

к основному уравнению динамики. Итак, принятие какого-либо распределения скоростей определяет распределение координат, получаемое при помощи решения основного уравнения. Поэтому, если предположить существование обобщенного распределения Шварцшильда, то, считая неизвестными коэффициенты при соответствующих членах уравнения эллипсоида (зависящие от координат) и потенциал, приходим к эллипсоидальной теории звездной динамики.

Проведем все вычисления для случая нестационарной системы, причем если полученные частные решения не будут зависеть от времени, то применим их также к стационарным системам.

Для самого общего случая распределения Шварцшильда с учетом возможного движения центроидов в произвольном направлении можно написать

$$Q = a(u - u_0)^2 + b(v - v_0)^2 + c(w - w_0)^2 + \\ + 2f(v - v_0)(w - w_0) + 2g(w - w_0)(u - u_0) + 2h(u - u_0)(v - v_0). \quad (101.1)$$

Вместо величины N , равной общему числу звезд в данном элементе пространства и входящей в формулу (56.4), введем величину σ так, чтобы в этом случае

$$\frac{N h k l}{\sqrt{\pi^3}} e^{-Q} = e^{-(Q+\sigma)}.$$

Введем также следующие обозначения:

$$\Delta_1 = a u_0 + h v_0 + g w_0, \quad (101.2)$$

$$\Delta_2 = h u_0 + b v_0 + f w_0, \quad (101.3)$$

$$\Delta_3 = g u_0 + f v_0 + c w_0, \quad (101.4)$$

$$-\chi = a u_0^2 + b v_0^2 + c w_0^2 + 2f v_0 w_0 + 2g w_0 u_0 + 2h u_0 v_0 + \sigma. \quad (101.5)$$

Следовательно, уравнение (101.1) можно переписать в более удобном виде

$$Q + \sigma = a u^2 + b v^2 + c w^2 + 2f v w + 2g w u + 2h u v - \\ - 2\Delta_1 u - 2\Delta_2 v - 2\Delta_3 w - \chi. \quad (101.6)$$

Предположим далее, что в этом случае можно применить основное уравнение в непрерывной форме [см. формулу (89.7)]; кроме того, предположим, что в каждой точке пространства в каждый момент времени существует однозначно определенный центроид. Так как функция распределения координат и скоростей должна зависеть от величин x, y, z, u, v, w и t только через $Q + \sigma$, то ее производная по произвольному аргументу, который обозначим временно α , будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{df}{d(Q + \sigma)} \frac{\partial (Q + \sigma)}{\partial \alpha}.$$

Разделив основное уравнение (89.7) на $\frac{df}{d(Q+\sigma)}$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial x} u + \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial y} v + \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial z} w - \\ - \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial u} \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial v} \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial w} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \quad (101.7)$$

Уравнение это неоднородно относительно потенциала, поэтому его нельзя решить простым методом; следовательно, по мере надобности придется вводить некоторые упрощения. Впервые уравнение (101.7) в несколько упрощенной форме решил Оорт в 1928 г.¹⁾ Впоследствии другие исследователи рассмотрели более общий случай, в частности, Чандрасекхар²⁾, рассуждения которого приводятся ниже.

Обратим внимание на то, что величины Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 в уравнении (101.6) не зависят от скоростей, а величины x , y , z , u , v и w являются независимыми переменными [так как выражение (86.1) не является функциональной зависимостью]. Следовательно, уравнение (101.7) можно переписать в виде

$$u^2 \frac{\partial a}{\partial t} + v^2 \frac{\partial b}{\partial t} + w^2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2vw \frac{\partial f}{\partial t} + 2wu \frac{\partial g}{\partial t} + 2uv \frac{\partial h}{\partial t} - \\ - 2u \frac{\partial \Delta_1}{\partial t} - 2v \frac{\partial \Delta_2}{\partial t} - 2w \frac{\partial \Delta_3}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial t} + \\ + u \left[u^2 \frac{\partial a}{\partial x} + v^2 \frac{\partial b}{\partial x} + w^2 \frac{\partial c}{\partial x} + 2vw \frac{\partial f}{\partial x} + 2wu \frac{\partial g}{\partial x} + 2uv \frac{\partial h}{\partial x} - \right. \\ \left. - 2u \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} - 2v \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} - 2w \frac{\partial \Delta_3}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] + \\ + v \left[u^2 \frac{\partial a}{\partial y} + v^2 \frac{\partial b}{\partial y} + w^2 \frac{\partial c}{\partial y} + 2vw \frac{\partial f}{\partial y} + 2wu \frac{\partial g}{\partial y} + 2uv \frac{\partial h}{\partial y} - \right. \\ \left. - 2u \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} - 2v \frac{\partial \Delta_2}{\partial y} - 2w \frac{\partial \Delta_3}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right] + \\ + w \left[u^2 \frac{\partial a}{\partial z} + v^2 \frac{\partial b}{\partial z} + w^2 \frac{\partial c}{\partial z} + 2vw \frac{\partial f}{\partial z} + 2wu \frac{\partial g}{\partial z} + 2uv \frac{\partial h}{\partial z} - \right. \\ \left. - 2u \frac{\partial \Delta_1}{\partial z} - 2v \frac{\partial \Delta_2}{\partial z} - 2w \frac{\partial \Delta_3}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right] - \\ - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} (au + hv + gw - \Delta_1) - \\ - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} (hu + bv + fw - \Delta_2) - \\ - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} (gu + fv + cw - \Delta_3) = 0. \quad (101.8)$$

¹⁾ BAN, 4, 269 (1928).

²⁾ Чандрасекхар С., Принципы звездной динамики, М., 1948, стр. 93 и след.

Так как левая часть указанного уравнения должна быть равна нулю при всех значениях u , v и w , то, следовательно, надо приравнять нулю все коэффициенты при членах, содержащих различные степени u , v , w . Таким образом, получаем 20 уравнений.

1 группа. Уравнения, полученные из членов третьей степени относительно u , v , w ,

$$\text{кубы} \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial x} = 0, & (101.9) \\ \frac{\partial b}{\partial y} = 0, & (101.10) \\ \frac{\partial c}{\partial z} = 0; & (101.11) \end{cases}$$

$$\text{произведения квадратов} \begin{cases} 2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} = 0, & (101.12) \\ 2 \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} = 0, & (101.13) \\ 2 \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0, & (101.14) \\ 2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0, & (101.15) \\ 2 \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0, & (101.16) \\ 2 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y} = 0; & (101.17) \end{cases}$$

$$\text{произведения} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0. & (101.18) \end{cases}$$

2 группа. Уравнения, полученные из членов второй степени относительно u , v , w ,

$$\text{квадраты} \begin{cases} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial t}, & (101.19) \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial t}, & (101.20) \\ \frac{\partial \Delta_3}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial t}; & (101.21) \end{cases}$$

$$\text{произведения} \begin{cases} \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t}, & (101.22) \\ \frac{\partial \Delta_3}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t}, & (101.23) \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial z} + \frac{\partial \Delta_3}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t}. & (101.24) \end{cases}$$

3 группа. Уравнения, полученные из членов первой степени и свободного члена

$$\begin{cases} a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + h \frac{\partial \Phi}{\partial y} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Delta_1}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, & (101.25) \\ h \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y}, & (101.26) \\ g \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Delta_3}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial z}; & (101.27) \end{cases}$$

$$\text{свободный член} \quad \left\{ \Delta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Delta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Delta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \right. \quad (101.28)$$

Все эти три группы уравнений различаются между собой. Первая дает зависимости коэффициентов эллипсоида скоростей от координат. Вторая — зависимости величин Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 тоже от координат; следовательно, определив из первой группы уравнений величины a , b , c , f , g и h , можно найти таким образом компоненты движения центроидов [см. формулы (101.2) — (101.4)]. Кроме того, получим некоторые соотношения между коэффициентами эллипсоида скоростей и временем. Легко видеть, что при отсутствии движения центроидов коэффициенты эллипсоида не зависят от времени. Иначе говоря, в *нестационарных системах должно существовать движение центроидов*. Эта теорема не является чем-то вполне очевидным; действительно, нестационарность системы могла бы проявиться, например, в изменении длины полуосей эллипсоида скоростей, не связанном с движением центроидов. Третья группа содержит уравнения, определяющие потенциал и зависимость компонентов движения центроидов от времени. Характерной особенностью этой группы является то, что в ней нет уравнений, непосредственно связывающих потенциал со временем. Такая зависимость может быть установлена только с помощью величины χ [см. (101.5)] и уравнения Пуассона (91.1).

102. Решение первой группы уравнений. Перейдем теперь к решению уравнений первой группы. Уравнение (101.9) показывает, что a не зависит от x . Дифференцируя уравнение (101.12) по x , мы убеждаемся, что h должно быть линейной функцией x . Затем, продифференцировав уравнение (101.14) дважды по x , приходим к выводу, что b является функцией второй степени относительно x . Таким же образом на основании уравнений (101.13) и (101.16) установим, что g является линейной функцией x , а c — функцией второй степени относительно того же аргумента. Применяя полученные результаты к уравнению (101.18), придем к аналогичному выводу относительно величины f . Дифференцируя соответствующие уравнения по y и z , получим следующие окончательные результаты, приведенные в таблице:

Таблица 16

	Не зависит от	Является функцией не выше первой степени относительно	Является функцией не выше второй степени относительно
a	x	—	y, z
b	y	—	z, x
c	z	—	x, y
f	—	y, z	x
g	—	z, x	y
h	—	x, y	z

Следовательно, коэффициенты эллипсоида являются многочленами. Согласно данным приведенной выше таблицы, величины f , g и h в общем виде можно записать, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f &= (f_{10} + f_{11}x + f_{12}x^2) + (f_{20} + f_{21}x + f_{22}x^2)y + \\ &\quad + (f_{30} + f_{31}x + f_{32}x^2)z + (f_{40} + f_{41}x + f_{42}x^2)zy, \\ g &= (g_{10} + g_{11}y + g_{12}y^2) + (g_{20} + g_{21}y + g_{22}y^2)z + \\ &\quad + (g_{30} + g_{31}y + g_{32}y^2)x + (g_{40} + g_{41}y + g_{42}y^2)zx, \\ h &= (h_{10} + h_{11}z + h_{12}z^2) + (h_{20} + h_{21}z + h_{22}z^2)x + \\ &\quad + (h_{30} + h_{31}z + h_{32}z^2)y + (h_{40} + h_{41}z + h_{42}z^2)xy; \end{aligned} \right\} \quad (102.1)$$

здесь величины $f_{10}, f_{11}, \dots, h_{42}$ являются в самом общем случае функциями только времени.

Дифференцируя уравнение (101.12) по z , а уравнение (101.13) по y , вычитая затем одно из другого и подставляя вместо величин g и h их выражения, согласно формуле (102.1), получим

$$g_{31} + 2g_{32}y + z(g_{41} + 2g_{42}y) = h_{21} + 2h_{22}z + y(h_{41} + 2h_{42}z). \quad (102.2)$$

Аналогичным образом из двух уравнений (101.14), (101.15) и пары уравнений (101.16), (101.17) имеем

$$h_{31} + 2h_{32}z + x(h_{41} + 2h_{42}z) = f_{21} + 2f_{22}x + z(f_{41} + 2f_{42}x), \quad (102.3)$$

$$f_{31} + 2f_{32}x + y(f_{41} + 2f_{42}x) = g_{21} + 2g_{22}y + x(g_{41} + 2g_{42}y). \quad (102.4)$$

Подставляя выражения f , g и h в уравнение (101.18), получим

$$\begin{aligned} &(f_{11} + 2f_{12}x) + (f_{21} + 2f_{22}x)y + (f_{31} + 2f_{32}x)z + (f_{41} + 2f_{42}x)yz + \\ &+ (g_{11} + 2g_{12}y) + (g_{21} + 2g_{22}y)z + (g_{31} + 2g_{32}y)x + (g_{41} + 2g_{42}y)zx + \\ &+ (h_{11} + 2h_{12}z) + (h_{21} + 2h_{22}z)x + (h_{31} + 2h_{32}z)y + \\ &\quad + (h_{41} + 2h_{42}z)xy = 0. \end{aligned} \quad (102.5)$$

Так как эти равенства должны быть справедливы при любых значениях x , y и z , то в обеих частях уравнений (102.2)—(102.4) можно приравнять коэффициенты, а в уравнении (102.5) соответ-

ствующие коэффициенты приравнять нулю. Это читатель может сделать сам; в результате получится система двенадцати простых уравнений, из которой следует, что

$$\left. \begin{aligned} f_{12} &= -h_{21} = -g_{31}, \\ g_{12} &= -f_{21} = -h_{31}, \\ h_{12} &= -g_{21} = -f_{31}, \\ f_{22} &= f_{32} = f_{41} = f_{42} = g_{22} = g_{32} = g_{41} = g_{42} = \\ &= h_{22} = h_{32} = h_{41} = h_{42} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (102.6)$$

кроме того,

$$f_{11} + g_{11} + h_{11} = 0. \quad (102.7)$$

Используя уравнения (102.6), можно соотношения (102.1) переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} f &= (f_{10} + f_{11}x - h_{21}x^2) + (f_{20} + f_{21}x)y + \\ &\quad + (f_{30} + g_{21}x)z + f_{40}yz, \\ g &= (g_{10} + g_{11}y - f_{21}y^2) + (g_{20} + g_{21}y)z + \\ &\quad + (g_{30} + h_{21}y)x + g_{40}zx, \\ h &= (h_{10} + h_{11}z - g_{21}z^2) + (h_{20} + h_{21}z)x + \\ &\quad + (h_{30} + f_{21}z)y + h_{40}xy. \end{aligned} \right\} \quad (102.8)$$

Определив величины f , g и h , займемся величинами a , b и c . Подставляя в уравнение (101.12) вместо величины h соответствующее выражение из соотношений (102.8), получим

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -2(h_{20} + h_{21}z)2h_{40}y.$$

Используя написанное выражение, а также данные, приведенные в таблице 16, приходим к выводу, что в самом общем случае a должно иметь следующий вид:

$$a = -2(h_{20} + h_{21}z)y - h_{40}y^2 - (a_0 + a_1z + a_2z^2). \quad (102.9)$$

Здесь a_0 , a_1 и a_2 — функции только времени. Подставив выражение a из уравнения (102.9), а значение g из формулы (102.8) в уравнение (101.13) и приравняв соответствующие коэффициенты при x , y и z , получим

$$a_1 = 2g_{30}, \quad a_2 = g_{40}.$$

Это позволит нам упростить выражение (102.9); аналогично вычислим остальные коэффициенты эллипсоида скоростей. Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} a &= -2(h_{20} + h_{21}z)y - h_{40}y^2 - (a_0 + 2g_{30}z + g_{40}z^2), \\ b &= -2(f_{20} + f_{21}x)z - f_{40}z^2 - (b_0 + 2h_{30}x + h_{40}x^2), \\ c &= -2(g_{20} + g_{21}y)x - g_{40}x^2 - (c_0 + 2f_{30}y - f_{40}y^2). \end{aligned} \right\} \quad (102.10)$$

103. Решение уравнений второй группы. Определяя величины Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 из второй группы уравнений, будем поступать так же, как и с первой группой (см. п. 102); получим следующую таблицу:

Т а б л и ц а 17

	Является функцией не выше первой степени	Является функцией не выше второй степени
Δ_1	x	y, z
Δ_2	y	z, x
Δ_3	z	x, y

Так как a не зависит от x , b — от y и c — от z , то, следовательно, используя уравнения (101.19) — (101.21), получим следующие общие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial t} x + \alpha_{22} y^2 z^2 + \alpha_{21} y^2 z + \alpha_{12} y z^2 + \alpha_{20} y^2 + \alpha_{02} z^2 + \\ &\quad + \alpha_{11} x z + \beta_3 y + \gamma_2 z + \delta_1, \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial t} y + \beta_{22} z^2 x^2 + \beta_{21} z^2 x + \beta_{12} z x^2 + \beta_{20} z^2 + \beta_{02} x^2 + \\ &\quad + \beta_{11} y x + \beta_1 z + \gamma_3 x + \delta_2, \\ \Delta_3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial t} z + \gamma_{22} x^2 y^2 + \gamma_{21} x^2 y + \gamma_{12} x y^2 + \gamma_{20} x^2 + \gamma_{02} y^2 + \\ &\quad + \gamma_{11} z y + \beta_2 x + \gamma_1 y + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (103.1)$$

где величины $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \delta_3$ являются функциями только времени. Подставляя выражения (103.1) и (102.8) в уравнения (101.22) — (101.24) и сравнивая соответствующие коэффициенты, получаем следующие формулы (вывод этих формул предоставляем читателю):

$$\alpha_{22} = \beta_{22} = \gamma_{22} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \gamma_{21} = \alpha_{12} = \beta_{12} = \gamma_{12} = 0; \quad (103.2)$$

величины $f_{40}, g_{40}, h_{40}, f_{21}, g_{21}, h_{21}$ являются постоянными, не зависящими от времени (103.3)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{20} &= \frac{dh_{30}}{dt}, & \beta_{20} &= \frac{df_{30}}{dt}, & \gamma_{20} &= \frac{dg_{30}}{dt}, \\ \alpha_{02} &= \frac{dg_{20}}{dt}, & \beta_{02} &= \frac{dh_{20}}{dt}, & \gamma_{02} &= \frac{df_{20}}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (103.4)$$

$$\beta_1 + \gamma_1 = \frac{df_{10}}{dt}, \quad \beta_2 + \gamma_2 = \frac{dg_{10}}{dt}, \quad \beta_3 + \gamma_3 = \frac{dh_{10}}{dt}, \quad (103.5)$$

$$\beta_{11} + \gamma_{11} = \frac{df_{11}}{dt}, \quad \gamma_{11} + \alpha_{11} = \frac{dg_{11}}{dt}, \quad \alpha_{11} + \beta_{11} = \frac{dh_{11}}{dt}. \quad (103.6)$$

Складывая почленно уравнения (103.6) и используя соотношение (102.7), имеем

$$\alpha_{11} + \beta_{11} + \gamma_{11} = 0,$$

поэтому вместо системы (103.6) получим новую систему

$$\alpha_{11} = -\frac{df_{11}}{dt}, \quad \beta_{11} = -\frac{dg_{11}}{dt}, \quad \gamma_{11} = -\frac{dh_{11}}{dt}. \quad (103.7)$$

Подставляя выражение для Δ_1 из формулы (103.1) в уравнение (101.19) и принимая во внимание соотношения (103.2), (103.4) и (103.7), а также (103.3), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & y \left(y \frac{dh_{30}}{dt} - x \frac{dh_{20}}{dt} \right) - z \left(x \frac{dg_{30}}{dt} - z \frac{dg_{20}}{dt} \right) - \\ & - \frac{df_{11}}{dt} yz - \frac{1}{2} \frac{da_0}{dt} x + \beta_3 y + \gamma_2 z + \delta_1, \end{aligned} \quad (103.8)$$

аналогично

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 = & z \left(z \frac{df_{30}}{dt} - y \frac{df_{20}}{dt} \right) - x \left(y \frac{dh_{30}}{dt} - x \frac{dh_{20}}{dt} \right) - \\ & - \frac{dg_{11}}{dt} zx - \frac{1}{2} \frac{db_0}{dt} y + \beta_1 z + \gamma_3 x + \delta_2, \\ \Delta_3 = & x \left(x \frac{dg_{30}}{dt} - z \frac{dg_{20}}{dt} \right) - y \left(z \frac{df_{30}}{dt} - y \frac{df_{20}}{dt} \right) - \\ & - \frac{dh_{11}}{dt} xy - \frac{1}{2} \frac{dc_0}{dt} z + \beta_2 x + \gamma_1 y + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (103.9)$$

это есть решение второй группы уравнений.

104. Теорема о винтовой симметрии. Итак, после довольно многих подстановок и преобразований получены окончательные решения первых двух групп уравнений. Гораздо больше трудностей связано с решением третьей группы уравнений. Прежде чем перейти к систематическому решению этой группы уравнений, остановимся на рассмотрении теоремы о существовании винтовой симметрии стационарных систем, впервые доказанной Чандрасекхаром в 1939 г.¹⁾

Введем тензор второй степени A

$$A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \quad (104.1)$$

и вектор $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$. Тогда уравнения первой группы можно свести к двум векторным уравнениям, а именно:

$$A \text{ grad } \Phi + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \text{ grad } \chi, \quad (104.2)$$

$$\Delta \text{ grad } \Phi = +\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (104.3)$$

Решить эти уравнения в общем виде нельзя. Однако, если предположить, что рассматриваемая система стационарна, то правую часть

¹⁾ *ApJ*, **90**, 46 (1939).

уравнения (104.3) можно приравнять нулю и получить таким образом однородные уравнения относительно потенциала. Эти уравнения можно решить методом характеристических уравнений, которыми будут уравнения

$$\frac{dx}{\Delta_1} = \frac{dy}{\Delta_2} = \frac{dz}{\Delta_3}. \quad (104.4)$$

Написанные равенства имеют смысл только в предположении существования движения центроидов; если, по крайней мере, одна из составляющих u_0 , v_0 и w_0 отличается от нуля, то Δ_1 , Δ_2 и $\Delta_3 \neq 0$ [ср. формулы (101.2) — (101.4)]. Общее решение будет иметь вид

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(I_1, I_2),$$

где I_1 и I_2 — первые интегралы системы уравнений (104.4). Условие стационарности позволяет на основании соотношений (103.8) и (103.9) получить следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \beta_3 y - \beta_2 z + \delta_1, \\ \Delta_2 &= \beta_1 z - \beta_3 x + \delta_2, \\ \Delta_3 &= \beta_2 x - \beta_1 y + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (104.5)$$

или же, вводя векторы,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, z), \\ \boldsymbol{\beta} &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ \boldsymbol{\delta} &= (\delta_1, \delta_2, \delta_3), \end{aligned}$$

получим

$$\Delta = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}.$$

Рассмотрим такую систему координат, в которой вектор $\boldsymbol{\beta}$ параллелен оси z . Следовательно,

$$\boldsymbol{\beta} = (0, 0, \beta).$$

и

$$\Delta_1 = \beta y + \delta_1, \quad \Delta_2 = -\beta x + \delta_2, \quad \Delta_3 = \delta_3.$$

Кроме того, можно преобразовать систему координат так, чтобы

$$\Delta_1 = \beta y, \quad \Delta_2 = -\beta x, \quad \Delta_3 = \delta_3.$$

В этой новой системе координат характеристические уравнения будут иметь вид

$$\frac{dx}{\beta y} = -\frac{dy}{\beta x} = \frac{dz}{\delta_3}.$$

Рассматривая совместно первый и второй член, получим

$$x dx + y dy = 0,$$

$$I_1 = x^2 + y^2 = k^2 = \text{const.}$$

Если объединить первый и третий члены, то

$$\frac{dx}{\beta \sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{dz}{\delta_3},$$

$$I_2 \equiv z + \frac{\delta_3}{\beta} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{const.}$$

Вводя цилиндрические координаты, получим

$$I_1 \equiv R,$$

$$I_2 \equiv z + \frac{\delta_3}{\beta} \vartheta$$

и потенциал

$$\Phi = \Phi \left(R, z + \frac{\delta_3}{\beta} \vartheta \right).$$

Для однозначности потенциала необходимо, чтобы он был периодической функцией ϑ , т. е.

$$\Phi \left(R, z + \frac{\delta_3}{\beta} \vartheta \right) = \Phi \left(R, z + \frac{\delta_3}{\beta} (\vartheta + 2\pi n) \right),$$

где n — целое число. Записывая это же выражение в другом виде, т. е.

$$\Phi \left(R, z + \frac{\delta_3}{\beta} \vartheta \right) = \Phi \left(R \left(z + \frac{2\pi n \delta_3}{\beta} \right) + \frac{\delta_3}{\beta} \vartheta \right),$$

получаем условие периодичности потенциала относительно z . Следовательно, для $R = \text{const}$ кривые равных потенциалов будут иметь винтовую форму (рис. 66), причем δ_3/β равно шагу винта. Звездная система с таким именно потенциалом, вообще говоря, бесконечна в на-

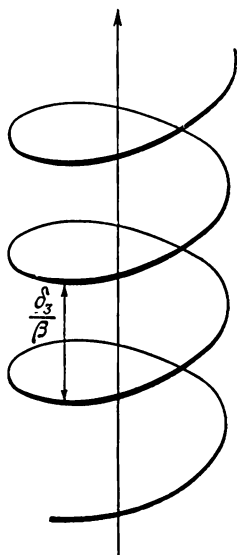


Рис. 66.

правлении оси z . Итак, самой общей формой стационарной системы в эллипсоидальной теории, в предположении существования движения центроидов, является винтовая симметрия. Чтобы избавиться от бесконечности, следует приравнять шаг винта нулю

$$\delta_3 = 0.$$

Таким образом, получим

$$\Phi = \Phi(R, z),$$

т. е. осевую симметрию. Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *конечная стационарная звездная система, обладающая движением центроидов, должна быть симметричной относительно оси.* Отсутствие движения центроидов приводит уравнение (104.4) к неопределенности (знаменатель равен нулю), следовательно, в этом случае возможны иные решения.

Из доказанного следует, например, что стационарная система, обладающая движением центроидов, не может быть спиральной. Этот

вывод не вносит ничего нового, так как он непосредственно вытекает из предположения о стационарности системы, требующего по определению постоянства потенциала и функции распределения во времени. Если будем вращать спираль, вырезанную из какого-либо жесткого материала, то такая система не будет стационарной, так как в различные моменты времени в одной и той же точке ветвь спирали то будет находиться, то не будет. Однако, нетривиальным является утверждение, что стационарные системы не могут быть, например, трехосными эллипсоидами, внутри которых движение центроидов происходило бы по каким-то асимметричным орбитам, а плотность материи была бы в каждой точке постоянна.

105. Упрощение уравнений в случае двух измерений. Так как мы не в состоянии в общем случае решить уравнений третьей группы, то займемся частными случаями, вводя некоторые предположения. Вскоре мы убедимся, что полученные при этом решения будут иметь практическое значение. Итак, предположим, что рассматриваемая система имеет осевую симметрию, и ограничимся решением только в двух измерениях. Предположение об осевой симметрии равносильно предположению о существовании состояния, близкого к стационарному, при котором, как было доказано, должна быть осевая симметрия. Указанное предположение вполне приемлемо в качестве первого приближения при изучении динамики Галактики. Часто даже Галактика просто рассматривается, как стационарная звездная система. Вполне естественно, что решение, полученное для двух измерений, непосредственно к Галактике неприменимо, однако, можно обобщить его на три измерения.

В случае системы двух измерений, например, плоскости (x, y) , коэффициенты c , f и g эллипсоида скоростей обращаются в нуль, остальные же [см. формулы (102.8), (102.10)] будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} a &= -a_0 - 2h_2y - h_4y^2, \\ b &= -b_0 - 2h_3x - h_4x^2, \\ h &= h_1 + h_2x + h_3y + h_4xy. \end{aligned} \right\} \quad (105.1)$$

Равно нулю также Δ_3 , следовательно, вместо формул (103.8) и (103.9) получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= y \left(y \frac{dh_3}{dt} - x \frac{dh_2}{dt} \right) - \frac{1}{2} \frac{da_0}{dt} x + \beta_3 y + \delta_1, \\ \Delta_2 &= -x \left(y \frac{dh_3}{dt} - x \frac{dh_2}{dt} \right) - \frac{1}{2} \frac{db_0}{dt} y + \gamma_3 x + \delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (105.2)$$

В формулах (105.1) и (105.2) оставлены только первые индексы, так как все коэффициенты, у которых вторые индексы отличны от нуля, исчезнут.

Третья группа уравнений (101.25)–(101.28) примет вид

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + h \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_1}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ h \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \Delta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Delta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (105.3)$$

Воспользовавшись существованием осевой симметрии, которая в случае двух измерений будет круговой, и введя новую переменную

$$\tau = \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2),$$

получим

$$a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + h \frac{\partial \Phi}{\partial y} = a \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} x + h \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} y = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} (ax + hy).$$

Следовательно, уравнения (105.3) можно переписать следующим образом:

$$(ax + hy) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Delta_1}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (105.4)$$

$$(hx + by) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad (105.5)$$

$$(\Delta_1 x + \Delta_2 y) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (105.6)$$

106. Решение третьей группы уравнений в случае двух измерений. Продифференцировав уравнение (105.4) по y , а уравнение (105.5) по x , можно приравнять левые части уравнений. Аналогично поступаем с уравнениями (105.5) и (105.6) и с уравнениями (105.4) и (105.6)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[(ax + hy) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial y \partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(hx + by) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial x \partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[(ax + hy) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\Delta_1 x + \Delta_2 y) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[(hx + by) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\Delta_1 x + \Delta_2 y) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (106.1)$$

Подставляя в уравнения (106.1) выражения (105.1) и (105.2), учитывая соотношение (103.5), а также принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} y, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} x$$

и

$$\begin{aligned} ax + hy &= -a_0 x - h_2 y x + h_1 y + h_3 y^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} (ax + hy) &= -\dot{a}_0 x - \dot{h}_2 y x + \dot{h}_1 y + \dot{h}_3 y^2, \end{aligned}$$

В КОНЦЕ КОНЦОВ ПОЛУЧИМ

$$[h_1(y^2 - x^2) + (b_0 - a_0)xy + 2(h_3y - h_2x)\tau] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \\ + 3(h_3y - h_2x) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t} \left(3y \frac{dh_3}{dt} - 3x \frac{dh_2}{dt} + \beta_3 - \gamma_3 \right) = 0, \quad (106.2)$$

$$x \left(-\frac{1}{2} x^2 \frac{da_0}{dt} - \frac{1}{2} y^2 \frac{db_0}{dt} + xy \frac{dh_1}{dt} + \delta_1 x + \delta_2 y \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \\ + \left[-a_0 x + h_1 y + y(h_3 y - h_2 x) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \tau} + \\ + \left[y \left(y \frac{dh_3}{dt} - x \frac{dh_2}{dt} \right) - 2x \frac{da_0}{dt} + 2y \frac{dh_1}{dt} + \delta_1 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[y \left(y \frac{dh_3}{dt} - x \frac{dh_2}{dt} \right) - \frac{1}{2} x \frac{da_0}{dt} + \beta_3 y + \delta_1 \right] = 0, \quad (106.3)$$

$$y \left(-\frac{1}{2} x^2 \frac{da_0}{dt} - \frac{1}{2} y^2 \frac{db_0}{dt} + xy \frac{dh_1}{dt} + \delta_1 x + \delta_2 y \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \\ + \left[-b_0 y + h_1 x - x(h_3 y - h_2 x) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \tau} + \\ + \left[-x \left(y \frac{dh_3}{dt} - x \frac{dh_2}{dt} \right) - 2y \frac{db_0}{dt} + 2x \frac{dh_1}{dt} + \delta_2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \\ + \frac{d}{dt^2} \left[-x \left(y \frac{dh_3}{dt} - x \frac{dh_2}{dt} \right) - \frac{1}{2} y \frac{db_0}{dt} + \gamma_3 y + \delta_3 \right] = 0. \quad (106.4)$$

Случай $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0$ не представляет интереса, так как при этом система должна простирается в бесконечность и иметь в центре или в бесконечности бесконечно большой потенциал. Для сохранения осевой симметрии необходимо, чтобы

$$a_0 = b_0, \quad h_1 = 0;$$

следовательно (ср. с формулой 103.5),

$$\beta_3 = -\gamma_3, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \frac{h_2}{h_3} = \text{const.}$$

Таким образом уменьшается число произвольных коэффициентов эллипсоида, а это конкретизирует его форму. Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 = k(t), \\ \beta_3 &= -\gamma_3 = \beta = \text{const.}, \\ h_2 &= h_{20}\varphi, \quad h_3 = h_{30}\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (106.5)$$

где φ является функцией времени, а величины h_{20} и h_{30} — постоянны. Ясно, что эти обозначения имеют здесь иной смысл, чем в формулах (102.1)—(102.10). Следует заметить, что предположение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0$$

приводит к следующему виду потенциала:

$$\Phi = \tau C_1(t) + C_2(t),$$

причем в этом случае нет надобности уменьшать число коэффициентов эллипсоида.

Используя соотношения (106.5), можно переписать формулы (106.2)—(106.4) в виде

$$\varphi(h_{30}y - h_{20}x) \left(2\tau \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - 3 \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \right) = 0, \quad (106.6)$$

$$y(h_{30}y - h_{20}x) \left(\varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \tau} + \dot{\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \ddot{\varphi} \right) + \\ + x \left(\tau \frac{dk}{dt} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \tau} + 2 \frac{dk}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^3 k}{dt^3} \right) = 0, \quad (106.7)$$

$$-x(h_{30}y - h_{20}x) \left(\varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \tau} + \dot{\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \ddot{\varphi} \right) + \\ + y \left(\tau \frac{dk}{dt} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \tau} + 2 \frac{dk}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^3 k}{dt^3} \right) = 0. \quad (106.8)$$

Пусть $h_{20} = h_{30} = 0$, т. е. предположим, что коэффициенты эллипсоида, а также величины Δ_1 и Δ_2 имеют более простую форму

$$\left. \begin{aligned} a &= -k - h_4 y^2, & \Delta_1 &= \beta y - \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} x, \\ b &= -k - h_4 x^2, & \Delta_2 &= -\beta x - \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} y, \\ h &= h_4 xy, \end{aligned} \right\} \quad (106.9)$$

где все коэффициенты постоянны, кроме величины k , являющейся функцией времени. В таком случае уравнения (106.6)—(106.8) можно заменить одним равносильным им уравнением

$$\tau \frac{dk}{dt} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \tau} + 2 \frac{dk}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^3 k}{dt^3} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau \frac{dk}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + k \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{dk}{dt} \Phi + \frac{1}{2} \frac{d^3 k}{dt^3} \tau \right) = 0;$$

после интегрирования получим

$$\tau \frac{dk}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t} (k\Phi) + \frac{1}{2} \frac{d^3 k}{dt^3} \tau = G(t). \quad (106.10)$$

$G(t)$ должно быть равно нулю. Написав выражение

$$\Phi = \Phi_1(\tau, t) + \frac{1}{k} \int G(t) dt,$$

можно проверить это утверждение с помощью простой подстановки; действительно, если τ удовлетворяет уравнению (106.10), то Φ_1 удовлетворяет аналогичному уравнению, правая часть которого равна

нулю. Так как постоянный множитель, являющийся только функцией времени, в выражении для потенциала не может иметь какого-либо физического смысла, то необходимо признать эквивалентность величин Φ и Φ_1 . Поэтому в уравнении (106.10) можно $G(t)$ считать равным нулю.

Обозначая

$$F = k\Phi, \quad (106.11)$$

получим

$$\tau \frac{dk}{dt} \frac{\partial F}{\partial \tau} + k \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} k \frac{d^3 k}{dt^3} \tau = 0. \quad (106.12)$$

Для того, чтобы привести это уравнение к однородному, вводим функцию Ω , предполагая, что

$$\Omega(F, \tau, t) = 0. \quad (106.13)$$

В таком случае имеем следующие выражения:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Omega}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Подставляя найденные из этих уравнений величины $\partial F / \partial \tau$ и $\partial F / \partial t$ в уравнение (106.12), получим уравнение, однородное относительно Ω ,

$$\tau \frac{dk}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + k \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{1}{2} k \frac{d^3 k}{dt^3} \tau \frac{\partial \Omega}{\partial F} = 0,$$

которое решим с помощью системы характеристических уравнений

$$\frac{d\tau}{\tau \frac{dk}{dt}} = \frac{dt}{k} = - \frac{dF}{\frac{1}{2} k \frac{d^3 k}{dt^3} \tau}. \quad (106.14)$$

Интегрируя уравнение, полученное в результате совместного рассмотрения двух первых членов уравнения (106.14), имеем

$$\frac{\tau}{k} = A = \text{const.}$$

Приравнявая второй и третий члены, получим

$$\frac{dF}{dt} = - \frac{A}{2} k \frac{d^3 k}{dt^3} = - \frac{A}{2} \frac{d}{dt} \left[k \frac{d^2 k}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dk}{dt} \right)^2 \right],$$

т. е.

$$F + \frac{\tau}{2k} \left[k \frac{d^2 k}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dk}{dt} \right)^2 \right] = \text{const};$$

это выражение можно также записать следующим образом:

$$F + \tau \sqrt{k} \frac{d^2}{dt^2} \sqrt{k} = \text{const};$$

обозначая

$$k = \varphi^2, \quad (106.15)$$

получим решение

$$\Omega = \Omega \left(F + \tau \varphi \ddot{\varphi} + \text{const}, \frac{\tau}{\varphi^2} \right),$$

и, следовательно, общий вид уравнения относительно F будет

$$F = -\tau \ddot{\varphi} + \Phi_1\left(\frac{\tau}{\varphi^2}\right) + \text{const},$$

где Φ_1 является произвольной функцией аргумента. На основании соотношения (106.11) имеем следующее выражение для потенциала:

$$\Phi = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \tau + \frac{1}{\varphi^2} \Phi_1\left(\frac{\tau}{\varphi^2}\right) - \text{const}, \quad (106.16)$$

причем const может быть, конечно, равна нулю. Это решение получено в предположении некоторых ограничений, наложенных на коэффициенты эллипсоида. Если предположить, что, по крайней мере, одна из величин h_{20} и h_{30} отлична от нуля, то получим более общую форму эллипсоида скоростей и движения центроидов. В этом случае можно провести также интегрирование¹⁾, при этом получится несколько особая форма потенциала

$$\Phi = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \tau + \frac{2g_0}{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \quad (106.17)$$

т. е. в этом случае имеем притяжение центральной массы, сосредоточенной в точке, и однородного непрерывного слоя материи. Такого рода решения могут играть некоторую роль при приближенных исследованиях строения Галактики (см. п. 70).

107. Обобщение для случая трех измерений. Теперь обобщим по необходимости самым простым способом полученное решение на случай трех измерений. Предположим, например, что

$$\left. \begin{aligned} a &= k_1 + k_2 y^2, & f &= 0, & \Delta_1 &= \frac{1}{2} \frac{dk_1}{dt} x + \beta y, \\ b &= k_1 + k_2 x^2, & g &= 0, & \Delta_2 &= \frac{1}{2} \frac{dk_2}{dt} y - \beta x, \\ c &= k_3, & h &= -k_2 xy, & \Delta_3 &= \frac{1}{2} \frac{dk_3}{dt} z, \end{aligned} \right\} \quad (107.1)$$

при этом для удобства введены следующие обозначения:

$$-k_1 = k, \quad -k_2 = h_4 \quad \text{и} \quad -k_3 = c_0$$

[ср. формулы (106.9), (102.10) и (104.5)]. Величины k_1 и k_3 являются функциями времени.

Если ввести новые переменные

$$\tau = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{1}{2}z^2$$

и предположить, что

$$\Phi = \Phi(R, z, t),$$

¹⁾ Чандрасекар С., Принципы звездной динамики, М., 1948, стр. 112 и след.

то легко убедиться, что уравнения (101.25) и (101.26) равносильны, а третья группа уравнений сводится к следующим трем:

$$k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 k_1}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \tau}, \quad (107.2)$$

$$\left. \begin{aligned} k_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 k_3}{dt^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta}, \\ \frac{dk_1}{dt} \tau \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{dk_3}{dt} \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (107.3)$$

Продифференцировав уравнение (107.2) по ζ , а уравнение (107.3) по τ , получим

$$(k_3 - k_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial \zeta} = 0.$$

Следовательно,

$$\text{или } k_3 = k_1, \text{ или } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial \zeta} = 0.$$

В первом случае путем простых преобразований можно получить выражение, аналогичное выражению (106.10) (эти преобразования мы предоставляем проделать самому читателю)¹⁾. Приравнявая затем постоянную интегрирования нулю, производя подстановку, согласно формуле (106.11), и поступая далее так же, как в случае двух измерений, используем функцию $\Omega(F, \tau, \zeta, t) = 0$ и в конце концов получаем решение

$$\Phi = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} (\tau + \zeta) + \frac{1}{\varphi^2} \Phi_1 \left(\frac{\tau}{\varphi^2}, \frac{\zeta}{\varphi^2} \right). \quad (107.4)$$

Во втором случае при всевозможных коэффициентах k_3 и k_1 аналогично получаем²⁾

$$\Phi = -\frac{\ddot{\varphi}_1}{\varphi_1} \tau - \frac{\ddot{\varphi}_2}{\varphi_2} \zeta + \frac{1}{\varphi_1^2} \Phi_1 \left(\frac{\tau}{\varphi_1^2} \right) + \frac{1}{\varphi_2^2} \Phi_2 \left(\frac{\zeta}{\varphi_2^2} \right). \quad (107.5)$$

Здесь φ_1 и φ_2 являются произвольными функциями времени. Как известно, этому случаю соответствует бесконечная система, поэтому полученный результат не применим к каким-либо конкретным звездным системам.

Заметим, что в случае стационарной системы в решениях (106.16) и (107.4) останутся только члены, зависящие от τ и ζ , следовательно, эти решения не накладывают никаких новых условий на потенциал в стационарной системе. Указанные решения и в общем (нестационарном) случае накладывают только несущественные новые условия,

¹⁾ См. Чандрасекхар С., Принципы звездной динамики, М., 1948, стр. 123 и след.

²⁾ См. Чандрасекхар С., Принципы звездной динамики, М. 1948, стр. 126.

так что практически каждый потенциал с осевой симметрией можно представить таким именно образом.

Выясним теперь, какие условия накладывают эти решения на эллипсоид скоростей и движение центроидов звезд. В случае трех измерений, согласно равенствам (107.1), принимая во внимание формулу (101.1), получим следующее выражение для Q :

$$Q = (\varphi^2 + k_2 y^2)(u - u_0)^2 + (\varphi^2 + k_2 x^2)(v - v_0)^2 + \\ + \varphi^2(w - w_0)^2 - 2k_2 x y (u - u_0)(v - v_0). \quad (107.6)$$

Решая уравнения (101.2)–(101.4) относительно u_0 , v_0 и w_0 и учитывая выражения (107.1), получим

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} x + \frac{\beta y}{\varphi^2 + k_2(x^2 + y^2)}, \\ v_0 &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} y - \frac{\beta x}{\varphi^2 + k_2(y^2 + x^2)}, \\ w_0 &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} z. \end{aligned} \right\} \quad (107.7)$$

108. Сравнение эллипсоидальной теории с наблюдениями.
Введем цилиндрическую систему координат R , ϑ , z , Π , Θ , Z

$$\begin{aligned} x &= R \cos \vartheta, & u &= \Pi \cos \vartheta - \Theta \sin \vartheta, \\ y &= R \sin \vartheta, & v &= \Pi \sin \vartheta + \Theta \cos \vartheta, \\ z &= z, & w &= Z, \end{aligned}$$

и подставим значения величин u_0 , v_0 , w_0 согласно формуле (107.7), в выражение (107.6). После довольно длинных, но простых преобразований, которые предоставляем проделать самому читателю (надо использовать тождество $\sin^4 \vartheta + \cos^4 \vartheta = 1 - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$), получим

$$Q = a_R (\Pi - \Pi_0)^2 + b_\vartheta (\Theta - \Theta_0)^2 + c_z (Z - Z_0)^2, \quad (108.1)$$

где введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_R &= \varphi^2, \\ b_\vartheta &= \varphi^2 + k_2 R^2, \\ c_z &= \varphi^2, \\ \Pi_0 &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} R, \\ \Theta_0 &= - \frac{\beta R}{\varphi^2 + k_2 R^2}, \\ Z_0 &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} z. \end{aligned} \right\} \quad (108.2)$$

Уравнение (108.1) является уравнением эллипсоида, главные оси которого направлены параллельно осям цилиндрической системы координат в данной точке.

Из формул (108.2) следует также, что полуось в направлении галактического центра равна полуоси, перпендикулярной к галактической плоскости, а полуось в направлении вращения Галактики не равна двум указанным полуосям.

Θ_0 представляет собой вращение системы, в которой, кроме того, существует еще систематическое расширение (или сжатие), определяемое величинами Π_0 и Z_0 . Таким образом, мы пришли к результатам, аналогичным тем, которые были получены нами в случае II решения основного уравнения звездной динамики относительно неизвестной функции распределения скоростей (см. п. 98), причем тогда наше решение зависело только от двух первых интегралов: интеграла площадей и интеграла энергии. Если предположить, что система стационарна, то φ будет постоянным, величины Π_0 и Z_0 исчезнут, остальные члены примут такой же вид, как и в предыдущем случае. Поэтому полученные результаты следует признать неудовлетворительными.

Обратимся к другим решениям. Например, при решении уравнения (107.5) в случае $k_1 \neq k_3$ можно получить неодинаковую длину полуосей эллипсоида, однако, мы все же не получим поворота этих осей; большая полуось всегда будет направлена к центру Галактики. Кроме того, форма потенциала в этом случае не соответствует Галактике. *Некоторые астрономы, в том числе и П. П. Паренаго*¹⁾, считают, что вблизи галактической плоскости, где в первом приближении $\partial^2\Phi/\partial\tau\partial\chi = 0$, этим решением все же можно пользоваться. На больших расстояниях от галактической плоскости это решение перестает быть применимым, и там действительно Π и Z должны быть равны между собой.

Рассматривая трехмерное обобщение решения (106.17), приходим к выводу, что оно дает эллипсоид с произвольно направленными осями, однако, в этом случае получается настолько частная форма потенциала, что ее никак нельзя применить к Галактике. Мы встречаемся здесь с тем же явлением, производящим впечатление парадокса, что и в случае решения основного уравнения относительно неизвестной функции распределения (см. п. 100). Причина этого явления в данном случае более очевидна. Уравнения группы III состоят из произведений коэффициентов эллипсоида распределения скоростей на функции потенциала, причем их сумма равна нулю [см. формулы (106.2)—(106.4), (106.6)—(106.8) и др.]. Чтобы удовлетворить этим уравнениям, необходимо или приравнять нулю коэффициенты, определяющие движение, т. е. наложить на них ограничение, оставляя форму потенциала произвольной, или же, наоборот, приравнять нулю

¹⁾ АЖ, 29, 245 (1952).

выражения, содержащие потенциал, оставляя произвольными движения звезд. Более общими принято называть те решения, которые дают более общую форму потенциала.

Исследователи пытались обойти эти трудности двумя способами: либо принимали конкретную форму потенциала, предполагая при этом, что она в первом приближении соответствует действительности, и таким образом получали наиболее общий характер движений в системе, либо, наоборот, удовлетворялись предварительным описанием звездных движений, считая его близким к действительности. Интересно отметить, что второй метод дает более правильные результаты. Итак, опираясь на общую форму потенциала и предполагая, что длина полуоси эллипсоида, перпендикулярной к галактической плоскости, изменилась вследствие существования каких-то возмущающих сил, можно сравнить результаты теории с наблюдениями, пользуясь при этом исключительно длиной двух остальных полуосей.

Действительно, в случае стационарной системы имеем

Данные теории	Наблюдательные данные
Скорость вращения согласно формуле (108.2) $\theta_0 = -\frac{k_1 R}{1 + k_2 R}$	Постоянные Оорта [см. формулы (67.6)] $2A = \frac{\partial \theta_0}{\partial R} - \frac{\theta}{R}$ $2B = \frac{\partial \theta_0}{\partial R} + \frac{\theta}{R}$
Отношение полуосей эллипсоида [см. формулы (108.2)] $\lambda^2 = 1 + k_2 R^2$	Отношение полуосей эллипсоида по наблюдениям λ

Выражая постоянные Оорта через постоянные интегрирования, получим

$$2A = \frac{2k_1 k_2 R^2}{\lambda^4}, \quad 2B = -\frac{2k_1}{\lambda^4} \quad \text{и} \quad \frac{B}{B-A} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Подставив вместо A и B их числовые значения, а именно: $A = +0,020$ км/сек/пс; $B = -0,013$ км/сек/пс, получим

$$\frac{1}{\lambda} = 0,63.$$

Это находится в хорошем согласии с результатами наблюдений ($\frac{1}{\lambda} = 0,62$). Поневоле приходится считать, что указанное согласие не может быть случайным.

109. Критика эллипсоидальной теории. То обстоятельство, что при применении эллипсоидальной теории нельзя получить одновре-

менно общего вида и потенциала и функции распределения скоростей, так как увеличение общности одного приводит к уменьшению общности другого, казалось чем-то абсурдным с физической точки зрения и заставило многих исследователей задуматься над тем, нет ли в самой структуре эллипсоидальной теории каких-либо существенных ошибок. Однако, частичное согласие теоретических результатов с наблюдательными данными все же указывает, что, по крайней мере, некоторые выводы эллипсоидальной теории правильны и заслуживают внимания.

Первую работу, посвященную критике эллипсоидальной теории, опубликовал Камм в 1941 г.¹⁾, т. е. через год после выхода в свет второй части работы Чандрасекхара. В этой работе автор обратил внимание на то, что при получении решений используются не все условия, которые накладывают на них уравнения. Так, например, потенциал получается путем решения основного уравнения звездной динамики, имеющего геометрический смысл, в которое потенциал входит только как фактор, регулирующий движения звезд, но мы не пользуемся при этом уравнением Пуассона, дающим зависимость потенциала от звездной плотности. Последнее уравнение может или наложить добавочные условия, или же выявить некоторые противоречия.

Работа Камма касается именно вопроса согласованности полученных решений с уравнением Пуассона, причем автор рассматривает лишь некоторые частные решения. Эти результаты были в 1952 г. обобщены Фрике²⁾. Опуская довольно сложные выводы и отсылая интересующихся читателей к оригинальным работам, приведем здесь только основные идеи предложенного метода в сильно упрощенном виде.

Уравнение Пуассона содержит зависимость между потенциалом и звездной плотностью. Решение основного уравнения также дает потенциал и звездную плотность, так как, располагая готовыми решениями, содержащими коэффициенты эллипсоида скоростей и потенциал, можно на основании третьей группы уравнений найти χ , а затем по формуле (101.5) определить σ . Зная общий вид функции распределения скоростей (например, экспоненциальная функция) и σ , можно таким образом найти плотность. Тогда становится возможным, не уточняя вида функции распределения, получить многие общие заключения относительно звездной плотности. Подставив полученные формулы в уравнение (91.1), произведя необходимые преобразования и разложив обе части равенства в ряд относительно расстояния, можно затем приравнять коэффициенты, стоящие при одинаковых выражениях в обеих частях уравнений. Оказывается, что таким способом мы приходим для конечных систем к противоречиям. Следовательно, эллипсоидальная теория в том виде, в каком мы ее изложили выше, неприменима, по крайней мере, к конечным системам.

¹⁾ MN., 101, 195 (1941).

²⁾ AN, 280, 193 (1952).

Даже при отсутствии работ Камма и Фрике, в которых были обнаружены противоречия в эллипсоидальной теории, упомянутую теорию следовало бы признать неудовлетворительной хотя бы потому, что она не согласуется с наблюдениями. В самом деле, наша Галактика, а также, по всей вероятности, и другие галактики, состоит из звездных подсистем с различными кинематическими свойствами. Поэтому распределение скоростей всех звезд в системе нельзя представить с помощью одного эллипсоида скоростей даже в том случае, если распределение скоростей звезд в каждой подсистеме является идеально эллипсоидальным. В действительности, по-видимому, имеет место наложение нескольких эллипсоидов с различными полуосями и скоростями центроидов; в первом приближении распределение скоростей в Галактике следует представлять двумя эллипсоидами, соответствующими двум типам населения в нашей Галактике.

110. Сосуществование звездных подсистем. Не отбрасывая совершенно эллипсоидальной теории, можно воспользоваться ее результатами при изучении звездных систем, состоящих из нескольких различных подсистем. Так как до сих пор нет еще общей теории такого рода систем, то приведем здесь только один довольно простой пример, рассмотренный Чандрасекхаром¹⁾.

Будем рассматривать систему двух измерений, соответствующую общему решению для потенциала (106.16) и состоящую из двух подсистем с различными функциями распределения

$$\begin{aligned} Q_1 + \sigma_1 &= \varphi_1^2 (\Pi - \Pi_1)^2 + (\varphi_1^2 + k_{21} R^2) (\Theta - \Theta_1)^2 + \sigma_1, \\ Q_2 + \sigma_2 &= \varphi_2^2 (\Pi - \Pi_2)^2 + (\varphi_2^2 + k_{22} R^2) (\Theta - \Theta_2)^2 + \sigma_2, \end{aligned}$$

причем, заменяя индексы 1 и 2 индексом i , получим в общем виде

$$\Pi_i = \frac{\dot{\varphi}_i}{\varphi_i} R, \quad \Theta_i = - \frac{\beta_i R}{\varphi_i^2 + k_{2i} R^2}.$$

Согласно формуле (106.16), имеем

$$\Phi_i = - \frac{\ddot{\varphi}_i}{2\varphi_i} R^2 + \frac{1}{\varphi_i^2} \Phi \left(\frac{R}{\varphi_i} \right). \quad (110.1)$$

Принимая во внимание существование круговой симметрии, можно уравнения (105.4) — (105.6) заменить приведенными ниже

$$\begin{aligned} \tau \frac{dk_i}{dt} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial t}, \\ k_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 k_i}{dt^2} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

¹⁾ Чандрасекхар С., Принципы звездной динамики, М., 1948, стр. 132.

которые можно преобразовать следующим образом, учитывая выражение (110.1):

$$\begin{aligned}\varphi_i^2 \left(-\frac{\ddot{\varphi}_i}{\varphi_i} + \frac{1}{\varphi_i^4} \Phi'_{i1} \right) + \dot{\varphi}_i^2 + \varphi_i \ddot{\varphi}_i &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial \tau}, \\ 2\tau \varphi_i \dot{\varphi}_i \left(-\frac{\ddot{\varphi}_i}{\varphi_i} + \frac{1}{\varphi_i^4} \Phi'_{i1} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial t}.\end{aligned}$$

Здесь штрихами обозначены производные по аргументу τ/φ_i^2 . Продолжая преобразование, получим

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{\varphi_i^2} \Phi'_{i1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial \tau}, \\ 2\tau \dot{\varphi}_i \ddot{\varphi}_i - \frac{2\tau \dot{\varphi}_i}{\varphi_i^3} \Phi'_{i1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial t}.\end{aligned}$$

Записанные в таком виде уравнения легко проинтегрировать, т. е.

$$\chi_i = -\frac{1}{2} \left[\varphi_i^2 \tau + \Phi'_{i1} \left(\frac{\tau}{\varphi_i^2} \right) \right] + \text{const.}$$

Формулу (101.5) можно преобразовать, учитывая выражения (101.2), (101.3) и (106.9); действительно,

$$\sigma_i = \frac{-\beta_i^2 R^2}{\varphi_i^2 + k_{2i} R^2} + 2\Phi_{i1} \left(\frac{R}{\varphi_i} \right) - c_i;$$

используя выражение (110.1), получим

$$2\Phi_{i1} = \frac{\sigma_i + c_i}{\varphi_i^2} + \frac{\beta_i^2 R^2}{\varphi_i^2 (\varphi_i^2 + k_{2i} R^2)} - \frac{\ddot{\varphi}_i}{\varphi_i} R^2. \quad (110.2)$$

Обе подсистемы имеют различные распределения скоростей и звездные плотности, т. е. величины χ и σ для них различны, но обе упомянутые подсистемы движутся в одном гравитационном поле. Поэтому можно, воспользовавшись формулой (110.1) для потенциала, написать

$$-\frac{\ddot{\varphi}_2}{2\varphi_2} R^2 + \frac{1}{\varphi_2^2} \Phi_{12} \left(\frac{R}{\varphi_2} \right) = -\frac{\ddot{\varphi}_1}{2\varphi_1} R^2 + \frac{1}{\varphi_1^2} \Phi_{11} \left(\frac{R}{\varphi_1} \right).$$

Это тождество будет справедливо только, если

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \text{const.} \quad (110.3)$$

Из формулы (110.2) следует, что

$$\frac{\sigma_1 + c_1}{\varphi_1^2} + \frac{\beta_1^2 R^2}{\varphi_1 (\varphi_1^2 + k_{21} R^2)} - \frac{\ddot{\varphi}_1}{\varphi_1} R^2 = \frac{\sigma_2 + c_2}{\varphi_2^2} + \frac{\beta_2^2 R^2}{\varphi_2 (\varphi_2^2 + k_{22} R^2)} - \frac{\ddot{\varphi}_2}{\varphi_2} R^2;$$

отсюда

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\varphi_1} R = \frac{\ddot{\varphi}_2}{\varphi_2} R$$

[это следует также из соотношения (110.3)] и

$$\frac{1}{\varphi_1^2} \left(\sigma_1 + c_1 + \frac{\beta_1^2 R^2}{\varphi_1^2 + k_{21} R^2} \right) = \frac{1}{\varphi_2^2} \left(\sigma_2 + c_2 + \frac{\beta_2^2 R^2}{\varphi_2^2 + k_{22} R^2} \right). \quad (110.4)$$

Это значит, что звездная система не может состоять из двух совершенно произвольных подсистем, а лишь из таких, которые удовлетворяют условиям (110.3) и (110.4). Аналогично можно получить условия, ограничивающие другие решения в рассматриваемом случае двух измерений, а также решения в случае трех измерений. Улучшенная таким образом эллипсоидальная теория накладывающихся подсистем имеет большие преимущества по сравнению с простой эллипсоидальной теорией, в частности, выбирая в данной системе соответствующее число эллипсоидальных подсистем, можно достигнуть лучшего согласия с действительным распределением скоростей в системе, чем в случае одного эллипсоида, который, естественно, является лишь первым приближением. Таким образом, можно построить распределение произвольного вида с помощью простых эллипсоидальных распределений или даже с помощью сферических распределений. Следовательно, динамическая теория двух потоков является только частным случаем обобщенной эллипсоидальной теории.

В рассмотренном случае нет никакой необходимости накладывать ограничения на форму потенциала, с тем чтобы получить наиболее общее распределение скоростей. Можно принять произвольную форму потенциала, а требуемую общность распределения достигнуть введением соответствующего числа подсистем.

Самым большим достоинством улучшенной эллипсоидальной теории является то, что метод, предложенный Каммом, не обнаруживает в ней никаких противоречий. Звездная плотность, строго говоря, является совершенно произвольной функцией σ при распределении Шварцшильда (например, экспоненциальной), поэтому сумма двух плотностей не соответствует сумме двух величин σ накладывающихся подсистем. Раскладывая в ряд обе части уравнения так, как этого требует метод Камма, не следует ожидать равенства коэффициентов; действительно, вводя все новые и новые подсистемы, мы получаем произвольные коэффициенты. Поэтому сравнение обеих частей уравнения не может служить доказательством существования противоречий в теории.

Вопрос существования противоречий еще недостаточно изучен, однако, можно предполагать, что в данном случае все противоречия исчезают. По всей вероятности, уравнение Пуассона вводит некоторые дополнительные условия, о которых пока еще ничего, к сожалению, не известно.

Большое преимущество теории накладываются подсистем по сравнению с любой простой теорией (не только эллипсоидальной) заключается в том, что упомянутая теория соответствует действительности; в самом деле, известно, что в Галактике действительно существуют отдельные подсистемы, порою резко различающиеся между собой.

Можно пытаться решать проблему динамики другими путями; однако, такие попытки очень немногочисленны. Недавно Фрике¹⁾ опубликовал теорию, построенную на следующей функции распределения:

$$f = f(Q^* + \sigma),$$

где

$$Q^* = \alpha(E_1 - E_1^0)^2 + \beta(E_2 - E_2^0)^2;$$

здесь E_1 и E_2 — соответственно интеграл энергии и интеграл площадей [ср. формулы (93.1) и (94.1)]. Поверхностями одинаковой плотности являются в этом случае поверхности четвертой степени

$$Q^* = \text{const},$$

с помощью которых, естественно, легче представить наблюдаемое распределение, чем с помощью эллипсоидов. На практике же эта теория может очень точно воспроизводить некоторые особенности распределения скоростей звезд II типа населения, но, однако, оказывается несостоятельной при применении к звездам I типа населения.

ТЕОРИЯ СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ЧАНДРАСЕКХАРА

111. Упрощение уравнений в случае сферического распределения скоростей. Займемся теперь изучением звездных систем с самой общей формой потенциала. Используя теорию накладываются подсистем, можно принять самый простой вид распределения скоростей, например, сферическое распределение, что позволит нам получить решения, ничем а priori не ограниченные, например, решения, не требующие осевой симметрии, как в предыдущих рассуждениях.

В случае сферического распределения скоростей $a = b = c$, и, следовательно, в формулах (102.10) останутся только члены, содержащие одинаковые комбинации одних и тех же переменных, причем коэффициенты этих членов должны быть равны. Исчезнут члены f , g и h . Таким образом, получим

$$\left. \begin{aligned} a &= -a_0, \\ b &= -b_0, \\ c &= -c_0, \\ -a_0 &= -b_0 = -c_0 = k(t). \end{aligned} \right\} \quad (111.1)$$

¹⁾ AN, 280, 193 (1952).

Следствием этого будет значительное упрощение выражений (103.8) и (103.9). Принимая еще во внимание соотношения (103.5), имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= ku_0 = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} x + \beta_3 y - \beta_2 z + \delta_1, \\ \Delta_2 &= kv_0 = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} y + \beta_1 z - \beta_3 x + \delta_2, \\ \Delta_3 &= kw_0 = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} z + \beta_2 x - \beta_1 y + \delta_3. \end{aligned} \right\} \quad (111.2)$$

Все это можно записать в векторной форме, как в п. 104,

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}; \quad (111.3)$$

при этом следует заметить, что

$$\Delta \approx (u_0, v_0, w_0), \quad (111.4)$$

и выражение (104.1) примет вид

$$A = \begin{pmatrix} k, & 0, & 0 \\ 0, & k, & 0 \\ 0, & 0, & k \end{pmatrix}. \quad (111.5)$$

Следовательно, уравнения III группы в векторной форме [см. формулы (104.2) и (104.3)] будут иметь вид

$$k \operatorname{grad} \Phi + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \chi, \quad (111.6)$$

$$\Delta \operatorname{grad} \Phi = +\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (111.7)$$

а формула (101.5) преобразуется следующим образом:

$$-\chi = k(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + \sigma. \quad (111.8)$$

Докажем, что вектор $\boldsymbol{\beta}$ в уравнении (111.3) постоянен. С этой целью вычислим ротацию обеих частей уравнения (111.6), и так как ротация градиента равна нулю, то

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \Delta) = 0. \quad (111.9)$$

Ротацию Δ можно получить также непосредственно из выражения (111.3), так как $\boldsymbol{\delta}$ является функцией только времени,

$$\operatorname{rot} \Delta = -2\boldsymbol{\beta}. \quad (111.10)$$

Сравнивая формулы (111.9) и (111.10), сразу же получаем

$$\boldsymbol{\beta} = \text{const.} \quad (111.11)$$

112. Вывод характеристических уравнений. Продифференцируем уравнение (111.6) по времени и вычислим градиент выражения (111.7). Сравнивая затем левые части полученных формул и принимая во внимание соотношения (111.3) и (111.11), имеем

$$\text{grad}(\Delta \text{grad } \Phi) + \frac{\partial}{\partial t}(k \cdot \text{grad } \Phi) + \frac{1}{2} \frac{d^3 k}{dt^3} \mathbf{r} + \frac{d^2 \mathfrak{E}}{dt^2} = 0.$$

Это можно переписать сначала в виде

$$\text{grad} \left\{ \Delta \text{grad } \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(k\Phi) + \frac{1}{4} \frac{d^3 k}{dt^3} r^2 + \frac{d^2 \mathfrak{E}}{dt^2} \cdot \mathbf{r} \right\} = 0,$$

а затем проинтегрировать

$$\Delta \text{grad } \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(k\Phi) + \frac{1}{4} \frac{d^3 k}{dt^3} r^2 + \frac{d^2 \mathfrak{E}}{dt^2} \cdot \mathbf{r} = G(t). \quad (112.1)$$

Рассуждая так же, как при выводе уравнения (106.10), можно убедиться, что функция $G(t)$ не играет никакой роли с физической точки зрения, поэтому ее можно заменить нулем. Подставляя выражение (111.3), мы получаем основное уравнение для определения потенциала

$$\left(\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} \right) \cdot \text{grad } \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(k\Phi) + \frac{1}{4} \frac{d^3 k}{dt^3} r^2 + \frac{d^2 \mathfrak{E}}{dt^2} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Пользуясь тем, что $\boldsymbol{\beta} = \text{const}$, выбирая систему координат так, чтобы

$$\boldsymbol{\beta} = (0, 0, \beta), \quad (112.2)$$

и вводя обозначение

$$F = k\Phi, \quad (112.3)$$

перепишем полученное выше уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} x + \beta y + \delta_1 \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} y - \beta x + \delta_2 \right) \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} z + \delta_3 \right) \frac{\partial F}{\partial z} + \\ & + k \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2) k \frac{d^3 k}{dt^3} + (x\ddot{\delta}_1 + y\ddot{\delta}_2 + z\ddot{\delta}_3) k = 0. \end{aligned} \quad (112.4)$$

Чтобы привести полученное уравнение к однородному, воспользуемся методом, который уже был применен выше, и введем функцию Ω , определяемую уравнением

$$\Omega(F, x, y, z, t) = 0. \quad (112.5)$$

Вычислив производные функции Ω и подставив их в уравнение (112.4), получим уравнение, однородное относительно Ω ,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} x + \beta y + \delta_1 \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} y - \beta x + \delta_2 \right) \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} z + \delta_3 \right) \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \\ & + k \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \left[\frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2) k \frac{d^3 k}{dt^3} + (x\ddot{\delta}_1 + y\ddot{\delta}_2 + z\ddot{\delta}_3) k \right] \frac{\partial \Omega}{\partial F} = 0. \end{aligned}$$

Имеем систему характеристических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} x + \beta y + \delta_1} &= \frac{dy}{\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} y - \beta x + \delta_2} = \frac{dz}{\frac{1}{2} \frac{dk}{dt} z + \delta_3} = \frac{dt}{k} = \\ &= \frac{-dF}{\frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2) k \frac{d^3 k}{dt^3} + k (x\ddot{\delta}_1 + y\ddot{\delta}_2 + z\ddot{\delta}_3)}, \end{aligned}$$

которые можно соединить попарно следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} k \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} x + \beta y + \delta_1, \\ k \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} y - \beta x + \delta_2, \\ k \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} z + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (112.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2) \frac{d^3 k}{dt^3} + (x\ddot{\delta}_1 + y\ddot{\delta}_2 + z\ddot{\delta}_3) = 0, \quad (112.7)$$

Уравнения (112.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} k^{3/2} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\sqrt{k}} \right) &= \beta y + \delta_1, \\ k^{3/2} \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{\sqrt{k}} \right) &= -\beta x + \delta_2, \\ k^{3/2} \frac{d}{dt} \left(\frac{z}{\sqrt{k}} \right) &= \delta_3. \end{aligned}$$

Введем новые переменные

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{k}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{k}}, \quad \zeta = \frac{z}{\sqrt{k}}, \quad \tau = \int_{t_0}^t \frac{dt}{k}. \quad (112.8)$$

В таком случае наши уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \beta \eta + \frac{\delta_1}{\sqrt{k}}, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\beta \xi + \frac{\delta_2}{\sqrt{k}}, \end{aligned} \right\} \quad (112.9)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{\delta_3}{\sqrt{k}}. \quad (112.10)$$

113. Решение характеристических уравнений. Уравнения (112.9) можно решить методом вариации произвольной постоянной. Если бы написанные уравнения были однородными, т. е.

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \beta \eta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\beta \xi,$$

то решение имело бы вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \cos \beta t + B \sin \beta t, \\ \eta &= -A \sin \beta t + B \cos \beta t, \end{aligned} \right\} \quad (113.1)$$

где A и B — постоянные. В случае неоднородности уравнения величины A и B являются некоторыми функциями, форму которых можно определить, подставляя выражение (113.1) в уравнение (112.9). Таким образом, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{\varphi} (\delta_1 \cos \beta t - \delta_2 \sin \beta t), \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{1}{\varphi} (\delta_1 \sin \beta t + \delta_2 \cos \beta t) \end{aligned} \right\} \quad (113.2)$$

[см. формулу (106.15)]; здесь, как и в предыдущих случаях, вместо k^2 написано φ . Решением этой системы является следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 + A_1, \\ B &= B_0 + B_1, \end{aligned} \right\} \quad (113.3)$$

где A_0 и B_0 — постоянные, а

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int \frac{1}{\varphi} (\delta_1 \cos \beta t - \delta_2 \sin \beta t) dt, \\ B_1 &= \int \frac{1}{\varphi} (\delta_1 \sin \beta t + \delta_2 \cos \beta t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (113.4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= A_1 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t, \\ \eta_0 &= -A_1 \sin \beta t + B_1 \cos \beta t, \end{aligned} \right\} \quad (113.5)$$

а затем, подставив выражение (113.3) в уравнение (113.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \xi - \xi_0 &= A_0 \cos \beta t + B_0 \sin \beta t, \\ \eta - \eta_0 &= -A_0 \sin \beta t + B_0 \cos \beta t, \end{aligned} \right\}$$

или

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = A_0^2 + B_0^2 = \text{const} \quad (113.6)$$

и

$$\frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} = \frac{-A_0 \sin \beta t + B_0 \cos \beta t}{A_0 \cos \beta t + B_0 \sin \beta t}.$$

Введем еще постоянную Σ и переменную ϑ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \Sigma &= \frac{B_0}{A_0}, \\ \text{tg } \vartheta &= \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (113.7)$$

В таком случае

$$\text{tg } \vartheta = \frac{\text{tg } \Sigma - \text{tg } \beta t}{1 + \text{tg } \Sigma \cdot \text{tg } \beta t} = \text{tg } (\Sigma - \beta t)$$

или

$$\vartheta + \beta_i = \text{const.} \quad (113.8)$$

Из уравнения (112.10) имеем интеграл

$$\zeta - \zeta_0 = \text{const.}, \quad (113.9)$$

где

$$\zeta_0 = \int \frac{\delta_3}{\varphi} d\iota. \quad (113.10)$$

Выражения (113.6), (113.8) и (113.9) являются тремя независимыми первыми интегралами системы (113.3). Для того, чтобы получить интегралы уравнения (112.7), необходимо провести более сложные вычисления. Если ввести переменные согласно формуле (112.8) и воспользоваться тождеством

$$\varphi^2 \frac{d^2}{dt^2} \varphi^2 = \frac{d}{dt} \left[\varphi^2 \frac{d}{dt} \varphi^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \varphi^2 \right)^2 \right] = 2 \frac{d}{dt} (\varphi^3 \ddot{\varphi}),$$

то уравнение (112.7) можно переписать в виде

$$\frac{dF}{d\iota} + \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \frac{d}{d\iota} (\varphi^3 \ddot{\varphi}) + \varphi^3 (\xi \ddot{\delta}_1 + \eta \ddot{\delta}_2 + \zeta \ddot{\delta}_3) = 0. \quad (113.11)$$

Необходимо еще вторые производные по времени выразить через новую переменную ι . Используя тождество

$$\ddot{\delta}_1 = \frac{d^2}{dt^2} \left(\varphi \frac{\delta_1}{\varphi} \right) = \varphi \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + 2 \dot{\varphi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \ddot{\varphi} \frac{\delta_1}{\varphi},$$

находим

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\varphi^2} \frac{d}{d\iota},$$

следовательно,

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{\varphi^4} \frac{d^2}{d\iota^2} - \frac{2}{\varphi^3} \dot{\varphi} \frac{d}{d\iota},$$

Таким образом, получаем формулу $\ddot{\delta}_1 = \frac{1}{\varphi^3} \frac{d^2}{d\iota^2} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \ddot{\varphi} \frac{\delta_1}{\varphi}$ и аналогичные формулы для $\ddot{\delta}_2$ и $\ddot{\delta}_3$.

В конце концов можно уравнение (113.11) переписать так, чтобы в нем остались только производные φ по времени, все же остальные величины выразить через новые переменные

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\iota} + \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \frac{d}{d\iota} (\varphi^3 \ddot{\varphi}) + \varphi^3 \ddot{\varphi} \left(\xi \frac{\delta_1}{\varphi} + \eta \frac{\delta_2}{\varphi} + \zeta \frac{\delta_3}{\varphi} \right) + \\ + \xi \frac{d^2}{d\iota^2} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \eta \frac{d^2}{d\iota^2} \left(\frac{\delta_2}{\varphi} \right) + \zeta \frac{d^2}{d\iota^2} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (113.12)$$

Умножая уравнения (112.9) и (112.10) соответственно на ξ , η и ζ и складывая их почленно, получим

$$\xi \frac{\delta_1}{\varphi} + \eta \frac{\delta_2}{\varphi} + \zeta \frac{\delta_3}{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\iota} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (113.12), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} + \frac{d}{dt} [(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \varphi^3 \ddot{\varphi}] + \\ + \xi \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \eta \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta_2}{\varphi} \right) + \zeta \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (113.13)$$

Основываясь на соотношениях (112.9), можно вывести следующий ряд тождеств:

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \eta \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta_2}{\varphi} \right) &= \xi \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d\xi}{dt} - \beta\eta \right) + \eta \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d\eta}{dt} + \beta\xi \right) = \\ &= \xi \frac{d^3\xi}{dt^3} + \eta \frac{d^3\eta}{dt^3} - \beta \left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 - \beta\xi \frac{d\eta}{dt} + \beta\eta \frac{d\xi}{dt} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\xi \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dt} - \beta\eta \right) + \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{d\eta}{dt} + \beta\xi \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\xi \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_2}{\varphi} \right) - \frac{1}{2} \left(\beta\eta + \frac{\delta_1}{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\beta\xi + \frac{\delta_2}{\varphi} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Таким же образом можно получить следующее выражение:

$$\zeta \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right) = \zeta \frac{d^3\zeta}{dt^3} = \frac{d}{dt} \left[\zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[\zeta \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right)^2 \right].$$

Пользуясь этими тождествами, напомним уравнение (113.13) в другом виде

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \varphi^3 \ddot{\varphi}] + \frac{d}{dt} \left[\xi \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_2}{\varphi} \right) + \zeta \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\beta\eta + \frac{\delta_1}{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\beta\xi + \frac{\delta_2}{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

В таком виде можно наше уравнение проинтегрировать; действительно,

$$\begin{aligned} F + \frac{1}{2} [(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \varphi^3 \ddot{\varphi}] + \left[\xi \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_1}{\varphi} \right) + \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_2}{\varphi} \right) + \zeta \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\beta\eta + \frac{\delta_1}{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\beta\xi + \frac{\delta_2}{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_3}{\varphi} \right)^2 \right] = \text{const.} \end{aligned}$$

Прежде чем записать полученное решение в векторной форме, введем следующие обозначения:

$$\rho = (\xi, \eta, \zeta), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3), \quad \beta = (0, 0, \beta).$$

В результате имеем искомый четвертый интеграл

$$F + \frac{1}{2} \varphi^3 \ddot{\varphi} \rho^2 + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\varphi} \right) - \frac{1}{2} \left(\rho \times \beta + \frac{\delta}{\varphi} \right)^2 = \text{const.}$$

114. Форма потенциала и функции σ . На основании полученных выше результатов можно написать

$$\Omega(F, \xi, \eta, \zeta, \vartheta) = \Omega\left(F + \frac{1}{2} \varphi^3 \ddot{\varphi} \rho^2 + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\varphi} \right) - \frac{1}{2} (\rho \times \beta + \frac{\delta}{\varphi})^2; \right. \\ \left. (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2; \arctg \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} + \beta; \zeta - \zeta_0 \right),$$

или, более подробно,

$$F + \frac{1}{2} \varphi^3 \ddot{\varphi} \rho^2 + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\varphi} \right) - \frac{1}{2} (\rho \times \beta + \frac{\delta}{\varphi})^2 = \\ = \Phi_1 \{ (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2; \vartheta + \beta; \zeta - \zeta_0 \}.$$

Здесь Φ_1 является произвольной функцией аргументов. Вводя обозначение, согласно формуле (112.3), получим следующее выражение для потенциала:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} r^2 - \frac{1}{\varphi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\varphi} \right) \mathbf{r} + \frac{1}{2\varphi^4} (\mathbf{r} \times \beta + \delta)^2 + \\ + \frac{1}{\varphi^2} \Phi_1 \{ (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2; \vartheta + \beta; \zeta - \zeta_0 \}. \quad (114.1)$$

Если потенциал известен, то легко найти функцию звездной плотности.

Подставив выражение (111.3) в уравнение (111.6), получим векторное уравнение

$$-\frac{1}{2} \text{grad } \chi = k \text{grad } \Phi + \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{dt^2} \mathbf{r} + \frac{d\delta}{dt},$$

интегралом которого будет выражение

$$-\frac{1}{2} \chi = k\Phi + \frac{1}{4} \frac{d^2 k}{dt^2} r^2 + \frac{d\delta}{dt} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \chi_0(t), \quad (114.2)$$

где χ_0 — произвольная функция времени.

Продифференцировав уравнение (114.2) по времени, можно затем приравнять правую часть полученного выражения левой части уравнения (111.7) и отсюда найти производную χ_0 по времени.

Рассматривая уравнение (112.1), в котором $G(t)$ можно приравнять нулю, приходим к выводу, что χ_0 постоянно. Учитывая это и обозначая $\varphi^2 = k$, получим вместо выражения (114.2)

$$-\frac{1}{2} \chi = \varphi^2 \Phi + \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + \varphi \ddot{\varphi}) r^2 + \delta \mathbf{r} + \text{const.}$$

Производя еще некоторые алгебраические преобразования, сводящиеся к подстановке в уравнение (111.8) найденного выражения для χ

и величин ku_0^2 , kv_0^2 , $k\omega_0^2$, и используя формулы (111.2) и (111.3), получим

$$2\varphi^2\Phi + (\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\dot{\varphi})r^2 + 2\delta\mathbf{r} + \text{const} = \dot{\varphi}^2 r^2 + \\ + \frac{1}{\varphi^2}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta})^2 + 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\delta\mathbf{r} + \sigma.$$

Подставляя в это уравнение выражение потенциала, согласно формуле (114.1), и используя тождество

$$\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{r} - \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\delta\mathbf{r} = \varphi \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{\varphi} \right) \cdot \mathbf{r},$$

в конце концов приходим к следующей формуле:

$$\frac{1}{2}\sigma = \Phi_1 \{ (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2; \quad \delta + \beta; \quad \zeta - \zeta_0 \} + \text{const.} \quad (114.3)$$

Формулы (114.1) и (114.3) являются общим решением рассматриваемой проблемы, в то время, как в простой эллипсоидальной теории можно получить только очень частные решения. Было принято существование сферического распределения скоростей, однако, это несколько не уменьшает общности наших рассуждений, так как мы предполагали при этом совместное существование в Галактике различных подсистем; следовательно, выбирая надлежащим образом сферические распределения скоростей в каждой подсистеме, можно получить суммарное распределение скоростей в Галактике в полном согласии с наблюдениями. Здесь нам кажется необходимым напомнить читателям обо всех сделанных в начале предположениях.

1. При рассмотрении основного уравнения динамики звездных систем мы пренебрегли действием иррегулярных сил, поэтому, сравнивая выводы теории с результатами наблюдений в конкретных звездных системах, необходимо отдельно учесть также влияние именно этих сил.

2. Предполагая непрерывность основного уравнения (см. п. 89), мы тем самым ограничиваемся статистическим исследованием данной системы и отказываемся от изучения движений отдельных звезд.

3. Введя в качестве единственного аргумента функции распределения координат и скоростей многочлен второй степени $Q + \sigma$ (см. п. 101), мы таким образом навязали нашим решениям некоторую частную форму. Однако, не делая этого, мы не смогли бы разбить уравнения (101.8) на двадцать уравнений [см. формулы (101.9) — (101.28)]. Хотя каждое наблюдаемое распределение скоростей можно представить с помощью суммы полученных решений, тем не менее, неизвестно, насколько принятый а priori вид функции распределения ограничивает общность формы потенциала. Мы не можем путем совмещения различных подсистем (см. п. 110) добиться обобщения последней, так как в основное уравнение входит общий потенциал, вызывающий все ускорения в системе.

4. Предполагая существование сферического распределения координат и скоростей [см. формулы (111.1)—(111.8)], мы ограничиваемся при этом исследованием отдельных подсистем, вернее, даже отдельных „потоков“ звезд, внутри которых имеет место сферическое распределение скоростей, получаемый же потенциал соответствует изолированной звездной системе в целом.

115. Физическая интерпретация решения. Займемся теперь обсуждением всех элементов решения с физической точки зрения:

а) *Распределение скоростей* полностью определяется уравнением

$$a = \varphi^2;$$

так как правая часть этого уравнения является произвольной функцией времени, то, следовательно, решение допускает произвольные изменения дисперсии скоростей. Однако, в данный момент времени дисперсия одинакова во всех точках пространства. Рассматривая совокупность различных подсистем, можно получить различные дисперсии в разных точках пространства, предполагая при этом, что отношение плотностей звезд, принадлежащих к различным подсистемам (имеющим неодинаковые дисперсии), изменяется в пространстве. В случае стационарной системы (без учета иррегулярных сил) распределение скоростей, естественно, не зависит от времени.

б) *Движение центроидов.* Сравнивая уравнения (111.2) с уравнением (111.3), получим

$$(u_0, v_0, w_0) = \frac{\varphi}{\varphi^2} \mathbf{r} + \frac{1}{\varphi^2} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}) + \frac{\boldsymbol{\delta}}{\varphi^2}.$$

Первый член правой части соответствует общему расширению или сжатию подсистемы (потока), которые должны быть пропорциональны скорости изменения дисперсии и расстоянию от начала координат [система координат является здесь не произвольной, а специально выбранной согласно формуле (112.2)]. Во всех направлениях скорость расширения одинакова, следовательно, нет никаких привилегированных направлений или плоскостей. Для того, чтобы получить неодинаковые средние скорости расширения в различных направлениях, следует соответственно варьировать отношения звездных плотностей различных подсистем. В центре системы расширения нет. Его не существует также в стационарных системах. Расширение тем больше, чем больше дисперсия, так как она обратно пропорциональна величине φ .

Средний член представляет собой вращение системы вокруг оси, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{\beta}$, который в данной системе постоянен. Вращение пропорционально модулю этого вектора, а также дисперсии скоростей, и увеличивается с увеличением расстояния от оси системы координат. Отдельная система, если пренебречь расширением, вращается как твердое тело. Следовательно, если вращение системы, как целого, отличается от вращения твердого тела, то

отношение чисел звезд, принадлежащих к различным подсистемам, в такой системе должно меняться в зависимости от расстояния от центра системы. Следует обратить внимание также на то, что скорость вращения данной подсистемы не зависит от расстояния от какой-либо произвольно выбранной плоскости, например, от экваториальной, а также на то, что скорость вращения не зависит от значения производной φ , т. е. от степени нестационарности системы. Последний член, пропорциональный дисперсии скоростей и вектору δ , являющемуся произвольной функцией времени, определяет общий перенос системы. Казалось бы, этим членом можно пренебречь, так как общий перенос всей звездной системы является или несущественным математическим преобразованием; если центр масс неподвижен, или же невозможным в изолированной системе; если центр масс движется неравномерно. Однако, в теории нескольких совместно существующих подсистем вектор δ является относительным перемещением одной подсистемы, по сравнению с другой, поэтому величина этого вектора играет большую роль в звездных системах, в чем мы скоро убедимся.

в) *Потенциал*. Формула (114.1) является достаточно общим выражением потенциала. Хотя первые члены имеют довольно частную, точно установленную форму, тем не менее, они могут или совсем исчезать, или же изменяться в зависимости от принятой формы произвольной функции Φ_1 .

г) *Звездная плотность*. Звездная плотность, как известно, однозначно определяется выражением σ (114.3) при установленной функции распределения скоростей; σ является произвольной функцией следующих аргументов:

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2, \quad (115.1)$$

$$\vartheta + \beta_1, \quad (115.2)$$

$$\zeta - \zeta_0. \quad (115.3)$$

Если выражения (115.1)—(115.3) приравнять постоянным величинам, то получим уравнения геометрических мест точек одинаковой звездной плотности. Так как рассмотрение полученных уравнений в общем виде довольно сложно, то мы ограничимся здесь лишь простым случаем, а именно:

$$\varphi^2 = k = 1, \quad t_0 = 0. \quad (115.4)$$

В таком случае, согласно формулам (112.8), имеем

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \quad t = t;$$

примем для простоты, что

$$\delta = 0;$$

тогда, используя выражения (113.5), (113.4) и (113.10), получим

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0.$$

Следовательно, уравнения геометрического места точек одинаковой звездной плотности будут иметь вид

$$x^2 + y^2 = \text{const}, \quad (115.5)$$

$$\vartheta + \beta t = \text{const}, \quad (115.6)$$

$$z = \text{const}, \quad (115.7)$$

причем, на основании формул (113.7),

$$\text{tg } \vartheta = \frac{y}{x}.$$

Рассмотрение уравнений (115.6) и (115.5) приводит к выводу, что геометрические места точек одинаковой плотности вращаются вокруг центра системы со скоростью, пропорциональной β , т. е. с постоянной скоростью по окружностям, радиус которых определяется формулой (115.5). Из уравнения (115.7) следует, что плоскости этих окружностей перпендикулярны вектору β .

Следует отметить также, что предположение $\varphi = \text{const}$ и $\delta = 0$ недостаточно для того, чтобы система была стационарной. Хотя в этом случае мы получим „чистое“ вращение без расширения, все же плотность в данной точке является функцией времени, которая по истечении интервала времени $t = n\pi/\beta$ (где n — целое число) снова принимает первоначальное значение.

116. Спиральная структура. Если отбросить введенное упрощение [см. формулу (115.4)] и считать, что переменные определяются выражениями (112.8), то получим аналогичную картину с той разницей, что пространственные и временные параметры вращения будут меняться с течением времени в зависимости от функции $k(t)$. В этом случае орбиты точек с одинаковой звездной плотностью не будут окружностями в пространстве x, y, z , а будут, вообще говоря, некоторыми спиралями, ветви которых могут удаляться и снова приближаться к центру. Скорость вращения точки с данной плотностью не будет постоянной, расстояние орбит от плоскости (x, y) также может меняться.

Если, кроме того, считать, что

$$\delta \neq 0,$$

оставляя в силе предположение (115.4), то вместо уравнений (115.5)—(115.7) получим

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \text{const},$$

$$\text{arc tg } \frac{y - y_0}{x - x_0} + \beta t = \text{const},$$

$$z - z_0 = \text{const},$$

т. е. имеет место круговое движение, но центр окружности находится не в начале координат, а в некоторой подвижной точке (x_0, y_0, z_0) , координаты которой изменяются с течением времени следующим образом [см. формулы (113.4), (113.5), (113.10)]:

$$\begin{aligned}x_0 &= \left[\int (\delta_1 \cos \beta t - \delta_2 \sin \beta t) dt \right] \cos \beta t + \left[\int (\delta_1 \sin \beta t + \delta_2 \cos \beta t) dt \right] \sin \beta t, \\y_0 &= - \left[\int (\delta_1 \cos \beta t + \delta_2 \sin \beta t) dt \right] \sin \beta t + \left[\int (\delta_1 \sin \beta t + \delta_2 \cos \beta t) dt \right] \cos \beta t, \\z_0 &= \int \delta_3 dt.\end{aligned}$$

В этом случае получаются более сложные орбиты. Примером может служить орбита, изображенная на рис. 68, на котором жирной

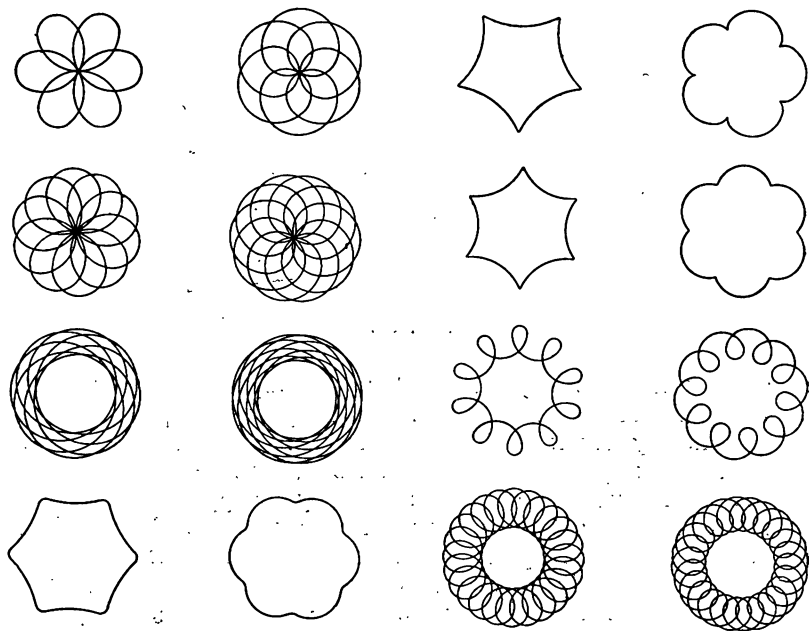


Рис. 67.

линией указан путь точки (x_0, y_0, z_0) , а тонкой — орбиты точки постоянной звездной плотности. Если предположить, что $\delta = 0$, то получим круговые орбиты или спирали вокруг неподвижной точки. Следовательно, существование „спиральной симметрии“ связано с равенством нулю вектора δ . В рассматриваемом сейчас случае орбиты могут иметь самую разнообразную форму, в частности, неправильную. Так как случаю $\delta \neq 0$ соответствовало существование относительного

перемещения подсистем, о чем была речь в п. 115, то *система, в которой нет относительного перемещения подсистем, должна обладать „спиральной симметрией“*.

На рис. 67 изображены эти орбиты согласно работам Чандрасекхара.

Ничем не ограничивая величин k и δ , можно практически получить все возможные орбиты. Следует, однако, помнить, что здесь речь идет лишь об орбитах точек с постоянной звездной плотностью, а не об орбитах отдельных звезд. Кроме того, формулы (115.1)—(115.3) показывают, что нельзя определять форму поверхностей одинаковой

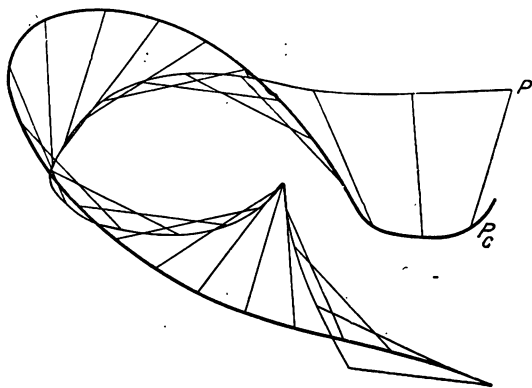


Рис. 68.

звездной плотности в определенный момент времени, так как величина σ является совершенно произвольной функцией времени. Все же в некоторых случаях можно предполагать, что орбиты точек постоянной плотности могут одновременно быть действительными орбитами звезд; в таких случаях траектории звезд будут группироваться около мест с повышенной звездной плотностью в системе. Таким образом, можно создать общую теорию спиральной структуры галактик. Однако, такого рода теории будут страдать чрезмерной общностью, так как полученные решения содержат массу возможностей; теории эти вряд ли будут применимы к конкретным звездным системам.

Хотя распределение скоростей звезд в окрестностях Солнца известно, все же его нельзя сравнивать с теоретическим распределением, так как структура Галактики неизвестна. При применении теории к другим галактикам возникает противоположная трудность; в этом случае мы довольно хорошо знаем структуру многих галактик, однако, функции распределения скоростей в них неизвестны. В лучшем случае мы кое-что знаем о движении центроидов некоторых групп звезд (не отдельных подсистем) в ближайших галактиках.

Ограниченность наблюдательных данных приводит к тому, что теорию Чандрасекхара можно практически подогнать к любой наблюдаемой форме галактики; вследствие этого указанная теория не в состоянии объяснить, почему некоторые типы спиральной структуры галактик встречаются особенно часто. Для практического применения теорий Чандрасекхара следовало бы исследовать еще более частные случаи последней, однако, этого пока еще никто не сделал.

Все рассуждения, касающиеся основного уравнения динамики звездных систем, проводились в прямоугольной системе координат, и только иногда использовались некоторые системы криволинейных координат. Указанное уравнение можно непосредственно вывести в обобщенной криволинейной системе координат. Когда-то ученые с этим видом уравнения связывали довольно большие надежды, которые, к сожалению, не оправдались. Так как все важнейшие решения, полученные сначала в криволинейной системе координат, удалось получить затем также непосредственно в прямоугольной системе, несколько выигрывая при этом в смысле четкости и ясности, то в нашей книге мы ограничились рассмотрением этой проблемы в прямоугольной системе координат¹⁾.

ТЕОРИЯ ЛИНДБЛАДА СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ГАЛАКТИК (НАПИСАНО В. КРУЛИКОВСКИМ)

117. Введение. В теории Линдблада рассматриваются вопросы возникновения и эволюции галактик, в частности, спиральных галактик, при этом эволюционный путь галактики связывается с величиной ее вращательного момента, а возраст, т. е. степень продвижения галактики на этом пути, со степенью сжатия данной галактики.

На основании изучения с помощью теории Линдблада состояния галактик, близкого к состоянию идеального равновесия, приходим к выводу, что при некоторых степенях сжатия в галактиках наступают неравновесные состояния, которые определяют их дальнейший эволюционный путь.

Увеличение степени сжатия галактик объясняется процессом конденсации материи, в результате чего из газа образуются звезды и межзвездная пыль.

Теория Линдблада излагается в ряде работ, опубликованных автором и его сотрудниками. Самое полное изложение этой теории содержится в работе Линдблада и Лангебартеля²⁾.

Настоящий раздел основан на этой именно работе, откуда автор заимствовал также числовые данные, рисунки и фотографии.

¹⁾ Вывод основного уравнения в различных криволинейных системах координат дан в книге: Smart, *Stellar Dynamics*, Cambridge, 1938, стр. 329, 332, 337, 338, 340.

²⁾ *Stockh. Obs. Ann.* 17, № 6 (1953).

В п. 118 приводится вывод уравнения среднего движения внутри галактики (внутреннего движения центроидов).

В п. 119 выводятся уравнения, определяющие отклонение среднего движения в реальной системе от среднего движения в состоянии равновесия. В п. 120 по необходимости вводится некоторая модель распределения масс и скоростей в галактике; в п. 121 содержится дискуссия внутреннего движения в галактике (близкого движению в состоянии равновесия) на основании принятой модели последней. Пункт 122 посвящен созданию теории спиральной структуры галактики на основании результатов, полученных в предыдущем пункте. Эта теория в большой степени носит качественный характер.

Настоящий параграф следует считать лишь введением к самостоятельному изучению обширной теории Линдблада.

118. Уравнения движения масс. В основе теории Линдблада лежат уравнения движения масс, аналогичные уравнениям движения в механике непрерывной среды. Эти уравнения получаются путем исследования движения масс относительно их среднего движения, взвешенного по этим же массам. Такое движение можно представить себе как движение в непрерывной среде, поле скоростей которой задано формулой

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d_3\mathbf{v}}{D(\mathbf{r}, t)}, \quad (118.1)$$

где $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — фазовая плотность массы системы;

$$D(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d_3\mathbf{v} \quad (118.2)$$

— пространственная плотность массы системы, а $d_3\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ — элемент объема в пространстве скоростей $\mathbf{v}$. Средние значения других динамических величин можно выразить с помощью аналогичных формул.

Если предположить, что все звезды в системе обладают одинаковыми массами, равными единице, то фазовая плотность массы $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ совпадает с фазовой звездной плотностью, о которой речь была в п. 87. Это следует из сравнения формулы (87.1) с формулой

$$\mathcal{M}(t) = \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d_3\mathbf{r} d_3\mathbf{v},$$

где $\mathcal{M}(t)$ — масса всей системы, а $d_3\mathbf{r} = dx dy dz$ — элемент объема в пространстве координат.

В п. 89 было показано, что принцип сохранения числа звезд и лемма о несжимаемости фазового пространства приводят к выводу, что при движении системы стоксова производная фазовой плотности числа звезд равна нулю. Аналогично принцип сохранения массы и лемма о несжимаемости фазового пространства позволяют заключить, что при

движении системы стокова производная фазовой плотности массы должна равняться нулю, т. е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (118.3)$$

Здесь можно сделать подстановку

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (118.4)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус вектор, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{a}$ — ускорение движения отдельной звезды, рассматриваемой как материальная точка, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу массы, d/dt — оператор стоковой производной во время индивидуального движения [в предыдущих параграфах мы обозначили его через $D/D(t)$]. Знак $\partial/\partial \mathbf{r}$ является другим обозначением оператора набла ∇ .

Проинтегрируем по частям уравнение (118.3) по всем возможным скоростям, при этом заметим, что на основании формул (118.1) и (118.2) и равенства функции $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ нулю при $\mathbf{v} \rightarrow \infty$ можно считать, что

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial t} d_3\mathbf{v} &= \frac{\partial D}{\partial t}, \\ \int \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d_3\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (D\bar{\mathbf{v}}) = \text{div}(D\bar{\mathbf{v}}), \\ \int \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d_3\mathbf{v} &= \mathbf{a} \cdot \int \mathbf{v} f d_3\mathbf{v} = 0, \end{aligned}$$

причем в последнем случае мы интегрируем в пространстве скоростей по замкнутой поверхности, удаленной в бесконечность. Таким образом, получим уравнение непрерывности среднего движения

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \text{div}(D\bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (118.5)$$

На основании тождества

$$\text{div}(D\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } D + \text{div } \bar{\mathbf{v}}$$

можно уравнение (118.5) преобразовать следующим образом:

$$\frac{dD}{dt} + D \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (118.5')$$

где d/dt — оператор стоковой производной во время среднего движения, который выражается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla. \quad (118.6)$$

Помножим обе части уравнения (118.3) на $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по всем скоростям. Легко убедиться, что в таком случае будут иметь

место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d_3 v &= \frac{\partial}{\partial t} (D \bar{\mathbf{v}}), \\ \int \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d_3 v &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (D \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}) = \text{Div} (D \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}), \\ \int \mathbf{v} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d_3 v &= \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d_3 v \cdot \mathbf{F} = \int \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{v} f) - f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right] d_3 v \cdot \mathbf{F} = \\ &= - \int f \hat{\mathbf{I}} d_3 v \cdot \mathbf{F} = - D \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{F} = - D \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{a} \mathbf{b}$ — диадное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ [в декартовых координатах $\mathbf{a} \mathbf{b} = (a_k b_l) (k, l = x, y, z)$], $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение тех же векторов (в декартовых координатах $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_k a_k b_k$).

$\text{Div} \hat{T}$ — дивергенция тензора второй степени $\hat{T}$ [в декартовых координатах $\text{Div} \hat{T} = \left(\sum_l \partial T_{kl} / \partial x_l \right) (x_l = x, y, z)$, где $\hat{T} = (T_{kl})$], а $\hat{\mathbf{I}}$ — единичный тензор второй степени [в декартовых координатах $\hat{\mathbf{I}} = (\delta_{kl})$]. Символы $\hat{T} \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \hat{T}$ обозначают суженные произведения тензора $\hat{T}$ на вектор $\mathbf{a}$ [в декартовых координатах $\hat{T} \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_l T_{kl} a_l \right)$, $\mathbf{a} \cdot \hat{T} = \left(\sum_k a_k T_{kl} \right)$].

Таким образом, получим следующую формулу:

$$\frac{\partial}{\partial t} (D \bar{\mathbf{v}}) = D \mathbf{F} - D \text{Div} (D \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}). \quad (118.7)$$

Это уравнение можно записать в другом виде, основываясь на выражениях (118.5) и (118.6), действительно

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (D \bar{\mathbf{v}}) &= \frac{\partial D}{\partial t} \bar{\mathbf{v}} + D \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = - \text{div} (D \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}} + D \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \\ &= D \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + D \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} - D \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} - [\nabla \cdot (D \mathbf{v})] \bar{\mathbf{v}} = \\ &= D \frac{d \bar{\mathbf{v}}}{dt} - \nabla \cdot (D \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}) = D \frac{d \bar{\mathbf{v}}}{dt} - \text{Div} (D \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Итак,

$$D \frac{d \bar{\mathbf{v}}}{dt} = D \mathbf{F} - \text{Div} \hat{\Pi}, \quad (118.7')$$

где

$$\hat{\Pi}(\mathbf{r}, t) = D (\bar{\mathbf{v}} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = D \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}; \quad (118.8)$$

$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$ — скорость данной звезды относительно среднего движения (пекулярное движение). Ясно, что $\bar{\mathbf{V}} = 0$. Тензор второй степени (118.8) мы называем тензором дисперсии скоростей.

Уравнения (118.5') и (118.7') имеют вид уравнений движения непрерывной среды с плотностью D в поле скоростей $\bar{\mathbf{v}}$, среды, в

которой действуют силы $\mathbf{F}$ и напряжения, определяемые тензором $\hat{\Pi}$. В рассматриваемом случае напряжения определяются тензором дисперсии скоростей; это значит, что они появляются при отклонениях движения данной звезды от среднего движения.

Уравнения (118.7) и (118.7') в принципе описывают движение относительно инерциальной системы отсчета. Применим их к галактикам, вращение которых можно рассматривать, как вращение абсолютно твердого тела с постоянной угловой скоростью относительно системы, которую будем считать инерциальной. Поэтому внутреннее движение в галактиках удобнее рассматривать не в инерциальной системе координат, а в системе, вращающейся с постоянной скоростью $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ вместе с галактикой. В таком случае уравнение (118.7') можно переписать в виде

$$D \frac{d'\bar{\mathbf{v}}'}{dt} = D [\mathbf{F} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}'] - \text{Div} \hat{\Pi}, \quad (118.9)$$

где выражения $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, $-2\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}'$ являются центробежной силой и силой Кориолиса на единицу массы. Штрихи у векторов должны указывать на то, что приращения векторов измеряются не в инерциальной системе, а в системе, вращающейся вместе с галактикой. Пусть сила $\mathbf{F}$ (на единицу массы) обладает потенциалом $\Phi(\mathbf{r}, t)$, в таком случае можно написать

$$\mathbf{F} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} + \omega^2 \mathbf{r}_\perp = -\text{grad } \Omega, \quad (118.10)$$

здесь

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \omega^2 r_\perp^2, \quad (118.11)$$

а $\mathbf{r}_\perp$ — составляющая вектора $\mathbf{r}$ в направлении, перпендикулярном вектору $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$, имеющему соответствующее направление вращения. Функция $\Omega(\mathbf{r}, t)$ [см. формулу (118.11)] является потенциалом эффективной силы (118.10), поэтому мы назвали его *эффективным потенциалом*.

Уравнение (118.5') не изменится в результате введения новой системы отсчета, т. е.

$$\frac{dD}{dt} + D \text{div} \bar{\mathbf{v}}' = 0, \quad (118.12)$$

так как

$$\text{div} \bar{\mathbf{v}} = \text{div} (\bar{\mathbf{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) = \text{div} \bar{\mathbf{v}}' - \boldsymbol{\omega} \text{rot} \bar{\mathbf{r}} = \text{div} \bar{\mathbf{v}}'.$$

В дальнейшем мы все время будем иметь дело со средним движением, рассматриваемым в системе координат, вращающейся вместе с галактикой, поэтому для удобства не будем больше писать знак среднего движения у величины $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ и штрихи, обозначающие вращающуюся систему координат, т. е. $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$. В таком случае

уравнения движения масс (118.9) и (118.12) примут вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } \Omega - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{D} \text{Div } \hat{\Pi} \quad (118.13)$$

и

$$\frac{dD}{dt} + D \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (118.14)$$

где

$$\hat{\Pi}(\mathbf{r}, t) = D\overline{V\mathbf{V}}, \quad \Omega(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2}\omega^2 r_{\perp}^2, \quad (118.15)$$

а выражение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

является оператором стоксовой производной во время среднего движения.

К этим уравнениям следует еще прибавить уравнение Пуассона, выражающее зависимость между потенциалом гравитационных сил и плотностью $D(\mathbf{r}, t)$ массы

$$\Delta\Phi = 4\pi G D,$$

где G — постоянная тяготения.

119. Уравнения, описывающие отклонения от равновесного движения. В теории Линдблада, как об этом уже упоминалось во введении, исследования отклонений внутреннего движения в галактике от равновесного играют решающую роль.

Поэтому мы сейчас займемся выводом уравнений, определяющих эти отклонения.

Обозначим динамические величины, соответствующие среднему равновесному движению, через $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$, $D_0(\mathbf{r})$, $\Omega_0(\mathbf{r})$, $\hat{\Pi}_0(\mathbf{r}) = D_0\overline{V_0V_0}$; те же величины, относящиеся к реальному среднему движению, — через $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $D(\mathbf{r}, t)$, $\Omega(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\Pi}(\mathbf{r}, t)$. В таком случае получим следующие уравнения:

$$\frac{d_0\mathbf{v}_0}{dt} = -\text{grad } \Omega_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - \frac{1}{D_0} \text{Div } \hat{\Pi}_0, \quad (119.1)$$

$$\frac{d_0D_0}{dt} + D_0 \text{div } \mathbf{v}_0 = 0, \quad (119.2)$$

где выражение

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \quad (119.3)$$

является оператором стоксовой производной среднего равновесного движения. Здесь также справедливы уравнения (118.13) и (118.14). В дальнейшем, говоря о движении, будем пропускать слово „среднее“.

К этим уравнениям следует еще прибавить уравнение Пуассона

$$\Delta\Phi_0 = 4\pi G D_0. \quad (119.4)$$

Можно исследовать различия динамических величин реального и равновесного движения двух видов: 1) различия в данной точке пространства, 2) различия, наблюдаемые тогда, когда мы, начиная с некоторой точки пространства, следуем один раз за реальным движением, а другой раз — за равновесным, происходящим в том же интервале времени ¹⁾. Так, например, при изучении скорости можно представить ее с помощью написанных ниже формул

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad (119.5)$$

$$\mathbf{v}'_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}). \quad (119.6)$$

Здесь $\delta\mathbf{r}$ — разность положений в реальном и равновесном движении в некоторый момент t , когда мы, начиная с какой-то точки пространства, следуем один раз за реальным движением, а другой — за равновесным.

Таким же образом можно получить формулы, аналогичные формулам (119.5) и (119.6), но связывающие другие динамические величины. Заметим, что выражение

$$\left[\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} \right]_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} - \frac{d_0\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{d_0\mathbf{v}'_1(\mathbf{r}, t)}{dt} \quad (119.7)$$

непосредственно вытекает из формулы

$$\left[\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} \right]_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} = \frac{d_0\mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t)}{dt}.$$

Вычитая уравнение (119.1) в точке $\mathbf{r}$ из уравнения (118.13) в точке $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, принимая во внимание выражение

$$\frac{1}{D} \text{Div } \hat{\Pi} = \frac{1}{D} \text{Div } (D\overline{\mathbf{V}\mathbf{V}}) = \text{Div } \overline{\mathbf{V}\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{V}\mathbf{V}} \cdot \text{grad } \ln D$$

и вводя обозначение

$$(\overline{\mathbf{V}\mathbf{V}})'_1(\mathbf{r}, t) = \overline{\mathbf{V}\mathbf{V}}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - \overline{\mathbf{V}_0\mathbf{V}_0}(\mathbf{r}, t),$$

получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d_0\mathbf{v}'_1}{dt} = & -\text{grad } \Omega'_1 - 2\omega \times \mathbf{v}'_1 - \text{Div } (\overline{\mathbf{V}\mathbf{V}})'_1 - \overline{\mathbf{V}_0\mathbf{V}_0} \cdot \text{grad } \ln \frac{D}{D_0} - \\ & - (\overline{\mathbf{V}\mathbf{V}})'_1 \cdot \text{grad } \ln D. \end{aligned} \quad (119.8)$$

Предположим, что отклонения реального движения от равновесного очень малы, в таком случае можно ограничиться только членами первой степени, тогда

$$\ln \frac{D}{D_0} = \ln \left(1 + \frac{D'_1}{D_0} \right) \approx \frac{D'_1}{D_0}$$

¹⁾ Различия первого рода соответствуют трактовке движения непрерывной среды по методу Эйлера, а второго рода — по методу Лагранжа.

и

$$\ln D = \ln \left[D_0 \left(1 + \frac{D'_1}{D_0} \right) \right] = \ln D_0 + \ln \left(1 + \frac{D'_1}{D_0} \right) \approx \ln D_0 + \frac{D'_1}{D_0},$$

причем произведение второго члена в последней формуле на $(\overline{V}\overline{V})'_1$ является также малой величиной второго порядка, и поэтому можно ею пренебречь. В таком случае уравнение (119.8) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d_0 \mathbf{v}'_1}{dt} = & -\text{grad } \Omega'_1 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_1 - \text{Div } (\overline{V}\overline{V})'_1 - \overline{V}_0 \overline{V}_0 \cdot \text{grad } \frac{D'_1}{D_0} - \\ & - (\overline{V}\overline{V})'_1 \cdot \text{grad } \ln D_0. \end{aligned} \quad (119.9)$$

Предположим еще, что функция $\mathbf{v}'_1(\mathbf{r}, t)$ изменяется в пространстве значительно медленней, чем во времени, поэтому величина $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}'_1$ мала по сравнению с величиной $\partial \mathbf{v}'_1 / \partial t$. Следовательно,

$$\frac{d_0 \mathbf{v}'_1}{dt} \approx \frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial t},$$

и уравнение (119.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial t} = & -\text{grad } \Omega'_1 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_1 - \text{Div } (\overline{V}\overline{V})'_1 - \overline{V}_0 \overline{V}_0 \cdot \text{grad } \frac{D'_1}{D_0} - \\ & - (\overline{V}\overline{V})'_1 \cdot \text{grad } \ln D_0. \end{aligned} \quad (119.10)$$

Вычитая уравнение (119.2) в точке $\mathbf{r}$ из уравнения (118.14) в точке $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$, получим

$$\frac{d_0 D'_1}{dt} + D_0 \text{div } \mathbf{v}'_1 + D'_1 \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (119.11)$$

Предположим, что равновесное движение не очень сильно отличается от движения в несжимаемой среде, т. е. $d_0 D_0 / dt = 0$. В таком случае на основании уравнения (119.2) имеем

$$\text{div } \mathbf{v}_0 = 0.$$

Ограничиваясь снова малыми первого порядка, можно переписать уравнение (119.11) в следующем приближенном виде:

$$\frac{d_0 D'_1}{dt} + D'_1 \text{div } \mathbf{v}'_1 = 0. \quad (119.12)$$

Пренебрегая далее в уравнении (119.12) производными функции D'_1 в пространстве по сравнению с ее производной по времени, т. е.

$$\frac{d_0 D'_1}{dt} \approx \frac{\partial D'_1}{\partial t},$$

получим

$$\frac{\partial D'_1}{\partial t} + D_0 \text{div } \mathbf{v}'_1 = 0. \quad (119.13)$$

Вычитая уравнение (119.4) в точке $\mathbf{r}$ из уравнения (118.17) в точке $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ и учитывая при этом, что

$$[\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} = \nabla\Phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t),$$

приходим к формуле

$$\Delta\Phi'_1 = 4\pi G D'_1. \quad (119.14)$$

Так как

$$\Omega'_1(\mathbf{r}, t) = \Phi'_1(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \omega^2 [(r_\perp + \delta r_\perp)^2 - r_\perp^2],$$

а $\nabla\delta\mathbf{r} = 0$, то $\Delta\Omega'_1 = \Delta\Phi'_1$ и, следовательно, уравнение (119.14) имеет вид

$$\Delta\Omega'_1 = 4\pi G D'_1. \quad (119.15)$$

Уравнения (119.10), (119.13) и (119.15) описывают отклонения внутреннего движения в галактике от равновесного. Эти уравнения в принципе дают возможность определять поправки $\mathbf{v}'_1(\mathbf{r}, t)$ и $D'_1(\mathbf{r}, t)$ в том случае, если известны величины $\omega = \text{const}$, $D_0(\mathbf{r})$, $\bar{V}_0\bar{V}_0(\mathbf{r})$ и $(\bar{V}\bar{V})'_1(\mathbf{r}, t)$. Относительно последних введем (в согласии с наблюдательными данными) некоторые предположения, благодаря которым можно установить вид указанных величин.

Прежде всего, предположим, что при равновесном движении распределение скоростей представляется эллипсоидом вращения с осью, параллельной оси вращения галактики. Пусть эта ось, имеющая направление $\omega = \text{const}$, будет осью z декартовой системы координат, связанной с галактикой; оси x и y , следовательно, находятся в экваториальной плоскости галактики. Согласно сделанным предположениям, имеем

$$\overline{V_{ox}^2} = \overline{V_{oy}^2} = \alpha^2, \quad \overline{V_{oz}^2} = \gamma^2, \quad \overline{V_{ox}V_{oy}} = \overline{V_{ox}V_{oz}} = \overline{V_{oy}V_{oz}} = 0; \quad (119.16)$$

здесь величины

$$\alpha = \alpha(r_\perp), \quad \gamma = \gamma(r_\perp)$$

являются полуосями эллипсоида соответственно в экваториальной плоскости галактики и вдоль оси вращения последней.

При этом радиус-вектор $\mathbf{r}$ разложен на составляющую, перпендикулярную оси вращения $\mathbf{r}_\perp$ и параллельную ей $\mathbf{r}_\parallel$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel, \quad r_\perp = |\mathbf{r}_\perp| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_\parallel = |\mathbf{r}_\parallel| = z.$$

Произвольный вектор $\mathbf{a}$ можно, вообще говоря, разложить на составляющую, перпендикулярную оси вращения $\mathbf{a}_\perp$ и параллельную ей $\mathbf{a}_\parallel$; при этом

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel, \quad \mathbf{a}_\perp = \hat{\mathbf{i}}_\perp \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_\parallel = \hat{\mathbf{i}}_\parallel \cdot \mathbf{a}. \quad (119.17)$$

где

$$\hat{I}_{\perp} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}, \quad \hat{I}_{\parallel} = \mathbf{k}\mathbf{k},$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям x, y, z .

Предположим еще, что поправки тензора дисперсии скоростей удовлетворяют следующим формулам¹⁾:

$$(\overline{V_x^2})'_1 = (\overline{V_y^2})'_2 = \alpha^2 \eta, \quad (\overline{V_x V_y})'_1 = (\overline{V_x V_z})'_1 = (\overline{V_y V_z})'_1 = 0, \quad (119.18)$$

где

$$\eta(\mathbf{r}_{\perp}, t) = \frac{\theta'_1(\mathbf{r}_{\perp}, t)}{\theta_0(\mathbf{r}_{\perp})}, \quad (119.19)$$

причем

$$\theta_0(\mathbf{r}_{\perp}) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_0(\mathbf{r}_{\perp}, z) dz, \quad \theta'_1(\mathbf{r}_{\perp}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} D'_1(\mathbf{r}_{\perp}, z, t) dz. \quad (119.20)$$

Предположим, что в равновесном движении плотность массы симметрична относительно оси вращения

$$D_0 = D_0(\mathbf{r}_{\perp}, z).$$

Из этого предположения, используя формулу (119.4), получим также симметрию поля гравитационных сил относительно оси вращения

$$\Phi_0 = \Phi_0(\mathbf{r}_{\perp}, z).$$

Учитывая соотношения (119.16) и (119.18), можно написать

$$\overline{V_0 V_0} \cdot \text{grad} \frac{D'_1}{D_0} = \left(\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{D'_1}{D_0}, \quad \alpha^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{D'_1}{D_0}, \quad \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{D'_1}{D_0} \right),$$

$$\text{Div} (\overline{V V})'_1 = \left(\frac{\partial \alpha^2 \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha^2 \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial (\overline{V_z^2})'_1}{\partial z} \right),$$

$$(\overline{V V})'_1 \text{grad} \ln D_0 = \left(\alpha^2 \eta \frac{\partial \ln D_0}{\partial x}, \quad \alpha^2 \eta \frac{\partial \ln D_0}{\partial y}, \quad (\overline{V_z^2})'_1 \frac{\partial \ln D_0}{\partial z} \right).$$

Помножив левую часть уравнения (119.10) на тензоры $\hat{I}_{\perp}$ и $\hat{I}_{\parallel}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_{1\perp}}{\partial t} = -\nabla_{\perp} \Omega'_1 - 2\omega \times \mathbf{V}'_{1\perp} - \nabla_{\perp} (\alpha^2 \eta) - \alpha^2 \nabla_{\perp} \frac{D'_1}{D_0} - \alpha^2 \eta \nabla_{\perp} \ln D_0, \quad (119.21a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_{1z}}{\partial t} = -\frac{\partial \Omega'_1}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{V_z^2})'_1}{\partial z} - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{D'_1}{D_0} - (\overline{V_z^2})'_1 \frac{\partial \ln D_0}{\partial z}. \quad (119.21b)$$

¹⁾ Обоснование этого предположения дано Линдбладом в *Stockh. Obs. Ann.*, 16, № 1 (1950) и 17, № 6 (1953). Оно сводится к вычислению влияния некоторого вида возмущающего потенциала на дисперсию скоростей методом возмущений.

При этом оператор набла разложен здесь на „перпендикулярную“ часть $\nabla_{\perp}$ и часть, „параллельную“ оси вращения, $\nabla_{\parallel}$ [см. формулу (119.17)]

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \nabla_{\parallel}, \quad \nabla_{\perp} = \hat{i}_{\perp} \cdot \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_{\parallel} = \hat{i}_{\parallel} \cdot \nabla = k \frac{\partial}{\partial z}. \quad (119.22)$$

Пренебрегая в формуле (119.13) производной $\partial v'_{1z}/\partial z$, которая мала по сравнению с $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}'_1$, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{v}'_1 \approx \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}'_{1\perp},$$

получим приближенное выражение

$$\frac{\partial D'_1}{\partial t} + D_0 \nabla_{\perp} \mathbf{v}'_{1\perp} = 0. \quad (119.23)$$

Приближенная формула (119.23) показывает, что поправка плотности D'_1 связана, прежде всего, с внутренним движением в направлении, перпендикулярном оси вращения галактики.

В тех случаях, когда галактика ориентирована так, что луч зрения проходит в экваториальной плоскости, мы наблюдаем динамические величины, осредненные относительно z . Для того, чтобы облегчить вычисления и приспособить их к существующему положению вещей, осредним уравнения (119.21) и (119.23) относительно z . Кроме того, предположим, что отношение $(\nabla_{\perp} D_0)/D_0$ меняется с изменением z настолько медленно, что его можно заменить отношением средних величин $(\nabla_{\perp} \theta_0)/\theta_0$, где θ_0 определяется формулой (119.20). В этом случае получим следующую формулу, связывающую произвольную величину $W(\mathbf{r}, t)$ с остальными величинами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla_{\perp} W) D_0 dz &= \frac{1}{\theta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\nabla_{\perp} (W D_0) - W D_0 \frac{\nabla_{\perp} \theta_0}{\theta_0} \right] dz = \\ &= \frac{1}{\theta_0} \nabla_{\perp} (\theta_0 \tilde{W}) - \frac{\nabla_{\perp} \theta_0}{\theta_0} \tilde{W} = \nabla_{\perp} \tilde{W}; \end{aligned} \quad (119.24)$$

где

$$\tilde{W}(\mathbf{r}_{\perp}, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W(\mathbf{r}, t) D_0(\mathbf{r}_{\perp}, z) dz}{v_0(\mathbf{r}_{\perp})} \quad (119.25)$$

является средним значением величины $W(r, t)$ относительно z , взвешенным с помощью D_0 . Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\nabla_{\perp} \frac{W}{D_0} \right) D_0 dz &= \frac{1}{\theta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\nabla_{\perp} W - W \frac{\nabla \theta_0}{\theta_0} \right) dz = \\ &= \frac{1}{\theta_0} \nabla_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} W dz - \frac{\nabla_{\perp} \theta_0}{\theta_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} W dz = \nabla_{\perp} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W dz}{\theta_0}. \end{aligned} \quad (119.26)$$

Осредняя уравнения (119.21a) и (119.23) относительно z , получим

$$\frac{\partial \tilde{v}'_{1\perp}}{\partial t} = -\nabla_{\perp} \tilde{\Omega}'_1 - 2\omega \times \tilde{v}'_{1\perp} - \nabla_{\perp} (\alpha^2 \eta) - \alpha^2 \nabla_{\perp} \eta - \alpha^2 \eta \nabla_{\perp} \ln \theta_0 \quad (119.27)$$

и

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot \tilde{v}'_{1\perp} = 0. \quad (119.28)$$

Здесь функция $\eta(r_{\perp}, t)$, определяемая формулой (119.19), равна отношению средней поправки плотности к средней плотности равновесного движения, т. е. равна относительной средней поправке плотности.

Следующим шагом будет исключение средних поправок скорости $\tilde{v}'_1$ из уравнений (119.27) и (119.28) с целью получения уравнений, содержащих η .

С этой целью продифференцируем обе части уравнения (119.28) по времени

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \nabla_{\perp} \cdot \frac{\partial \tilde{v}'_{1\perp}}{\partial t} = 0.$$

Вместо второго члена подставим результат вычисления дивергенции от обеих частей уравнения (119.27) и после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2\alpha^2 \Delta_{\perp} \eta - (3\nabla_{\perp} \alpha^2 + \alpha^2 \nabla_{\perp} \ln \theta_0) \cdot (\Delta_{\perp} \alpha^2 + \alpha^2 \Delta_{\perp} \ln \theta_0 + \\ + \nabla_{\perp} \alpha^2 \nabla \ln \theta_0) \eta - \Delta_{\perp} \tilde{\Omega}'_1 + 2\omega (\nabla_{\perp} \times \tilde{v}'_{1\perp}) = 0, \end{aligned} \quad (119.29)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \nabla_{\perp}^2 = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Следует еще из выражения $2\omega (\nabla_{\perp} \times \tilde{v}'_{1\perp})$ исключить величину $\tilde{v}'_{1\perp}$. Умножая векторно обе части уравнения (119.27) на оператор $\nabla_{\perp}$, вычислим указанное выражение. Произведя необходимые преобра-

зования, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{v}}'_{1\perp} = & -2[\boldsymbol{\omega}(\nabla_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{v}}'_{1\perp}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_{\perp}) \tilde{v}'_{1\perp}] - \\ & - [\alpha^2 (\nabla_{\perp} \times \nabla_{\perp}) \eta + \nabla_{\perp} \alpha^2 \times \nabla_{\perp} \eta] - \\ & - [\alpha^2 \eta (\nabla_{\perp} \times \nabla_{\perp}) \ln \theta_0 + \nabla_{\perp} (\alpha^2 \eta) \times \nabla_{\perp} \ln \theta_0] = \\ = & \frac{\partial}{\partial t} (2\boldsymbol{\omega} \eta) - \nabla_{\perp} \alpha^2 \times \nabla_{\perp} \eta + \nabla_{\perp} \ln \theta_0 \times \nabla_{\perp} (\alpha^2 \eta).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались выражением (119.28), а также тем, что

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_{\perp} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla_{\perp} \times \nabla_{\perp} = 0.$$

Следовательно,

$$2\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{v}}'_{1\perp}) = 4\omega^2 \eta - 2 \int \boldsymbol{\omega} \cdot [\nabla_{\perp} \alpha^2 \times \nabla_{\perp} \eta - \nabla_{\perp} \ln \theta_0 \times \nabla_{\perp} (\alpha^2 \eta)] dt. \quad (119.30)$$

Подставляя выражение (119.30) в уравнение (119.29), получим искомое дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\eta(\mathbf{r}_{\perp}, t)$.

Напомним читателю, что, согласно сделанным предположениям, величины α и θ_0 являются функциями только расстояния $r_{\perp} = |\mathbf{r}_{\perp}|$ от оси вращения, средняя же поправка эффективного потенциала $\tilde{\mathcal{Q}}_1$ может, вообще говоря, быть функцией $\mathbf{r}_{\perp}$ и t . Попробуем теперь исследовать зависимость $\Delta_{\perp} \tilde{\mathcal{Q}}'_1$ от $\mathbf{r}_{\perp}$ и t более подробно. С этой целью введем новую функцию $f_1(\mathbf{r})$ и, используя выражение (119.15), напишем следующее уравнение:

$$\Delta_{\perp} \mathcal{Q}'_1 = f_1 \Delta \mathcal{Q}'_1 = 4\pi G f_1 D'_1, \quad (119.31)$$

где $\Delta \mathcal{Q}'_1 = \Delta \Phi'_1$, $\Delta_{\perp} \mathcal{Q}'_1 = \Delta_{\perp} \Phi'_1$. Осреднив уравнение (119.31) относительно z в предположении, что

$$\frac{D'_1}{D_0} \approx \frac{\theta'_1}{\theta_0} = \eta,$$

получим

$$\begin{aligned}\Delta_{\perp} \tilde{\mathcal{Q}}'_1 &= \frac{4\pi G}{\theta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 D'_1 D_0 dz = \frac{4\pi G}{\theta_0} \eta \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 D_0) D_0 dz = \\ &= 4\pi G \widetilde{f_1 D_0} \eta = 4(\omega^2 - \omega_1^2) \eta,\end{aligned} \quad (119.32)$$

где введено следующее обозначение:

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \pi G \widetilde{f_1 D_0}. \quad (119.33)$$

Это обозначение будет удобно в дальнейшем потому, что в уравнении для η появится выражение

$$4\omega^2 \eta - \Delta_{\perp} \tilde{\mathcal{Q}}'_1 = 4\omega_1^2 \eta.$$

Предположим еще, что ω_1 является функцией только $r_\perp = |\mathbf{r}_\perp|$, т. е.

$$\omega_1 = \omega_1(r_\perp).$$

Это предположение справедливо только в том случае, если функция $f_1(\mathbf{r})$ обладает осевой симметрией, а именно: $f_1 = f_1(r_\perp, z)$.

Кроме того, предположим, что функция $\omega_1(r_\perp)$ с изменением $r_\perp$ меняется настолько медленно, что можно в первом приближении считать ее постоянной. В таком случае коэффициенты в уравнении для η зависят только от величины $r_\perp$.

Введем теперь цилиндрическую систему координат R, ϑ, z , связанную с галактикой, причем ось z совпадает с осью вращения галактики ($r_\perp = R, r_\parallel = z$). Следовательно,

$$\Delta_\perp = \nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2},$$

$$\nabla_\perp = \mathbf{i}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{i}_\vartheta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta},$$

где $\mathbf{i}_R, \mathbf{i}_\vartheta, \mathbf{k}$ — единичные векторы в цилиндрической системе координат. Таким образом, в формуле (119.30) должна быть зависимость

$$\begin{aligned} \omega \cdot [\nabla_\perp \alpha^2 \times \nabla_\perp \eta - \nabla_\perp \ln \theta_0 \times \nabla_\perp (\alpha^2 \eta)] &= \\ &= \omega \cdot (\mathbf{i}_R \times \mathbf{i}_\vartheta) \left(\frac{\partial \alpha^2}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial R} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \alpha^2 \eta}{\partial \vartheta} = \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \alpha^2}{\partial R} - \alpha^2 \frac{d \ln \theta_0}{dR} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (119.30) в уравнение (119.29) и стремясь получить решение уравнения в виде

$$\eta(r_\perp, t) = \eta(R, \vartheta, t) = \eta(R) e^{i(m\vartheta + \sigma t)}, \quad (119.34)$$

придем к следующему дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\eta(R)$:

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 \left(\frac{d^2 \eta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\eta}{dR} - \frac{m^2}{R^2} \eta \right) &+ \left(3 \frac{d\alpha^2}{dR} + \alpha^2 \frac{d \ln \theta_0}{dR} \right) \frac{d\eta}{dR} + \\ &+ \left[\sigma^2 - 4\omega_1^2 + \alpha^2 \left(\frac{d^2 \ln \theta_0}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d \ln \theta_0}{dR} \right) + \frac{d\alpha^2}{dR} \left(\frac{d \ln \theta_0}{dR} + \frac{1}{R} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{d^2 \alpha^2}{dR^2} + \frac{2\omega m}{\sigma R} \left(\frac{d\alpha^2}{dR} - \alpha^2 \frac{d \ln \theta_0}{dR} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (119.35)$$

Так как функция $\eta(R, \vartheta, t)$ должна быть однозначной функцией угла ϑ , то $\eta(R, \vartheta + 2\pi, t) = \eta(R, \vartheta, t)$; таким образом, из равенства (119.34) вытекает, что

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (119.36)$$

Из указанного равенства [см. формулу (119.34)] следует, что внутри галактики, в плоскости, перпендикулярной к оси вращения последней, может появиться периодическая во времени волна плотности со средней амплитудой, равной $\eta(R)e^{im\theta}$, удовлетворяющая уравнению (119.35). Эта волна будет представлять собой среднюю относительную поправку распределения массы при равновесном движении, причем надо иметь в виду (с самого начала наших рассуждений) идеальное равновесие, которое вследствие появления волны плотности переходит в состояние равновесия или же в состояние отсутствия равновесия.

Для того, чтобы исследовать амплитуду этой волны, необходимо ввести, в согласии с наблюдательными данными, добавочные предположения, которые позволят нам определить функции $\alpha(R)$, $\theta_0(R)$ и $\omega_1(R)$, входящие в уравнение (119.35). Последнюю функцию будем считать постоянной, а первую и вторую определим в следующем п. 120.

120. Стандартная звездная система. Стандартной звездной системой мы назовем галактику, в экваториальной плоскости которой дисперсия скоростей при равновесном движении [см. формулу (119.16)] зависит от расстояния R от оси вращения по закону

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right), \quad \gamma^2 = \gamma_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right), \quad (120.1)$$

где α_0 , γ_0 и a — постоянные. Заметим, что $\alpha = \alpha_0$, $\gamma = \gamma_0$ для $R=0$, но $\alpha=0$, $\gamma=0$ для $R=a$.

При этом предположении относительно функций $\alpha(R)$ и $\gamma(R)$ постараемся определить функцию $\theta_0(R)$ и таким образом найти также коэффициенты в уравнении (119.35), определяющем амплитуду волны плотности $\eta(R)$.

Помножим по частям уравнение (119.1) слева на тензор $\hat{I}_\perp$ и тензор $\hat{I}_\parallel$ и, используя выражение (119.6), получим

$$\frac{d_0 v_{0\perp}}{dt} = -\nabla_\perp \Omega_0 - 2\omega \times v_{0\perp} - \frac{1}{D_0} \nabla_\perp (\alpha^2 D_0) \quad (120.1a)$$

и

$$\frac{d_0 v_{0z}}{dt} = -\frac{\partial \Omega_0}{\partial z} - \frac{1}{D_0} \frac{\partial \gamma^2 D_0}{\partial z}, \quad (120.16)$$

причем $\partial \Omega_0 / \partial z = \partial \Phi_0 / \partial z$. Помножим обе части уравнения (120.1a) скалярно на единичный вектор в направлении $\mathbf{r}_\perp$: $\mathbf{i}_R = \mathbf{r}_\perp / R$. При этом заметим, что

$$\frac{d_0 \mathbf{i}_R}{dt} = \frac{1}{R} \mathbf{i} (v_{0\perp} - \mathbf{i}_R v_{0R}) = \mathbf{i}_\theta \frac{v_{0\theta}}{R},$$

так как в цилиндрической системе координат

$$\mathbf{a}_\perp = \hat{I}_\perp \cdot \mathbf{a} = i_R \mathbf{a}_R + i_\phi \mathbf{a}_\phi, \quad \mathbf{a}_\parallel = \hat{I}_\parallel \cdot \mathbf{a} = k \mathbf{a}_z.$$

Следовательно, получим

$$\frac{d_0 v_{0R}}{dt} - \frac{v_{0\phi}^2}{R} = - \frac{\partial \Omega_0}{\partial R} + 2\omega v_{0\phi} - \frac{1}{D_0} \frac{\partial \alpha^2 D_0}{\partial R}. \quad (120.2)$$

В случае равновесного движения можно принять

$$v_{0R} = 0, \quad v_{0z} = 0.$$

Тогда уравнения (120.16) и (120.2) преобразуются следующим образом:

$$\frac{v_{0\phi}^2}{R} - 2\omega v_{0\phi} + \frac{1}{D_0} \frac{\partial \alpha^2 D_0}{\partial R} + \frac{\partial \Omega_0}{\partial R} = 0, \quad (120.3a)$$

$$\frac{1}{D_0} \frac{\partial \gamma^2 D_0}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0, \quad (120.3b)$$

где

$$\Omega_0 = \Phi_0 - \frac{1}{2} \omega^2 R^2.$$

$v_0(\mathbf{r}, t)$ определяет поле скоростей внутреннего движения в галактике в системе координат, вращающейся как целое вместе с галактикой с угловой скоростью $\omega = \text{const}$, при этом предполагается, что галактика в состоянии равновесия вращается в первом приближении как твердое тело. Если бы это строго выполнялось, то $v_{0\phi} = 0$. В действительности же имеют место отклонения, зависящие от расстояния R от оси вращения галактики, т. е. $v_{0\phi} = v_{0\phi}(R)$. Поэтому мы варьируем в очень малой степени величину угловой скорости

$$\omega = \omega(R),$$

так, чтобы для каждого значения R было справедливым следующее равенство:

$$v_{0\phi} = 0.$$

В таком случае уравнение (120.3a) примет вид

$$\frac{1}{D_0} \frac{\partial \alpha^2 D_0}{\partial R} + \frac{\partial \Omega_0}{\partial R} = 0, \quad (120.4)$$

где

$$\Omega_0 = \Phi_0 - \int_0^R \omega^2 R \, dR.$$

При этом

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial R} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} - \omega^2 R,$$

так как в предыдущем случае $\omega = \text{const}$.

Теперь выделим мысленно из среднего внутреннего движения в галактике отдельную „пробную“ звезду, находящуюся в произвольной точке экваториальной плоскости галактики. Среди различных возможных видов равновесного движения этой звезды находится также круговое движение в экваториальной плоскости (вследствие существования при равновесном состоянии симметрии масс и, следовательно, симметрии поля сил относительно оси вращения). При таком движении гравитационная сила равна центробежной силе, т. е.

$$0 = F_{0R} + \omega_c^2 R = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial R} + \omega_c^2 R,$$

где

$$\omega_c = \omega_c(R)$$

является угловой скоростью на круговой орбите с радиусом R . Предположим далее, что функция $\omega_c(R)$ настолько медленно меняется с изменением R , что ее можно в первом приближении считать постоянной. Тогда потенциал в экваториальной плоскости $\Phi_0(R, z)$ (т. е. для $z=0$) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial R} = \omega_c^2 R, \quad (120.5)$$

где ω_c , как и раньше, угловая скорость на круговой орбите. Итак, в экваториальной плоскости должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial R} = (\omega_c^2 - \omega^2) R. \quad (120.6)$$

Подставляя выражения (120.1) и (120.6) в формулу (120.4), получим следующее уравнение для D_0 , справедливое в экваториальной плоскости, а именно:

$$\alpha^2 \frac{\partial \ln D_0}{\partial R} = -\kappa R;$$

где

$$\kappa = \omega_c^2 - \omega^2 - 2 \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2}.$$

Интегрируя это уравнение по R в пределах от 0 до R при условии $\kappa = \text{const}$ (величины ω и ω_c очень медленно изменяются в зависимости от R), получим следующее распределение масс в экваториальной плоскости галактики:

$$D_0(R, 0) = D_0(0, 0) \left(1 - \frac{R^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}, \quad (120.7)$$

где

$$\nu = \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} \kappa = \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} (\omega_c^2 - \omega^2) - 2; \quad (120.8)$$

Вводя подобранную соответствующим образом функцию $f_0(R, z)$ и используя выражение (119.4), можно написать уравнение, аналогичное уравнению (119.31), т. е.

$$\Delta_{\perp} \Phi_0 = f_0 \Delta \Phi_0 = 4\pi G f_0 D_0, \quad (120.9)$$

и получить

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = (\Delta - \Delta_{\perp}) \Phi_0 = 4\pi G (1 - f_0) D_0. \quad (120.10)$$

Дифференцируя обе части уравнения (120.36) по z и привлекая выражения (120.1) и (120.10), получим в экваториальной плоскости галактики (для $z=0$)

$$\gamma_0 \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \ln D_0}{\partial z^2} = -4\pi G (1 - f_0) D_0.$$

Предполагая, что плотность массы убывает с расстоянием от экваториальной плоскости галактики по экспоненциальному закону, т. е.

$$D_0(R, z) = D_0(R, 0) e^{-\frac{z^2}{2z_0^2(R)}}, \quad (120.11)$$

из предпоследней формулы (для $z=0$) получим

$$\frac{1}{z_0^2 R} = \frac{4\pi G}{\gamma_0} (1 - f_0) \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{\nu/2 - 1}.$$

Отсюда, предполагая, что f_0 очень слабо зависит от R , имеем

$$z_0(R) = z_0(0) \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2 - \nu/4}. \quad (120.12)$$

Наконец, на основании равенства

$$\theta_0(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_0(R, z) dz = \sqrt{2\pi} D_0(R, 0) z_0(R)$$

и формул (120.7) и (120.12) приходим к выводу, что

$$\theta_0(R) = \theta_0(0) \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2 + \nu/4}, \quad (120.13)$$

где

$$\theta_0(0) = \sqrt{2\pi} D_0(0, 0) z(0). \quad (120.14)$$

Таким образом, мы определили вид функции $\theta_0(R)$ в стандартной звездной системе в предположении слабой зависимости функций $\omega(R)$, $\omega_c(R)$, $f_0(R, z)$ от аргумента R . Из выражения (120.13) следует, что для $R=a$ $\theta_0=0$, и, следовательно, величину a можно считать экваториальным радиусом галактики.

В случае однородного, в смысле массы, эллипсоида с осью вращения z получим

$$D_0^s(R, z) = \begin{cases} \text{const} = D_0^s \text{ внутри эллипсоида:} & \frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ 0 \text{ вне эллипсоида:} & \end{cases}$$

где a и c суть полуоси эллипсоида: первая — в плоскости экватора, вторая — в направлении оси z . Галактику с таким распределением массы назовем „галактикой в сфероидальном состоянии“. В этом состоянии галактика движется как твердое тело, т. е. с постоянной угловой скоростью ω . Из выражения $D_0 = \text{const}$ на основании формулы (119.4) следует, что в этом случае потенциал $\Phi_0(R, z)$ в экваториальной плоскости зависит от R^2 , и, следовательно, на основании выражения (120.5) ω_c — постоянно. Кроме того, из формулы (120.9) вытекает, что в этом случае f_0 не зависит от R .

В сфероидальном состоянии имеет место следующая зависимость:

$$\theta_0^s(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_0^s(R, z) dz = \frac{cV\sqrt{1-(R/a)^2}}{-cV\sqrt{1-(R/a)^2}} \int D_0^s dz = \theta_0^s(0) \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2}. \quad (120.15)$$

$$\theta_0^s(0) = 2cD_0^s, \quad (120.16)$$

Сравнивая формулы (120.13) и (120.15), нетрудно заметить, что при $\gamma \rightarrow 0$ стандартная звездная система становится системой в сфероидальном состоянии. Из этого следует, что при малых значениях γ предположение, что функции $\omega(R)$, $\omega_c(R)$, $f(R, z)$ в первом приближении не зависят от R , находится в согласии с предположением (120.1). Состояния стандартной системы, соответствующие малым значениям γ , Линдблад назвал *квазисфероидальными состояниями*.

Если предположить, что величина γ мала, то можно вместо квазисфероидальных состояний пользоваться эффективным сфероидальным состоянием, при котором полуось c определим следующим образом [см. формулу (119.25)]:

$$c = 2\tilde{z}(0) = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} |z| D_0(0, z) dz}{\theta_0(0)} = \frac{4 \int_0^{\infty} z D_0(0, z) dz}{\theta_0(0)}, \quad (120.17)$$

а соотношение для определения постоянной плотности D_0^s получим путем сопоставления выражений (120.14) и (120.16); действительно,

$$V\sqrt{2\pi}D_0(0, 0)z_0(0) = 2cD_0^s. \quad (120.18)$$

Из выражения (120.17), используя формулы (120.11), (120.14), получим

$$c = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} z_0(0); \quad (120.19)$$

в этом случае уравнение (120.18) приводит нас к следующему выражению:

$$D_0^8 = \frac{\pi}{4} D_0(0, 0). \quad (120.20)$$

Так как из формул (119.25), (120.11) и (120.14) следует, что

$$\tilde{D}_0(R) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} D_0^2(R, z) dz}{\theta_0(R)} = \frac{2 \int_0^{\infty} D_0^2(R, z) dz}{\theta_0(R)} = \frac{1}{\sqrt{2}} D_0(R, 0),$$

то можно выражение (120.20) переписать в виде

$$D_0^8 = \frac{\pi}{4} \sqrt{2} \tilde{D}_0(0) \approx \frac{1}{0,90} \tilde{D}_0(0). \quad (120.21)$$

Вместо формулы (120.13) будем в дальнейшем пользоваться формулой (120.15), а именно:

$$\theta_0(R) = \theta_0(0) \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2}, \quad (120.22)$$

где

$$\theta_0(0) = 2cD_0^8.$$

причем величины c и D_0^8 определяются формулами (120.19) и (120.21).

Для сфероидального состояния можно получить соотношение между эксцентриситетом e эллипсов, являющихся меридианами галактики, отношением c/a их полуосей ($c/a = 1 - e^2$), отношением ω_c/ω , т. е. отношением угловой скорости на круговой орбите к средней угловой скорости, являющейся круговой скоростью галактики, и плотностью массы D_0^8 . Это соотношение в виде числовых значений дано в первых четырех столбцах табл. 18.

Таблица 18

e	c/a	$\frac{\omega_c}{\omega}$	$\frac{\pi G D_0^8}{\omega^2}$	$\frac{\alpha_2}{\omega a}$
0,800	0,60	1,70	2,754	0,97
0,850	0,53	1,55	2,465	0,84
0,900	0,44	1,40	2,269	0,69
0,950	0,31	1,25	2,259	0,53
0,980	0,20	1,15	2,646	0,40
0,990	0,14	1,10	3,224	0,32
1,000	0,00	1,00	∞	0,00

Степень сжатия галактики в сфероидальном состоянии определяется отношением c/a ; ее можно определить также с помощью величины $\alpha_0/\omega a$, являющейся отношением дисперсии скоростей в центре галактики к линейной скорости на периферии галактики в ее экваториальной плоскости. Это отношение можно найти по формуле (120.8), предполагая, что в ней $v=0$,

$$\frac{\alpha_0}{\omega a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (120.23)$$

Числовые значения величины $\alpha_0/\omega a$, вычисленные по этой формуле, даны в последнем столбце табл. 18.

121. Волны плотности в стандартной звездной системе. В предыдущем пункте мы познакомились с коэффициентами уравнения (119.35), описывающего амплитуду $\eta(R)$ волны плотности в зависимости от аргумента R , функция $\alpha(R)$ задается формулой (120.1), а функция $\theta_0(R)$ — формулой (120.22), величина же ω_1 , определяемая выражением (119.33), в первом приближении постоянна. Величина этой постоянной нам еще пока неизвестна, так как в формуле (119.33) мы не знаем $\widetilde{f_1 D_0}$.

Подставив выражения (120.1) и (120.22) в уравнение (119.35), получим

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) \left(\frac{d^2 \eta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\eta}{dR} - \frac{m^2}{R^2} \eta \right) - \frac{7}{2a^2} R \frac{d\eta}{dR} + \\ + \left(\frac{\sigma^2 - 4\omega_1^2}{2a_0^2} - \frac{\omega m}{\sigma a^2} - \frac{3}{a^2} \right) \eta = 0. \end{aligned} \quad (121.1)$$

Эта формула имеет смысл только в интервале $0 \leq R \leq a$.

Решение уравнения (121.1.) может быть найдено¹⁾ в виде

$$\eta(R) = A_m \left(\frac{\omega}{a} \right)^m F \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{R^2}{a^2} \right), \quad (121.2)$$

где A_m — произвольная постоянная, F — гипергеометрический ряд, в котором постоянные α, β, γ определяются формулами

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(n + m + \frac{3}{2} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} (2 + m - n), \quad \gamma = m + 1,$$

причем n удовлетворяет соотношению

$$\frac{(\sigma^2 - 4\omega_1^2) a^2}{2a_0^2} - \frac{m\omega}{\sigma} + m^2 = n^2 - \frac{1}{2} n,$$

¹⁾ *Stockh. Obs. Ann.*, 16, № 1 (1950),

и для того, чтобы гипергеометрический ряд оканчивался на некотором члене, должно быть вида

$$n = m + 2k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (121.3)$$

Это является, конечно, необходимым условием сходимости ряда в интервале $0 \leq R/a \leq 1$. Два последних условия приводят (путем исключения n) к уравнению для определения σ

$$\sigma^3 + q\sigma + r = 0, \quad (121.4)$$

где

$$q = -\left\{4\omega_1^2 + [8k(k+m) - 2k - m] \frac{\alpha_0^2}{a^2}\right\}, \quad r = -2m\omega \frac{\alpha_0^2}{a^2}. \quad (121.5)$$

Уравнение (121.4) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^3 + q' \frac{\sigma}{\omega} + r' = 0, \quad (121.6)$$

где

$$q' = -\left\{4\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 + [8k(k+m) - 2k - m] \left(\frac{\alpha_0}{\omega a}\right)^2\right\}, \quad r' = -2m \left(\frac{\alpha_0}{\omega a}\right)^2. \quad (121.7)$$

Из уравнения (121.4) или (121.6) можно определить $\sigma = \sigma_{km}$, зная коэффициенты этих уравнений; в таком случае формула (121.2) переходит в формулу $\eta(R) = \eta_{km}(R)$. Уравнению (121.4) удовлетворяют два комплексных корня, а именно:

$$\sigma = W \pm i\Gamma \quad (\Gamma > 0),$$

если

$$\frac{1}{27} q^3 + \frac{1}{4} r^2 > 0,$$

в противном случае все корни действительны. Для комплексных корней можно записать

$$e^{i\sigma t} = \sigma^\mp \Gamma t e^{iWt},$$

следовательно, один из них дает неограниченное возрастание амплитуды волны плотности с течением времени (119.34):

$$\eta(R, \vartheta, t) = \eta_{km}(R) e^{i(m\vartheta + \sigma_{km}t)}.$$

Это соответствует состоянию безвозвратно нарушенного равновесия галактики. Итак, существование в уравнении (121.4) двух комплексных корней является достаточным условием появления в галактике состояния отсутствия равновесия. Так как применялся метод возмущений, то решение, даваемое формулой (121.2), может определять амплитуду волны плотности только в тех случаях, когда эта волна сравнительно мало меняет состояние идеального равновесия. Следовательно, это решение применимо к состояниям безвозвратно утраченного равновесия только в его начальной стадии, когда отклонения от идеального равновесия еще незначительны.

Исследуем теперь волны плотности, соответствующие различным величинам m и k . Ясно, что общая волна плотности в галактике является наложением отдельных волн; действительно,

$$\eta(R, \vartheta, t) = \sum_{k,m} \eta_{km}(R) e^{i(m\vartheta + \sigma_{km} t)}. \quad (121.8)$$

Случай $m=0$. В этом случае $r=0$, и в уравнении (121.4) один корень должен быть равен нулю ($\sigma=0$), а два другие определяются уравнением

$$\sigma^2 = 4\omega_1^2 + (8k^2 - 2k) \frac{\alpha_0^2}{a^2} > 0.$$

Следовательно, все три корня действительны, т. е. волнам $m=0$ всегда соответствует состояние равновесия.

Случай $m > 0$. Подставляя в уравнение (121.7) формулу (121.5), заметим, что этому уравнению лучше всего удовлетворяет значение $k=1$; если $k \neq 1$, то указанное соотношение не выполняется вовсе.

Поэтому при рассмотрении условий возникновения в галактике состояний отсутствия равновесия можно ограничиться значением $k=1$. В таком случае выражения (121.5) и (121.7) дают неравенство

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 < \frac{1}{4} \left[3m^{2/3} \left(\frac{\alpha_0}{\omega a}\right)^{4/3} - (7m+6) \left(\frac{\alpha_0}{\omega a}\right)^2 \right], \quad (121.9)$$

которое является условием существования комплексных корней уравнения (121.4), т. е. условием отсутствия равновесия. Соответствующие числовые значения величины $\alpha_0/\omega a$ приведены в табл. 18.

Т а б л и ц а 19

e	c/a	$\tilde{f}$		
		$m=1$	$m=2$	$m=3$
0,800	0,60	0,754	0,789	0,811
0,850	0,53	0,735	0,772	0,794
0,900	0,44	0,707	0,745	0,768
0,950	0,31	0,654	0,694	0,720
0,980	0,20	0,499	0,617	0,646
0,990	0,14	0,353	0,460	0,537
1,000	0,00	0,000	0,000	0,000

Для того, чтобы критерий (121.9) можно было применять на практике, необходимо знать величину ω_1 , которая в предыдущих рассуждениях оставалась неизвестной постоянной.

Из формулы (119.33) имеем

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\pi G f_1 \tilde{D}_0}{\omega^2} = 1 - \tilde{f} \frac{\pi G \tilde{D}_0}{\omega^2}; \quad (121.10)$$

здесь введена новая величина, а именно:

$$\tilde{f} = \frac{f_1 \tilde{D}_0}{\tilde{D}_0}. \quad (121.11)$$

Используя формулу (120.21), получим

$$\frac{\pi G \tilde{D}_0}{\omega^2} = 0,90 \frac{\pi G D_0^8}{\omega^2}, \quad (121.12)$$

значения величины $\pi G D_0^8 / \omega^2$ даны в табл. 18.

Величину $\tilde{f}$ Линдبلاد с помощью дополнительных рассуждений выражает через известные величины. Чтобы не перегружать текста, эти рассуждения в данной книге пропущены¹⁾. Зависимость между величиной $\tilde{f}$ и отношением c/a , определяющим сжатие галактики, также дано в табл. 19.

Т а б л и ц а 20

c/a	$\frac{\alpha_0}{\omega a}$	$\frac{\pi \tilde{D}_1 \tilde{D}_0}{\omega^2}$			$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2$			$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2_{gr}$			Δ		
		$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
0,60	0,97	1,87	1,96	2,01	-0,87	-0,96	-1,01	-2,35	-3,58	-4,88	-1,48	-2,62	-3,87
0,53	0,84	1,63	1,71	1,76	-0,63	-0,71	-0,76	-1,68	-2,57	-3,50	-1,05	-1,86	-2,74
0,44	0,69	1,44	1,52	1,57	-0,44	-0,52	-0,57	-1,10	-1,70	-2,28	-0,66	-1,18	-1,71
0,31	0,53	1,33	1,41	1,46	-0,33	-0,41	-0,46	-0,59	-0,90	-1,23	-0,26	-0,49	-0,77
0,20	0,40	1,19	1,47	1,54	-0,19	-0,47	-0,54	-0,17	-0,45	-0,62	+0,02	+0,02	-0,08
0,14	0,32	1,02	1,33	1,56	-0,02	-0,33	-0,56	-0,08	-0,26	-0,36	-0,06	+0,07	+0,20
0,00	0,00	0,75	0,94	1,09	+0,25	+0,06	-0,09	0,00	0,00	0,00	-0,25	-0,06	+0,09

Используя данные табл. 18 и 19, а также формулы (121.10) и (121.12), можно значения величины ω_1/ω вычислить в зависимости от c/a . Результаты приведены в четвертом столбце табл. 20. В пятом столбце той же таблицы даны значения правой части неравенства (121.9), равные предельной величине отношения $(\omega_1/\omega)_{gr}^2$, при которой в уравнении (121.4) появляются комплексные корни

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{gr}^2 = \frac{1}{4} \left[3m^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\alpha_0}{\omega a}\right)^{\frac{4}{3}} - (7m+6) \left(\frac{\alpha_0}{\omega a}\right)^2 \right].$$

В шестом столбце табл. 20 приведены значения разности

$$\Delta = \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{gr}^2,$$

¹⁾ Stockh. Obs. Ann., 17, № 6, 21—30 (1953).

которая отрицательна в том случае, если все корни уравнения (121.4) действительны, а положительна — в случае существования пары комплексных корней.

На рис. 69 изображена зависимость Δ от отношения c/a для значений $m = 1, 2, 3$. Видно, что отсутствие равновесия появляется при малых значениях величины c/a , т. е. при сильном сжатии галактики. Если $m = 2$, то отсутствие равновесия наступает при значении $c/a = 0,21$; при $m = 3$ соответствующее значение $c/a = 0,18$. В случае $m = 1$ наблюдается сомнительное состояние равновесия при $c/a = 0,23$.

122. Происхождение и развитие спиральной структуры. Теория происхождения и развития спиральной структуры галактик Линдблада основывается на выводах, полученных в конце предыдущего пункта.

В этой теории предполагается, что звезды и межзвездная пыль в процессе развития галактики образуются путем конденсации из первичного газа. Так как галактика обладает некоторым общим моментом вращения, то, следовательно, процесс внутренней конденсации должен вызвать увеличение сжатия галактики, т. е. уменьшение отношения c/a .

При уменьшении отношения c/a мы попадаем в области отсутствия равновесия, соответствующие последовательным значениям m (см. рис. 69). При этом главную роль в волне плотности начинают играть члены, соответствующие этим m и увеличивающиеся с течением времени по экспоненциальному закону.

Из рис. 69 следует, что неустойчивость в небольшой степени проявится уже в волне, соответствующей $m = 1$. Учитывая, однако, наличие в галактике стабилизирующих эффектов, приходим к выводу, что эта волна не может играть во внутренней структуре галактики существенной роли.

Существенная неустойчивость появится для волны $m = 2$. На рис. 70 изображены кривые $\theta'_1 = \text{const}$ в плоскости (x, y) , перпендикулярной оси вращения галактики. На основании формул (119.19) и (120.22) имеем

$$\theta'_1 = \theta_0 \eta = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \eta(x, y, t). \quad (122.1)$$

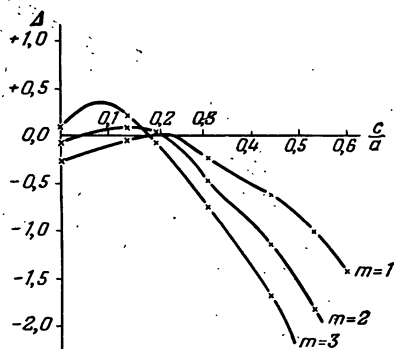


Рис. 69. График неустойчивости галактики ($\Delta > 0$) в зависимости от ее сплюснутости.

Рис. 70 соответствует значению $a=1$, $\theta_0(0)=1$ и моменту времени t , для которого $\tau=0,4$. При этом

$$\tau = e^{\Gamma t}.$$

Время отсчитывается здесь от момента $t=-\infty$, в который, согласно введенному предположению, система выходит из состояния равновесия; этому моменту соответствует значение $\tau=0$. На рис. 70

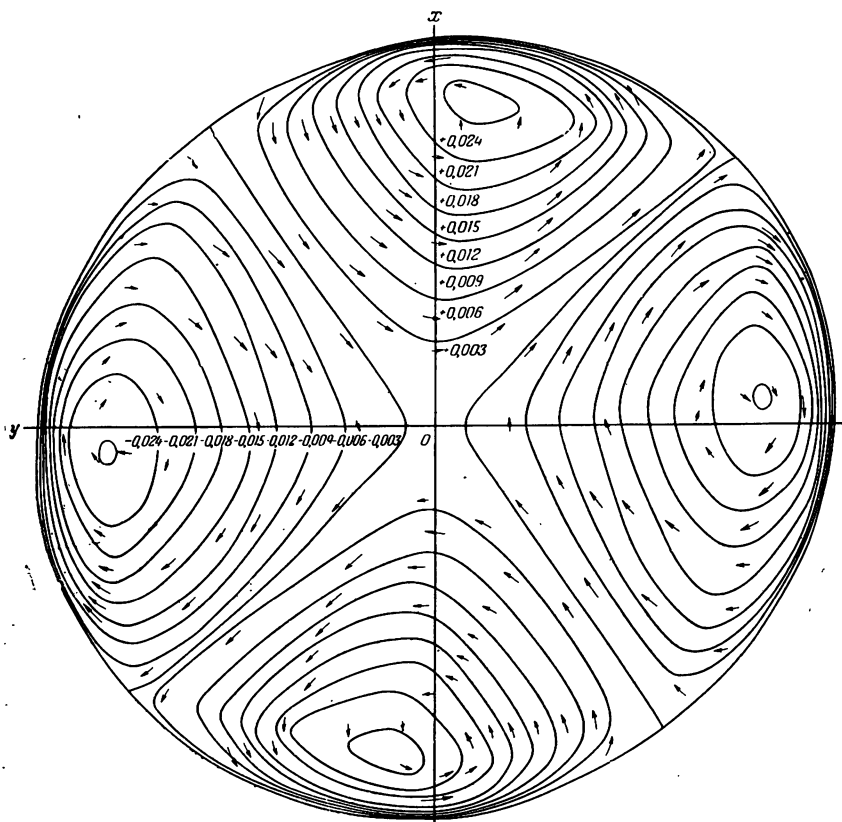


Рис. 70. Волна плотности $m=2$.

стрелками обозначено направление поля скоростей внутреннего движения в галактике. Вся галактика вместе с осями x и y вращается вокруг оси z в направлении, противоположном движению часовой стрелки.

При построении рис. 70 Линдблад пользовался более строгим выражением функции $\eta(R, \vartheta, t)$, чем то, которое получено нами в предыдущем пункте. Это более точное выражение указанной функ-

ции Линдبلاد получил с помощью метода пертурбационного исчисления¹⁾. При применении этого метода можно учитывать большие интервалы τ , протекающие после выхода галактики из состояния равновесия, чем это было возможно в наших предыдущих выводах. Однако для экономии времени читателя не будем заниматься этими вычислениями, тем более, что теория Линдблада понятна и без них.

На рис. 70 видно, что вблизи оси x , от которой отсчитываются углы ϑ , находятся два симметричных максимума волны плотности θ_1 , а вблизи оси y — два минимума последней. Если $\tau \approx 0$, то справедливы приближенные результаты, полученные в предыдущем пункте, из которых следует, что максимумы находятся на оси x , а минимумы — на оси y . Для больших значений τ экстремальные точки отходят от осей x и y . Далее из рис. 70 следует, что в двух квадрантах, в которых находятся максимумы волны плотности, в удаленных от центра галактики областях имеет место сильное внутреннее движение в направлении вращения последней, имеющее центробежное направление, в остальных же двух квадрантах — внутреннее движение в противоположном направлении с центростремительной тенденцией.

Расположение двух максимумов волны плотности на одном диаметре, а также дополнительная концентрация материи в центре галактики дает нам сразу же объяснение существования во многих галактиках „перемычек“; ведь эти „перемычки“ являются концентрацией материи вдоль одного диаметра галактики (рис. 71).

Для того, чтобы объяснить, каким образом внутреннее движение в галактике создает спиральную структуру, кроме волны плотности, рассмотрим еще тенденцию образования колец материи вокруг центра галактики. В процессе конденсации материи в галактике возникает некоторое поле скоростей, зависящее только от расстояния от центра галактики, т. е. направленное радиально, притом на области увеличенной конденсации. Вследствие этого вращение галактики вызывает в ней силу Кориолиса, направленную касательно к кругам, лежащим в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Действие этой силы приводит к образованию сгущения материи в кольцах вокруг центра галактики.

Наблюдения показывают, что в галактиках имеется тенденция образования одного кольца вблизи центра галактики и еще одного или нескольких колец вдали от него. Притом, если в галактике имеется перемычка, то она находится в промежуточной между кольцами области. Поэтому предположение о том, что явление волн плотности в промежуточной области препятствует образованию в ней колец не соответствует действительности.

В теории Линдблада предполагается, что причинами образования спиральной структуры галактик являются следующие факторы:

¹⁾ *Stockh. Obs. Ann.*, 17, № 6, 30—44 (1953).

а) тенденция к образованию колец вокруг центра галактики;
 б) образование областей возрастающей плотности, которые видны в верхнем правом и нижнем левом квадрантах вдоль оси x (см. рис. 70);

в) увеличивающееся в этих квадрантах центробежное движение.

Принимая во внимание эти причины, можно теорию Линдблада развить в двух вариантах.

Первый из них сводится к следующему: если пренебречь влиянием явлений, приводящих к образованию перемычки, на внутреннее движение в галактике, то движение материи вдали от центра галактики

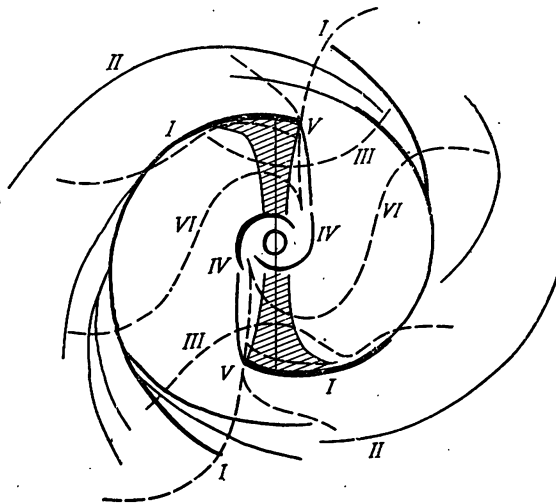


Рис. 71. Схема спиральной галактики с перемычкой.

будет запаздывать по сравнению с движением основного тела галактики; эта материя, вследствие существования центростремительного движения, образует спиральные ветви галактики (ветви I и II на рис. 71, направление вращения на котором совпадает с направлением движения часовой стрелки), запаздывающие относительно ядра галактики. В квадрантах, лежащих перед перемычкой, материя может двигаться вдоль перемычки к центру галактики (V на рис. 71), встречаясь с материей, находящейся вблизи центра галактики. Согласно этой идее, спиральные ветви образуются вместо колец, которые как бы разрываются в галактике, при этом относительное перемещение материи, образующей спиральные ветви, все время увеличивается, достигая больших размеров.

Во втором варианте при рассмотрении этих процессов учитывается роль волн плотности, образующих перемычку. В результате действия этих волн материя на концах перемычки обгоняет вращение галак-

тики (см. рис. 70), образуемая, вследствие центростремительного движения, спиральные ветви, направленные в сторону вращения галактики. В данном случае относительные перемещения материи в спиральных ветвях галактики сравнительно невелики, так как по мере ее удаления уменьшается действие причин, вызывающих образование ветвей. Концы ветвей несколько отстают от движения начальных партий материи, поэтому они в результате вращения галактики отгибаются назад. На рис. 71 спиральные ветви, образовавшиеся согласно второму варианту, обозначены пунктирными линиями (вращение происходит в направлении движения часовой стрелки).

В действительности же оба случая могут одновременно иметь место в одной галактике, причем перевес будет на стороне одного из двух вариантов.

Основываясь на изложенном выше, можно, согласно теории Линдблада, эволюцию галактик представить следующим образом.

В системе, состоящей первоначально из газа, происходит конденсация газа в пыль, затем в ней из пыли и газа образуются звезды. Вследствие этого степень сжатия галактики увеличивается, и если галактика обладает сравнительно большим моментом вращения, то в ней возникают подсистемы, вращающиеся с различными угловыми скоростями. В подсистемах появляется тенденция возникновения колец, окружающих центр галактики.

Конденсация материи может довести галактику до такой степени сжатия, при которой волна плотности, соответствующая $m=2$, перестанет быть стабильной и начнет увеличиваться с течением времени. Это в свою очередь может вызвать образование спиральной галактики с перемычкой (рис. 71), в которой материя сгустится вдоль диаметра, соответствующего максимуму волны $m=2$, а вместо колец образуются спиральные ветви. В случаях особенно больших моментов вращения волны плотности не смогут образовать перемычки, а вызванные ими отклонения от симметрии относительно оси вращения системы приведут к образованию обыкновенной спиральной галактики (рис. 72).

Следует отметить, что вообще обыкновенные спиральные галактики похожи на галактики „с перемычкой“, и свойства, характеризующие оба рода галактик, постепенно переходят друг в друга.

Различие угловых скоростей внутри галактики приводит к тому, что во время развития последней около главных спиральных ветвей

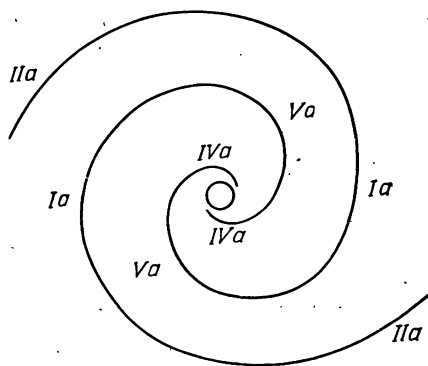
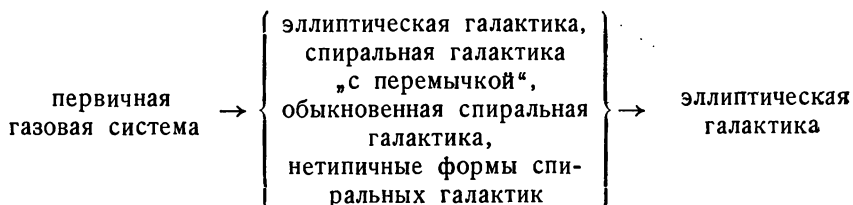


Рис. 72. Схема обыкновенной спиральной галактики.

образуются вторичные ветви, нарушающие спиральную структуру галактики. Этот процесс может в конце концов привести к образованию эллиптических галактик с большой степенью сжатия, в которых совсем исчезла спиральная структура и выравнялись угловые скорости отдельных подсистем.

Эволюционный путь данной галактики в основном определяется величиной ее момента вращения на единицу массы. Галактики, обладающие сравнительно небольшим моментом вращения, сразу же становятся эллиптическими галактиками с очень небольшим сжатием. При возрастающих моментах вращения становятся возможными спиральные формы галактик: сначала „с перемычкой“, а потом обыкновенные спиральные галактики. Вообще говоря, нам кажется, что разделение галактик на эллиптические, спиральные „с перемычкой“ и обыкновенные спиральные галактики определяется в основном величиной их момента вращения на единицу массы, а не временем их эволюции. Время вызывает главным образом увеличение степени сжатия галактики и уменьшение внутри нее различия угловых скоростей. Все же следует помнить, что эллиптические галактики с высокой степенью сжатия могут быть конечной стадией эволюции спиральных галактик, соответствующей приобретенному ими снова состоянию равновесия. Итак, теория Линдблада приводит нас к следующей схеме эволюции галактики:



Типичным примером спиральной галактики „с перемычкой“ на ранней стадии развития является *NGC 3351* (см. фото III и рис. 73, на котором ветви светящейся материи обозначены сплошными линиями, а ветви темной материи — пунктирными).

Галактика *M 83* (см. фото III и рис. 74) является примером переходной стадии между галактикой „с перемычкой“ и обыкновенной спиральной галактикой.

На фото IV сняты шесть галактик; первые четыре из них являются типичными галактиками „с перемычкой“ и имеют свойства, изображенные на рис. 74. Пятая является переходной формой между галактикой „с перемычкой“ и обыкновенной спиральной галактикой, а шестая — типичная спиральная галактика, обладающая свойствами, изображенным на рис. 72.



Рис. 73. Схема галактики NGC 3351 (см. фото III).

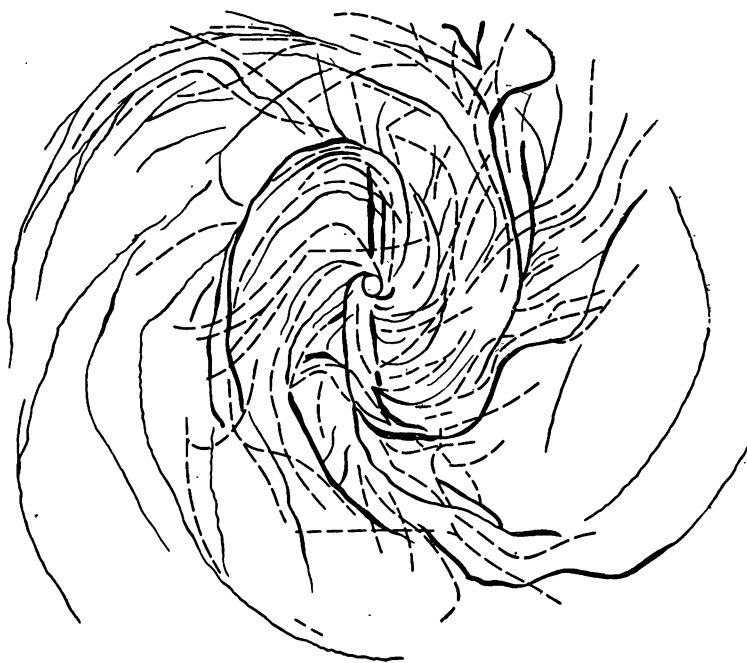


Рис. 74. Схема галактики М 83 (см. фото III).

§ 21. О некоторых применениях звездной динамики к исследованиям распределения и движения звезд в Галактике

123. Введение. Из изложенного выше следует, между прочим, и то, что все выводы звездной динамики по необходимости опираются на некоторые упрощающие предположения, схематизирующие реальное положение как в нашей Галактике, так и в других галактиках. Не зная достаточно хорошо структуры Галактики, мы не можем часто даже оценить, в какой степени эти упрощения допустимы и насколько наши схемы соответствуют действительности. Поэтому применение звездной динамики ко многим актуальным проблемам звездной астрономии часто носит условный характер, т. е. полученные решения будут справедливы только в том случае, если принятые предположения достаточно точно соответствуют действительности.

Этими предположениями чаще всего бывают предположения симметрии строения Галактики, симметрии движения звезд в ней и, наконец, стационарность Галактики. Последнее предположение кажется нам особенно сомнительным в связи с последними исследованиями в области эволюции звезд и спиральной структуры Галактики (см. п. 104).

Все же указанное обстоятельство не должно препятствовать применению звездной динамики к актуальным проблемам звездной астрономии хотя бы потому, что даже результаты, противоречащие действительности, все же ценны и играют большую роль в звездной астрономии, так как они указывают, что сделанные предположения или просто неверны, или в них не были учтены некоторые важные и существенные обстоятельства. Такого рода данные играют довольно существенную роль в процессах познания структуры Галактики и ее свойств, так как при этом мы применяем различные схемы, начиная от самых простых и наивных, которые постепенно или улучшаются, или отбрасываются. Чисто эмпирическим путем мы никогда не изучили бы наиболее важных свойств Галактики. При применении дедукционно-индукционных методов необходимо основываться на некоторых схемах и гипотезах, стремясь одновременно получить как можно больше данных относительно состоятельности или несостоятельности принятых нами гипотез и схем.

До сих пор теоретические выводы звездной динамики удавалось применять к конкретным проблемам только лишь в очень немногих случаях. Особенно малоприменимой оказалась теория регулярных сил, несмотря на то, что было предложено очень много удачных и убедительных общих решений проблемы регулярных сил, и указанная теория играла решающую роль в объяснении совокупности явлений, происходящих в Галактике.

Большой помехой в применении этой теории является, по нашему мнению, отсутствие таких методов решения основного уравнения

звездной динамики, которые можно было бы непосредственно применять на практике. Исследования в этой области, даже если они окажутся неудачными, должны сыграть, по нашему мнению, большую роль и, следовательно, заслуживают внимания.

Несколько лучше обстоит дело с применением теории иррегулярных сил, например, к динамике звездных скоплений; при этом удалось получить общую картину эволюции этих объектов и оценить их примерный возраст (известное доказательство молодости ассоциаций).

Числовые результаты получались до сих пор, главным образом, путем приближенных оценок, не имеющих непосредственной связи с принципиальным ходом теории. Это обстоятельство сильно снижает точность полученных результатов. Так, например, точность определения массы Галактики порядка 100%. Из этого ни в коем случае не следует делать вывода о несостоятельности теории; приведенный выше факт свидетельствует только о ее несовершенстве.

Современное состояние звездной динамики можно сравнить с состоянием небесной механики в то время, когда был открыт закон всемирного тяготения, но не были известны методы применения его к конкретным задачам определения орбит планет и спутников.

124. Работы Оорта над потенциалом в окрестностях Солнца.

Оорт в 1931 г.¹⁾ впервые применил простые динамические соображения к изучению движения звезд, расположенных в направлении галактических полюсов, при этом он рассматривал только составляющую их движения в направлении, перпендикулярном к галактической плоскости. Оорт предполагал, что изучаемые звезды находятся в состоянии динамического равновесия, понимая под этим, что пространственная плотность звезд, будучи функцией расстояния от галактической плоскости, не зависит от времени.

Это предположение справедливо только по отношению к таким звездам, возраст которых значительно превышает период их колебаний перпендикулярно галактической плоскости, как мы убедимся в конце этого пункта. Указанный период составляет 10^8 лет. Только в этом случае звезды различного возраста „успеют“ достаточно перемешаться, чтобы прийти к состоянию стационарности. Кроме того, Оорт предположил, что ускорение $a(z)$ в направлении, перпендикулярном к галактической плоскости (направление оси z), является функцией только расстояния z от этой плоскости и не зависит от двух других галактоцентрических координат. Это предположение кажется справедливым ввиду большой удаленности Солнца от центра Галактики и относительно малой удаленности рассматриваемых звезд от галактической плоскости.

¹⁾ *BAN*, 6, 249 (1932) и 9, 185 (1941).

В таком случае уравнение движения звезды в направлении z будет иметь вид

$$\frac{dw}{dt} = a(z), \quad (124.1)$$

где w — составляющая скорости в направлении оси z ,

$$w = \frac{dz}{dt}.$$

Если исключить из этих уравнений время, т. е.

$$w dw = a(z) dz, \quad (124.2)$$

и проинтегрировать полученное выражение, то

$$w^2 = w_0^2 + 2 \int_0^z a(z) dz, \quad (124.3)$$

где через w_0 обозначена скорость звезды в момент пересечения последней галактической плоскости ($z=0$).

Рассмотрим звезды внутри цилиндра, ось которого, будучи перпендикулярной к галактической плоскости, проходит через Солнце. Примем площадь основания этого цилиндра за единицу и обозначим число звезд, которые пересекали или пересекают плоскость $z=0$ со скоростью, заключенной в пределах w_0, w_0+dw_0 , через $f(w_0)dw_0$.

Предположение о стационарности приводит к выводу, что пространственная плотность звезд на расстоянии z от галактической плоскости должна быть прямо пропорциональна времени прохождения звездой отрезка dz , т. е. обратно пропорциональна скорости звезды на этом расстоянии.

Обозначив функцию распределения звезд по расстояниям и скоростям через $\varphi(z, w) dz dw$, получим

$$\varphi(z, w) dz dw = c \frac{f(w_0) dw_0 dz}{w},$$

где c — коэффициент пропорциональности, а величины w и w_0 связаны формулой (124.3), из которой следует, что $w dw = w_0 dw_0$; таким образом

$$\varphi(z, w) = c \frac{f(w_0)}{w_0} = \varphi(0, w_0),$$

$$\left[w_0 = \sqrt{w^2 - 2 \int_0^z a(z) dz} \right]. \quad (124.4)$$

Это значит, что функция $\varphi(z, w)$ по существу зависит только от w_0 , т. е. от распределения скоростей в плоскости $z=0$.

Так как, согласно сделанному предположению, $\varphi(z, w)$ не является функцией времени, то

$$\frac{d}{dt} \varphi(z, w) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{dw}{dt} = 0.$$

Используя выражения (124.1) и (124.2), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} w + \frac{\partial \varphi}{\partial w} a(z) = 0.$$

Помножив обе части на w и проинтегрировав в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} dw + \int_{-\infty}^{+\infty} w a(z) \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw = 0. \quad (124.5)$$

Так как w не зависит от z , то первый интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} dw = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \varphi dw.$$

Вычислим среднюю квадратичную скорость

$$\overline{w^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \varphi(z, w) dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z, w) dw},$$

где знаменатель является звездной плотностью $D(z)$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \varphi dw = \frac{\partial}{\partial z} [\overline{w^2} D(z)].$$

Второй интеграл в уравнении (124.5) можно проинтегрировать по частям

$$a(z) \int_{-\infty}^{+\infty} w \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw = a(z) \left\{ [w\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dw \right\} = -a(z) D(z).$$

Первое выражение в скобках равно нулю, так как мы предполагаем, что вероятность бесконечно больших скоростей равна нулю и, кроме того, что функция φ „скорее“ стремится к нулю (при $w \rightarrow \pm\infty$), чем величина w стремится к бесконечности. Указанными свойствами обладает большинство функций распределения.

Окончательно приходим к следующей зависимости:

$$a(z) = \frac{1}{D(z)} \frac{\partial}{\partial z} [D(z) \overline{w^2}], \quad (124.6)$$

которую можно использовать при изучении распределения потенциала на основании данных о плотности и средней квадратичной скорости звезд.

Формулой (124.6) удобнее пользоваться в логарифмическом виде, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial z} [\ln (D(z) \overline{w^2})] = \frac{a(z)}{\overline{w^2}} \quad (124.7)$$

или, переходя к десятичным логарифмам,

$$a(z) = \frac{\overline{w^2}}{\log e} \frac{\partial}{\partial z} \{ \log [D(z) \overline{w^2}] \}. \quad (124.8)$$

При этом следует помнить, что $\overline{w^2}$ является, вообще говоря, функцией z .

На практике функцию распределения скоростей можно отождествить с нормальным распределением; это следует из эллипсоидальной теории распределения скоростей звезд (см. п. 56.), т. е.

$$\varphi(0, w_0) = D(0) \frac{l}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 w_0^2}$$

Следовательно, согласно формуле (124.4), имеем

$$\varphi(z, w) = D(0) \frac{l}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 w^2 + 2l^2 \int_0^z a(z) dz}; \quad (124.9)$$

интегрируя полученное выражение по w в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$D(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z, w) dw = D(0) e^{2l^2 \int_0^z a(z) dz}. \quad (124.10)$$

Таким образом, формулу (124.9) можно переписать в виде

$$\varphi(z, w) = D(z) \frac{l}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 w^2}. \quad (124.11)$$

Это значит, что функция распределения скоростей звезд одинакова для различных значений z . Так как

$$\overline{w^2} = \frac{1}{2l^2} = \overline{w_0^2},$$

то формуле (124.10) можно придать вид, аналогичный виду формул (124.6) и (124.8).

Действительно, из выражения (124.10) следует, что

$$\log D(z) = \log D(0) + \log e \left[\frac{1}{\bar{w}^2} \int_0^z a(z) dz \right];$$

дифференцируя по z , получим

$$a(z) = \frac{\bar{w}^2}{\log e} \frac{\partial}{\partial z} \log D(z), \quad (124.12)$$

т. е. выражение, в котором под знаком производной нет величины $\bar{w}^2$. Сравнивая это выражение с выражением (124.8), приходим к выводу, что в этом случае $\bar{w}^2$ не зависит от z , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \bar{w}^2 = 0.$$

Итак, мы убедились, что группа звезд, имеющих в момент пересечения галактической плоскости среднюю квадратичную скорость w_0 , будет иметь ту же самую среднюю квадратичную скорость на всех расстояниях z от галактической плоскости, если, конечно, все сделанные нами предположения правильны.

На первый взгляд, этот вывод кажется несколько неожиданным: ведь скорости звезд должны убывать по мере их удаления от галактической плоскости. Поэтому, казалось бы, что средняя квадратичная скорость также должна убывать по мере возрастания z . В действительности же при увеличении z наступает естественный отбор звезд с большими скоростями; звезды с малыми скоростями w_0 просто не достигают больших z -координат; это увеличивает среднюю квадратичную скорость $\bar{w}^2$, в то время, как уменьшение всех скоростей вызывает ее уменьшение. В результате одновременного влияния обоих факторов величина $\bar{w}^2$, как мы только что убедились, не изменяется.

Из формулы (124.10) следует, что звезды, пространственная плотность $D(z)$ которых быстро убывает с увеличением расстояния z , должны иметь небольшие значения l , следовательно, небольшую величину $\bar{w}^2$; наоборот, звезды с малой концентрацией к галактической плоскости должны обладать большой величиной $\bar{w}^2$. Так это и наблюдается в действительности: объекты плоской составляющей движутся в направлении оси z с гораздо меньшей скоростью, чем объекты, принадлежащие к промежуточной и сферической составляющей нашей Галактики.

Используя формулу (124.12) или же в общем случае формулу (124.6), можно определить величину ускорения или потенциала

$$a(z) = - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z}$$

в ближайших окрестностях Солнца. Для этого следует:

а) независимо определить распределение звездной плотности $D(z)$;
 б) найти величину $\overline{w_0^2}$, т. е. среднюю квадратичную скорость данной группы звезд в галактической плоскости, или величину $\overline{w^2}(z)$, если не делать никаких предположений относительно распределения скоростей звезд;

в) вычислить по формуле (124.8) или (124.12) величину $a(z)$ для различных значений z .

Таким способом Оорт определил значения величины $a(z)$, приведенные в табл. 21 [данные взяты из монографии Трюмплера и Уивера¹⁾].

Таблица 21

z (пс)	$a(z)$ (см/сек ²)	$a(z)$ (а. е./год ²)
0	0	0
100	$-1,7 \cdot 10^{-9}$	$-1,2 \cdot 10^{-7}$
200	-3,4	-2,3
300	-3,8	-2,5
500	-3,9	-2,6

Просмотр данных этой таблицы приводит к выводу, что до расстояния от галактической плоскости 200 пс $a(z)$ является линейной функцией z , т. е.

$$a(z) = -g^2 z,$$

для расстояний больше 200 пс эта зависимость близка к зависимости вида

$$a(z) = \text{const.}$$

Используя эти данные, легко вычислить наибольшее расстояние $z_{\max}$, на котором может находиться звезда с начальной скоростью w_0 . Для $z = z_{\max}$ $w = 0$.

В таком случае по формуле (124.3) получим

$$-\int_0^{z_{\max}} a(z) dz = \frac{w_0^2}{2}; \quad z_{\max} = \frac{w_0}{g}.$$

Кроме того, можно вычислить еще более важную для нас величину, а именно: период колебания звезды в направлении оси z

$$P = 4 \int_0^{P/4} dt = 4 \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{w_0} = 4 \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{w_0^2 + 2 \int_0^z a(z) dz}}.$$

Если $a(z) = -g^2 z$, то

$$P = \frac{2\pi}{g}.$$

Подставляя числовые значения, найденные Оортом,

$$(g^2 = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ а. е./год}^2 = 0,56 \cdot 10^{-14} \text{ пс/год}^2),$$

¹⁾ Trumpler R. J. and Weaver H. F., Statistical Astronomy, Berkeley and Los Angeles, 1953, стр. 613.

получим

$$P = 0,84 \cdot 10^8 \text{ лет}$$

независимо от начальной скорости w_0 .

125. Динамические исследования пространственного распределения звезд в Галактике. Если принять, что решения основного уравнения динамики, даваемые формулами (107.6) — (108.2), достаточно точно описывают движения звезд параллельно галактической плоскости (несмотря на то, что эти же решения противоречат наблюдениям движения звезд перпендикулярно к галактической плоскости), то их можно применить к исследованию пространственного распределения звезд в Галактике. Если предположить, что Галактика является стационарной звездной системой и пренебречь действием иррегулярных сил в ней, то можно, положив $\varphi^2 = \text{const}$, переписать формулы (108.2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma_R^2} &= a_R = c_z = \varphi^2, \\ \frac{1}{2\sigma_\theta^2} &= b_\theta = \varphi^2 + k_2 R^2, \\ Z_0 &= \Pi_0 = 0, \\ \Theta_0 &= -\frac{\beta R}{\varphi^2 + k_2 R^2} = -\frac{\beta R}{b_\theta}. \end{aligned} \quad (125.1)$$

Этот случай соответствует случаю, рассмотренному в п. 98.

Приняв далее, что функция распределения является показательной функцией, и производя подстановку, такую же, как подстановка (98.2), с той разницей, что вместо величины λ^2 введем b_θ , получим решение вида

$$f(Q + \sigma) = f_0 e^{-a_R (\Pi^2 + Z^2) - b_\theta (\theta - \theta_0)^2},$$

или

$$f(Q + \sigma) = P e^{-a_R (\Pi^2 + Z^2 + 2\Phi_1) - b_\theta (\theta - \theta_0)^2},$$

где

$$f_0 = P e^{2a_R \Phi_1}.$$

Звездная плотность D определяется по формуле [см. формулу (89.6)]

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P e^{-a_R \left[\Pi^2 + Z^2 + \frac{b_\theta}{a_R} (\theta - \theta_0)^2 - 2\Phi_1 \right]} d\Pi d\theta dZ;$$

вводя обозначения

$$b_\theta (\theta - \theta_0)^2 = a_R \Theta_1^2$$

и

$$\Pi^2 + \Theta_1^2 + Z^2 = V^2,$$

получим формулу

$$D = \sqrt{\frac{a_R}{b_\vartheta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int P e^{-a_R (V^2 - 2\Phi_1)} d\Pi d\Theta_1 dZ,$$

которую можно привести к более простому виду ¹⁾

$$D = 4\pi \sqrt{\frac{a_R}{b_\vartheta}} \cdot e^{2a_R \Phi_1} \int_0^\infty P e^{-a_R V^2} V^2 dV,$$

интегрируя это выражение ²⁾, получим

$$D = P \frac{\pi^{3/2}}{a_R \sqrt{b_\vartheta}} e^{2a_R \Phi_1}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \ln D}{\partial R} = 2\varphi^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial R} - \frac{1}{2} \frac{1}{b_\vartheta} \frac{\partial b_\vartheta}{\partial R},$$

учитывая, что

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\beta^2 R}{b_\vartheta^2}, \quad \frac{\partial b_\vartheta}{\partial R} = 2k_2 R,$$

получим

$$\frac{\partial \ln D}{\partial R} = -\frac{k_2 R}{\varphi^2 + k_2 R^2} + \frac{2\varphi^2}{R} \left[R \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\beta^2 R}{(\varphi^2 + k_2 R^2)^2} \right].$$

Используя формулу (125.1) и выражение для круговой скорости

$$\frac{1}{R} \Theta_c^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial R},$$

¹⁾ Интеграл вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int e^{-h^2 (x^2 + y^2 + z^2)} (x^2 + y^2 + z^2)^n dx dy dz$$

можно привести к более простой форме, если ввести сферические координаты, а именно:

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2,$$

$$x = v \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = v \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = v \cos \vartheta;$$

в таком случае

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty e^{-h^2 v^2} v^{n+2} dv = 4\pi \int_0^\infty e^{-h^2 v^2} v^{n+2} dv.$$

²⁾ По общей формуле

$$\int_0^\infty e^{-h^2 v^2} v^{2\alpha} dv = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots\cdot 3\cdot 1}{2^{\alpha+1} h^{2\alpha+1}} \sqrt{\pi}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

[см. Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, М.—Л., 1951, стр. 169].

получим

$$\frac{\partial \ln D}{\partial R} = -\frac{k_2 R}{\varphi^2 + k_2 R^2} + \frac{2\varphi^2}{R} [\Theta_c^2 - \Theta_0^2]. \quad (125.2)$$

Так как скорости центроидов звезд плоской составляющей незначительно отличаются от соответствующих им круговых скоростей (например, скорость классических цефеид), то можно предположить, что они также удовлетворяют зависимости

$$\Theta_c = -\frac{\beta' R}{\varphi'^2 + k_2' R^2},$$

в которой величины φ'^2 , k_2' и $-\beta'$ имеют другое значение.

Подставляя эти величины в формулу (125.2), получим

$$\frac{\partial \ln D}{\partial R} = -\frac{k_0 R}{\varphi^2 + k_2 R^2} - \frac{2\varphi^2}{R} \left[\frac{\beta'^2 R^2}{(\varphi'^2 + k_2' R^2)^2} - \frac{\beta^2 R^2}{(\varphi^2 + k_2 R^2)^2} \right],$$

после интегрирования имеем

$$\ln \frac{D(R)}{D(0)} = \frac{1}{2} \ln \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + k_2 R^2} + \beta^2 \frac{R^2}{\varphi^2 + k_2 R^2} - \beta'^2 \frac{\varphi^2}{\varphi'^2} \frac{R^2}{\varphi'^2 + k_2' R^2},$$

где $D(0)$ — звездная плотность, соответствующая значению $R=0$.

П. П. Паренаго подставил величины φ^2 , k_2 и $-\beta$ для подсистемы шаровых звездных скоплений, сильно отличающейся от плоских подсистем,

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= 4 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^2 \text{ км}^{-2}, \\ k_2 &= 4 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^2 \text{ км}^{-2} \text{ кпс}^{-2}, \\ -\beta &= 2 \cdot 10^{-2} \text{ сек км}^{-1} \text{ кпс}^{-1}, \end{aligned}$$

а затем те же величины для системы классических цефеид

$$\begin{aligned} \varphi'^2 &= 3,20 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^2 \text{ км}^{-2}, \\ k_2' &= 6,66 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^2 \text{ км}^{-2} \text{ кпс}^{-2}, \\ -\beta' &= 2,46 \cdot 10^{-2} \text{ сек км}^{-1} \text{ кпс}^{-1}, \end{aligned}$$

и в первом случае получил ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln D}{\partial R} &= -\frac{R}{1+K^2} + 20 \frac{R}{(1+R^2)^2} - 1090 \frac{R}{(48+K^2)^2}, \\ \ln \frac{D(R)}{D(0)} &= -\frac{1}{2} \ln(1+R^2) + 10 \frac{R^2}{1+K^2} - 11,4 \frac{R^2}{48+R^2}. \end{aligned}$$

¹⁾ См. Паренаго П. П., АЖ, 25, 123 (1948). В том же журнале в период 1944—1951 гг. тем же автором опубликовано много работ, в которых описаны другие применения динамики звездных систем к изучению нашей Галактики.

При этом следует помнить, что наши рассуждения теряют смысл при $R < 3$ кпс. Действительно, вблизи центра Галактики невозможно отождествить круговую скорость Θ_c со скоростью центроида звезд плоской составляющей, так как последних в указанной области почти совсем нет. Поэтому для $R < 3$ кпс примем

$$\Theta_c = \Theta_0 \text{ и } \sigma_R = \sigma_\theta.$$

В таком случае получим значения величин $\partial \log D / \partial R$, $\log D$ и D , приведенные в табл. 22.

Т а б л и ц а 22

R (кпс)	$\frac{\partial \log D}{\partial R}$	$\log D$	D
0	0,00	2,02	105
2	-0,17	1,86	72
4	-0,33	1,36	23
6	-0,36	0,65	4,5
8	-0,29	0,00	1,0
10	-0,23	-0,53	0,30
12	-0,17	-0,94	0,12

Данные табл. 22 показывают, что в центре Галактики плотность звезд сферической составляющей примерно в 105 раз больше, чем в окрестностях Солнца.

Полученные значения плотности D (см. табл. 22) довольно хорошо представляются следующей формулой:

$$\log D = 2,40 - 0,30 R.$$

Аналогичным образом можно приближенно оценить плотность распределения звезд плоской составляющей. В этом случае

$$\varphi^2 = \varphi'^2, \quad k_2 = k'_2, \quad -\beta = -\beta',$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln D}{\partial R} &= -\frac{k_2 R}{\varphi^2 + k_2 R^2} = -\frac{k'_2 R}{\varphi'^2 + k'_2 R^2} = -\frac{R}{48 + R^2}; \\ \frac{D(R)}{D(0)} &= \sqrt{\frac{\varphi^2}{\varphi^2 + k_2 R^2}} = \sqrt{\frac{\varphi'^2}{\varphi'^2 + k'_2 R^2}}, \\ \log \frac{D(R)}{D(0)} &= -\frac{1}{2} \log(1 + 0,0208 R^2). \end{aligned}$$

Из этих уравнений можно найти числовые значения градиентов; при этом обратим внимание на то, что до расстояния $R = R_0 = 8$ кпс

Таблица 23

	Сферическая составляющая	Плоская составляющая
Средний градиент для $0 \leq R < 8 \text{ кпс}$	—0,27	—0,09
Градиент для $R = R_0 = 8 \text{ кпс}$	—0,29	—0,11
Отношение обоих градиентов	0,93	0,82

эти градиенты в обоих случаях почти постоянны, как это следует из данных, приведенных в табл. 23.

Средний градиент объектов как плоской, так и сферической составляющей для расстояний $0 \leq R < 8 \text{ кпс}$ составляет 0,9 значения градиента в окрестностях Солнца. Пользуясь этим, П. П. Паренаго, на основании значений градиентов в окрестностях Солнца, оценил общее число объектов различных подсистем в нашей Галактике [см. также стр. 234].

Предположим сначала, что плотность исследуемых объектов в Галактике в первом приближении изменяется в зависимости от R и z следующим образом:

$$D(z, R) = D(0) \cdot 10^{-mR-l} |z|,$$

где $D(0)$ — плотность в центре Галактики. Пусть величины m , l , D_S известны (D_S — плотность в окрестностях Солнца). Следовательно, плотность в центре Галактики ($R = 8 \text{ кпс}$, $\bar{m} = 0,9 m$, $z = 0$) равна

$$D(0) = D_S \cdot 10^{\bar{m}R_0} = D_S \cdot 10^{0,9 m R_0} = D_S 10^{7,2 m}.$$

Проинтегрировав выражение $D(z, R)$, определим общее число объектов данной подсистемы; действительно,

$$N = 2D(0) k \int_0^\infty 10^{-lz} dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} 10^{-mR} R dR = \\ = \frac{4\pi D(0) k}{m^2 l} \text{Mod}^3 = 1,03 \frac{D(0) k}{m^2 l},$$

где k — коэффициент, учитывающий медленное изменение величины m в зависимости от R . Величину k можно определить путем численного интегрирования, используя данные приведенной выше табл. 23,

$$k = \frac{\int_0^{12} 10^{-m(R)} R dR}{\int_0^{12} 10^{-m(R)} R dR}.$$

Таким образом, для объектов сферической составляющей получим $k=1,33$, а для плоской — $k=1,12$. Используя значение $D(0)$ и подставляя вместо k величину, равную 1,25, получим результаты, приведенные в табл. 15 (п. 76).

Приведенные выше формулы дают возможность оценить число всех звезд в Галактике. П. П. Паренаго, приняв, что звездная плотность в окрестностях Солнца равна 10^3 на кпс^3 , а величины m и l соответственно равны 0,25 и 1,15, получил общее число звезд в Галактике $N=1,1 \cdot 10^{11}$ в хорошем согласии с другими определениями.

§ 22. Орбиты отдельных звезд

126. Общие рассуждения. В начале этой главы, излагая статистические методы исследования движений звезд в Галактике, мы сразу же показали, что изучение орбит отдельных звезд невозможно как с теоретической точки зрения (отсутствие решения проблемы n тел), так и с практической (отсутствие данных о положениях и скоростях звезд в Галактике). Там же мы рассмотрели методы исследования движений звезд под действием только регулярных сил, т. е. методы, при применении которых не учитывается влияние неравенств гравитационного поля, вызванных присутствием в нем отдельных звезд.

В „сглаженном“ таким образом гравитационном поле можно не только статистически исследовать движение многих звезд, но изучать также движение одной, произвольно выбранной звезды. Казалось бы, что в этом случае определение орбиты звезды в поле регулярных сил аналогично определению орбиты небесного тела (например, кометы) в солнечной системе с учетом лишь гравитационного поля Солнца. При этом возмущающие силы других планет соответствовали бы нерегулярным силам отдельных звезд. Однако, такая аналогия весьма поверхностна по существу. Зная орбиту кометы, вычисленную без учета возмущений, можно все же оценить влияние других тел солнечной системы на движение рассматриваемой кометы и точно определить верхний предел возможных отклонений движения кометы от вычисленной орбиты за время одного или нескольких периодов ее обращения вокруг Солнца. Следовательно, не вычисляя точно возмущений, можно оценить степень приближения к действительности такой предварительной орбиты, хотя бы с помощью определения максимальной ошибки последней. При изучении движения звезды в Галактике известно только, что на рассматриваемую звезду могут действовать иррегулярные силы, однако, величина их ничем не ограничена. В результате действия этих сил направление движения и скорость звезды могут измениться совершенно произвольно, например, направление может измениться даже на 180° . Вычисленная орбита была бы близка к действительности только в том случае, если бы действие всех иррегулярных сил на звезду взаимно уничтожалось.

Так как направления и величины этих сил неизвестны и, следовательно, их можно считать случайными, то такое предположение кажется нам наиболее рациональным.

Основываясь на теории иррегулярных сил, изложенной в § 19, конечно, можно определить вероятность больших или меньших отклонений от вычисленной орбиты, но невозможно, однако, установить направление этих отклонений и, самое главное, оценить максимальное отклонение, так как оказывается, что вероятность произвольно больших отклонений не только не близка, но даже и не стремится к нулю (при этом отождествляются отклонения, различающиеся между собой на $360^\circ n$, где n — целое число).

Итак, методы определения орбит отдельных звезд в Галактике являются статистическими, поэтому они рассматриваются в звездной астрономии. Из этого следует также, что нет смысла разрабатывать более сложные методы вычисления орбит индивидуальных звезд, аналогичные методам небесной механики, так как результаты все равно будут всегда приближенными. Это необходимо иметь в виду при дальнейшем чтении этого параграфа.

Проблема определения орбит звезд возникла сравнительно недавно, поэтому до сих пор не найдено еще каких-либо общих методов ее решения. В данной книге приводятся лишь общие рассуждения и частично рассматриваются различные методы, однако, анализ последних не дается, так как в настоящее время вряд ли можно предвидеть, который из них окажется существенным при дальнейшем развитии этой проблемы.

127. Круговые орбиты. Будем рассматривать стационарную систему, потенциал которой обладает осевой симметрией и симметрией относительно галактической плоскости. В таком случае

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \Phi(R, z), \\ \Phi(R, +z) &= \Phi(R, -z),\end{aligned}\tag{127.1}$$

и в экваториальной плоскости системы вследствие симметрии должно выполняться следующее условие (см. также примечание в п. 108):

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z}\right)_{z=0} = 0.\tag{127.2}$$

Одно из уравнений движения будет иметь вид

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Предположим, что в течение небольшого промежутка времени звезда движется строго в плоскости экватора, т. е.

$$z = \dot{z} = 0.\tag{127.3}$$

Следовательно, на основании выражения (127.2) имеем

$$\ddot{z} = 0.$$

Так как равенство (127.2) справедливо во всех точках экваториальной плоскости, то все производные высших порядков по времени равны нулю; это значит, что вся орбита звезды находится в экваториальной плоскости.

Исследуем теперь возможность существования круговых орбит в этой плоскости. Уравнения движения в полярных координатах имеют вид

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = R\dot{\vartheta}^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad (127.4)$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\vartheta}) = 0. \quad (127.5)$$

Второе уравнение вытекает из выражения (127.1), так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = 0.$$

Этим уравнениям удовлетворяет следующее решение:

$$R = R_0 = \text{const.}$$

Следовательно, круговое движение возможно; вычислим теперь скорость этого движения. Обозначая индексом 0 величины, относящиеся к расстоянию R_0 от центра системы, а индексом c — относящиеся к круговому движению, из уравнения (127.4) получим выражение для круговой скорости, а именно:

$$\frac{\Theta_c^2}{R_0} = R_0 \dot{\vartheta}_c^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0, \quad (127.6)$$

или

$$\Theta_0 = \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0.$$

Проинтегрировав уравнение (127.5), получим интеграл площадей

$$R_0 \Theta_c = R_0^2 \dot{\vartheta} = h_c,$$

который можно записать следующим образом:

$$\dot{\vartheta}_c^2 = \frac{h_c^2}{R_0^4} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0. \quad (127.7)$$

128. Устойчивость круговых орбит и почти круговые орбиты. Нас интересует теперь вопрос устойчивости круговых орбит, т. е. определение тех условий, при которых небольшое возмущение не может существенным образом изменить круговую орбиту звезды.

Для этого рассмотрим почти круговую орбиту, расположенную почти точно в экваториальной плоскости Галактики. Это значит, что при движении звезды

$$R = R_0 + \Delta R$$

и

$$z = \Delta z,$$

где приращения ΔR и Δz являются величинами бесконечно малыми. Перепишем уравнение (127.4) в виде

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{d^2 \Delta R}{dt^2} = (R_0 + \Delta R) \ddot{\vartheta} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0 - \Delta R \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right); \quad (128.1)$$

при этом мы пренебрегли высшими степенями $(\Delta R)^2$. Запишем в другом виде интеграл площадей

$$(R_0 + \Delta R)^2 \dot{\vartheta} = h, \quad (128.2)$$

а вместо тождества (127.3) в данном случае получим уравнение для третьей координаты, а именно:

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \Delta z; \quad (128.3)$$

при выводе этого уравнения было принято [см. формулу (127.2)]

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_0 = 0.$$

Подставив значение из формулы (128.2) в уравнение (128.1) и произведя несложные алгебраические преобразования, получим

$$\frac{d^2 \Delta R}{dt^2} = \frac{h^2}{R_0^3} \left(1 - 3 \frac{\Delta R}{R_0} \right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0 - \Delta R \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_0. \quad (128.4)$$

Из соотношения (127.7) находим

$$h^2 = R_0^3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0.$$

Подстановка полученного выражения в уравнение (128.4) приводит к уравнению

$$\frac{d^2 \Delta R}{dt^2} = \frac{d^2 R}{dt^2} = - \Delta R \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{3}{R_0} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0. \quad (128.5)$$

Будем считать орбиту устойчивой, если направление ускорения противоположно направлению отклонения или если ускорение равно нулю (случай безразличного равновесия). Следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_0 + \left(\frac{3}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0 > 0. \quad (128.6)$$

Так как R всегда положительно, то условие (128.6) эквивалентно условию

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^3 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0 > 0,$$

которое можно сформулировать следующим образом: *круговая орбита будет устойчивой, если сила притяжения в системе убывает медленнее, чем третья степень расстояния от центра.*

Аналогичное условие получается из уравнения (128.3), т. е. имеем $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 > 0$; указанное неравенство выполняется во всех реальных звездных системах.

Выражение (128.5) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно ΔR . В таком случае решение его будет иметь вид

$$\Delta R = R_1 \sin n_1 (t - t_1), \quad (128.7)$$

где R_1 и t_1 — постоянные интегрирования, а

$$n_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_0 + \frac{3}{R_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0}. \quad (128.8)$$

Если орбита почти круговая, то имеем дополнительное соотношение

$$\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_c + \Delta \dot{\vartheta}. \quad (128.9)$$

Пусть рассматриваемая орбита имеет такую же постоянную площадей, как круговая орбита с радиусом R_0 ; тогда можно на основании формул (128.2) и (128.9) написать

$$(R_0 + \Delta R)^2 (\dot{\vartheta}_c + \Delta \dot{\vartheta}) = h_c = R_0^2 \dot{\vartheta}_c;$$

пренебрегая бесконечно малыми второго и более высоких порядков, получим

$$R_0^2 \dot{\vartheta}_c + R_0^2 \Delta \dot{\vartheta} + \dot{\vartheta}_c 2 R_0 \Delta R = R_0^2 \dot{\vartheta}_c,$$

отсюда

$$\Delta \dot{\vartheta} = - \frac{2 \Delta R}{R_0} \dot{\vartheta}_c = - 2 \frac{\Theta_c}{R_0} \Delta R.$$

Используя формулу (128.7), имеем

$$\Delta \dot{\vartheta} = - 2 \frac{\Theta_c}{R_0^2} R_1 \sin n_1 (t - t_1).$$

После интегрирования этого выражения получим

$$\Delta \vartheta = 2 \frac{\Theta_c}{R_0^2 n_1} R_1 \cos n_1 (t - t_1) + \vartheta_1. \quad (123.10)$$

Интегралом уравнения (128.3) является выражение

$$\Delta z = z_1 \sin n_2(t - t_2), \quad (128.11)$$

где z_1 и n_2 — постоянные интегрирования, причем

$$n_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)}.$$

129. Относительное движение звезд по почти круговым орбитам. Величины ΔR , $\Delta \vartheta$ и Δz можно рассматривать как координаты звезды в системе, связанной с точкой ($R = R_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ и $z = 0$) и вращающейся вместе с ней вокруг центра системы, к которому направлена ось ΔR . Для удобства введем следующие обозначения:

$$X = \Delta R, \quad Y = R \Delta \vartheta \quad \text{и} \quad Z = \Delta z.$$

В таком случае вместо формул (128.7), (128.10) и (128.11) получим следующие формулы, определяющие движение звезды:

$$X = R_1 \sin n_1(t - t_1), \quad (129.1)$$

$$Y = 2 \frac{\Theta_c}{R_0^2 n_1} R_1 \cos n_1(t - t_1), \quad (129.2)$$

$$Z = z_1 \sin n_2(t - t_2). \quad (129.3)$$

Следовательно, движение звезды в направлении, перпендикулярном к экваториальной плоскости, зависит от других постоянных, чем движение ее в этой плоскости. Из уравнений (129.1) и (129.2) непосредственно получаем выражение

$$X^2 + \frac{R_0^2 n_1^2}{4\Theta_c^2} Y^2 = R_1^2. \quad (129.4)$$

Уравнения (129.3) и (129.4) указывают на то, что движение звезды, находящейся вблизи экваториальной плоскости и движущейся по почти круговой орбите, состоит из движения по эллипсу вокруг точки, движущейся с круговой скоростью в экваториальной плоскости, и из колебания в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Следовательно, средняя скорость движения каждой звезды равна круговой независимо от амплитуды колебаний. Звезды, находящиеся в определенный момент времени в пространстве недалеко друг от друга, не могут удалиться на расстояние, большее, чем сумма амплитуд их колебаний.

Следует все же помнить, что наши выводы получены в предположении, что отклонения ΔR , $\Delta \vartheta$ и Δz от круговой орбиты бесконечно малы, поэтому мы пренебрегли их произведением. Если отклонения конечны, то полученные формулы являются лишь приближенными, в действительности же звезды, колеблясь, могут удаляться все больше и больше. Не следует также забывать об условии (128.6),

если оно не выполняется, то период колебаний, согласно формуле (128.8), становится мнимым.

Движение по эллипсу, определяемое уравнением (129.4), состоит из гармонических колебаний в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Средняя величина абсолютной скорости при гармоническом колебании, в предположении постоянства периода, пропорциональна амплитуде. Величина же периода, согласно формулам (128.8), (129.1) и (129.2), и отношение полуосей эллипса от амплитуды не зависят. Если принять, что направление движения (фазы) различных звезд случайно, то легко убедиться, что отношение дисперсии скоростей звезд в направлениях X и Y пропорционально отношению полуосей эллипса λ . Принимая во внимание формулу (128.8), получим

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{K^2}{4\Theta_c^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right) + \frac{3}{R_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R_0} \right)_0 \right].$$

Так как, согласно выражению (127.6), имеем

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_0 = -\frac{\Theta_c}{R_0}, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_0^2} \right)_0 = -2\Theta_c \frac{\partial \Theta_c}{\partial R} - \frac{\Theta_c^2}{R^2},$$

то выражение для $1/\lambda^2$ можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{R_0}{2\Theta_c} \left(\frac{d\Theta_c}{dR} + \frac{\Theta_c}{R} \right).$$

Вводя постоянные Оорта [см. формулу (67.6)], получим

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{B}{B-A}. \quad (129.5)$$

Если звезды в Галактике движутся по почти круговым орбитам, то наблюдаемый эллипсоид скоростей должен зависеть только от дисперсии скоростей на этих орбитах. В таком случае выражение (129.5) определяет отношение полуосей общего эллипсоида распределения скоростей; длина третьей полуоси, как это следует из формулы (129.3), не зависит от двух других полуосей, а зависит только от постоянной интегрирования z_1 . Те же выводы были уже получены нами в п. 108 на основании общей эллипсоидальной теории динамики звездных систем. Новым здесь является только то, что длина третьей оси, т. е. оси, перпендикулярной к галактической плоскости, произвольна.

Такой произвол, однако, является следствием сделанного нами предположения [см. формулу (127.2)], которое в эллипсоидальной теории (см. п. 107) приводит к выводу, что отношение полуосей k_3 и k_1 может быть произвольным, т. е. третья полуось не зависит от двух других. Однако, полученный в данном случае вывод является менее общим потому, что он относится только к движению в галактической плоскости по почти круговой орбите. Следовательно, пред-

положения, сделанные в этом пункте, не существенны, так как они приводят к результатам, которые можно получить также при гораздо более общих предположениях. Интересно, однако, что в рассматриваемом случае мы пользовались теорией движения отдельных звезд.

Первое исследование зависимости между движениями отдельных звезд и распределением их скоростей было проведено Эддингтоном еще в 1913 г. ¹⁾

130. Произвольные орбиты. Основными уравнениями движения звезд в плоскости галактического экватора данной звездной системы являются уравнения (127.4) и (127.5). Интегрируя последнее, легко получить интеграл площадей; действительно,

$$R^2 \dot{\vartheta} = h. \quad (130.1)$$

Исключая $\dot{\vartheta}$ из первого уравнения с помощью формулы (130.1), имеем

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{h^2}{R^3} - \frac{\partial \Phi}{\partial R}.$$

Умножая это выражение на тождество

$$2 \frac{dR}{dt} dt = 2 dR$$

и интегрируя, получим

$$-\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{h^2}{R^2} + 2\Phi + 2H, \quad (130.2)$$

где H — постоянная интегрирования. Ясно, что эта величина должна быть меньше нуля, если мы рассматриваем звезды, являющиеся постоянными членами данной системы. Дифференцирование по времени в уравнении (130.2) можно заменить с помощью формулы (130.1) дифференцированием по ϑ :

$$-\left(\frac{dR}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{2(\Phi + H)}{h^2} R^4 + R^2.$$

Это уравнение можно проинтегрировать численным способом и получить орбиту звезды. Однако, даже не решая его, можно найти максимальное и минимальное расстояние звезды от центра системы. Условие

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\vartheta} = 0$$

приводит к следующему выражению:

$$2(\Phi + H)R^2 = -h^2. \quad (130.3)$$

Это, казалось бы, простое уравнение, по существу, очень сложно, так как содержит потенциал, который, вообще говоря, является также

¹⁾ MN, 74, 5 (1913).

функцией R . Если эта функция проста, то уравнение (130.3) можно решить. Так, например, П. П. Паренаго ¹⁾ предположил, что

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{1 + kR^2} ;$$

и получил уравнение четвертой степени относительно R :

$$R^4 2Hk + R^2 (2\Phi_0 + 2H + h^2 k) + h^2 = 0. \quad (130.4)$$

Если все три компонента скорости и масса звезды известны, то можно вычислить постоянные h и H , а зная еще потенциал Галактики, определить $R_{\max}$ и $R_{\min}$. Используя формулу (130.1), можно вычислить также скорость вращения в данных точках. Опуская подробности, приведем здесь только результаты, полученные П. П. Паренаго (см. табл. 24);

Таблица 24

	Солнце	Звезда Каптейна	Звезда Барнарда
$R_{\min}$	7120 <i>пс</i>	746	5 560
$R_{\max}$	8590	7220	22 540
$\theta_{\max}$	250 <i>км/сек</i>	365	335
$\theta_{\min}$	207	39	82

Полученные значения являются лишь ориентировочными. Здесь принята упрощенная форма потенциала, которая вряд ли правильна при очень больших расстояниях от центра Галактики, и поэтому в этих случаях уравнение (130.4), по всей вероятности, не имеет смысла ³⁾. Кроме того, мы пренебрегли спиральной структурой Галактики.

¹⁾ АЖ, 29, 245 (1952).

²⁾ При этом принято, что круговая скорость изображается формулой, совпадающей с формулой для скорости центроидов в теории стационарной Галактики, которая хорошо согласуется с наблюдениями. Как можно подсчитать по формуле (125.2), различие круговой и центроидной скоростей для плоской составляющей составляет всего несколько десятых *км/сек.* — *Прим. ред.*

³⁾ Поэтому орбиту звезды Барнарда следует рассматривать, как весьма приближенную. Орбиты двух других звезд должны быть близки к действительности. Орбита Солнца приведена ниже на стр. 373—374. — *Прим. ред.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ЗВЕЗДНОЙ АСТРОНОМИИ

§ 23. Галактика

131. Форма и размеры Галактики. В предыдущих главах мы неоднократно знакомили читателя с основными сведениями, касающимися формы и размеров Галактики; однако сведения эти разбросаны по разным местам текста, поэтому они не могут дать общей картины структуры Галактики. Чтобы дать читателям возможность составить представление об общей структуре Галактики, мы в этой главе попытаемся дать краткое систематическое изложение важнейших установленных фактов, касающихся нашей Галактики.

Из предыдущих рассуждений (в частности из глав II и IV) непосредственно следует, что невозможно точно установить понятие размеров Галактики или ее формы по двум причинам: первой из них является то, что в Галактике нет каких-либо резких границ. Плотность объектов, из которых состоит Галактика, падает по мере увеличения расстояния от центра последней. Однако считать границами Галактики те места, в которых совсем нет указанных объектов, нельзя, так как даже в межгалактическом пространстве мы встречаемся с отдельными звездами и с рассеянной межгалактической материей. Практически можно принять, что Галактика оканчивается там, где нет никаких признаков закономерностей в движениях и пространственном распределении объектов. Ясно, что при таком определении границы Галактики могут изменяться по мере обнаружения новых закономерностей в движениях звезд или же открытия новых типов небесных тел в Галактике. Все же до сих пор такое определение не нарушало однозначности и не вносило противоречий, так как даже самые далекие звезды в Галактике, которые удалось наблюдать, подчиняются известным кинематическим закономерностям. Поэтому мы вправе утверждать, что Галактика простирается до тех расстояний, на которых мы еще наблюдаем звезды.

Все же такой упрощенный подход скоро станет недостаточным, и тогда нам придется точнее определять границы Галактики, о которых идет речь. Так, например, исследования, проведенные на обсерватории Маунт Стромло, показали, что между нашей Галактикой и Большим Магеллановым облаком существует область, соединяющая эти объекты и заполненная звездами и межзвездной материей¹⁾.

¹⁾ *Observatory*, 74, 878 (1954).

Второй причиной, мешающей точно установить форму Галактики, является то, что в ней совместно существуют в пространстве несколько составляющих, образующих Галактику в целом. Распределение звезд в Галактике, принадлежащих к одной составляющей, отличается от распределения звезд, принадлежащих к другой; поэтому мы довольно легко определим форму каждой из составляющих, хотя встретимся с большими трудностями при определении формы всей Галактики. Рассматривая сферическую составляющую, приходим к выводу, что Галактика имеет сферическую форму, а рассматривая плоскую составляющую — форму диска. Говоря о Галактике в целом и подразумевая под этим области значительной звездной плотности независимо от той составляющей, к которой эти звезды принадлежат, мы убеждаемся (на основании данных о плоской и сферической составляющих), что Галактика имеет форму плоского диска диаметром 26 000 *пс* и толщиной несколько сотен парсеков. В центре диска выделяется сильное сгущение звезд сферической составляющей, имеющее форму несколько сплюснутого эллипсоида вращения; большая полуось этого эллипсоида равна 1200 *пс*, малая же — 450 *пс*. Этот эллипсоид образует так называемое ядро Галактики.

Следует помнить, что данные, относящиеся к галактическому ядру, в большинстве случаев основаны на различных гипотезах, так как непосредственные наблюдения ядра нашей Галактики дают нам очень скудные сведения. Исключением являются лишь наблюдения в инфракрасных лучах, позволяющие определять угловые размеры ядра Галактики непосредственно¹⁾, и радионаблюдения²⁾.

Массу галактического ядра можно получить из динамических соображений и затем на основании этого вычислить его размеры. Так как средний показатель цвета звезд в Галактике равен показателю цвета галактик типа *Sc*, то приходим к выводу, что Галактика принадлежит к этому именно типу.

Сравнения же нашей Галактики с другими галактиками типа *Sc* дают нам сведения о размере ядра Галактики и составе последнего, причем наблюдения используются для контроля правильности различных гипотез.

Говоря о форме Галактики, удобно пользоваться схемой распределения в ней различных составляющих. Такая схема изображена на рис. 75, где показано сечение Галактики плоскостью, перпендикулярной галактической и проходящей через центр Галактики. Чтобы не усложнять рисунка, мы не поместили на нем промежуточной составляющей, к которой принадлежит сравнительно небольшое число звезд, и изображили лишь два типа населения. Римской цифрой I мы обозначили места, где преобладают объекты I типа населения

¹⁾ См. Калиняк А. А., Никонов В. Б., Красовский В. И., *Изв. Крымской астроф. обс.*, 6, 119 (1951).

²⁾ См. Шкловский И. С., *АЖ*, 29, № 4 (1952).

(плоская составляющая), а цифрой II — места с преобладанием II типа населения (сферическая составляющая). Согласно исследованиям Юмасаона и Цвикки¹⁾, всю Галактику окружает ореол, состоящий из звезд II типа населения (на рис. 75 это отмечено большим кругом, обозначенным римской цифрой II).

Более точное представление об общей форме Галактики можно получить на основании значений градиентов плотности различных подсистем и составляющих в Галактике, приведенных в соответствующей таблице (п. 76, табл. 15).

132. Спиральная структура

Галактики. Утверждение о сходстве нашей Галактики с типичными спиральными галактиками основано на следующих наблюдательных фактах: во-первых, присутствие в Галактике звезд, принадлежащих к двум различным типам населения; во-вторых, тот факт, что звезды I типа населения образуют в Галактике диск; в-третьих, размеры нашей Галактики очень близки к размерам типичных спиральных галактик.

Поэтому кажется естественным выдвинутое несколько десятков лет тому назад предположение о спиральной структуре Галактики. Сначала это предположение было основано лишь на поверхностной аналогии структуры нашей Галактики и ближайших спиральных галактик. Сравнение с другими галактиками, имеющими тот же показатель цвета, позволило несколько уточнить тип спирали нашей Галактики. Все это, однако, не давало возможности установить число спиральных ветвей и их расположение в Галактике. Только в последние годы удалось получить непосредственно некоторые наблюдательные данные, подтверждающие спиральную структуру Галактики; эти данные получены тремя путями: а) статистические методы, основанные на исследовании пространственного распределения звезд, б) наблюдения газовых туманностей, состоящих из ионизованного водорода (области H II), в) радиоастрономические наблюдения нейтрального водорода (области H I). В настоящее время все три указанные метода позволяют исследовать лишь ближайшие к Солнцу части спиральных ветвей Галактики. Радиоастрономический метод в принципе дает возможность исследовать также более удаленные от Солнца области, так как радиоизлучение не так сильно

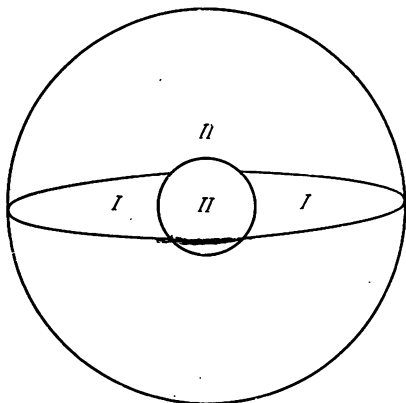


Рис. 75.

¹⁾ *Journ. of British Astron. Association*, 64, № 5 (1954).

поглощается в Галактике, как световые лучи. Однако требуется значительное улучшение как методов наблюдения, так и методов статистической обработки радиоастрономических наблюдений.

Наиболее уверенные результаты получаются при исследовании пространственного распределения звезд различными методами, среди которых самым надежным является метод Вашакидзе — Оорта; этот метод можно использовать только в областях, расположенных сравнительно далеко от галактической плоскости (см. п. 37).

Легче всего спиральная структура выявляется при исследовании подсистем с большим градиентом $\delta \log D/dz$, при этом места наибольшей концентрации объектов спиральных ветвей находятся почти точно в галактической плоскости. Исследования распределения звезд в галактической плоскости другими методами позволяют только обнаружить два сгущения звезд: одно — в направлении на центр Галактики и другое — в противоположном направлении, т. е. в направлении на антицентр. Эти сгущения можно объяснить существованием двух спиральных ветвей, между которыми находится Солнце (рис. 76а). Таков результат, полученный в 1938 г. Оортом¹⁾.

Ш. Т. Хабибуллин в 1949 г.²⁾ заново проанализировал подсчеты звезд в галактической плоскости и пришел к выводу, что вблизи Солнца существует только одна спиральная ветвь, которая расположена в направлении на центр Галактики (рис. 76б). На обоих указанных рисунках жирной пунктирной линией показано распределение пылевой составляющей межзвездной материи, согласно работе В. Зонна³⁾. Эта материя также, вероятно, сконцентрирована в спиральных ветвях Галактики.

Горячие гиганты и сверхгиганты образуют звездные облака, расположенные исключительно в спиральных ветвях галактик. Эти звезды ионизируют газ в межзвездной материи и вызывают его свечение. Фотографируя спиральные галактики с помощью фильтров с узкой полосой пропускания в области красной линии водорода ($H\alpha$), мы получим на снимке области сгущений межзвездного водорода (области $H II$), причем, как правило, все они располагаются вдоль спиральных ветвей наблюдаемых галактик.

Аналогичным образом по снимкам областей $H II$ в нашей Галактике можно определить положение спиральных ветвей в ближайшей к Солнцу области Галактики, которую мы только в состоянии изучать, так как получение снимков более далеких областей невозможно из-за сильного межзвездного поглощения. Определяя фотометрическим путем, конечно, с учетом межзвездного поглощения, расстояния звезд, вызывающих ионизацию водорода, можно найти, таким образом, расстояния областей светящегося газа. Изображая на карте положения областей $H II$ в проекции на галактическую плоскость и

¹⁾ *BAN*, 8, 261 (1938).

²⁾ *АЖ*, 26, 288 (1949).

³⁾ *Warsaw Reprint*, 61 (1957).

соединяя затем их плавной линией, получим отрезки спиралей, как на рис. 28 (стр. 161) по данным пионерской работы Моргана, Шарплесса и Остербрука¹⁾.

Источником радиоизлучения, наблюдаемого на длине волны $\lambda = 21$ см, является исключительно сильно разреженный нейтральный водород, входящий в состав межзвездного газа (области Н I).

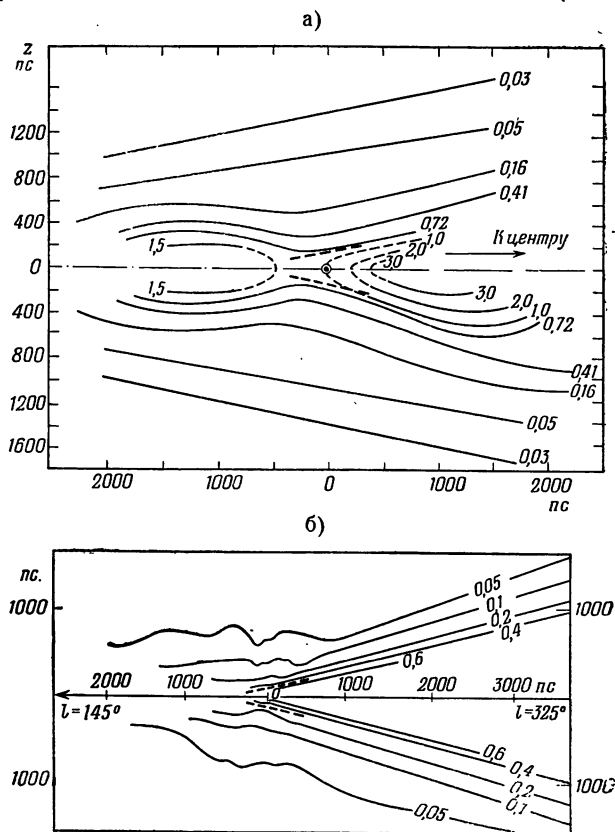


Рис. 76.

Наблюдения, проводимые на этой длине волны, также дают нам распределение областей Н I в проекции на небесную сферу, причем недавно был найден метод определения расстояний до отдельных облаков Н I (см. дополнение 7).

Эти исследования позволили также установить существование спиральной структуры Галактики вблизи Солнца. Одним из первых исследований в этой области была работа И. С. Шкловского (1952 г.)²⁾.

¹⁾ *Sky and Telescope*, 11, 138 (1952).

²⁾ *АЖ*, 29, № 4 (1952).

Результаты исследований, проведенных тремя упомянутыми методами, показывают, что в изученной нами области в окрестностях Солнца, т. е. на расстоянии нескольких килопарсек от него, располагаются два или три вытянутых сгущения звезд, являющихся, по всей вероятности, частями спиральных ветвей Галактики. В последние годы опубликовано много работ, посвященных определению различных характеристик спиральных ветвей: расстояний, толщины и кривизны ветвей и даже коэффициентов уравнения соответствующих спиралей. К сожалению, более подробные данные, полученные различными методами, часто не только не согласуются между собой, но иногда даже противоречат друг другу. По данным одних работ, вращение Галактики происходит в сторону уменьшения радиуса вектора спирали, т. е. ветви при вращении Галактики закручиваются, по другим, наоборот, — раскручиваются. Этому вопросу, очень важному также с теоретической точки зрения, посвящено и сейчас много работ, так что наши сведения обогащаются почти каждый месяц. Поэтому мы не будем уделять много внимания этому вопросу и ограничимся лишь указанием, что сейчас непосредственно из наблюдений можно определить форму спиральных ветвей нашей Галактики в окрестностях Солнца, а точный ответ относительно направления вращения спиральных ветвей будет, по всей вероятности, дан в ближайшие годы. Читателей, интересующихся этим вопросом более подробно, мы отсылаем к специальной литературе¹⁾.

133. Положение Солнца в Галактике. Этот вопрос непосредственно связан со структурой Галактики. Не зная точно положение Солнца относительно спиральных ветвей Галактики (расположение последних относительно Солнца нам известно неточно), мы вынуждены ограничиваться определением положения Солнца относительно экваториальной плоскости Галактики, ее ядра или края. Точнее говоря, мы определяем положение экваториальной плоскости Галактики, координаты ее ядра, его расстояние от Солнца и, наконец, расстояние в направлении антицентра, на котором находятся звезды, еще принадлежащие к нашей Галактике.

Расстояние Солнца от галактической плоскости можно определить с помощью методов, описанных в п. 2. Результаты хорошо согласуются между собой. Таким образом установлено, что Солнце находится очень недалеко от галактической плоскости, на расстоянии примерно 15 *пс* от нее в направлении северного полюса Галактики (понятие северного и южного галактических полюсов объяснено в п. 1). Это расстояние настолько мало, что при рассмотрении многих проблем им можно просто пренебречь и считать, что Солнце находится точно в галактической плоскости.

¹⁾ Исторический обзор работ по изучению спиральной структуры Галактики, доведенный до 1954 г., дан в книге: Паренгаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3, М., 1954, стр. 298—313.

Координаты галактического ядра определяются достаточно надежно либо как координаты места наибольшего сгущения звезд в Млечном Пути (см. п. 32), либо на основании кинематических выводов (см. п. 70). Результаты довольно хорошо согласуются между собой, однако, точного совпадения здесь ожидать нельзя, так как ядро Галактики является довольно большим объектом, возможно даже неправильной формы. Кроме того, геометрический центр ядра или его центр массы может отличаться от центра массы всей Галактики, определяемого из кинематических соображений. Поэтому в настоящее время принимаются следующие значения галактической долготы и широты ядра: $l = 325^\circ$, $b = 0^\circ$ ¹⁾.

Труднее определить расстояние Солнца от центра Галактики. Кинематические методы (см. п. 71) не могут дать ответа на этот вопрос, методы же, основанные на исследовании пространственного распределения звезд, очень неточны, так как нельзя непосредственно наблюдать звезды, находящиеся в ядре Галактики. Путем экстраполяции поверхностей одинаковой звездной плотности в Галактике (см. п. 37) удалось установить, что расстояние Солнца от центра Галактики заключено в пределах 7—9 *кпс*, причем разные исследователи получают различные значения, заключенные в указанных пределах.

Еще более неуверенно определяется то расстояние, на котором „оканчивается“ Галактика в направлении ее антицентра. Нам удается лишь наблюдать отдельные звезды на расстоянии до 6 *кпс* в „коридорах видимости“, более или менее свободных от межзвездной материи. Предполагая, что эти звезды находятся на краю Галактики, приходим к выводу, что Солнце расположено в промежуточной области Галактики, несколько ближе к ее краю, чем к центру.

О движении Солнца речь была уже в гл. III, здесь следует напомнить только, что Солнце вместе со всеми звездами I типа населения участвует во вращении Галактики со скоростью примерно 230 *км/сек* (см. п. 65). Его пекулярная скорость составляет 20 *км/сек* (см. п. 53).

П. П. Паренаго определил орбиту Солнца в Галактике²⁾, которая изображена на рис. 77, а некоторые числовые данные приведены в следующей таблице:

ЧИСЛОВЫЕ ДАННЫЕ (ЭЛЕМЕНТЫ) ГАЛАКТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ СОЛНЦА

Период обращения	212 · 10 ⁶ лет
Время между двумя последовательными прохожденьями через перигалактий	176 · 10 ⁶ „
Момент ближайшего прохождения через перигалактий	+12 · 10 ⁶ „
Момент последнего прохождения через апогалактий	—76 · 10 ⁶ „

1) Существующие в настоящее время определения заключаются в пределах от $l = 328^\circ$ до $l = 330^\circ$. — *Прим. ред.*

2) АЖ, 29, 245 (1952).

Расстояние от центра в перигалактии R_1	7,12 кпс
Расстояние от центра в апогалактии R_2	8,59 "
Среднее расстояние от центра Галактики	7,86 "
„Эксцентриситет“ орбиты $\left(\frac{R_2 - R_1}{2a}\right)$	0,09 "
Линейная скорость в перигалактии	250 км/сек = 256 пс/10 ⁶ лет
„ „ „ апогалактии	207 „ „ = 212 „
Галактоцентрическая долгота восходящего узла	-4°,1
Наклон орбиты (в настоящее время)	+1°,37

Следует помнить, что приведенная орбита Солнца вычислена без учета спиральной структуры Галактики; учет последней может сильно изменить форму орбиты.

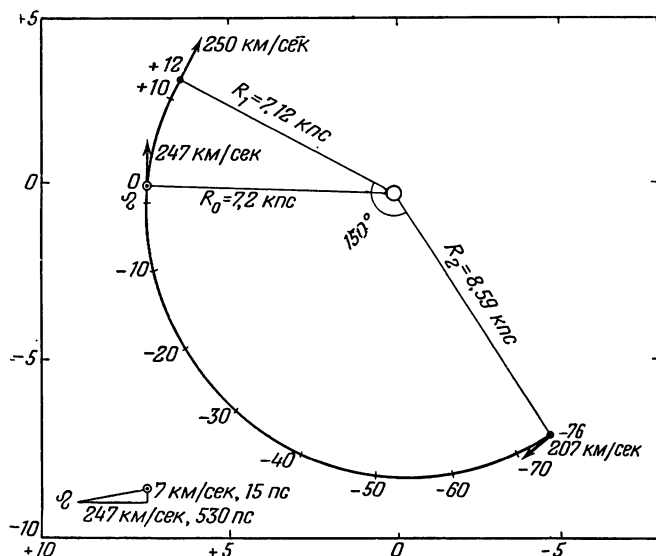


Рис. 77.

134. Звездные облака. На снимках спиральных галактик видно, что их спиральные ветви состоят из отдельных сгущений звезд, так называемых звездных облаков. Следует предположить, что то же самое имеет место и в нашей Галактике. В те времена, когда еще ничего не было известно о межзвездном поглощении света, к звездным облакам ошибочно относили те области Млечного Пути, где было особенно много звезд по сравнению с соседними „темными“ областями, которые считались пустыми. Впоследствии было установлено, что во многих случаях эти темные области вовсе не пусты, а только кажутся такими потому, что в них находится много межзвездной материи. Вполне естественно, что существование областей, богатых звездами.

в большинстве случаев можно объяснить отсутствием межзвездной материи, т. е. лучшей видимостью в данном направлении. Однако, из этого нельзя еще делать вывода, что звезды в Галактике не образуют звездных облаков; наоборот, некоторые непосредственные наблюдательные данные свидетельствуют в пользу существования таких образований.

Классическим примером такого облака следует считать местную систему, т. е. сгущение звезд в окрестностях Солнца. Реальность

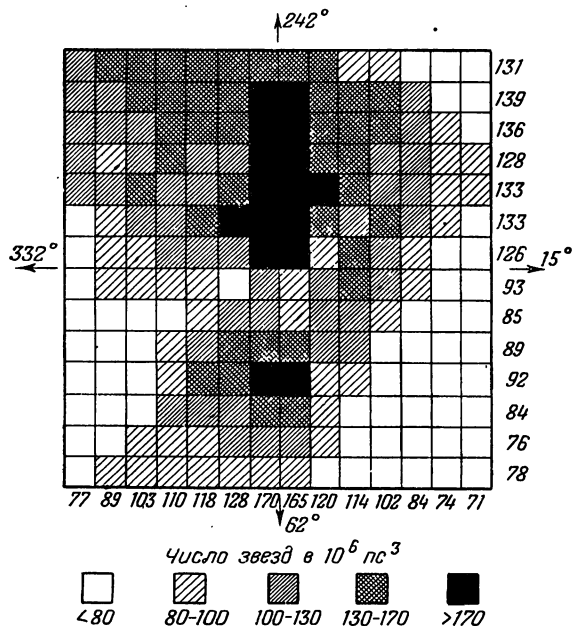


Рис. 78.

существования указанного сгущения не вызывает сомнений, так как звезды, входящие в его состав, настолько близки к Солнцу, что влияние межзвездного поглощения в данном случае никоим образом не может привести к ошибочным выводам. Даже неправильный коэффициент поглощения не изменит существенным образом результата.

На рис. 78 показано распределение плотностей звезд типов *B* и *gM* в галактической плоскости по данным работы Р. В. Куницкого¹⁾. Направление центра этого сгущения совпадает с направлением местного вращения (см. п. 71) звезд в окрестностях Солнца; это обстоятельство является независимым подтверждением реальности местной системы.

¹⁾ АЖ, 12, 229 (1935).

Местная система вытянута в направлении, перпендикулярном направлению на центр Галактики, поэтому ее можно рассматривать как часть спиральной ветви Галактики. С другой стороны, большинство данных (см. п. 133) указывает на то, что Солнце находится между двумя спиральными ветвями, а не внутри одной из них, как следует из непосредственной интерпретации рис. 78. Все это можно объяснить следующим образом: либо местная система является частью третьей, едва заметной спиральной ветви — такого рода образования наблюдаются иногда между главными ветвями в других спиральных галактиках, — либо это самостоятельное звездное облако, которое не связано непосредственно со спиральной структурой Галактики. Однако во втором случае следует иметь в виду, что местная система значительно отличается от типичных звездных облаков в нашей Галактике. Решение этих вопросов — дело ближайшего будущего.

По исследованиям П. Г. Шнирельман¹⁾, ширина местной системы составляет 200 *пс*, длина — примерно 500 *пс*, а координаты центра — $l=239^\circ$, $b=-12^\circ$. Расстояние от Солнца до центра местной системы равно 100 *пс*. Приведенные данные находятся в хорошем согласии с результатами других исследователей. Довольно большая галактическая широта центра местной системы связана с наклоном в 16° плоскости, вблизи которой концентрируются входящие в нее звезды. Это тождественно явлению, известному под названием „Пояса Гулда“ (см. п. 2).

Вопросы кинематики местной системы пока еще окончательно не выяснены (см. п. 71), хотя и обнаружено общее вращение местной системы вокруг ее центра.

Б. А. Воронцов-Вельяминов в 1953 г.²⁾ показал, что, кроме местной системы, в „коридорах видимости“ Млечного Пути можно обнаружить много других реальных звездных облаков, которые, как местная система и звездные облака в других галактиках, состоят главным образом из белых гигантов. В цитируемой работе автор приводит много данных, касающихся этих облаков, однако, рассматриваемый вопрос до сих пор следует считать открытым.

135. Звездные скопления. Звездные скопления имеют еще меньшие размеры, чем спиральные ветви галактик и звездные облака. В предыдущих главах было дано описание этих образований, их классификация, а также указаны некоторые динамические и космогонические проблемы, связанные со звездными скоплениями. В данном пункте будем рассматривать звездные скопления лишь как члены Галактики.

Рассеянные звездные скопления состоят из немногих звезд ($10-10^2$). Эти образования встречаются среди звезд, принадлежащих к плоской

1) АЖ, 29, № 2 (1952).

2) АЖ, 30, 394 (1953).

составляющей Галактики. Число известных рассеянных звездных скоплений достигает 500, но это только небольшая часть общего числа звездных скоплений в Галактике, так как большинство этих объектов находится недалеко от галактической плоскости ($-15^\circ < b < +15^\circ$) и не может наблюдаться из-за сильного межзвездного поглощения вблизи этой плоскости. Мы можем наблюдать только 4,5% рассеянных звездных скоплений, находящихся в окрестностях Солнца; расстояние ближайших скоплений порядка 40 пс; самые далекие рассеянные звездные скопления, обнаруженные в „коридорах видимости“, находятся от Солнца на расстояниях, достигающих 500 пс. Линейные диаметры рассеянных звездных скоплений заключены в пределах 1—15 пс.

Рассеянные звездные скопления сильно концентрируются к галактической плоскости; вопрос связи их со спиральными ветвями Галактики пока еще совершенно неясен.

Подробные статистические исследования чисел звезд, принадлежащих к рассеянным звездным скоплениям, очень трудны из-за отсутствия практически применимых критериев, на основании которых можно было бы разделить звезды скопления и звезды фона.

Вообще говоря, возможны следующие критерии: 1) одинаковый параллакс (критерий, применимый исключительно к близким скоплениям), 2) распределение на диаграмме спектр — светимость, построенной по видимым (не абсолютным) звездным величинам, 3) общее собственное движение. Последний критерий, несомненно, является самым надежным, благодаря ему удалось обнаружить существование движущихся звездных скоплений. Все указанные критерии неприменимы, конечно, к очень слабым звездам.

Теоретически можно использовать также критерий общих лучевых скоростей, который, однако, на практике в большинстве случаев неприменим из-за отсутствия методов массового определения лучевых скоростей слабых звезд.

Особым видом скоплений являются, как известно, звездные ассоциации (см. п. 77). К сожалению, число известных в настоящее время ассоциаций еще настолько мало, что мы не в состоянии статистическими методами исследовать их пространственное распределение в Галактике.

Иначе обстоит дело с шаровыми скоплениями, которые принадлежат к сферической составляющей Галактики и потому наблюдаются также на больших галактических широтах. В настоящее время известно около 100 шаровых скоплений. Так как межзвездная материя, находящаяся главным образом в галактической плоскости, заслоняет сравнительно небольшое число шаровых скоплений, то общее число этих образований невелико, порядка 200. Шаровые звездные скопления часто имеют форму эллипсоида; это, по всей вероятности, является следствием вращения скопления. К сожалению, мы не умеем определять пространственную форму скоплений и, следовательно, направление

осей эллипсоидов; однако предварительные статистические исследования показывают, что эти эллипсоиды ориентированы в пространстве случайным образом. Отсюда следует, что направления вращения шаровых скоплений не связаны с вращением Галактики. Указанное обстоятельство, а также то, что многие шаровые скопления находятся далеко за пределами Галактики, служит доказательством слабой связи между этими объектами и Галактикой.

Шаровые скопления во многом похожи на эллиптические галактики, действительно, они имеют ту же форму и состоят из тех же звезд II типа населения, что и эллиптические галактики, хотя размеры шаровых скоплений, очевидно, меньше размеров эллиптических галактик. Самые большие шаровые скопления имеют диаметр порядка 100 пс, в то время, как диаметр наименьших эллиптических галактик равен 1000 пс. Однако указанное сходство может быть лишь поверхностным, поэтому из него еще нельзя делать более важных выводов.

136. Галактические туманности. Все известные типы галактических туманностей наблюдаются исключительно вблизи галактической плоскости, следовательно, они принадлежат к плоской составляющей нашей Галактики; известно, что эмиссионные водородные туманности, называемые областями H II, образуют спиральные ветви как в нашей Галактике, так и в других галактиках. Однако, это может быть следствием распределения только горячих гигантов, вызывающих свечение туманностей, а не самого межзвездного газа. Отсюда еще нельзя делать вывода о том, что межзвездная материя концентрируется в спиральных ветвях Галактики, тем более, что непосредственными наблюдениями установлено существование отдельных темных облаков межзвездной материи между спиральными ветвями Галактики. Некоторые исследователи утверждают даже, что облака темной материи наблюдаются главным образом между спиральными ветвями Галактики.

Пространственное распределение туманностей тесно связано с распределением межзвездной материи, которое изучается с помощью наблюдений межзвездного поглощения света звезд и межзвездных линий газовой составляющей межзвездной материи. Об этих наблюдениях и их интерпретации уже упоминалось в пп. 41, 43, 46 и 47. Было показано, что, приняв некоторую гипотетическую функцию плотности межзвездной материи, можно довольно уверенно определить ее распределение в направлении оси z , перпендикулярной к галактической плоскости. О распределении межзвездной материи в галактической плоскости пока еще ничего определенного сказать нельзя за исключением того, что в ближайших окрестностях Солнца плотность этой материи довольно быстро падает в направлении антицентра Галактики, так же быстро, как средняя плотность звезд¹⁾.

¹⁾ См. Zonn W., *Warsaw Reprint*, 61 (1957).

Хотя светлые диффузные туманности, равно как и планетарные туманности, резко отличаются по внешнему виду от остальных объектов, все же статистические данные относительно этих объектов довольно скупы из-за немногочисленности последних. По-видимому, их пространственное распределение незначительно отличается от распределения межзвездной материи, хотя в некоторых случаях можно обнаружить довольно существенные различия в распределении этих образований (см. стр. 160—162).

Еще недавно мы интересовались темными облаками межзвездной материи, главным образом, потому, что они являются причиной межзвездного поглощения света звезд, учет которого играл и играет большую роль во многих вопросах звездной астрономии. Однако в последние годы астрономы пришли к выводу, что межзвездная материя связана с проблемами эволюции звезд, тем более, что открытые недавно звездные ассоциации находятся почти всегда внутри или около больших сгущений межзвездной материи. Также совсем недавно начали подозревать о существовании связи между формами некоторых туманностей и магнитными полями в нашей Галактике и даже проблемами происхождения космических лучей¹⁾. Эти исследования носят чисто астрофизический характер и относятся частично к области магнитной гидродинамики, поэтому мы не будем рассматривать их здесь более подробно. При изучении структуры Галактики необходимо обратить особое внимание на то, что, по крайней мере, часть межзвездной материи является источником сильного радиоизлучения. Особенно сильными источниками радиоизлучения являются туманности, обязанные своим происхождением вспышкам сверхновых звезд. Примером может служить известная всем Крабовидная туманность в созвездии Тельца, независимо открытая также с помощью радиотелескопов, в свое время названная объектом Телец А.

Следует также считать, что так называемые циррусные туманности, имеющие форму длинных волокон, похожих на некоторые солнечные протуберанцы, обязаны своим происхождением существованию сильных магнитных полей вблизи данной туманности.

§ 24. Другие галактики

137. Общие статистические данные. Одной из самых важных статистических характеристик галактик, имеющих в нашем распоряжении, является их спектральный класс. В подавляющем большинстве случаев можно определять лишь спектральный класс всей галактики, т. е. среднее значение спектральных классов всех звезд, взвешенное по блеску и количеству звезд в данной галактике. Именно эта величина

¹⁾ Более подробные сведения относительно этих исследований содержатся в статье: Strzałkowski A., *Postępy Astronomii*, 3, 125 (1955).

и определяется при изучении спектров галактик, снятых с помощью объективной призмы. Оказывается, что все вообще галактики относятся почти к одному и тому же спектральному типу *G*. Из наблюдений Юмаса¹⁾ следует, что средний спектральный класс эллиптических галактик равен *G*3,6; а спиральные галактики имеют более ранние спектральные типы: средний класс галактик типа *Sa* равен *G* 3,4, типа *Sb* — *G*1,6, а типа *Sc* — *F*8,8. Средний спектральный класс нашей Галактики относится к типу *F*5, откуда следует, что она ближе всего к галактикам типа *Sc*. Однако необходимо помнить, что средний спектральный класс нашей Галактики определяется очень неуверенно из-за существования внутригалактического поглощения, точный учет которого невозможен, тем более, что средние спектральные классы различных частей Галактики явно неодинаковы. Средний спектральный класс ближайших к ядру частей Галактики относится к спектральному классу *K*, в то время, как средний спектральный класс далеких областей в направлении антицентра — к классу *A*. Аналогичные различия удалось обнаружить в ближайших галактиках, для которых можно получать спектр отдельных частей. Как правило, ядра галактик принадлежат к более позднему спектральному классу, чем спиральные ветви; все это легко объясняется тем, что среди звезд II типа населения, из которых состоят ядра галактик, самыми яркими являются красные гиганты и сверхгиганты, тогда как среди объектов I типа, образующих спиральные ветви, самыми яркими являются белые гиганты. Даже в самих спиральных ветвях средний спектральный класс звезд изменяется с удалением от ядра галактики, становясь все более и более ранним. Разность показателей цвета ядра и спиральных ветвей достигает обычно $0^m,8$, а в некоторых исключительных случаях может достигнуть даже $2^m,0$.

В спектрах многих галактик наблюдаются эмиссионные линии, вероятно обязанные своим происхождением светящемуся межзвездному газу. Такие линии реже всего наблюдаются в спектрах эллиптических галактик (19⁰/₀); в галактиках типов *SB0*, *SBa*, *SBb* и *SBc* процентное содержание спектров с эмиссионными линиями систематически увеличивается. Чаще всего эти линии наблюдаются в спектрах неправильных галактик (тип I), среди которых только 7⁰/₀ галактик не имеют эмиссионных линий. На этом основании многие астрономы предполагают, что галактики типа I являются более поздней стадией эволюции галактик типа *Sc*.

Нелегко ответить на один не менее важный вопрос, а именно: каково относительное распределение галактик по типам? Главной трудностью здесь является то, что средние абсолютные величины различных типов галактик неодинаковы, поэтому наблюдаемые числа галактик различных типов не соответствуют их действительному распределению. На основании имеющихся наблюдательных данных

1) *Ap J*, 83, 21 (1936).

с учетом селекции, вызванной упомянутым выше обстоятельством, приходим к выводу, что наиболее многочисленными являются неправильные галактики, за ними идут эллиптические; относительное же число спиральных галактик в несколько раз меньше, чем эллиптических.

138. Пространственное распределение галактик. Методы исследования пространственного распределения галактик в принципе ничем не отличаются от методов исследования пространственного распределения звезд. В тех случаях, когда расстояния отдельных галактик известны (см. п. 30), исследование их распределения сводится к подсчетам числа галактик в единице объема в различных областях пространства. Если же расстояния неизвестны, то используются числа наблюдаемых галактик ярче звездной величины m [$N(m)$]. Вводя соответствующие предположения относительно функции светимости галактик, можно определить их пространственную плотность, так же как и пространственную плотность звезд (см. § 10).

На основании многочисленных исследований установлено, что галактики всех типов образуют скопления, каждое из которых включает в себя несколько сотен галактик. Наша Галактика принадлежит к так называемому местному скоплению, содержащему объекты, перечисленные в табл. 25.

Другие скопления галактик указаны в табл. 26.

По мнению Хольмберга¹⁾, среди ближайших к Солнцу галактик сравнительно много двойных систем, так, например, среди галактик ярче $14^m,6$ видимой величины Хольмберг нашел примерно 700 двойных и кратных систем.

Исследуя большую область пространства, т. е. рассматривая, например, галактики ярче 20^m , мы убеждаемся, что их распределение почти не отличается от случайного. Отсюда следует, что скопления галактик настолько некомпактны, что при статистическом исследовании существование таких образований становится незаметным. К таким выводам пришел Хаббл²⁾, анализируя полученные им числа галактик до $19^m,5$ видимой величины.

Если пространственное распределение галактик действительно случайно, то, согласно формуле (31.3), имеем

$$\log N(m) = \text{const} + 0,6m, \quad (138.1)$$

где видимые величины m должны зависеть только от величины r , т. е. от расстояния галактики, и не зависеть от межзвездного поглощения и так называемого „покраснения“ галактик (см. п. 140).

Хаббл, принимая во внимание все изложенное выше, нашел, что формула (138.1) хорошо представляет наблюдаемое распределение,

¹⁾ *Lund Ann.*, № 6 (1937), а также *Ap J*, 92, 200 (1940).

²⁾ *Ap J*, 79, 8—76 (1934) = MWC, № 485.

ГАЛАКТИКИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ К МЕСТНОМУ СКОПЛЕНИЮ
(по данным Кудерка)

	Название или обозначение	Созвездие	Расстояние в 10^3 световых лет	Тип	Абсолютная фотографическая величина	Примечание
1	Галактика	—	—	Sc	—17,5	Тройная система
2	Малое Магелланово Облако	Dorado	75	Неправильная	—16	
3	Большое Магелланово Облако	Tucana	85	"	—14,5	
4	Нет названия	Sculptor	230	E ¹⁾	—10,7	Двойная система
5	" "	Fornax	460	E ¹⁾	—12	
6	NGC 6822	Sagittarius	520	Неправильная	—11	
7	NGC 147	Andromeda	660	E	—10,3	Тройная система
8	NGC 185	" "	660	E	—10,6	
9	M 31	" "	750	Sb	—18	
10	M 32	" "	750	E2	—13	Тройная система
11	NGC 205	" "	750	E5 ¹⁾	—11,5	
12	IC 1613	Cetus	750	Неправильная	—11	
13	M 33	Triangulum	780	Sc	—15	Странный вид
14	IC 10	Cassiopeia	900	S?	—10	
15	IC 342	Camelopardalis	—	Sc	—	
16	NGC 6946	Cepheus	—	Sc	—9	Внегалактическое шаровое скопление
17	NGC 2419	Gemini	230	—	—9	
18	Нет названия	Leo	—	—	—	
19	Вольф—Лундмарк	—	—	—	10	

¹⁾ Обозначает существование некоторых особенностей.

Т а б л и ц а 26

НЕКОТОРЫЕ СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК
(по данным Кудерка)

	Название	Видимая фотографическая величина, соответствующая максимуму частоты в данном скоплении	Число галактик в скоплении и его угловой диаметр	Скорость "разбегания" в км/сек	Расстояние в 10 ⁶ световых лет	Поправка за эффект энергии Δt_{rg}	Поправка за увеличение расстояния Δt_u	Примечание
1	Virgo	12 ^m ,5	500 (12°)	1 240	7,3	} Меньше ошибок наблюдений	}	Неправильное
2	Pegasus	15,5	100 (2°)	3 720	22			"
3	Pisces	15,4	20 (30')	4 760	28			Правильное
4	Cancer	16,0	150 (1°,5)	4 800	30			"
5	Perseus	16,4	500 (2°)	5 250	31			"
6	Coma	17,0	1100 (4°)	6 600	40			Шаровое
7	Ursa Major № 1	18,0	300 (40')	15 500	90	—0,15	—0,04	Неправильное
8	Leo	19,0	400 (35')	19 600	115	—0,25	—0,07	—
9	Corona Borealis	19,0	—	22 000	130	—0,26	—	—
10	Gemini	19,5	—	23 300	135	—0,31	—0,09	—
11	Bootes	21	—	39 000	230	—0,55	—0,14	—
12	Ursa Major № 2	21	—	42 000	250	—0,59	—0,15	—

следовательно, предположение о случайном пространственном распределении галактик соответствует действительности в доступной нашим наблюдениям области вселенной.

Попытаемся теперь несколько подробнее рассмотреть те поправки, о которых речь была выше.

Пусть m_2 — непосредственно наблюдаемая видимая звездная величина галактики; m_1 — звездная величина, освобожденная от влияния поглощения в нашей Галактике. Пусть межзвездная материя в нашей Галактике распределена таким образом, что поверхностями одинаковой плотности является семейство плоскостей, параллельных галактической (см. п. 37). В таком случае

$$\Delta_1 m = m_2 - m_1 = A_{90} \operatorname{cosec} b = A_b.$$

Здесь A_{90} — поглощение в направлении, перпендикулярном к галактической плоскости, а b — галактическая широта наблюдаемого объекта.

Займемся теперь вычислением второй поправки $\Delta_2 m$ за эффект „покраснения“ галактик, которая (как мы скоро убедимся) зависит только от расстояния галактики от наблюдателя, т. е. от r . Следовательно, величина m , исправленная за эффект покраснения и за влияние галактического поглощения, должна зависеть только от значения m_1

$$\Delta_2 m = m_1 - m = f(r) = F(m_1),$$

так как m_1 должно быть монотонной функцией r .

Хаббл установил, что функция $F(m_1)$ очень медленно меняется в зависимости от m_1 , поэтому, раскладывая ее в ряд, т. е.

$$F(m_1) = F(m_2) + a(m_2 - m_1) = F(m_2) + aA_{90} \operatorname{cosec} b,$$

можно отбросить члены с высшими степенями $(m_2 - m_1)$.

Предполагая, что $m_2 = \text{const}$, получим

$$m = \text{const} - (1 - a) A_{90} \operatorname{cosec} b,$$

таким образом, выражение (138.1) можно переписать в виде

$$\log N(m) = \text{const} - 0,6(1 - a) A_{90} \operatorname{cosec} b. \quad (138.2)$$

Как известно (см. п. 40), результаты подсчетов числа туманностей привели Хаббла к следующей эмпирической формуле:

$$\log N(m) = 2,115 - 0,15 \operatorname{cosec} b,$$

следовательно,

$$0,6(1 - a) A_{90} = 0^m,15;$$

приняв, согласно независимым исследованиям эффекта „покраснения“, $a = 0,09$, получим

$$A_{90} = 0^m,27.$$

Более поздние повторные определения этой величины привели к значению

$$A_{90} = 0^m,34.$$

Отбрасывая сделанное вначале предположение относительно распределения межзвездной материи в Галактике и подставляя вместо $A_{90} \operatorname{cosec} b$ величину A_b , зависящую от галактической широты b и долготы l , получим вместо формулы (138.2) следующее выражение:

$$A_{l, b} = \frac{A - \log N(m_2)}{B}.$$

Для $m_2 = 19^m,5$ Оорт получил значения постоянных $A = 2,17$, $B = 0,55$ (на 1°). Эта формула (как уже упоминалось в п. 40) дает возможность определять величину межзвездного поглоще-

ния в произвольном направлении между Солнцем и границей межзвездной материи, если число наблюдаемых в данном направлении галактик известно.

Следует все же обратить внимание на то, что величина a в разложении функции $F(m_1)$ в ряд, в сущности говоря, зависит от галактической широты b через m_2 , зависящую в свою очередь от b . Однако эта зависимость настолько слаба, что предположение $a = \text{const}$ для всех значений b , введенное Хабблом и Оортом, практически не меняет полученных результатов.

139. О движении звезд и межзвездной материи внутри галактик. Исследование движения различных объектов внутри галактик до сих пор было ограничено определением лучевых скоростей некоторых областей галактик или же отдельных объектов внутри последних. Все попытки измерения собственных движений отдельных объектов даже в ближайших галактиках не увенчались успехом, так как эти движения значительно меньше ошибок наблюдений.

Исследование лучевых скоростей галактик особенно интересно в тех случаях, когда экваториальная плоскость данной галактики образует сравнительно большой угол с плоскостью, перпендикулярной к лучу зрения. Экваториальная плоскость каждой галактики, в том числе и нашей, несомненно, является привилегированной плоскостью, поэтому изучение движений различных объектов в этой именно плоскости дает нам наиболее полное представление о кинематике данной системы.

Наблюдения галактик приводят к выводу о вращении последних в том смысле, в каком это относилось к нашей Галактике (см. гл. III).

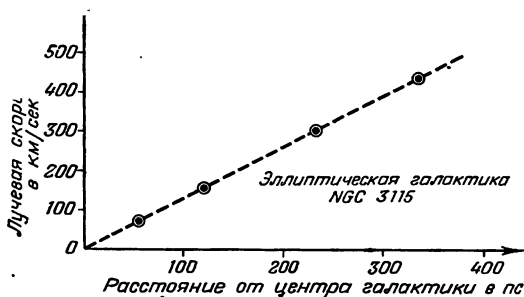


Рис. 79.

Наблюдая доплеровские смещения линий в спектрах отдельных мест какой-нибудь галактики и вычитая затем из них среднее смещение, характеризующее движение всей галактики, получим результаты, похожие на те, которые представлены на рис. 79. На этом рисунке по горизонтальной оси отложены расстояния от центра

Галактики в pc , а по вертикальной — наблюдаемые скорости в $км/сек$. Результаты, приведенные на рис. 79, показывают, что в случае эллиптических галактик получается практически линейная зависимость скорости от расстояния, свидетельствующая в пользу того, что эти

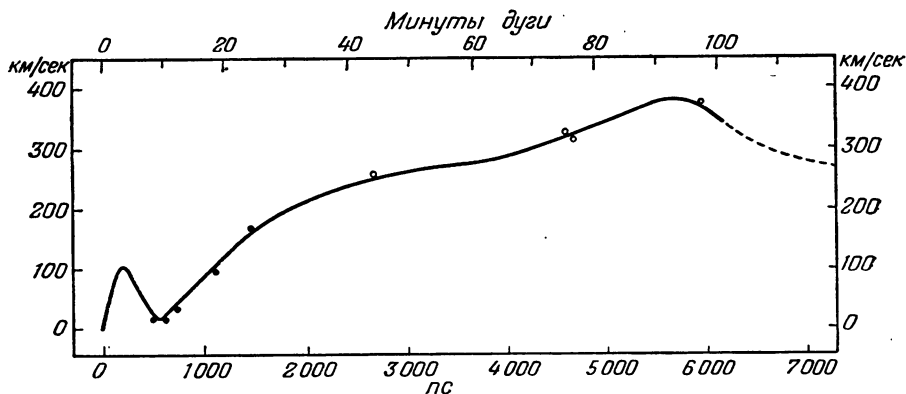


Рис. 80.

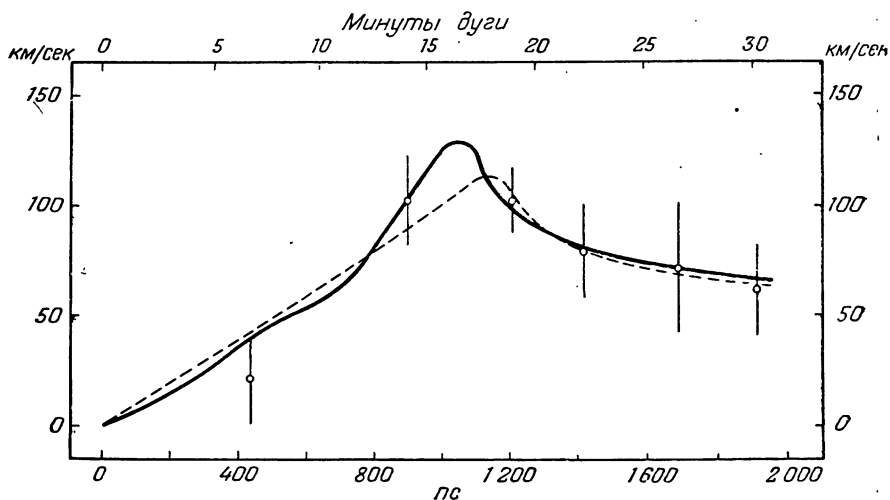


Рис. 81.

галактики вращаются, как твердое тело. Отсюда можно сделать дальнейший вывод, что плотность материи в этих галактиках постоянна.

Совсем другая картина получается в случае спиральных галактик (рис. 80 и 81). В этих галактиках, как известно, объекты различных подсистем вращаются с неодинаковыми угловыми скоростями, поэтому на рис. 81, аналогичном рис. 79, мы видим результат наложения

нескольких графиков, соответствующих отдельным подсистемам. В каждой точке преобладающей скоростью является скорость самой многочисленной в данном месте галактики подсистемы; вблизи ядра это будут сферические подсистемы, а на краях — плоские. Поэтому кривая средних скоростей в спиральных галактиках более сложна, чем в эллиптических. Тем не менее общая картина всюду одинакова, а именно: вблизи ядра наблюдается увеличение скорости (похоже на то, что наблюдается в эллиптических галактиках), а затем на больших расстояниях начинается падение скорости приблизительно по третьему закону Кеплера, согласно которому скорость обратно пропорциональна корню квадратному из расстояния. На основании этих данных можно сделать некоторые выводы относительно масс исследуемых галактик. В случае эллиптических галактик мы имеем дело с довольно простой задачей: твердое вращение возможно только в том случае (как уже упоминалось раньше), если плотность D во всей галактике постоянна. Следовательно, во всех точках галактики имеем

$$G \frac{4\pi DR}{3f} = \frac{v^2}{R},$$

где v — линейная скорость вращения, R — расстояние от центра вращения, G — постоянная тяготения, f — отношение большой полуоси эллипсоида к малой (предполагается, что эллиптические галактики имеют форму эллипсоидов вращения вокруг малой оси). Зная R (в линейной мере), вычисленное на основании известного расстояния и углового радиуса Галактики, легко определить плотность D ; умножая последнюю на объем изучаемой галактики, в конце концов вычислим ее массу. На основании многочисленных исследований эллиптических галактик установлено, что средняя масса галактик этого типа составляет 10^{10} масс Солнца ¹⁾.

При определении масс спиральных галактик вводится предположение, что практически вся масса галактики $\mathfrak{M}$ сосредоточена в ее ядре. В таком случае движение звезд на краях галактики должно определяться следующим равенством:

$$G \frac{\mathfrak{M}}{R^2} = \frac{v^2}{R}.$$

Здесь используются те же обозначения, что и выше. Из этого уравнения легко определить величину $\mathfrak{M}$.

В обоих случаях при определении массы предполагается, что звезды движутся по круговым орбитам. Указанное предположение основано на том, что движение различных объектов в нашей Галактике довольно близко к круговому и, кроме того, *средняя* скорость многих звезд, движущихся по разным орбитам, в данной области

¹⁾ Вопрос является более сложным. См. Паренного П. П., Курс звездной астрономии, М., изд. 3, 1954, стр. 331. — *Прим. ред.*

Галактики должна быть близка к круговой. Все же первое предположение о том, что вся масса галактики сосредоточена в ее ядре, может показаться произвольным. Поэтому чаще массу спиральной галактики определяют другим способом: зная яркость в разных местах галактики и учитывая при этом эффект суммирования яркости в проекции на небесную сферу, можно определить относительное распределение масс на основании зависимости масса — светимость. Затем, имея в своем распоряжении „модель“ данной галактики, мы контролируем правильность этой модели с помощью наблюдаемых лучевых

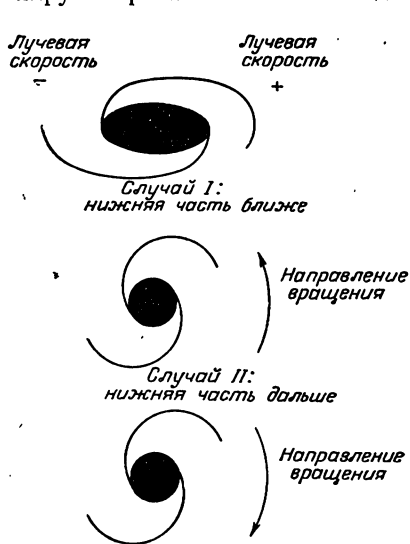


Рис. 82.

В во втором случае, когда мы имеем дело со скоплением галактик, вводится предположение, что каждая галактика движется по кругу, центр которого совпадает с центром масс скопления. В этом случае галактика, находящаяся на краю скопления, движется со скоростью, определяемой равенством центробежной силы и силы притяжения всего скопления. Таким образом можно определить массу всего скопления; разделив ее на число членов скопления, получим среднюю массу одной галактики. Такого рода исследования приводят к массам галактик порядка 10^{11} масс Солнца в полном согласии с результатами других определений.

Вопрос направления вращения спиральных галактик до сих пор следует считать невыясненным. Неизвестно, вращаются ли галактики так, что их спиральные ветви при вращении „закручиваются“ или, наоборот, „раскручиваются“ (рис. 82). Какую из двух возможностей,

скоростей звезд на различных расстояниях от центра галактики. После этого вычисляем абсолютную массу галактики, предполагая при этом, что наблюдаемые скорости относятся к круговому движению в данной спиральной галактике. В результате получаются массы порядка 10^{11} масс Солнца¹⁾.

Существуют еще другие методы определения масс галактик; например, в тех случаях, когда галактики образуют двойные системы или входят в состав скопления галактик. В первом случае методы аналогичны методам определения масс двойных звезд, так как предполагается, что расстояние между галактиками настолько велико, что каждую из них можно рассматривать как материальную точку.

¹⁾ W y s e and M a y a l l, *ApJ*, 95, 24 (1942).

изображенных внизу и в середине рис. 82, следует считать правильной? Это положение является результатом того, что, действительно, измеряя лучевые скорости какой-либо галактики, видимой „с ребра“ (см. случай I на рис. 82), мы не в состоянии определить, которая из двух ветвей находится ближе к нам, а которая — дальше. Поэтому точные измерения лучевых скоростей всегда можно объяснить по-разному: один раз предполагая, что, например, нижняя ветвь находится ближе к нам, чем верхняя, а другой раз, наоборот, нижняя — дальше, а верхняя — ближе.

140. О так называемом „разбегании“ галактик. Еще в 1912 г. Слейфер, исследуя спектры ближайших галактик, обнаружил, что они, как правило, смещены в сторону длинных волн, причем это смещение, определяемое отношением $\Delta\lambda/\lambda$ (где $\Delta\lambda$ смещение линии с длиной волны λ), пропорционально расстоянию галактики от наблюдателя.

Так как для данного спектра отношение $\Delta\lambda/\lambda$ постоянно во всей доступной нам области спектра, то, следовательно, мы имеем здесь дело с эффектом Доплера. Естественно, возникает мысль, что во всей доступной нам части вселенной происходит „разбегание“ галактик, точнее говоря, расширение системы галактик со скоростями, прямо пропорциональными расстоянию галактик от наблюдателя.

Следует сразу же обратить внимание читателя на то, что предположение о пропорциональности вектора скорости движения данной галактики относительно нашей Галактики $\mathbf{v}$ радиусу-вектору $\mathbf{r}$ (также относительно нашей Галактики), т. е. $\mathbf{v} = a\mathbf{r}$ вовсе не ведет к исключительному положению Солнца во вселенной.

Нетрудно убедиться, что аналогичную зависимость можно получить также в том случае, если систему отсчета перенести в произвольную точку пространства, радиус-вектор которой в старой системе координат равен $\mathbf{r}_0$. Обозначая большими буквами соответствующие значения радиуса-вектора и вектора скорости в новой системе координат, получим следующее выражение:

$$\mathbf{V} = a\mathbf{r} - a\mathbf{r}_0 = a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = a\mathbf{R},$$

так как $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ — радиус-вектор той же галактики в новой системе отсчета. Итак, наблюдая движение галактик в произвольной системе отсчета (т. е. находясь в произвольной галактике), нетрудно убедиться, что это движение будет происходить по такому же закону, как в том случае, когда наблюдатель находится в нашей Галактике. Мы не получили бы такого результата, если бы скорость „разбегания“ галактик была бы пропорциональна не r , а величине r^n . В таком случае скорость галактики $\mathbf{V}$, наблюдаемая в другой системе координат, выражалась бы следующим образом:

$$\mathbf{V} = ar^{n-1}\mathbf{r} - ar_0^{n-1}\mathbf{r}_0 \neq aR^{n-1}\mathbf{R}.$$

Открытие „красного“ смещения галактик послужило толчком для многих исследований этого явления, как теоретических, так и практических. Так как измерения лучевых скоростей не содержат каких-либо опасных систематических ошибок, а измерения расстояний, наоборот, могут их содержать, то внимание исследователей было, главным образом, обращено на учет всевозможных систематических ошибок определения расстояний галактик, в особенности далеких, расстояние до которых определяется с помощью довольно примитивных методов. Хаббл¹⁾ в последних работах ограничился исследованием эллиптических галактик, характеристики которых следует по многим причинам считать более однородным наблюдательным материалом, чем характеристики галактик других типов. Во-первых, структура и внешний вид эллиптических галактик почти одинаковы; во-вторых, дисперсия абсолютных величин этих объектов мала по сравнению с дисперсией абсолютных величин галактик других типов. Кроме того, большим плюсом является здесь то, что на снимках изображения эллиптических галактик практически тождественны изображениям звезд, особенно изображения далеких галактик, которые в данной проблеме представляют особый интерес. Это обстоятельство позволяет довольно точно определять звездные величины эллиптических галактик и предохраняет от появления систематических ошибок.

Хаббл и его сотрудники исследовали расстояния скоплений галактик; для этого они определили звездные величины членов этих скоплений, а затем вычислили их расстояния, предполагая, что во всех скоплениях для десятой, в порядке убывания звездной величины, галактики можно принять $M = \text{const}$. Такое предположение является, конечно, своего рода компромиссом, ведущим одновременно к уменьшению систематических и случайных ошибок. Известно, что существует некоторая дисперсия абсолютных величин эллиптических галактик, поэтому самым правильным было бы определение расстояния скопления по *средней величине всех* членов скопления. Однако, члены скопления не образуют в пространстве настолько компактной группы, чтобы можно было безошибочно отличить их от членов другого, соседнего скопления галактик. Следовательно, мы не знаем всех членов скопления, особенно членов с большой абсолютной величиной, а это будет, естественно, служить источником серьезных систематических ошибок. Поэтому мы выбираем десятую галактику; это, с одной стороны, уменьшает случайные ошибки, вызванные предположением $M = \text{const}$, а с другой — уменьшает также систематические ошибки, особенно опасные при таких исследованиях.

Итак, предполагая, что $M = \text{const}$ для десятых, в порядке убывания звездной величины, галактик во всех скоплениях, получим следующее соотношение между расстоянием r и видимой величиной m :

$$m = 5 \log r + \text{const.}$$

¹⁾ MN, 113, 658 (1953).

С другой стороны, если доплеровское смещение пропорционально скорости, то

$$\log v = 0,2 m + \text{const.} \quad (140.1)$$

Такое именно выражение получил Хаббл, вводя поправки в непосредственно наблюдаемые звездные величины галактик m_2 , прежде всего, поправку за межзвездное поглощение в нашей Галактике, а кроме того, еще две другие, к рассмотрению которых мы сейчас переходим.

Одну из этих поправок Хаббл назвал поправкой за „эффект энергии“; она дает нам звездные величины галактик, освобожденные от галактического поглощения, с учетом эффекта покраснения в том случае, если галактики считаются неподвижными, т. е. поправку, являющуюся следствием смещения спектра на величину $\Delta\lambda/\lambda$. В этом случае энергия каждого светового кванта уменьшается на величину ΔE , определяемую формулой

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta h\nu}{h\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

т. е. на одинаковую относительную величину. Это ведет к уменьшению болометрической величины галактики на

$$\Delta m_{bol} = m_1 - m = 2,5 \log \left(\frac{E - \Delta E}{E} \right) = 2,5 \log \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right).$$

Раскладывая в ряд и пренебрегая высшими степенями отношения $\Delta\lambda/\lambda$, получим

$$\Delta m_{bol} = 2,5 \text{ Mod } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Для того, чтобы вычислить поправку в данной фотометрической системе, необходимо знать распределение энергии в спектрах эллиптических галактик и кривую чувствительности того инструмента, с помощью которого проводились наблюдения. Из расчетов Хаббла¹⁾ следует, что в фотографической системе рассматриваемая поправка близка к следующему выражению:

$$\Delta m_{pg} \approx 3 \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 3 \frac{v}{c}.$$

Если же „разбегание“ галактик является реальным физическим явлением, то, кроме этой поправки, следовало бы ввести еще одну, учитывающую эффект „разбавления“ световой энергии, вызванный непрерывным увеличением расстояния галактики от наблюдателя. Отношение интенсивности наблюдаемого излучения I_0 неподвижной галактики к интенсивности наблюдаемого излучения I галактики, „убе-

¹⁾ Подробности этих расчетов опубликованы в работе Hubble E. and Tolmann R. C., *ApJ*, 82, 302 (1935) и в работе de Sitter W., *BAN*, 7, 205 (1934).

гающей" со скоростью v , должно быть обратно пропорционально соответствующим скоростям, т. е.

$$\frac{I_0}{I} = \frac{c+v}{c},$$

где c — скорость света. Следовательно, вторая поправка Δm_u не зависит от длины волны, а именно:

$$\Delta m_u = -2,5 \log \frac{I}{I_0} = -2,5 \log \left(1 + \frac{v}{c} \right) \approx \frac{v}{c} \approx \frac{\Delta \lambda}{\lambda};$$

численные величины обеих поправок даны в табл. 26.

Хаббл в своей работе установил, что, введя в звездные величины галактик обе поправки, мы не получим той пропорциональности между величинами $\log v$ и m , существование которой вытекает из формулы (140.1). Если же ограничиться только первой поправкой Δm_{pg} , то получается зависимость, практически тождественная с выражением (140.1). Итак, для того чтобы сохранить пропорциональность между скоростью „разбегания“ галактик и их расстоянием (эта пропорциональность очень важна по причинам, изложенным на стр. 389), необходимо выбрать статическую модель вселенной. К такому выводу пришел Хаббл.

Следует упомянуть еще о том, что такие же взгляды высказывал Финли-Фрейндлих, исходя из совершенно других предположений, касающихся воздействия межгалактического поля лучеиспускания на кванты излучения данной галактики¹⁾.

В заключение необходимо предостеречь читателей от чрезмерного доверия тем результатам, к которым приходят авторы работ в рассматриваемой области. Эти работы следует еще считать пионерскими, так как они не дают исчерпывающего решения вопроса, а их выводы могут не раз измениться. Мы упомянули эти работы только для того, чтобы познакомить читателя с методами, применяемыми в современной космологии, причем только с теми методами, которые основаны на наблюдательном материале, не затрагивая обширной области спекулятивной космологии, имеющей большое идейное и дидактическое значение. Мы умолчали о ней, между прочим, потому, что восприятие этой области космологии требует от читателя серьезного знакомства с теорией относительности. Теория эта еще не настолько распространена, чтобы можно было считать, что все читатели ее знают. Читателей, интересующихся этой областью космологии, мы отсылаем к специальной литературе²⁾.

¹⁾ См. Contr. St. Andrews Univer. Observatory, № 5 (1954).

²⁾ Например, Couderc, L'expansion de l'universe, 1952, Heckmann O., Theorien der Kosmologie, 1942, Davidson M., Elements of Mathematical Astronomy with a Brief Exposition of Relativity, 1949.

141. Межгалактическое пространство. При практическом решении большинства проблем предполагается, что межгалактическое пространство пусто. Наши данные относительно существования материи в межгалактическом пространстве очень скупы. Хорошая видимость весьма удаленных галактик свидетельствует в пользу того, что даже если эта материя существует, то она должна поглощать очень небольшую долю излучения.

Среди работ, касающихся существования межгалактической материи, следует упомянуть исследования М. С. Эйгенсона¹⁾, согласно которым, присутствие межгалактического поглощения можно обнаружить только у самых удаленных галактик, и работу И. С. Шкловского²⁾, из которой следует, что часть наблюдаемого радиоизлучения должна возникать в межгалактическом пространстве, т. е. должна излучаться находящейся в нем материей. Обе работы носят пионерский характер, а их выводы еще нельзя считать вполне надежными, поэтому мы ограничиваемся здесь лишь кратким упоминанием этих работ.

Предположение о существовании межгалактической материи следует считать вполне обоснованным с теоретической точки зрения. Расстояния между галактиками сравнительно малы, примерно на порядок больше среднего диаметра спиральной галактики. Если предположить, что пекулярные скорости галактик порядка 100 км/сек, то легко убедиться, что вероятность столкновения галактик довольно велика. При столкновении звезды каждой из двух столкнувшихся галактик свободно проходят сквозь другую галактику и продолжают двигаться по своему пути. При этом вращение звезд в галактике испытывает некоторое возмущение, вызванное столкновением, однако эти возмущения будут очень незначительны из-за очень низкой плотности звезд в галактиках (см. п. 82). Поэтому здесь не может быть речи ни о столкновении отдельных звезд, ни даже о каком-либо осреднении скоростей звезд, принадлежащих к двум галактикам. Иначе обстоит дело с межзвездной материей. Во время столкновения отдельные облака этой материи, занимающие большие области пространства, сталкиваются в буквальном смысле этого слова, а их скорости при этом осредняются. В результате этих столкновений межзвездная материя приобретает скорость, равную средней скорости сталкивающихся галактик; следовательно, она „отстанет“ от той галактики, к которой первоначально принадлежала, и будет двигаться в межгалактическом пространстве по собственному пути. Радиоастрономические наблюдения показывают, что в сталкивающихся галактиках имеют место большие возмущения межзвездной материи. Во всех случаях, когда мы непосредственно наблюдаем сталкивающиеся галактики, установлено усиленное радиоизлучение этих объектов, как-

¹⁾ АЖ, 26, 278 (1949).

²⁾ АЖ, 31, 533 (1954).

например, в случае галактик в Центавре (см. фото V). Хотя механизм эмиссии радиоволн в галактике еще неизвестен, все же существование сильного радиоизлучения таких объектов по сравнению с другими галактиками следует считать результатом столкновения двух галактик.

Кроме межзвездной материи, в межгалактическом пространстве находится еще сравнительно много звезд, выброшенных из отдельных галактик в результате действия иррегулярных сил (см. п. 83), много шаровых скоплений, оторванных от галактик вследствие возмущающего действия соседних галактик, и, может быть, еще другие объекты, бывшие первоначально членами различных галактик.

Б. А. Воронцов-Вельяминов¹⁾ предполагает даже, что часть звезд, находящихся в межгалактическом пространстве, образовалась не в галактиках, а непосредственно в межгалактической материи.

Все же до сих пор у нас нет никаких надежных данных — ни статистических, ни касающихся отдельных объектов, — которые подтвердили бы высказанные выше предположения; все наши сведения основаны исключительно на теоретических рассуждениях.

§ 25. Проблема бесконечности вселенной

142. Исторические замечания. При исследовании все более и более удаленных от нас областей вселенной, естественно, возникает вопрос о бесконечности вселенной. В давние времена, когда могли наблюдать лишь ближайшие небесные тела, наука не занималась этим вопросом, которым занималась исключительно религия. В древней Греции, где даже богам отказывали в вечном существовании, понятие бесконечности было неприемлемо, поэтому древнегреческие астрономы считали вселенную конечной. Наоборот, в древней Индии, находящейся под сильным влиянием браминской теологии, а потом — буддийской схоластики, господствовало убеждение о бесконечности вселенной. Христианская религия в Европе, развивающаяся под сильным влиянием греческой философии, считала вселенную конечной. Римская церковь, противопоставляя бесконечного Творца его ограниченному творению, рассматривала конечность вселенной как символ веры.

Переломом в общепринятых в средневековые понятия о вселенной были взгляды Джордано Бруно (XVI в.), который утверждал, что звезды являются такими же небесными телами, как Солнце, и что ни Земля, ни Солнце не являются центрами вселенной. Не признавая существования центра вселенной, Бруно отбросил также мысль о границах вселенной и считал последнюю бесконечной. Как известно, за распространение таких взглядов и за приверженность учению Коперника святая инквизиция сожгла Бруно на костре. Несмотря на

¹⁾ АЖ, 31, 161 (1954).

это, а может быть даже именно поэтому, взгляды Джордано Бруно начали широко распространяться среди прогрессивных ученых, и уже в XVIII в. вся передовая часть общества была убеждена, что вселенная бесконечна, считая это непосредственным следствием низвержения кристалльных сфер, существовавших в древней космологии.

Следует помнить, однако, что в то время взгляды на бесконечность вселенной были, конечно, весьма примитивны. Предполагалось, что вселенная заполнена звездами равномерно в статистическом смысле этого слова.

В начале XIX в. Ольберс показал, что это предположение приводит к выводу о свечении всего неба, причем поверхностная яркость неба должна равняться поверхностной яркости „средней“ звезды, например Солнца.

Пусть r будет расстоянием звезды, а D — звездной плотностью (число звезд в единице объема). В пространстве между поверхностями двух шаров с радиусами r и $r + dr$ находится

$$\frac{4}{3} \pi D [(r + dr)^3 - r^3] = 4\pi D r^2 dr$$

звезд. Следовательно, занимаемая ими поверхность на небе равна

$$4\pi D R^2 dr,$$

где R — средний радиус звезды. Интегрируя это выражение от нуля до бесконечности, получим бесконечно большую поверхность, проекция которой на небесную сферу покроеет небо бесконечное число раз. Следовательно, луч зрения в произвольном направлении наверняка встретится с какой-либо звездой. Так как поверхностная яркость тел не зависит от их расстояния, то все небо должно светиться ослепительным блеском, равным поверхностной яркости, например, Солнца. Это рассуждение получило название „парадокса Ольберса“; оно показало, что принятие бесконечности вселенной требует также введения некоторых предположений относительно ее структуры. Для устранения парадокса Ольберса достаточно допустить, что пространство всюду заполнено довольно сильно поглощающей материей¹⁾.

В конце XIX в. Зеелигер путем аналогичных рассуждений пришел к выводу, что при тех же предположениях сила притяжения звезды всеми остальными звездами, находящимися в произвольном телесном углу пространства, должна быть бесконечно большой. Следовательно, равнодействующая сил, действующих на данную звезду со стороны различных областей неба, должна быть величиной неопределенной. В этом и состоит гравитационный парадокс Зеелигера.

¹⁾ В связи с этим возникает проблема нагромождения лучевой энергии в среде поглощающей материи и, следовательно, возникает вопрос, на котором мы не будем останавливаться: может ли вселенная, обладающая такими свойствами, находиться в состоянии равновесия?

Избавиться от гравитационного парадокса значительно труднее, чем от фотометрического. Вскоре после опубликования гравитационного парадокса многие ученые стали считать его доказательством конечности вселенной или, по крайней мере, того, что плотность материи на некотором расстоянии от „центра вселенной“ достигнет нуля.

Следует обратить внимание на то, что оба парадокса имеют место при произвольной конечной средней плотности звезд в пространстве. То обстоятельство, что звезды группируются в пространстве в виде галактик, также не освобождает нас от обоих парадоксов, так как аналогичное рассуждение окажется правильным также и по отношению к отдельным галактикам или скоплениям галактик.

143. Современные космологические теории. В настоящее время много научных работ посвящается вопросам общего строения вселенной, причем эти вопросы перешли в область, граничащую со звездной астрономией и теоретической физикой; эту область мы и называем космологией в современном значении этого слова. Одной из главных проблем этой науки является правильное выяснение вопроса бесконечности вселенной.

Началом современной космологии как точной науки следует считать опубликование Эйнштейном в 1916 г. общей теории относительности, которая в первый раз в истории науки, выясняя сам механизм гравитации, установила, что каждая масса создает вокруг себя гравитационное поле, которое можно описать геометрически. Существование гравитационного поля вызывает искривление пространства, причем радиус кривизны уменьшается по мере увеличения плотности материи. Если в каждой точке пространства радиус кривизны отличен от бесконечности, то пространство становится замкнутым. Средний радиус кривизны пространства тем меньше, чем больше средняя плотность материи, и в первом приближении пропорционален линейным размерам вселенной. Непосредственным выводом общей теории относительности является то, что вселенная может быть бесконечной только в том случае, если средняя плотность материи в ней равна нулю.

Очень интересными являются рассуждения Шарлье, изложенные им еще в 1908 г.¹⁾, т. е. перед появлением общей теории относительности; позднее автор придал им более точную математическую форму²⁾.

Шарлье предлагает такую схему вселенной, в которой средняя плотность материи равна нулю, однако эта плотность не убывает систематически ни в одном направлении и, следовательно, возможным является существование материи в виде звезд и галактик.

¹⁾ Lund Medd., № 38 (1908).

²⁾ Lund Medd., № 98, 34 (1922).

Согласно этой схеме, вселенная обладает так называемой иерархической структурой: звезды группируются в галактики, галактики — в скопления галактик, скопления галактик — в скопления скоплений галактик и т. д. до бесконечности.

Пусть:

N_1 звезд составляет галактику G_1 с массой $\mathcal{M}_1$,

N_2 галактик типа G_1 составляют скопление галактик G_2 с массой $\mathcal{M}_2$,

N_3 скоплений галактик типа G_2 составляют скопление типа G_3 с массой $\mathcal{M}_3$,

.....
 N_i скоплений галактик типа G_{i-1} составляют скопление типа G_i с массой $\mathcal{M}_i$.

Всюду имеет место очевидная зависимость

$$\mathcal{M}_i = N_i \mathcal{M}_{i-1}.$$

Следует принять, что объем скопления G_i должен быть больше суммы объемов скоплений G_{i-1} , из которых оно состоит, следовательно, средняя плотность материи в объеме G_i меньше средней плотности в объеме G_{i-1} .

Предположим также, что расстояния между скоплениями G_i , принадлежащими к скоплению G_{i+1} , не уменьшаются по сравнению с размерами G_i при $i \rightarrow \infty$, в таком случае придем к выводу, что при $i \rightarrow \infty$ средняя плотность стремится к нулю. Выдвинутая Шарлье модель бесконечной вселенной обладает, таким образом, плотностью, равной нулю, и все же в ней нет никакой привилегированной точки или области.

Необходимо обратить внимание также на то, что иерархическая модель вселенной, увязывая общую теорию относительности с бесконечностью вселенной, устраняет гравитационный парадокс. Как известно, самое сильное гравитационное поле имеет место на поверхности однородных тел. Чтобы оценить величину самой большой силы притяжения, предположим, что рассматриваемая звезда находится на краю галактики G_1 , которая, в свою очередь, находится на краю скопления галактик G_2 , последняя же находится на краю скопления скоплений галактик G_3 и т. д. Общая сила притяжения (если ограничиться законом Ньютона), действующая на единицу массы, будет равна

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_i}{R_i^2}.$$

Здесь R_i — радиус i -го скопления. Если ряд, находящийся в правой части, сходится, то сила равна некоторой конечной величине. Сходимость же ряда можно постулировать, подбирая соответствующие радиусы и массы скоплений; таким образом, парадокс Зеелигера

отсутствует в иерархической структуре вселенной. Если будем рассматривать звезды, находящиеся не на краю, а внутри скопления какого-либо порядка, то легко убедимся, что сила притяжения может только уменьшиться по сравнению с предыдущим случаем.

Аналогичным образом можно убедиться в несостоятельности фотометрического парадокса Ольберса в случае иерархической структуры вселенной.

Идея иерархической структуры вселенной наталкивается на некоторые философские трудности, среди них наиболее существенным является вопрос нулевой средней плотности вселенной; при этом нам приходится считать, что материя во вселенной, как в целом, является чем-то исключительным в пространстве и что принципиально пространство следует считать пустым.

В принципе могут иметь место две возможности: или пространство является «почти пустым», а вселенная бесконечной, или плотность материи отлична от нуля, а пространство замкнуто в релятивистском смысле этого слова. Которое из этих двух предположений правильно? На этот вопрос смогут дать ответ лишь будущие исследования пространственного распределения галактик, в настоящее время эти исследования еще только начинаются. До тех пор, пока мы не будем располагать соответствующими наблюдательными данными, космология будет предлагать нам только некоторые возможные решения, однако не сможет указать правильного решения.

144. „Разбегание“ галактик и „расширение“ вселенной. Теория относительности не является еще чем-то законченным во всех отношениях, поэтому при применении ее к вопросам космологии возникает много спорных мест, а также много различных вариантов. Одним из таких вариантов является теория де Ситтера и многих его последователей, согласно которой не только размеры вселенной конечны (также в случае нулевой плотности), но пространство все время должно увеличиваться. Эту теорию расширяющейся вселенной следует считать космологическо-космогонической гипотезой, поэтому, нам кажется, ей не следовало бы посвящать отдельного пункта в этой главе, если бы многие исследователи не считали бы наблюдаемые смещения спектров галактик наблюдательным подтверждением этой гипотезы.

Теория де Ситтера гласит, что все точки пространства взаимно удаляются, причем в каждой произвольной системе отсчета скорости удаления должны удовлетворять выражению

$$V_r = kr, \quad (144.1)$$

где k — постоянный множитель, r — расстояние. Действительно, если смещение спектров галактик (см. п. 141) объяснять доплеровским эффектом, то следует принять существование зависимости, тождественной зависимости (144.1).

Хотя такого рода объяснение не имеет никаких независимых подтверждений, однако соответствие смещения релятивистской формуле

$$\frac{\nu_1}{\nu} = f\left(\frac{v}{c}\right) \neq f(v)$$

во всех длинах световых волн, а, кроме того, также в области радиоволн, как это недавно удалось обнаружить¹⁾, все же является убедительным аргументом в пользу объяснения явления „покраснения“ галактик действительным движением последних в пространстве, а не какими-то таинственными причинами, вызывающими такое же точно явление, что и эффект Доплера.

Все же стоит помнить о том, что разбегание галактик может не быть результатом релятивистского расширения вселенной, а только лишь местным движением, происходящим в некоторой ограниченной части вселенной и вызванным чисто механическими причинами.

¹⁾ Шкловский И. С., *АЖ*, **30**, 495 (1953).

ДОПОЛНЕНИЯ

ДОПОЛНЕНИЕ I

Список важнейших учебников и монографий по звездной астрономии

В настоящее время существуют три учебника по звездной астрономии. Укажем их в хронологическом порядке первых изданий.

Паренаго П. П. *Курс звездной астрономии*, изд. 1, М., 1937; изд. 2, М., 1946; изд., 3, М., 1954, 476 стр. Содержание: Введение; Гл. 1 — Определение расстояний до звезд; Гл. 2 — Движения звезд; Гл. 3 — Движение Солнца в пространстве; Гл. 4 — Закономерности в звездных движениях; Гл. 5 — Строение Млечного Пути; Гл. 6 — Метагалактика; Гл. 7 — Динамика звездных систем.

Книгу следует рекомендовать в качестве введения в звездную астрономию, в особенности, студентам-астрономам. Она может также служить основой при их подготовке к экзамену. Автор использует в ней математический аппарат, известный студентам, окончившим первые три курса. В книге в конце каждой главы указаны задачи, относящиеся к материалу данной главы, и даны их решения. Материал расположен по темам, а не по методам, поэтому иногда встречается повторение, по существу, одних и тех же методов, изложенных с различных точек зрения.

Pahlen E., *Lehrbuch der Stellarstatistik*, Lpz., 1937, 934 стр. Содержание: I часть. Основы математической статистики; Гл. 1 — Одномерные распределения. Закон ошибок; Гл. 2 — Многомерные распределения. Теория корреляции; II часть. Наблюдательный материал и его статистическая обработка; Гл. 3 — Положения и движения звезд; Гл. 4 — Блеск звезд; Гл. 5 — Цвета и спектры звезд; Гл. 6 — Параллаксы звезд; Гл. 7 — Сводка наблюдательного материала, касающегося звездной статистики. Фотографический атлас неба (Астрографический каталог и избранные площадки Каптейна); III часть. Пространственное распределение звезд; Гл. 8 — Пространственное распределение звезд; Гл. 9 — Пространственное распределение звезд, принадлежащих к отдельным спектральным классам; Гл. 10 — Звездные скопления и облака Млечного Пути; Гл. 11 — Туманности; IV Часть. Кинематика и динамика звездной системы; Гл. 12 — Движение Солнца относительно звезд. Звездные потоки; Гл. 13 — Новейшие исследования движений звезд; Гл. 14 — Динамика звездной системы.

Хотя книга названа автором „Lehrbuch“ (учебник), она, по существу, является энциклопедией звездной астрономии. Материал распределен в ней по методам (не по темам), это обстоятельство облегчает глубокую теоретическую трактовку вопросов с подчеркиванием математических и физических предпосылок. Автор использует довольно сложный математический аппарат, в частности, аппарат теории вероятностей и теории корреляции, причем в обширном введении дается изложение математических основ этих теорий. Благодаря этому читателю нет необходимости обращаться к другим учебникам. Книга содержит большой материал, в частности, много теоретических выводов, до сих пор не имеющих практического применения. Книгу эту не следует рекомендовать в качестве введения в звездную астрономию, но она является почти незаменимой для всех работающих в этой области, а также для студентов, специализирующихся по звездной астрономии.

Becker W., *Sterne und Sternsystemen*, изд. 1, Дрезден, 1942; изд. 2, Дрезден, 1950, 418 стр. Содержание: А. Система Млечного Пути; I — Свойства и характеристики звезд; II — Звезды с переменными характеристиками; III — Двойные звезды; IV — Звездные скопления; V — Материя в межзвездном пространстве; VI — Движения и расстояния звезд; VII — Пространственная структура системы Млечного Пути; VIII — Кинематика и динамика Млечного Пути. Б. Внегалактические туманности; IX — Внегалактические туманности как звездные системы; X — Разные типы внегалактических туманностей и их интегральные свойства; XI — Методы определения расстояний до внегалактических туманностей; XII — Лучевые скорости внегалактических туманностей и зависимость их от расстояния; XIII — Видимое и пространственное распределение внегалактических туманностей.

Книга является чем-то промежуточным между серьезным учебником и научно-популярной литературой. Ее следует рекомендовать всем тем, кто, не вникая глубоко в звездную астрономию, имеет желание, тем не менее, познакомиться с этой областью астрономии, в частности, специалистам других смежных областей. Автор в большинстве случаев пользуется лишь описательным методом, изредка приводя простые математические формулы. Книгу эту следует рекомендовать в качестве дополнительного пособия при систематической подготовке в области звездной астрономии, тем более, что в ней мы встречаемся с довольно интересной трактовкой темы.

Замечание. Двухтомное издание André Ch. *Traité d'astronomie stellaire*, Paris, 1889—1900, не является учебником по звездной астрономии в современном значении этого слова. Оно содержит лишь некоторые сведения о звездах, главным образом проблемы двойных звезд. Кроме того, имеются некоторые сведения из звездной астрономии (в современном смысле этого слова), в большинстве случаев значительно устаревшие.

Кроме упомянутых выше общих учебников, существуют также книги, относящиеся к отдельным областям звездной астрономии. Ниже мы укажем самые важные из них.

Распределение и движение звезд

Trumpler R. and Weaver, H. *Statistical Astronomy*, Berkeley and Los Angeles, 1953, 635 стр. I гл. содержит элементы теории статистики; II — статистическое описание галактической системы, общий анализ; III — движение звезд в окрестностях Солнца; IV — распределение звездных величин и спектральных типов звезд; V — пространственное распределение звезд; VI — рассматривает вопросы вращения Галактики. Кроме того, приводятся многочисленные таблицы и другие числовые данные, необходимые при статистических вычислениях. Главное внимание в книге уделяется вопросам методики исследований, гораздо меньше внимания обращается на актуальные проблемы современной звездной астрономии. Авторы совсем не упоминают о результатах некоторых, очень важных с точки зрения общих интересов звездной астрономии, последних исследований, относящихся, в частности, к межзвездной материи. Почти все последние исследования советских астрономов пропущены.

Vok B., *The Distribution of the Stars in Space*, Chicago, 1937, 124 стр. Автор занимается, главным образом, рассмотрением вопросов пространственного распределения звезд, уделяя при этом много места описанию методов исследования этой области звездной астрономии. Книга содержит три большие главы: I — Методы анализа; II — Наблюдательные данные; III — Проблемы строения Галактики.

Книга написана живо, много внимания уделяется практическому решению конкретных задач. Изложение материала очень сжатое. Книга несколько устарела с точки зрения современного состояния науки.

Динамика звездных систем

Pahlen E., *Einführung in die Dynamik von Sternsystemen*, Базель, 1947, 240 стр. Книга представляет собой современную переработку 14-й главы монографии „*Lehrbuch der Stellarstatistik*“, о которой речь была выше. Содержит доступное и ясное введение в проблемы динамики звездных систем и обзор последних. Отдельные проблемы рассмотрены довольно поверхностно.

Chandrasekhar S., *Principles of Stellar Dynamics*, изд. 2. Чикаго, 1942, переведена на русский язык под названием „Принципы звездной динамики“, М., 1948, 252 стр. Книга затрагивает много проблем, не включенных в другие учебники. Оригинальным работам

автора посвящено очень много места; работы других исследователей изложены в сокращенном виде.

Огородников К. Ф., *Основы динамики вращающихся звездных систем*, Усп. астрон. наук, IV (1948). Статья посвящена рассмотрению исключительно вращающихся стационарных систем, обладающих симметрией относительно оси вращения.

Автор приводит много глубоких теоретических рассуждений, в том числе сравнение со статистической механикой.

Lindblad B. und Langebartel R. G., *On the Dynamics of Stellar Systems*, *Stockholms Observatoriums Annaler*, 17, № 6 (1953). Систематическое изложение динамической теории Линдблада.

Космология

Bondi H., *Cosmology*, Кембридж, 1952, 176 стр. Книга содержит обзор наблюдательных данных и теоретических выводов, относящихся к строению вселенной.

Hubble E., *The Observational Approach to Cosmology*, Oxford, 1937, 66 стр. Эта полупопулярная работа содержит критический обзор наблюдательных данных, на которые опирается современная космология, и некоторые непосредственные выводы из этих данных.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Проблема n тел

Рассмотрим движение n точек в их общем гравитационном поле. Обозначим прямоугольные координаты точки с номером k в инерциальной системе отсчета через x_k, y_k, z_k , а ее массу через $\mathfrak{M}_k$. Согласно принципам ньютоновской механики, компоненты силы X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} , действующей на тело с номером i и вызванной притяжением тела с номером j , удовлетворяют следующим уравнениям:

$$X_{ij} = G \frac{\mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j}{r_{ij}^3} (x_i - x_j),$$

$$Y_{ij} = G \frac{\mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j}{r_{ij}^3} (y_i - y_j),$$

$$Z_{ij} = G \frac{\mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j}{r_{ij}^3} (z_i - z_j),$$

где $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$.

G — постоянная тяготения.

Следовательно, уравнения движения тела i под действием притяжения всех остальных тел будут иметь вид

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{j=1}^{i-1} X_{ij} + \sum_{j=i+1}^n X_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_{ij}, \\ \mathfrak{M}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} + \sum_{j=i+1}^n Y_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij}, \\ \mathfrak{M}_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \sum_{j=1}^{i-1} Z_{ij} + \sum_{j=i+1}^n Z_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Z_{ij}.\end{aligned}$$

Эти уравнения можно переписать в более сокращенном виде, вводя потенциал Φ , определяемый следующим выражением:

$$\Phi = -G \sum_{k < j} \frac{\mathfrak{M}_k \mathfrak{M}_j}{r_{kj}}.$$

В таком случае уравнения движения примут вид

$$\mathfrak{M}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \mathfrak{M}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \mathfrak{M}_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}.$$

Эти уравнения решить в общем виде нельзя, однако, можно найти несколько первых интегралов. Действительно, помножив написанные уравнения соответственно на величины dx_i/dt , dy_i/dt и dz_i/dt , сложив их затем почленно и просуммировав по i , получим

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt} \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) &= \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right).\end{aligned}$$

Так как потенциал Φ не зависит явно от времени, то

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt} \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Интегрируя обе части, получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mathfrak{M}_i}{2} \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] = -\Phi + h,$$

где h — постоянная интегрирования. Левая часть написанного равенства представляет собой кинетическую энергию системы, которую обозначим через T ; в таком случае получим интеграл энергии¹⁾, а именно: $T + \Phi = h$.

Напишем теперь уравнения движения точки в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}^3}, \\ \mathfrak{M}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(y_j - y_i)}{r_{ij}^3}, \\ \mathfrak{M}_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(z_j - z_i)}{r_{ij}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д } 2.1)$$

Умножая третье уравнение на y_i , второе на z_i , вычитая затем одно из другого и суммируя по i , получим

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \sum_{j=1}^n \mathfrak{M}_j \frac{(z_j y_i - y_j z_i)}{r_{ij}^3}.$$

Правая часть этого равенства равна нулю, так как каждому слагаемому

$$\mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(y_i z_j - y_j z_i)}{r_{ij}^3}$$

соответствует другое

$$\mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(y_j z_i - z_j y_i)}{r_{ij}^3},$$

отличающееся только знаком. Следовательно, имеем

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = 0.$$

Аналогично можно получить два другие равенства

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = 0.$$

¹⁾ Очень важным при выводе этой формулы является отсутствие предположения о существовании ньютоновского потенциала; принято лишь, что потенциал не зависит явно от времени.

Интегрируя, получим три интеграла моментов вращения, часто называемых интегралами площадей, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = c_1, \quad \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) = c_2,$$

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = c_3.$$

Таким образом, вектор (c_1, c_2, c_3) , составляющие которого определяются тремя приведенными выше равенствами, не зависит от времени. Плоскость, перпендикулярная этому вектору и проходящая через центр масс, называется инвариантной плоскостью системы n тел.

Производя в каждом из уравнений (Д.2.1) суммирование по i , получим

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}^3},$$

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(y_j - y_i)}{r_{ij}^3},$$

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_j \frac{(z_j - z_i)}{r_{ij}^3}.$$

Правые части равны нулю, в этом можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, которыми мы пользовались при выводе трех предыдущих интегралов. Поэтому дважды интегрируя, получим следующие шесть первых интегралов:

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \frac{dx_i}{dt} = a_0, \quad \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \frac{dy_i}{dt} = b_0, \quad \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \frac{dz_i}{dt} = c_0,$$

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i x_i = a_0 t + x_0, \quad \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i y_i = b_0 t + y_0, \quad \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i z_i = c_0 t + z_0;$$

здесь a_0, b_0, c_0, x_0, y_0 и z_0 — постоянные интегрирования.

Часто эти выражения называют интегралами центра масс, так как правые части равенств определяют положение и скорость движения центра масс системы в данной системе координат. Следовательно, в системе координат, связанной с центром масс, правые части тождественно равны нулю.

В общем случае найти другие интегралы, кроме 10 упомянутых выше, нельзя. Движение каждой точки определяется тремя уравне-

ниями второго порядка; таким образом, для решения задачи необходимо знать 6 первых интегралов, т. е. для решения задачи n тел нам недостает $6n - 10$ интегралов. Отсюда следует, что даже при $n = 3$ нельзя получить общего решения. Хотя в проблеме трех тел доказано существование интегралов в форме сходящихся рядов, однако, эти интегралы на практике неприменимы.

ДОПОЛНЕНИЕ 3

Распределение Гаусса (нормальное распределение)

В звездной астрономии мы часто встречаемся со случайной величиной, распределение которой определяется законом Гаусса, т. е.

$$f(x) dx = Ce^{-h^2(x-x_0)^2} dx,$$

где $f(x) dx$ — вероятность того, что случайная величина заключена в пределах $x, x + dx$, а величины C, h и x_0 суть постоянные. Так как определение этих постоянных связано с необходимостью интегрирования распределения $f(x)$, то вычислим сначала интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

к которому сводятся многие другие интегралы.

Для этого рассмотрим поверхность, образующуюся при вращении кривой $z = e^{-x^2}$ вокруг оси z в прямоугольной системе координат (x, y, z) .

Уравнение этой поверхности будет иметь вид

$$z = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Вычислим объем V , заключенный между этой поверхностью и плоскостью xy , а именно:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right]^2.$$

Этот же объем можно вычислить другим способом; для этого разделим пространство на слои плоскостями, параллельными плоскости (xy) , и, интегрируя вдоль оси z , получим

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dz = -\pi \int_0^1 \ln z dz = \pi,$$

следовательно,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

С помощью этой формулы можно вычислить часто встречающийся интеграл вида

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2} dx = \\ &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}. \end{aligned}$$

Определим прежде всего постоянную C из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \text{ т. е. } \frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-x_0)^2} dx = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

и, следовательно,

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

* Вычислим также среднее значение $\bar{x}$ случайной величины:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-h^2(x-x_0)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t}{h} + x_0\right) e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d(e^{-t^2}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 e^{-t^2} dt = x_0; \end{aligned}$$

таким образом, $\bar{x} = x_0$.

Наконец, вычислим центральный момент второго порядка (квадрат дисперсии), т. е.

$$\begin{aligned} \mu_2 = \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2 f(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2 e^{-h^2(x-x_0)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t de^{-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}h^2} \left\{ [-te^{-t^2}]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right\} = \frac{1}{2h^2}, \end{aligned}$$

следовательно, $\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$

Таким образом, можно распределение Гаусса выразить с помощью среднего значения $\bar{x}$ и дисперсии σ ; в самом деле

$$f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Вводя новую переменную $t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$, получим стандартное распределение Гаусса

$$f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

Значения этой функции приводятся во многих статистических таблицах¹⁾.

Многомерное нормальное распределение

Имея дело со многими случайными величинами, мы вынуждены пользоваться многомерным распределением $f(x, y, z \dots) dx dy dz \dots$, определяющим вероятность того, что значения случайных величин заключены в пределах $x, x+dx; y, y+dy; z, z+dz, \dots$. Нормальное распределение (распределение Гаусса) выражается функцией, имеющей в случае трех переменных следующий вид:

$$f(x, y, z) dx dy dz = C e^{-E(x, y, z)} dx dy dz,$$

где

$$E(x, y, z) = a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2 + c(z-z_0)^2 + \\ + 2d(x-x_0)(y-y_0) + 2e(y-y_0)(z-z_0) + 2f(z-z_0)(x-x_0).$$

Ограничимся случаем, когда направление трех осей координат выбрано так, что три последних члена равны нулю²⁾.

В этом случае получим следующее выражение для нормального распределения:

$$f(x, y, z) = C e^{-[h^2(x-x_0)^2 + k^2(y-y_0)^2 + l^2(z-z_0)^2]}.$$

Величина C определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dx dy dz = 1.$$

Интегрируя, получим

$$C = \frac{hkl}{\sqrt{\pi^3}}.$$

¹⁾ См., например, Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 1950, стр. 372.

²⁾ Изложение общего случая можно найти в монографии Trumpler R. J. and Weaver H. F., Statistical Astronomy, Berkeley and Los Angeles, 1953, стр. 61 и след.

Распределение одной величины, например, x можно получить, проинтегрировав функцию $f(x, y, z)$ по y и z в пределах $-\infty$ до $+\infty$, т. е. имеем

$$f_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dy dz = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_0)^2};$$

аналогично можно вычислить

$$f_y = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(y-y_0)^2},$$

$$f_z = \frac{l}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2(z-z_0)^2}.$$

Легко определить также величины $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$; действительно,

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x dx = x_0, \quad \bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_y dy = y_0, \quad \bar{z} = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_z dz = z_0,$$

и, наконец, вычислить квадраты дисперсий (центральные моменты второго порядка)

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 f_x dx = \frac{1}{2h^2}, \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - y_0)^2 f_y dy = \frac{1}{2k^2},$$

$$\sigma_z^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^2 f_z dz = \frac{1}{2l^2}.$$

ДОПОЛНЕНИЕ 4

Исправление наблюдаемых распределений за ошибки наблюдений¹⁾

При рассмотрении многих вопросов статистики, в частности, звездной статистики, мы часто пользуемся множеством измерений какой-либо величины (например, параллакса звезды) и нас интересует распределение этой величины, освобожденное от ошибок наблюдений. Поэтому наблюдаемое распределение необходимо каким-либо образом „исправить“ за ошибки наблюдений и получить в результате „исправленную“ кривую распределения данной величины.

Предположим, прежде всего, что вероятность ошибок наблюдений подчиняется закону Гаусса, все параметры которого известны.

¹⁾ Впервые эта задача была решена Эддингтоном, см. *M N*, 73, 359 (1913). Более общее решение дано в книге: Trumpler R. J. and Weaver H. F. *Statistical Astronomy*, Berkeley and Los Angeles, 1953, стр. 121 и след.

Следовательно, вероятность $P(\varepsilon)$ ошибки, заключенной в интервале ε , $\varepsilon + d\varepsilon$, выражается формулой

$$P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon,$$

причем величина h связана со средней ошибкой m и вероятной ошибкой ρ наблюдений следующим соотношением:

$$h = \frac{0,7071}{m} = \frac{0,4769}{\rho}.$$

Пусть функция $u(x)$ будет действительным („исправленным“) распределением величины x , а функция $v(x)$ — наблюдаемым, искаженным ошибками наблюдения. Полученное из наблюдений значение x включает в себя ошибку ε , следовательно, точное значение t величины равно $t = x - \varepsilon$.

Число объектов, точные величины которых заключены в пределах t , $t + dt$, а ошибка — в пределах ε , $\varepsilon + d\varepsilon$, равно

$$u(t) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} dt d\varepsilon.$$

Произведем замену переменных t и ε переменными x и ε , имеем

$$dx d\varepsilon = dt d\varepsilon.$$

Следовательно, относительное число звезд с наблюдаемой величиной x в пределах x , $x + dx$ и ошибкой в пределах ε , $\varepsilon + d\varepsilon$ определяется формулой

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} u(x - \varepsilon) e^{-h^2 \varepsilon^2} dx d\varepsilon.$$

Интегрируя написанное выражение по ε в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим общее число звезд с характеристикой x , заключенной в пределах x , $x + dx$,

$$v(x) dx = dx \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - \varepsilon) e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Используя это интегральное уравнение, можно определить действительное распределение $u(x)$, зная наблюдаемое $v(x)$.

На практике функция $v(x)$ обычно бывает дана в виде таблицы по аргументу x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$). Функцию, определяемую n величинами, можно приближенно представить многочленом $n - 1$ степени, иначе говоря, разлагая эту функцию в ряд, можно пренебречь членами степени выше, чем $n - 1$, т. е.

$$v(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u(x) - \varepsilon u_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} u_2(x) - \frac{\varepsilon^3}{3!} u_3(x) + \dots \right] e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon,$$

где

$$u_n = \frac{d^n u}{dx^n}.$$

Принимая во внимание, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{2p+1} e^{-h\varepsilon^2} d\varepsilon = 0$ для целых p , получим

$$v(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} u_2(x) + \frac{\varepsilon^4}{4!} u_4(x) + \dots \right] e^{-h\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h} = A.$$

Так как A является равномерно сходящимся интегралом, то можно написать

$$\frac{dA}{dh} = -2h \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2},$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}.$$

Продолжая дифференцирование, придем, наконец, к общей формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{2p} e^{-h\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \frac{(2p)!}{p! (4h^2)^p}.$$

Таким образом, формула для функции $v(x)$ примет вид

$$v(x) = u(x) + \frac{1}{4h^2} u_2(x) + \frac{1}{32h^4} u_4(x) + \dots + \frac{1}{p! (4h^2)^p} u_{2p}(x).$$

Пусть средняя ошибка невелика, т. е. предположим, что h достаточно велико, в таком случае можно функцию $u(x)$ определить методом последовательных приближений:

I приближение $u(x) = v(x)$,

II приближение $u(x) = v(x) - \frac{1}{4h^2} v_2(x)$,

III приближение $u(x) = v(x) - \frac{1}{4h^2} \frac{d^2}{dx^2} \left[v(x) - \frac{1}{4h^2} v_2(x) \right] =$
 $= v(x) - \frac{1}{4h^2} v_2(x) + \frac{1}{32h^4} v_4(x).$

Здесь, так же как в предыдущем случае, введено обозначение

$$v_n(x) = \frac{d^n v}{dx^n}.$$

Следовательно, получаем

$$u(x) = v(x) - \frac{1}{4h^2} v_2(x) + \frac{1}{2!(4h^2)^2} v_4(x) - \frac{1}{3!(4h^2)^3} v_6(x) + \dots$$

Необходимо еще рассмотреть вопрос определения числовых значений функций $v_2(x)$, $v_4(x)$... Обычно функция $v(x)$ задается в виде таблицы, содержащей значения этой функции через равные интервалы, т. е. для значений аргумента $x-3a$; $x-2a$; $x-a$; x ; $x+a$; $x+2a$... Предположим, что величина a настолько мала, что можно пренебречь степенями этой величины выше четвертой. Согласно вводимым часто обозначениям, Δ_1 , Δ_2 , ... являются первыми, вторыми и т. д. разностями в следующей таблице:

$x-3a$	$\Delta_1\left(x-\frac{5}{2}a\right)$		
$x-2a$	$\Delta_1\left(x-\frac{3}{2}a\right)$	$\Delta_2(x-2a)$	
$x-a$	$\Delta_1\left(x-\frac{1}{2}a\right)$	$\Delta_2(x-a)$	$\Delta_3\left(x-\frac{3}{2}a\right)$
x	$\Delta_1\left(x+\frac{1}{2}a\right)$	$\Delta_2(x)$	$\Delta_3\left(x-\frac{1}{2}a\right)$
$x+a$	$\Delta_1\left(x+\frac{3}{2}a\right)$	$\Delta_2(x+a)$	$\Delta_3\left(x+\frac{1}{2}a\right)$
$x+2a$	$\Delta_1\left(x+\frac{5}{2}a\right)$	$\Delta_2(x+2a)$	$\Delta_3\left(x+\frac{3}{2}a\right)$
$x+3a$			

Из этой таблицы следует, что

$$\Delta_2(x) = \Delta_1\left(x+\frac{1}{2}a\right) - \Delta_1\left(x-\frac{1}{2}a\right) = v(x+a) + v(x-a) - 2v(x).$$

Раскладывая функции $v(x+a)$ и $v(x-a)$ в ряд и отбрасывая члены, содержащие степени a выше четвертой, получим

$$\Delta_2(x) = a^2 v_2(x) - \frac{a^4}{12} v_4(x).$$

Аналогичным образом найдем

$$\Delta_4(x) = v(x+2a) - 4v(x+a) + 6v(x) - 4v(x-a) - v(x-2a) = a^4 v_4(x).$$

Следовательно,

$$v_4(x) = \frac{\Delta_4(x)}{a^4}, \quad a \quad v_2(x) = \frac{12\Delta_2(x) - \Delta_4(x)}{12a^2}.$$

Таким образом, получим следующее выражение:

$$u(x) = v(x) - \frac{12\Delta_2(x) - \Delta_4(x)}{48h^2a^2} + \frac{\Delta_4(x)}{32h^4a^4},$$

с помощью которого можно найти действительное распределение $u(x)$ (освобожденное от влияния ошибок наблюдений), зная наблюдаемое $v(x)$.

Часто мы встречаемся с такой величиной x , средняя ошибка которой m каким-либо образом зависит от самой величины x , т. е.

$$m_x = m(x).$$

В этом случае предыдущие рассуждения теряют смысл, так как величина h перестает быть постоянной. Однако можно ввести некоторую функцию $y = f(x)$, средняя ошибка которой постоянна. Пусть этой ошибкой будет величина m_y , тогда

$$m_y = \text{const} = \frac{dy}{dx} m_x$$

и, следовательно,

$$y = \int \frac{\text{const}}{m_x(x)} dx.$$

Итак, зная распределение $v(x)$, можно непосредственно получить распределение $V(y)$ величины $y = f(x)$, определенной приведенным выше равенством. К функции $V(y)$ можно затем применить все наши предыдущие рассуждения и получить распределение $U(y)$, освобожденное от влияния ошибок наблюдения; отсюда найдем искомое распределение $u(x)$.

На практике часто встречаемся с тем, что средняя ошибка наблюдений пропорциональна измеряемой величине, т. е. $m_x = cx$. В таком случае искомой функцией $y = f(x)$ является функция $y = \log x$.

ДОПОЛНЕНИЕ 5

Решение однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных методом характеристических уравнений

Рассмотрим систему n обыкновенных линейных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dt}{X_0} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}, \quad (\text{Д } 5.1)$$

здесь $X_0, X_1, \dots, X_n$ — функции независимой переменной t и зависимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть выражение

$$\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

является первым интегралом этой системы, т. е. такой функцией, подстановка которой вместо переменных в решении системы уравнений (Д 5.1) дает постоянную величину, т. е.

$$\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.} \quad (\text{Д } 5.2)$$

Дифференцируя выражение (Д 5.2) по t

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = 0$$

и умножая на dt , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Пользуясь пропорцией, записанной в виде системы уравнений (Д 5.1), можно написать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} X_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} X_n = 0. \quad (\text{Д } 5.3)$$

Из этого непосредственно следует теорема: *если выражение $\varphi = \text{const}$ является первым интегралом системы уравнений (Д 5.1), то функция φ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с частными производными (Д 5.3).*

Справедлива также обратная теорема: *если функция φ удовлетворяет уравнению (Д 5.3), то выражение $\varphi = \text{const}$ является первым интегралом системы уравнений (Д 5.1).*

Для доказательства предположим, что функция φ удовлетворяет уравнению (Д 5.3). Вычислим полный дифференциал функции φ

$$d\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n. \quad (\text{Д } 5.4)$$

Если вместо переменных подставить решения системы уравнений (Д 5.1), то, принимая во внимание, что из формулы (Д 5.1) следует

$$dt = \lambda X_0, \quad dx_i = \lambda X_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n,$$

где λ — коэффициент пропорциональности, вместо уравнения (Д 5.4) можно написать

$$d\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} X_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} X_n \right).$$

Правая часть этого выражения, согласно сделанному вначале предположению, равна нулю. Следовательно,

$$d\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

т. е.

$$\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Так как произвольная функция F первых интегралов также является первым интегралом, то общим решением уравнения (Д 5.3) является выражение

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — все n независимых первых интегралов системы (Д 5.1), а F — произвольная функция.

Основываясь на двух только что доказанных теоремах, можно решение однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка в частных производных вида (Д 5.3) свести к решению системы обыкновенных линейных уравнений первого порядка типа (Д 5.1). Система (Д 5.1) называется системой характеристических уравнений, соответствующих уравнению (Д 5.3).

ДОПОЛНЕНИЕ 6

δ-функция Дирака

Рассмотрим функцию одной переменной x , которая при изменении от $-0,5$ до $+0,5$ равна 1, для всех же остальных значений x равна нулю (рис. 83а).

Интеграл этой функции по произвольному интервалу, включающему отрезок $-0,5, +0,5$ равен 1, а по любому другому интервалу равен нулю. Те же свойства будет иметь функция, которая в интервале $-0,25, +0,25$ равна 2, а всюду, вне этого интервала, равна нулю, причем интеграл этой функции по любому интервалу, содержащему отрезок $-0,25, +0,25$, будет равен 1 (рис. 83б). Можно все время уменьшать отрезок, на котором функция отличается от нуля, и пропорционально увеличивать значение функции на этом отрезке так, чтобы интеграл в достаточно большой области, окружающей точку $x = 0$, все время был равен 1 (см. рис. 83с); таким образом, получим целую последовательность функций

$$\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x), \dots, \delta_k(x),$$

обладающих тем свойством, что $\int \delta_k(x) f(x) dx$ [где $f(x)$ — произвольная функция] в области, содержащей отрезок $\delta_k(x) \neq 0$, всегда равен среднему значению функции на этом отрезке.

Согласно определению функции $\delta_k(x)$, пределом последовательности $\{\delta_k(x)\}$ является некоторая математическая величина $\delta(x)$, причем $\delta(x)=0$ всюду, за исключением точки $x=0$, где $\delta(0)=\infty$.

Значение $\int \delta(x) dx$ равно единице во всех областях, включающих точку $x=0$, и равно нулю во всех областях, не содержащих этой

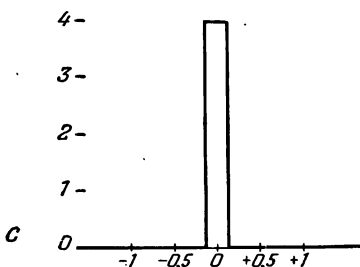
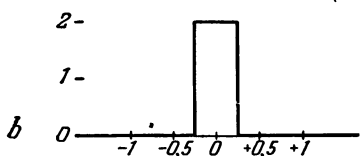
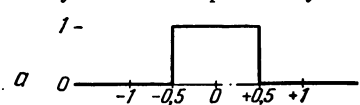


Рис. 83.

точки. Значение $\int \delta(x) f(x) dx$ равно $f(0)$ во всех областях, включающих точку $x=0$.

Производя замену переменных $x' = x + a$, получим выражение $\delta(x + a)$, имеющее те же свойства, что и $\delta(x)$, с той лишь разницей, что точка $x' = a$ играет здесь ту же роль, что точка $x=0$ в предыдущем случае.

Определенная таким образом математическая величина $\delta(x)$ называется δ -функцией Дирака. Она является пределом последовательности функций, сама не будучи функцией. Хотя с точки зрения соответствия ее значений каждому значению величины x она имеет все свойства некоторой функции $D(x)$, определяемой следующим образом:

$$D(x) = 0 \quad \text{для } x \neq 0,$$

$$D(x) = \infty \quad \text{для } x = 0,$$

все же δ -функция обладает свойством $\int_{-k}^{+k} \delta(x) dx = 1$ ($k \neq 0$), которым не обладает функция $D(x)$ ¹⁾.

ДОПОЛНЕНИЕ 7

Определение расстояний областей, излучающих линию $\lambda = 21$ см

Оорт, Ван де Холст и Муллер²⁾ исследовали профили водородной линии $\lambda = 21$ см в точках, расположенных через 5° по галактической долготы в интервале долгот от 322° до 220° и находящихся

¹⁾ Приведенный вывод δ -функции довольно неточен. Прежде всего неизвестно, в каком смысле последовательность функций $\delta_k(x)$ стремится к пределу δ , не являющемуся функцией. Более точную трактовку этого вопроса читатель найдет в работе Микусинского, помещенной в *Biuletyn Polskiej Akademii Nauk*, 3, 589 (1955).

²⁾ BAN, 452 (1954).

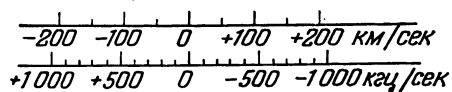
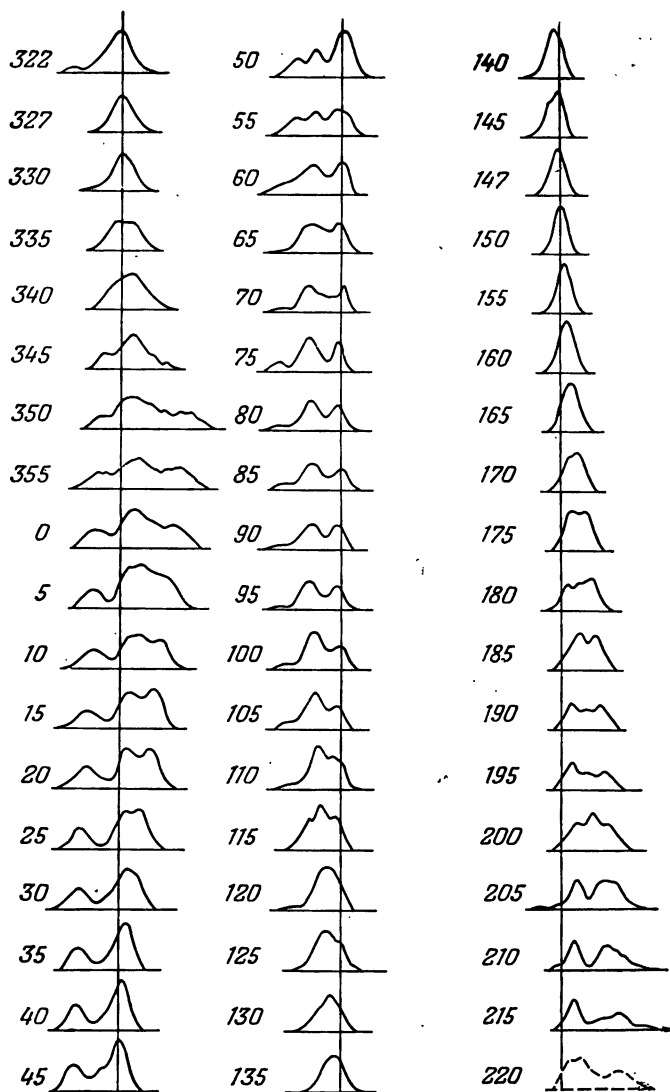


Рис. 84.

в галактической плоскости. Результаты их исследований изображены на рис. 84, причем в каждом профиле замечен один или несколько максимумов.

Прежде всего авторы определили расстояние Солнца от центра Галактики по измерениям максимального доплёровского смещения линии, предполагая при этом, что межзвездная материя участвует во вращении Галактики; следовательно, справедлива формула Камма (65.1)

$$V_r = R_0 [\omega(R) - \omega(R_0)] \sin(l - l_0),$$

где R_0 и R — расстояние Солнца и исследуемой точки от центра Галактики, $\omega(R)$ — угловая скорость на расстоянии R от центра Галактики; l — галактическая долгота исследуемой точки, l_0 — галактическая долгота центра Галактики. Исследования проводились

исключительно в галактической плоскости, поэтому написанное выше выражение не содержит галактической широты. Так как разности $R - R_0$ невелики, то выражение в скобках можно разложить в ряд, пренебрегая высшими степенями $(R - R_0)$,

$$\omega(R) = \omega(R_0) + (R - R_0) \frac{d\omega}{dR},$$

$d\omega/dR$ в окрестностях Солнца равно $-2A/R_0$. Таким образом, получим

$$V_r = -2A(R - R_0) \sin(l - l_0).$$

(Д 7.1)

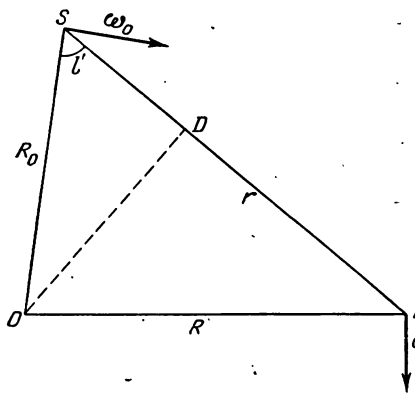


Рис. 85.

Для данной разности $l - l_0$ максимальное значение V_r соответствует $R = \max$, т. е. $R = R_0 \sin(l - l_0)$, в чем легко убедиться, рассматривая рис. 85.

Определяя для различных значений $l - l_0$ величины $(V_r)_{\max}$, получим величины R_0 ($A = +19,5$ км/сек/кпс), которые в принципе должны быть одинаковы. Таким образом, авторы нашли значение $R_0 = 8,2$ кпс.

Если эта величина известна, то можно определить R по формуле (Д 7.1), зная положение каждого максимума в профиле линии. Если, кроме того, известны величины $(l - l_0)$, то легко определить положение каждого отдельного сгущения нейтрального водорода в галактической плоскости. Результаты этих исследований показаны на рис. 86. Черными кружками обозначены места наибольшей плотности, пустыми кружками — наименьшей плотности водорода. Из распределения кружков на рис. 86 следует, что вблизи Солнца проходят два спиральных рукава межзвездного водорода. На рис. 87 приведены результаты исследований Б. А. Воронцова-Вельяминова.

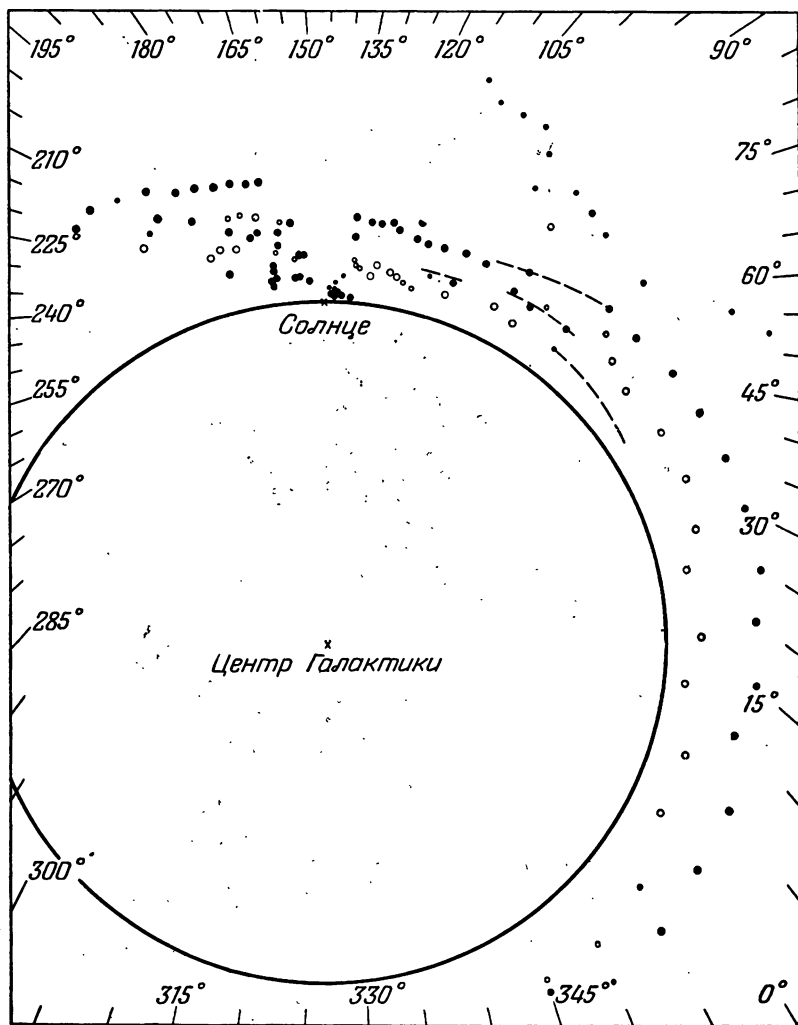


Рис. 86.



Рис. 87.

ДОПОЛНЕНИЕ 8

Таблицы перевода экваториальных координат в галактические

Таблица Д 8

α	δ	$+30^\circ$ $l \quad b$	$+30^\circ$ $l \quad b$	$+70^\circ$ $l \quad b$	$+60^\circ$ $l \quad b$	$+50^\circ$ $l \quad b$	$+40^\circ$ $l \quad b$	$+30^\circ$ $l \quad b$	$+20^\circ$ $l \quad b$	$+10^\circ$ $l \quad b$	0° $l \quad b$
0^h	0^m	$90^\circ + 28^\circ$	$88^\circ + 18^\circ$	$87^\circ + 8^\circ$	$85^\circ - 2^\circ$	$83^\circ - 12^\circ$	$82^\circ - 21^\circ$	$80^\circ - 31^\circ$	$78^\circ - 41^\circ$	$74^\circ - 51^\circ$	$69^\circ - 60^\circ$
20	20	$90^\circ + 28^\circ$	$89^\circ + 18^\circ$	$88^\circ + 8^\circ$	$88^\circ - 2^\circ$	$87^\circ - 12^\circ$	$86^\circ - 22^\circ$	$85^\circ - 32^\circ$	$84^\circ - 42^\circ$	$82^\circ - 52^\circ$	$79^\circ - 62^\circ$
40	40	$90^\circ + 28^\circ$	$90^\circ + 18^\circ$	$90^\circ + 8^\circ$	$90^\circ - 2^\circ$	$90^\circ - 12^\circ$	$90^\circ - 22^\circ$	$90^\circ - 32^\circ$	$90^\circ - 42^\circ$	$90^\circ - 52^\circ$	$90^\circ - 62^\circ$
1	0	$90^\circ + 28^\circ$	$91^\circ + 18^\circ$	$92^\circ + 8^\circ$	$92^\circ - 2^\circ$	$93^\circ - 12^\circ$	$94^\circ - 22^\circ$	$95^\circ - 32^\circ$	$96^\circ - 42^\circ$	$98^\circ - 52^\circ$	$101^\circ - 62^\circ$
20	20	$90^\circ + 28^\circ$	$92^\circ + 18^\circ$	$93^\circ + 8^\circ$	$95^\circ - 2^\circ$	$97^\circ - 11^\circ$	$98^\circ - 21^\circ$	$100^\circ - 31^\circ$	$102^\circ - 41^\circ$	$106^\circ - 51^\circ$	$111^\circ - 60^\circ$
40	40	$90^\circ + 28^\circ$	$93^\circ + 18^\circ$	$95^\circ + 9^\circ$	$97^\circ - 1^\circ$	$100^\circ - 11^\circ$	$102^\circ - 21^\circ$	$105^\circ - 30^\circ$	$108^\circ - 40^\circ$	$113^\circ - 49^\circ$	$120^\circ - 59^\circ$
2	0	$90^\circ + 28^\circ$	$94^\circ + 19^\circ$	$97^\circ + 9^\circ$	$100^\circ 0$	$103^\circ - 10^\circ$	$106^\circ - 19^\circ$	$110^\circ - 29^\circ$	$114^\circ - 38^\circ$	$120^\circ - 47^\circ$	$128^\circ - 56^\circ$
20	20	$90^\circ + 28^\circ$	$94^\circ + 19^\circ$	$98^\circ + 10^\circ$	$102^\circ 0$	$106^\circ - 9^\circ$	$110^\circ - 18^\circ$	$114^\circ - 27^\circ$	$120^\circ - 36^\circ$	$126^\circ - 45^\circ$	$135^\circ - 53^\circ$
40	40	$90^\circ + 28^\circ$	$95^\circ + 19^\circ$	$100^\circ + 10^\circ$	$104^\circ + 1^\circ$	$109^\circ - 8^\circ$	$114^\circ - 16^\circ$	$119^\circ - 25^\circ$	$124^\circ - 34^\circ$	$132^\circ - 42^\circ$	$141^\circ - 50^\circ$
3	0	$90^\circ + 28^\circ$	$96^\circ + 20^\circ$	$102^\circ + 11^\circ$	$107^\circ + 3^\circ$	$112^\circ - 6^\circ$	$117^\circ - 15^\circ$	$123^\circ - 23^\circ$	$129^\circ - 31^\circ$	$137^\circ - 39^\circ$	$146^\circ - 47^\circ$
20	20	$90^\circ + 28^\circ$	$97^\circ + 20^\circ$	$103^\circ + 12^\circ$	$109^\circ + 4^\circ$	$114^\circ - 4^\circ$	$120^\circ - 12^\circ$	$126^\circ - 21^\circ$	$133^\circ - 28^\circ$	$141^\circ - 36^\circ$	$151^\circ - 43^\circ$
40	40	$90^\circ + 28^\circ$	$98^\circ + 21^\circ$	$104^\circ + 13^\circ$	$111^\circ + 5^\circ$	$117^\circ - 2^\circ$	$123^\circ - 10^\circ$	$130^\circ - 18^\circ$	$137^\circ - 25^\circ$	$145^\circ - 32^\circ$	$155^\circ - 39^\circ$
4	0	$90^\circ + 28^\circ$	$98^\circ + 21^\circ$	$106^\circ + 14^\circ$	$113^\circ + 7^\circ$	$120^\circ 0$	$126^\circ - 8^\circ$	$133^\circ - 15^\circ$	$141^\circ - 22^\circ$	$149^\circ - 29^\circ$	$158^\circ - 35^\circ$
20	20	$90^\circ + 28^\circ$	$99^\circ + 22^\circ$	$107^\circ + 16^\circ$	$114^\circ + 9^\circ$	$122^\circ + 2^\circ$	$129^\circ - 5^\circ$	$136^\circ - 12^\circ$	$144^\circ - 18^\circ$	$152^\circ - 25^\circ$	$162^\circ - 30^\circ$
40	40	$90^\circ + 28^\circ$	$99^\circ + 23^\circ$	$108^\circ + 17^\circ$	$116^\circ + 11^\circ$	$124^\circ + 4^\circ$	$132^\circ - 2^\circ$	$139^\circ - 8^\circ$	$147^\circ - 15^\circ$	$156^\circ - 21^\circ$	$165^\circ - 26^\circ$
5	0	$90^\circ + 28^\circ$	$100^\circ + 23^\circ$	$109^\circ + 18^\circ$	$118^\circ + 13^\circ$	$126^\circ + 7^\circ$	$134^\circ + 1^\circ$	$142^\circ - 5^\circ$	$150^\circ - 11^\circ$	$159^\circ - 17^\circ$	$168^\circ - 22^\circ$
20	20	$90^\circ + 28^\circ$	$100^\circ + 24^\circ$	$110^\circ + 20^\circ$	$119^\circ + 15^\circ$	$128^\circ + 10^\circ$	$136^\circ + 4^\circ$	$144^\circ - 2^\circ$	$153^\circ - 7^\circ$	$161^\circ - 12^\circ$	$170^\circ - 18^\circ$
40	40	$90^\circ + 28^\circ$	$101^\circ + 25^\circ$	$111^\circ + 21^\circ$	$120^\circ + 17^\circ$	$129^\circ + 12^\circ$	$138^\circ + 7^\circ$	$147^\circ + 2^\circ$	$155^\circ - 3^\circ$	$164^\circ - 8^\circ$	$173^\circ - 13^\circ$
6	0	$90^\circ + 28^\circ$	$101^\circ + 26^\circ$	$111^\circ + 23^\circ$	$121^\circ + 19^\circ$	$131^\circ + 15^\circ$	$140^\circ + 11^\circ$	$149^\circ + 6^\circ$	$158^\circ + 1^\circ$	$166^\circ - 4^\circ$	$175^\circ - 9^\circ$
20	20	$90^\circ + 28^\circ$	$101^\circ + 27^\circ$	$112^\circ + 25^\circ$	$122^\circ + 22^\circ$	$132^\circ + 18^\circ$	$142^\circ + 14^\circ$	$151^\circ + 10^\circ$	$160^\circ + 5^\circ$	$169^\circ 0$	$177^\circ - 4^\circ$
40	40	$90^\circ + 28^\circ$	$101^\circ + 28^\circ$	$112^\circ + 26^\circ$	$123^\circ + 24^\circ$	$134^\circ + 21^\circ$	$143^\circ + 18^\circ$	$153^\circ + 14^\circ$	$162^\circ + 9^\circ$	$171^\circ + 5^\circ$	$180^\circ 0$
7	0	$90^\circ + 28^\circ$	$101^\circ + 28^\circ$	$113^\circ + 28^\circ$	$124^\circ + 26^\circ$	$134^\circ + 24^\circ$	$145^\circ + 21^\circ$	$155^\circ + 18^\circ$	$164^\circ + 13^\circ$	$173^\circ + 9^\circ$	$182^\circ + 4^\circ$

Продолжение таблицы Д 8

δ α	$+90^\circ$ $l \quad b$	$+80^\circ$ $l \quad b$	$+70^\circ$ $l \quad b$	$+60^\circ$ $l \quad b$	$+50^\circ$ $l \quad b$	$+40^\circ$ $l \quad b$	$+30^\circ$ $l \quad b$	$+20^\circ$ $l \quad b$	$+10^\circ$ $l \quad b$	0° $l \quad b$
7 ^h 0 ^m	90° +28°	101° +28°	113° +28°	124° +26°	134° +24°	145° +21°	155° +18°	164° +13°	173° +9°	182° +4°
20	90 +28	101 +29	113 +30	124 +29	135 +27	146 +25	156 +22	166 +18	176 +13	185 +9
40	90 +28	101 +30	113 +31	124 +31	136 +30	147 +29	158 +26	168 +22	178 +18	187 +13
8 0	90 +28	101 +31	113 +33	124 +34	137 +34	148 +32	160 +30	170 +26	180 +22	190 +18
20	90 +28	101 +32	112 +35	124 +36	137 +37	149 +36	161 +34	172 +31	183 +27	192 +22
40	90 +28	100 +33	112 +36	124 +39	137 +40	150 +40	162 +38	174 +35	185 +31	195 +26
9 0	90 +28	100° +33	111 +38	123 +41	137 +43	150 +44	164 +42	176 +40	188 +35	198 +30
20	90 +28	99 +34	110 +39	122 +44	136 +46	150 +47	165 +47	179 +44	191 +40	202 +35
40	90 +28	99 +35	109 +41	120 +46	134 +50	150 +51	166 +51	181 +48	194 +44	205 +39
10 0	90 +28	98 +35	107 +42	119 +48	133 +53	149 +55	167 +55	183 +53	198 +48	209 +43
20	90 +28	97 +36	106 +44	116 +50	130 +55	148 +59	168 +59	187 +57	202 +52	214 +46
40	90 +28	96 +36	104 +45	114 +52	128 +58	146 +63	168 +63	190 +62	207 +57	219 +50
11 0	90 +28	95 +37	102 +46	111 +54	123 +61	142 +66	169 +68	194 +66	213 +60	226 +53
20	90 +28	94 +37	100 +46	107 +55	119 +63	139 +70	169 +72	199 +70	220 +64	232 +56
40	90 +28	93 +38	97 +47	103 +56	113 +65	130 +73	167 +77	209 +74	230 +67	241 +58
12 0	90 +28	92 +38	95 +48	99 +57	106 +67	122 +75	165 +81	219 +78	240 +80	249 +60
20	90 +28	91 +38	93 +48	95 +58	98 +67	108 +77	153 +85	245 +80	255 +71	260 +61
40	90 +28	90 +38	90 +48	90 +58	90 +68	90 +78	90 +88	270 +82	270 +72	270 +62
13 0	90 +28	89 +38	87 +48	85 +58	82 +67	72 +77	27 +85	285 +80	285 +71	280 +61
20	90 +28	88 +38	85 +48	81 +57	74 +67	58 +75	15 +81	321 +78	309 +70	291 +60
40	90 +28	87 +38	83 +47	77 +56	67 +65	50 +73	13 +77	331 +74	310 +67	299 +58
14 0	90 +28	86 +37	80 +46	73 +55	61 +63	41 +70	11 +72	341 +70	320 +64	308 +56
20	90 +28	85 +37	78 +46	69 +54	57 +61	38 +66	11 +68	346 +66	327 +60	314 +53
40	90 +28	84 +36	76 +45	66 +52	52 +58	34 +63	12 +64	350 +62	333 +57	321 +50
15 0	90 +28	83 +36	74 +44	64 +50	50 +55	32 +59	12 +59	353 +57	338 +52	326 +46

Продолжение таблицы Д 8

δ α	$+90^\circ$ $l \quad b$	$+80^\circ$ $l \quad b$	$+70^\circ$ $l \quad b$	$+60^\circ$ $l \quad b$	$+50^\circ$ $l \quad b$	$+40^\circ$ $l \quad b$	$+30^\circ$ $l \quad b$	$+20^\circ$ $l \quad b$	$+10^\circ$ $l \quad b$	0° $l \quad b$
15 ^h 0 ^m	90° + 28°	83° + 36°	74° + 44°	64° + 50°	50° + 55°	32° + 59°	12° + 59°	353° + 57°	338° + 52°	326° + 46°
20	90 + 28	82 + 35	73 + 42	61 + 48	47 + 53	31 + 55	13 + 55	357 + 53	342 + 48	331 + 43
40	90 + 28	81 + 35	71 + 41	60 + 46	46 + 50	30 + 51	14 + 51	359 + 48	346 + 44	335 + 39
16 0	90 + 28	81 + 34	70 + 39	58 + 44	44 + 46	30 + 47	15 + 47	1 + 44	349 + 40	338 + 35
20	90 + 28	80 + 33	69 + 38	57 + 41	43 + 43	30 + 44	16 + 42	4 + 40	352 + 35	342 + 30
40	90 + 28	80 + 33	68 + 36	56 + 39	43 + 40	30 + 40	18 + 38	6 + 35	355 + 31	345 + 26
17 0	90 + 28	79 + 32	68 + 35	56 + 36	43 + 37	31 + 36	19 + 34	8 + 31	357 + 27	348 + 22
20	90 + 28	79 + 31	67 + 33	56 + 34	43 + 34	32 + 32	20 + 30	10 + 26	0 + 22	350 + 18
40	90 + 28	79 + 30	67 + 31	56 + 31	44 + 30	33 + 29	22 + 26	12 + 22	2 + 18	353 + 13
18 0	90 + 28	79 + 29	67 + 30	56 + 29	45 + 27	34 + 25	24 + 22	14 + 18	4 + 13	355 + 9
20	90 + 28	79 + 28	67 + 28	56 + 26	46 + 24	35 + 21	25 + 18	16 + 13	7 + 9	358 + 4
40	90 + 28	79 + 28	68 + 26	57 + 24	46 + 21	37 + 18	27 + 14	18 + 9	9 + 5	0 0
19 0	90 + 28	79 + 27	68 + 25	58 + 22	48 + 18	38 + 14	29 + 10	20 + 5	11 0	3 4
20	90 + 28	79 + 26	69 + 23	59 + 19	49 + 15	40 + 11	31 + 6	22 + 1	14 - 4	5 9
40	90 + 28	79 + 25	69 + 21	60 + 17	51 + 12	42 + 7	33 + 2	25 - 3	16 - 8	7 13
20 0	90 + 28	80 + 24	70 + 20	61 + 15	52 + 10	44 + 4	36 - 2	27 - 7	19 - 12	10 - 18
20	90 + 28	80 + 23	71 + 18	62 + 13	54 + 7	46 + 1	38 - 5	30 - 11	21 - 17	12 - 22
40	90 + 28	81 + 23	72 + 17	64 + 11	56 + 4	48 - 2	41 - 8	33 - 15	24 - 21	15 - 26
21 0	90 + 28	81 + 22	73 + 16	66 + 9	58 + 2	51 - 5	44 - 12	36 - 18	28 - 25	18 - 30
20	90 + 28	82 + 21	74 + 14	67 + 7	60 0	54 - 8	47 - 15	39 - 22	31 - 29	22 - 35
40	90 + 28	82 + 21	76 + 13	69 + 5	63 - 2	57 - 10	50 - 18	43 - 25	35 - 32	25 - 39
22 0	90 + 28	83 + 20	77 + 12	71 + 4	66 - 4	60 - 12	54 - 21	47 - 28	39 - 36	29 - 43
20	90 + 28	84 + 20	78 + 11	73 + 3	68 - 6	63 - 15	57 - 23	51 - 31	43 - 39	34 - 47
40	90 + 28	85 + 19	80 + 10	76 + 1	71 - 8	66 - 16	61 - 25	56 - 34	48 - 42	39 - 50
23 0	90 + 28	86 + 19	82 + 10	78 0	74 - 9	70 - 18	66 - 27	60 - 36	54 - 45	45 - 53
20	90 + 28	86 + 19	83 + 9	80 0	77 - 10	74 - 19	70 - 29	66 - 38	60 - 47	52 - 56
40	90 + 28	87 + 18	85 + 9	83 - 1	80 - 11	78 - 21	75 - 30	72 - 40	67 - 49	60 - 59

Продолжение таблицы Д 8

α	δ	0°	-10°	-20°	-30°	-40°	-50°	-60°	-70°	-80°	-90°
		l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
0°	0^m	$69^\circ-60^\circ$	$60^\circ-70^\circ$	$39^\circ-78^\circ$	$345^\circ-81^\circ$	$302^\circ-75^\circ$	$286^\circ-67^\circ$	$279^\circ-57^\circ$	$275^\circ-48^\circ$	$272^\circ-38^\circ$	$270^\circ-28^\circ$
	20	$80-61$	$75-71$	$65-80$	$333-85$	$288-77$	$278-67$	$275-58$	$273-48$	$271-38$	$270-28$
	40	$90-62$	$90-72$	$90-82$	$270-88$	$270-78$	$270-68$	$270-58$	$270-48$	$270-38$	$270-28$
1	0	$100-61$	$105-71$	$115-80$	$207-85$	$252-77$	$262-67$	$265-58$	$267-48$	$269-38$	$270-28$
	20	$111-60$	$120-70$	$141-78$	$195-81$	$238-75$	$254-67$	$261-57$	$265-48$	$268-38$	$270-28$
	40	$119-58$	$130-67$	$151-74$	$193-77$	$230-73$	$247-65$	$257-56$	$263-47$	$267-38$	$270-28$
2	0	$128-56$	$140-64$	$161-70$	$191-72$	$221-70$	$241-63$	$253-55$	$260-46$	$266-37$	$270-28$
	20	$134-53$	$147-60$	$166-66$	$191-68$	$218-66$	$237-61$	$249-54$	$258-46$	$265-37$	$270-28$
	40	$141-50$	$153-57$	$170-62$	$192-64$	$214-63$	$232-58$	$246-52$	$256-45$	$264-37$	$270-28$
3	0	$146-46$	$158-52$	$173-57$	$192-59$	$212-59$	$230-55$	$244-50$	$254-44$	$263-36$	$270-28$
	20	$151-43$	$162-48$	$177-53$	$193-55$	$211-55$	$227-53$	$241-48$	$253-42$	$262-35$	$270-28$
	40	$155-39$	$166-44$	$179-48$	$194-51$	$210-51$	$226-50$	$240-46$	$251-41$	$261-35$	$270-28$
4	0	$158-35$	$169-40$	$181-44$	$195-47$	$210-47$	$224-46$	$238-44$	$250-39$	$261-34$	$270-28$
	20	$162-30$	$172-35$	$184-40$	$196-42$	$210-42$	$223-43$	$237-41$	$249-38$	$260-33$	$270-28$
	40	$165-26$	$175-31$	$186-35$	$198-38$	$210-40$	$223-40$	$236-39$	$248-36$	$260-33$	$270-28$
5	0	$168-22$	$177-27$	$188-31$	$199-34$	$211-36$	$223-37$	$236-36$	$248-35$	$259-32$	$270-28$
	20	$170-18$	$180-22$	$190-26$	$200-30$	$212-32$	$223-34$	$236-34$	$247-33$	$259-31$	$270-28$
	40	$173-13$	$182-18$	$192-22$	$202-26$	$213-29$	$224-30$	$236-31$	$247-31$	$259-30$	$270-28$
6	0	$175-9$	$184-13$	$194-18$	$204-22$	$214-25$	$225-27$	$236-29$	$247-30$	$259-29$	$270-28$
	20	$178-4$	$187-9$	$196-13$	$205-18$	$215-21$	$226-24$	$236-26$	$247-28$	$259-28$	$270-28$
	40	$180-0$	$189-5$	$198-9$	$207-14$	$217-18$	$226-21$	$237-24$	$248-26$	$259-28$	$270-28$
7	0	$183+4$	$191-0$	$200-5$	$209-10$	$218-14$	$228-18$	$238-22$	$248-25$	$259-27$	$270-28$

Продолжение таблицы Д 8

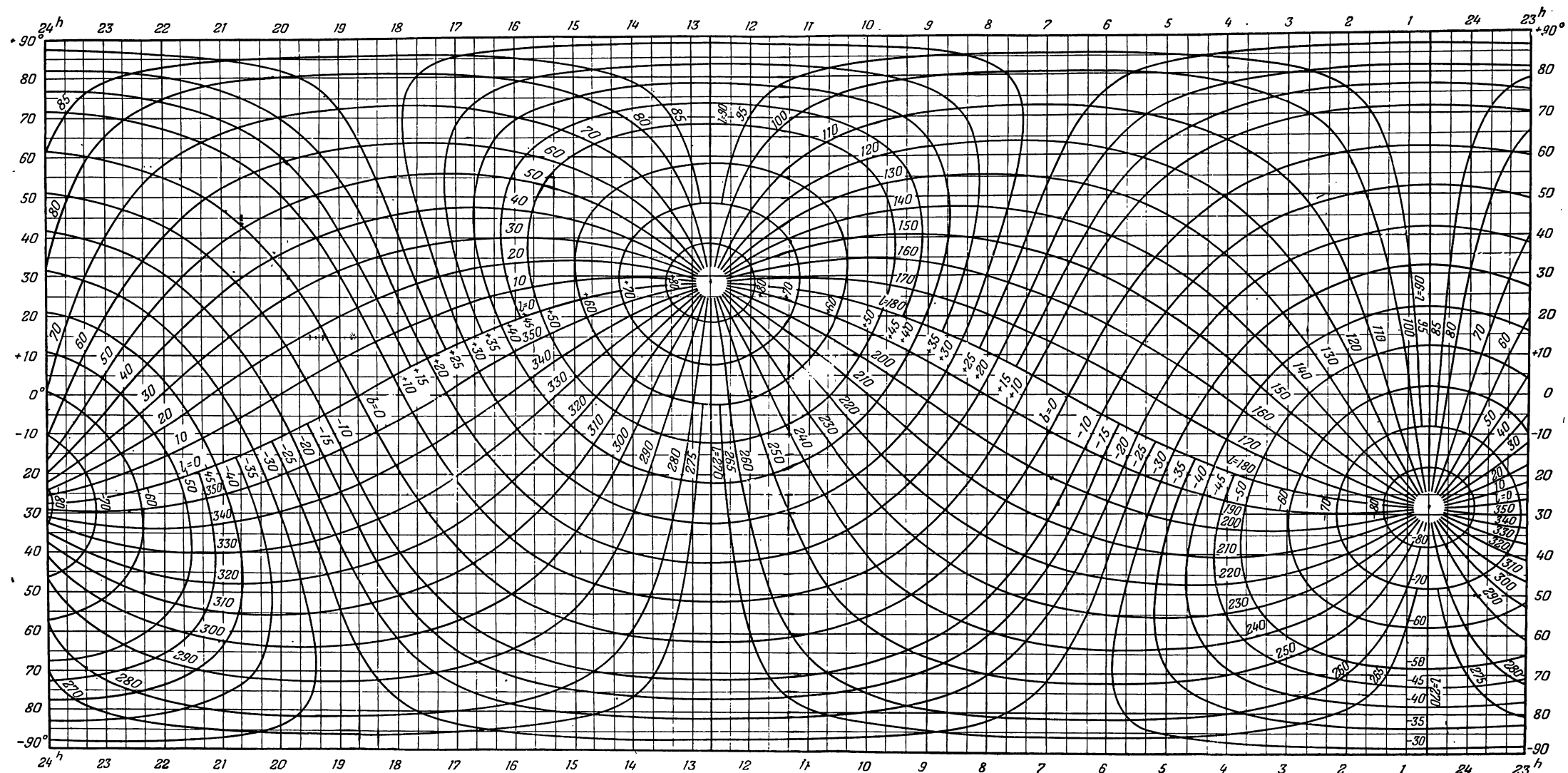
α	δ	0° l	10° l	20° l	30° l	40° l	50° l	60° l	70° l	80° l	90° l
7	0^m	$183^\circ + 4^\circ$	191°	$200^\circ - 5^\circ$	$209^\circ - 10^\circ$	$218^\circ - 14^\circ$	$228^\circ - 18^\circ$	$238^\circ - 22^\circ$	$248^\circ - 25^\circ$	$259^\circ - 27^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$185^\circ + 9^\circ$	$194^\circ + 8^\circ$	$202^\circ - 1^\circ$	$211^\circ - 6^\circ$	$220^\circ - 11^\circ$	$229^\circ - 15^\circ$	$239^\circ - 19^\circ$	$249^\circ - 23^\circ$	$259^\circ - 26^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$187^\circ + 13^\circ$	$196^\circ + 8^\circ$	$205^\circ + 3^\circ$	$213^\circ - 2^\circ$	$222^\circ - 7^\circ$	$231^\circ - 12^\circ$	$240^\circ - 17^\circ$	$249^\circ - 21^\circ$	$259^\circ - 25^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
8	0	$190^\circ + 18^\circ$	$199^\circ + 12^\circ$	$207^\circ + 7^\circ$	$216^\circ + 2^\circ$	$224^\circ - 4^\circ$	$232^\circ - 10^\circ$	$241^\circ - 15^\circ$	$250^\circ - 20^\circ$	$260^\circ - 24^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$192^\circ + 22^\circ$	$201^\circ + 17^\circ$	$210^\circ + 11^\circ$	$218^\circ + 5^\circ$	$226^\circ - 1^\circ$	$234^\circ - 7^\circ$	$242^\circ - 13^\circ$	$251^\circ - 18^\circ$	$260^\circ - 23^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$195^\circ + 26^\circ$	$204^\circ + 21^\circ$	$213^\circ + 15^\circ$	$221^\circ + 8^\circ$	$228^\circ + 2^\circ$	$236^\circ - 4^\circ$	$244^\circ - 11^\circ$	$252^\circ - 17^\circ$	$261^\circ - 23^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
9	0	$198^\circ + 30^\circ$	$208^\circ + 25^\circ$	$216^\circ + 18^\circ$	$224^\circ + 12^\circ$	$231^\circ + 5^\circ$	$238^\circ - 2^\circ$	$246^\circ - 9^\circ$	$253^\circ - 16^\circ$	$261^\circ - 22^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$202^\circ + 35^\circ$	$211^\circ + 29^\circ$	$219^\circ + 22^\circ$	$227^\circ + 15^\circ$	$234^\circ + 8^\circ$	240°	$247^\circ - 7^\circ$	$254^\circ - 14^\circ$	$262^\circ - 21^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$205^\circ + 39^\circ$	$215^\circ + 32^\circ$	$223^\circ + 25^\circ$	$230^\circ + 18^\circ$	$237^\circ + 10^\circ$	$243^\circ + 2^\circ$	$249^\circ - 5^\circ$	$256^\circ - 13^\circ$	$262^\circ - 21^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
10	0	$209^\circ + 43^\circ$	$219^\circ + 36^\circ$	$227^\circ + 28^\circ$	$234^\circ + 21^\circ$	$240^\circ + 12^\circ$	$246^\circ + 4^\circ$	$251^\circ - 4^\circ$	$257^\circ - 12^\circ$	$263^\circ - 20^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$214^\circ + 47^\circ$	$223^\circ + 39^\circ$	$231^\circ + 31^\circ$	$237^\circ + 23^\circ$	$243^\circ + 15^\circ$	$248^\circ + 6^\circ$	$253^\circ - 3^\circ$	$258^\circ - 11^\circ$	$264^\circ - 20^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$219^\circ + 50^\circ$	$228^\circ + 42^\circ$	$236^\circ + 34^\circ$	$241^\circ + 25^\circ$	$246^\circ + 16^\circ$	$251^\circ + 8^\circ$	$256^\circ - 1^\circ$	$260^\circ - 10^\circ$	$265^\circ - 19^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
11	0	$225^\circ + 53^\circ$	$234^\circ + 45^\circ$	$240^\circ + 36^\circ$	$246^\circ + 27^\circ$	$250^\circ + 18^\circ$	$254^\circ + 9^\circ$	258°	$262^\circ - 10^\circ$	$266^\circ - 19^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$232^\circ + 56^\circ$	$240^\circ + 47^\circ$	$244^\circ + 38^\circ$	$250^\circ + 29^\circ$	$254^\circ + 19^\circ$	$257^\circ + 10^\circ$	260°	$263^\circ - 9^\circ$	$266^\circ - 19^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$240^\circ + 59^\circ$	$247^\circ + 49^\circ$	$252^\circ + 40^\circ$	$255^\circ + 30^\circ$	$258^\circ + 21^\circ$	$260^\circ + 11^\circ$	$263^\circ + 1^\circ$	$265^\circ - 9^\circ$	$267^\circ - 18^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
12	0	$249^\circ + 60^\circ$	$252^\circ + 51^\circ$	$258^\circ + 41^\circ$	$260^\circ + 31^\circ$	$262^\circ + 21^\circ$	$263^\circ + 11^\circ$	$265^\circ + 2^\circ$	$267^\circ - 8^\circ$	$268^\circ - 18^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$259^\circ + 62^\circ$	$262^\circ + 52^\circ$	$264^\circ + 42^\circ$	$265^\circ + 32^\circ$	$266^\circ + 22^\circ$	$267^\circ + 12^\circ$	$268^\circ + 2^\circ$	$268^\circ - 8^\circ$	$269^\circ - 18^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$270^\circ + 62^\circ$	$270^\circ + 52^\circ$	$270^\circ + 42^\circ$	$270^\circ + 32^\circ$	$270^\circ + 22^\circ$	$270^\circ + 12^\circ$	$270^\circ + 2^\circ$	$270^\circ - 8^\circ$	$270^\circ - 18^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
13	0	$281^\circ + 62^\circ$	$278^\circ + 51^\circ$	$276^\circ + 42^\circ$	$275^\circ + 32^\circ$	$274^\circ + 22^\circ$	$273^\circ + 12^\circ$	$272^\circ + 2^\circ$	$272^\circ - 8^\circ$	$271^\circ - 18^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$291^\circ + 60^\circ$	$286^\circ + 51^\circ$	$282^\circ + 41^\circ$	$280^\circ + 31^\circ$	$278^\circ + 21^\circ$	$277^\circ + 11^\circ$	$275^\circ + 2^\circ$	$273^\circ - 8^\circ$	$272^\circ - 18^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$300^\circ + 59^\circ$	$293^\circ + 49^\circ$	$288^\circ + 40^\circ$	$285^\circ + 30^\circ$	$282^\circ + 21^\circ$	$280^\circ + 11^\circ$	$277^\circ + 1^\circ$	$275^\circ - 9^\circ$	$273^\circ - 18^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
14	0	$308^\circ + 56^\circ$	$300^\circ + 47^\circ$	$294^\circ + 38^\circ$	$290^\circ + 29^\circ$	$286^\circ + 19^\circ$	$283^\circ + 10^\circ$	280°	$277^\circ - 9^\circ$	$274^\circ - 19^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
20		$315^\circ + 53^\circ$	$306^\circ + 45^\circ$	$300^\circ + 36^\circ$	$294^\circ + 27^\circ$	$290^\circ + 18^\circ$	$286^\circ + 9^\circ$	282°	$278^\circ - 10^\circ$	$274^\circ - 19^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
40		$321^\circ + 50^\circ$	$312^\circ + 42^\circ$	$304^\circ + 34^\circ$	$299^\circ + 25^\circ$	$294^\circ + 16^\circ$	$289^\circ + 8^\circ$	$284^\circ - 1^\circ$	$280^\circ - 10^\circ$	$275^\circ - 19^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$
15	0	$326^\circ + 47^\circ$	$317^\circ + 39^\circ$	$309^\circ + 31^\circ$	$303^\circ + 23^\circ$	$297^\circ + 15^\circ$	$292^\circ + 6^\circ$	$287^\circ - 3^\circ$	$282^\circ - 11^\circ$	$276^\circ - 20^\circ$	$270^\circ - 28^\circ$

Продолжение таблицы Д 8

α	δ	0° $l \quad b$	-10° $l \quad b$	-20° $l \quad b$	-30° $l \quad b$	-40° $l \quad b$	-50° $l \quad b$	-60° $l \quad b$	-70° $l \quad b$	-80° $l \quad b$	-90° $l \quad b$
15 ^h 0 ^m	326° 47'	309° 31'	317° 39'	309° 31'	303° 23'	297° 15'	292° 16'	287° 3'	282° 11'	276° 20'	270° 28'
20	331 43	313 28	321 36	313 28	306 21	300 12	294 4	289 4	283 12	277 20	270 28
40	335 39	317 25	325 32	317 25	310 18	303 10	297 2	291 5	284 13	278 21	270 28
16 0	338 35	321 22	329 29	321 22	313 15	306 8	300 0	293 7	286 14	278 21	270 28
20	342 30	324 18	332 25	324 18	316 12	309 5	302 2	294 9	287 16	279 22	270 28
40	345 26	327 15	336 21	327 15	319 8	312 2	304 4	296 11	288 17	279 22	270 28
17 0	348 22	330 11	339 17	330 11	322 5	314 1	306 7	298 13	289 18	280 23	270 28
20	350 18	333 7	341 12	333 7	324 2	316 4	308 10	299 15	290 20	280 24	270 28
40	353 13	335 3	344 8	335 3	327 2	318 7	309 12	300 17	291 21	281 25	270 28
18 0	355 9	338 1	346 4	338 1	329 6	320 11	311 15	301 19	291 23	281 26	270 28
20	357 4	340 5	349 0	340 5	331 10	322 14	312 18	302 22	292 25	281 27	270 28
40	0 0	342 9	351 5	342 9	333 14	323 18	314 21	303 24	292 26	281 28	270 28
19 0	2 4	344 13	352 9	344 13	335 18	325 21	314 24	304 26	293 28	281 28	270 28
20	5 9	346 18	356 13	346 18	336 22	326 25	315 27	304 29	293 30	281 29	270 28
40	7 13	348 22	358 18	348 22	338 26	327 29	316 30	304 31	293 31	281 30	270 28
20 0	10 18	350 26	0 22	350 26	340 30	328 32	317 34	304 34	293 33	281 31	270 28
20	12 22	352 31	3 27	352 31	341 34	329 36	317 37	304 36	292 35	281 32	270 28
40	15 26	354 35	5 31	354 35	342 38	330 40	317 40	304 39	292 36	280 33	270 28
21 0	18 30	356 40	8 35	356 40	342 42	330 42	317 43	303 41	291 38	280 33	270 28
20	22 35	359 44	11 40	359 44	345 47	330 47	316 46	302 44	290 39	279 33	270 28
40	25 39	1 48	14 44	1 48	346 51	330 51	314 50	300 46	289 41	279 35	270 28
22 0	29 43	3 53	18 48	3 53	347 55	329 55	313 53	299 48	287 42	278 35	270 28
20	34 46	7 57	22 52	7 57	348 59	328 59	310 55	296 50	286 44	277 36	270 28
40	39 50	10 62	27 57	10 62	348 64	326 63	308 58	294 52	284 45	276 36	270 28
23 0	46 53	14 66	33 60	14 66	349 68	322 66	303 61	291 54	282 46	275 37	270 28
20	52 56	19 70	40 64	19 70	349 72	319 70	299 63	287 55	280 46	274 39	270 28
40	61 58	29 74	50 67	29 74	347 77	310 73	293 65	283 56	277 47	273 38	270 28

ДОПОЛНЕНИЕ 9

Диаграмма для перевода экваториальных координат в галактические и наоборот
[репродукция таблицы из Publ. Dominion Astroph. Obs. — Victoria, 4, 4 (1928)]



ДОПОЛНЕНИЕ 10
Таблица перевода единиц длины [перепечатано из Uranii, 24, 102 (1953)]
СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА ЕДИНИЦ УПОТРЕБЛЯЕМЫХ В АСТРОНОМИИ

Группа	Название	Символ	Равно							
			к.ж.	гершель	а. е.	сирометр	пс	кпс	млс	св. г.
Единицы метрической системы	километр	км	1	10^{-13}	$6,69 \cdot 10^{-9}$	$6,69 \cdot 10^{-15}$	$3,24 \cdot 10^{-14}$	$3,24 \cdot 10^{-17}$	$3,24 \cdot 10^{-20}$	$1,06 \cdot 10^{-13}$
	гершель	—	10^{13}	1	$6,69 \cdot 10^4$	$6,69 \cdot 10^{-2}$	$3,24 \cdot 10^{-1}$	$3,24 \cdot 10^{-4}$	$3,24 \cdot 10^{-7}$	1,06
Единицы, основанные на астрономической единице	астрон. единица	а. е.	$1,49 \cdot 10^8$	$1,49 \cdot 10^{-5}$	1	10^{-6}	$4,85 \cdot 10^{-6}$	$4,85 \cdot 10^{-9}$	$4,85 \cdot 10^{-12}$	$1,58 \cdot 10^{-5}$
	сирометр		$1,49 \cdot 10^{14}$	$1,49 \cdot 10$	10^6	1	4,85	$4,85 \cdot 10^{-3}$	$4,85 \cdot 10^{-6}$	$1,58 \cdot 10$
Единицы, основанные на звездных параллаксах	парсек	ps, пс	$3,08 \cdot 10^{13}$	3,08	$2,06 \cdot 10^5$	$2,06 \cdot 10^{-1}$	1	10^{-3}	10^{-6}	3,26
	килопарсек	kps, кпс	$3,08 \cdot 10^{16}$	$3,08 \cdot 10^3$	$2,06 \cdot 10^8$	$2,06 \cdot 10^2$	10^3	1	10^{-3}	$3,26 \cdot 10^3$
	мегапарсек	mps, мпс	$3,08 \cdot 10^{19}$	$3,08 \cdot 10^6$	$2,06 \cdot 10^{11}$	$2,06 \cdot 10^5$	10^6	10^3	1	$3,26 \cdot 10^6$
	световой год	св. г.	$9,46 \cdot 10^{12}$	$9,46 \cdot 10^{-1}$	$6,33 \cdot 10^4$	$6,33 \cdot 10^{-2}$	$3,07 \cdot 10^{-1}$	$3,07 \cdot 10^{-4}$	$3,07 \cdot 10^{-7}$	1
Единицы, основанные на скорости света										

Единицы, употребляемые чаще всего, набраны полужирным шрифтом

ДОПОЛНЕНИЕ 11

Таблицы величин $y = \int_0^x e^{-x^2} dx$ (интеграл Лапласа)

x	y	x	y	x	y	x	y
0,00	0,000	0,60	0,534	1,20	0,807	1,80	0,876
0,05	0,050	0,65	0,569	1,25	0,818	1,85	0,878
0,10	0,099	0,70	0,601	1,30	0,828	1,90	0,880
0,15	0,149	0,75	0,630	1,35	0,836	1,95	0,881
0,20	0,198	0,80	0,657	1,40	0,844	2,00	0,882
0,25	0,245	0,85	0,683	1,45	0,850	2,05	0,883
0,30	0,291	0,90	0,706	1,50	0,856	2,10	0,883
0,35	0,336	0,95	0,727	1,55	0,861	2,15	0,884
0,40	0,379	1,00	0,746	1,60	0,865	2,20	0,885
0,45	0,421	1,05	0,764	1,65	0,869	2,25	0,885
0,50	0,461	1,10	0,780	1,70	0,872	2,30	0,885
0,55	0,499	1,15	0,794	1,75	0,874		



Фото 1 Цирусная туманность в созвездии Лебеда.

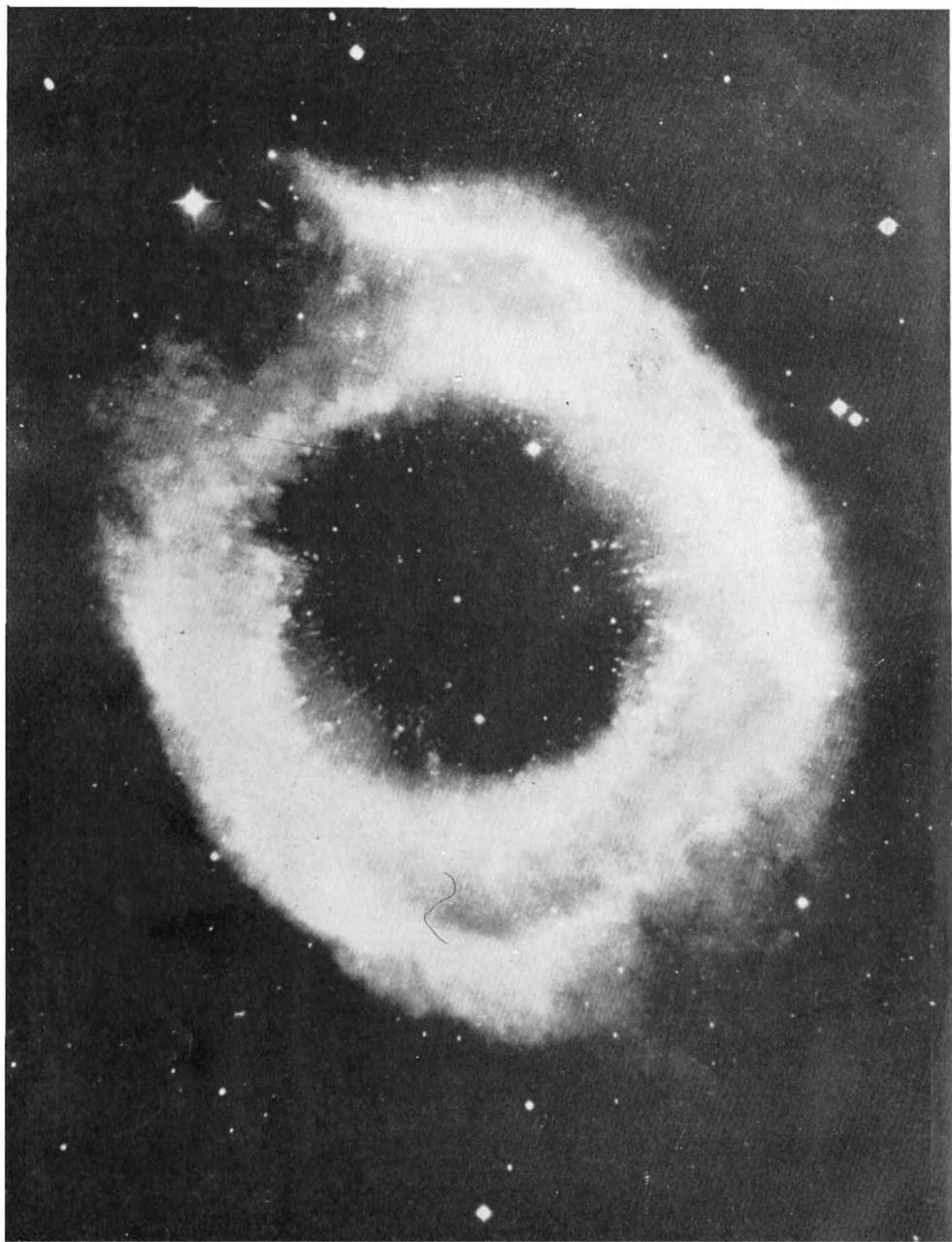


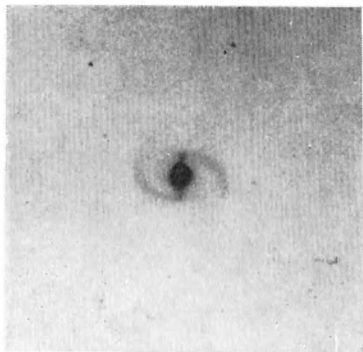
Фото II Планетарная туманность NGC 7293.



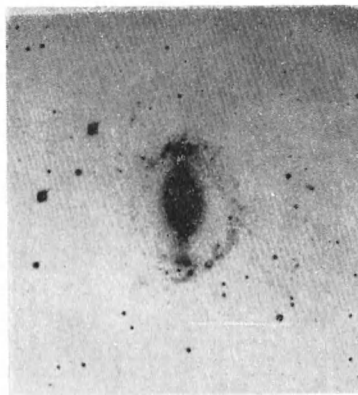
NGC 3351



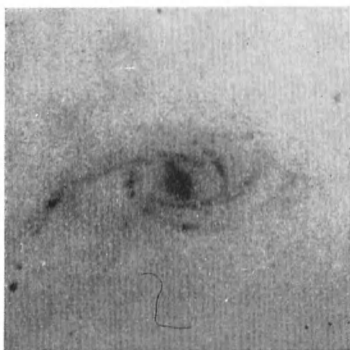
Мессье 83
Фото III



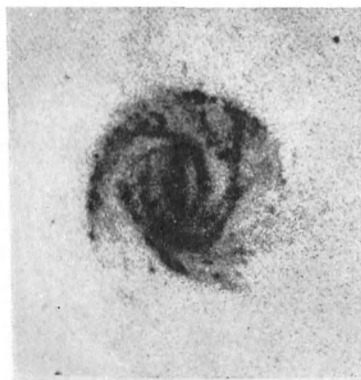
NGC 4440



NGC 5850



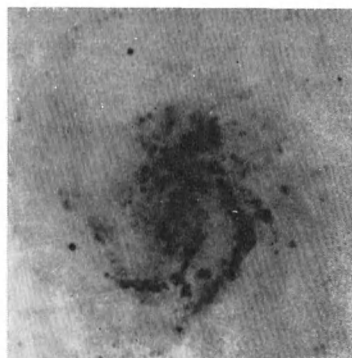
NGC 151



NGC 3367



NGC 4535



NGC 4303



Фото V Двойная галактика, отождествляемая с радиисточником
в созвездии Центавра.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная яркость звезд 35
 Антиапекс 168, 183
 Антицентр 370, 373, 378
 Апекс движения Солнца 20, 163—164, 170—171;
 определение апекса методом Ковальского — Эри 168—170
 — по лучевым скоростям 166—167
 — по пространственным скоростям 164—166
 — по собственным движениям 167—168
 Апогалактий 373
 Асимметрия звездных движений 194—197
 Ассоциации О — и Т — 237—239; см. также *Звездные ассоциации*
 Астрономическая единица 17, 60—61, 72, 431

 Бальмеровский „скачок“ на границе серии Бальмера в спектре звезды 53
 „Бегуны“ 227, 229
 Белые сверхгиганты 227
 Бесконечность вселенной 394—399
 Блеск звезд 36—37
 Болометрическая поправка 41—42, 51, 391
 Бравэ метод 169

 Вашакидзе — Оорта метод 108—114
 Вебера — Фехнера закон 36
 Вертексы движений звезд 183—184
 — истинные 184, 189
 — наблюдаемые 189
 Вина приближение 42
 Винтовая симметрия 284—287

 Возмущения в движении Земли 29
 Волны плотности 329, 335—343
 Вольфа метод 145—147, 150—151
 Вольфа — Райе звезды 14, 80
 Вращение Галактики 159, 195, 197—216
 — кинематическая теория 197—200
 — звезд 67, 202—214
 — местной системы 214—216
 — объектов I типа населения 227—228
 — II типа населения 228
 Время релаксации 250—252

 Галактика 367—379
 — „границы“ 367, 373
 — как система 287, 295
 — поверхности одинаковой плотности 228, 301, 373, 383
 — положение Солнца 13, 372—374
 — полюс 110, 112
 — средний спектральный класс 380
 — „границы“ 380
 — ядра 380
 — размеры 210, 368
 — спиральная структура 161, 369—372, 378, 422—424
 — метод ее определения 369—372, 422
 — форма 368—369
 — эллипсоид 295
 — ядро 229, 368, 370, 373, 376
 Галактики 173, 379—394
 — абсолютные величины 81, 380—381
 — неправильные 56—57, 81, 380
 — нормальные спирали 56—57
 — поле скоростей 341

- Галактики, пространственное распределение 120—121
- спектральный класс 379
 - с перемычкой 56—57, 343—344
 - спиральная галактика в Андромеде (М—31) 226
 - — в Треугольнике 226
 - спиральные 56—57, 81, 120, 252, 387
 - — вращение 388—389
 - — масса 387—388
 - — средний спектральный класс 380
 - сталкивающиеся 393
 - типичная спиральная галактика 344
 - эллиптические 56—57, 81, 120, 252, 378, 387
 - — средний спектральный класс 380
- Галактик классификация 81, 342—345, 380
- линейные диаметры 82
 - лучевые скорости 387—388
 - межзвездный газ 380, 385—389
 - показатели цвета 380
 - размеры 82
 - распределение 120—121, 380—381
 - расстояние 80—82, 382—383, 390
 - скопления 382—383, 390, 397
 - угловые диаметры 82, 387
 - ядра 218, 226, 387
- Галактическая долгота 11, 68, 85, 159, 195, 199, 203, 210, 214, 235, 239
- центра Галактики 68, 207
 - плоскость 12, 105, 109, 111—112, 128, 138, 145
 - система координат 10—12
 - широта 11, 85—86, 107, 109—110, 113, 120, 122, 138, 141, 143, 203, 239
- Галактический полюс 11—12, 14, 87
- центр 161, 373, 376
 - экватор 11—12, 86—87, 109, 113, 120, 125
- Гартмана компаратор 30—32
- формула 30
- Гершель 61—62, 431
- Гиady 173—175
- Главная последовательность 225—227, 239
- Глазомерные оценки блеска звезд 36
- Глобулы 239
- Глубина галактической плоскости 13
- Гравитационная постоянная 72, 256
- Гравитационное поле 211, 244—246, 358
- — иррегулярная составляющая 246—249
 - — регулярная составляющая 246
 - — сглаженное 244—245, 358
- Гравитационный парадокс, см. *Зеелигера парадокс*
- Градиенты пространственной плотности звезд 231—232, 234, 369
- Движение Солнца 209
- — относительно окружающих звезд (методы определения) 163—171
 - — других небесных объектов 162, 171
 - — к апексу 20, 163—164, 170—171
 - центроида 280, 286, 310
- Дзевульского метод определения эллипсоида скоростей 185—187
- Диаграмма спектр—светимость (Герцшпрунга—Рессела) 53, 125, 217—227, 237
- — исправленная 218, 222
 - — линейная 220
 - — рассеянных скоплений 225—226
 - — шаровых скоплений 225—226
 - полярная 183
 - Стремберга 194
- Диаметр галактик линейный 82
- — угловой 82
 - местной системы 216
 - скоплений линейный 125
 - — угловой 125, 173
- Дирака δ -функция 419—420
- Дисперсия 410—413
- абсолютных величин 75, 78, 99, 108, 110, 147—148, 152, 218, 390
 - диаметров скоплений 126

Дисперсия избытков цвета 141—143
— масс звезд 70
— скоростей 172, 178, 191—192, 194—196, 310, 329
— спектра 33
Дистрибуанта 149

Зависимость масса-радиус 239
— масса-светимость 73, 165, 222—223, 388
— период-светимость 73—77, 222—223
— скорости от расстояния 386
Звездная величина 36—37, 40
— абсолютная 37—38, 42, 45, 53, 63—64, 76, 77, 80, 84, 93, 96, 107, 109, 112, 118, 125, 127, 139, 146—147, 149, 218, 222—223, 230
— болометрическая 41—42, 73
— видимая 43, 47, 76, 91, 93, 98, 102, 107, 110, 115, 118, 122, 127
— визуальная 40, 85—86, 134
— фотовизуальная 41, 134
— фотографическая 40, 47, 85, 116, 134
— фотокрасная 41
— фотоэлектрическая 41
— плотность 90, 91, 94, 96, 98, 100—102, 111, 146, 235, 311
Звездные ассоциации 55, 234—241, 377, 379
— возраст 236—237
— диаграмма спектр-светимость 237—238
— распад 236, 241
— рождение 241
— цепочки 235
— число в Галактике 237
— объектов в каждой ассоциации 237
— облака; см. *Сгущения звезд*
— ядра 235
„Звездный газ“ 243—244
Звезды абсолютно слабые 114, 127
— Вольф-Райе 14, 80
— двойные 72, 117, 220
— кратные 117

Звезды новые 78
— нормальные 197
— переменные 74, 77, 231; см. также *Переменные звезды*
— сверхгиганты 14, 52, 227
— сверхновые 79, 239, 249, 379
— типа В 14—15, 50, 80, 231, 233
Зеелигера парадокс 393
Зона избегания 120, 374, 119—120

Иерархическая модель вселенной Шарлье 396—398
Избранные площадки 107
Избыток цвета 14, 45—46, 132—135, 141—143
— галактик 141
Инерциальная система отсчета 163, 197
Интегральная фотометрия 64—65
Интегральные уравнения звездной статистики 90—98, 109, 147
Интенсивность падающего излучения 38, 125, 129
— наблюдаемого излучения 38, 125, 129
Иррегулярные силы 244—257, 309, 394
Искривление спектральных линий 31
„Исправление“ распределения 413—417

Каптейна — Бока схема пространственного распределения звезд 100—108, 112
— план избранных площадей 107
— потоки 178—185, 310
Каталоги лучевых скоростей 31
— слабых звезд 24
— фотометрические 46—47, 88
Квазисфероидальное состояние 333
Кинематические характеристики звезд главной последовательности 239—240
Классификация Бааде 226—229
— галактик Хаббла 56—57
— звездных спектров (Гарвардская) 48—52

- Классификация Барбье—Шалонжа 53
 — — — двумерная 52—53
 — Кукаркина 229—234
 — различных космических объектов 55—57
 — спектральная 48, 132, 218
 Клейбера теорема 18—19
 Клочковатость межзвездной материи 97—98, 106, 113, 135—145
 Ковальского — Эри метод 167—170
 Кольца вокруг центра Галактики 341—343
 Конденсация первичного газа 339, 341, 343
 Координаты галактические 10—12, 199
 — гелиоцентрические 15
 — полюса Галактики 10, 12
 — прямоугольные 14
 — сферические 161, 186
 — цилиндрические 205—206, 294
 — экваториальные 11—12, 15, 27, 164
 — эклиптические 29
 „Коридоры видимости“ 373, 376—377
 Корню формула 30
 Корпускулярное излучение 224
 Коэффициент межзвездного поглощения 15, 125, 127, 129—130
 — прозрачности 39—40
 — рассеяния 156—157
 Крабовидная туманность 379
 Красное смещение 80—81, 390
 К-эффект 211

 Лапласа интеграл 182
 Лучевые скорости галактик 81, 385
 — — звезд 16, 27—33, 67, 107, 165, 167, 191, 207
 — — линий межзвездного газа 159
 — — средние 200
 Льюитена метод 115—118

 Магеллановы облака, Большое 367, 382
 — — Малое 382
 Магнитные поля Галактики 379
 Максвелла распределение скоростей 137

 Малый круг Галактики 12, 14
 Масса Галактики 155, 157, 213
 — водорода 156
 — галактического ядра 368
 — звезд 117, 193
 Межгалактическое пространство 122, 393—394, 398
 Межзвездная материя 118—162, 358—389
 — — газовая составляющая 155—162
 — — — — масса 117
 — — — — химический состав 160, 380
 — — плотность 124, 131
 — — пылевая составляющая 124, 157, 370—371
 — — средняя плотность 136—137, 159
 — — строение 154—155
 Межзвездное поглощение 38, 43, 45, 63, 75—76, 84—85, 91, 98, 108, 112—114, 122—130, 154, 157, 375
 — — непрерывное 119, 156—157
 — — селективное 131—135, 142
 — — среднее 107, 130, 137
 Межзвездные линии 79—80, 155—159
 — — водорода (эмиссионные) 160—162, 380
 — — для определения лучевых скоростей 159
 Межзвездный газ 79—80, 156, 158, 227
 Местная система 87, 214—215, 375—376
 Местное скопление 381—383
 Метод радиантов 183—185, 189
 Методы определения звездной плотности аналитические 90—91, 100—101
 — — — — численные 90—100
 Минимальная поверхностная яркость 139
 Млечный путь 107, 119—120, 374

 Наклон плоскости галактического экватора к земному экватору II
 Население I и II типов 226—229, 231—232, 301, 368—369, 373, 378, 380

- Начальная кривая 223
 Новые звезды 78
 Нормальное распределение Гаусса 117, 187, 410—412
 — — — многомерное 412—413
 „Нормальные“ звезды 197, см. *Звезды*
 Нульпункт 76—78
 Нутация 23
 Ньюкома постоянные 24
- Области межзвездного водорода 160—162
 — — — HI 160, 162, 369, 371
 — — — HII 160—161, 369—371, 378
 — с избытком слабых звезд 88
 Огородникова метод 152—154, 208
 Ольберса парадокс 395—398
 Оорта постоянные 210—215, 384
 — формула числа галактик 122—124
 — формулы вращения 202—214
 Орбита Солнца 373—374
 Орбиты звезд 358—366
 — — круговые 354—363
 — — почти круговые 360—365
 — — произвольные 365—366
 Освещенность 37
 Осевая симметрия 328
 Основные уравнения звездной статистики 263—265, 267
 „Остаточная“ скорость 241
 Отклонение от равновесного движения 320—329
 Относительная ширина линии 79
 Ошибка нульпункта шкалы 46—47
- Паннекука метод 147—152
 Параллакс 57—82
 — вековой 163
 — годичный 16, 20, 27, 38, 58, 59, 115, 163
 — групповой 68—70, 209
 — динамический 70—72
 — затменных переменных 72—74
 — индивидуальный 70
 — отрицательный 59—60
 — переменных звезд 74—79
- Параллакс Солнца 30
 — спектральный 60, 62—64, 77, 80, 127, 165, 192
 — средний 59, 65—67, 93—95
 — суточный 20
 — тригонометрический 57—60, 65, 75, 88, 127, 192, 218
 — экваториальный горизонтальный Солнца 29—30
 Параллактическое движение звезд 19—21, 65, 163, 172
 Парсек 61, 87, 431
 Пекулярное движение звезд 19—21, 26, 65, 172, 176, 192, 209—210, 229
 Пекулярные скорости галактик 393
 — — звезд 68, 228, 229
 — — различных групп звезд (средние значения) 173
 Переменные долгопериодические 231
 — — типа Миры Кита 78, 171, 173, 231—232
 — — — RR Lyr 77, 171, 227, 231
 — — — W Vir 78, 231
 Перигалактий 373
 Период изменения блеска 74—75, 77—78
 — полураспада звездной системы 252—254
 Пертурбационного исчисления метод 341
 Плеяды 225
 Плоская составляющая 68, 230—233, 236—237, 356—358, 368, 376—377
 Поверхности одинаковой плотности 228, 301, 373, 383
 Подсистемы звезд 196, 229—234, 298—301
 Подсчет звезд 83—90
 Показатель цвета 44—47, 51, 54, 107, 132—133, 142, 237
 Покраснение галактик 123—124, 381, 384, 391, 399
 — звезд 45, 47, 133, 157, 211; см. также *Избыток цвета*
 — межзвездное 47, 49
 Полная внутренняя энергия 255, 257

- Полос Галактики 110, 112
 Потенциал вида $\Phi(R, z) = \Phi_1(R) + \Phi_2(z)$ (винтовой) 271—272, 284—297
 — гравитационный 211, 253, 257, 272, 278, 290—301
 — в окрестностях Солнца 347—353
 — общая форма 269—270, 296, 301, 309, 311
 — с осевой симметрией 270, 287—292
 — со сферической симметрией 271
 Пояс Гулда 15, 87; см. также *Местная система*
 Прецессия 23
 Приведение лучевых скоростей к Солнцу 27—30
 Проблема n тел 406—410
 Промежуточная составляющая 231—233
 Пространственное распределение звезд 105—106, 210, 230, 353—358
 — — галактик 381
 Пространственные скорости звезд 33—34, 164—165, 185, 190
 „Протозвезды“ 239; см. также *Глобулы*
 Пуассона закон 138
 — — для числа облаков на луче зрения 149
 — распределение 97, 106, 144
 — уравнение 266—267, 280, 297, 300
 „Равновесие“ плоской составляющей 236
 Радиант 69, 173—176
 Радиоизлучение 379, 393—394
 — нейтрального водорода ($\lambda = 21$ см) 162, 369—371, 420—421
 Радиус экваториального сечения Галактики 157
 „Разбегание“ галактик 389—392, 398
 Распределение скоростей 173—180, 190—192, 310
 — — обобщенная форма (Шварцшильда) 276—280
 — — сферическое 176, 183, 301—310
 Распределение эллипсоидальное 178—179, 185—190, 273—275
 Расстояние Солнца от галактической плоскости 12—14
 Расстояние галактик 80—82
 — определяемые по межзвездным линиям 79—80
 Расширение вселенной 398—399
 Реверсионный метод Пикеринга — Шварцшильда 32—33
 Регулярные силы 244, 257—345
 Сближение звезд 246—249, 251
 Сверхновые 79, 239, 379
 Светимость звезд 37, 73, 76, 139
 Световой год 61, 431
 Сгущение звезд 370, 372—376
 Северный полярный ряд 35, 37, 46, 47, 61
 Сириометр 60, 431
 Система прямоугольная галактическая 34
 — — экваториальная 33
 Системы в динамическом равновесии 266
 — в статистическом равновесии 266
 — двойные 381—382, 388
 — звездные 265—266
 — кратные 381—382
 — нестационарные 266, 276—280, 311, 347—350
 — стационарные 266—276, 284—294, 347—350
 — с центральной массой 272
 — типа Трапеции 235
 Ситтера де теория 398—399
 Скопление Большой Медведицы 173
 — Гиады 173—175
 — М 67 225—226
 — NGC 2362 225—226
 — Плеяды 225
 — Скорпиона — Центавра 175
 — Ясли 220, 225
 Скопления звезд 55
 — — движущиеся 55, 68—69, 172—178, 377—378

- Скопления звезд рассеянные 14, 55, 125, 172—173, 225—226, 229, 236, 376—378
 — шаровые 55, 74, 171—173, 225—227, 274—275, 377
 Скорость вращения Галактики 211
 — центроида 201, 213
 — геоцентрическая „освобожденная“ 30
 — круговая 355
 — линейная 27
 — „остаточная“ 241
 — параболическая 197, 213
 — Солнца 209
 — относительно центроидов подсистем 230—231
 — средняя группы звезд 192
 — удаления звезд из ассоциаций 241
 — центроида в данной точке 192—193, 196—198, 207—209
 Спектральная классификация 48—54
 Спектр линейчатый 48—49, 55, 132
 — непрерывный 49, 54
 Спиральная симметрия 313—314
 — структура Галактики 161, 369—372, 378, 422—424
 — — Линдблада 315—345
 — — Чандрасекхара 301—315
 Спиральные ветви 227, 370
 Собственные движения галактик 358
 — звезд 15—27, 115—117, 182, 184, 187
 — — — абсолютные 21, 27
 — — — ассоциаций 236
 — — — относительные 22, 24—26
 — — — параллактические 187
 — — — средние 163
 Составляющие:
 плоская 230—133, 236—237, 356—358, 368, 376—377
 промежуточная 231—233
 сферическая 230, 232—233, 356—358, 368, 376—377
 Средние квадратичные скорости 187
 — места фундаментальных звезд 23
 — расстояния звезд 169
 Средние скорости 192
 Средний радиус туманности 137—138
 Средняя плотность звезд 15, 378
 — скорость звезд 387
 — фазовая плотность 264
 Стандарт лучевых скоростей 31
 Стандартная звездная система 329—339
 Стефана — Больцмана закон 42
 Столкновение галактик 393
 Стремберга диаграмма 194—195, 213
 Сферическая составляющая 230, 232—233, 356—358, 368, 376—377
 Сферические координаты 161, 185—186
 Тангенциальная скорость 16—17, 19, 66, 93, 107, 180—181, 187, 208
 Телец А 379
 Температура звезд 51, 133, 218
 Теорема о вириале 254
 Теория двух потоков 180, 183, 187—188
 Трюмплера метод подсчета коэффициента межзвездного поглощения 125—127
 Туманности внегалактические 56; см. также *Галактики*
 — галактические 378—379
 — газové 55, 140, 369; см. также *Области межзвездного водорода*
 — — диффузные 140
 — — планетарные 14, 55, 173, 379
 — — пылевые 55
 — — светлые 55, 139—140, 145, 239, 379
 — — темные 55, 145, 149, 239
 — — циркульные 56, 379
 Тёрнера метод определения относительных собственных движений 25—26
 Устойчивость звездной системы 257
 Фазовая плотность звезд 268, 316
 — массы 316
 — точка звезды 258

- Фазовая траектория 268—269
Фазовое пространство 257—263, 269
— — лемма о несжимаемости 261—263, 316
Фигуры Каптейна 183
Формулы сферической тригонометрии 11—12
Фотометрическая система 38—44, 65, 96, 119, 135
— сумма звездных величин 220
— шкала 35—37
Фотометрические расстояния 14, 35
— системы 38—44
Фотометрический парадокс; см. *Парадокс Ольберса*
Функция Камма 200—202, 300, 422
— распределение координат и скоростей 259—261, 264, 267
— светимости 91—110, 114—118, 148
— — в форме Гаусса 98
Характеристические уравнения 285—286, 303—307, 418—419
Химический состав звезд 222—224
Цветовые эквиваленты; см. *Показатели цвета*
Центральная масса 272
Центр масс 193, 214
— Местной системы 216
Центроид группы звезд 20, 192—194, 277
— — — движение центроида 186, 280, 310
Цефеиды 77—78, 128, 173, 231
Цилиндрические координаты 294
Шварцшильда интегральные уравнения:
— первое 92, 94
— второе 92, 95—96
Шкала звездных величин 35—37, 125
Эволюция галактик 343—344
— звезд 117, 223—225
Эддингтона метод определения вертексов 183, 185
Экваториальные координаты 10—11, 431
Эквивалентная ширина линии 159
Эклиптические координаты 10, 58, 431
Экстинкция атмосферная 35, 45
— межзвездная 119; см. также *Межзвездное поглощение*
Элементы галактической орбиты Солнца; см. *Орбита Солнца*
Эллипсоидальная теория 178, 185, 190
Эллипсоид скоростей 179, 185—192, 274
— — коэффициенты эллипсоида 281—284, 287—290, 297
Эпоха равнодействия 11
Эталоны фотометрические 35, 37; см. *Северный полярный ряд*
Эффективный потенциал 319, 327
Эффект „разбавления“ световой энергии 391
— „энергии“ 391
Яркость поверхностная туманности 139
Ясли 220, 225

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амбарцумян 139, 145, 229, 236—237, 239, 241, 249, 257
Андрэ 404
- Бааде 226—227, 229
Барбье 53
Бархатова 127
Баум 54
Беккер 65, 127, 404
Бессель 168
Бильс 79
Бок 90, 101—102, 105, 109—111, 116, 405
Бонди 406
Босс 22
- Боттлингер 200
Бравэ 166
Брадлей 163
Бутлер 89
- Ван де Холст 162, 420
Вашакидзе 109
Вилсон 24
Вильямс 128, 131
Вольф 145
Воронцов-Вельяминов 376, 394
- Гапошкин 74
Герцшпрунг 218
Гершель 167, 170
Гинек 134
Гнеденко 412
Горделадзе 139
Гребнер 130
- Дейч 24
Дженкинс 59
- Джойнер 85
Джонсон 225
Джордано Бруно 394—395
Дзевульский 60, 185, 215
- Зеелигер 61, 90, 395
Зонн 77, 130, 142, 370
- Ивановская 74
- Калиняк 368
Камм 297, 300
Каптейн 90, 101, 106—107, 176—178
Карпович 215
Кейпер 51, 227
Кельман 52
Кинан 52
Колхидашвили 19
Красовский 368
Круликовский 315
Кудерк 382—383
Кукаркин 74, 77, 141—144, 229—232, 234, 237
Кэннон 48
- Лангебартель 315, 406
Линдبلاد 61, 64, 195—197, 315—316, 333, 340—341, 406
Лютен 115—117
- Маанен ван 88
Мак-Ри 102, 109—111
Мальмквист 98, 108
Маркарян 236
Масевич 225, 239
Милн 208
Минер 214—215
Морган 52, 161, 371

- Муллер 162, 420
Мунч 150
Нижонов 368
Огородников 147, 200, 204, 215, 251, 255, 406
Оке 79
Ольберс 395, 398
Ольсон 12
Оорт 123, 162, 278, 347, 352, 370
Остербрук 161, 371
Пален 93, 252, 403, 405
Паннекук 147
Паренаго 51, 59, 77, 116, 123, 128 130—132, 137, 143, 145, 169, 201, 225, 227, 233—234, 237—239, 295, 355, 357—358, 366, 373, 403, 425
Пикеринг 32, 48
Пиловский 200
Псковский 77
Раймонд 24
Райн ван 85, 87, 90, 118, 190
Рессел 72, 218
Ричмонд 85
Сальвадори 105
Сирс 85—87, 90, 105—106
Ситтер де 391, 398
Слейфер 389
Смак 159
Смарт 180, 315
Стеббинс 135
Стиббс 202
Стремберг 172—173
Стремгрен 65
Стржалковский 379
Струве О. 154
Сэндейдж 54
Толмэн 391
Трюмплер 125—126, 352, 412—413
Тюльдер ван 14
Тэрнер 61
Уивер 352, 405, 412—413
Уитфорд 135
Фесенков 225
Финли-Фрейндлих 392
Фрике 297, 301
Хаббл 57, 120, 123, 358, 381, 384, 390—392, 406
Хабибулин 370
Хавтаси 137, 143
Хаффер 135
Хольмберг 381
Хэйфорд 208
Цвикки 369
Чандрасекхар 229, 252, 254; 278, 284, 298, 301, 314—315, 405
Шалонж 53
Шарлье 60, 90, 396—397
Шарплесс 161, 371
Шацова 117, 215
Шварцшильд 90—91, 178—179
Швасман 118
Шкловский 368, 371, 393, 399
Шмидт 215—216
Шнирельман 376
Эддингтон 100, 178, 180, 185, 365, 413
Эйгенсон 393
Эйнштейн 396
Эпик 239
Юмасон 369, 380

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому переводу	5
Предисловие	7

Глава 1.

Основные сведения

§ 1. Предмет звездной астрономии	9
§ 2. Координаты	10
1. Система координат	10
2. Определение положения галактического полюса и расстояния Солнца от галактической плоскости	12
§ 3. Собственные движения звезд	15
3. Общие сведения	15
4. Пекулярное и параллактическое движение звезд	19
5. Определение абсолютных собственных движений	21
6. Определение относительных собственных движений	24
§ 4. Лучевые скорости	27
7. Определение	27
8. Приведение лучевых скоростей к Солнцу	27
9. Техника наблюдений лучевых скоростей	30
10. Определение лучевых скоростей с помощью бесщелевых спек- трографов	32
11. Пространственные скорости звезд	33
§ 5. Блеск, цвета и спектры звезд	35
12. Шкала звездных величин	35
13. Светимости звезд	37
14. О разных фотометрических системах	38
15. Показатели цвета (цветовые эквиваленты)	44
16. Фотометрические каталоги	46
§ 6. Спектральная классификация	48
17. Гарвардская классификация	48
18. Двумерная классификация Моргана, Кинана и Келльман	52
19. Попытки введения новых классификаций	53
§ 7. Классификация различных космических объектов	55
20. Скопления и туманности	55
21. Галактики	56

§ 8. Параллаксы звезд	57
22. Тригонометрические параллаксы	57
23. Спектральные параллаксы звезд	62
24. Средние параллаксы, определенные по собственным движениям звезд	65
ПАРАЛЛАКСЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ	
25. Групповые параллаксы	68
26. Динамические параллаксы	70
27. Параллаксы затменных переменных	72
28. Параллаксы переменных звезд	74
29. Расстояния, основанные на измерениях интенсивности межзвездных линий в спектрах звезд	79
30. Расстояния галактик	80

Глава II

Пространственное распределение звезд и межзвездной материи в Галактике

§ 9. Подсчеты звезд	83
31. Функции $N(m)$ и $A(m)$	83
32. Главные результаты подсчетов звезд	85
33. Замечание о технике подсчетов звезд	88
§ 10. Методы исследования пространственного распределения звезд в Галактике (Основные интегральные уравнения звездной статистики)	90
34. Аналитические методы	90
35. Аналитические методы в приложении к избранным звездам	98
36. Численные методы (схема Каптейна — Бока)	100
37. Метод Вашакидзе — Оорта	108
§ 11. Функция светимости $\varphi(M)$	114
38. Общие замечания	114
39. Метод Лютена	115
§ 12. Межзвездная материя. Пылевая составляющая межзвездной материи	118
40. Введение; зона „избегания“	118
41. Пространственное распределение пылевой составляющей межзвездной материи	124
42. Селективное межзвездное поглощение	131
43. „Клочковатая“ структура межзвездной материи	135
44. Исследования отдельных темных туманностей	145
45. Строение межзвездной материи	154

ГАЗОВАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ МЕЖЗВЕЗДНОЙ МАТЕРИИ

46. Межзвездные линии в спектрах звезд	155
47. Результаты исследований эмиссионных линий межзвездного водорода	160

*Глава III***Кинематика звездных систем**

§ 13. Движение Солнца относительно окружающих звезд	163
48. Общие сведения	163
49. Определение апекса по пространственным скоростям звезд . .	164
50. Определение апекса по лучевым скоростям	166
51. Определение апекса по собственным движениям	167
52. Метод Ковальского — Эри	168
53. Результаты определения апекса Солнца	170
§ 14. Закономерности в звездных движениях	172
54. Пекулярные движения звезд	172
55. Движущиеся звездные скопления	172
56. Общие закономерности движений звезд	176

ТЕОРИЯ ДВУХ ПОТОКОВ

57. Определение параметров двух потоков на основании изучения собственных движений звезд	180
58. Общие замечания о теории двух потоков	183

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

59. Метод Дзевульского определения параметров эллипсоида ско- ростей звезд	185
60. Определение эллипсоида скоростей по собственным движе- ниям звезд	187
61. Общие замечания, связанные с определением параметров рас- пределения скоростей звезд	190
§ 15. Движения центроидов. Вращение Галактики	192
62. Понятие центроида	192
63. Асимметрия звездных движений	194
64. Кинематическая теория вращения Галактики	197
65. Функция Камма	200
66. Формулы Оорта	202
67. Физическая интерпретация формул Оорта	204
68. Графическая интерпретация формул Оорта	207
69. Практическое применение формул Оорта	208
70. Обсуждение результатов, полученных из формул Оорта	210
71. Вращение местной системы	214

*Глава IV***Вопросы эволюции звезд**

§ 16. Диаграмма спектр — светимость (Герцшпрунга — Рессела)	
72. Наблюдательные данные	217
73. Теоретический смысл диаграммы спектр — светимость	222
74. Диаграмма спектр — светимость звезд, принадлежащих к раз- ным группам	225

§ 17. Звездное население и подсистемы	226
75. Население I и II типа	226
76. Подсистемы звезд	229
77. Звездные ассоциации	234

Глава V

Динамика звездных систем

§ 18. Общие сведения	242
78. Введение	242
79. Регулярные и иррегулярные силы	244
§ 19. Иррегулярные силы	246
80. Сближения звезд	246
81. Результат действия многих сближений на одиночную звезду	249
82. Время релаксации	250
83. Период полураспада	252
84. Теорема о вириале	254
85. Тождество Лагранжа	256
§ 20. Регулярные силы	257
86. Фазовое пространство	257
87. Функция распределения положений и скоростей	259
88. Лемма о несжимаемости фазового пространства	261
89. Основное уравнение звездной динамики	263
90. Классификация звездных систем	265
91. Уравнение Пуассона	266

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ И СКОРОСТЕЙ

92. Стационарная система	267
93. случай I: общая форма потенциала	269
94. случай II: потенциал с осевой симметрией	270
95. случай III: потенциал со сферической симметрией	271
96. случай IV: потенциал вида $\Phi(R, z) = \Phi_1(R) + \Phi_2(z)$	271
97. Другие формы потенциала	272
98. Применение случая II к теории Галактики	272
99. Возможность применения случая III к теории шаровых ско- плений	274
100. Другие применения	275

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОТЕНЦИАЛА. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

101. Преобразование уравнения в предположении обобщенного распределения Шварцшильда	276
102. Решение первой группы уравнений	280
103. Решение уравнений второй группы	283
104. Теорема о винтовой симметрии	284
105. Упрощение уравнений в случае двух измерений	287

106. Решение третьей группы уравнений в случае двух измерений	288
107. Обобщение для случая трех измерений	292
108. Сравнение эллипсоидальной теории с наблюдениями	294
109. Критика эллипсоидальной теории	296
110. Существование звездных подсистем	298

ТЕОРИЯ СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ЧАНДРАСЕКХАРА

111. Упрощение уравнений в случае сферического распределения скоростей	301
112. Вывод характеристических уравнений	303
113. Решение характеристических уравнений	304
114. Форма потенциала и функции σ	308
115. Физическая интерпретация решения	310
116. Спиральная структура	312

ТЕОРИЯ ЛИНДБЛАДА СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ГАЛАКТИК (НАПИСАНО В. КРУЛИКОВСКИМ)

117. Введение	315
118. Уравнения движения масс	316
119. Уравнения, описывающие отклонения от равновесного движения	320
120. Стандартная звездная система	329
121. Волны плотности в стандартной звездной системе	335
122. Происхождение и развитие спиральной структуры	339
§ 21. О некоторых применениях звездной динамики к исследованиям распределения и движения звезд в Галактике	346
123. Введение	346
124. Работы Оорта над потенциалом в окрестностях Солнца	347
125. Динамические исследования пространственного распределения звезд в Галактике	353
§ 22. Орбиты отдельных звезд	358
126. Общие рассуждения	358
127. Круговые орбиты	359
128. Устойчивость круговых орбит и почти круговые орбиты	360
129. Относительное движение звезд по почти круговым орбитам	363
130. Произвольные орбиты	365

Глава VI

Основные результаты исследований в области звездной астрономии

§ 23. Галактика	367
131. Форма и размеры Галактики	367
132. Спиральная структура Галактики	369
133. Положение Солнца в Галактике	372
134. Звездные облака	374
135. Звездные скопления	376
136. Галактические туманности	378

§ 24. Другие галактики	379
137. Общие статистические данные	379
138. Пространственное распределение галактик	381
139. О движении звезд и межзвездной материи внутри галактик	385
140. О так называемом „разбегании“ галактик	389
141. Межгалактическое пространство	393
§ 25. Проблема бесконечной вселенной	394
142. Исторические замечания	394
143. Современные космологические теории	396
144. „Разбегание“ галактик и „расширение“ вселенной	398

Дополнения

1. Список важнейших учебников и монографий по звездной астрономии	403
2. Проблема n тел	406
3. Распределение Гаусса (нормальное распределение)	410
Многомерное нормальное распределение	412
4. Исправление наблюдаемых распределений за ошибки наблюдений	413
5. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных методом характеристических уравнений	417
6. δ -функция Дирака	419
7. Определение расстояний областей, излучающих линию $\lambda = 21 \text{ см}$	420
8. Таблицы перевода экваториальных координат в галактические	425
9. Диаграмма для перевода экваториальных координат в галактические и наоборот	430
10. Таблица перевода единиц длины [перепечатано из <i>Uranii</i> , 24, 102 (1953)]	431
11. Таблицы величин $y = \int_0^x e^{-x^2} dx$ (интеграл Лапласа)	432
12. Предметный указатель	433
13. Именной указатель	441

В. Зонн, К. Рудницкий

ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ

Редактор *Е. Д. ПАВЛОВСКАЯ* Художник *Д. С. Громан*

Художественный редактор *Е. И. Подмарькова* Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 17/X 1958 г. Подписано к печати 21/II 1959 г. Бумага 60x92 $\frac{1}{16}$ =14,3
бум. л. 28,6 печ. л., в т/ч 4 вкл. Уч.-изд. л. 27,3. Изд. № 27/4529 Цена 21 р. 10 к. Зак. 3594.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза,
Ленинград, Измайловский пр., 29.