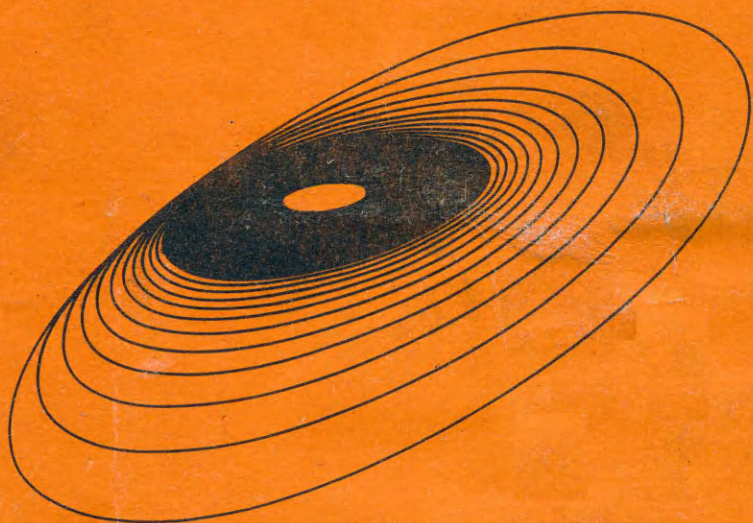


В.В. Салмин

ОПТИМИЗАЦИЯ  
КОСМИЧЕСКИХ  
ПЕРЕЛЕТОВ  
С МАЛОЙ  
ТЯГОЙ



« МАШИНОСТРОЕНИЕ »

В.В. Салмин  
ОПТИМИЗАЦИЯ  
КОСМИЧЕСКИХ  
ПЕРЕЛЕТОВ  
С МАЛОЙ ТЯГОЙ

Проблемы совместного  
управления траекторным  
и угловым движением



Москва  
«Машиностроение» 1987

Рецензент д-р техн. наук *М.С. Константинов*

- С16 Салмин В.В.** Оптимизация космических перелетов с малой тягой: Проблемы совместного управления траекторным и угловым движением. — М.: Машиностроение, 1987. — 208 с.

В монографии рассмотрены задачи оптимального управления траекторным и угловым движениями космических аппаратов с электрореактивными двигателями малой тяги при межорбитальных переходах и межпланетных перелетах. Проанализированы особенности управления движением аппаратов с комбинированной двигательной установкой, состоящей из двигателей большой и малой тяги.

Описаны методы отыскания приближенно-оптимальных траекторий и управлений, а также их оценок на основе принципа расширения класса допустимых состояний и управлений и достаточных условий абсолютного минимума В.Ф. Кротова.

Библиогр.: 94 назв. Ил.60. Табл. 9.

С 3607000000-127  
038 (01)-87 127-87

С начала 50-х годов в литературе по космонавтике обсуждаются различные аспекты проблемы применения электрореактивных двигателей (ЭРД) для продолжительных космических перелетов. Повышенный интерес к использованию ЭРД объясняется в первую очередь высокой экономичностью этих двигателей, выражающейся в малом расходе массы рабочего тела на единицу тяги.

Тяга ЭРД невелика, так что отношение реактивного ускорения космического аппарата (КА) к гравитационному ускорению составляет величину порядка  $10^{-5}$  ...  $10^{-4}$ . Именно поэтому ЭРД часто называют двигателями малой тяги.

В настоящее время механика полета с малой тягой выделилась, по существу, в новый раздел механики космического полета, рассматривающий в совокупности проблемы оптимизации траекторий и законов управления движением, а также выбора оптимальных соотношений масс основных компонентов космического аппарата.

Обзор работ в области механики космического полета с малой тягой и проблем оптимизации траекторного движения содержится в монографии Г.Л. Гродзовского, Ю.Н. Иванова и В.В. Токарева [17]. Ряд задач оптимального управления траекторным движением решен в книге В.Н. Лебедева [39] с помощью изящных приемов, основанных на усреднении уравнений с малым параметром. Различные подходы к решению проблемы оптимизации траекторий и параметров КА с малой тягой рассмотрены в работах М.С. Константинова.

Однако за время, прошедшее после выхода в свет этих книг, были созданы новые, более совершенные образцы двигателей, которые прошли испытания на борту космических аппаратов. Использование ЭРД для космических перелетов становится все более реальным. Развивается и теория полета с малой тягой.

Главное направление теоретических исследований в области динамики перелетов с малой тягой – развитие аналитических и численных методов поиска оптимальных траекторий. Наряду с этим большее значение приобретают задачи, связанные с учетом дополнительных факторов в математических моделях движения космических аппаратов, а также дополнительных ограничений на возможности управления двигательной установкой.

Следует заметить, что в подавляющем большинстве известных к настоящему времени работ КА рассматривают как точку переменной массы, сводя проблему выбора оптимальной траектории к оптимизации управления вектором тяги. Однако если двигатель жестко закреплен относительно корпуса КА, любая программа изменения вектора тяги может осуществляться только разворотом КА в пространстве с помощью управляющего момента, величина которого ограничена. В этом

случае следует выбирать оптимальную траекторию из условия минимума суммарных затрат на управление движением центра масс и программный разворот корпуса космического аппарата или с учетом ограничений на ориентацию вектора тяги. При этом существенно усложняется математическая модель задачи оптимизации.

Усложненная постановка задач оптимизации особенно необходима при анализе движения перспективных космических аппаратов больших масс и габаритных размеров, а также – в более отдаленной перспективе – пилотируемых аппаратов с искусственной гравитацией, создаваемой их вращением вокруг одной из осей. При значительном собственном кинетическом моменте аппарата располагаемый управляющий момент может оказаться недостаточным для реализации оптимальных программных траекторий на припланетных участках полета. Эффективность управления в этом случае уменьшается, а следовательно, увеличивается расход рабочего тела и снижается полезная нагрузка перелета.

Важным следствием сказанного является сужение класса космических перелетов, для которых выгодно применять электрореактивные двигатели малой тяги. Соответственно расширяется область, в которой целесообразно использовать комбинированные двигательные системы (например, ЭРД + ЖРД) на одном космическом аппарате.

Дополнительные проблемы возникают при рассмотрении вопросов управления аппаратами с солнечными ЭРД. Основная причина трудностей заключается в наличии больших панелей солнечных батарей с системой индивидуального наведения на Солнце, ограничивающих возможности оптимального управления вектором тяги. С другой стороны, ограничения на управление ориентацией солнечных батарей не позволяют реализовать максимальный уровень тяги ЭРД. Поэтому необходима совместная оптимизация не только траекторного и углового движений, но и ориентации батарей и начального положения плоскости орбиты относительно Солнца.

Таким образом, традиционный подход к задачам механики полета с малой тягой, при котором КА рассматривается как материальная точка с "идеальным" управлением вектором тяги, в ряде случаев может оказаться несостоятельным.

Усложнение математической модели движения КА неминуемо ведет к появлению новых трудностей при решении задач оптимизации. По сути дела, происходит сужение класса допустимых траекторий и управлений. В этих условиях существенно возрастает роль приближенных методов решения задач оптимизации. В данной книге описаны некоторые приемы отыскания приближенно-оптимальных траекторий и управлений и их оценки. Эти методы базируются на известном принципе расширения класса допустимых состояний и управлений и достаточных условиях абсолютного минимума. Исчерпывающий материал по этим вопросам содержится в работах В.Ф. Кротова и В.И. Гурмана [19, 35].

В книге осуществляется следующий подход к проблеме оптимизации перелетов с малой тягой. Сначала формулируется задача в наиболее общей постановке. Затем анализируются физическая сущность задачи и ее особенности, позволяющие провести редукцию математической модели движения, например усреднение движений, носящих циклический характер (движение аппарата вокруг центра масс, орбитальное многовитковое движение и т.п.) отбрасывание ряда связей и ограничений. В результате модель движения существенно упрощается, сохраняя, однако, все важнейшие особенности исходной модели.

Следующий шаг заключается в отыскании структуры оптимального управления в рамках упрощенной модели движения. Широко применяются также эвристические приемы отыскания приближенно-оптимальных управлений. Последние обладают теми достоинствами, что позволяют выбрать рациональные управления, заведомо удовлетворяющие ограничениям и содержащие необходимое число свободных параметров для решения краевой задачи.

Третий этап исследований заключается в оценке степени оптимальности выбранных приближенно-оптимальных управлений и траекторий. Специальные процедуры оценки позволяют установить, насколько близки найденные управления к абсолютно оптимальным, и указать способы их улучшения.

С получением достаточно "хорошей" оценки заканчивается выбор программной траектории космического перелета с малой тягой.

Проблема совместного управления угловым и траекторным движениями в настоящей монографии ограничена рамками оптимизации программного движения без учета дополнительных возмущающих факторов, обусловленных неопределенностью параметров среды и аппарата и неточностью реализации расчетного движения. Исключение составляет разд. 8.3, где рассмотрена модельная задача коррекции возмущений низкой орбиты ИСЗ.

Основу книги составляют оригинальные результаты, полученные автором, его сотрудниками и аспирантами И.В. Белоконовым, В.В. Васильевым, В.В. Юриным, С.А. Ишковым. Автор благодарен всем специалистам, принимавшим участие в обсуждении проблем, изложенных в монографии. Особая роль принадлежит здесь В.И. Гурману, чье идейное влияние и постоянное внимание к работе, помощь и поддержка имели решающее значение в нелегком процессе формирования книги. В значительной степени способствовали улучшению содержания рукописи замечания и добрые советы М.С. Константинова, высказанные при рецензировании.

## *ГЛАВА 1*

# **ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫЕ ДВИГАТЕЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ МАЛОЙ ТЯГИ: СОСТОЯНИЕ РАЗРАБОТКИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ В КОСМОСЕ**

### **1.1. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ**

Первый в мире электротермический ракетный двигатель был разработан и испытан в 1929–1933 гг. в СССР в Газодинамической лаборатории (ГДЛ) под руководством выдающегося советского ученого академика В.П. Глушко. В 1933 г. работы по созданию ЭРД были прекращены из-за отсутствия в то время легких и эффективных источников электроэнергии и продолжены только в конце 50-х годов.

К настоящему времени в СССР и за рубежом создан ряд электрореактивных двигателей, которые начинают использоваться в космическом пространстве при решении целого ряда практических задач. Сведения о них опубликованы в сотнях статей и монографий. Для дальнейшего изложения полезно привести некоторые сведения, характеризующие современное состояние разработки таких двигательных систем и перспективы их применения в космических перелетах.

Принципиальное отличие электрореактивных двигателей от термомеханических заключается в том, что реактивная сила (тяга) создается у них не в результате сгорания топлива, а благодаря разгону частиц рабочего тела с помощью электрической энергии. Источник энергии в электрореактивном двигателе отделен от рабочего тела.

Двумя основными компонентами электрореактивной двигательной установки (ЭРДУ) являются энергетическая установка (ЭУ) и устройство, создающее тягу (собственно электрореактивный двигатель). Помимо этого в состав ЭРДУ входят: преобразователь энергии, система подачи и хранения рабочего тела, система отвода тепла от энергоустановки в космос, система регулирования параметров энергоустановки и двигателя и другие компоненты.

В настоящее время известно большое количество типов ЭРД, реализующих различные принципы ускорения рабочего тела и отличающихся конструктивными решениями.

Современные ЭРД классифицируются как по принципу действия (электротермические, электростатические и электромагнитные), так и

по состоянию рабочего тела в канале двигателя (газодинамические, ионные, плазменные). Дополнительно учитывается, например, характер работы – стационарный или импульсный.

Главным признаком считают в настоящее время способ преобразования электрической энергии в кинетическую энергию истекающего рабочего тела. Согласно ему электрореактивные двигатели делятся на три основных класса:

1) электротермические (электронагревные) двигатели, в которых электроэнергия используется только для нагрева рабочего тела. Нагретое до высокой температуры рабочее тело (например, водород, аммиак), расширяясь, истекает из реактивного сопла. В этих двигателях используется газодинамический способ создания тяги;

2) электростатические (ионные или коллоидные) двигатели. В ионных двигателях рабочее тело (пары легко ионизируемых металлов – цезия, рубидия, калия, а также ртути) подвергается ионизации и образовавшиеся ионы разгоняются до больших скоростей в электростатическом поле. Чтобы электрический заряд струи заряженных частиц не препятствовал дальнейшему истечению, эта струя нейтрализуется вне корпуса КА потоком электронов. В современных ЭРД используются два механизма ионизации: объемная ионизация электронным ударом и поверхностная контактная ионизация. Двигатели, основанные на первом принципе, называют иногда плазменно-ионными двигателями (ПИД);

3) электромагнитные (плазменные) двигатели, в которых разгон рабочего тела (как правило, используются инертные газы – ксенон, аргон и др.), находящегося в состоянии плазмы, совершается за счет электродинамических сил, обусловленных взаимодействием электрического и магнитного полей. Класс электромагнитных двигателей объединяет огромное разнообразие схем, которые обычно подразделяются на две большие группы: стационарные (непрерывного действия) и импульсные с частотой до десятков импульсов в секунду. Физические и технические основы космических электрореактивных двигателей широко освещаются в литературе [16, 17, 30, 46, 54, 63, 67].

## 1.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВРЕМЕННЫХ ЭРД И КОСМИЧЕСКИХ ЭНЕРГОУСТАНОВОК

С точки зрения механики космического полета важнейшими техническими характеристиками ЭРДУ являются: электрическая мощность, вырабатываемая энергоустановкой,  $N_{ЭУ}$ ; удельная масса источника энергии (масса ЭУ, приходящаяся на единицу мощности)  $\alpha = m_{ЭУ}/N_{ЭУ}$ ; электрическая мощность, потребляемая двигателем,  $N$ ; величина развиваемой двигателем тяги  $P$  и так называемая реактивная мощность  $N_p$ ; эффективный (тяговый) коэффициент полезного действия, показываю-

Таблица 1.1

Тип двигателя	Фирма-изготовитель	Потребляемая электрическая мощность $N$ , кВт	Тяга $P \cdot 10^2$ , Н	Рабочее тело	Скорость истечения $c$ , км/с	Эффективный КПД $\eta$ , %
Теплообменный Омический	"Дж. Электрик"	1	0,5–45	$H_2, NH_3$	3,0–6,0	–
	"Авко"	2–3	45	$H_2$	7,5–8,0	70
	НАСА	3–15	45–225	$H_2$	9,0	60
Электро-дуговой	"Дж. Электрик"	30	248	$H_2$	10,5	43
	"Авко"	30	112–225	$H_2, NH_3$	7,50–15,0	35–40
	"Спейс Дэй-нэмикс"	100	112–225	$H_2$	20,00–25,00	40–70

щий эффективность преобразования электрической энергии в кинетическую энергию реактивной струи,  $\eta = N_p/N$ ; эффективная скорость истечения реактивной струи  $c$ ; секундный расход массы рабочего тела на различных режимах  $\beta = P/c$ ; цена тяги  $\gamma = N/P$ . Важнейшей особенностью электрореактивных двигателей является то, что отношение их массы к развиваемой тяге на 3 ... 4 порядка выше, чем у термохимических двигателей, и составляет  $10^2 \dots 10^4$  кг/Н [16, 63].

Активные исследования в области ЭРД проводятся как в нашей стране, так и за рубежом – в США, ФРГ, Франции, Англии.

В табл. 1.1 [63] приведены данные по электротермическим двигателям США. Видно, что некоторые образцы способны развивать довольно значительную тягу, однако потребляют при этом большую электрическую мощность.

В 60-х годах в США были сконструированы и испытаны различные типы ионных двигателей. Основные параметры некоторых двигателей, запускавшихся в космос, приведены в табл. 1.2 [31, 41, 63].

С середины 70-х годов в США исследовательский центр им. Льюиса (НАСА) возглавляет программу работ по созданию ионных ЭРД и их использованию в космосе совместно с солнечной энергетической установкой [84]. В рамках этой программы был создан мощный маршевый ионный двигатель конструкции Г. Кауфмана [80] (см. табл. 1.2). В табл. 1.3 [30, 76, 78, 79, 81, 90] приведены рабочие характеристики ионных ЭРД, созданных в 70-х годах в США, ФРГ и некоторых других странах.

В СССР были созданы стационарные плазменные двигатели (СПД), обладающие относительно малой мощностью, достаточно высоким КПД и ресурсом, сравнимым с ресурсом ионных двигателей. Эти двигатели

Таблица 1.2

Экспериментальная система для испытаний в космосе	SERT		"Снепшот"	SER
	Июль—сентябрь 1964 г. (не- удачные) SERT-1	Июль—сентябрь 1964 г. (не- удачные) SERT-1		
Время испытаний в космосе	Июль—сентябрь 1964 г. (не- удачные) SERT-1	Июль—сентябрь 1964 г. (не- удачные) SERT-1	Апрель 1965 г.	—
Метод ионизации	Электронная бомбардировка	Контактная ионизация	Контактная ионизация	Электронная бомбардировка (двигатель Г. Кауфмана)
Рабочее тепло	Hg 2,9	Cs 0,72	Hg 2,8	Hg (Xe) 12,9
Тяга, 10 <sup>2</sup> Н	50	90	41,2	0,9
Скорость истечения, км/с	1400	620	1000	60—80
Потребляемая мощность, Вт	0,50	0,51	0,89	—
Энергетический КПД	0,80	0,96	0,75	0,65
Коэффициент использования массы	—	—	—	—
Тяговый КПД	—	—	0,68	0,70
Диаметр двигателя, мм	187,5	100	150	300
Масса двигателя, кг	5,3	6,33	3,0	7,5
Секундный расход массы ра- бочего тела, мг/с	—	—	—	4,45

Таблица 1.3

Двигатель	Диаметр $D$ , см	Потребляемая мощность $N$ , Вт	Тяга $P \cdot 10^2$ , Н	Скорость истечения $c$ , км/с	Тяговый КПД $\eta$ , %	Расход массы $\beta$ , мг/с	Масса ЭРД (включая мас- су баков рабо- чего тела) $m_{ЭРД}$ , кг
НАСА-Льюис (США)	30	3060	12,9	29,0	67	—	51,36
JPL-Hughes (США)	30	22680	37,0	90,0	80	—	245,78
НАСА-Льюис (США)	30	30650	50,0	90,0	80	—	325,46
Аэроспейс корпорейшн (США)	50	7280	42,8	20,71	66	—	96,34
ESKA-8 (ФРГ)	8	140	0,52	31,0	48	0,2	—
ESKA-18 (ФРГ)	18	638	2,54	37,9	64	0,78	—
RIT-10 (ФРГ)	8,5	308	1,0	48,0	70,8	0,23	54,8
RIT-35 (ФРГ)	—	4800—5000	15,0—20,0	35,0	—	5,0	—
SEP (Франция)	—	250	0,65	50,0	—	0,5	—
ONERA (Франция)	—	135	0,15	66,0	—	—	—
T-5 (Англия)	10	223	0,7—1,7	28,79	66	0,37	1

работают при относительно небольших расходах рабочего тела и низких давлениях плазмы [46]. Одна из модификаций СПД с радиальным магнитным полем, замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения испытывалась в космосе на ИСЗ "Метеор" [54].

Рабочее тело этого двигателя – газообразный ксенон – подается в кольцевую диэлектрическую камеру. Вследствие влияния магнитного поля в камере создается облако горячих вращающихся электронов, попадая в которое, рабочее тело ионизируется. Образующиеся ионы ускоряются в электрическом поле; ионная реактивная струя на выходе из ускорителя смешивается с электронами из эмитера. В результате из ЭРД вытекает струя нейтральной плазмы.

По данным работы [54], СПД имеет следующие характеристики: тяга на номинальном режиме  $(1,8 \dots 2,3) \cdot 10^{-2}$  Н; потребляемая мощность 400 ... 500 Вт; скорость истечения около 10 км/с.

Энергоустановки для длительных космических перелетов могут быть либо солнечными, либо ядерными. Требования к энергоустановкам для космических аппаратов с ЭРД и некоторые особенности их конструктивных схем описаны в работе [63].

В настоящее время большинство космических аппаратов обеспечивается электроэнергией с помощью фотоэлектрических преобразователей, объединенных в панели солнечных батарей. На расстоянии 1 а.е. от Солнца (радиус орбиты Земли) интенсивность солнечного потока составляет  $1,3 \text{ кВт/м}^2$ , однако сравнительно низкий КПД фотоэлектрических преобразователей (около 10 %) позволяет обеспечить съем электрической мощности лишь 100 ... 150 Вт с  $1 \text{ м}^2$  площади батареи. С течением времени КПД фотоэлементов уменьшается до 5 ... 6%. Таким образом, для получения 1 кВт электрической мощности требуется примерно  $20 \text{ м}^2$  площади батарей. Масса такой батареи составит примерно 40 ... 50 кг (без учета массы системы ориентации батарей и буферной аккумуляторной батареи). Удельная масса всей фотоэлектрической энергоустановки составляет 50 ... 60, а иногда и более  $100 \text{ кг/кВт}$ . В перспективе можно ожидать увеличения КПД фотоэлементов до 16 ... 18 %, а также применения панелей из тонких пленочных фотоэлементов (что позволит довести удельную массу до  $15 \dots 25 \text{ кг/кВт}$  [15]).

Длительные и энергетически напряженные космические перелеты с двигателями малой тягой требуют создания электрической мощности порядка нескольких сот киловатт. Такую мощность обеспечивают только ядерные энергоустановки.

В табл. 1.4 [17, 63] приведены параметры ядерных космических энергоустановок, некоторые из которых уже прошли летные испытания в космосе.

В работе [79] приведены параметры ядерной энергоустановки, предназначенной для обеспечения электроэнергией маршевых ЭРД межорбитального транспортного аппарата. Установка разработана в Лос-

Таблица 1.4

Энергоустановка	Тип генератора электроэнергии	Полезная электрическая мощность $N_{ЭУ}$ , кВт	Площадь радиатора $S$ , м <sup>2</sup>	Масса энергоустановки $m_{ЭУ}$ , кг (с защитой)	Удельная масса энергоустановки $\alpha$ , кг/кВт (с защитой)
				(без защиты)	(без защиты)
SNAP-2	Реактор, паротурбинная установка	3,0	10,2	<u>475</u>	<u>158</u>
				345	115
SNAP-8	То же	30	160	—	—
SNAP-50	”	350	70	—	—
				2270	6,5
”Дженерал электрик”	”	1000	—	<u>14929,8</u>	<u>14,93</u>
				7380	7,38
”Дженерал электрик”	Реактор, газотурбинная установка	1000	1560	—	—
				4500	4,5
SNAP-XA (испытана в космосе в 1965 г.)	Реактор, термоэлектрический преобразователь	0,533	5,8	<u>436</u>	<u>818</u>
				338	634
SNAP-29	Радиоизотопный	0,5	—	180	360
BBC-I	Реактор, термоэмиссионный преобразователь	150	—	1200	8,0
BBC-II	То же	700	—	1600	2,4
PTR	Реактор, на тепловых нейтронах, термоэмиссионный преобразователь	20	—	1200 (с	60
				40	40
				120	2400 защитой)
HPTR	Реактор на быстрых нейтронах, термоэмиссионный преобразователь	50	—	<u>1030</u>	<u>20,6</u>
				610	12,2
				<u>1780</u>	<u>17,8</u>
		100	—	1180	11,8

Аламосской научно-исследовательской лаборатории (США), ее масса 1640 кг, электрическая мощность 100 ... 130 кВт.

С начала 80-х годов НАСА разрабатывает универсальную ядерную энергоустановку, предназначенную для обеспечения электроэнергией широкого класса космических перелетов [73, 85], в том числе с помощью космических аппаратов с ЭРД. Номинальная электрическая мощность реактора с термоэлектрическим преобразователем энергии 100 кВт (диапазон 90 ... 160 кВт), ресурс 10 лет. Энергоустановку предполагается использовать в полетном варианте после 1990 г.

Перспективный вариант мощного реактора с термоэмиссионным преобразователем на 2600 и 4000 кВт разрабатывается фирмой "Дженерал-Электрик" (США) в качестве энергоустановки пилотируемого космического корабля для экспедиции на Марс в 90-х годах [63].

Из таблиц видно, что масса ЭРДУ в основном определяется массой наиболее тяжелого элемента — источника энергии, которая, в свою очередь, зависит от электрической мощности ( $\alpha = 2 \dots 20$  кг/кВт при  $N_{ЭУ} > 10^2$  кВт и  $\alpha > 100$  кг/кВт при  $N_{ЭУ} = 1 \dots 2$  кВт).

### 1.3. ЛЕТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ЭРД В КОСМОСЕ

К настоящему времени в СССР и за рубежом проведен ряд летных испытаний ЭРД на ракетах и искусственных спутниках. Эти испытания особенно важны потому, что наземные испытания с имитацией условий космического полета достаточно сложны и часто не дают достоверных результатов, а также не позволяют определить надежность функционирования ЭРД в условиях космического пространства и степень совместимости двигателя с другими системами космического аппарата.

Впервые в мире в СССР в реальных условиях космического полета плазменные ЭРД системы ориентации испытывались на автоматической межпланетной станции "Зонд-2", запущенной в сторону Марса. В 1966–1971 гг. плазменно-ионные ЭРД, работающие на аргоне, азоте и воздухе, испытывались на автоматических ионосферных лабораториях "Янтарь" [17].

Первым ЭРД США, прошедшим летные испытания в космосе, был ионный двигатель, созданный в центре им. Льюиса. Эти испытания были проведены в 1964 г. с помощью ракеты "Скаут", совершившей полет по баллистической траектории. Вся испытательная установка СЕРТ-1, смонтированная на носке ракеты, весила примерно 170 кг. Ракета достигла высоты 4000 км, общая длительность полета составила 50 мин. Двигатель работал около 30 мин, причем его останавливали и снова запускали по командам с Земли.

В 1965 г. цезиевый ионный двигатель испытывался в космосе вместе с ядерной энергоустановкой SNAP-XA. С 1966 г. ионные и электротерми-

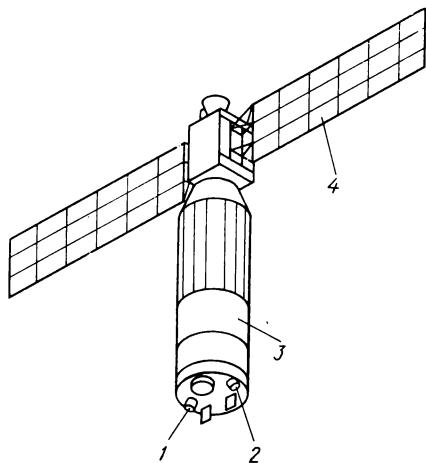


Рис. 1.1. Экспериментальная орбитальная установка "SERT-2" [31]; 1 – ЭРД № 1; 2 – ЭРД № 2; 3 – последняя ступень ракеты-носителя; 4 – панели с солнечными элементами

ческие двигатели использовались в системах ориентации стационарных спутников серии "АТС". С 1968 г. для управления ориентацией связных спутников серии "LES" используются импульсные плазменные двигатели [16].

3 февраля 1970 г. в США на орбиту высотой около 1000 км и наклоном  $99^\circ$  была запущена экспериментальная установка SERT-2 с двумя ионными ЭРД, работающими на ртути. Орбита выведения была близка к солнечно-синхронной; ее выбор обусловлен требованием постоянной освещенности панелей солнечных батарей. Целью испытаний было подтверждение надежности и оценка ресурса и рабочих характеристик ЭРД в условиях космического пространства [31, 41].

Масса установки SERT-2 (рис. 1.1) 1435 кг, диаметр 1,525 м, длина 7,95 м. Электрическая энергия для ЭРД вырабатывалась солнечными батареями мощностью около 1,5 кВт, что обеспечивало работу только одного ЭРД из двух. Каждый двигатель был смонтирован на карданном подвесе, что позволяло свести к минимуму возмущающий момент от эксцентриситета тяги, и создавал номинальную тягу  $28 \cdot 10^{-3}$  Н, направленную вверх под углом  $10^\circ$  к радиусу и проходящую через центр масс спутника (см. рис. 1.1). При включении одного из двигателей создавались как радиальная, так и трансверсальная составляющие тяги, что позволяло увеличивать или уменьшать высоту орбиты (в зависимости от того, какой ЭРД включен). Расчетное изменение высоты полета за одни сутки при номинальном уровне тяги составляло 570 м.

Масса каждого двигателя с карданным подвесом и полным запасом рабочего тела составляла около 30 кг, причем масса самого электростатического ускорителя (собственно ЭРД) равнялась всего 3 кг, а масса рабочего тела 15 кг. Запас рабочего тела обеспечивал непрерывную работу каждого ЭРД в течение 5 800 ч (8 месяцев). Расчетные характеристики ЭРД (КПД, удельный импульс и др.) примерно соответствуют данным ионного ЭРД на ртути, приведенным в табл. 1.2 (SERT-2).

14 февраля 1970 г. был включен ЭРД № 1, обеспечивавший подъем ИСЗ в течение 2 800 ч (около 5 месяцев). За это время радиус орбиты увеличился почти на 100 км. Затем двигатель отключился из-за корот-

кого замыкания. После этого включился ЭРД № 2, проработавший почти 3 месяца (2 011 ч); радиус орбиты при этом был уменьшен. В 1973 г. двигателя удалось включить вновь; в 1974—1976 гг. они использовались для разворотов аппарата вокруг поперечной оси на  $180^\circ$  с целью улучшения освещенности панелей солнечных батарей. Орбита ИСЗ SERT-2 уже являлась солнечно-синхронной, и аппарат периодически заходил в тень, что не позволяло включать ЭРД на длительное время. Однако в 1979—1981 гг. вновь наступил период длительной освещенности, и двигатели смогли работать в непрерывном режиме. ЭРД № 1 проработал всего 3 794 ч, а ЭРД № 2 — 4078 ч и запускался 261 раз, вплоть до полного израсходования рабочего тела в апреле 1981 г.

К 1979 г. выходная электрическая мощность солнечных батарей уменьшилась на 37 % из-за старения фотоэлементов, однако оставалась еще достаточной (около 1 кВт) для энергоснабжения ЭРД. За 11,5 лет эксплуатации в космосе характеристики самих ЭРД (тяга, удельный импульс) существенно не изменились [31].

Одной из главных задач этого эксперимента являлась разработка достаточно надежных и точных способов определения тяги ЭРД. В процессе летных испытаний тяга ЭРД определялась тремя способами [41]: 1) расчетом по измеренным электрическим параметрам пучка (силе тока, разности потенциалов); погрешность этого метода составляет около 2,2 %; 2) по показаниям акселерометра MESA, измерявшего радиальную составляющую ускорения (погрешность измерений 1 %); 3) расчетом по измеренному на некотором интервале изменению радиуса орбиты (погрешность 5 %). Наиболее точными, таким образом, являются первые два способа.

По данным работы [31], выход ионного ЭРД на рабочий режим занимал достаточно продолжительное время. После включения ЭРД начиналась установка разряда нейтрализатора, на это требовалось около 4 мин. Затем в течение 1,8 ч происходил прогрев разрядной камеры ЭРД с целью ее обезгаживания. Далее в течение 50 с зажегся разряд и около 1 мин требовалось на его стабилизацию. Так обстоит дело с запуском "холодного" ЭРД, если же двигатель заранее прогрет, время выхода на рабочий режим существенно сокращается.

В результате длительных испытаний было установлено наличие так называемого плазменного режима работы ионного электрореактивного двигателя [31]. При относительно малых электрической мощности и напряжении в цепи электрического разряда создавался не ионный пучок, а струя плазмы. Тяга при этом достигала около 27 % номинала.

Длительные летные испытания ионных ЭРД, не имевшие прецедента в практике мировой космонавтики, доказали правильность основных концепций, принятых при конструировании двигателя и его системы.

29 декабря 1971 г. в СССР был запущен метеорологический спутник "Метеор", на борту которого находилась корректирующая двигательная

установка со стационарными плазменными двигателями. Двигательная установка состояла из двух блоков ЭРД массой по 1,5 кг каждый, системы подачи и хранения рабочего тела (масса 17 кг), системы преобразования и управления (масса 12 кг), рабочего тела — ксенона массой 2,4 кг (в двух баках объемом 40 л). Энергопотребление каждого ЭРД 500 Вт, развиваемая тяга  $(1,8 \dots 2,3) \cdot 10^{-2}$  Н (см. разд. 1.2). Запас рабочего тела позволял каждому двигателю работать в течение 250 ч [54].

ИСЗ "Метеор" массой порядка 1200 кг представляет собой космический аппарат с точной трехосной системой стабилизации относительно Земли и автономной ориентацией солнечных батарей на Солнце. Исполнительными органами системы ориентации ИСЗ являются три электродвигателя-маховика, расположенные в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.

ЭРД были размещены на спутнике так, что могли создавать тягу, направленную практически по и против трансверсали (углы между вектором тяги и трансверсалью равнялись:  $5^{\circ}05'$  для 1-го двигателя и  $4^{\circ}15'$  для 2-го).

Основными задачами летных испытаний СПД на ИСЗ "Метеор" являлись: проверка работоспособности плазменного двигателя в космосе и качества его совместного функционирования с системами спутника; измерение тяги и других параметров двигателя; длительная работа ЭРД с целью изменения параметров орбиты ИСЗ "Метеор".

Испытания ЭРД проводились в три этапа. На 1-м этапе проводились кратковременные включения СПД для проверки его работоспособности; на 2-м — измерения тяги, развиваемой двигателем в космических условиях, специальными датчиками тяги.

Во время испытаний были получены следующие диапазоны изменения характеристик СПД [54].

1. Режим максимального КПД  $\eta = 0,5 \dots 0,6$ ; тяга  $(4 \dots 6) \cdot 10^{-2}$  Н; цена тяги 15 ... 17 кВт/Н; потребляемая мощность 700 ... 900 Вт; скорость истечения 19 ... 20 км/с; ресурс 1500 ч.

2. Режим минимальной цены тяги ( $\gamma = 12 \dots 13$  кВт/Н): тяга  $(2,5 \dots 3) \cdot 10^{-2}$  Н; КПД 0,4 ... 0,45; потребляемая мощность 300 ... 450 Вт; скорость истечения 10 ... 12,5 км/с; ресурс 1000 ч.

Меньшие значения приведенных параметров для обоих режимов соответствуют расходу рабочего тела 2 мг/с, большие — 3 мг/с.

На 3-м рабочем этапе в течение 170 ч осуществлялся маневр перевода ИСЗ "Метеор" на орбиту, близкую к условно-синхронной (изомаршрутной), соответствующей ежесуточному прохождению экватора на одной и той же долготе. Перед началом непрерывной работы корректирующей двигательной установки (КДУ) на 656 витке был проведен радиоконтроль орбиты, который дал следующие результаты:  $H_{\max} = 918,6$  км;  $H_{\min} = 879,7$  км;  $T = 102,663$  мин. Далее радиоконтроль

орбиты проводился периодически, и определялась тяга двигателя по изменению периода обращения. К 684 витку период составил 102,560 мин, что соответствовало тяге  $1,83 \cdot 10^{-2}$  Н; к 703 витку период обращения равнялся 102,476 мин, что соответствовало тяге  $1,68 \cdot 10^{-2}$  Н. Погрешность измерения тяги по данной методике оценивается в 6 ... 7 % в зависимости от величины уменьшения периода. Окончательные параметры орбиты, сформированной в 773 витку:  $H_{\max} = 901,9$  км;  $H_{\min} = 863,5$  км;  $T = 102,315$  мин. В результате уменьшения среднего радиуса орбиты суточный дрейф долготы удалось уменьшить до  $5'$  против  $45'$  перед началом корректирующего маневра.

Космический эксперимент подтвердил возможность и перспективность использования СПД в качестве исполнительных органов системы ориентации и коррекции орбиты ИСЗ.

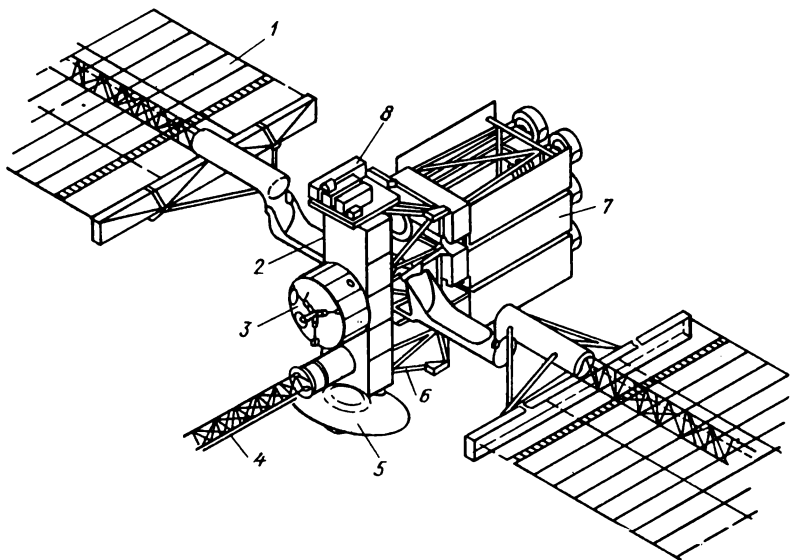
#### 1.4. ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК МАЛОЙ ТЯГИ

Исследования, выполненные различными авторами, позволяют указать класс задач, для решения которых электрореактивные двигатели имеют преимущество перед термохимическими или ядерными. К этим задачам относятся: коррекции орбит спутников Земли, Луны и планет; маневры на низких геоцентрических орбитах; перелеты типа орбита — орбита межорбитальных транспортных аппаратов (космических буксиров), в частности доставка грузов с низкой орбиты на высокую (геостационарную) и обратно; полеты беспилотных грузовых аппаратов к Луне с выходом на селеноцентрическую орбиту, полеты автоматических космических аппаратов к планетам Солнечной системы, кометам и астероидам; полеты пилотируемых космических кораблей к Марсу.

Преимущества ЭРД при решении перечисленных задач заключаются в возможности высокоточного формирования заданных рабочих орбит спутников Земли и их поддержания в течение практически неограниченного времени; в доставке на конечную достаточно удаленную орбиту существенно большего полезного груза, чем при использовании термохимических или даже ядерных двигателей; в значительном сокращении времени перелета к планетам Юпитерианской группы, кометам и астероидам.

С технической точки зрения проблема создания автоматического космического аппарата с электрореактивной двигательной установкой представляется вполне реальной. С начала 70-х годов в США разрабатывается проект универсальной космической ступени с солнечной ЭРДУ — SEPS (Solar Electric Propulsion Stage).

Ранние концепции аппаратов с солнечными ЭРДУ относятся к 1970 г. Следует отметить, что за время работы над проектом некоторые техни-



**Рис. 1.2. Конструктивная схема КА с ЭРД (проект SEPS) [86]:**  
 1 – панели солнечных батарей; 2 – корпус КА; 3 – зонд для исследования комет;  
 4 – штанга магнитометра; 5 – остронаправленная антенна; 6 – силовая рама  
 двигательного отсека; 7 – двигательный отсек; 8 – отсек научной аппаратуры

ческие решения, заложенные в его основу, претерпели существенные изменения. Однако неизменными остались следующие принципы: универсализации и стандартизации отдельных модулей, связанный с многоцелевым назначением аппарата, предназначенного для выполнения ряда космических операций; 5 – полной автономности полета и обеспечения функционирования полезной нагрузки и собственных систем; резервирования и дублирования основных систем, включая ЭРДУ, обеспечивающий высокую надежность функционирования и эффективность выполнения баллистических задач. Один из вариантов SEPS, относящийся к 1980 г. [86], показан на рис. 1.2.

Различные аспекты проблемы создания космических аппаратов с солнечными ЭРДУ освещаются в работах [34, 53, 61, 71, 74, 75].

Многоцелевую космическую ступень SEPS предполагалось использовать как в качестве межорбитального транспортного аппарата на околоземных орбитах, так и для доставки автоматических зондов к планетам Юпитерианской группы, выведения их на орбиту вокруг Венеры с целью радиолокационного картографирования ее поверхности, сближения со спутниками Марса (Фобосом и Деймосом), полетов к астероидам, кометам, выхода КА с научной аппаратурой из плоскости эклиптики. Сухая масса ступени составляет 1083 ... 1257 кг (первая цифра относится к межпланетному варианту, вторая – к транспортному варианту для

полетов на геостационарную орбиту). Соответственно масса рабочего тела составляет 1090 ... 1500 кг [53]. Специально для аппаратов класса SEPS создана солнечная энергоустановка мощностью 25 кВт, из которых 21 кВт предназначена для обеспечения энергией ЭРД. Предполагается использовать две складные или рулонные солнечные батареи площадью 223 м<sup>2</sup>. Масса батарей (с учетом массы защиты от излучения радиационных поясов Земли) составляет до 413 кг, суммарная масса девяти ЭРД и их систем 227 кг.

Двигательная установка SEPS состоит из 8–9 ионных ЭРД с электронной бомбардировкой конструкции Г. Кауфмана (см. табл. 1.2). При выборе способа управления вектором тяги рассматривались следующие варианты: помещение каждого ЭРД в двухступенной карданный подвес; помещение всей связки ЭРД в двухступенной карданный подвес; перемещение связки по специальному направляющему, перпендикулярным продольной оси аппарата, с одновременным помещением угловых ЭРД в одноступенной карданный подвес и другие варианты. Проектно-конструкторские проработки показали, что ни одна из схем не обладает ярко выраженными преимуществами, однако с точки зрения минимума массы ЭРДУ и надежности функционирования был выбран вариант с помещением каждого ЭРД в двухступенном карданном подвесе [61].

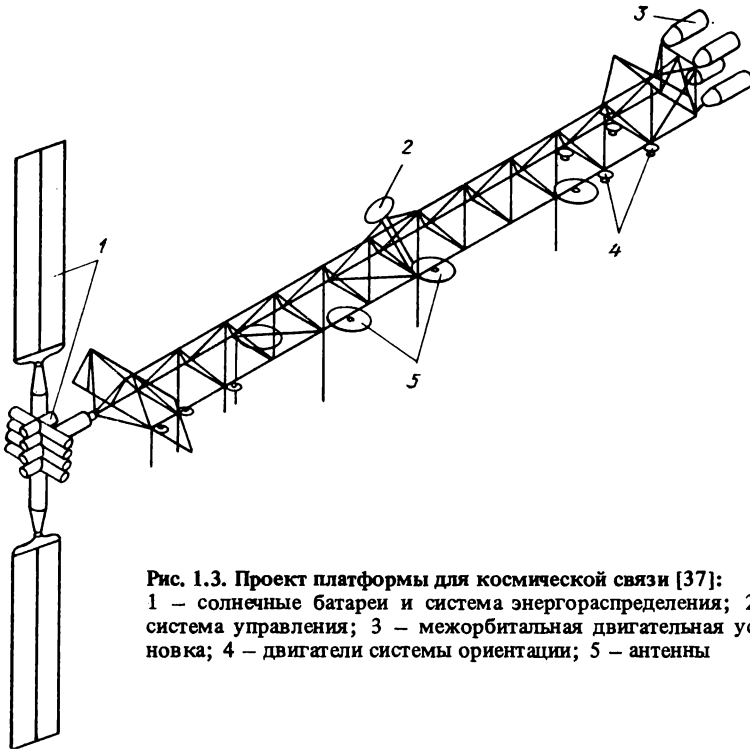
Масса полезного груза, выводимого SEPS на геостационарную орбиту, по оценкам [53] составит около 1000 кг, масса полезного груза, доставляемого к другим небесным телам, – от 320 до 750 кг.

Современные зарубежные разработки космических аппаратов с ЭРДУ предусматривают, помимо SEPS, создание мощных межорбитальных транспортных аппаратов с солнечными и ядерными энергоустановками [60].

Электрореактивные двигатели рассматриваются в качестве одного из альтернативных вариантов маршевой двигательной установки платформы для космической связи [37]. Масса такой платформы на геостационарной орбите составляет 60 т, общая длина 240 м (рис. 1.3). Применение ЭРД, сообщающих платформе реактивное ускорение порядка  $10^{-4} g$ , позволяет осуществить выведение на геостационарную орбиту примерно за 70 сут. Потребная площадь солнечных батарей равна 1315 м<sup>2</sup>, причем длительный полет КА в радиационных поясах Земли может привести к снижению мощности батарей (до 50 %) и к необходимости увеличения их площади.

Работа [91] посвящена исследованию эффективности электрореактивных двигателей для транспортировки крупногабаритных космических конструкций типа космического радиолокатора (площадь 24 450 м<sup>2</sup>, масса 8160 кг). Здесь предполагается использовать ядерную энергоустановку номинальной мощностью до 100 кВт.

В 60–70-х годах в зарубежной литературе подробно рассматривались проекты пилотируемых космических перелетов к Марсу, планиро-

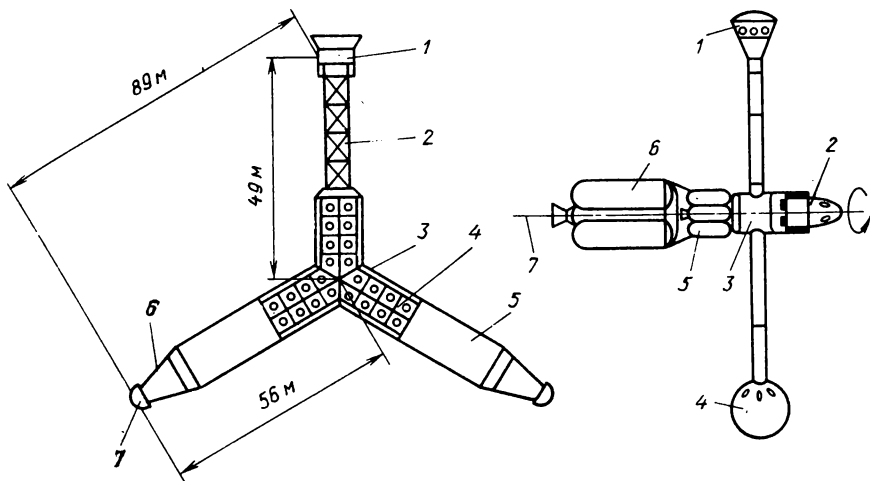


**Рис. 1.3. Проект платформы для космической связи [37]:**  
 1 – солнечные батареи и система энергораспределения; 2 – система управления; 3 – межорбитальная двигательная установка; 4 – двигатели системы ориентации; 5 – антенны

вавшихся на 80-е годы. В частности, анализировались различные варианты космических аппаратов с искусственной гравитацией, создаваемой путем вращения аппарата вокруг оси [67, 72, 82, 83, 92] (рис. 1.4, 1.5). В настоящее время сроки организации экспедиций к планетам, видимо, отодвигаются на конец текущего столетия, однако многие из проблем, связанных с эффективным управлением движением больших пилотируемых космических аппаратов с ЭРД, не сняты с повестки дня.

Организация межпланетного перелета требует сложного управления вектором тяги. В механике полета с малой тягой принято разбивать траекторию межпланетного перелета на припланетные участки спирального разгона и торможения и гелиоцентрический участок. На участке разгона у Земли целесообразно направлять тягу по касательной к траектории, на межпланетном участке тяга сначала сохраняет почти постоянное направление в гелиоцентрической системе координат, а затем меняет направление на противоположное, причем в средней части траектории на некотором участке полет происходит с выключенным двигателем. При торможении в сфере действия планеты назначения тяга направлена почти всегда против вектора скорости [17, 39, 68].

506



**Рис. 1.4.** Проект космического аппарата с искусственной гравитацией и ядерными и электрореактивными двигателями для пилотируемого полета к Марсу [72]. Масса аппарата 800 т, тяга ЭРД 200 Н, скорость вращения 4 об/мин:

1 – командный отсек; 2 – телескопические стержни; 3 – экспедиционный отсек (на обратной стороне); 4 – связка электроракетных двигателей; 5 – излучатели первого контура; 6 – излучатели второго контура; 7 – реактор и защита

**Рис. 1.5.** Схема базового КА для полета к Марсу [92]:

1 – командный отсек (спускаемый аппарат); 2 – исследовательский отсек; 3 – убежище для экипажа на случай солнечной вспышки; 4 – служебный отсек; 5 – двигательная установка для обеспечения активного пролета; 6 – двигательный блок отправления от Земли; 7 – ось вращения

Управление космическим кораблем с искусственной гравитацией представляет достаточно сложную проблему. Вращающийся КА стремится сохранить неизменным положение оси вращения в пространстве. В ряде случаев располагаемый управляющий момент может оказаться недостаточным для программного разворота корпуса вращающегося КА и придется искать траектории, менее оптимальные с точки зрения энергетики перелета, но удобные в плане их практической реализации.

Интерес к проблеме проектирования космических аппаратов, обладающих искусственной гравитацией, в последнее время несколько уменьшился. Это произошло, главным образом, вследствие успехов советской космонавтики. Советские космонавты успешно работали и работают в космосе в условиях невесомости более полугода. Однако, на наш взгляд, проблема не снята этим полностью; уменьшилась лишь ее острота. Поддержание нормальной работоспособности человека в условиях невесомости требует чрезвычайно больших затрат времени и физических усилий. Видимо, в будущем рациональнее сочетать периоды работы эки-

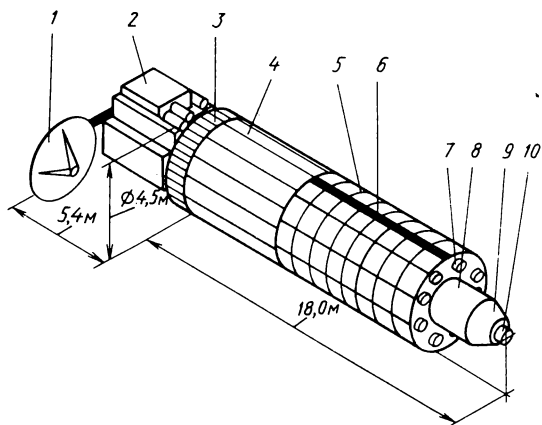


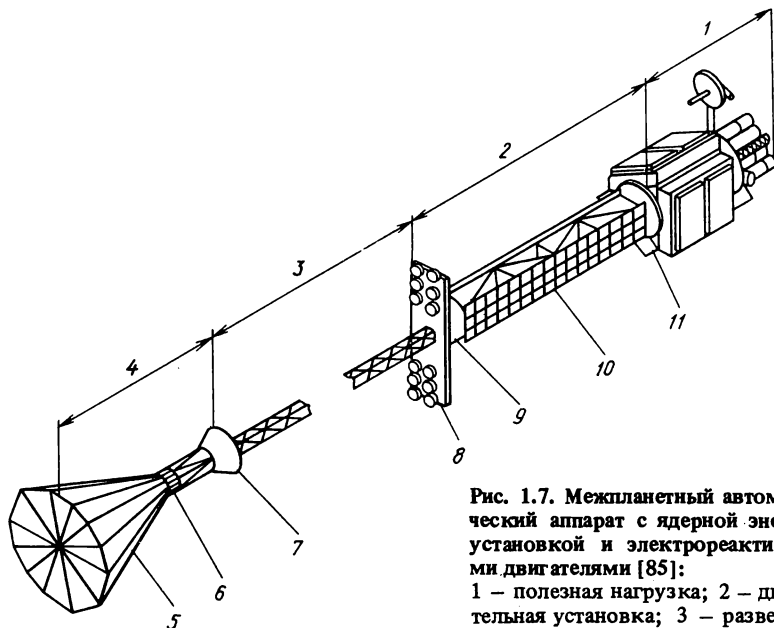
Рис. 1.6. Компонка КА с электроядерной энергоустановкой для полетов к планетам Солнечной системы [64]: 1 – антенна в развернутом виде; 2 – полезная нагрузка; 3 – вспомогательный излучатель энергопреобразователя; 4 – основной энергопреобразователь; 5 – основной излучатель; 6 – канал низковольтного кабеля; 7 – ионные двигатели; 8 – силовая защита и несущая конструкция; 9 – нейтронная защита; 10 – ядерный реактор

пажа в невесомости с периодами работы в искусственном поле тяготения, созданном тем или иным способом.

В начале 70-х годов активно разрабатывались проекты создания долговременных орбитальных станций на 12, 16, 60 человек с искусственной гравитацией. Сравнительно недавно опубликован проект создания типовой космической базы [70] массой 558 т, рассчитанной на 60 человек экипажа. По проекту на станции создается необходимый уровень искусственной гравитации. Ядерная энергоустановка обеспечивает потребности как бортовых систем и аппаратуры, так и корректирующих двигателей. Следует указать, что проблемы управления движением вращающихся орбитальных станций имеют много общего с проблемами управления движением пилотируемых межпланетных космических кораблей.

Значительная доля суммарных энергетических затрат при межпланетных перелетах с двигателями малой тяги приходится на планетоцентрические участки разгона и торможения. Поэтому в ряде работ предлагается использовать комбинированную двигательную систему, состоящую из двигателя большой тяговооруженности (ЖРД, РДТТ или ЯРД) и электрореактивного двигателя малой тяги. Двигатель большой тяги работает на геоцентрическом участке перелета, после этого КА набирает необходимую скорость. Затем двигатель большой тяги либо отделяется, либо включается повторно на планетоцентрическом участке. Оказывается, что такая комбинация двигателей обеспечивает выигрыш в полезной нагрузке в той области параметров перелета, где оба двигателя по отдельности имеют примерно одинаковые возможности по доставке полезного груза [17, 23, 94].

Из современных проектов автоматических КА, предназначенных как для полетов к внешним планетам и астероидам, так и для маневрирования в околоземном пространстве, отметим проекты, описанные в работах [64] (рис. 1.6), [85] (рис. 1.7), [78, 87], предусматривающие исполь-



**Рис. 1.7. Межпланетный автоматический аппарат с ядерной энергоустановкой и электрореактивными двигателями [85]:**

1 – полезная нагрузка; 2 – двигательная установка; 3 – развертываемая штанга для крепления ЯЭУ; 4 – ЯЭУ мощностью 90 ... 160 кВт; 5 – радиатор; 6 – ядерный реактор; 7 – теневая защита; 8 – блок ЭРД; 9 – баки с рабочим телом (ртутью); 10 – устройство распределения мощности; 11 – переходный отсек

ваемая штанга для крепления ЯЭУ; 4 – ЯЭУ мощностью 90 ... 160 кВт; 5 – радиатор; 6 – ядерный реактор; 7 – теневая защита; 8 – блок ЭРД; 9 – баки с рабочим телом (ртутью); 10 – устройство распределения мощности; 11 – переходный отсек

зование мощных ядерных энергоустановок многоцелевого назначения. Создание таких ЯЭУ планируется на середину 90-х годов текущего столетия.

Оценивая реальные перспективы применения ЭРДУ, можно предположить, что они начнут использоваться, в первую очередь, в околоземном космосе. Представляется, что, в основном, ЭРД будут использоваться в корректирующих двигательных установках для поддержания рабочих спутниковых орбит и в маршевых двигательных установках межорбитальных транспортных аппаратов, которые будут выводиться на орбиты различных высот вплоть до высоты геостационарной орбиты.

Создание эффективных ЭРД и источников энергии создает прочную техническую основу для исследования проблем оптимизации космических перелетов с малой тягой.

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ  
С МАЛОЙ ТЯГОЙ

2.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

2.1.1. Критерии оптимальности. Одной из важнейших проблем оптимизации в механике космического полета с малой тягой считается обеспечение максимальной полезной массы  $m_{\text{п}}$  КА в конце перелета при заданной начальной (стартовой) массе  $m_0$ .

Введем в рассмотрение простейшую "проектную" модель КА с двигателем малой тяги, полагая, что его масса складывается из трех основных компонентов: полезной массы  $m_{\text{п}}$ , массы рабочего тела  $m_{\text{т}}$ , массы электрореактивной двигательной установки  $m_{\text{д}}$ . Последняя включает в себя источник энергии, преобразователь, собственно электрореактивный двигатель (устройство, создающее тягу); теплообменник, элементы системы управления вектором тяги, причем, как уже отмечалось в гл. 1, преобладающей является масса источника энергии. В полезную массу  $m_{\text{п}}$  входит масса экипажа, системы жизнеобеспечения, научной аппаратуры, конструкции и систем КА.

При фиксированной массе  $m_{\text{д}}$  максимальная полезная масса обеспечивается при минимальных затратах рабочего тела на перелет. В дальнейшем будем называть траектории и управления, обеспечивающие минимум затрат рабочего тела, энергетически оптимальными.

По сложившейся терминологии двигатель малой тяги называется "идеально регулируемым" [17], если потери рабочего вещества и электрической мощности отсутствуют, ограничение наложено только на мощность  $N$ , а масса двигателя  $m_{\text{д}}$  линейно зависит от максимальной мощности  $N_{\text{max}}$  источника энергии – наиболее тяжелого элемента ЭРДУ: ( $m_{\text{д}} = \alpha N_{\text{max}}$ ). В этом случае вся подведенная электрическая мощность превращается в мощность реактивной струи

$$N = N_{\text{р}} = \beta c^2 / 2. \quad (2.1)$$

Здесь  $\beta$  – секундный расход массы рабочего тела;  $c$  – эффективная скорость истечения. Максимальное значение мощности определяет величину тяги  $P$ :

$$P = 2N_{\text{max}}/c; \quad (2.2)$$

$$\beta = - \frac{dm}{dt} = \frac{2N}{c^2} = \frac{P^2}{2N} = \frac{a^2 m^2}{2N}.$$

Легко установить, что независимо от выбранной программы изменения реактивного ускорения  $a(t)$  минимальный расход массы достигается при максимальной мощности.

Выражения (2.2) показывают, что при неизменной электрической мощности тяга ЭРД и секундный расход массы уменьшаются с ростом скорости истечения.

С учетом (2.2) полезная масса  $m_{\text{п}}$  перелета для идеально регулируемого двигателя малой тяги выражается следующим образом:

$$m_{\text{п}} = m_0 \left( 1 + \frac{\alpha m_0}{2m_{\text{д}}} \int_0^T a^2 dt \right)^{-1} - m_{\text{д}}. \quad (2.3)$$

Здесь время отсчитывается с момента  $t_0 = 0$ ,  $T$  — продолжительность перелета. Легко видеть, что при неизменных параметрах аппарата максимум полезной массы соответствует минимуму интеграла

$$J = \int_0^T a^2 dt. \quad (2.4)$$

Задача о максимуме полезной массы разделяется на две независимые: динамическую и параметрическую.

Динамическая задача — отыскание оптимальной программы  $a(t)$ , обеспечивающий минимум интеграла  $J$  для заданных граничных условий перелета. Последний в дальнейшем будем называть динамической характеристикой перелета с идеально регулируемым ЭРД.

Параметрическая задача — выбор оптимального соотношения масс  $m_{\text{д}}/m_0$ , обеспечивающего максимум полезной массы  $m_{\text{п}}$ .

При фиксированном значении интеграла  $J$  легко получить оптимальные соотношения масс:

$$\left( \frac{m_{\text{д}}}{m_0} \right)_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\alpha J}{2}} - \frac{\alpha J}{2}; \quad (2.5)$$

при этом

$$\max_{m_{\text{д}}} \left( \frac{m_{\text{п}}}{m_0} \right) = \left( 1 - \sqrt{\frac{\alpha J}{2}} \right)^2. \quad (2.6)$$

Известно, что при практической реализации оптимальных законов управления, полученных для "идеально регулируемых" двигателей, возникает ряд технических трудностей, учет которых заставляет перейти к другой предельной постановке задачи, вводя понятие "нерегулируемого" двигателя малой тяги.

Двигатель называется нерегулируемым, если он может быть либо включен, и тогда тяга  $P$ , скорость истечения  $c$  и расход массы  $\beta$  постоянны, либо выключен, и тогда эти параметры принимают нулевые значения. В дальнейшем будем использовать более точный, на наш взгляд, термин: ЭРД с нерегулируемой тягой.

Принимая, что и в этом случае масса  $m_{\text{д}}$  пропорциональна мощности источника энергии, приходим к выражению для полезной массы:

$$m_{\text{п}} = m_0 \left( 1 - \frac{\alpha P c}{2 m_0} - \frac{P}{m_0 c} T_{\text{М}} \right), \quad (2.7)$$

где  $T_{\text{М}}$  — так называемое моторное время (время полета с включенным двигателем).

При постоянных параметрах  $P$ ,  $c$  максимальная полезная масса достигается при минимальном моторном времени  $T_{\text{М}}$ .

Легко показать, что для ЭРД с нерегулируемой тягой общая задача оптимизации перелета не разделяется на динамическую и параметрическую. В самом деле, ясно, что минимальное моторное время при фиксированном общем времени перелета будет функцией параметров двигателя  $P$ ,  $c$ . Для отыскания оптимальных для данного перелета тяги и скорости истечения необходимо сначала решить серию динамических задач, определить зависимость  $T_{\text{М}}(P, c)$  и только потом приступить к решению параметрической задачи.

Введем параметр  $a_0 = P/m_0$  — начальное реактивное ускорение, соответствующее начальной массе КА. Тогда относительную полезную массу можно представить в следующем виде:

$$\frac{m_{\text{п}}}{m_0} = 1 - \frac{\alpha c a_0}{2} - \frac{a_0}{c} T_{\text{М}}(a_0, c). \quad (2.8)$$

В качестве критерия оптимальности перелетов с нерегулируемой тягой часто используется характеристическая скорость  $W$ :

$$W = \int_0^T a dt = \int_0^{T_{\text{М}}} \frac{c \beta}{m} dt = c \ln \frac{m_0}{m(T)}. \quad (2.9)$$

Затем можно получить соотношение

$$\frac{m_{\text{п}}}{m_0} = \frac{1}{m_0} [m(T) - m_{\text{д}}] = \exp\left(-\frac{W}{c}\right) - \frac{\alpha a_0 c}{2}. \quad (2.10)$$

Определенное неудобство использования характеристической скорости в качестве параметра, характеризующего перелет, состоит в том, что ее значения при решении одних и тех же баллистических задач для перелетов с двигателями малой и большой тяг неодинаковы. Вследствие так называемых гравитационных потерь, имеющих место для перелетов с малой тягой, характеристическая скорость оказывается большей, чем при импульсных перелетах, однако более высокая скорость истечения обеспечивает выигрыш в полезной массе.

**2.1.2. Возможности управления вектором тяги.** В реально существующих конструкциях ЭРД величина тяги регулируется либо плавно (что обеспечивается изменением параметров электрической цепи), либо ступенчато.

пенчато, что достигается компоновкой ЭРДУ из отдельных идентичных блоков (модулей). Отметим также, что тяга, развиваемая ЭРД с солнечным источником энергии, зависит как от расстояния до Солнца, так и от ориентации панелей солнечных батарей в той степени, в какой зависит от этих факторов электрическая мощность, подводимая к двигателю. При попадании в тень Земли из-за недостатка мощности двигатель обычно выключается.

Большое разнообразие регулировочных характеристик тяги оправдывает введение моделей идеально регулируемого ЭРД и ЭРД с нерегулируемой тягой, которые оказались чрезвычайно полезными для получения предельных оценок эффективности двигателей данного класса.

Общей тенденцией развития перспективных КА с ЭРДУ является увеличение их масс и моментов инерции, что, в свою очередь, создает ряд проблем управления движением. Конструктивные схемы тяжелых КА, как правило, предусматривают жесткое закрепление связи двигателей относительно корпуса [64, 85]. Изменение направления тяги реализуется при этом путем разворота корпуса КА в пространстве с помощью управляющего момента, величина которого ограничена. Поэтому оптимальные программные траектории нельзя считать заведомо реализуемыми. Наличие искусственной гравитации на борту пилотируемого КА создает дополнительные трудности для управления.

Выше отмечалось, что помещение ЭРД в двухступенной кардановый подвес позволяет управлять траекторией полета КА независимо от его движения относительно центра масс. Однако этот способ подходит для КА с ЭРД сравнительно небольших масс и габаритных размеров, кроме того, углы поворота двигателя ограничены [47]. Имеется принципиальная возможность управления вектором тяги ионного или плазменного ЭРД за счет смещения ускоряющих электродов или изменения параметров электростатического или электромагнитного поля. По данным работы [30], предельные углы отклонения тяги при этом способе не превышают  $5 \dots 10^\circ$ .

Ограниченные возможности управления вектором тяги иногда обусловлены конструктивными особенностями или назначением аппарата. Для некоторых типов КА ориентация вектора тяги фиксируется в инерциальной системе координат. Определенные трудности возникают и при необходимости реверсирования тяги (изменении ее направления на противоположное). Как правило, реверс тяги требует установки дополнительных блоков ЭРД, создающих тягу противоположного направления, что, естественно, увеличивает общую массу ЭРДУ. Различные аспекты проблемы управления движением КА с солнечными ЭРДУ с учетом ограничений освещены в работах [89, 93] и обзоре [47]. Например, простой способ управления ориентацией солнечных батарей, при котором их поворот осуществляется только вокруг оси тангажа КА, приводит к снижению электрической мощности и тяги ЭРД и к ухудшению энергетических характеристик межорбитального перелета [89].

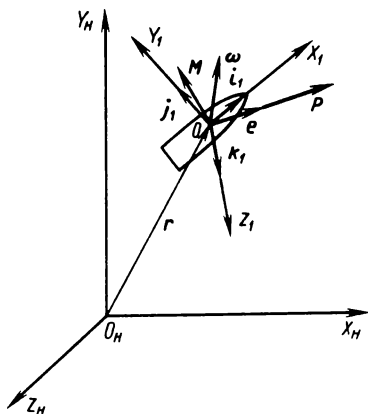


Рис. 2.1. неподвижная и связанная с аппаратом системы координат

Отмеченные обстоятельства позволяют заключить, что оптимальные программные траектории, полученные из условия минимума интеграла от квадрата реактивного ускорения или минимума характеристической скорости, нельзя считать заведомо реализуемыми. В каждом конкретном случае требуется проверка выполнения ограничений.

**2.1.3. Уравнения траекторного и углового движений.** Исследование задач оптимизации космических перелетов ведется обычно в рамках определенной математической модели движения, в той или иной степени адекватной динамике реального объекта управления. С увеличением массы и габаритных размеров КА возникает необходимость совместного анализа уравнений поступательного движения центра масс (траекторного) и вращательного движения вокруг центра масс (углового).

Введем две системы координат: неподвижную  $O_H X_H Y_H Z_H$  и связанную с аппаратом  $O X_1 Y_1 Z_1$ , вращающуюся относительно первой с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.1). Начало вращающейся системы координат поместим в центре масс КА. Обозначим через  $i_1, j_1, k_1$  единичные векторы, направленные вдоль связанных осей. Запишем векторные уравнения изменения количества движения  $Q$  и кинетического момента  $K$  "фиктивного" твердого тела (см., например, [42])

$$\frac{dQ}{dt} = F; \tag{2.11}$$

$$\frac{dK}{dt} + \omega \times K = M_0.$$

Здесь  $F, M_0$  – главный вектор и главный момент (относительно центра масс) внешних, реактивных и кориолисовых сил;  $\frac{dK}{dt}$  – производная кинетического момента в системе координат, связанной с КА. Количество движения и кинетический момент относительно центра масс "фиктивного" твердого тела определяются по формулам

$$Q = mV; K = I_0 \omega, \tag{2.12}$$

где  $m$  – масса КА;  $V$  – скорость движения его центра масс;  $I_0$  – тензор инерции. С учетом "принципа затвердевания"

$$\frac{dQ}{dt} = m \frac{dV}{dt}; \quad \frac{dK}{dt} = I_0 \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.13)$$

Ограничимся рассмотрением такой модели движения, в которой не учитывается перемещение центра масс КА относительно корпуса, а также кориолисова сила  $F_K$ , возникающая при перемещении масс внутри КА при его вращении и момент этой силы  $M_K$ . Влияние указанных факторов на параметры движения КА мало вследствие малости секундного расхода рабочего тела, а их учет существенно затрудняет исследования основных закономерностей движения.

Присоединяя к уравнениям (2.11) кинематические соотношения и уравнения, выражающие расход массы, получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}; \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \mathbf{a} + \mathbf{g} + \mathbf{f} = \frac{P}{m} \delta \mathbf{e} + \mathbf{g} + \mathbf{f}; \\ \frac{d\omega}{dt} &= I_0^{-1} (\mathbf{M}_0 - \omega \times I_0 \omega); \\ \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} &= \omega \times \mathbf{i}_1; \quad \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} = \omega \times \mathbf{j}_1; \quad \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} = \omega \times \mathbf{k}_1; \\ \frac{dm}{dt} &= -(\beta + \beta_{\text{упр}}) = -\left(\frac{P}{c} \delta + \beta_{\text{упр}} \delta_{\text{упр}}\right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор положения центра масс КА;  $\mathbf{Q}$  – вектор реактивного ускорения;  $\mathbf{g}$  – ускорение основного притягивающего тела;  $\mathbf{f}$  – ускорение, создаваемое внешними силами (аэродинамическими, гравитационными и др.);  $P = c\beta$  – тяга маршевого двигателя;  $\mathbf{e}$  – единичный вектор направления тяги;  $\delta$  – функция, управляющая включением – выключением и реверсом тяги маршевого двигателя (принимает значения 0, +1 или -1);  $\beta_{\text{упр}}$  – секунднй расход массы управляющих двигателей;  $\delta_{\text{упр}}$  – функция их включения – выключения;  $I_0^{-1}$  – обратная матрица тензора инерции.

Главный момент внешних сил  $\mathbf{M}_0$  удобно представить в виде суммы двух векторов

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M} + \mathbf{H}, \quad (2.15)$$

где  $\mathbf{M}$  – вектор управляющего момента;  $\mathbf{H}$  – вектор момента от гравитационных, аэродинамических и иных внешних сил.

В системе (2.14) компоненты тензора инерции изменяются по мере изменения массы аппарата:

$$I_0 = I_0[m(t)] = I_0(t).$$

Производная единичного вектора направления тяги  $\mathbf{e}$  в неподвижной системе координат выражается формулой

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right)_{\text{св}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}, \quad (2.16)$$

где  $\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right)_{\text{св}}$  — производная вектора  $\mathbf{e}$  в связанной системе координат.

Рассмотрим следующие случаи. 1. При отсутствии ограничений на перемещение  $\mathbf{e}(t)$  в связанной системе координат ориентация вектора тяги в пространстве не зависит от углового положения аппарата, и управление траекторией осуществляется независимо от его движения относительно центра масс. 2. Если направление тяги фиксировано в связанной системе координат (двигатель жестко закреплен относительно корпуса

КА), то  $\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right)_{\text{св}} \equiv 0$ . В силу (2.16) изменение направления вектора тяги в пространстве осуществляется только за счет разворота корпуса КА. В этом случае удобно считать, что тяга направлена вдоль одной из связанных осей, например,  $OX_1$  ( $\mathbf{e} \equiv \mathbf{i}_1$ ). Тогда

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}.$$

3. Если вектор тяги сохраняет неизменное положение в неподвижной системе координат, получим выражение

$$\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right)_{\text{св}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e},$$

определяющее кинематику программного разворота вектора тяги относительно корпуса.

В реальных технических системах практически всегда имеют место ограничения на управление вектором тяги, выраженные либо в форме ограничений на угловые скорости поворота, либо на углы отклонения тяги в связанной системе координат. Для эффективного управления вектором тяги необходимо изменить положение КА в пространстве с помощью управляющего момента. Последний, вообще говоря, можно создать различными способами. Если момент создается самими маршевыми двигателями, например за счет рассогласования тяг отдельных блоков ЭРД, поворота двигателя в кардановом подвесе или перемещения связки ЭРД по специальным направляющим, перпендикулярным направлению тяги, расход рабочего тела на управление отсутствует. Назовем такую схему управления траекторным и угловым движением совместной.

В отличие от нее отдельной схемой управления будем называть такую схему, которая предполагает использование специальных двига-

телей, создающих только момент относительно центра масс. Это связано с дополнительными затратами рабочего тела.

Независимо от способа управления определяющее значение имеют два фактора — ограниченность управляющего момента и "стоимость" его создания, т.е. ресурс, затрачиваемый на управление угловым движением КА. Оптимизацию космического перелета следует проводить по критерию минимума суммарного расхода рабочего тела на перемещение центра масс и разворот корпуса КА с учетом ограничений на управление вектором тяги, обусловленных особенностями конструкции аппарата. Соотношение между  $\beta$  и  $\beta_{упр}$  характеризует степень влияния углового движения на форму траекторий и характеристики перелетов с малой тягой. При  $\beta_{упр} \ll \beta$  затраты на управление угловым движением малы и обычно не учитываются; с ростом отношения  $\beta_{упр}/\beta$  доля этих затрат возрастает; при  $\beta_{упр} \gg \beta$  они становятся доминирующими. В этом случае оптимальными могут оказаться режимы с вектором тяги, сохраняющим постоянное направление в инерциальном пространстве.

Пусть программная ориентация вектора тяги в пространстве задана зависимостью  $\epsilon(t)$ . Ограничимся рассмотрением случая, когда двигатель жестко закреплен относительно корпуса. Получим выражение для угловой скорости поворота корпуса КА  $\omega$  и управляющего момента  $M$ , обеспечивающих реализацию заданной программы управления вектором тяги.

Умножая кинематические соотношения (2.14, г) векторно слева на  $i_1, j_1, k_1$  соответственно и складывая их, получим

$$\omega = \frac{1}{2} \left( i_1 \times \frac{di_1}{dt} + j_1 \times \frac{dj_1}{dt} + k_1 \times \frac{dk_1}{dt} \right);$$

$$M = I_0 \frac{d\omega}{dt} - H + \omega \times I_0 \omega. \quad (2.17)$$

Представим вектор абсолютной угловой скорости  $\omega$  в виде суммы двух составляющих  $\omega_r$  и  $\omega_s$ . Вектор  $\omega_s$  направим параллельно единичному вектору  $i_1$  (вдоль вектора тяги), а  $\omega_r$  — под прямым углом к  $\omega_s$ . Таким образом, векторы  $\omega_r$  и  $e$  ортогональны. Умножим теперь левую и правую части первого уравнения (2.14, г) векторно на  $i_1$  слева:

$$i_1 \times \frac{di_1}{dt} = i_1 \times (\omega \times i_1) = i_1 \times [(\omega_r + \omega_s) \times i_1] =$$

$$= i_1 \times (\omega_r \times i_1) = \omega_r (i_1 \cdot i_1) - i_1 (\omega_r \cdot i_1) = \omega_r. \quad (2.18)$$

Выражение (2.18) определяет ту составляющую полной угловой скорости  $\omega$ , которая непосредственно влияет на изменение ориентации вектора тяги КА в пространстве.

Пусть аппарат вращается вокруг оси  $Ox$ , вдоль которой направлен

вектор тяги, с постоянной угловой скоростью  $\omega_s$ . Получим выражение для требуемого управляющего момента. Поскольку

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_r}{dt} = \mathbf{i}_1 \times \frac{d^2 \mathbf{i}_1}{dt^2},$$

$$\text{то } \mathbf{M} = \mathbf{I}_0 (\mathbf{i}_1 \times \frac{d^2 \mathbf{i}_1}{dt^2}) + (\mathbf{i}_1 \times \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + \omega_s) \mathbf{I}_0 (\mathbf{i}_1 \times \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + \omega_s) - \mathbf{H}.$$

## 2.2. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**2.2.1. Принцип расширения – сужения и достаточные условия оптимальности.** Основы современной теории оптимального управления были заложены в 50-х годах нашего столетия. Важнейшими результатами теоретических поисков явилась формулировка принципов максимума Л.С. Понтрягина и принципа оптимальности Р. Беллмана. Однако в настоящее время более или менее регулярные алгоритмы отыскания абсолютно оптимальных управлений существуют лишь для линейных систем с критерием оптимальности (функционалом) специального вида (например, так называемым, квадратичным). Ряд скрытых особенностей практических задач (в большинстве своем нелинейных), в том числе наличие нескольких решений, удовлетворяющих условиям оптимальности, вызывают значительные трудности и требуют разработки специальных подходов к решению.

С этой точки зрения определенные перспективы открывает теория, основанная на принципе расширения – сужения класса допустимых состояний и управлений. Теория, основанная на достаточных условиях оптимальности, сформулированных В.Ф. Кротовым [35], позволяет построить алгоритмы поиска, улучшения и оценки приближенно-оптимальных управлений. Изложим основные положения этой теории.

Задача оптимизации в самых общих терминах формулируется следующим образом. На некотором множестве  $D$  с элементами  $z$ , называемом множеством (классом) допустимых, задан функционал  $I$ . Требуется найти элемент  $z \in D$  (минималь), на котором достигается наименьшее значение  $I$ :

$$I(\bar{z}) = d = \min_D I.$$

Как правило, во многих задачах оптимизации множество допустимых  $D$  задается посредством некоторых условий, выделяющих его из более широкого множества  $E$ . Задачу оптимизации в этом случае можно рассматривать на указанном более широком множестве при некоторых дополнительных условиях.

Один из путей получения необходимых и достаточных условий оптимума состоит в применении принципа расширения – сужения класса допустимых. Путем сужения класса  $D$  получены известные необходимые условия минимума функций и функционалов и принцип максимума Понтрягина. Принцип расширения состоит в том, что функционал доопределяется на более широкое множество  $E$ , но так, что наименьшее значение он принимает в  $D$ .

Принцип расширения – сужения был применен В.Ф. Кротовым для получения общих достаточных условий оптимальности: задании такого множества  $E$ , включающего  $z$ , чтобы задача о минимуме на нем имела простое, но не тривиальное решение, и доопределением функционала  $I$  на множестве  $E$ .

В задачах оптимального управления элементами класса допустимых  $D$  являются управляемые процессы, точнее их математические модели. Рассмотрим систему, которая в каждый момент времени характеризуется вектором состояния  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , являющимся элементом некоторого множества  $X$ , называемого пространством состояний. Изменение состояния  $x$  во времени называется процессом. Управляемые процессы принято описывать путем указания закономерности перехода от предыдущего состояния к последующему в зависимости от управляющего воздействия, которое характеризуется вектором управлений  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$ , являющимся элементом некоторого множества  $U$  (множества управлений).

Математическая модель управляемого процесса представляет собой, как правило, уравнение, связывающее последующее состояние с предыдущим состоянием и управлением.

Следует подчеркнуть, однако, формальный смысл понятий состояния и управления, связанный с принятой формой математической модели, которая для реального управляемого объекта может быть неединственной. Например, в задачах оптимизации космических траекторий в качестве состояния принято рассматривать положение и скорость центра масс космического аппарата, а в качестве управления – направление вектора тяги. Как уже отмечалось, изменение направления тяги космического аппарата часто достигается путем его поворота с помощью устройств, создающих моменты относительно центра масс, что заставляет учитывать и динамику вращательного движения. Это несоответствие отражает тот факт, что математическая модель зависит от тех задач, которые должны решаться с ее помощью.

Помимо управления на переход из предыдущего состояния в последующее могут оказывать влияние другие факторы, которые не поддаются управлению и строгому учету. Они характеризуются так же, как и состояние и управление, некоторым вектором  $v$ , который принято называть возмущением.

В том случае, когда возмущающие факторы настолько несуществен-

ны, что ими можно пренебречь, вектор  $v$  не содержится в уравнениях математической модели управляемого процесса, а последний называется процессом с полной информацией.

Если изменение состояния рассматривается в каждый момент времени на каждом промежутке, говорят о непрерывном процессе. Если состояние рассматривается в дискретные моменты времени, процесс называется дискретным.

Рассмотрим постановку задачи оптимального управления для случая управляемого дискретного процесса с полной информацией. Будем считать элементами множества  $D$  пары функций  $x(t)$  и  $u(t): x \in X; u \in U; (x(t), u(t)) \in V(t)$ , удовлетворяющие граничным условиям и ограничениям на состояние и управление. Модель дискретной системы имеет вид

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.19)$$

где  $t = 0, 1, 2, \dots, N; V_X$  – проекция множества  $V(t)$  на пространство  $X; V_u(t, x)$  – сечение  $V(t)$  при каждом фиксированном  $x$ .

Задача заключается в отыскании таких  $(\bar{x}, \bar{u}) \in D$ , которые обеспечивают абсолютный минимум функционалу  $I$ :

$$I = \sum_{t=t_0}^{t=t_K-1} f_0(t, x(t), u(t)) + F(x(t_0), x(t_K)), \quad (2.20)$$

где  $t_0 = 0; t_K = N$  – начальный и конечный моменты времени;  $f_0(\cdot), F(\cdot)$  – скалярные функции.

Принцип расширения в данном случае реализуется следующим образом: не учитывается связь (2.19). Тем самым определяется множество  $E \supset D$ . На  $E$  строится функционал

$$L = G(x(0), x(N)) - \sum_{t=0}^{N-1} R(t, x(t), u(t)), \quad (2.21)$$

где  $G = F(\cdot) + \varphi(N, x(N)) - \varphi(0, x(0));$  (2.22)

$$R = \varphi[t+1, f(t, x(t), u(t))] - f_0(t, x(t), u(t)) - \varphi(t, x(t)).$$

Здесь  $\varphi(t, x(t))$  – некоторая вспомогательная, пока неопределенная, функция.

Если  $(x(t), u(t)) \in D$ , то, учитывая, что при этом

$$f(t, x(t), u(t)) = x(t+1), \text{ будем иметь}$$

$$L = F(\cdot) + \sum_{t=0}^{N-1} [\varphi(t, x(t)) - \varphi(t, x(t))] + \sum_{t=0}^{N-1} f_0(t, x(t), u(t)) \equiv I, \quad (2.23)$$

откуда следует, что  $L$  действительно является доопределением  $I$  на более широкое множество  $E$ .

**Теорема 1** (В.Ф. Кротов). Пусть  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in D$  и найдется такая функция  $\varphi(t, x(t))$ , что

$$\begin{aligned} R(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \mu(t) = \max R; \\ & (x, u) \in V(t) \\ G(\bar{x}(0), \bar{x}(N)) &= m = \min G, \\ & x(0) \in V_x(0) \\ & x(N) \in V_x(N) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Тогда  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  обеспечивает минимум  $I$  на  $D$ .

Доказательство этой теоремы элементарно. Очевидно, всегда

$$L \geq l = \min_E L = m - \sum_{t=0}^{N-1} \mu(t).$$

Но по условиям теоремы  $L = I = l$  на рассматриваемой паре  $(\bar{x}, \bar{u})$  из  $D$ . Следовательно,  $l = d = \min_D L$ .

$D$

Для непрерывных процессов постановка задачи и достаточные условия аналогичны. На отрезке  $[t_0, t_K]$  задается множество  $D$  как множество пар функций  $(x(t), u(t))$ , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u); \quad t \in [t_0, t_K]; \\ (x(t), u(t)) &\in V(t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Минимизируемый функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_K} f_0(t, x, u) dt + F(x(t_0), x(t_K)), \quad (2.26)$$

причем функции  $u(t)$  считаются кусочно-непрерывными;  $x(t)$  — кусочно-дифференцируемыми.

Строятся функции

$$G(x_0, x_K) = F(\cdot) + \varphi(t_K, x_K) - \varphi(t_0, x_0); \quad (2.27)$$

$$R = \varphi_x^T f(t, x, u) - f_0(t, x, u) + \varphi_t,$$

где  $\varphi(t, x)$  — непрерывная и дифференцируемая функция, символы  $\varphi_x$ ,  $\varphi_t$  обозначают частные производные  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ; непрерывные для всех  $t, x$ , кроме, может быть, конечного числа точек:

$$\varphi_x^T \cdot f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i, \quad (2.28)$$

где  $\tau$  — символ транспонирования.

**Теорема 2** (В.Ф. Кротов). Для того чтобы функционал (2.28) достигал абсолютного минимума на  $(\bar{x}, \bar{u}) \in D$ , достаточно существования такой функции  $\varphi(t, x)$ , чтобы

$$R(\bar{x}, \bar{u}, t) = \max_{(x, u) \in V(t)} R(t, x, u) = \mu(t); \quad (2.29)$$

$$G(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_K)) = \min_{\substack{x(t_0) \in V_x(t_0) \\ x(t_K) \in V_x(t_K)}} G(x(t_0), x(t_K)).$$

Здесь предполагается, что  $\mu(t)$  – кусочно-непрерывная функция времени.

Для доказательства теоремы положим, что множество  $E$  включает пары  $(x, u)$ , не связанные дифференциальным уравнением (2.25) и допускающие разрывы функции  $x(t)$  в конечном числе точек. Определим на  $E$  функционал

$$L = G(x(t_0), x(t_K)) - \int_{t_0}^{t_K} R(t, x, u) dt. \quad (2.30)$$

Нетрудно показать, что на исходном множестве  $D$  функционалы  $L$  и  $I$  совпадают. Действительно, при  $(x, u) \in D$

$$R(t, x, u) = -f_0(\cdot) + \varphi_t. \quad (2.31)$$

Подставляя это выражение в  $L$  и учитывая непрерывность  $x \in D$ , получим  $L = I$ .

Так как на множестве  $E$  допускаются разрывы функции  $x(t)$ , то слагаемые в  $L$  можно рассматривать независимо друг от друга. Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{(x, u) \in E} L &= \min_{\substack{x(t_0) \in V_x(t_0) \\ x(t_K) \in V_x(t_K)}} G(x(t_0), x(t_K)) - \\ &- \max_{(x, u) \in V(t)} \int_{t_0}^{t_K} R(t, x, u) dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Если теперь предположить, что  $(\bar{x}, \bar{u}) \in D$  и выполняются условия (2.29), то согласно (2.32)  $L$  достигает абсолютного минимума на  $E$  и одновременно при этом достигается  $\min I$ . Теорема доказана.

$D$

Теорема 2 сводит задачу о минимуме функционала  $I$  к более простой задаче об экстремуме функций многих переменных  $R$  и  $G$ . Проблема сводится теперь к следующему: так задать неопределенный элемент – функцию  $\varphi(t, x)$  (синтезирующую функцию или функцию Кротова), которая доопределяет функционал  $L$  на  $E$ , чтобы минимум  $I$  принадлежал  $D$ . Оказывается, задать функцию  $\varphi$  можно различными способами.

ми, и это дает возможность приспособливаться к специфике задачи. Один из способов (формализмов) приводит к процедуре принципа Понтрягина, другой – к процедуре динамического программирования, а третий (метод кратных максимумов) пригоден для решения так называемых вырожденных задач [18].

### 2.2.2. Способы задания синтезирующей функции.

1. Пусть множество  $V_X(t)$  есть открытая область при всех  $t \in (t_0, t_K)$ , а при  $t = t_0$  и  $t = t_K$  – фиксированная точка:  $x(t_0)$  и  $x(t_K)$ ; терминальный член в функционале  $I$  (2.26) отсутствует ( $F \equiv 0$ ). Далее, пусть множество  $V_u$  не зависит от  $x$ . Потребуем, чтобы  $\varphi(t, x)$  была дважды дифференцируема вдоль оптимальной траектории. Тогда необходимое условие (или условие 1-го порядка) максимума функции  $R(t, x, u)$  по  $x$  будет иметь вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} = \left( -\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \right)_{\bar{x}} = 0. \quad (2.33)$$

Введем обозначение  $\dot{\psi}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\bar{x}}$ . Очевидно, вдоль минимали  $\bar{x}(t)$

$$\dot{\psi}(t) = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)_{\bar{x}} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f \right)_{\bar{x}},$$

тогда из (2.33) легко получить

$$\dot{\psi}(t) = \left( \frac{\partial f_0}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{x}} - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}}^T \bar{\psi} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}, \quad (2.34)$$

где  $\bar{H}$  – функция Гамильтона:

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, u, t, \psi) &= H(\bar{x}, u, t, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\bar{x}}) = \\ &= -f_0(t, \bar{x}, u) + \psi^T f(t, \bar{x}, u). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Условия максимума  $R(t, \bar{x}, u)$  по управлению может быть теперь представлено в виде

$$H(\bar{x}, \bar{u}, t, \bar{\psi}) = \max_{u \in V_u} H(\bar{x}, u, t, \bar{\psi}). \quad (2.36)$$

Система уравнений (2.34) может быть решена совместно с исходной системой (2.25). Представим эти уравнения в канонической форме

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\psi}}, \quad \dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}. \quad (2.37)$$

Таким образом, необходимые условия максимума функции  $R$  совпадают с известными необходимыми условиями оптимальности принципа максимума Понтрягина.

Если существует такая  $\varphi(t, x)$ , что на решении  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{u}(t)$  удовлетворяют не только необходимые, но и достаточные условия максимума  $R(t, x, u)$  при каждом  $t \in (t_0, t_K)$ , то в силу теоремы 2 решение  $(\bar{x}, \bar{u})$  задает искомую минималь, т.е. обеспечивает абсолютный минимум функционала  $I$  на множестве  $D$ . В частности, (2.33), (2.36) являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности линейных систем с линейным и квадратичным (выпуклым) функционалами.

2. Рассмотрим теперь способ задания функции Кротова, приводящий к процедуре динамического программирования. Этот способ принято называть формализмом Гамильтона – Якоби – Беллмана.

Рассмотрим сначала непрерывные процессы (2.25), (2.26). Пусть  $X$  – открытое множество при всех  $t \in (t_0, t_K)$  при  $t = t_0$  совпадает с точкой  $x(t_0) = x_0$ , а функция  $F$  в функционале  $I$  не зависит от  $x(t_0)$ . Выберем  $\varphi(t, x)$  так, чтобы  $\max R(t, x, u)$  не зависел от  $x$ , т.е. имело место соотношение

$$\max_{u \in V_u} \left[ -f_0(t, x, u) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^T f(t, x, u) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = C(t). \quad (2.38)$$

Тогда будет автоматически выполнено условие 1 (2.29). Для выполнения условия 2 (2.29) потребуем, чтобы  $G$  не зависела от  $x(t_K)$ :

$$F(x(t_K)) + \varphi(t_K, x(t_K)) = C_1 = \text{const}. \quad (2.39)$$

Указанный способ задания функции  $\varphi(t, x)$  приводит к необходимости решения уравнения (2.38) с граничным условием (2.39). Если положить  $C(t) \equiv 0$ ;  $C_1 = 0$  и ввести обозначение  $S(t, x) = -\varphi(t, x)$ , то уравнение (2.38) принимает классический вид уравнения Беллмана для непрерывных систем

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{u \in V} \left[ f_0(t, x, u) + \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f(t, x, u) \right]. \quad (2.40)$$

с граничным условием

$$S(t_K, x) = F(x(t_K)). \quad (2.41)$$

Как следует из (2.40), (2.41), решение уравнения (2.38)  $\varphi(t, x)$  можно интерпретировать как функцию "будущих потерь"  $S(t, x) = \min I[x(t), u(t)]$ , взятую с обратным знаком.

*D*

Указанная процедура задания функции  $\varphi$  легко реализуется и для дискретных систем. В результате задача сводится к решению на каждом шаге процесса, начиная с конечного, рекуррентного соотношения (дискретного уравнения Р. Беллмана):

$$\varphi(t, x) = \max_{u \in V_u(t, x)} [\varphi(t+1, f(t, x, u)) - f_0(t, x, u)], \quad (2.42)$$

причем  $\varphi(N, x) = -F(x(N))$ .

**2.2.3. Оценки приближенно-оптимальных решений.** Рассмотрим величину  $l = m - r$ , где  $r = \sum_{t=0}^{N-1} \mu(t)$  для дискретных систем,  $r = \int_{t_0}^{t_K} \mu(t) dt$  для непрерывных систем;  $l = \min I$ ;  $m = \min_{(x_0, x_K)} [F(\cdot) + \varphi(t_K, x(t_K)) - \varphi(t_0, x(t_0))]$ . Очевидно,  $l$  зависит от  $\varphi(t, x)$ . Так как  $l(\varphi)$  — нижняя граница  $I$ , то  $d = \min I \geq l(\varphi)$ . При удачном выборе  $\varphi(t, x)$   $l(\varphi) = d$ . Таким образом, в задачах, где функция  $\varphi$ , удовлетворяющая условиям теоремы 1, существует, она соответствует наибольшему значению функционала  $l(\varphi)$ . Очевидно, разность

$$\Delta(z, \varphi) = I(z) - l(\varphi) \geq I(z) - \min_D I \quad (2.43)$$

есть верхняя оценка приближенно-оптимального решения  $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{u}) \in D$ . Можно теперь искать последовательность пар  $\{(\varphi_S, \tilde{z}_S)\}$ ;  $\tilde{z}_S \in D$  такую, что разность

$$\Delta_S(\tilde{z}_S, \varphi_S) = I(\tilde{z}_S) - l(\varphi_S) = L(\tilde{z}_S) - l(\varphi_S) \rightarrow 0. \quad (2.44)$$

По достижении достаточно малого значения  $\Delta_S$  процесс поиска можно прекратить, поскольку поиск идеально точного (абсолютно оптимального) решения зачастую не оправдан практической постановкой задачи, связанной с неизбежным упрощением модели.

При практическом решении задач оптимального управления на основе принципа расширения и достаточных условий оптимальности основная проблема помимо выбора функции  $\varphi$  заключается в отыскании  $\mu(t) = \max R(t, x, u)$  и  $m = \min G(x(t_0), x(t_K))$ , т.е. в отыскании экстремума функции многих переменных.

Если управления в данной задаче удовлетворяют априорно заданным условиям принадлежности множеству допустимых  $U$ , то для вектора состояния целесообразно построить так называемую область достижимости, т.е. область, содержащую только те функции  $x(t)$ , которые удовлетворяют условиям:  $\dot{x} = f(t, x, u)$ ;  $(x, u) \in D$ . Получающееся при этом множество фактически достижимых состояний  $V_X^D(t)$  уже, или по крайней мере не шире, чем априорно заданное множество  $V_X(t)$ .

Заметим, что точное определение  $V_X^D(t)$  в общем случае бессмысленно, так как требует решения серии задач оптимального управления того же порядка, что и поставленная задача.

Поэтому реальный смысл имеет задача о построении  $V_X^*(t)$ , которое

удовлетворяет условию  $V_X^D(t) \subseteq V_X^*(t) \subseteq V_X(t)$ . Один из простейших способов построения множества  $V_X^*(t)$  заключается в образовании из исходной системы, например (2.25), системы  $2n$  дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_{iH} &= \min_{(u, x_j)} f_i(t, x, u); \\ \dot{x}_{iB} &= \max_{(u, x_j)} f_i(t, x, u); \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$u \in V_u(t, x); x_{jH}(t) \leq x_j \leq x_{jB}(t); j \neq i; i = 1, n.$$

Будем решать задачу Коши для этой системы при следующих начальных условиях:  $x_{iH}(t_0) = \min V_{X_i}(t_0)$ ;  $x_{iB}(t_0) = \max V_{X_i}(t_0)$ , где  $V_{X_i}(t_0)$  — проекция множества  $V_X(t_0)$  на ось  $X_i$ . Легко видеть, что решение  $x(t)$  исходной системы в любой момент времени при  $u \in V_u(t, x)$ ,  $x(t_0) \in V_X(t_0)$  принадлежит области  $V_{X_i}^*(t_0)$ , сечение которой  $V_{X_i}^*(t_0, t)$  при каждом  $t$  есть  $n$ -мерный параллелепипед  $x_{iH}(t) \leq x_i \leq x_{iB}(t)$ .

В самом деле, поле направлений исходной системы (2.25) на границе области  $V_{X_i}^*$  направлено либо внутрь этой области, либо по касательной к границе. Так как по построению начальная точка принадлежит  $V_{X_i}^*(t_0)$ , то искомая интегральная кривая исходной системы не может выйти за пределы указанной области.

Аналогичное построение можно провести, интегрируя справа налево систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_{iB} &= \min_{(u, x_j)} f_i(t, x, u); \\ \dot{x}_{iH} &= \max_{(u, x_j)} f_i(t, x, u); \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$u \in V_u(t, x); x_{jH} \leq x_j \leq x_{jB}, j \neq i, i = \overline{1, n}.$$

с начальными условиями

$$x_{iH}(t_K) = \min V_{X_i}(t_K); x_{iB}(t_K) = \max V_{X_i}(t_K).$$

В результате получим область  $V_{X_i}^*(t_K)$ , содержащую все интегральные линии системы (2.25), попадающие в множество  $V_X(t_K)$ . Тогда в качестве  $V_X^*(t)$  можно принять следующее множество:  $V_X^*(t) = V_X^*(t_0, t) \cap V_X^*(t_K, t) \cap V_X(t)$ . В случае, когда  $n = 1$ , построенное таким способом множество  $V_X^*$  совпадает с множеством  $V_X^D$ , так как границы  $x_B(t)$  и  $x_H(t)$  являются точными решениями уравнения  $\dot{x} = f(t, x, u)$  при выборе  $u$  согласно условиям  $\max f(t, x, u)$ ;  $\min f(t, x, u)$ .

$$u \in V_u(t, x) \quad u \in V_u(t, x)$$

2.2.4. Оптимизация и оценка процессов управления в условиях неопределенности. Во многих задачах управления математическая модель системы содержит неопределенные элементы, связанные с наличием возмущений  $v$ , природа которых и характеристики известны недостаточно.

Обозначим  $\tilde{v}$  конкретную реализацию возмущения из множества допустимых  $Y_0$ . Тогда оценка управления  $\tilde{u}(t, x)$  определяется разностью

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\varphi, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}) &= L(\varphi, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}) - \min_E L(\varphi, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}) \geq \\ &\geq I(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}) - \min_D I(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Здесь  $\tilde{x}$  – вектор состояния, соответствующий уравнению  $\tilde{u}$  и возмущению  $\tilde{v}$  в силу уравнений, описывающих динамику системы. Гарантирующая оценка оптимальности управления  $\tilde{u}(t, x)$  на множестве реализаций возмущений  $v \in Y_0$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_m(\varphi, \tilde{x}, \tilde{u}) &= \max_{v \in Y_0} \tilde{\Delta}(\varphi, \tilde{x}, \tilde{u}, v) \geq \\ &\geq \max_{v \in Y_0} [I(\tilde{x}, \tilde{u}, v) - \min_D I(\tilde{x}, \tilde{u}, v)] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Во многих моделях управляемых процессов предусматривается уточнение возмущений по результатам измерений, позволяющее достаточно уверенно прогнозировать эволюцию  $v(t)$  и множества  $Y_0$  по крайней мере на шаг вперед. Пусть в момент  $t = i$  на основании предыстории процесса построена математическая модель возмущений  $v^i(t)$ , и уточнены границы множества допустимых  $Y_i$ . В этом случае при  $t \in [i, t_K]$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_m^i &= \max_{v \in Y_i} \tilde{\Delta}^i(\varphi, \tilde{x}, \tilde{u}, v) \geq \\ &\geq \max_{v \in Y_i} [I^i(\tilde{x}, \tilde{u}, v) - \min_D I^i] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Здесь  $\tilde{\Delta}_m^i$  представляет собой гарантированную оценку отклонения функционала  $I$  от его минимального значения на оставшемся подынтервале  $[i, t_K]$ .

Вычисление оценки  $\tilde{\Delta}_m^i$  в форме (2.49) сводится к задаче поиска минимакса функции  $L$  по ее аргументам  $(x, u, v)$  в определенной последовательности. Заметим, что в этой операции учитываются границы множества допустимых состояний  $V_x^i$ , которые строятся методом, описанным в подразд. 2.2.3. Границы множества  $Y_i$  лишь в начальный

момент совпадают с границами множества  $Y_0$ , заданного априори:  $Y_i \subset Y_0$ .

Вычисляя оценку при  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , получаем последовательность апостериорных (или прогнозируемых) оценок  $\{\hat{\Delta}_m^i\}$ , которая характеризует эффективность стратегии управления — наблюдения.

Получение достоверной оценки процессов управления в условиях неопределенности во многом определяется выбором оценочной функции Кротова  $\varphi(t, x)$ . Рассмотрим один из способов задания этой функции.

Введем в рассмотрение функции:

$$R_1 = \min_{v \in Y} R(t, x, u, v); \quad (2.50)$$

$$R_2 = R(t, x, u, v)|_{v=0},$$

представляющие собой в определенном смысле предельные значения для функции  $R$ , первое из которых соответствует наихудшему случаю реализации возмущения ( $v = \underset{v}{\operatorname{argmin}} R$ ), а второе — полному отсутствию

возмущения ( $v = 0$ ). Выберем теперь  $\varphi(t, x)$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\max_{u \in V_u^*(t, x)} R_{1,2} = C(t). \quad (2.51)$$

Очевидно, искомая функция  $\varphi(t, x)$  является решением нелинейного уравнения в частных производных (2.51) с граничным условием  $G(x_k) = 0$  (см. 2.39). Заметим, что величина  $\varphi_{1,2}(t_0, x_0)$  представляет собой значение функционала  $I$ , взятое с обратным знаком — ”стоимость” перехода из заданного начального состояния в конечное при ”предельных” случаях реализации возмущений.

В дискретной модели управляемого процесса выбор функции  $\varphi(t, x)$  по методу Беллмана в соответствии с (2.50) приводит к рекуррентному соотношению

$$\varphi_{1,2}(t, x) = \max_{u \in U_u(t, x)} \{ \varphi_{1,2}[t+1, f(t, x, u, \tilde{v})] - f_0(t, x, u) \} \quad (2.52)$$

с граничным условием  $\varphi_{1,2}(N, x) = -F[x(N)]$ .

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t) \quad (2.53)$$

с функционалом

$$I = \sum_{t=0}^N u^T(t)W(t)u(t) + x^T(N+1)\Lambda x(N+1), \quad (2.54)$$

где  $A, B, C$  — матрицы размерностей  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $n \times m$ ;  $W, \Lambda$  — положи-

тельно определенные матрицы. Функцию  $\varphi$  можно задавать в виде квадратичной формы

$$\varphi(t, x) = x^T(t)\Psi(t)x(t). \quad (2.55)$$

Неизвестные коэффициенты  $\psi_{k_s}$  матрицы  $\Psi$  определяются рекуррентными соотношениями, вытекающими из (2.52). Наиболее просто реализуется алгоритм, в котором  $v \equiv 0$ :

$$\Psi(t) = A^T(t)\Psi(t+1)A(t) - M^T(t)G_*(t)M(t), \quad (2.56)$$

где  $G_*(t) = W(t) + B^T(t)\Psi(t+1)B(t)$ ;

$$M(t) = G_*^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t+1)A(t), \quad (2.57)$$

причем  $\Psi(N+1) = -\Lambda$ .

Если исходная система дискретных уравнений нелинейная, но допускает линеаризацию в окрестности опорной траектории, такой подход позволяет получить функцию  $\varphi$  в аналитической форме и использовать ее в процедуре оценки. Соотношения (2.55) ... (2.57) задают искомую функцию  $\varphi$  в виде  $\Lambda$ -параметрической зависимости; подбором элементов  $\lambda_{k_s}$  матрицы  $\Lambda$  можно добиться улучшения оценки.

### 2.3. ОЦЕНКИ ПЕРЕЛЕТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ НА РАСШИРЕННОМ МНОЖЕСТВЕ ДОПУСТИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ И УПРАВЛЕНИЙ

1. Рассмотрим задачу перехода космического аппарата с двигателем малой тяги из одной точки пространства  $(r_0, V_0)$  в другую точку  $(r_K, V_K)$  за заданное время  $T = t_K - t_0$ . Пусть требуется обеспечить минимум некоторого функционала  $I$ . Полагаем, что уравнения движения заданы в форме (2.14), (2.17), причем граничные условия для ориентации КА и для угловой скорости  $\omega$  не заданы.

Нетрудно проследить связь данной постановки задачи с другими, которые уже рассматривались в литературе. Исключим из системы (2.14) два уравнения, описывающих угловое движение; расход рабочего тела на управление  $\beta_{удр}$  положим равным нулю. При этом вектор  $e$  приобретает смысл независимого управления, а множество допустимых траекторий и управлений  $D$  расширяется до некоторого множества  $E$  (поскольку исключаются некоторые связи). Очевидно,

$$\min_E I \leq \min_D I. \quad (2.58)$$

Однако ясно, что случай, когда  $e$  является независимым управлением, а не фазовой переменной, соответствует традиционной постановке задач оптимизации траекторий в механике полета, когда не учитыва-

ется угловое движение аппарата, а вектор тяги может произвольно менять свою ориентацию в пространстве.

Таким образом, соотношение (2.58) служит априорной оценкой функционала на расширенном множестве допустимых траекторий и управлений  $E$ . Такая оценка может оказаться полезной и содержательной в случае, когда на управляющий момент не накладывается слишком жестких ограничений: в противном случае степень неоптимальности управляемого движения может оказаться завышенной. Однако отыскание  $\min_I$  требует точного решения задачи оптимального управления дви-

$E$

жением центра масс КА, которая сама по себе остается достаточно сложной.

2. Другой вариант расширения множества допустимых состоит в следующем. Будем считать тягу  $P$  и скорость  $c$  не постоянными параметрами, а некоторыми неограниченными функциями времени, связанными друг с другом соотношением:  $Pc/2 = N = \text{const}$ . Вместо двух связей, наложенных на  $P$  и  $c$ , теперь остается только одна. Перепишем уравнение, описывающее изменение массы КА, в следующем виде (с учетом  $\beta_{\text{упр}} = 0$  и  $a = P/m$ ):

$$\dot{m} = - \frac{a^2 m^2}{2N} \delta = - \frac{\alpha a^2 m^2}{2m_{\text{д}}} \delta.$$

Интегрируя это уравнение, можно получить выражение для критерия оптимальности  $I = m_{\text{д}}$  в виде (2.3). Легко видеть, что последний случай соответствует постановке вариационной задачи для идеально регулируемого ЭРД. Полученный результат показывает, что полезная масса перелета с идеально регулируемым двигателем малой тяги является верхней оценкой полезной массы в задаче оптимизации, сформулированной для ЭРД с нерегулируемой тягой. Таким образом, модель идеально регулируемого двигателя сохраняет свое значение для оценки предельных возможностей ЭРД и минимальных энергозатрат данного маневра.

3. Представим критерий оптимальности  $I$  в виде суммы  $I = I_1 + I_2$ , где первый член характеризует энергетику перелета, а второй – затраты на управление угловым движением. Получим верхние и нижние оценки функционала  $I$ . Пусть  $I_2 = 0$ , т.е. управление угловым движением осуществляется "бесплатно". Отбрасывая уравнения углового движения, получаем задачу о  $\min I_1$ . Ее решение – оптимальная программа  $\bar{P}(t)$ ,

$E$

$\bar{\delta}(t)$ ,  $\bar{e}(t)$  – должно быть реализуемо с помощью управления  $M(t)$ .

Реализация оптимальной программы сводится к проверке условия

принадлежности производных  $\frac{de}{dt}$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$  конусу  $\Omega$  допустимых фазовых скоростей:  $\Omega = \left\{ \left( \frac{de}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \right) : M \in U \right\}$ .

Найденное значение  $\bar{I}_1 = \min_E I_1$  дает гарантированную оценку снизу для функционала  $I$ .

Если программное движение, найденное описанным способом на расширенном множестве допустимых, не реализуется в исходном классе траекторий и управлений, следует искать новое управление, удовлетворяющее ограничениям и доставляющее минимум функционалу  $I_1$ . Приближенный способ решения этой задачи заключается в формировании структуры управления угловым движением, заведомо допускающей возможность ее реализации путем выбора ограниченного числа параметров с последующей оценкой, например по критерию  $\bar{I}_1$ . Найдем управление  $\bar{M}$ , при котором уравнения углового движения выполняются тождественно. Тогда функционал  $\bar{I}_2 = I_2(\bar{M})$  можно считать приближенной оценкой затрат на реализацию оптимальной траектории.

4. Пусть существует такой режим  $M^0$ , при котором расход на управление угловым движением отсутствует. При  $M^0 \equiv 0$  вектор тяги совершает так называемое неуправляемое движение. При этом  $I_2 \equiv 0$ , а функционал  $I_1$  оптимизируется с учетом ограничения, накладываемого связью:  $M^0 \equiv 0$ . Его значение  $I_{1m}$  является верхней оценкой критерия оптимальности  $I$ . Таким образом, неравенство  $\bar{I}_1 \leq I \leq I_{1m}$  вместе с соотношением  $I_2 \approx I_2(\bar{M})$  позволяет оценить предельные энергетические характеристики перелетов и затраты на управление угловым движением.

## КОММЕНТАРИИ

1. Задача оптимизации траекторий космических перелетов с малой тягой исследуются с конца 50-х – начала 60-х годов. Наиболее заметными в этой области являются работы Г.Л. Гродзовского, Ю.Н. Иванова, В.В. Токарева; В.Н. Лебедева [39], В.В. Белецкого, В.А. Егорова [5], Д.Е. Охожимского и Г.Б. Ефимова [21]; зарубежных авторов [27, 43, 68]. Достаточно полное представление о перечисленных работах дает книга [17]. Ряд публикаций зарубежных авторов, переведенных на русский язык, содержится в монографии [44]. В работах [27, 67] задача оптимизации траекторий решалась аналитически с применением простейших моделей гравитационных частей. Основным инструментом для исследования служил принцип максимума Понтрягина [24, 39]. Однако применялись и классические методы вариационного исчисления [21, 27] и численные методы оптимизации [32, 44, 68].

2. Проблема совместного анализа движения центра масс летательного аппарата и его углового движения является не новой для механики полета. В частности, на необходимость учета движения аппарата относительно центра масс при анализе траекторного движения указывалось в известных монографиях И.В. Остославского, И.В. Стражевой [48], А.А. Лебедева, Л.С. Чернобровкина [40] и др. Например, в работе [48] сформулированы условия, позволяющие рассматривать траекторное

движение ЛА в атмосфере отдельно от его углового движения (быстрота переходного процесса, малость влияния управляющих сил на траекторию, стационарность аэродинамических сил и моментов). Вообще говоря, взаимосвязь траекторного и углового движений летательного аппарата имеет место во всех задачах механики полета в атмосфере [49], когда аэродинамические силы, влияющие на траекторию полета, целиком определяются угловым положением аппарата относительно вектора воздушной скорости. Зачастую, однако, разделение движений проводилось без достаточных к тому оснований, ввиду сложности общей математической модели движения.

В классических задачах ракетодинамики (Д.Е. Охочимский "К теории движения ракет", А.А. Космодемьянский "Курс теоретической механики", Д.Е. Охочимский и Т.М. Энеев "Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли") летательный аппарат традиционно рассматривался как точка переменной массы. Иная постановка задачи для механики внеатмосферного космического полета (баллистики) оказывается необычной и должна быть обоснована большой продолжительностью активного участка (что характерно для аппаратов с двигателями малой тяги).

3. Основные теоремы о достаточных условиях оптимальности и их конкретизации в форме Р. Беллмана и Л.С. Понтрягина опубликованы впервые в работах В.Ф. Кротова. Дальнейшее их развитие и обсуждение других работ данного направления содержится в книгах В.Ф. Кротова, В.И. Гурмана [35], В.И. Гурмана [18, 19]. Изложение материала разд. 2.2 (за исключением подразд. 2.2.4) дается по книге [35]. Трудности, возникающие при вычислениях, связанных с отысканием оптимальных управлений для нелинейных многомерных систем, послужили стимулом к развитию специальных приближенных методов и оценок.

4. Исследованию вариационных задач механики полета с помощью методов, описанных в разд. 2.2, посвящен большой раздел книги В.Ф. Кротова, В.И. Гурмана [35]. Использование специального приема исследования вырожденных задач (метода кратных максимумов) позволило В.И. Гурману получить изящные решения задач оптимизации космических перелетов в центральном поле при неограниченном времени.

## ГЛАВА 3

### ПРОГРАММНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

В литературе приведен целый ряд достаточно простых и хорошо изученных программ управления аппаратами с малой тягой без учета углового движения. Очевидно, программная ориентация вектора тяги может выбираться не единственным образом. При ее обосновании часто руководствовались теми или иными эвристическими соображениями, например, постоянством трансверсального и тангенциального ускорений, однако учитывались и соображения оптимальности. Особый интерес представляют программы, оптимальные с точки зрения наилучших траекторных характеристик. Например, так называемые экстремальные траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности в задачах на быстроедействие, или на минимум интеграла от квадрата реактивного ускорения были найдены с помощью численного моделирования на ЭЦВМ [21, 39].

Естественно попытаться оценить близость соответствующих траекторий (которые в дальнейшем будем называть программными) к оптимальным, используя описанные в гл. 2 приближенные методы и оценки. Если учитывается угловое движение аппарата, то предварительно возникает вопрос о реализуемости указанных программ управления вектором тяги в рамках общей модели движения КА.

### 3.1. ПЕРЕЛЕТЫ С НЕПРЕРЫВНОЙ ТЯГОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

**3.1.1. Скалярные уравнения траекторного и углового движений.** Составим уравнения движения аппарата в центральном ньютоновском поле тяготения, считая, что влиянием аэродинамических сил и моментов можно пренебречь. В уравнениях углового движения будем учитывать гравитационный момент  $H$ .

Введем две правые системы координат, начало которых совместим с центром масс КА: подвижную орбитальную  $OXYZ$ , оси которой направлены по трансверсали  $OX$ , по радиусу-вектору  $OY$  и по нормали к плоскости орбиты  $OZ$ ; и связанную  $OX_1Y_1Z_1$  с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции КА (рис. 3.1).

Примем, что вектор тяги  $Pe$  направлен вдоль связанной оси  $OX_1$ , которую в дальнейшем будем называть продольной. Положение связанных осей КА в орбитальной системе координат зададим углами  $\psi$ ,  $\vartheta$  и  $\gamma$ . Угол  $\psi$  образован продольной осью КА  $OX_1$  и плоскостью орбиты  $HOY$ , угол  $\vartheta$  составлен проекцией оси  $OX_1$  на плоскость орбиты

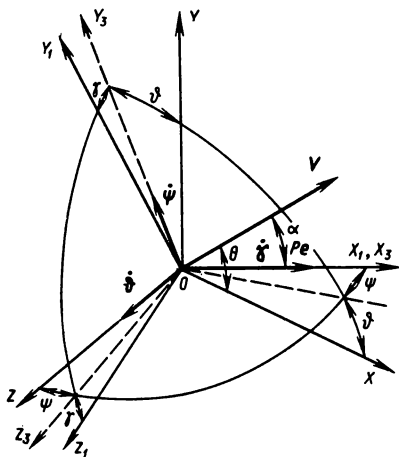


Рис. 3.1. Системы координат с началом в центре масс аппарата

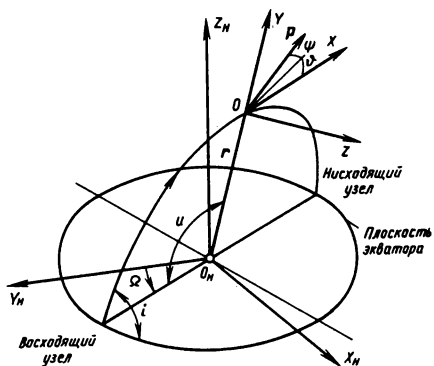


Рис. 3.2. Положение орбиты в пространстве и углы, характеризующие ориентацию вектора тяги

с трансверсалью  $OX$ . Угол  $\gamma$  характеризует поворот КА вокруг продольной оси  $OX_1$ . Введенные углы соответствуют второй системе углов Эйлера. ("Механика полета". Под ред. С.А. Горбатенко).

Выберем следующую совокупность переменных, характеризующих как положение плоскости орбиты в пространстве, так и положение центра масс КА в этой плоскости (рис. 3.1, 3.2):  $i$  – наклонение орбиты к плоскости экватора;  $\Omega$  – долгота восходящего узла;  $r$  – расстояние до притягивающего центра;  $V$  – скорость;  $\theta$  – угол наклона траектории к плоскости местного горизонта  $OXZ$ ;  $u$  – аргумент широты (угловая координата, отсчитываемая в плоскости орбиты от мгновенного положения восходящего узла). Для описания движения центра масс КА будем использовать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= V \sin \theta; \\
 \frac{dV}{dt} &= -\frac{\sin \theta}{r^2} + \frac{P\delta}{m} \cos \psi \cos(\vartheta - \theta); \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \left( \frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\cos \theta}{V} + \frac{P\delta}{mV} \cos \psi \sin(\vartheta - \theta); \\
 \frac{du}{dt} &= \frac{-V \cos \theta}{r} - \frac{P\delta}{m} \frac{\sin \psi}{V \cos \theta} \sin u \operatorname{ctg} i; \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{P\delta}{m} \frac{\sin \psi \sin u}{V \cos \theta \sin i}; \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{P\delta}{m} \frac{\sin \psi \cos u}{V \cos \theta}; \\
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{P\delta}{c} - \beta_{\text{упр}} \delta_{\text{упр}}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Уравнения для  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{d\Omega}{dt}$  можно легко получить из классических уравнений для оскулирующих элементов орбиты (П.Е. Эльясберг "Введение в теорию полета искусственных спутников Земли"), если записать компоненты реактивного ускорения  $a = \frac{P}{m}$  по осям орбитальной системы координат:  $a_x = a \cos \psi \cos \vartheta$ ;  $a_y = a \cos \psi \sin \vartheta$ ;  $a_z = -a \sin \psi$ .

Система (3.1) записана в безразмерных переменных. Здесь введены следующие масштабные величины: для расстояния – начальный радиус  $r_0^*$ ; для скорости – начальная круговая скорость  $V_0^* = \sqrt{\mu^*/r_0^*}$ , для времени – величина  $T_0^*/(2\pi) = \sqrt{r_0^{*3}/\mu^*}$  (где  $T_0^*$  – период обращения по кру-

говой орбите радиуса  $r_0^*$ ); для ускорения – гравитационное ускорение  $g_0^*$  на радиусе  $r_0^*$ ;  $g_0^* = \mu^*/(r_0^*)^2$ ; для массы – начальная масса КА  $m_0^*$ ; для угловой скорости – величина  $\sqrt{\mu^*/(r_0^*)^3}$ . Масштабом измерения моментов инерции может служить один из них (например, максимальный, определенный для начального момента времени,  $I_{j\max}^*$ ). Масштабом измерения управляющего и гравитационного моментов будет параметр  $\mu^* I_{j\max}^*/(r_0^*)^3$ . В дальнейшем размерные величины и масштабные коэффициенты будем отмечать звездочкой, там где могут возникнуть недоумения.

Будем считать, что связанные оси КА являются главными осями инерции, а смещение центра масс пренебрежимо мало. Тогда движение аппарата относительно центра масс описывается известными динамическими и кинематическими уравнениями Эйлера. С учетом выбранной совокупности угловых координат они имеют вид (см., например [1])

$$I_{X_1} \frac{d\omega_{X_1}}{dt} + (I_{Z_1} - I_{Y_1})\omega_{Y_1}\omega_{Z_1} = M_{X_1} + H_{X_1};$$

$$I_{Y_1} \frac{d\omega_{Y_1}}{dt} + (I_{X_1} - I_{Z_1})\omega_{X_1}\omega_{Z_1} = M_{Y_1} + H_{Y_1}; \quad (3.2)$$

$$I_{Z_1} \frac{d\omega_{Z_1}}{dt} + (I_{Y_1} - I_{X_1})\omega_{X_1}\omega_{Y_1} = M_{Z_1} + H_{Z_1};$$

$$\omega_{X_1} = \left( \frac{d\gamma}{dt} \cos\psi \cos\vartheta - \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta + \omega_{0X} \right) \times$$

$$\times \cos\psi \cos\vartheta + \left( \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta + \frac{d\gamma}{dt} \cos\psi \sin\vartheta + \right.$$

$$\left. + \omega_{0Y} \right) \cos\psi \sin\vartheta - \left( \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} \sin\psi + \omega_{0Z} \right) \sin\psi;$$

$$\omega_{Y_1} = \left( \frac{d\gamma}{dt} \cos\psi \cos\vartheta - \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta + \omega_{0X} \right) \times$$

$$\times \left( -\cos\gamma \sin\vartheta + \sin\gamma \sin\psi \cos\vartheta \right) + \left( \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{d\gamma}{dt} \cos\psi \sin\vartheta + \omega_{0Y} \right) (\cos\gamma \cos\vartheta + \sin\gamma \sin\psi \times$$

$$\times \sin\vartheta) + \left( \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} \sin\psi + \omega_{0Z} \right) \sin\gamma \cos\psi;$$

$$(3.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_{Z_1} = & \left( \frac{d\gamma}{dt} \cos\psi \cos\vartheta - \frac{d\psi}{dt} \sin\vartheta + \omega_{0X} \right) \times \\ & \times (\sin\gamma \sin\vartheta + \cos\gamma \sin\psi \cos\vartheta) + \left( \frac{d\psi}{dt} \cos\vartheta + \right. \\ & + \frac{d\gamma}{dt} \cos\psi \sin\vartheta + \omega_{0Y} ) (\cos\gamma \sin\psi \sin\vartheta - \\ & \left. - \sin\gamma \cos\vartheta \right) + \left( \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} \sin\psi + \omega_{0Z} \right) \cos\gamma \cos\psi. \end{aligned}$$

Кинематические соотношения (3.3), связывающие проекции вектора угловой скорости  $\omega$  на оси системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  с углами  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$  и их производными, содержат проекции угловой скорости  $\omega_0$  орбитальной системы координат на ее собственные оси,  $\omega_{0X}$ ,  $\omega_{0Y}$ ,  $\omega_{0Z}$ . Последние определяются движением начала координат в плоскости орбиты  $OXY$  и изменением самой плоскости орбиты под действием бинормальной составляющей реактивного ускорения  $a_Z$  и могут быть выражены так:

$$\begin{aligned} \omega_{0X} &= \frac{d\Omega}{dt} \sin i \cos u - \frac{di}{dt} \sin u; \\ \omega_{0Y} &= \frac{d\Omega}{dt} \sin i \sin u + \frac{di}{dt} \cos u; \\ \omega_{0Z} &= - \frac{du}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} \cos i. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Подставляя производные углов  $\Omega$ ,  $i$  и  $u$  из системы (3.1), получим окончательно:

$$\begin{aligned} \omega_{0X} &= 0; \\ \omega_{0Y} &= a\delta \frac{\sin\psi}{V \cos\theta}; \\ \omega_{0Z} &= - \frac{V \cos\theta}{r} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Разрешая теперь уравнения (3.3) относительно  $\frac{d\vartheta}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$ ,  $\frac{d\gamma}{dt}$ , получим систему кинематических уравнений углового движения:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{Y_1} \cos\gamma - \omega_{Z_1} \sin\gamma - a\delta \frac{\sin\psi \sin\vartheta}{V \cos\theta};$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{V \cos\theta}{r} + \frac{1}{\cos\psi} (\omega_{Y_1} \sin\gamma + \omega_{Z_1} \cos\gamma) - a\delta \frac{\sin^2\psi \sin\vartheta}{V \cos\theta \cos\psi}; \quad (3.6)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_{X_1} + \operatorname{tg}\psi (\omega_{Y_1} \sin\gamma + \omega_{Z_1} \cos\gamma) - a\delta \frac{\operatorname{tg}\psi \sin\vartheta}{V \cos\theta}.$$

Выражения для проекций гравитационного момента  $\mathbf{H}$  на связанные оси запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} H_{X_1} &= \frac{3}{r^3} (I_{Z_1} - I_{Y_1}) (\cos\vartheta \cos\gamma + \sin\vartheta \sin\psi \times \\ &\times \sin\gamma) (\sin\vartheta \sin\psi \cos\gamma - \cos\vartheta \sin\gamma); \\ H_{Y_1} &= \frac{3}{r^3} (I_{Z_1} - I_{X_1}) \cos\psi \sin\vartheta (\sin\gamma \cos\vartheta - \cos\gamma \sin\vartheta \sin\psi); \\ H_{Z_1} &= \frac{3}{r^3} (I_{Y_1} - I_{X_1}) \cos\psi \sin\vartheta \times \\ &\times (\cos\gamma \cos\vartheta + \sin\gamma \sin\vartheta \sin\psi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

После несложных преобразований получим систему скалярных уравнений, описывающих траекторное и угловое движение аппарата в выбранных системах координат:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V \sin\theta; \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{\sin\theta}{r^2} + a\delta \cos\psi \cos(\vartheta - \theta); \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\cos\theta}{V} \left( \frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{a\delta}{V} \cos\psi \sin(\vartheta - \theta); \\ \frac{du}{dt} &= \frac{V \cos\theta}{r} - \frac{a\delta}{V \cos\theta} \sin\psi \sin\vartheta \operatorname{ctg} i; \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{a\delta \sin\psi \sin u}{V \cos\theta \sin i}; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{a\delta \sin\psi \cos u}{V \cos\theta}; \\ \frac{d\omega_{X_1}}{dt} &= \frac{I_{Y_1} - I_{Z_1}}{I_{X_1}} \omega_{Y_1} \omega_{Z_1} + \frac{M_{X_1} - H_{X_1}}{I_{X_1}}; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{d\omega_{Y_1}}{dt} = \frac{I_{Z_1} - I_{X_1}}{I_{Y_1}} \omega_{X_1} \omega_{Z_1} + \frac{M_{Y_1} + H_{Y_1}}{I_{Y_1}};$$

$$\frac{d\omega_{Z_1}}{dt} = \frac{I_{Y_1} - I_{X_1}}{I_{Z_1}} \omega_{X_1} \omega_{Y_1} + \frac{M_{Z_1} + H_{Z_1}}{I_{Z_1}};$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_{X_1} + \operatorname{tg}\psi(\omega_{Y_1} \sin\gamma + \omega_{Z_1} \cos\gamma) + \frac{a\delta \operatorname{tg}\psi \sin\vartheta}{V \cos\theta};$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{Y_1} \cos\gamma - \omega_{Z_1} \sin\gamma - \frac{a\delta \sin\psi \cos\vartheta}{V \cos\theta};$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{V \cos\theta}{r} + \frac{1}{\cos\psi}(\omega_{Y_1} \sin\gamma + \omega_{Z_1} \cos\gamma) - \frac{a\delta \sin^2\psi \sin\vartheta}{V \cos\theta \cos\psi};$$

$$\frac{dh}{dt} = Va\delta \cos\psi \cos(\vartheta - \theta).$$

Последнее уравнение системы (3.8) описывает изменение механической энергии  $h$  поступательного движения центра масс КА. В системе (3.8) в число фазовых координат входят углы, задающие ориентацию вектора тяги в пространстве, а в качестве управлений выступают: величина реактивного ускорения  $a$ , функция переключения  $\delta$  и компоненты управляющего момента  $M_{X_1}$ ,  $M_{Y_1}$ ,  $M_{Z_1}$ , ограниченные значением  $M_{\max}$ .

**3.1.2. Компланарные перелеты.** Рассмотрим случай, когда затраты рабочего тела на ориентацию КА пренебрежимо малы. Уравнения плоского движения аппарата в центральном поле легко получить из системы (3.9), полагая в ней  $\psi \equiv 0$ ,  $\gamma \equiv 0$ . Пусть двигатель работает без выключения ( $\delta = 1$ ), реверс тяги отсутствует. Тогда

$$\frac{dr}{dt} = V \sin\theta;$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a}{V} \sin(\vartheta - \theta) + \frac{\cos\theta}{V} \left( \frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right);$$

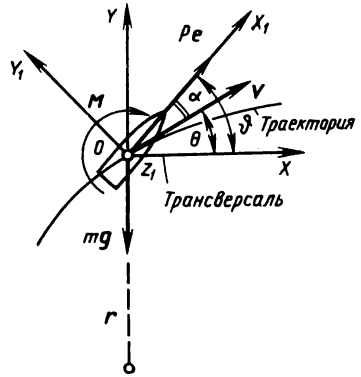
$$\frac{dV}{dt} = a \cos(\vartheta - \theta) - \frac{\sin\theta}{r^2}; \quad (3.9)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{V \cos\theta}{r};$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{V \cos\theta}{r} + \omega_{Z_1};$$

$$\frac{d\omega_{Z_1}}{dt} = \frac{3(I_{Y_1} - I_{X_1})}{2I_{Z_1} r^3} \sin 2\vartheta + \frac{M_{Z_1}}{I_{Z_1}}.$$

Рис. 3.3. Схема управления угловым движением



В этих уравнениях  $\vartheta - \theta = \alpha$  — угол между вектором тяги и скоростью ( $\alpha > 0$ , если вектор тяги вращается вокруг вектора скорости против часовой стрелки). Первый член в правой части последнего уравнения представляет собой угловое ускорение, обусловленное гравитационным моментом  $H_{Z_1}$ . Схема управления угловым движением КА показана на рис. 3.3.

Зададим программу управления вектором тяги в плоскости орбиты зависимостями  $\tilde{a}(t)$ ,  $\tilde{\vartheta}(t)$ . Управляющий момент  $\tilde{M}_{Z_1}$ , соответствующий "идеальной" реализации этой программы, определяется из последних двух уравнений системы (3.9):

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{Z_1} &= I_{Z_1} \frac{d\omega_{Z_1}}{dt} - \frac{3(I_{Y_1} - I_{Z_1})}{2r^3} \sin 2\vartheta = \\ &= I_{Z_1} \left[ \frac{d^2 \tilde{\vartheta}}{dt^2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{V \cos \theta}{r} \right) - \frac{3\sigma \sin 2\tilde{\vartheta}}{2r^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $\sigma = (I_{Y_1} - I_{X_1})/I_{Z_1}$ . С учетом возможных ошибок и возмущений условие реализации программного движения записывается в форме неравенства, устанавливающего нижнюю границу управляющего момента  $M_{\max}$ :

$$M_{\max} > \max_{t \in [t_0, t_k]} |\tilde{M}_{Z_1}(t)|. \quad (3.11)$$

При заданных  $\tilde{a}(t)$ ,  $\tilde{\vartheta}(t)$  зависимости  $r(t)$ ,  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ , входящие в (3.9), определяются либо аналитически, либо путем численного интегрирования, поэтому проверку условия (3.11) удобно вести параллельно с расчетом программной траектории.

**3.1.3. Полет с трансверсальным постоянным ускорением.** В данном случае программное управление таково:

$$\tilde{a}(t) = a \equiv \text{const}; \quad \tilde{\vartheta}(t) \equiv 0. \quad (3.12)$$

Представим условие реализации (3.11) в форме неравенства, задающего нижнюю границу углового ускорения  $\epsilon$

$$\frac{M_{\max}}{I_{Z_1}} = \epsilon_{\max} \geq \max_t \left| \frac{V^2 \sin 2\theta - ra}{r^2} \right| = \max_t |f_1|. \quad (3.13)$$

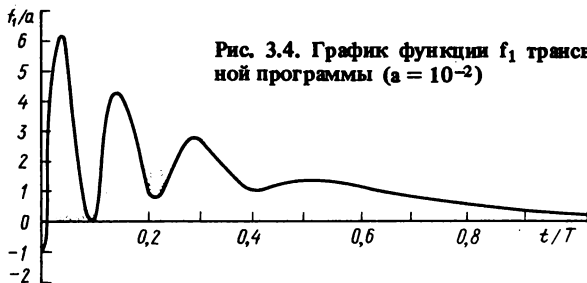


Рис. 3.4. График функции  $f_1$  трансверсальной программы ( $a = 10^{-2}$ )

Расчет функции  $f_1(t)$  для серии траекторий движения аппарата с круговой начальной орбиты показал, что максимальное ее значение достигается на первом витке, а по мере приближения скорости к параболической  $f_1$  стремится к нулю (рис. 3.4).

Получим аналитическую оценку максимума  $f_1$ . Для этого найдем полную производную  $f_1$  по времени и подставим в это выражение производные параметров  $r$ ,  $V$ ,  $\theta$ , вычисленные вдоль траектории с трансверсальным постоянным ускорением. Приравнявая производную  $f_1$  нулю, получим соотношение, связывающее переменные  $r$ ,  $V$ ,  $\theta$  в точках экстремума:

$$\frac{df_1}{dt} = V(3arsin\theta - \frac{2}{r} \cos\theta + 2V^2 \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)) = 0,$$

откуда следует равенство

$$V^2 = \frac{\frac{2}{r} \cos\theta - 3arsin\theta}{2\cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)}. \quad (3.14)$$

Известно, что угол  $\theta$  на первых витках траектории полета с постоянным трансверсальным ( $a$  также с постоянным тангенциальным) ускорением остается близким к нулю, изменяясь по следующему закону [17]:

$$\theta \approx 2a(1 - \cos t). \quad (3.15)$$

С учетом малости  $a$ ,  $\theta$  получим необходимое условие экстремума функции  $f_1$  в виде

$$V^2 = 1/r. \quad (3.16)$$

Подставим (3.16) в выражение для  $f_1$

$$f_1 \approx \frac{2\theta}{r^3} - \frac{a}{r} \approx \frac{4a}{r^3}(1 - \cos t) - \frac{a}{r}.$$

Учитывая, что на первых витках  $r \approx 1$  и  $|\cos t| \leq 1$ , получим оценку

$$\max_t |f_1| < 7a.$$

$t$

Эта оценка подтвердилась численным моделированием (см. рис. 3.4). Согласно (3.13) получим  $\epsilon_{\max} > 7a$ .

**3.1.4. Полет с тангенциальным постоянным ускорением.** В этом случае программное управление таково:

$$\tilde{a}(t) = a = \text{const}; \quad \tilde{\vartheta}(t) \equiv \theta. \quad (3.17)$$

Тогда условие (3.11) принимает вид

$$\frac{M_{\max}}{I_{Z_1}} = \epsilon_{\max} \geq \max_t \left| \frac{a \cos \theta}{V^2 r^2} + \frac{3(1 - \sigma)}{2r^3} \sin 2\theta - \frac{\sin 2\theta}{V^2 r^4} \right| = \max_t |f_2|. \quad (3.18)$$

Функция  $f_2$  зависит от параметра  $\sigma$ . Для осесимметричных КА вытянутой формы один из моментов инерции обычно существенно меньше двух остальных, и поэтому  $|\sigma| \ll 1$ . Проведем оценку для двух предельных случаев:  $\sigma = +1$  (аппарат вытянут вдоль оси  $OX$ ), и  $\sigma = -1$  (аппарат вытянут вдоль оси  $OY$ ). Расчеты позволили установить, что наибольшее значение функции  $f_2$  достигается, как и в предыдущем случае, на первом витке, однако сами значения максимумов для  $\sigma = \pm 1$  различны (рис. 3.5). Получить аналитическую оценку максимума  $f_2$  можно из тех же соображений, что и для трансверсальной программы. Продифференцируем  $f_2$  по времени вдоль траектории с тангенциальным постоянным ускорением и приравняем производную  $\frac{df_2}{dt}$  нулю. Получим биквадратное уравнение относительно  $V$ :

$$\begin{aligned} & 3V^4 r^2 (1 - \sigma)(\cos^2 \theta - 4\sin^2 \theta) + \\ & + V^2 r [-3(1 - \sigma)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \\ & - 3ar^2 \sin \theta + 2(5\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)] + \\ & + a(7r^2 \sin \theta - 2ar^4) + 2(\cos^2 \theta - 6\sin^2 \theta) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

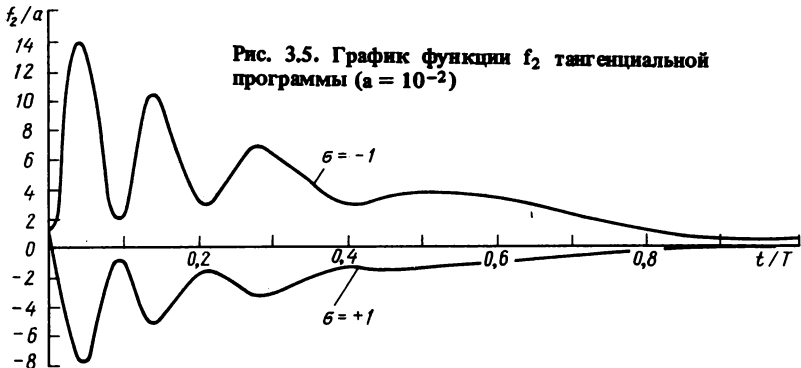


Рис. 3.5. График функции  $f_2$  тангенциальной программы ( $a = 10^{-2}$ )

Для оценки угла  $\theta$  воспользуемся формулой (3.15). С теми же допущениями, что и ранее, получим условие экстремума  $f_2$  в следующем виде:

$$3(1 - \sigma)V^4 r^2 - V^2 r[3(1 - \sigma) + 2] + 2 = 0. \quad (3.20)$$

Решением (3.20), лежащим в рассматриваемом диапазоне значений  $V$  ( $1/r \leq V^2 \leq 2/r$ ) является

$$V^2 = 1/r. \quad (3.21)$$

Подставим это решение в выражение для  $f_2$ . При тех же упрощениях, что и для трансверсальной программы, получим

$$\begin{aligned} f_2 &\approx \frac{a}{r} + \frac{3\theta}{r^3}(1 - \sigma) - \frac{2\theta}{r^3} \approx \\ &\approx a[1 + 2(1 - \cos t)(1 - 3\sigma)]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В силу того, что  $|\cos t| \leq 1$ , получим

$$\max_t |f_2| \leq a[1 + 4(1 - 3\sigma)], \quad (3.23)$$

откуда при  $\sigma = \pm 1$  получим предельные оценки:  $\max_t |f_2^{(+1)}| < 7a$ ;

$\max_t |f_2^{(-1)}| < 17a$ . Эти оценки подтвердились расчетами (см. рис. 3.5).

Из (3.18) получим:

$$\epsilon_{\max}^{(+1)} > 7a; \quad \epsilon_{\max}^{(-1)} > 17a. \quad (3.24)$$

**3.1.5. Реализация "экстремальных" траекторий.** Рассмотрим "экстремальную" траекторию, соответствующую полету с  $\tilde{a}(t) = a = \text{const}$ . С целью получения аналитических оценок аппроксимируем программу управления вектором тяги выражением (рис. 3.6):

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\vartheta}(t) - \theta(t) \approx A \sin \omega_0 t. \quad (3.25)$$

Здесь  $\omega_0$  — угловая скорость орбитального движения КА;  $A$  и  $\omega_0$  являются функциями времени, но меняются от витка к витку сравнительно медленно. Поэтому в пределах витка будем считать параметры  $A$  и  $\omega_0$  постоянными. Тогда условие (3.11) сводится к выполнению на каждом витке неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\max}}{I_{Z_1}} = \epsilon_{\max} &\geq \max_t \left| \frac{d^2 \tilde{\alpha}}{dt^2} + \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} \frac{a \cos \tilde{\alpha}}{V^2} - \right. \\ &- \frac{a^2 \sin 2\tilde{\alpha}}{2V^2} + \frac{2a \sin \tilde{\alpha} \sin \theta}{V^2 r^2} - \frac{\sin 2\theta}{V^2 r^4} + \\ &+ \frac{3 \sin 2\theta}{2r^2} + \frac{a \cos \tilde{\alpha} \cos \theta}{V^2 r^2} - \frac{3\sigma}{2r^3} \sin 2|\tilde{\alpha} + \theta| \Big| = \max |f_3|. \end{aligned} \quad (3.26)$$

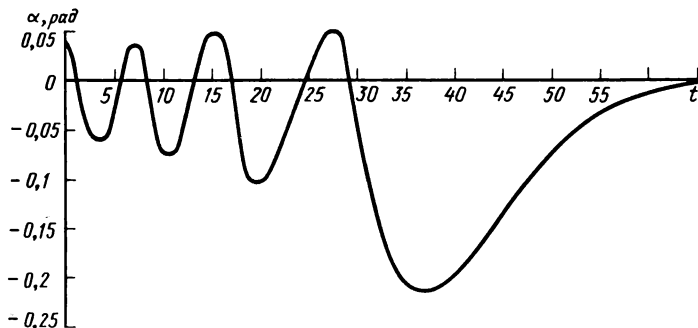


Рис. 3.6. Характер изменения угла  $\alpha$  между векторами тяги и скорости при "экстремальной" программе

Оценка углового ускорения по этой формуле требует значения параметров  $r$ ,  $V$ ,  $\theta$ ,  $\tilde{\alpha}$  в каждой точке траектории, что, вообще говоря, связано со сложной вычислительной процедурой. Однако выражение (3.26) можно упростить.

Будем считать угол наклона траектории  $\theta$  малым (порядка  $a$ ), угол  $\tilde{\alpha}$  малым настолько, что  $\sin \tilde{\alpha} \cong \tilde{\alpha}$ ,  $\cos \tilde{\alpha} \approx 1$ ; пренебрегая членами, содержащими малые множители вида  $a$ ,  $a^2$  в выражении (3.26), преобразуем функцию  $f_3$  к виду

$$f_3 \cong \frac{d^2 \tilde{\alpha}}{dt^2} - \frac{3\sigma \tilde{\alpha}}{r^3} = -A(\omega_0^2 + \frac{3\sigma}{r^3}) \sin \omega_0 t. \quad (3.27)$$

Проведенное упрощение имеет следующий механический смысл: в общем колебательном движении аппарата вокруг оси  $OZ_1$  выделена основная составляющая, связанная с изменением программной ориентации вектора тяги, а колебательный характер изменения траекторных параметров  $r$ ,  $V$ ,  $\theta$  не учитывается, поскольку амплитуда этих колебаний имеет порядок  $a$  ( $a \ll A$ ). Элементарное исследование позволяет получить следующую оценку:

$$\max_t |f_3| = A(1 + 3\sigma). \quad (3.28)$$

Предельные оценки  $\epsilon$  получим, подставляя в выражение (3.28)  $\sigma = \pm 1$ :

$$\epsilon_{\max}^{(+1)} > 4A; \quad \epsilon_{\max}^{(-1)} > 2A. \quad (3.29)$$

Амплитуда  $A$  колебаний угла  $\alpha$  для широкого диапазона ускорений лежит в пределах 0,2 ... 0,5 рад [39], поэтому для реализации "экстремальных" траекторий требуются гораздо большие управляющие моменты, чем в случае тангенциального или трансверсального разгона.

Расчет функции  $f_3$  для "экстремальной" программы показал, что приближенная оценка (3.28) хорошо согласуется с точными результатами.

Пусть, например, КА массой 800 т, имеющий момент инерции  $I_{Z_1}^* = 2 \cdot 10^8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , совершает разгон с околоземной круговой орбиты радиусом 6 670 км. Отношение реактивного ускорения к гравитационному составляет  $10^{-3}$ , средняя амплитуда колебаний угла  $\alpha$  в "экстремальном" режиме составляет 0,2 рад. Тогда в результате несложных вычислений по формуле (3.29), приведенной к разному виду, получим

$$M_{\max}^* = I_{Z_1}^* \epsilon_{\max}^{*(+1)} > 4A \frac{\mu^*}{r_0^{*3}} I_{Z_1}^* ;$$

$$M_{\max}^* > 215 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Оценка потребного момента  $M^*$  для трансверсального разгона дает

$$M_{\max}^* = I_{Z_1}^* \epsilon_{\max}^* > 7a^* I_{Z_1}^* \frac{\mu^*}{r_0^{*3}} ; M_{\max}^* > 0,188 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

а по формулам (3.24) тангенциального разгона –

$$M_{\max}^* = I_{Z_1}^* \epsilon_{\max}^{*(-1)} > 17a^* I_{Z_1}^* \frac{\mu^*}{r_0^{*3}} ; M_{\max}^* > 0,457 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Видно, что в первом случае потребный управляющий момент довольно значителен, поэтому "экстремальные" траектории могут оказаться нереализуемыми из-за трудностей программного разворота вектора тяги. Это может заставить отказаться от "экстремальной" программы и заменить ее несколько худшим по энергетике, но легче реализуемыми программами трансверсального или тангенциального разгона. Такой вывод становится еще более очевидным, если программный разворот потребует дополнительных затрат рабочего тела на создание управляющего момента. Например, при минимизации суммарного расхода рабочего тела, по мере увеличения секундного расхода массы управляющих двигателей уменьшается амплитуда колебаний  $\alpha(t)$  и в пределе – реализуется движение с тангенциальным постоянным ускорением.

## 3.2. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

**3.2.1. Полет с трансверсальным постоянным ускорением.** Рассмотрим случай, когда КА вращается вокруг продольной оси  $OX_1$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_s$ , достаточной для создания искусственной гравитации в кабине экипажа. Двигатель жестко закреплен относительно корпуса, а вектор тяги направлен вдоль оси вращения. Для эффективного разворота КА и вектора тяги управляющий момент должен превышать по величине гироскопический момент, стабилизирующий положение оси вращения в пространстве.

Положим, что начальная орбита круговая, а тяга располагается в плоскости орбиты и в каждый момент направлена на трансверсали (углы  $\vartheta$  и  $\psi$  постоянно равны нулю).

Ограничиваясь анализом движения на одном витке траектории, можно приближенно считать постоянной угловую скорость движения центра масс:

$$\omega_0 = V \cos \theta / r \approx \text{const}.$$

С помощью соотношений (3.3), (3.4) найдем проекции угловой скорости на оси связанной системы координат:

$$\begin{aligned}\omega_{X_1} &= \frac{d\gamma}{dt} = \omega_s; \quad \omega_{Y_1} = -\omega_0 \sin\gamma; \\ \omega_{Z_1} &= -\omega_0 \cos\gamma.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Подставляя компоненты угловой скорости в динамические уравнения Эйлера (3.2), с учетом  $\vartheta \equiv \psi \equiv 0$ , получим

$$\begin{aligned}(I_{Z_1} - I_{Y_1})\omega_0^2 \sin\gamma \cos\gamma &= M_{X_1} + H_{X_1}; \\ -I_{Y_1} \frac{d\gamma}{dt} \omega_0 \cos\gamma - (I_{X_1} - I_{Z_1}) \frac{d\gamma}{dt} \omega_0 \cos\gamma &= M_{Y_1}; \\ I_{Z_1} \frac{d\gamma}{dt} \omega_0 \sin\gamma - (I_{Y_1} - I_{X_1}) \frac{d\gamma}{dt} \omega_0 \sin\gamma &= M_{Z_1}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Компоненты  $H_{Y_1}$  и  $H_{Z_1}$  гравитационного момента равны нулю при трансверсальной ориентации оси вращения. Если  $I_{Y_1} = I_{Z_1}$  (динамически симметричный КА), то и  $H_{X_1} = 0$  [см. уравнения (3.7)].

В результате, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}M_{X_1} &= 0; \quad M_{Y_1} = -\omega_0 \omega_s I_{X_1} \cos\gamma; \\ M_{Z_1} &= \omega_0 \omega_s I_{X_1} \sin\gamma.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Условие реализации программного движения записывается в форме

$$M = \sqrt{M_{Y_1}^2 + M_{Z_1}^2} \geq I_{X_1} \omega_s \omega_0.\quad (3.33)$$

Спроецируем компоненты управляющего момента  $M_{Y_1}, M_{Z_1}$  на оси вспомогательной системы координат  $OX_1 Y_3 Z_3$ , полученной поворотом системы  $OX_1 Y_1 Z_1$  вокруг оси  $OX_1$  на угол  $-\gamma$  (см. рис. 3.1), эти новые проекции обозначим соответственно  $M_{Y_3}, M_{Z_3}$ :

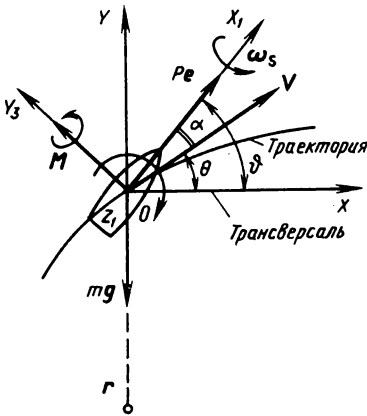
$$\begin{aligned}M_{Y_3} &= M_{Y_1} \cos\gamma - M_{Z_1} \sin\gamma = -I_{X_1} \omega_s \omega_0; \\ M_{Z_3} &= M_{Y_1} \sin\gamma + M_{Z_1} \cos\gamma = 0.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Для случая  $\vartheta \equiv 0, \psi \equiv 0$ , очевидно,  $M_{Y_3} = M_Y; M_{Z_3} = M_Z = 0$ .

Это означает, что управляющий момент направлен вдоль оси  $OY$  (по радиусу) в сторону притягивающего центра и сохраняет постоянную величину; компонента  $M_Z$  постоянно равна нулю. На рис. 3.7 показана схема управления движением вращающегося КА.

**3.2.2. Способы создания управляющего момента с помощью маршевых ЭРД.** Рассмотрим случай, когда управляющий момент создается маршевыми двигателями, расположенными на некоторых расстояниях  $l_j$  от оси вращения  $OX_1$  (так называемая совместная схема управления

Рис. 3.7. Схема управления движением вращающегося КА



траекторным и угловым движением). Двигатели жестко закреплены относительно корпуса и создают ускорения  $a_j$ , параллельные оси  $OX_1$ . Предположим, что ни один из двигателей не тормозит движения, общее число двигателей равно  $k$ ;  $\text{sign} a_j = \text{sign} a$ ;  $|a_j| \leq a$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Проекции управляющего момента на оси связанной системы  $OX_1 Y_1 Z_1$  в этом случае можно представить в виде:

$$M_{Y_1} = m \sum_{j=1}^k l_{Z_j} a_j; \quad (3.35)$$

$$M_{Z_1} = -m \sum_{j=1}^k l_{Y_j} a_j.$$

Проекции  $l_{Y_j}$ ,  $l_{Z_j}$  берутся здесь с соответствующими знаками. Запишем выражения для проекций  $M_{Y_3}$ ,  $M_{Z_3}$  (см. рис. 3.1)

$$\begin{aligned} I_{Y_3} &= m \sum_{j=1}^k a_j (l_{Z_j} \cos \gamma + l_{Y_j} \sin \gamma) = \\ &= m \sum_{j=1}^k a_j \sqrt{l_{Y_j}^2 + l_{Z_j}^2} \cos(\gamma - \varphi_j); \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} M_{Z_3} &= -m \sum_{j=1}^k a_j (l_{Z_j} \sin \gamma - l_{Y_j} \cos \gamma) = \\ &= -m \sum_{j=1}^k a_j \sqrt{l_{Y_j}^2 + l_{Z_j}^2} \sin(\gamma - \varphi_j). \end{aligned}$$

Здесь введен новый параметр  $\varphi_j = \text{const}$ , причем

$$\cos \varphi_j = \frac{l_{Z_j}}{\sqrt{l_{Y_j}^2 + l_{Z_j}^2}}; \quad \sin \varphi_j = \frac{l_{Y_j}}{\sqrt{l_{Y_j}^2 + l_{Z_j}^2}}.$$

Выберем управляющие функции  $a_j(\gamma)$  таким образом, чтобы составляющая  $M_{Y_3}$  была максимальной по абсолютной величине.

Рассматривая первое выражение (3.36), легко установить, что модуль  $M_{Y_3}$  как линейная функция управления  $a_j$  принимает максимальное значение, когда  $a_j$  находится на границе отрезка  $[-a, +a]$ . Поэтому

максимальный момент создается, когда работает только один двигатель, развивающий ускорение  $a$ :

$$a_j = a; a_i = 0; i = 1, 2, \dots, k, i \neq j. \quad (3.37)$$

Этот двигатель работает в рабочей зоне  $[\gamma_1, \gamma_2]$ . После его выхода из рабочей зоны включается следующий,  $(j + 1)$ -й двигатель, вошедший в нее, и т.д. Моменты переключения тяги с одного двигателя на другой определяются путем сравнения величин функций переключения  $\pi_j$ :

$$\pi_j = l_{Z_j} \cos \gamma + l_{Y_j} \sin \gamma. \quad (3.38)$$

Пусть, например,  $M_{Y_3} < 0$ . Тогда

$$a_j = +a; \text{ если } \pi_j(\gamma) = \min \{ \pi_i(\gamma) \}; \quad (3.39)$$

$$a_i = 0; i = 1, 2, \dots, k; i \neq j.$$

Очевидно, экстремальные значения функции  $\pi_j(\gamma)$  достигаются в окрестности тех значений угла  $\gamma$ , где  $\cos(\gamma - \varphi_j) = \pm 1$ . В этой окрестности  $\sin(\gamma - \varphi_j)$  меняет знак, поэтому среднее значение компоненты  $M_{Z_3}$  равняется нулю. Функции  $\pi_j$  в каждый момент известны, если заданы координаты точек приложения тяги  $l_{Y_j}, l_{Z_j}$ .

Пусть  $k = 3$  (три двигателя) и все  $l_j$  равны  $R$  (см. рис. 3.8). В этом случае

$$\begin{aligned} \pi_1 &= R \sin \gamma; \quad \pi_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cos \gamma - \frac{R}{2} \sin \gamma; \\ \pi_3 &= -\frac{R\sqrt{3}}{2} \cos \gamma - \frac{R}{2} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Легко установить, что точки переключения  $\gamma_{\Pi}$  управлений  $a_j$  следующие:

$$\begin{aligned} a_3 \rightarrow a_2 : \gamma_{\Pi} &= \pi/2; \quad a_2 \rightarrow a_1 : \gamma_{\Pi} = 7\pi/6; \\ a_1 \rightarrow a_3 : \gamma_{\Pi} &= 11\pi/6. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Переключение тяги с одного двигателя на другой, таким образом, происходит через каждые  $120^\circ$ . Найдем выражения для средних значений  $M_{Y_3}, M_{Z_3}$  при  $\gamma \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ :

$$\begin{aligned} \hat{M}_{Y_3} &= -\frac{3aRm}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos \gamma d\gamma = -\frac{3\sqrt{3}Rm}{2\pi} a; \\ \hat{M}_{Z_3} &= -\frac{3aRm}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin \gamma d\gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

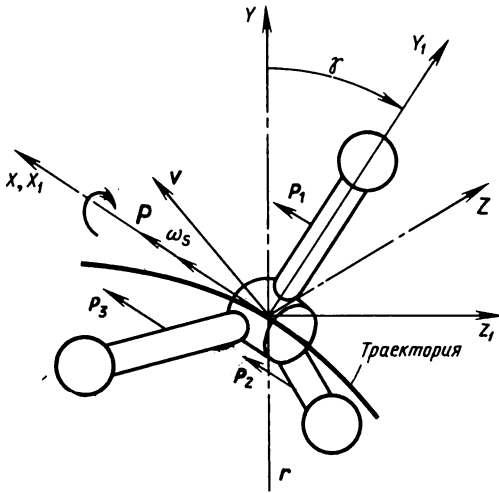


Рис. 3.8. Аппарат с искусственной гравитацией ( $P_{1,2,3}$  — тяги блоков ЭРД)

Если требуется обеспечить постоянную ориентацию оси вращения и вектора реактивного ускорения по трансверсали, из условия (3.34) следует ограничение снизу на уровень реактивного ускорения

$$a \geq 1,212 I_{X_1} \omega_s \omega_0 / (Rm). \quad (3.43)$$

Если из каких-либо соображений задано условие постоянства момента

$M_{Y_3}$ , то при постоянном суммарном ускорении  $a$  ускорения  $a_j$ , создаваемые отдельными блоками, должны быть переменными.

Проекции управляющего момента на оси  $OY_1$ ,  $OZ_1$  связанной системы координат для гипотетического КА, изображенного на рис. 3.8, определяются соотношениями

$$M_{Y_1} = (a_3 - a_1) 0,5\sqrt{3} Rm; \quad (3.44)$$

$$M_{Z_1} = -a_1 Rm + (a_3 + a_2) 0,5 Rm.$$

Присоединяя к этим выражениям дополнительное условие  $a_1 + a_2 + a_3 = a$  и заменяя компоненты  $M_{Y_1}$ ,  $M_{Z_1}$  соответствующими выражениями из (3.32), получим систему трех уравнений относительно  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ :

$$0,5\sqrt{3} Rm (a_3 - a_1) = -I_{X_1} \omega_s \omega_0 \cos \gamma;$$

$$0,5 Rm (-2a_1 + a_3 + a_2) = I_{X_1} \omega_s \omega_0 \sin \gamma; \quad (3.45)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$a_1 = \frac{1}{3} \left[ a - \frac{2}{Rm} I_{X_1} \omega_s \omega_0 \sin \gamma \right];$$

$$a_2 = \frac{1}{3} \left[ a + \frac{I_{X_1} \omega_s \omega_0}{Rm} (\sin \gamma - \sqrt{3} \cos \gamma) \right]; \quad (3.46)$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \left[ a + \frac{I_{X_1} \omega_s \omega_0}{Rm} (\sin \gamma + \sqrt{3} \cos \gamma) \right].$$

Поскольку ни одна из составляющих  $a_1, a_2, a_3$  не должна быть отрицательной, выполнение условия реализации трансверсальной программы движения приводит к следующему ограничению на величину суммарного ускорения от тяги:

$$a \geq 2I_{X_1} \omega_s \omega_0 / (Rm). \quad (3.47)$$

Видно, что это ограничение является более жестким, чем (3.43), когда в каждый момент времени полностью используется тяга одного из блоков ЭРД.

Пусть пилотируемый КА с искусственной гравитацией обладает моментом инерции  $I_{X_1}^* = 10^8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  и вращается с угловой скоростью  $\omega_s = 0,42 \text{ 1/с}$ . Движение начинается с начальной круговой орбиты радиусом 6670 км.

Тогда оценка управляющего момента, потребного для реализации движения, согласно формуле (3.33) имеет вид  $M^* > I_{X_1}^* \omega_s^* \omega_0^* \mu^* / r_0^{*3}$ ;  $M^* > 4,8355 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Видно, что при больших значениях кинетического момента  $I_{X_1}^* \omega_s^*$  потребный управляющий момент очень велик. Если условие (3.33) не выполняется, реализовать трансверсальную ориентацию оси вращения и направления тяги не удастся. Тяга постоянно будет отставать от трансверсали, а эффективность разгона – снижаться.

По мере увеличения радиуса орбиты потребный управляющий момент уменьшается.

## КОММЕНТАРИИ

1. Особое место среди различных программных траекторий движения аппаратов с малой тягой в сильных гравитационных полях занимают траектории и программы управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности [21, 39]. Они характеризуются колебаниями вектора реактивного ускорения относительно вектора скорости с периодом, примерно равным периоду обращения по орбите (см. рис. 3.6). Вектор тяги совпадает с вектором скорости в точке достижения параболической скорости. Амплитуды колебаний ускорения и угла между векторами тяги и скорости увеличиваются к последнему витку в 2–3 раза по сравнению с начальными, однако использование вместо экстремальных программ управления более простых (с постоянными по модулю тангенциально или трансверсально направленными ускорениями и пр.) приводит к незначительному увеличению времени разгона при равном уровне реактивного ускорения. При  $a < 10^{-2}$  проигрыш во времени составляет менее 0,5 ... 2,5 % (первая цифра относится к тангенциальному, вторая – к трансверсальному разгону).

2. Одной из первых работ, в которых задачи управления траекторным и угловым движениями космического аппарата рассматривались совместно, явилась работа Б.М. Панкратова [50], где исследовались условия реализации программных разворотов аппарата при прохождении радиационных поясов Земли.

3. В работе [20] получены условия реализации заданных программных траекторий перелетов с малой тягой с учетом инерционных свойств аппарата (см. разд. 3.2); исследование вопросов управления вращающимся космическим аппаратом с искусственной гравитацией проведено в работах [6, 20, 22, 57].

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ И ТРАЕКТОРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПРИ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ И МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЕТАХ

Анализ проблемы реализации заданных траекторий позволил установить, что в задачах механики космического полета с малой тягой возможна ситуация, когда располагаемый управляющий момент не способен обеспечить движение по оптимальным программным траекториям, полученным без учета углового движения аппарата.

Как уже отмечалось в гл. 2, для идеально регулируемых двигателей малой тяги из общей задачи о максимуме полезной массы выделяется так называемая динамическая задача — о минимуме интеграла  $J$  от квадрата реактивного ускорения. В качестве естественного граничного условия часто вводится условие достижения в конце маневра заданного значения механической энергии поступательного движения центра масс  $h$ . В силу взаимности задачи о минимуме  $J$  при заданном значении  $h_K$  и о максимуме  $h$  при фиксированном  $J_K$  эквивалентны.

Условием разделения общей задачи оптимизации перелета с идеально регулируемым двигателем малой тяги на динамическую и параметрическую является отсутствие компоненты  $m_d$  в правых частях уравнений движения. Однако, как было отмечено раньше, тензор инерции  $I_0$  зависит от массы КА, а следовательно, и от ее составляющей  $m_d$ . Поэтому, строго говоря, в рамках постановки (2.14), учитывающей взаимосвязь траекторного и углового движений, указанные задачи не разделяются. Исключения составляют случаи, когда моменты инерции КА постоянны и не зависят от его массы, а также когда любая траектория  $\mathbf{r}(t)$  и программа  $\alpha(t)$  "бесплатно" реализуются системой регулирования углового положения аппарата.

В дальнейшем не будем учитывать изменение тензора инерции, поскольку его влияние на траекторию проявляется косвенно, через изменение угловой скорости или углового ускорения космического аппарата и достаточно слабо.

Решение задачи оптимизации связано с большими трудностями, обусловленными высоким порядком системы (3.8) и сложной взаимозависимостью поступательного и вращательного движений КА. Поэтому целесообразно применить метод последовательной редукции математической модели движения, чтобы получить в итоге более простую модель, сохраняющую все основные свойства исходной и более удобную для исследования.

#### 4.1. РЕДУКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ АППАРАТА

Рассмотрим движение аппарата с идеально регулируемым двигателем малой тяги с круговой начальной орбиты. Аппарат вращается относительно связанной оси  $OX_1$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_s$ . Выделим такой отрезок времени  $[t_i, t_{i+1}] \in [t_0, t_K]$ , на котором в силу малости реактивного ускорения ( $a \ll 1$ ) медленно меняющиеся параметры движения центра масс не успевают заметно измениться, что позволяет считать их постоянными. Иными словами, при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  допустимо считать, что параметры траекторного движения аппарата не влияют на его движение относительно центра масс. Как правило, траектории перелетов с малой тягой в "сильных" гравитационных полях многовитковые, поэтому отрезок  $[t_i, t_{i+1}]$  удобно считать временем одного оборота (витка).

Будем считать, что центр масс КА не смещается относительно корпуса, его оси остаются главными центральными осями инерции, моменты инерции относительно соответствующих осей — постоянны. Кроме того, ограничимся рассмотрением случая динамически симметричного аппарата ( $I_{Y_1} = I_{Z_1}$ ). Тогда система уравнений движения аппарата относительно центра масс принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{Y_1} &= \sigma \omega_s \omega_{Z_1} + (M_{Y_1} + H_{Y_1})/I_{Y_1}; \\ \dot{\omega}_{Z_1} &= -\sigma \omega_s \omega_{Y_1} + (M_{Z_1} + H_{Z_1})/I_{Y_1}; \\ \dot{\psi} &= \omega_{Y_1} \cos \gamma - \omega_{Z_1} \sin \gamma; \\ \dot{\vartheta} &= \omega_0 + (\omega_{Y_1} \sin \gamma + \omega_{Z_1} \cos \gamma)/\cos \psi; \\ \dot{\gamma} &= \omega_s = \omega_{X_1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $\omega_0$  — угловая скорость движения центра масс КА по орбите;  $\sigma = (I_{Y_1} - I_{X_1})/I_{Y_1}$  — постоянный параметр.

Для записи системы (4.1) в уравнениях углового движения (3.38) отброшены члены, содержащие малое реактивное ускорение  $a$ . По условию задачи предполагается, что угловая скорость собственного вращения аппарата  $\omega_s$  значительно больше как угловой скорости орбитального движения центра масс, так и угловых скоростей  $\vartheta$  и  $\psi$ :  $\gamma = \omega_s \gg \omega_0 = V \cos \theta / r$ ;  $\gamma \gg \max(\vartheta, \psi)$ . Для простоты анализа принято, что угол  $\psi$ , характеризующий отклонение тяги из плоскости орбиты, ограничен по величине так, что при достаточно большой угловой скорости собственного вращения компонента угловой скорости  $\omega_{X_1}$  мало отличается от производной ( $\omega_{X_1} \approx \dot{\gamma} = \omega_s$ ).

Спроецируем векторы угловой скорости  $\dot{\omega}$  и моментов  $M, H$  на оси системы координат  $OX_1 Y_1 Z_1$ , полученной поворотом системы  $OX_1 Y_3 Z_3$ ,

вокруг оси  $OX_1$  на угол  $-\gamma$ . Эти проекции обозначим соответственно:  $\omega_{Y_3}$ ,  $\omega_{Z_3}$ ;  $M_{Y_3}$ ,  $M_{Z_3}$ ;  $H_{Y_3}$ ,  $H_{Z_3}$  (см. рис. 3.1). С использованием новых обозначений система (4.1) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Y_3} &= -(1 - \sigma)\omega_s\omega_{Z_3} + (M_{Y_3} + H_{Y_3})/I_{Y_1}; \\ \dot{\omega}_{Z_3} &= (1 - \sigma)\omega_s\omega_{Y_3} + (M_{Z_3} + H_{Z_3})/I_{Y_1}; \\ \dot{\psi} &= \omega_{Y_3}; \\ \dot{\vartheta} &= \omega_0 + \omega_{Z_3}/\cos\psi.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Проекции гравитационного момента на оси  $OY_3$ ,  $OZ_3$  для динамически симметричного КА таковы:

$$\begin{aligned}H_{Y_3} &= -\frac{3(I_{Y_1} - I_{X_1})}{2r^3} \sin 2\psi \sin^2 \vartheta; \\ H_{Z_3} &= \frac{3(I_{Y_1} - I_{X_1})}{2r^3} \cos\psi \sin 2\vartheta.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Однако непосредственный анализ системы (4.2) все еще затруднителен, так как в ней присутствуют как медленно ( $\vartheta$ ,  $\psi$ ), так и быстро ( $\omega_{Y_3}$ ,  $\omega_{Z_3}$ ) меняющиеся переменные. Воспользуемся общей схемой разделения переменных, применяемой в асимптотических методах нелинейной механики [7, 45]. Обратимся к первым двум уравнениям системы (4.2). Обозначим:

$$\omega_{Y_3} = \hat{\omega}_{Y_3} + \rho \cos \nu; \quad \omega_{Z_3} = \hat{\omega}_{Z_3} + \rho \sin \nu, \quad (4.4)$$

где  $\hat{\omega}_{Y_3}$ ,  $\hat{\omega}_{Z_3}$  — средние значения угловых скоростей;  $\rho$  — амплитуда колебаний;  $\nu$  — фаза.

Если управляющий и гравитационный моменты отсутствуют, легко показать, что  $\hat{\omega}_{Y_3}$ ,  $\hat{\omega}_{Z_3}$ ,  $\rho$  являются константами, а фаза изменяется по закону  $\nu = \nu_0 + (1 - \sigma)\omega_s t$ . В этом случае имеем так называемые "порождающие" (опорные) решения:

$$\begin{aligned}\omega_{Y_3}^{\text{II}} &= \hat{\omega}_{Y_3} + \rho \cos[\nu_0 + (1 - \sigma)\omega_s t]; \\ \omega_{Z_3}^{\text{II}} &= \hat{\omega}_{Z_3} + \rho \sin[\nu_0 + (1 - \sigma)\omega_s t].\end{aligned}\quad (4.5)$$

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных примем, что вид колебаний (4.5) не изменяется и при действии управляющего и гравитационного моментов. Тогда можно записать соотношения

$$\begin{aligned}\omega_{Y_3}^{\text{II}} &= \omega_{Y_3}; \quad \omega_{Z_3}^{\text{II}} = \omega_{Z_3}; \\ \dot{\omega}_{Y_3}^{\text{II}} &= \dot{\omega}_{Y_3}; \quad \dot{\omega}_{Z_3}^{\text{II}} = \dot{\omega}_{Z_3},\end{aligned}$$

$$\text{или } (1 - \sigma)\omega_s \rho \sin \nu = \dot{\hat{\omega}}_{Y_3} + \dot{\rho} \cos \nu - \rho \sin \nu \dot{\nu}; \quad (4.6)$$

$$(1 - \sigma)\omega_s \rho \cos \nu = \dot{\hat{\omega}}_{Z_3} + \dot{\rho} \sin \nu + \rho \cos \nu \dot{\nu}. \quad (4.7)$$

Дифференцируя (4.4) и приравнявая полученные выражения правым частям уравнений (4.2), получим

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_{Y_3} + \rho \cos \nu - \rho \sin \nu \dot{\nu} + (1 - \sigma)\omega_s(\dot{\hat{\omega}}_{Z_3} + \rho \sin \nu) = \\ = (M_{Y_3} + H_{Y_3})/I_{Y_1}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_{Z_3} + \dot{\rho} \sin \nu + \rho \cos \nu \dot{\nu} - (1 - \sigma)\omega_s(\dot{\hat{\omega}}_{Y_3} + \rho \cos \nu) = \\ = (M_{Z_3} + H_{Z_3})/I_{Y_1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Группируя попарно уравнения (4.6) и (4.8), (4.7) и (4.9), легко получить

$$\hat{\omega}_{Z_3} = \frac{M_{Y_3} + H_{Y_3}}{I_{Y_1} \omega_s (1 - \sigma)} = \frac{M_{Y_3} + H_{Y_3}}{I_{X_1} \omega_s}; \quad (4.10)$$

$$\hat{\omega}_{Y_3} = - \frac{M_{Z_3} + H_{Z_3}}{I_{Y_1} \omega_s (1 - \sigma)} = - \frac{M_{Z_3} + H_{Z_3}}{I_{X_1} \omega_s}.$$

Таким образом, средние значения угловых скоростей определяются величинами приложенных в данный момент внешних моментов.

Из уравнений (4.6) ... (4.9) с учетом (4.10) следует соотношения

$$\dot{\rho} = \frac{1}{I_{X_1} \omega_s} [(\dot{M}_{Z_3} + \dot{H}_{Z_3}) \cos \nu - (\dot{M}_{Y_3} + \dot{H}_{Y_3}) \sin \nu]; \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu} = (1 - \sigma)\omega_s - \frac{1}{I_{X_1} \omega_s} [(\dot{M}_{Y_3} + \dot{H}_{Y_3}) \cos \nu + \\ + (\dot{M}_{Z_3} + \dot{H}_{Z_3}) \sin \nu]. \end{aligned}$$

Переменные  $\rho$  и  $\nu$  в уравнениях (4.11) разделены. Если компоненты  $M_{Y_3}$ ,  $M_{Z_3}$ ,  $H_{Y_3}$ ,  $H_{Z_3}$  постоянны, легко видеть, что движение описывается уравнениями

$$\dot{\rho} = 0;$$

$$\dot{\nu} = (1 - \sigma)\omega_s = \omega_s I_{X_1} / I_{Y_1} = w.$$

соответствующими случаю регулярной прецессии ( $\rho = \text{const}$ ). Как видно из (4.3), компоненты  $H_{Y_3}$ ,  $H_{Z_3}$  содержат только медленно меняющиеся переменные  $\psi$ ,  $\vartheta$ .

Предположим, что  $M_{Y_3}$ ,  $M_{Z_3}$ ,  $H_{Y_3}$ ,  $H_{Z_3}$  являются функциями вре-

мени, но меняются достаточно медленно, так что на периоде изменения фазы ( $T = 2\pi/\omega \ll 2\pi/\omega_0$ ) производные можно считать близкими к нулю. Иными словами, будем рассматривать только те случаи, когда скорость изменения моментов не превышает некоторого, наперед заданного, малого значения. Тогда можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &\approx 0 \quad (\rho \approx \text{const}); \\ \dot{\nu} &= w \approx (1 - \sigma)\omega_s = \omega_s I_{X_1} / I_{Y_1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В этом случае с некоторой степенью приближения движение КА вокруг центра масс также можно считать регулярной прецессией. Введем малый параметр  $\epsilon = \omega_0/w$  и новую быстроменяющуюся переменную  $\tau = \nu_0 + w t$ . Как следует из (4.12),  $w$  — одного порядка с  $\omega_s$ , т.е. значительно превышает угловую скорость орбитального движения  $\omega_0$ , если  $I_{X_1}$ ,  $I_{Y_1}$  — величины одного порядка. Уравнения, описывающие изменение угловых координат  $\psi$  и  $\vartheta$ , можно представить теперь в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\tau} &= \epsilon \left( - \frac{M Z_3 + H Z_3}{I_{X_1} \omega_s \omega_0} + \frac{\rho}{\omega_0} \cos\tau \right); \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \epsilon \left[ 1 + \frac{1}{\cos\psi} \left( \frac{M Y_3 + H Y_3}{I_{X_1} \omega_s \omega_0} + \frac{\rho}{\omega_0} \sin\tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Применяя стандартную процедуру усреднения, получим асимптотические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\psi}}{d\tau} &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( - \frac{M Z_3 + H Z_3}{I_{X_1} \omega_s \omega_0} + \frac{\rho}{\omega_0} \cos\tau \right) d\tau = \\ &= -\epsilon \frac{(\hat{M} Z_3 + \hat{H} Z_3)}{I_{X_1} \omega_s \omega_0}; \\ \frac{d\hat{\vartheta}}{d\tau} &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{1}{\cos\psi} \left( \frac{M Y_3 + H Y_3}{I_{X_1} \omega_s \omega_0} + \frac{\rho}{\omega_0} \sin\tau \right) \right] d\tau = \\ &= \epsilon \left( 1 + \frac{\hat{M} Y_3 + \hat{H} Y_3}{I_{X_1} \omega_s \omega_0 \cos\hat{\psi}} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Возвращаясь к переменной  $t$ , запишем усредненные уравнения углового движения КА в окончательной форме:

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = - \frac{\hat{M} Z_3 + \hat{H} Z_3}{I_{X_1} \omega_s}; \quad \frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = \omega_0 + \frac{\hat{M} Y_3 + \hat{H} Y_3}{I_{X_1} \omega_s \cos\hat{\psi}}. \quad (4.15)$$

Здесь  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\vartheta}$  – усредненные значения угловых координат, а  $\hat{M}_{X_3}$ ,  $\hat{M}_{Z_3}$ ,  $\hat{H}_{Y_3}$ ,  $\hat{H}_{Z_3}$  – усредненные на отрезке  $[0, 2\pi]$  значения компонентов управляющего и гравитационного моментов.

Известно [3], что при больших угловых скоростях гравитационный момент оказывает незначительное влияние на положение оси  $OX_1$ . Поэтому при анализе задач оптимизации можно не учитывать гравитационные моменты в правых частях уравнений движения, полагая  $\hat{H}_{Y_3} \approx 0$ ,  $\hat{H}_{Z_3} \approx 0$ :

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = - \frac{\hat{M}_{Z_3}}{I_{X_1} \omega_s}; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 + \frac{\hat{M}_{Y_3}}{I_{X_1} \omega_s \cos \hat{\psi}}. \quad (4.16)$$

Поскольку ось вращения КА  $OX_1$  прецессирует под действием управляющего момента, назовем такое движение управляемой прецессией (ее угловая скорость  $\Omega$ ). Обозначая через  $\mathbf{k}$  единичный вектор угловой скорости управляемой прецессии, получим

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega \mathbf{k}, \quad \Omega = (\omega_{Y_3}, \omega_{Z_3})^T; \\ \omega_{Y_3} &= - \frac{\hat{M}_{Z_3}}{I_{X_1} \omega_s}; \quad \omega_{Z_3} = \frac{\hat{M}_{Y_3}}{I_{X_1} \omega_s}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Величина управляющего момента обычно ограничена, поэтому угловая скорость управляемой прецессии тоже оказывается ограниченной

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\hat{M}_{Y_3}^2 + \hat{M}_{Z_3}^2} \leq M_{\max}; \\ \Omega &= \sqrt{\omega_{Y_3}^2 + \omega_{Z_3}^2} \leq \Omega_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_{X_1} \omega_s}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В рассматриваемой задаче  $\Omega$  равна угловой скорости поворота вектора тяги, направленного по оси вращения  $OX_1$ .

Полученный результат позволяет рассматривать вращающийся КА как управляемую материальную точку с ограниченной угловой скоростью поворота вектора тяги и записать векторные уравнения движения в виде

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}; \quad \dot{\mathbf{V}} = a\delta\mathbf{e} + \mathbf{g} + \mathbf{f}; \quad \dot{\mathbf{e}} = \Omega \mathbf{k} \times \mathbf{e}. \quad (4.19)$$

Здесь управлениями являются переменные  $\delta = \{-1, 0, +1\}$ ;  $a$ ;  $\Omega (\Omega \leq \Omega_{\max})$  и  $\mathbf{k}$ , причем  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}) = 0$ .

Векторные уравнения (4.19) пригодны для описания движения любого КА. Достаточно предположить, что КА постоянно сбалансирован по моментам, тогда угловую скорость  $\Omega$  можно считать независимым управлением.

Рассмотрим частный случай, когда  $\hat{M}_{Z_3} \equiv 0$  и  $\psi$  в начальный момент

времени равнялся нулю. Очевидно, в соответствии с (4.16), (4.17),  $\omega_{Y_3} \equiv 0$ ;  $\dot{\psi} \equiv 0$  и ось вращения КА, а вместе с ней и вектор тяги совершает движение в одной плоскости. Фактически в силу (4.2), (4.4) угол  $\psi$  будет колебаться относительно нулевого положения с небольшой амплитудой и высокой частотой. Такое движение можно назвать квази-плоским. В этом случае векторы  $(\mathbf{r} \times \mathbf{V})$  и  $\mathbf{e}$  будут ортогональны, так что  $(\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e} \equiv 0$ .

Еще одна частная модель движения соответствует неизменной ориентации оси вращения КА в пространстве,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 = \text{const}$ . Такой случай имеет место при  $\dot{M}_{Y_3} \equiv 0$ ,  $\dot{M}_{Z_3} \equiv 0$ . Очевидно, теперь управление движением осуществляется только путем изменения величины реактивного ускорения и реверса тяги.

## 4.2. ЗАДАЧА ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Попытаемся установить основные свойства оптимального управления  $\Omega$ , рассматривая движение КА на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ , малом по сравнению с общей продолжительностью перелета. Такую задачу будем называть задачей локальной оптимизации.

4.2.1. **Отыскание минимали.** Обратимся к уравнениям углового движения (4.16), переписав их с учетом (4.17)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_{Y_3}}{\cos\psi}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_{Z_3}. \quad (4.20)$$

Добавим к ним уравнение

$$\frac{dJ}{dt} = a^2. \quad (4.21)$$

Будем искать режим управления, обеспечивающий максимум приращения энергии  $\Delta h$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ :

$$\Delta h = \int_{t_i}^{t_{i+1}} V \cos\psi \cos(\vartheta - \theta) dt, \quad (4.22)$$

или, иными словами, минимум функционала

$$I = -\Delta h. \quad (4.23)$$

Вектор состояния  $\mathbf{x}$  в этой задаче локальной оптимизации состоит из компонентов  $(\vartheta, \psi, J)$ , вектор управлений  $\mathbf{u}$  — из компонентов  $(a, \omega_{Y_3}, \omega_{Z_3})$ , ограничения на координаты отсутствуют, для управлений вводится только ограничение на угловую скорость поворота вектора тяги  $\Omega \leq \Omega_{\max}$ ;  $V, \theta, \omega_0$  в данном случае являются постоянными параметрами (для околокруговых орбит угол наклона траектории  $\theta$  близок

к нулю); граничные условия задачи таковы:  $\vartheta(t_i) = \bar{\vartheta}_i$ ;  $\bar{\psi}(t_i) = \bar{\psi}_i$ ;  $\Delta J = J(t_{i+1}) - J(t_i)$ ; значения углов  $\vartheta, \psi$  в момент  $t_{i+1}$  свободны.

Воспользуемся методами, описанными в гл. 2. Перейдем к производной задаче, исключив уравнения (4.1). Для этого достаточно положить  $\varphi_\vartheta = \varphi_\psi$ . Построим функцию

$$R = \varphi_J a^2 + V a \cos \psi \cos(\vartheta - \theta) + \varphi_t. \quad (4.24)$$

Функция  $G$  не рассматривается, так как значения  $J(t_i), J(t_{i+1})$  заданы. Положим  $\varphi_J = -\lambda$ , где  $\lambda$  — положительная константа. Тогда

$$R = -\lambda a^2 + V a \cos \psi \cos(\vartheta - \theta) + \varphi_t. \quad (4.25)$$

Максимум функции  $R$  по  $a$  достигается при

$$a = V \cos \psi \cos(\vartheta - \theta) / (2\lambda), \quad (4.26)$$

откуда следует

$$R_1 = \max R = \frac{V^2 \cos^2 \psi \cos^2(\vartheta - \theta)}{4\lambda} + \varphi_t.$$

Максимум функции  $R_1$  по  $\vartheta$  и  $\psi$  обеспечивается при

$$\cos^2 \psi = 1; \cos^2(\vartheta - \theta) = 1. \quad (4.27)$$

Отсюда видно, в частности, что

$$\bar{\vartheta} \equiv \theta; \bar{\psi} \equiv 0; \bar{a} = V_i / 2\lambda = \text{const} \quad (4.28)$$

— суть соотношения, задающие минималь производной задачи, если константа  $\lambda$  выбрана так, что выполняются граничные условия на  $J$ , а именно:

$$\lambda = V^2(t_{i+1} - t_i) / (4\Delta J). \quad (4.29)$$

Проверим возможность реализации минимали в исходном классе  $D$ . Для этого требуется, чтобы: 1) начальная точка  $(\vartheta_i, \psi_i)$  принадлежала минимали ( $\vartheta = \theta, \psi = 0$ ) и 2) удовлетворялись тождественно уравнения углового движения (4.1). Последнее обеспечивается при

$$\omega_{Z_3} \equiv 0; \omega_{Y_3} \equiv -\omega_0. \quad (4.30)$$

Это возможно, однако, лишь при условии

$$\Omega_{\max} \geq \omega_0 \text{ или } M_{\max} \geq I_{X_1} \omega_s \omega_0. \quad (4.31)$$

Угловые координаты в начальный момент времени  $\vartheta(t_i)$  и  $\psi(t_i)$  могут принимать произвольные значения  $(\bar{\vartheta}_i, \bar{\psi}_i)$ . Все это накладывает определенные ограничения на реализацию минимали в классе допустимых  $D$ . Однако в любом случае полученное решение задает нижнюю границу функционала, которую можно использовать для оценки степени оптимальности любых допустимых режимов управления. Эта оценка в данном случае выражается следующим образом:

$$I - \min_D I \leq \Delta = V^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{1}{4\lambda} - \tilde{a}(t) \cos(\tilde{\vartheta}(t) - \theta) \cos \tilde{\psi}(t) \right] dt. \quad (4.32)$$

Здесь  $\tilde{\alpha}(t)$ ,  $\tilde{\vartheta}(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$  – оцениваемый режим.

Решение (4.32) подсказывает и подходящую реализацию из  $D$  в случае, когда  $\Omega_{\max} > \omega_0$ : скорейший выход на минималь (4.28) обеспечивается при максимальной скорости возрастания произведения  $|\cos(\vartheta - \theta)\cos\psi|$ . В частности, возможны следующие режимы управления:

а) если  $|\cos\vartheta_0| < |\cos\psi|$ , то  $\omega_{Z_3} = 0$ ;  $\omega_{Y_3} = \Omega_{\max} \text{sign}\vartheta_0$  до тех пор, пока  $\vartheta$  не станет равным  $\theta$ ; после этого  $\omega_{Y_3} = -\omega_0$ ,  $\omega_{Z_3} = \sqrt{\Omega_{\max}^2 - \omega_0^2} \text{sign}\psi_0$  до тех пор, пока  $\psi$  не станет равным нулю, далее – движение по минимали;

б) если  $|\cos\vartheta_0| > |\cos\psi|$ , то  $\omega_{Y_3} = -\omega_0$ , т.е.  $\vartheta = \vartheta_0$ , а  $\omega_{Z_3} = \sqrt{\Omega_{\max}^2 - \omega_0^2} \text{sign}\psi_0$  до тех пор, пока  $\psi$  не станет равным нулю. Далее  $\omega_{Z_3} \equiv 0$ ,  $\omega_{Y_3} = \Omega_{\max} \text{sign}\vartheta_0$  до тех пор, пока  $\vartheta$  не станет равным нулю, после этого – движение по минимали.

**4.2.2. Приближенное решение для случая  $\Omega_{\max} < \omega_0$ .** Рассмотрим случай, когда управляющий момент отсутствует, реактивное ускорение направлено вдоль оси вращения, но допускает регулирование по величине и реверс. Полагая  $\varphi_\vartheta = \varphi_\psi \equiv 0$ ;  $\varphi_J = -\lambda$ ;  $\lambda > 0$ , получим в итоге формулу (4.25), где

$$\bar{\psi} = \psi_0 = \text{const}; \quad \bar{\vartheta} = \vartheta_0 + \omega_0 t. \quad (4.33)$$

Если  $\psi_0$  не задано, то  $\bar{\psi} = \psi_0 \equiv 0$ . Отсюда

$$\bar{a} = \cos(\vartheta - \theta) V / 2\lambda, \quad (4.34)$$

где  $\lambda$  – константа, удовлетворяющая граничному условию по  $J$ .

Найдем оптимальное управление для случая, когда вектор тяги лежит постоянно в плоскости орбиты ( $\psi \equiv 0$ ). По-прежнему будем исследовать задачу о минимуме функционала (4.23) при дифференциальных связях

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 + \Omega; \quad \frac{dJ}{dt} = a^2 \quad (4.35)$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned} t \in [t_i, t_{i+1}]; \quad \vartheta(t_i) = \vartheta_i; \\ \vartheta(t_{i+1}) - \text{свободно}; \quad J(t_{i+1}) - J(t_i) = \Delta J. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Угловая скорость  $\Omega$  ограничена:  $|\Omega| \leq \Omega_{\max}$ , причем  $\Omega_{\max} < \omega_0$ . Расширяя множество допустимых путем отказа от связей, получим выражение для функции  $R$ :

$$R = -\lambda a^2 + V a \cos(\vartheta - \theta) + \varphi_t, \quad (4.37)$$

откуда следует условие максимума  $R$  по управлению  $a$ :

$$a = V \cos(\vartheta - \theta) / 2\lambda. \quad (4.38)$$

Далее получим

$$R_1 = \max_a R = V^2 \cos^2(\vartheta - \theta) / 4\lambda + \varphi_t. \quad (4.39)$$

Максимум  $R_1$  достигается на верхней границе квадрата косинуса угла  $(\vartheta - \theta)$ :

$$R_2 = \max_{\vartheta} R = C_B V^2 / 4\lambda, \quad (4.40)$$

где  $C = \cos^2(\vartheta - \theta)$ .

Найдем управление, обеспечивающее движение по верхней границе  $C_B$ . Продифференцируем  $C$  по времени

$$\frac{dC}{dt} = -2\cos(\vartheta - \theta)\sin(\vartheta - \theta) \frac{d\vartheta}{dt} = -\sin 2(\vartheta - \theta)(\omega_0 + \Omega).$$

Согласно описанному в разд. 2.2 методу построения верхних и нижних границ области достижимости для фазовых координат верхняя граница  $C_B(t)$  на интервале знакопостоянства производной  $\frac{dC}{dt}$  строится в соответствии с уравнением

$$\frac{dC_B}{dt} = \max_{\Omega \in [-\Omega_{\max}, \Omega_{\max}]} [-\sin 2(\vartheta - \theta)(\omega_0 + \Omega)], \quad (4.41)$$

откуда следует решение

$$\Omega = \Omega_{\max}, \text{ если } \sin 2(\vartheta - \theta) < 0;$$

$$\Omega = -\Omega_{\max}, \text{ если } \sin 2(\vartheta - \theta) > 0.$$

Окончательно режим управления угловой скоростью поворота вектора тяги в этой задаче можно записать в форме

$$\Omega = -\Omega_{\max} \operatorname{sign}[\sin 2(\vartheta - \theta)]. \quad (4.42)$$

Найденный режим достаточно физичен. Согласно (4.42) смена знака  $\Omega$  происходит, когда угол между тягой и скоростью становится равным нулю. Таким образом, управляющий момент стремится удерживать тягу в окрестности касательной к траектории, обеспечивая наибольший темп увеличения энергии. При  $\vartheta = \theta + \pi/2$  угловая скорость также меняет знак, способствуя быстрейшему перевороту аппарата и приходу вектора тяги в окрестность касательной к траектории.

Таким образом, если граничные условия задачи выбраны так, что  $\pi/2 \leq \vartheta - \theta \leq \pi(n+1)/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то удастся построить точную нижнюю грань функционала  $I$  и получить тем самым решение задачи — оптимальный режим в форме (4.42).

Если же изменение угла  $\vartheta$  не укладывается в указанный интервал, уравнение (4.41) лишь приближенно задает верхние границы  $\cos^2(\vartheta - \theta)$ . Для этого случая режим (4.42) может использоваться в качестве исходного в процедурах улучшения.

**4.2.3. Синтез оптимального управления.** Рассмотрим по-прежнему задачу о минимуме функционала  $I$  (4.23), описываемую уравнениями (4.35) с граничными условиями (4.36). Положим для простоты  $\theta = 0$ .

Запишем функцию Гамильтона и составим уравнения сопряженной системы

$$\begin{aligned} H &= \psi_{\vartheta}(\omega_0 + \Omega) + \psi_J a^2 + V a \cos \vartheta; \\ \dot{\psi}_{\vartheta} &= V a \sin \vartheta; \\ \dot{\psi}_J &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Оптимальные управления  $\Omega$  и  $a$  должны обеспечить максимум функции  $H$ :  $H(\psi_{\vartheta}, \psi_J, \vartheta, \Omega, a) = \max H$ .

$$a, \quad \Omega \in [-\Omega_{\max}, \Omega_{\max}]$$

Найдем отсюда реактивное ускорение

$$\bar{a} = V \cos \vartheta / (2\lambda). \quad (4.44)$$

Здесь  $\lambda = -\psi_J = \text{const}$ . Оптимальное переключение угловой скорости определяется так:

$$\bar{\Omega} = \Omega_{\max} \text{sign} \psi_{\vartheta}. \quad (4.45)$$

Пусть  $\Omega_{\max} < \omega_0$ . Тогда возможными оптимальными управлениями будут только  $\Omega = +\Omega_{\max}$  или  $\Omega = -\Omega_{\max}$ .

Проинтегрируем уравнения сопряженной системы. При  $\Omega = \Omega_{\max}$ :

$$\frac{d\psi_{\vartheta}}{d\vartheta} = \frac{d\psi_{\vartheta}}{dt} \frac{dt}{d\vartheta} = \frac{V a \sin \vartheta}{\omega_0 + \Omega_{\max}}.$$

С учетом (4.44) получим решение

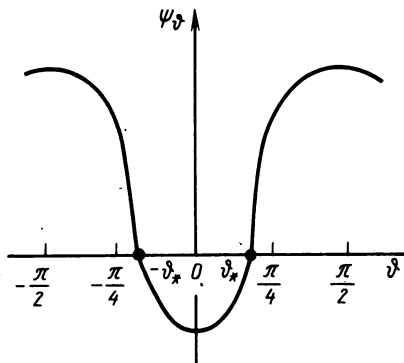
$$\begin{aligned} \psi_{\vartheta}^+ &= \psi_{\vartheta_0} + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{V^2 \sin 2\vartheta d\vartheta}{4\lambda(\omega_0 + \Omega_{\max})} = \\ &= \frac{V^2}{8\lambda(\omega_0 + \Omega_{\max})} (\cos 2\vartheta_* - \cos 2\vartheta). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Здесь  $\vartheta_*$  — некоторый постоянный параметр.

Решение, соответствующее  $\Omega = -\Omega_{\max}$ , имеет вид

$$\psi_{\vartheta} = \frac{V^2}{8\lambda(\omega_0 - \Omega_{\max})} (\cos 2\vartheta_* - \cos 2\vartheta). \quad (4.47)$$

Рис. 4.1. Поведение функции переключения угловой скорости поворота вектора тяги



Выражения (4.46), (4.47) отражают физический смысл параметра  $\vartheta_*$  как угла ориентации тяги, при котором происходит переключение знака угловой скорости. Характер зависимости функции переключения  $\psi_\vartheta$  от угла  $\vartheta$  показан на рис. 4.1.

Окончательно оптимальный закон управления формируется в следующем виде:

$$\Omega = \Omega_{\max} \text{sign}(\cos 2\vartheta_* - \cos 2\vartheta), \quad (4.48)$$

где параметр  $\vartheta_*$  подбирается в ходе решения краевой задачи. Согласно (4.48) в области, где  $|\vartheta| - |\vartheta_*| < 0$   $\Omega = -\Omega_{\max}$  (управление стремится удержать вектор тяги в окрестности касательной к траектории); при выходе угла  $\vartheta$  из указанной области управление способствует скорейшему перевороту аппарата с целью приведения вектора тяги в окрестность касательной; кроме того, при  $\vartheta = \pi/2$  в соответствии с (4.44) происходит реверс тяги.

Дальнейшее решение задачи можно вести по следующей схеме. На семействе траекторий и режимов, удовлетворяющих условиям 1-го порядка в методе Лагранжа — Понтрягина, подсчитывается функционал  $I(t_0, x_0)$ . Эта зависимость считается оценочной функцией Кротова — Беллмана; с ее помощью можно произвести оценку близости к оптуму и улучшение траекторий и режимов управления.

### 4.3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ОГРАНИЧЕННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ ПОВОРОТА ВЕКТОРА ТЯГИ

Рассмотрим задачу оптимального управления космическим аппаратом, совершающим многовитковый перелет. Очевидно, здесь не удастся ограничиться исследованием характера управления в пределах витка, так как параметры траекторного и углового движений будут оказывать взаимное влияние друг на друга. Чтобы выделить в чистом виде управление ориентацией тяги, ограничимся постановкой задачи для двигателя с нерегулируемой тягой.

**4.3.1. Структура оптимального режима.** Запишем систему уравнений плоского движения КА с постоянной по величине тягой в центральном поле

$$\dot{r} = V \sin \theta;$$

$$\dot{V} = \frac{\sin \theta}{r^2} + \frac{a_0 \delta}{1 - a_0 t/c} \cos(\vartheta - \theta);$$

$$\dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{V} \left( \frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{a_0 \delta}{V(1 - a_0 t/c)} \sin(\vartheta - \theta); \quad (4.49)$$

$$\dot{\vartheta} = \Omega + \frac{V \cos \theta}{r};$$

$$\dot{u} = \frac{V \cos \theta}{r};$$

Вектор состояния  $x$  в рассматриваемой задаче включает в себя компоненты  $(r, V, \theta, \vartheta, u)$ , а вектор управления  $u$  — компоненты  $(\delta, \Omega)$ , причем  $\delta \in \{-1, 0, +1\}$ ,  $-\Omega_{\max} \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$ .

В качестве критерия оптимальности примем время перелета:

$$T = (t_K - t_0) \rightarrow \min.$$

Выберем релейную функцию  $\delta(t)$  таким образом, чтобы обеспечить неубывание энергии по траектории

$$\text{sign} \delta(t) = \text{sign}(\cos(\vartheta - \theta)). \quad (4.50)$$

Теперь, очевидно, задача сводится к отысканию оптимального режима управления только угловой скоростью  $\Omega$ .

Составим функции

$$\begin{aligned} R = H' + \varphi_t = & \varphi_r V \sin \theta + \varphi_V \left[ -\frac{\sin \theta}{r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{a_0 \delta \cos(\vartheta - \theta)}{1 - a_0 t/c} \right] + \varphi_\theta \left[ \frac{\cos \theta}{V} \left( \frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{a_0 \delta \sin(\vartheta - \theta)}{V(1 - a_0 t/c)} \right] + \varphi_\vartheta \left( \frac{V \cos \theta}{r} + \Omega \right) + \varphi_u \frac{V \cos \theta}{r} - 1 + \varphi_t; \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$G = \varphi(t_K, x_K) - \varphi(t_0, x_0).$$

Выпишем условия 1-го порядка максимума  $R$  и минимума  $G$  (начальная точка фиксирована):

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_K} \delta x_K = 0; \quad (4.52)$$

$$\Omega = \arg \max R.$$

$$\Omega \in [-\Omega_{\max}, \Omega_{\max}].$$

Условия (4.52) приводят к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_r &= -\psi_V \frac{2\sin\theta}{r^3} + \psi_\vartheta \frac{V\cos\theta}{r^2} + \psi_\theta \frac{\cos\theta}{r^2} \left(V - \frac{2}{Vr}\right); \\
 \dot{\psi}_V &= -\psi_r \sin\theta - \psi_\vartheta \frac{\cos\theta}{r} - \psi_\theta \frac{\cos\theta}{r^2 V^2} - \psi_\theta \frac{\cos\theta}{r} + \\
 &+ \psi_\theta \frac{a_0 \operatorname{sign}(\cos(\vartheta - \theta))}{V^2(1 - a_0 t/c)} \sin(\vartheta - \theta); \\
 \dot{\psi}_\theta &= \psi_\theta \left(\frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \frac{\sin\theta}{r^2} + \psi_r V \cos\theta + \\
 &+ \psi_\vartheta \frac{V \sin\theta}{r} + \psi_V \frac{\cos\theta}{r^2} + \psi_\theta \frac{a_0 \operatorname{sign}(\cos(\vartheta - \theta))}{V(1 - a_0 t/c)} - \\
 &- \psi_V \frac{a_0 \operatorname{sign}(\cos(\vartheta - \theta))}{1 - a_0 t/c}; \\
 \dot{\psi}_\vartheta &= \left[ \psi_V \sin(\vartheta - \theta) - \psi_\theta \frac{\cos(\vartheta - \theta)}{V} \right] \times \\
 &\times \frac{a_0 \operatorname{sign}(\cos(\vartheta - \theta))}{1 - a_0 t/c}; \\
 \dot{\psi}_u &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Здесь переменные  $\psi_r$ ,  $\psi_V$ ,  $\psi_\theta$ ,  $\psi_\vartheta$ ,  $\psi_u$  — частные производные неизвестной функции  $\varphi$  в точках искомого режима.

$$\bar{\Omega} = \begin{cases} \Omega_{\max}, & \text{если } \psi_\vartheta > 0, \\ \text{любое}, & \text{если } \psi_\vartheta \equiv 0; \\ -\Omega_{\max}, & \text{если } \psi_\vartheta < 0. \end{cases} \tag{4.54}$$

Условие  $\psi_\vartheta \equiv 0$  соответствует особому режиму. Из 4-го уравнения системы (4.53) при  $\psi_\vartheta \equiv 0$  получаем

$$\psi_V \sin(\vartheta - \theta) - \psi_\theta \cos(\vartheta - \theta)/V \equiv 0,$$

откуда следует, что на участке особого управления должно выполняться соотношение

$$\operatorname{tg}(\vartheta - \theta) = \operatorname{tg}\alpha = \psi_\theta / (V\psi_V). \tag{4.55}$$

В данном случае особый режим имеет простой смысл. Это решение 1-го порядка для той же задачи, но без учета одной дифференциальной связи, т.е. на некотором расширенном множестве  $E \supset D$ . Если оно оптимально на  $E$ , то оптимально и на  $D$ . Следовательно, особый режим должен быть включен в состав искомого решения, структуру которого

естественно представлять из трех участков: 1) движение из начальной точки в фазовом пространстве до особой поверхности; 2) особый режим; 3) сход с особой поверхности и достижение конечной точки. Системы (4.49) и (4.53) допускают решение такой структуры, которое окончательно находится в ходе решения краевой задачи. Таким образом, особые экстремали в задаче управления с ограничением на угловую скорость поворота вектора тяги совпадают с экстремалими традиционной задачи оптимизации, когда движение КА вокруг центра масс не учитывается и ограничения на угловую скорость поворота вектора тяги отсутствуют. Этот результат вытекает из анализа задачи управления в общей постановке (разд. 2.3), где вывод об особых участках был сделан на основании замены исходного множества  $D$  на более широкое  $E$  (иными словами, исключая уравнение углового движения).

4.3.2. Анализ особых режимов. Получим выражение для особого управления  $\tilde{\Omega}$ . Представим функцию  $H$  в виде  $H = H_0 + \psi_{\vartheta}\Omega$ . Тогда, согласно [14]

$$\tilde{\Omega} = - \frac{\{H_0, \{H_0, \psi_{\vartheta}\}\}}{\{\psi_{\vartheta}, \{H_0, \psi_{\vartheta}\}\}}. \quad (4.56)$$

Вычисляя входящие в (4.56) скобки Пуассона, получим

$$\begin{aligned} \{H_0, \psi_{\vartheta}\} &= H_* = \frac{a_0 \operatorname{sign}(\cos(\vartheta - \theta))}{1 - a_0 t/c} \times \\ &\times [\psi_{\theta} \frac{\cos(\vartheta - \theta)}{V} - \psi_V \sin(\vartheta - \theta)]; \\ \{H_0, H_*\} &= \frac{a_0 |\cos(\vartheta - \theta)|}{rV\psi_V(1 - a_0 t/c)} \times \\ &\times (\psi_r \psi_V r V \cos\theta - \psi_{\theta}^2 \cos\theta + \psi_r \psi_{\theta} r \sin\theta + \psi_{\theta} \psi_V V \sin\theta); \\ \{\psi_{\vartheta}, H_*\} &= \frac{a_0 \operatorname{sign}(\cos(\vartheta - \theta))}{1 - a_0 t/c} [\psi_{\theta} \frac{\sin(\vartheta - \theta)}{V} + \psi_V \cos(\vartheta - \theta)]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Окончательное выражение для  $\tilde{\Omega}$  имеет теперь вид

$$\tilde{\Omega} = \frac{\tilde{\psi}_{\theta} \sin \tilde{\vartheta} - \tilde{r} \tilde{\psi}_r \cos \tilde{\vartheta}}{(\tilde{\psi}_{\theta}^2 + \tilde{V}^2 \tilde{\psi}_V^2)^{1/2}} \frac{\tilde{V}}{\tilde{r}}. \quad (4.58)$$

Необходимое условие оптимальности особого режима заключается в неотрицательности скобки

$$\{\psi_{\vartheta}, H_*\} = \frac{a_0 |\cos(\tilde{\vartheta} - \tilde{\theta})| (\tilde{\psi}_{\theta}^2 + \tilde{\psi}_V^2 \tilde{V}^2)}{(1 - a_0 t/c) \tilde{V}^2 \tilde{\psi}_V} \geq 0. \quad (4.59)$$

Последнее условие выполняется, если всюду на особом участке траектории переменная  $\hat{\psi}_V$  неотрицательна.

Рассмотрим точку перехода с регулярного режима на особый, соответствующую моменту времени  $\tau$ . Определим условие оптимальной стыковки регулярного и особого участков. Пусть в этой точке оптимальное управление терпит разрыв а  $\Omega(t) \leq 0$ , при этом, поскольку  $\Omega(t)$  неположительна, имеем

$$\text{sign}[\Omega(\tau) - \Omega(\tau - 0)] = - \text{sign} \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{t=\tau-0}. \quad (4.60)$$

С другой стороны, в силу непрерывности  $\frac{\partial H}{\partial \Omega}$ , равной нулю на особом участке, знак ее производной по времени в точке  $t = \tau - 0$  противоположен знаку  $\frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{t=\tau-0}$ . Аналогично устанавливается, что

$$\text{sign}\left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \Omega}\right) \Big|_{t=\tau-0} = \text{sign} \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{t=\tau-0}. \quad (4.61)$$

Запишем выражение для второй производной от  $\frac{\partial H}{\partial \Omega}$ :

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \Omega} = \{H_0, H_*\} + \Omega \{ \psi_\varnothing, H_* \}, \quad (4.62)$$

причем на участке особого управления (а значит, и в точке  $t = \tau$ ) она равна нулю. Исследуя знак разности

$$\Delta = \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{t=\tau} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{t=\tau-0},$$

в силу непрерывности фазовых координат и переменных  $\psi_r, \psi_V$ , получим с учетом (4.61)

$$\text{sign} \Delta = - \text{sign} \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{t=\tau-0}, \quad (4.63)$$

откуда на основании (4.60) заключаем, что скобка Пуассона  $\{ \psi_\varnothing, H_* \}$  неотрицательна. Но, как отмечалось раньше, неотрицательность скобки  $\{ \psi_\varnothing, H_* \}$  является необходимым условием оптимальности особого режима. Таким образом, разрыв управления в точке сопряжения участков удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

В результате вариационная задача сводится теперь к краевой задаче для системы восьми дифференциальных уравнений 1-го порядка.

**4.3.3. Задача достижения параболической скорости.** Рассмотрим задачу оптимального по быстродействию разгона КА до параболической скорости. Примем, что начальные условия задачи соответствуют старту

с круговой орбиты ( $r_0 = 1$ ,  $V_0 = 1$ ,  $\theta_0 = 0$ ), параметры  $\vartheta_0$ ,  $u_0$  — не фиксированы.

В конце маневра достигается параболическая скорость ( $h = 0$ ):

$$V(t_K) = \sqrt{2/r_K}, \quad (4.64)$$

а значения  $\theta(t_K)$ ,  $\vartheta(t_K)$ ,  $u(t_K)$  — не заданы.

Граничные условия для переменных сопряженной системы (4.53) определяются согласно (4.52) так:

$$\psi_V(t_K) V(t_K) = 2r(t_K) \psi_r(t_K); \quad (4.65)$$

$$\psi_\theta(t_K) = 0; \quad \psi_\vartheta(t_K) = 0.$$

Подбор соответствующих множителей  $\psi_r$ ,  $\psi_V$ ,  $\psi_\theta$ ,  $\psi_\vartheta$  в начальный момент времени позволяет удовлетворить условиям (4.65) при достижении параболической скорости. Отметим, что в силу однородности уравнения сопряженной системы допускают нормировку, например, по  $\psi_V(t_0)$ , так что можно положить  $\psi_V(t_0) = 1$  и подбирать параметры  $\psi_r(t_0)$ ,  $\psi_\theta(t_0)$ ,  $\psi_\vartheta(t_0)$ . Как было отмечено, угол  $\vartheta$  в начальный момент не задан, а должен определяться из условий оптимальности. В этом случае  $\psi_\vartheta(t_0) = 0$ , а неизвестными начальными параметрами будут  $\psi_r(t_0)$ ,  $\psi_\theta(t_0)$ ,  $\vartheta(t_0)$ .

Момент  $\tau$  перехода на особый режим определяется одновременным выполнением двух условий  $\psi_\vartheta(\tau) = 0$  и  $\dot{\psi}_\vartheta(\tau) = 0$ , последнее сводится к условию (4.55). Если ограничение на угловую скорость поворота вектора тяги выполняется всюду, то в состав траектории не входит регулярный участок с  $\Omega = \pm \Omega_{\max}$ , движение происходит с  $\Omega = \bar{\Omega}$ , угол  $\alpha$  меняется по закону (4.55), т.е. соответствует решению задачи о минимуме времени разгона без учета ограничений на угловую скорость поворота вектора тяги ("экстремальной" программе разд. 3.2).

Решение сформулированной краевой задачи представляет значительные трудности ввиду необходимости подбора параметров, лишенных физического смысла ( $\psi_r$ ,  $\psi_\theta$ ), и проверки условия оптимальности в точке сопряжения. Значительно упрощается алгоритм поиска оптимума при решении задачи "с конца", т.е. от точки достижения параболической скорости. Нормировка переменных сопряженной системы в этом случае проводится по  $\psi_V(t_K)$ . Из условий трансверсальности (4.65) и соотношения (4.55) следует, что в конце траектории  $\alpha = \vartheta - \theta = 0$ , т.е.  $\vartheta(t_K) = \theta(t_K)$ . В начальной точке угол ориентации тяги  $\vartheta$  не задан, поэтому  $\psi_\vartheta(t_0) = 0$ , однако  $\psi_\vartheta \neq 0$ . Кроме того, необходимо выполнить условия попадания на круговую орбиту:  $r = 1$ ,  $V = 1$ ,  $\theta = 0$ . Удовлетворить этим четырем условиям можно путем подбора следующих параметров, имеющих физический смысл:  $T = (t_K - t_0)$ ;  $r(t_K)$ ,  $\theta(t_K)$  и момента  $\tau$  перехода с регулярного на особый режим.

Таким образом, порядок краевой задачи при решении ее "с конца" увеличивается на единицу. Если ограничение на  $\Omega$  настолько жесткое,

что особый режим вообще не имеет места, введение параметра  $\tau$  теряет смысл ( $\tau$  получается больше, чем  $T$ ), тогда следует ввести четвертый независимый параметр — угол  $\vartheta(t_K)$ , так как равенство  $\vartheta(t_K) = \theta(t_K)$  теперь не выполняется.

Для построения эффективного вычислительного алгоритма необходимо установить структуру оптимального режима.

Анализ выражения для особого управления в конкретной задаче позволяет установить последовательность перехода с регулярного участка на особый и наоборот, а также найти условия оптимальной стыковки регулярных и особых участков.

Решая краевую задачу для указанных граничных условий без ограничений на  $\Omega$  и вычисляя  $\Omega$  по формуле (4.58), можно установить, что эта функция всюду неположительна, а ее модуль монотонно убывает, начиная с некоторого момента времени, близкого к начальному. Характер изменения  $\Omega$  показан на рис. 4.2, отрицательный знак  $\Omega$  соответствует вращению КА в сторону его движения вокруг притягивающего центра.

Таким образом, ограничение на угловую скорость поворота вектора тяги в задаче с граничными условиями типа (4.64) может нарушаться только на начальном участке траектории. Разумно поэтому предположить, что в задаче достижения параболической скорости структура оптимального управления включает в себя начальный участок движения с максимальной по модулю угловой скоростью вектора тяги и конечный участок особого управления.

Серия краевых задач была решена на ЭВМ модифицированным методом Ньютона. Результаты некоторых расчетов параметров траектории приведены ниже.

При  $a_0 = 1 \cdot 10^{-2}$ ,  $c = 5,2$

	не ограничена	$\Omega_{\max} = 0,95$	$\Omega_{\max} = 0,5$
$\Omega$ . . . . .			
$T$ . . . . .	68,45	68,46	74,99
$r_K$ . . . . .	8,042	8,044	7,958
$\theta_K$ . . . . .	38,80°	38,81°	38,20°
$\tau$ . . . . .	0	3,69	29,97
$T'$ . . . . .	69,85	69,92	78,01
$\Delta T = T' - T$ . . . . .	1,40	1,46	3,02

На рис. 4.3 показан характер изменения угловой скорости  $\Omega$  и угла  $\alpha$  ( $\Omega$  и  $t$  — величины безразмерные). Интересно отметить, что согласно полученным решениям управление  $\Omega$  стремится удержать тягу в окрестности касательной к траектории (примерно в диапазоне  $-40^\circ < \vartheta < 40^\circ$ ). Если вектор тяги выходит из этого диапазона, угловая скорость меняет знак, т.е. способствует быстрейшему повороту КА и приходу вектора тяги в указанную окрестность "с другой стороны" (см. разд. 4.2). Естественно, что разгон КА с ограничением на скорость поворота вектора тяги занимает большее время, чем без этого ограничения (когда угол ориен-

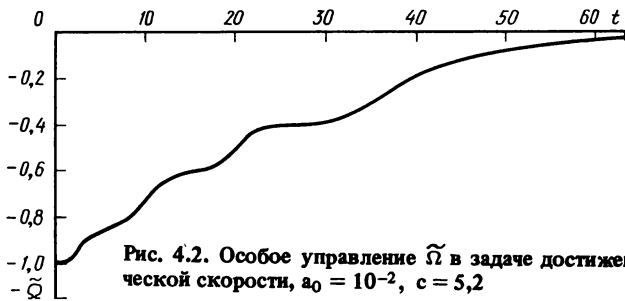


Рис. 4.2. Особое управление  $\tilde{\Omega}$  в задаче достижения параболической скорости,  $a_0 = 10^{-2}$ ,  $c = 5,2$

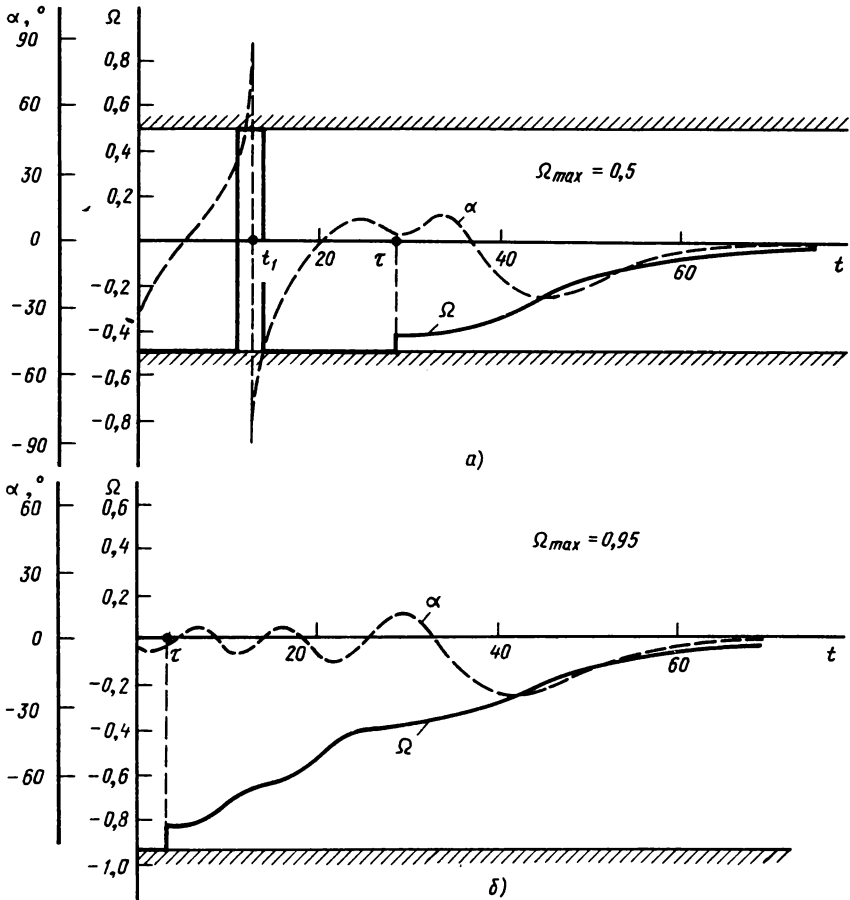


Рис. 4.3. Характер изменения угловой скорости поворота вектора тяги  $\Omega$  и угла  $\alpha$  на оптимальной траектории ( $a_0 = 10^{-2}$ ;  $c = 5,2$ )  $t_1$  — момент реверса тяги,  $\tau$  — момент перехода на особый режим; а)  $\Omega_{max} = 0,95$ ; б)  $\Omega_{max} = 0,5$

тации тяги  $\alpha$  является независимым управлением). Проигрывает во времени увеличивается с уменьшением  $\Omega_{\max}$ . Время достижения параболической скорости на "экстремальной" траектории, т.е. без ограничений на  $\Omega$ , может, таким образом, служить оценкой нижней границы функционала  $T$ . Интересно отметить, что время  $T'$  разгона по траектории, которой соответствует локально-оптимальный режим (разд. 4.2)  $\Omega = -\Omega_{\max} \text{sign}[\sin 2(\vartheta - \theta)]$  незначительно уступает времени  $T$ .

При ограниченной величине  $\Omega$  на начальном этапе оптимальное управление стремится удержать вектор тяги все более продолжительное время в окрестности касательной к траектории (см. рис. 4.3). С увеличением радиуса орбиты угловая скорость орбитального движения  $\omega_0$  уменьшается настолько, что управление способно обеспечить оптимальную ориентацию тяги вплоть до точки набора параболической скорости. Помимо  $\Omega_{\max}$  время разгона зависит и от начального направления вектора тяги, т.е. от угла  $\vartheta_0$ , но эта зависимость проявляется довольно слабо.

Совершенно аналогично исследуется задача о минимальном времени торможения КА при переходе на круговую орбиту спутника планеты. Начальный участок движения здесь является участком особого управления, а конечный — регулярным, с максимальной по модулю угловой скоростью поворота вектора тяги.

**4.3.4. Оптимальные траектории аппарата с постоянной ориентацией вектора тяги.** Рассмотрим случай, когда КА сохраняет постоянную ориентацию вектора тяги в пространстве. В данном случае  $\Omega \equiv 0$ , и направление вектора тяги сохраняется неизменным (с точностью до гравитационных возмущений). Если предусматривается реверс тяги, то программу реактивного ускорения целесообразно выбирать так, чтобы обеспечить максимальную скорость возрастания энергии.

Локально-оптимальное управление  $a(t)$  согласно (4.38) таково:  $a = A \cos(\vartheta - \theta)$ , где  $A$  — константа.

Для КА с постоянной ориентацией вектора тяги время достижения параболической скорости существенно зависит от начального угла  $\vartheta_0$ .

На рис. 4.4 показана зависимость времени набора параболической скорости  $T$  от начального угла  $\vartheta_0$ . Детальный анализ заключительного этапа разгона показал, что минимальное время достижения параболической скорости для  $a_0 = 10^{-2}$   $T_{\min} \approx 103,0$  достигается при  $\vartheta_{0\text{opt}} \approx -30^\circ$ , однако этот минимум весьма пологий. При углах  $\vartheta_0$ , близких к  $\vartheta_{0\text{opt}}$ , вектор тяги на заключительном участке разгона имеет направление, близкое к направлению скорости, обеспечивая на последнем витке максимальный темп увеличения энергии (рис. 4.5).

При неоптимальном угле  $\vartheta_0$ , лежащем в узком диапазоне  $+4^\circ \leq \vartheta_0 \leq +10^\circ$ , время достижения параболической скорости существенно увеличивается (при  $\vartheta_0 = 7^\circ$ ,  $T \approx 798$ ). Дело в том, что при неудачном выборе начальной ориентации тяги на последнем участке разгона тяга направлена

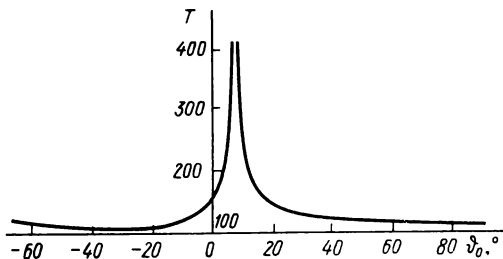


Рис. 4.4. Зависимость времени набора параболической скорости КА с постоянным направлением тяги от начального угла ориентации  $\vartheta_0$  ( $a_0 = 10^{-2}$ ,  $c = 8$ )

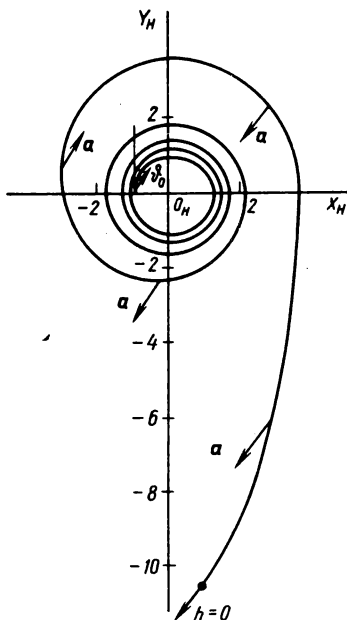


Рис. 4.5. Траектория разгона КА с оптимальным углом ориентации тяги  $\vartheta_0$  ( $a_0 = 10^{-2}$ ,  $c = 8$ ,  $\vartheta_0 = -31^\circ$ ,  $T = 103,2$ )

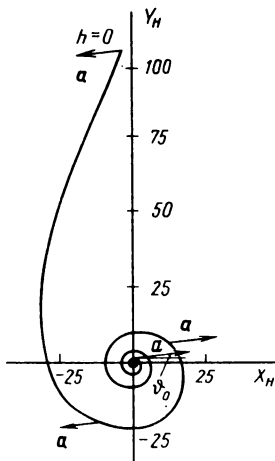


Рис. 4.6. Траектория разгона КА при неоптимальной ориентации вектора тяги ( $a_0 = 10^{-2}$ ,  $c = 8$ ,  $\vartheta_0 = 7^\circ$ ,  $T = 798$ )

по отношению к вектору скорости под углом, близким к  $\pi/2$ , и рост энергии практически прекращается (рис. 4.6).

Поскольку возрастание времени набора параболической скорости при неудачном выборе  $\vartheta_0$  весьма существенно, необходимо заранее исключить неблагоприятный диапазон углов  $\vartheta_0$ . Численное моделирование показало достаточно высокую стабильность этого диапазона для реактивных ускорений  $a_0 = 10^{-4} \dots 10^{-2}$ .

Отметим, что минимальное время набора параболической скорости КА, сохраняющего неизменной ориентацию вектора тяги в пространстве примерно на 50 % больше, чем время разгона по "экстремальной", трансверсальной и тангенциальной программам.

#### 4.4. ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОМ ТЯГИ НА ЭНЕРГЕТИКУ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА

4.4.1. **Постановка задачи и основные допущения.** Межпланетный перелет с малой тягой является сложным многоэтапным маневром, включающим в себя участки: набора параболической скорости в сфере действия планеты старта, гелиоцентрического межорбитального перехода, торможения с переходом на конечную орбиту искусственного спутника планеты назначения. Аналогичные участки выделяются на траектории обратного перелета. Схема замкнутого межпланетного перелета КА с малой тягой показана на рис. 4.7.

Согласно классической методике сфер действия на каждом участке аппарат движется в поле одного притягивающего центра. Поэтому обычно проводится поэтапная оптимизация каждого "элементарного" маневра, затем осуществляются стыковка соседних участков и их варьирование с целью получения оптимальной траектории в целом. Наиболее просто осуществляется так называемая энергетическая стыковка, при которой не требуется обеспечивать непрерывность координат и управлений в точках соединения двух соседних участков. Такой прием по существу является реализацией принципа расширения множества допустимых состояний и управлений (гл. 2) и дает несколько заниженные оценки энергетических характеристик межпланетного перелета. Однако такие оценки могут оказаться полезными при решении следующих задач:

1. Выделение областей преимущественного (с точки зрения энергетики) использования двигателей того или иного типа, либо комбинированных двигательных систем.

2. Анализ влияния ограничений на управление вектором тяги, обусловленных особенностями углового движения аппарата, на энергетику межпланетного перелета.

Введем следующие обозначения:  $T_1, T_2, T_3$  — времена движения на отдельных участках прямого межпланетного перелета с угловым перемещением  $\varphi_1$ ;  $T_4, T_5, T_6$  — времена движения, соответствующие участкам обратного перелета с угловым перемещением  $\varphi_3$ ;  $T_0$  — продолжитель-

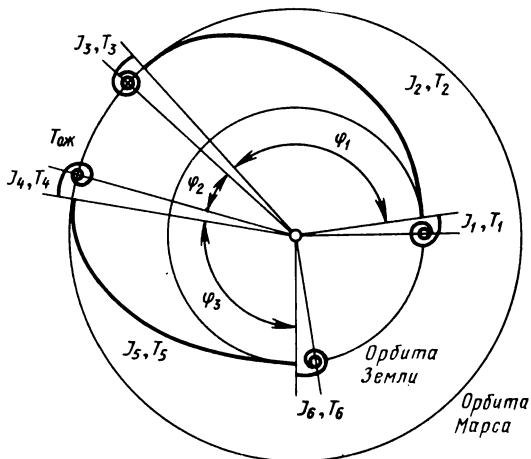


Рис. 4.7. Схема замкнутого межпланетного перелета Земля — Марс — Земля

ность нахождения КА на орбите искусственного спутника планеты назначения (время "ожидания");  $\varphi_2$  – угловое перемещение космического аппарата при гелиоцентрическом движении на участке ожидания.

Каждый этап перелета имеет свои особенности, что обуславливает и различие в оптимальных программах управления. Так, для эффективного управления вращающимся аппаратом с искусственной гравитацией на припланетных участках требуются значительные управляющие моменты (разд. 4.3). Напротив, движение в поле тяготения Солнца характеризуется весьма малыми угловыми скоростями вектора тяги в гелиоцентрической невращающейся системе координат, поэтому и потребные моменты здесь в 100 ... 1000 раз меньше, чем на припланетных участках. Следовательно, при анализе движения в поле тяготения Солнца можно считать, что реализация программы управления вектором тяги не вызывает трудностей и не требует дополнительного расхода рабочего тела.

Дальнейшее исследование будем вести при следующих допущениях:

1. Орбиты планеты старта и планеты назначения – круговые и компланарные.
2. Траектория межпланетного перелета лежит в одной плоскости (плоскости эклиптики).

Обычно при анализе траекторий межпланетных перелетов задаются датой старта  $t_{ст}$ , датой возвращения на орбиту старта или датой прибытия на орбиту цели  $t_{к}$ , временем ожидания  $T_0$ . Если угловые перемещения аппарата в плоскости эклиптики  $\varphi_1$  или  $\varphi_3$  не заданы, то они подбираются из условия минимума критерия оптимальности перелета. При этом соответственно получается оптимальная дата старта  $t_{ст\ opt}$ , поэтому перелеты с незадаанным угловым перемещением называют также перелетами с оптимальной датой старта.

В качестве критерия оптимальности динамической задачи перелета с идеально регулируемым двигателем малой тяги примем интеграл от квадрата реактивного ускорения  $J$ , который для многоэтапного перелета удобно представить в следующем виде:

$$J = \sum_{j=1}^N J_j = \sum_{j=1}^N \int_{t_{0j}}^{t_{kj}} a_j^2(t) dt, \quad (4.66)$$

где  $N$  – число этапов перелета;  $t_{0j}$ ,  $t_{kj}$  – времена начала и конца каждого этапа;  $a_j(t)$  – программа реактивного ускорения на  $j$ -м этапе.

Для аппарата, снабженного ЭРД с нерегулируемой тягой, в качестве критерия оптимальности динамической задачи примем моторное время перелета  $T_M$  (гл. 2). Критерием оптимальности параметрической задачи (см. разд. 2.1) служит величина полезной массы, доставляемой на орбиту назначения.

Для приближенного анализа влияния динамики углового движения на энергетику межпланетного перелета нет необходимости в точном ре-

шении задач оптимального управления на каждом этапе. Поэтому поступим следующим образом. В случае, когда движение КА относительно центра масс не учитывается, будем считать, что на припланетных участках разгона и торможения вектор тяги направлен вдоль вектора скорости или противоположно ему, а на гелиоцентрическом участке сначала сохраняет примерно постоянное направление в гелиоцентрической системе отсчета, а затем меняет направление на противоположное. Такое упрощение позволяет воспользоваться известными решениями [2, 5, 17, 24] динамической задачи.

Учет ограничений на угловую скорость поворота вектора тяги (см. разд. 4.3) позволил указать существование следующей зависимости для припланетных участков перелета:  $I = I(T, \Omega_{\max}, \vartheta_0)$ , где  $I$  – критерий оптимальности (моторное время или динамическая характеристика) перелета;  $T$  – время разгона или торможения в сфере действия планеты;  $\Omega_{\max}$  – максимальная угловая скорость поворота вектора тяги;  $\vartheta_0$  – начальная ориентация вектора тяги по отношению к трансверсали на орбите старта. Пусть угол  $\vartheta_0$  выбирается оптимальным, либо его влияние на функционал  $I$  несущественно. Тогда  $\Omega_{\max}$  – единственный параметр, влияние которого на энергетику перелета оказывается определяющим. Предельные оценки этого влияния получим, вычисляя

$$I_{\max} = \max_{\Omega_{\max}} \min_{\vartheta_0} I(T, \Omega_{\max}, \vartheta_0). \quad (4.67)$$

Очевидно, предельное значение критерия оптимальности будет соответствовать решению:  $\Omega_{\max} = 0$  (аппарат с постоянной ориентацией вектора тяги). Анализ схем перелетов подобного типа позволяет оценить предельный проигрыш в полезной массе, доставляемой на орбиту назначения, например, аппаратом с искусственной гравитацией.

**4.4.2. Аппроксимация динамической характеристики на различных участках перелета с идеально регулируемым двигателем.** На припланетных участках тангенциального разгона и торможения величина интеграла от квадрата реактивного ускорения  $J = \int_0^T a^2 dt$  аппроксимируется простейшей зависимостью (движение аппарата относительно центра масс не учитывается):

$$J_{\text{танг}} = k_1/T; \quad k_1 = \text{const}. \quad (4.68)$$

Коэффициент  $k_1$  подбирается из условия минимума среднеквадратичной ошибки аппроксимации.

Расчеты серии траекторий набора нулевой энергии аппарата с идеально регулируемым двигателем и ограниченной угловой скоростью поворота вектора тяги позволили получить зависимость интеграла  $J$  от параметров  $T, \Omega_{\max}$  (рис. 4.8). Изменение знака угловой скорости происходило при этом в соответствии с локально-оптимальным законом

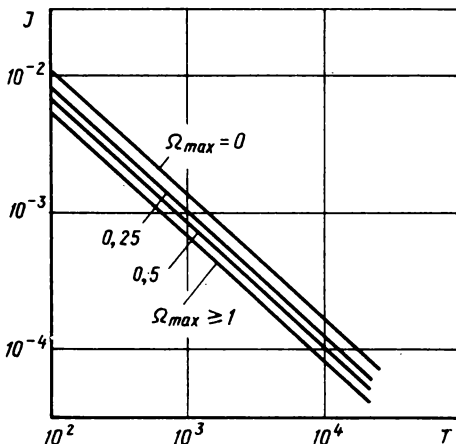


Рис. 4.8. Динамическая характеристика разгона и торможения с идеально регулируемым двигателем малой тяги

(4.42); "предельный" вариант расчета с  $\Omega_{\max} = 0$  выполнен при оптимальных начальных значениях угла ориентации тяги  $\vartheta_0$ . Удобно представить эту зависимость в следующей форме:

$$J(T, \Omega_{\max}) = J_{\text{танг}}(T)F(\Omega_{\max}) \approx (k_1/T)F(\Omega_{\max}). \quad (4.69)$$

При  $\Omega_{\max} \geq 1$ ,  $F \equiv 1$ : угловая скорость вращения вектора тяги превышает угловую скорость движения центра масс КА по начальной орбите, что позволяет обеспечить ориентацию тяги по касательной к траектории. При  $\Omega_{\max} \equiv 0$ ,  $F \approx 2$ : динамическая характеристика примерно удваивается. Удвоение динамической характеристики по сравнению с тангенциальным разгоном, разумеется, приведет и к уменьшению полезной массы перелета в целом.

Следует отметить, что свойство "обратимости" траекторий КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги [24] позволяет применить все результаты, полученные для разгона КА в сфере действия планеты, к маневру торможения. Необходимо только учесть, что при использовании безразмерных переменных все параметры траектории разгона относятся к соответствующим величинам на исходной орбите у планеты старта, а параметры траектории торможения — к подобным величинам на конечной орбите у планеты назначения. Это приводит к изменению масштабов измерения времени маневра  $T$  и угловой скорости вектора тяги  $\Omega_{\max}$ .

Если  $\Omega_{\max}$  — максимальная угловая скорость поворота вектора тяги КА на околоземной круговой орбите радиуса  $r_0$ , то  $\Omega'_{\max}$ , соответствующая круговой орбите у планеты назначения, определяется так:

$$\Omega'_{\max} = \Omega_{\max} \omega_0 / \omega'_0. \quad (4.70)$$

Здесь  $\omega_0$ ,  $\omega'_0$  — угловые скорости движения центра масс КА по околоземной орбите старта и по орбите у планеты назначения.

Получим теперь аппроксимационные зависимости динамической характеристики перелета на гелиоцентрическом участке. Для определенности рассмотрим перелет между орбитами Земли и Марса. Расчет серии траекторий прямых и обратных перелетов КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги между круговыми компланарными орбитами

Земли и Марса проведен в работе [24]. Эти данные позволили построить аппроксимационные формулы следующего вида [6]:

$$J_{2,4}(T_{2,4}, \varphi_{1,3}) = \frac{k_2}{T_{2,4}^3} + pA(\varphi_{1,3}) \left[ \frac{q}{T_{2,4}} - B(\varphi_{1,3}) \right]^3, \quad (4.71)$$

где  $A(\varphi_{1,3}) = a_0 + a_1\varphi_{1,3}$ ;  $B(\varphi_{1,3}) = b_0 + b_1(180 - \varphi_{1,3})^{5/2}$ ;  $\varphi_{1,3}$  – угловая дальность траектории межпланетного перелета в градусах;  $T_{2,4}$  – продолжительность гелиоцентрического участка;  $a_0, a_1, b_0, b_1, p, q, k_2$  – некоторые константы. Формула (4.71) справедлива в диапазоне угловых дальностей  $\varphi_{1,3} = 60 \dots 180^\circ$ . Максимальная относительная погрешность вычисления  $J$  по данной формуле не превышает 3%.

Если угловая дальность  $\varphi_{1,3}$  выбирается оптимальной (перелет с оптимальной датой старта), то время перелета  $T$  связано с  $\varphi_{1,3}$  линейной зависимостью [24]

$$\varphi_{1\text{opt}} \approx \xi T_{2,4}; \quad \xi = \text{const}, \quad (4.72)$$

а динамическая характеристика этапа межпланетного перелета описывается простым соотношением

$$J_{2,4} = k_2 / T_{2,4}^3. \quad (4.73)$$

Отметим, что зависимость  $J_{2,4}(T_{2,4})$  при оптимальной угловой дальности перелета  $\varphi_{1\text{opt}}$  является огибающей семейства (4.71).

**4.4.3. Приближенный расчет энергетики перелетов Земли – Марс с оптимальной датой старта.** Рассмотрим трехэтапный перелет с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту спутника Марса. Динамическую характеристику всего перелета аппроксимируем выражением

$$J = \frac{c_1}{T_1} + \frac{k_2}{T_2^3} + \frac{c_2}{T_3}; \quad c_{1,3} = k_{1,3}F(\Omega_{\text{max}}). \quad (4.74)$$

В расчетах будем учитывать, что для аппарата с неограниченной угловой скоростью вектора тяги ( $\Omega_{\text{max}} \geq 1$ )  $c_1 = k_1$ ;  $c_3 = k_3$ , а для аппарата с неизменной ориентацией вектора тяги в пространстве ( $\Omega_{\text{max}} = 0$ )  $c_1 = 2k_1$ ,  $c_3 = 2k_3$ .

Пусть суммарная продолжительность  $T$  прямого перелета задана. Тогда  $T_3 = T - T_1 - T_2$ . Найдем минимум функционала  $J$  по  $T_1, T_2$ :

$$\min_{T_1, T_2} J = \min_{T_1, T_2} \left( \frac{c_1}{T_1} + \frac{k_2}{T_2^3} + \frac{c_3}{T - T_1 - T_2} \right). \quad (4.75)$$

Необходимые условия минимума  $J$  по  $T_1, T_2$

$$-\frac{c_1}{T_1^2} + \frac{c_3}{(T - T_1 - T_2)^2} = 0; \quad -\frac{3k_2}{T_2^4} + \frac{c_3}{(T - T_1 - T_2)^2} = 0,$$

$$\text{откуда } T_1 = \sqrt{\frac{c_1}{3k_2}} T_2^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{c_3} + \sqrt{c_1})^{-1} (-\sqrt{3k_2} + \sqrt{3k_2 + 4\sqrt{3k_2}(\sqrt{c_3} + \sqrt{c_1})T});$$

$$T_3 = T - T_2 - \sqrt{\frac{c_1}{3k_2}} T_2^2. \quad (4.76)$$

Подставляя оптимальные значения  $T_1, T_2, T_3$  в выражение (4.75), получим  $J_{\min}(T)$ . Соотношения (4.76) позволяют не только рассчитать минимальное значение функционала, но и найти оптимальное распределение времени  $T$  между участками межпланетного перелета.

Последовательность расчета характеристик межпланетного перелета такова. Сначала рассчитывают оптимальные продолжительности этапов перелета и угловую дальность  $\varphi_1$ . Затем вычисляют функционал  $J$  и его составляющие  $J_1, J_2, J_3$ . После этого определяют относительную полезную массу перелета, полагая (см. гл. 2), что масса источника энергии идеально регулируемого ЭРД выбрана оптимальной для каждого перелета с функционалом  $J$ , при этом

$$(m_{\Pi}/m_0)_{\max} = (1 - \sqrt{\alpha J/2})^2.$$

Приведем расчетные формулы к размерному виду. Если принять, что орбита старта у Земли – круговая, высотой 300 км, такую же высоту имеет конечная орбита спутника Марса, то коэффициенты  $k_1^*, k_2^*, k_3^*$  таковы:  $k_1^* = 5 \cdot 10^2 \text{ м}^2 \cdot \text{сут} \cdot \text{с}^{-3}$ ;  $k_2^* = 10^8 \text{ м}^2 \cdot \text{сут}^3 \cdot \text{с}^{-3}$ ;  $k_3^* = 10^2 \text{ м}^2 \cdot \text{сут} \cdot \text{с}^{-3}$ . При этом времена  $T_1^*, T_2^*, T_3^*$  измеряются в сутках, а функционал динамической задачи  $J^*$  будет иметь размерность  $\text{м}^2/\text{с}^3$ .

Оптимальная угловая дальность перелета согласно (4.72) связана со временем  $T_2^*$  соотношением  $\varphi_{1\text{opt}} \approx 0,75T_2^*$ , а удельная масса источника энергии  $\alpha^*$  имеет размерность  $\text{с}^3/\text{м}^2$ .

Расчеты, проведенные в диапазоне угловых дальностей перелета  $\varphi_1 = 90 \dots 180^\circ$  и удельных масс  $\alpha^* = 3, 5, 10 \text{ кг/кВт}$ , показали, что основную долю общего времени перелета (65 ... 75 %) составляет гелиоцентрический участок. Для КА с постоянной ориентацией вектора тяги ( $\Omega_{\max} = 0$ ) происходит некоторое перераспределение суммарного времени  $T$  (рис. 4.9): увеличиваются продолжительности разгона у Земли и торможения у Марса. Так же перераспределяется функционал  $J$  (рис. 4.10).

Как видно из рис. 4.11, величина полезной массы, доставляемой на орбиту искусственного спутника Марса космическим аппаратом с искусственной гравитацией, снижается, причем величина этого снижения зависит от времени перелета  $T$  и удельной массы источника энергии  $\alpha$ . Относительный проигрыш в полезной массе для  $\alpha = 10 \text{ кг/кВт}$  (тяжелый источник энергии) составляет 20 ... 60 % при перелетах продолжительностью 300 ... 150 сут. Для  $\alpha = 3 \text{ кг/кВт}$  (сравнительно легкий источник энергии) проигрыш составляет всего лишь 10 ... 20 %. Например, при  $T = 300$  сут и  $\alpha = 10 \text{ кг/кВт}$  относительная полезная масса на орбите ИСМ будет равна соответственно 0,44 и 0,35, а при  $\alpha = 3 \text{ кг/кВт}$  полезная

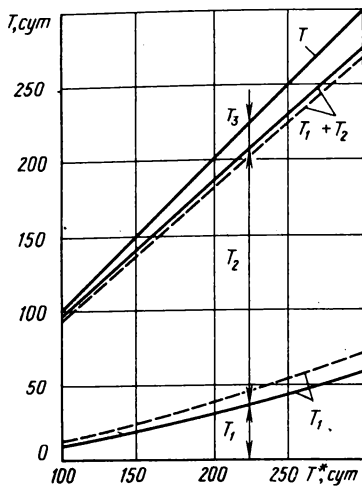


Рис. 4.9. Распределение общей продолжительности перелета с малой тягой по участкам:  
 —  $\Omega_{\max} \geq 1$ ; - - -  $\Omega_{\max} = 0$

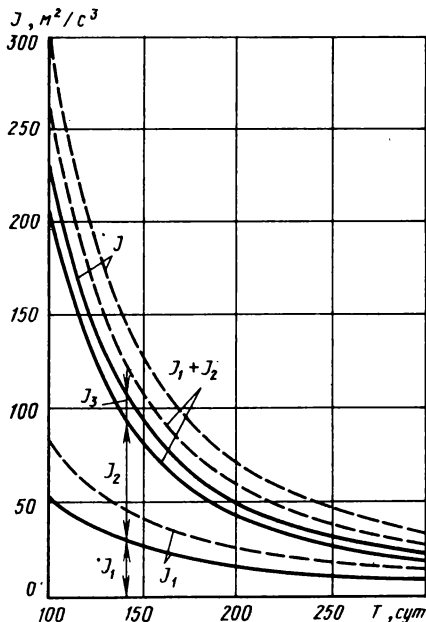


Рис. 4.10. Распределение динамической характеристики перелета с малой тягой по участкам:  
 —  $\Omega_{\max} \geq 1$ ; - - -  $\Omega_{\max} = 0$

масса равна 0,67 и 0,60. Иными словами, для "легких" двигательных систем малой тяги ограничение на управление вектором тяги менее существенно сказывается на величине полезной массы.

Для определения области преимущественного использования того или иного типа двигательной системы проведем сравнение полезной массы, доставляемой на орбиту ИСМ двигателями малой тяги, с полезной массой двухимпульсного перелета. Схема такого перелета хорошо известна [26]. Расчет проводился по методике сфер действия с использованием формул кеплеровского движения и формулы Циолковского; скорость истечения полагалась равной 4000 м/с (что примерно соответствует характеристикам современных ЖРД) и 9000 м/с (ориентировочные характеристики перспективных ядерных двигателей).

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Для сравнительно небольших значений  $\alpha = 3 \dots 5$  кг/кВт в широком диапазоне времени перелета  $T = 150 \dots 300$  сут аппараты с ЖРД уступают по полезной массе аппарату с ЭРД. ЯРД имеет преимущество перед ЭРД, если время перелета не превышает 240 ... 250 сут; существует широкий диапазон времен перелета, в котором ЯРД и ЭРД доставляют

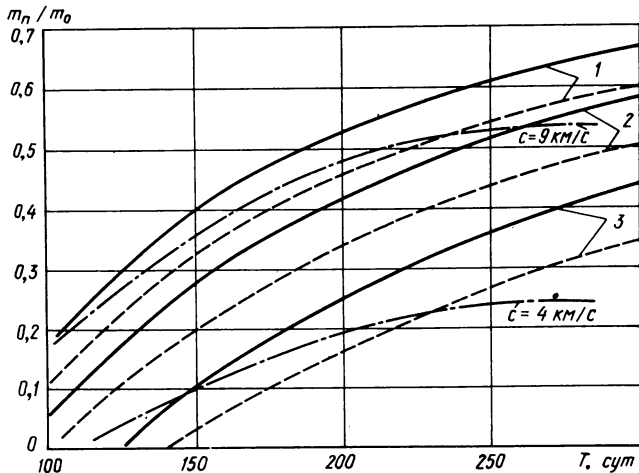


Рис. 4.11. Зависимость относительной полезной массы от общей продолжительности перелета Земля – Марс:

малая тяга (1 –  $\alpha = 3$  кг/кВт; 2 –  $\alpha = 5$  кг/кВт; 3 –  $\alpha = 10$  кг/кВт; —  $\Omega_{\max} > 1$ ; - - -  $\Omega_{\max} = 0$ ); - · - · - большая тяга (ЯРД,  $c = 9$  км/с; ЖРД,  $c = 4$  км/с)

примерно одинаковую полезную массу. В этом диапазоне выгодно, по-видимому, применять комбинированную двигательную систему, состоящую из двигателей большой и малой тяги.

2. По мере увеличения  $\alpha$  (до 10 кг/кВт) расширяется область применения ЯРД (см. рис. 4.11). Кроме того, в диапазоне времен перелета  $T = 120 \dots 220$  сут выгоднее применять ЖРД или комбинацию ЖРД с двигателем малой тяги.

**4.4.4. Расчет перелетов Земля – Марс с фиксированной угловой дальностью.** Динамическую характеристику перелета будем рассчитывать по формуле

$$J = \frac{c_1}{T_1} + \frac{k_2}{T_2^3} + pA(\varphi_1) \left[ \frac{q}{T_2} - B(\varphi_1) \right]^3 + \frac{c_3}{T_3}. \quad (4.77)$$

По-прежнему будем считать, что полное время перелета  $T = T_1 + T_2 + T_3$  задано. Найдем минимум  $J$  по параметрам  $T_1, T_2$ :

$$\min_{T_1, T_2} J = \min_{T_1, T_2} \left\{ \frac{c_1}{T_1} + \frac{k_2}{T_2^3} + p(a_0 + a_1 \varphi_1) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{q}{T_2} - b_0 + b_1(180 - \varphi_1)^{5/2} \right]^3 + \frac{c_3}{T - T_1 - T_2} \right\} \quad (4.78)$$

Необходимые условия экстремума  $J$  приводят к простым аналити-

506

ческим выражениям для определения времен движения КА на припланетных участках:

$$T_1 = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_3}} (T - T_2); \quad (4.79)$$

$$T_3 = T - T_2 - \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_3}} (T - T_2).$$

Продолжительность гелиоцентрического участка перелета  $T_2$  определяется решением алгебраического уравнения четвертой степени

$$T_2^4 + bT_2^3 + cT_2^2 + dT_2 + e = 0, \quad (4.80)$$

$$\text{где } b = \frac{6mpA(\varphi_1)B(\varphi_1)[B(\varphi_1)T + q]}{q[c_1 - 3pA(\varphi_1)B^2(\varphi_1)m]};$$

$$c = - \frac{3m[pA(\varphi_1)B^2(\varphi_1)T^2 + q^2k_2 + 4pqA(\varphi_1)B(\varphi_1)T + A(\varphi_1)q^2]}{q^2[c_1 - 3pA(\varphi_1)B^2(\varphi_1)m]};$$

$$d = \frac{6m[pA(\varphi_1)B(\varphi_1)T + qk_2 + qpA(\varphi_1)]}{q[c_1 - 3pA(\varphi_1)B^2(\varphi_1)m]}; \quad (4.81)$$

$$e = - \frac{3mT^2[k_2 + pA(\varphi_1)]}{q^2[c_1 - 3pA(\varphi_1)B^2(\varphi_1)m]};$$

$$m = \frac{c_1}{(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_3})^2}.$$

Подставляя значения  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  из соотношений (4.79), (4.80) в выражение (4.78), получим минимальное значение характеристики  $J_{\min}(T, \varphi_1)$ . Зависимость  $J_{\min}(T, \varphi_1)$  при различных  $\varphi_1$  показана на рис. 4.12. Расчеты удобнее вести, задавая время  $T^*$  в сутках; тогда коэффициенты аппроксимационных формул будут следующими:  $a_0 = 0,70$ ;  $a_1 = 1,26$ ;  $b_0 = 0,262$ ;  $b_1 = 0,261 \cdot 10^{-5}$ ;  $p = 177,6$ ;  $q = 58,1$  (значения коэффициентов  $k_1^*$ ,  $k_2^*$ ,  $k_3^*$  были даны ранее).

На рис. 4.13 показаны зависимости относительной полезной массы  $m_{\Pi}/m_0$  от продолжительности перелета при фиксированной угловой дальности  $\varphi_1 = 150^\circ$ . Разумеется, полезная масса перелетов с фиксированной угловой дальностью всюду (кроме одного значения времени перелета, при котором  $\varphi_1^0 = \varphi_{1\text{opt}}^0 = 0,75T_2^*$ ) меньше, чем для перелетов с оптимальной датой старта.

**4.4.5. Перелеты с нерегулируемой тягой.** Для реализации оптимальных перелетов с идеально регулируемым двигателем малой тяги необходимо скачком менять уровень реактивного ускорения при переходе с одного участка на другой. Связанная с этим необходимость резкого изменения тяги, скорости истечения, расхода рабочего тела делает ука-

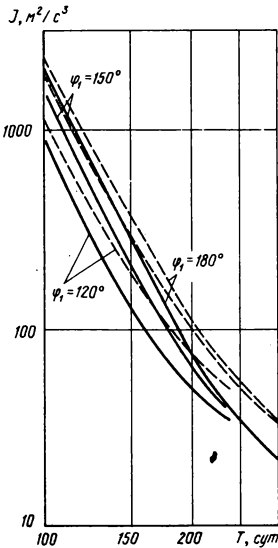


Рис. 4.12. Динамическая характеристика перелета Земля – Марс с фиксированной угловой дальностью:

—  $\Omega_{\max} > 1$ ; - - -  $\Omega_{\max} = 0$

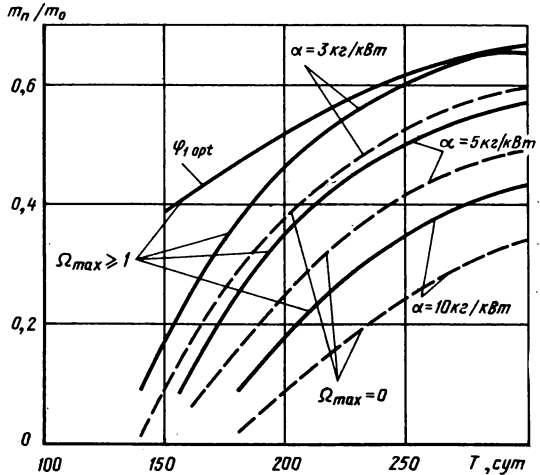


Рис. 4.13. Изменение относительной полезной массы при перелете Земля – Марс от времени;  $\varphi_1 = 150^\circ$

занные режимы практически нереализуемыми. Рассмотрим перелет Земля – Марс с нерегулируемым двигателем малой тяги. В этом случае параметром, определяющим энергетику маневра, является суммарное время работы двигателя  $T_M$ . При заданном полном времени перелета  $T$  возможен случай, когда  $T_M < T$ , что соответствует появлению пассивного участка в средней части гелиоцентрического межорбитального перехода.

Известно, что полезная масса перелетов с нерегулируемой тягой всегда меньше, чем с идеально регулируемым двигателем. Поэтому следует ожидать и увеличения относительного проигрыша в полезной массе, вызванного ограничением на ориентацию вектора тяги.

Воспользуемся известными результатами [2] решения вариационной задачи о минимуме времени работы двигателя малой тяги на гелиоцентрическом участке траектории  $T_{M2}^*$ . В результате обработки результатов серии расчетов получена зависимость, связывающая время  $T_2^*$  со временем  $T_{M2}^*$ , начальным реактивным ускорением двигателя на этом участке  $a_{02}$  и скоростью истечения  $c^*$ :

$$T_2^* = T_s^* - (T_s^* - T_K^*) \left[ \frac{1 - [(T_K^* - T_{M2}^*) / (T_K^* - T_0^*)]^2}{1 - \epsilon [(T_K^* - T_{M2}^*) / (T_K^* - T_0^*)]} \right]^{1/2}, \quad (4.82)$$

$$\text{где } T_s^* = 259 + 0,485T_0^*; T_0^* = \frac{11,8c^*}{a_{02}} [1 - \exp(-\frac{W_{\min}^*}{c^*})]; T_k^* = \frac{172,5}{\sqrt{a_{02}}} +$$

$$+ 17 - \frac{680}{c^*};$$

$$\epsilon = 0,181 - \frac{8,36}{(c^*)^{0,9}};$$

$W_{\min}^*$  — минимальная характеристическая скорость, соответствующая перелету между орбитами планет по эллипсу Гоманна. В этих формулах приняты следующие размерности величин: временные параметры даются в сутках, скорость — в км/с, ускорение — безразмерное; масштабом его измерения служит величина  $9,81 \text{ м/с}^2$ . Как указывалось в работе [2], относительная погрешность аппроксимационных формул не превышает 2 %.

В результате обработки численных результатов В.Н. Лебедевым [39] найдено приближенное аналитическое выражение для времени набора параболической скорости в центральном поле с постоянной тягой, при оптимальном регулировании угла  $\alpha$  между тягой и скоростью (см. рис. 3.6)

$$T_1 = \frac{1}{a_0} (1 - 0,8209\sqrt[4]{a_0}) [1 - \frac{1}{2c} (1 - 0,8209\sqrt[4]{a_0})]. \quad (4.83)$$

Аналогичные формулы получены для тангенциального

$$T_{1\text{танг}} = \frac{1}{a_0} (1 - 0,8082\sqrt[4]{a_0}) [1 - \frac{1}{2c} (1 - 0,8082\sqrt[4]{a_0})]. \quad (4.84)$$

и трансверсального направлений тяги

$$T_{1\text{транс}} = \frac{1}{a_0} (1 - 0,7555\sqrt[4]{a_0}) [1 - \frac{1}{2c} (1 - 0,7555\sqrt[4]{a_0})]. \quad (4.85)$$

Приведенные формулы справедливы для малых значений  $a_0$  (при  $a_0 < 10^{-2}$  относительная погрешность формул не превышает 1 %) и могут быть использованы также для расчета времени маневра торможения в поле тяготения планеты назначения, начинающегося с нулевой энергией и заканчивающегося выходом на круговую орбиту единичного радиуса. Следует помнить, что в последнем случае безразмерные параметры  $a_0$  и  $c$  вычисляются в точке с нулевой энергией; при этом точность расчета времени "обратного" маневра оказывается примерно такой же, что и "прямого". Эти формулы можно использовать и для расчета времени перелета с постоянным реактивным ускорением  $a \equiv a_0$ ; при этом формально используется "предельный" переход в формулах к  $c = \infty$ .

Зависимость (4.82) и формулы В.Н. Лебедева (4.83) ... (4.85) для расчета времени движения на планетоцентрических участках позволяют произвести стыковку трех участков перелета Земля — Марс по ускоре-

ниями и массам и получить значение суммарного времени перелета при заданных тяге двигателя  $P$  и скорости истечения  $c$ . В частности, стыковка участков по ускорениям производится так:

$$a_{0j+1} = \frac{a_{0j}}{1 - a_{0j}t/c}. \quad (4.86)$$

Здесь  $j = 1$  соответствует участку разгона у Земли;  $j = 2$  — гелиоцентрическому участку;  $j = 3$  — участку торможения у Марса. Если двигатель на гелиоцентрическом участке работает без выключения ( $T_2 = T_{M2}$ ), то  $T_2$  совпадает с  $T_K$  (4.82). По известному  $T_M = T_1 + T_{M2} + T_3$  легко теперь подсчитать относительную полезную массу КА на орбите спутника Марса, задаваясь  $a_{01}$  — начальным реактивным ускорением на околоземной орбите.

Расчет относительной полезной массы перелета был проведен для двух предельных случаев управления вектором тяги ЭРД на припланетных участках: а) неограниченная угловая скорость вектора тяги ( $\Omega_{\max} \geq 1$ ); б) нулевая угловая скорость вектора тяги,  $\Omega \equiv 0$ . При постоянных параметрах  $a_{01}$ ,  $c$  рассчитывалось время набора параболической скорости у Земли  $T_1$ , затем после пересчета  $a_{02}$  при фиксированном  $T_{M2}$  определялось  $T_2$  по формуле (4.82). После этого пересчитывалось реактивное ускорение и определялось время  $T_3$  торможения в сфере действия Марса, а затем определялось моторное время всего перелета  $T_M$  и подсчитывалась полезная масса. Варьируя параметр  $a_{01}$  при неизменных прочих параметрах перелета ( $\Omega_{\max}$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ;  $T_{M2}$ ), получаем зависимость  $\frac{m_{\Pi}}{m_0}(T)$ .

Расчеты, проведенные для широкого диапазона реактивных ускорений, показали, что времена движения на планетоцентрических участках  $T_1$  и  $T_3$  при  $\Omega \equiv 0$  и  $\vartheta_0 = \text{opt}$  увеличиваются приблизительно в 1,5-раза по сравнению со случаем, когда  $\Omega_{\max} \geq 1$ .

В ходе расчетов использовались следующие формулы:

$$T_1(a_{0j}, c) = \xi T_{\text{танг}}(a_{0j}, c), \quad (4.87)$$

где  $\xi = 1,5$  при  $\Omega \equiv 0$ ;  $\xi = 1$ , если  $\Omega$  — неограничено;  $a_{02} = \frac{a_{01}}{1 - a_{01}T_1/c}$ .

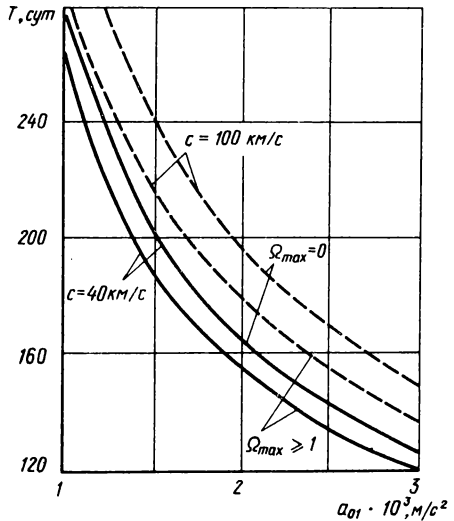
Здесь принят предельный случай перелета, когда пассивный участок отсутствует и  $T_2 = T_{M2}(a_{02}, c)$ :

$$a_{03} = \frac{a_{01}}{1 - (a_{01}/c)(T_1 + T_2)};$$

$$T_3(a_{03}, c) = \xi T_{3\text{танг}}(a_{03}, c); \quad (4.88)$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3; m_{\Pi}/m_0 = f(T, \Omega_{\max}, a_{01}, \alpha c).$$

Рис. 4.14. Зависимость общего времени перелета Земля – Марс с нерегулируемой тягой от начального реактивного ускорения ( $T_2 = T_{M2}$ )



Результаты расчетов показаны на рис. 4.14, 4.15.

Приведенный алгоритм расчета позволяет достаточно просто оценить предельный проигрыш в полезной массе, обусловленный ограничениями на управление вектором тяги.

Расчеты показали, что для аппаратов с ограниченной угловой скоростью вектора тяги характерно увеличение продолжительности перелета при равном значении начального реактивного ускорения  $a_{01}$  (см. рис. 4.14). Относительный проигрыш в полезной массе оказался несколько большим, чем для идеально регулируемого двигателя малой тяги: при  $T = 200 \dots 300$  сут,  $\alpha = 3 \dots 5$  кг/кВт до 30 ... 35 %, при  $\alpha = 10$  кг/кВт – до 50 ... 70 %. Такое

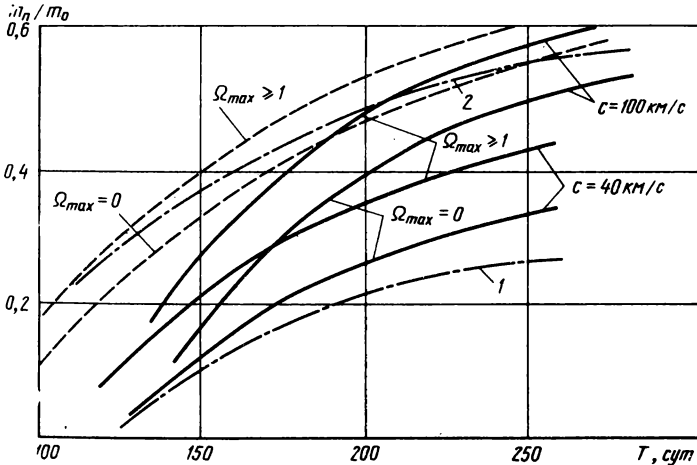


Рис. 4.15. Зависимость относительной полезной массы от общей продолжительности перелета Земля – Марс ( $\alpha = 3$  кг/кВт):  
 --- идеально регулируемый двигатель малой тяги; — двигатель с нерегулируемой тягой; - · - · - двигатель большой тяги; 1 – ЖРД,  $c = 4$  км/с; 2 – ЯРД,  $c = 9$  км/с

различие можно объяснить, видимо, тем, что довольно велики энергетические потери на припланетных участках и, чтобы снизить эти потери, приходится увеличивать уровень реактивного ускорения в среднем на 25 ... 30 %, что увеличивает расход рабочего тела.

На рис. 4.15 для сравнения приведены результаты расчетов перелетов с двигателями большой тяги. Видно, что для быстрых перелетов ( $T < 120$  сут) не выгодно применять двигатели малой тяги. При  $T > 150$  сут аппараты с малой тягой доставляют большую полезную массу, чем аппараты с ЖРД, но уступают ЯРД. Наконец, выигрыш в полезной массе по сравнению с ЯРД становится заметным при  $T > 210$  сут (для КА без ограничений на ориентацию вектора тяги) и при  $T > 300$  сут (для КА с искусственной гравитацией). Для аппаратов с "тяжелыми" источниками энергии ( $\alpha = 10$  кг/кВт) эти границы отодвигаются в сторону больших времен перелетов.

Наличие ограничений на управление вектором тяги, которое особенно наглядно проявляется в различных схемах аппаратов с искусственной гравитацией, существенно ухудшает энергетические возможности аппаратов с малой тягой. Установленный факт может послужить основанием для замены непрерывно работающих двигателей малой тяги двигателями кратковременного действия (ЖРД или ЯРД), или комбинированной двигательной системой. Разумеется, оценки, приведенные выше, следует рассматривать как предельные, соответствующие такой схеме перелета, когда полностью отсутствует управление ориентацией вращающегося КА. В реальных проектах пилотируемых КА с искусственной гравитацией наличие некоторой возможности управления вектором тяги позволит уменьшить проигрыш в полезной массе. Однако снижение полезной массы может оказаться заметным, что повлечет за собой изменение сложившихся представлений об эффективности двигательных установок малой тяги при длительных космических перелетах.

## КОММЕНТАРИИ

1. Математическая постановка задачи оптимального управления аппаратом при ограниченной угловой скорости поворота вектора тяги впервые приведена в работе [77]. Авторами сформулированы необходимые условия оптимальности, проведен качественный анализ особых режимов управления, показано, что оптимальные траектории состоят из последовательности дуг с максимальной угловой скоростью поворота вектора тяги и вырожденных дуг, определяемых решением более простой задачи оптимального управления при отсутствии ограничений на ориентацию вектора тяги, причем в точках перехода с регулярной на особую экстремаль и обратно угловая скорость вектора тяги меняется скачком. По сути дела, происходит сужение класса допустимых траекторий и управлений. Усложнение вычислений при решении задачи в общей постановке приводит к существенному возрастанию роли приближенных методов решения подобных задач.

2. Задача оптимального управления траекторным и угловым движениями КА

при осуществлении встречи на орбите решена P. Sagiroy. Оптимальная структура управления в общем случае включает в себя два регулярных участка движения с максимальной угловой скоростью разворота вектора тяги (в начале и в конце траектории), разделенных участком особого управления, на котором траектория соответствует решению задачи без учета углового движения.

Критериями оптимальности были расход топлива либо время выполнения маневра встречи; угол ориентации продольной оси аппарата (и направленного вдоль нее вектора тяги) фиксировался в начале и в конце движения. В работе сформулированы общие условия оптимальности для различных моделей гравитационных полей; показано, что на регулярных участках угловая скорость достигает своего предельного значения:  $|\dot{\Omega}| < \Omega_{\max}$ , а на участках особого управления реализуется известный закон дробно-линейного тангенса угла тангажа. Аналитические решения, полученные в этой работе, соответствуют модели "бессилового" поля.

3. В работе [12] сформулированы необходимые условия оптимальности, исследованы свойства особого управления угловой скоростью поворота вектора тяги в задаче достижения параболической скорости. Отсутствие второго регулярного участка в этой задаче определяется лишь записью граничных условий: правый конец траектории при наборе параболической скорости, в сущности, свободен.

4. Различные аспекты совместной оптимизации траекторного и углового движений аппаратов с двигателями малой тяги исследуются в работе [22].

5. Принципиальная схема космического аппарата с постоянной ориентацией оси вращения в пространстве (так называемая схема "гироскоп") впервые описана в работе [20]. Особенности движения аппаратов под действием малого ускорения постоянного направления отмечались В.В. Белецким [4] при анализе траекторий перелетов с солнечным парусом.

## ГЛАВА 5

### ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ И ПАРАМЕТРОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С КОМБИНИРОВАННОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

#### 5.1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОЙ СИСТЕМОЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВИГАТЕЛЕЙ БОЛЬШОЙ И МАЛОЙ ТЯГИ

5.1.1. Постановка задачи и критерии оптимальности. В ряде работ обсуждается возможность использования двигательной системы, состоящей из двигателя ограниченной скорости истечения (большой тяговооруженности) и двигателя ограниченной мощности (малой тяги). В области параметров маневра, где оба двигателя по отдельности доставляют примерно одинаковую полезную нагрузку, применение комбинированной двигательной системы (КДС) может быть более выгодным.

Рассмотрим работу КДС в последовательном режиме, когда в каждой точке траектории может работать только один из двигателей. Введем релейную функцию  $\delta(t)$ , которая равна единице на участке включения двигателя большой тяговооруженности и нулю — на участке включения идеально регулируемого двигателя малой тяги. Масса последнего может

выбираться оптимальной для данного маневра или задаваться заранее, а ограничение на реактивное ускорение отсутствует.

Предполагается, что масса двигателя большой тяги  $m_{д1}$  пренебрежимо мала, а масса двигателя малой тяги  $m_{д2}$  пропорциональна максимальной мощности источника энергии  $m_{д2} = \alpha N_{\max}$ .

Тогда полная масса аппарата с КДС

$$m = m_{\text{п}} + m_{\text{Т1}} + m_{\text{Т2}} + m_{\text{д2}}, \quad (5.1)$$

где  $m_{\text{п}}$  — полезная масса;  $m_{\text{Т1}}$ ,  $m_{\text{Т2}}$  — массы рабочего тела для двигателей большой и малой тяги соответственно.

Следуя работе [23], введем следующие параметры:

$$K(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \frac{a_1 \delta}{c_1} dt\right); \quad (5.2)$$

$$L(t) = -\sqrt{\frac{\alpha}{2} \int_0^t a_2^2 (1 - \delta) \exp\left(-\int_0^t \frac{a_1 \delta}{c_1} dt\right) dt}.$$

Здесь  $a_1$ ,  $a_2$  — ускорения, развиваемые двигателями большой и малой тяги;  $c_1$  — постоянная скорость истечения реактивной струи двигателя большой тяги;  $\alpha$  — удельная масса источника энергии.

Ускорение  $a_1$  удовлетворяет следующему ограничению:  $0 \leq a_1 \leq A$ , где  $A$  — достаточно большая величина. С помощью переменных  $K$  и  $L$  относительная полезная масса (критерий оптимальности перелета) выражается следующим образом:

$$\frac{m_{\text{п}}}{m_0} = K_1^2 \left(1 + \frac{L_1^2 m_0}{m_{\text{д2}}}\right)^{-1} - \frac{m_{\text{д2}}}{m_0}. \quad (5.3)$$

Здесь  $K_1$  и  $L_1$  — значения функций  $K(t)$  и  $L(t)$  в конечный момент времени  $t = T$ . Максимум выражения (5.2) по параметру  $m_{\text{д2}}/m_0$  достигается при

$$m_{\text{д2}}/m_0 = -(K_1 + L_1)L_1. \quad (5.4)$$

При этом

$$(m_{\text{п}}/m_0)_{\max} = (K_1 + L_1)^2. \quad (5.5)$$

Таким образом, при оптимальной массе двигателя малой тяги задача о максимуме полезной массы сводится к задаче максимума суммы переменных  $K(T)$  и  $L(T)$ . При произвольной заданной массе двигателя  $m_{\text{д2}}$  критерий оптимальности определяется формулой (5.3).

Рассматриваемая вариационная задача представляет собой задачу Майера о максимуме функции конечных значений переменных  $K$  и  $L$  для системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V};$$

$$\mathbf{V} = [a_1 \delta + a_2(1 - \delta)]\mathbf{e} + \mathbf{g};$$

$$\dot{\mathbf{K}} = - \frac{1}{2} \frac{K a_1 \delta}{c_1}; \quad (5.6)$$

$$\dot{L} = \frac{\alpha K^2 a_2^2 (1 - \delta)}{4L}.$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор КА в инерциальной системе отсчета;  $\mathbf{V}$  — вектор скорости;  $\mathbf{g}$  — вектор гравитационного ускорения;  $\mathbf{e}$  — единичный вектор направления тяги, общий для двигателей большой и малой тяги, на управление которым не накладываются ограничения.

Граничные условия системы (5.6) запишем в следующем виде:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0; \quad \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_1;$$

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0; \quad \mathbf{V}(T) = \mathbf{V}_1;$$

$$K(0) = 1; \quad \Phi(K_1, L_1) = \min; \quad (5.7)$$

$$L(0) = 0,$$

причем, для двигателей оптимальной массы

$$\Phi(K_1, L_1) = -(K_1 + L_1); \quad (5.8)$$

для двигателей произвольной массы

$$\Phi(K_1, L_1) = -K_1^2 \left(1 + \frac{L_1^2 m_0}{m_{д2}}\right)^{-1} - \frac{m_{д2}}{m_0}. \quad (5.9)$$

Время перелета  $T$  задано.

**5.1.2. Структура оптимального режима.** Для решения вариационной задачи введем функцию  $\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}, K, L)$  и составим функции  $R$  и  $G$ :

$$R = -\varphi_K \frac{K a_1 \delta}{c_1} + \varphi_L \frac{\alpha K^2 a_2^2 (1 - \delta)}{4L} + \varphi_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{V} + \varphi_{\mathbf{V}} \left\{ [a_1 \delta + a_2(1 - \delta)]\mathbf{e} + \mathbf{g} \right\} + \varphi_t; \quad (5.10)$$

$$G = \Phi + \varphi(T, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1, K_1, L_1) -$$

$$- \varphi(0, \mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0, K_0, L_0).$$

Следуя формализму Лагранжа, обозначим через  $\psi_r, \psi_V, \psi_K, \psi_L$  частные производные функции  $\varphi$  в точках экстремали. Необходимые условия максимума  $R$  по фазовым координатам выражаются в форме

уравнений сопряженной системы  $\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0$ ; здесь  $x = (\mathbf{r}, \mathbf{V}, K, L)^T$ :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_K &= -\psi_K \frac{a_1 \delta}{2c_1} - \psi_L \frac{\alpha K a_2^2 (1 - \delta)}{2L}; \\ \dot{\psi}_L &= \psi_L \frac{\alpha K^2 a_2^2 (1 - \delta)}{4L^2};\end{aligned}\tag{5.11}$$

$$\dot{\psi}_r = -\frac{\partial}{\partial r}(\psi_V, g);$$

$$\dot{\psi}_V = -\dot{\psi}_r.$$

Уравнения для переменных  $\psi_K$  и  $\psi_L$  интегрируются независимо от остальных уравнений [23]:

$$\psi_L = \lambda_1 L; \quad \psi_K K = -\lambda_1 L^2 + \lambda_2,\tag{5.12}$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — произвольные постоянные.

Если критерий оптимальности  $\Phi$  задается формулой (5.8) (двигатели оптимальной массы), то из необходимых условий минимума  $G$  по фазовым координатам при  $t = T$  получим

$$\psi_L(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial L_1} = 1;\tag{5.13}$$

$$\psi_K(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial K_1} = 1.$$

Если же  $\Phi$  определяется формулой (5.9), то

$$\psi_L(T) = -\frac{2K_1^2 L_1 m_0}{m_{д2}} \left(1 + \frac{L_1^2 m_0}{m_{д2}}\right)^{-2};\tag{5.14}$$

$$\psi_K(T) = 2K_1 \left(1 + \frac{L_1^2 m_0}{m_{д2}}\right)^{-1}.$$

С учетом граничных условий (5.13), (5.14) находим значения постоянных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

для двигателей оптимальной массы

$$\lambda_1 = 1/L_1; \quad \lambda_2 = K_1 + L_1;\tag{5.15}$$

для двигателей произвольной массы

$$\lambda_1 = -\frac{2K_1^2 m_0}{m_{д2}} \left(1 + \frac{L_1^2 m_0}{m_{д2}}\right)^{-2};\tag{5.16}$$

$$\lambda_2 = 2K_1^2 \left(1 + \frac{L_1^2 m_0}{m_{д2}}\right)^{-2}.$$

Получение оптимальных управлений для  $e, a_2$  в неявном виде с учетом решений (5.12) ... (5.16) не вызывает затруднений

$$\bar{e} = \psi_V / \psi_V; \bar{a}_2 = -2\psi_V / (\lambda_1 K^2). \quad (5.17)$$

Запишем выражение для функции  $H$  с учетом (5.17) и (5.12):

$$H = (D_1 a_1 + \frac{\psi_V^2}{\lambda_1 K^2}) \delta + \psi_r \cdot V + \psi_V \cdot g + \frac{\psi_V^2}{\lambda_1 K^2}, \quad (5.18)$$

$$\text{где } D_1 = \frac{\lambda_1 L^2 - \lambda_2}{2c_1} + \psi_V. \quad (5.19)$$

Управления  $a_1$  и  $\delta$  входят в функцию  $H$  линейно, причем по условию  $\delta(t) = 0$  или  $1$ ;  $0 \leq a_1 \leq A < \infty$ .

Выражение  $D_1$  назовем функцией переключения для управления  $a_1$ . Выражение в круглых скобках в (5.18) обозначим  $D$  и назовем функцией переключения для релейного управления  $\delta(t)$ . Для обеспечения  $\max H$  необходимо:

$a_1, \delta$

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= A, \text{ если } D_1 > 0; \bar{\delta} = 1, \text{ если } D > 0; \\ \bar{a}_1 &= 0; \text{ если } D_1 < 0; \bar{\delta} = 0, \text{ если } D < 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Однако из (5.18) видно, что всегда  $D < D_1 \bar{a}_1$ , так как  $\lambda_1 < 0$ . Поэтому, если  $\delta = 1$ , то заведомо  $a_1 = A$ , если  $a_1 = 0$ , то и  $\delta = 0$ , т.е. моменты включения и выключения двигателя большой тяги определяются поведением функции переключения  $D$  (рис. 5.1).

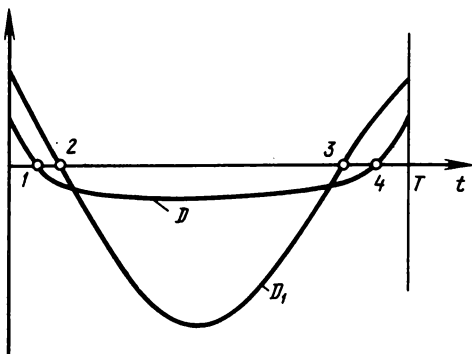
Определим структуру оптимального режима, т.е. последовательность включения двигателей большой и малой тяги.

Обозначим параметры системы после выключения двигателя большой тяги в окрестности точки перехода через нуль функции переключения  $D$  индексом "+", а индексом "-" обозначим параметры до его выключения. В силу непрерывности функции Гамильтона,  $H^- = H^+$ , тогда

$$\begin{aligned} D_- \delta_- - \frac{\psi_{V-}^2}{\lambda_1 K_-^2} + \psi_{r-} \cdot V_- + \frac{D_1}{D_1} & \\ + \psi_{V-} \cdot g_- = D_+ \delta_+ - \frac{\psi_{V+}^2}{\lambda_1 K_+^2} + & \\ + \psi_{r+} (V_- + \Delta V) + \psi_{V+} \cdot g_+ & \end{aligned} \quad (5.21)$$

Рис. 5.1. Функции переключения  $D$  и  $D_1$ :

- 1 - точка выключения  $\delta(t)$ ;
- 2 - точка выключения  $a_1(t)$ ;
- 3 - точка включения  $a_1(t)$ ;
- 4 - точка включения  $\delta(t)$



Здесь  $\Delta V$  – приращение скорости, сообщенное аппарату двигателем большой тяги,  $a_1 = A$ :

$$D_- = - \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1 L^2}{2c_1} - \psi_{V_-} \right) A + \frac{\psi_{V_-}^2}{\lambda_1 K_-^2};$$

$$D_+ = - \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1 L^2}{2c_1} - \psi_{V_+} \right) A + \frac{\psi_{V_+}^2}{\lambda_1 K_+^2}; \quad (5.22)$$

$$\delta_- = 1; \delta_+ = 0; L = L_- = L_+ = \text{const.}$$

В момент окончания работы двигателя большой тяги  $D_+ \delta_+ = 0$ . Поэтому из (5.21) следует

$$[A \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1 L^2}{2c_1} + \psi_{V_+} \right) + \frac{\psi_{V_+}^2}{\lambda_1 K_+^2}] - A(\psi_{V_-} - \psi_{V_+}) + \psi_{r_-} \cdot V_- +$$

$$+ \psi_{V_-} \cdot g_- = \psi_{r_+} (V_- + \Delta V) + \psi_{V_+} \cdot g_+. \quad (5.23)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой функцию переключения  $D_+$ , которая обращается в нуль в момент выключения двигателя большой тяги. Таким образом, для этого момента выполняется равенство

$$-A(\psi_{V_-} - \psi_{V_+}) + \psi_{r_-} \cdot V_- - \psi_{r_+} (V_- + \Delta V) +$$

$$+ \psi_{V_-} \cdot g_- - \psi_{V_+} \cdot g_+ = 0. \quad (5.24)$$

Допустим, что промежутки времени, на которых работает двигатель большой тяги, малы по сравнению с общим временем выполнения маневра  $T$ . При достаточно большом  $A$  вектор положения  $r$  на этих участках остается постоянным, поэтому в точке переключения  $\psi_{V_-} = \psi_{V_+} = \psi_V$ ;  $\psi_{r_-} = \psi_{r_+} = \psi_r$ , откуда  $\psi_r \cdot \Delta V = 0$ . Поскольку оптимальный вектор  $\Delta V$  коллинеарен  $\psi_V$ , то можно записать

$$\psi_r \cdot \psi_V = 0, \text{ или } \psi_V \cdot \dot{\psi}_V = 0. \quad (5.25)$$

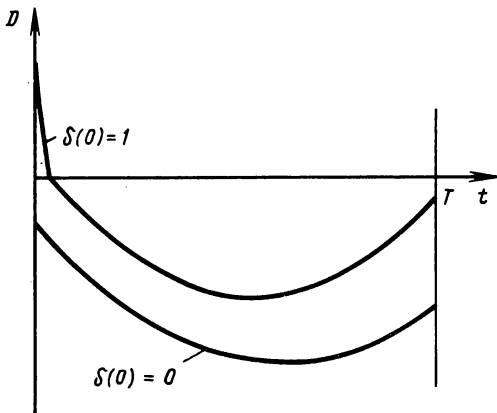
Найдем полную производную функции  $D$  по времени при  $\delta = 1$ :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2(\psi_V \cdot \dot{\psi}_V)}{\lambda_1 \cdot K^2} + A \left[ \frac{(\psi_V \cdot \dot{\psi}_V)}{\psi_V} + \frac{\psi_V^2}{\lambda_1 c_1 K^2} \right]. \quad (5.26)$$

При достаточно большом  $A$  имеет место скачок функции переключения от некоторого положительного значения до нуля. Следовательно, такой участок может быть расположен только в начале траектории. Двигатель большой тяги, таким образом, включается только на начальном участке траектории или не включается вообще. Характер изменения  $D(t)$  в оптимальном режиме показан на рис. 5.2.

5.1.3. Условие оптимальности начального приращения скорости.

Рис. 5.2. Характер изменения функции переключения  $D$  при оптимальном управлении комбинированной системой



Вклад двигателя большой тяги учитывается изменением начального условия по скорости:

$$V(0) = V_0 + \Delta V_0. \quad (5.27)$$

Введем обозначение

$$a_2 = 2\psi_V / (\lambda_1 \alpha K_1^2). \quad (5.28)$$

В дальнейшем полагаем в уравнениях системы (5.6)  $\delta = 0$ . Тогда она вместе с уравнением оптимального регулирования ускорения  $a_2(t)$  запишется в виде

$$\dot{r} = V; \quad \dot{V} = a_2 + g; \quad \ddot{a}_2 = \frac{\partial}{\partial r}(a_2 \cdot g). \quad (5.29)$$

Система (5.29) решается с измененными граничными условиями по скорости (5.27). Результатом решения будет программа измерения реактивного ускорения  $a_2(t)$  и приращение скорости  $\Delta V_0$ , которое должно быть выбрано оптимальным.

Рассмотрим функцию переключения  $D_1$  (5.19). Если  $D_1(0) \leq 0$ , то  $\delta = 0$  заведомо, и двигатель большой тяги для выполнения данного маневра не нужен. Полагая  $K = K_1 \equiv 1$ ,  $L(0) = 0$ , получим условие неоптимальности применения двигателя большой тяги в форме неравенства

$$\frac{\lambda_2}{2c_1} - \psi_V(0) = \frac{\lambda_2}{2c_1} - \frac{\lambda_1 \alpha}{2} a_2(0) \leq 0, \quad (5.30)$$

куда следует подставить  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в зависимости от типа двигателя малой тяги согласно (5.15), (5.16), учитывая, что  $K_1 = 1$ . Соотношение (5.30) позволяет построить границы области применимости комбинированной двигательной системы в координатах параметров  $(\alpha - c_1)$ , если известна величина функционала  $L_1$  перелета с малой тягой.

Пусть теперь функция  $D_1$  обращается в нуль после того, как двигатель большой тяги сообщил аппарату приращение скорости  $\Delta V_0$ . Тогда при достаточно большом  $A$  можно положить:  $K(0) = K_1 < 1$ ,  $L(0) = 0$ . Условие оптимальности импульса скорости принимает вид

$$\frac{\lambda_2}{c_1} - \lambda_1 \alpha K_1^2 a_2(0) = 0. \quad (5.31)$$

Подставляя  $\lambda_1, \lambda_2$  из (5.15) для двигателей оптимальной массы получим

$$K_1 + L_1 + \frac{\alpha c_1 K_1^2}{L_1} a_2(0) = 0. \quad (5.32)$$

Для двигателей произвольной массы условие оптимальности начального импульса скорости имеет вид

$$m_{д2}/m_0 - \alpha c_1 K_1^2 a_2(0) = 0, \quad (5.33)$$

причем согласно (5.28) направление вектора  $\Delta V_0$  совпадает с  $a_2(0)$ .

**5.1.4. Аналитическое решение задачи оптимизации.** Рассмотрим задачу набора заданной скорости при отсутствии внешних сил ( $g \equiv 0$ , модель так называемого "бессилового" поля). Эта задача часто используется как модельная при анализе разгона до параболической скорости в центральном поле.

Оптимальная траектория аппарата с комбинированной двигательной системой, выполняющего указанный маневр, описывается системой уравнений

$$\dot{r} = V; \quad \dot{V} = \bar{a}_2; \quad \ddot{a}_2 = 0, \quad (5.34)$$

где  $r(0) = r_0$ ;  $r(T)$  — не фиксировано;  $V(0) = V_0 + \Delta V_0$ ;  $V(T) = V_1$ .

Начальный участок работы двигателя большой тяговооруженности замещается точкой мгновенного изменения скорости на величину  $\Delta V_0$ .

Согласно (5.34) оптимальная программа реактивного ускорения имеет вид  $a_2 = c_1 + c_2 t$ , при этом, поскольку  $r(T)$  не фиксирован,  $\bar{a}_2(T) = 0$ , т.е.  $c_2 = 0$ . Окончательно  $\bar{a}_2 = a = \text{const}$ .

Для данного случая параметры  $K_1$  и  $L_1$ , характеризующие расход рабочего тела двигателями большой и малой тяги, определяются выражениями (см. 5.2)

$$K_1 = \sqrt{\exp(-\Delta V_0/c_1)}; \quad (5.35)$$

$$L_1 = -\sqrt{\frac{\alpha T}{2} \int_0^T K_1^2 a^2 dt} = -a K_1 \sqrt{\frac{\alpha T}{2}}. \quad (5.36)$$

Условие оптимальности начального импульса скорости  $\Delta V_0$  для двигателя оптимальной массы имеет вид

$$K_1 + L_1 + \frac{\alpha c_1 K_1^2}{L_1} a = 0. \quad (5.37)$$

Подставляя в (5.37) отношение  $L_1/K_1$  из (5.36) и разрешая полученное соотношение относительно  $a$ , получим

$$a = \frac{2}{\alpha T} \left( \sqrt{\frac{\alpha T}{2}} - c_1 \alpha \right). \quad (5.38)$$

Поскольку  $\Delta V_0 = V_1 - V_0 - aT$ , то

$$\Delta v_{0 \text{ opt}} = \frac{\Delta V_{0 \text{ opt}}}{c_1} = \bar{W} + 2 - 2\sqrt{\bar{h}}, \quad (5.39)$$

$$\text{где } \bar{W} = \frac{V_1 - V_0}{c_1}; \quad h = \frac{T}{2ac_1^2}. \quad (5.40)$$

Формула (5.39) определяет:  $0 \leq \Delta V_0 \leq V_1 - V_0$ . Если значение  $\Delta V_{0 \text{ opt}}$  не лежит в указанных границах, то в качестве оптимального значения следует принимать граничное. Параметр  $\bar{W} = (V_1 - V_0)/c_1$  в данной задаче является аналогом характеристической скорости перелета.

Запишем общее выражение для стартовой массы аппарата, отнесенной к полезной массе в следующей форме (см. (5.3)):

$$\frac{m_0}{m_{\Pi}} = \frac{1 + \beta}{K_1^2 [1 - (L_1/K_1)^2 (1 + 1/\beta)]}, \quad (5.41)$$

где  $\beta = m_{\text{д2}}/m_{\Pi}$  — относительная масса двигателя малой тяги.

Значение  $\beta = \bar{\beta}$ , при котором величина  $m_0/m_{\Pi}$  достигает минимума, определяется соотношением (5.4):

$$\bar{\beta} = - \frac{L_1}{K_1 + L_1}; \quad (m_0/m_{\Pi})_{\text{min}} = (K_1 + L_1)^{-2}.$$

Окончательное выражение для относительной стартовой массы аппарата с учетом соотношений (5.35), (5.36), (5.40) принимает вид

$$\left(\frac{m_0}{m_{\Pi}}\right)_{\text{min}} = \left(1 - \frac{\bar{W} - \Delta v_{0 \text{ opt}}}{2\sqrt{\bar{h}}}\right)^{-2} \exp \Delta v_{0 \text{ opt}}. \quad (5.42)$$

Оптимальная масса двигателя малой тяги определится формулой

$$\left(\frac{m_{\text{д2}}}{m_{\Pi}}\right)_{\text{opt}} = \bar{\beta} = \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{h}}} - \frac{1}{h}\right) \left(1 - \frac{\bar{W} - \Delta v_{0 \text{ opt}}}{2\sqrt{\bar{h}}}\right)^{-2}. \quad (5.43)$$

Рассмотрим теперь случай произвольной массы двигателя малой тяги. В этом случае условие оптимальности начального импульса скорости  $\Delta V'_0$  (5.33) принимает вид

$$\frac{m_{\text{д2}}}{m_{\Pi}} = \beta = \frac{m_0}{m_{\Pi}} \alpha c_1 K_1^2 a. \quad (5.44)$$

Используя соотношение (5.41) и подставляя туда отношение  $L_1/K_1$  из (5.36), перепишем уравнение (5.44) в виде

$$\beta = \frac{(1 + \beta)(\bar{W} - \Delta v'_{0 \text{ opt}})/2h}{1 - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\bar{W} - \Delta v'_{0 \text{ opt}}}{2\sqrt{\bar{h}}}\right)^2}, \quad (5.45)$$

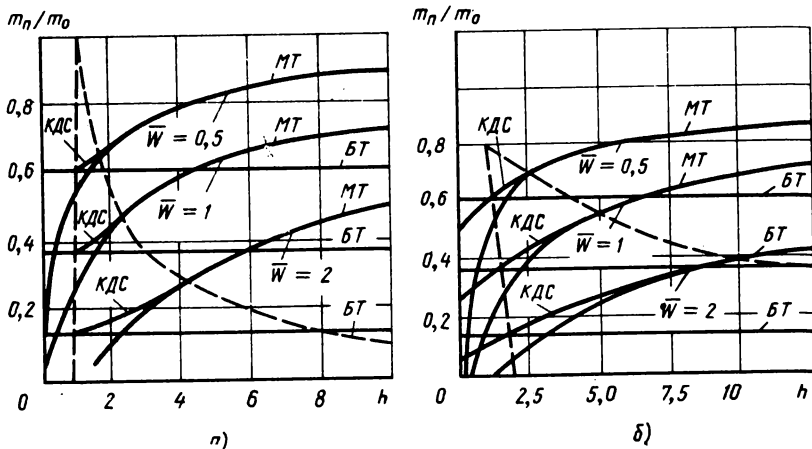


Рис. 5.3. Относительная полезная масса перелетов с двигателями малой тяги (МТ), большой тяги (БТ) и комбинированной двигательной системой (КДС) при оптимальной массе двигателя малой тяги (а) и при  $m_{д}/m_0 = 0,1$  (б)

откуда определим значение  $\Delta v'_{0opt}$ :

$$\Delta v'_{0opt} = \frac{\Delta V'_{0opt}}{c_1} = \bar{W} + 1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta h}{1 + \beta}} \neq \Delta v_{0opt}. \quad (5.46)$$

В результате получим выражение для относительной стартовой массы аппарата как функции параметров  $\Delta v'_0$ ,  $\bar{W}$ ,  $h$ ,  $\beta$ :

$$\frac{m_0}{m_{\Pi}} = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \left( \frac{\bar{W} - \Delta v'_{0opt}}{2\sqrt{h}} \right)^2 \right]^{-1} \times \\ \times (1 + \beta) \exp \Delta v'_{0opt}. \quad (5.47)$$

Зависимости, рассчитанные по формулам (5.42) и (5.47), показаны на рис. 5.3. Пунктиром на рисунках выделены области, в которых комбинация двигателей позволяет увеличить полезную массу.

## 5.2. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КОМБИНИРОВАННОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, УНИВЕРСАЛЬНОЙ ДЛЯ ДИАПАЗОНА МАНЕВРОВ

**5.2.1. Постановка задачи универсализации.** При выборе оптимальной массы двигательной системы для каждого отдельного маневра необходимо создавать большое число разнотипных двигателей, что нецелесообразно. Поэтому возникает задача выбора параметров комбинированной двигательной системы, универсальной для диапазона маневров. Задача универсализации технической системы в терминах теории оптимальных

покрытий [51] формулируется следующим образом: пусть задан некоторый диапазон маневров  $Z$ , каждому маневру  $z \in Z$  соответствует пара  $(\bar{W}, T)$ , определяющая энергетику и время выполнения маневра. Тогда совокупность параметров  $\{p_i\}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), характеризующих систему в целом, оптимальна для диапазона  $Z$ , если:

а) система с параметрами  $\{p_i\}$  может выполнить любой маневр  $z \in Z$ ;

б) максимальная степень неоптимальности системы  $F(\{p_i\})$  минимальна

$$C(\{p_i\})_{\text{opt}} = \min F(\{p_i\});$$

$$F(\{p_i\}) = \max_{z \in Z} \min_i \rho(z, p_i); p_i \in \{p_i\}. \quad (5.48)$$

Степень неоптимальности  $\rho(z, p_i)$  определяется соотношением

$$\rho(z, p_i) = \Phi(z, p_i) / \min_{p_i} \Phi(z, p_i), \quad (5.49)$$

где  $\Phi$  – критерий оптимальности единичного маневра  $z$ .

Алгоритм решения задачи универсализации сводится к отысканию оптимального режима управления для каждого маневра  $z \in Z$  и анализу функции  $\rho(z, p_i)$  с целью определения величины  $C$  и соответствующей ей оптимальной системы  $\{p_i\}_{\text{opt}}$ . В другой постановке задается предельно допустимая величина  $C_*$  и выбирается система из минимального числа элементов, покрывающая весь диапазон  $Z$  со степенью неоптимальности, не превышающей  $C_*$ .

Задачу универсализации комбинированной двигательной системы сформулируем следующим образом: для заданного диапазона маневров  $Z$  необходимо выбрать совокупность двигателей  $\{m_{д2i}\}_{\text{opt}} (i = \overline{1, n})$ , обеспечивающую выполнение любого маневра  $z$  и минимизирующую максимальную степень неоптимальности  $C = \min_z \max_i \rho(z, m_{д2i})$ , либо

выбрать минимальное число разнотипных двигателей, обслуживающих диапазон маневров  $Z$  со степенью неоптимальности, не превышающей  $C_*$ .

Степень неоптимальности  $\rho(z, m_{д2i})$  зададим отношением

$$\rho = m_0(z, m_{д2i}) / m_{\text{omin}}(z), \quad (5.50)$$

где  $m_0$  – стартовая масса КА с двигателем  $m_{д2i}$ , а  $m_{\text{omin}}$  – стартовая масса аппарата с двигателем, оптимальным для маневра  $z$ .

Будем характеризовать выполняемый маневр  $z \in Z$  с полезной массой  $m_{\text{п}}$  двумя параметрами: аналогом характеристической скорости  $\bar{W}$  и безразмерным параметром  $h$  (аналогом времени выполнения маневра).

**5.2.3. Анализ степени оптимальности системы.** Получим соотношение, определяющее степень неоптимальности  $\rho$  с учетом (5.42), (5.47):

$$\rho(h, \bar{W}, \beta) = \frac{m_0(h, \bar{W}, \beta)}{m_{0\min}(h, \bar{W})} = \frac{(1 + \beta) \left(1 - \frac{\bar{W} - \Delta v_{0\text{opt}}}{2\sqrt{h}}\right)^2 \exp(\Delta v'_{0\text{opt}} - \Delta v_{0\text{opt}})}{1 - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\bar{W} - \Delta v'_{0\text{opt}}}{2\sqrt{h}}\right)^2}. \quad (5.51)$$

Покажем, что из уравнения (5.51) можно получить функцию  $\rho'$ , соответствующую случаю, когда используется только двигатель малой тяги. Если положить  $\Delta V'_{0\text{opt}} = \Delta V_{0\text{opt}} = 0$  и ввести обозначение

$$J' = \frac{\alpha}{2} \int_0^T a^2 dt = \left(\frac{V_1 - V_0}{2c_1}\right)^2 \frac{1}{h}, \quad (5.52)$$

то уравнение (5.51) примет вид

$$\rho'(J', \beta) = \frac{(1 + \beta)(1 - \sqrt{J'})^2}{1 - J'(1 + 1/\beta)}. \quad (5.53)$$

Анализ унимодальной функции  $\rho'(J, \beta)$  подробно проведен в работе [8]. Используя методы теории покрытий [51], можно получить оптимальную относительную массу двигателя малой тяги  $\bar{\beta}'$  для заданного диапазона маневров  $[J'_0, J'_n]$ :

$$\bar{\beta}' = \frac{J'_n - \epsilon J'_0}{1 - J'_n - \epsilon(1 - J'_0)}; \quad \epsilon = \frac{(1 - \sqrt{J'_n})^2}{(1 - \sqrt{J'_0})^2} \quad (5.54)$$

и минимальную степень неоптимальности

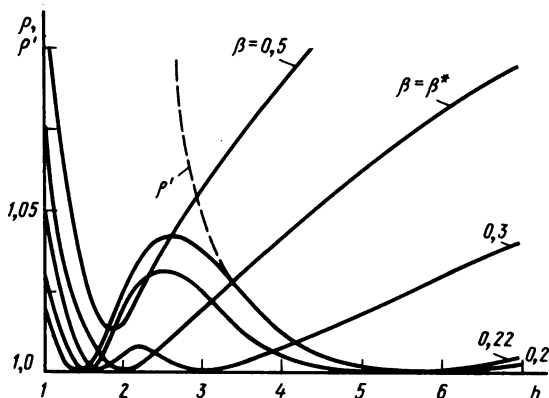


Рис. 5.4. Характер изменения степени неоптимальности ( $\bar{W} = 0,8$ )

$$C = \frac{(1 - \epsilon)(J'_n - \epsilon J'_0)(1 - \sqrt{J'_0})^2}{[1 - J'_n - \epsilon(1 - J'_0)](J'_n - J'_0)} \quad (5.55)$$

Однако в случае использования комбинированной двигательной системы, функция  $\rho(h, \bar{W}, \beta)$ , описываемая соотношением (5.50), не удовлетворяет требованию унимодальности, которое накладывается на функцию  $\rho$ , вводимую при определении покрытия. Наличие точки максимума  $\rho$  внутри интервала существования функции  $\rho$  (рис. 5.4) делает множество  $E_c: \{\rho = \text{const}\}$  неодносвязным, что затрудняет использование методов [51]. Тем не менее можно выбрать систему двигателей  $\{\beta_i\}$ , оптимальную в смысле критерия (5.48), непосредственно анализируя поведение функции  $\rho(h, \bar{W}, \beta)$  (5.50) внутри диапазона  $[\bar{W}_0, \bar{W}_n] \times [h_0, h_n]$ .

В самом деле, анализ формулы (5.39) с учетом ограничений позволяет установить границы области применения комбинированных систем:  $h_{\min}$  и  $h_{\max}$ :

$$\begin{aligned} h_{\min} &= 1 \text{ при } \Delta V_{0\text{opt}} = V_1 - V_0; \\ h_{\max} &= \left(\frac{\bar{W}}{2} + 1\right)^2 \text{ при } \Delta V_{0\text{opt}} = 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Поскольку согласно (5.40) параметр  $h$  является функцией  $\alpha$  и  $c_1$ , соотношение (5.56) позволяет построить границы области применимости КДС в координатах  $\alpha - c_1$  согласно неравенству:

$$\frac{T}{2\alpha c_1^2} - \left(\frac{V_1 - V_0}{2c_1} + 1\right)^2 \leq 0. \quad (5.57)$$

При неоптимальном выборе относительной массы двигателя малой тяги  $\beta$  эти границы согласно (5.46) получаются иными:

$$h'_{\min} = 0; \quad h'_{\max} = [(1 + \beta)^2 - 1](1 + \beta)/4\beta. \quad (5.58)$$

Определим, когда  $h_{\max} = h'_{\max}$ . Оказывается, равенство границ имеет место при  $\beta = \beta_* = \bar{W}/2$ . Таким образом, если  $\beta < \beta_*$ , то  $h_{\max} < h'_{\max}$ . Иначе говоря, в области параметров маневра  $[h_{\max}, h'_{\max}]$  при фиксированном  $\beta$  еще используется комбинированная система ( $\Delta V_{0\text{opt}} \neq 0$ ), а при оптимальной относительной массе двигателя малой тяги  $\bar{\beta}$  ее применение уже невыгодно — весь маневр должен выполняться с помощью двигателя малой тяги.

Функция  $\rho(h, \bar{W}, \beta)$ , вид которой показан на рис. 5.4, обладает следующими особенностями: при  $\beta > \beta_*$  функция  $\rho$  имеет один минимум, который всегда больше единицы. При этом гарантируемая степень неоптимальности  $C$  будет определяться из соотношения  $C = 1 + \beta$ , полученного из (5.50) при  $h \rightarrow \infty$ .

При  $\beta < \beta_*$  функция имеет два минимума (в точках минимума ее значение равно единице) и один максимум. Первый минимум соответ-

ствует области параметров маневра, где выгодно применять КДС, второй — области применения только двигателя малой тяги. Пунктирной линией на рисунке обозначена функция  $\rho'(h, \beta)$ , соответствующая соотношению (5.67), когда используется только двигатель малой тяги (для  $\beta = 0,2$ ). Видно, что использование комбинированных систем в энергетически напряженных маневрах при небольших значениях  $h$  позволяет значительно уменьшить проигрыш в стартовой массе аппарата.

Анализ функции  $\rho(h, \bar{W}, \beta)$  показывает, что использование даже одной универсальной комбинированной системы позволяет обслужить значительно больший диапазон маневров, чем с одним только двигателем малой тяги. Например, пусть  $h \in [1,15]$ . Тогда комбинированная система с двигателем малой тяги, относительная масса которого  $\beta = 0,22$ , обслуживает указанный диапазон со степенью неоптимальности, не превышающей 1,032. Если задана максимально допустимая степень неоптимальности, например,  $c_* = 1,05$ , то в этом случае можно обслужить практически неограниченный диапазон маневров двумя разнотипными двигателями, каждый из которых будет обслуживать свой поддиапазон.

Подбором соответствующих параметров  $\bar{W}$ ,  $h$  можно добиться достаточной точности моделирования реальных задач механики полета. Каждому значению  $h$  при фиксированных  $\alpha$ ,  $c_1$  соответствует определенное время выполнения маневра. Так, например, при  $\alpha = 10$  кг/кВт и  $c_1 = = 4000$  м/с диапазон значений  $h \in [1,15]$  соответствует диапазону  $T \in [5,3; 78,5$  сут] [9].

### 5.3. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ЭНЕРГЕТИКИ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА

5.3.1. Схема межпланетного перелета. Оптимальная структура перелета с КДС предполагает, что включение двигателя большой тяги происходит лишь в начальной точке траектории, а весь последующий перелет осуществляется с помощью двигателя малой тяги. Для простоты примем, что импульс  $\Delta V_0$  сообщает аппарату параболическую скорость, достаточную для выхода на границу сферы действия Земли. Разумеется, такое упрощение не соответствует условиям оптимальности импульса, однако позволяет применить уже известный метод аппроксимации характеристик перелета аналитическими зависимостями.

Масса КА после окончания работы двигателя большой тяги со скоростью истечения  $c_1$  составит

$$m_1 = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V_{0\text{пар}}}{c_1}\right), \quad (5.59)$$

где  $\Delta V_{0\text{пар}}$  — импульс скорости, который однозначно определяется высотой начальной круговой орбиты.

Весь последующий перелет, состоящий из участков движения в поле тяготения Солнца и торможения в сфере действия планеты назначения, выполняется идеально регулируемым двигателем малой тяги. Динамическая характеристика перелета выражается зависимостью  $J = J(T_2, T_3, \varphi_1, \Omega_{\max})$ , где  $T_2$  – время полета на гелиоцентрической траектории;  $\varphi_1$  – угловая дальность гелиоцентрического участка;  $T_3$  – время торможения;  $\Omega_{\max}$  – максимальная угловая скорость поворота вектора тяги на планетоцентрическом участке. Если  $J$  известна, то полезная масса всего перелета определится так:

$$\frac{m_{\text{п}}}{m_0} = \exp\left(-\frac{\Delta V_{0\text{пар}}}{c_1}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha J}{2}}\right)^2. \quad (5.60)$$

Обозначим  $T_1$  время полета КА до границы сферы действия планеты старта.  $T_1$  однозначно определяется величиной  $\Delta V_{0\text{пар}}$ , а следовательно, зависит от радиуса начальной орбиты. Если задано полное время перелета  $T = T_1 + T_2 + T_3$ , задача оптимизации полезной массы сводится к исследованию на минимум функционала  $J$ .

**5.3.2. Расчет характеристик перелета Земля – Марс.** В соответствии с результатами разд. 4.4 аппроксимируем функционал  $J$  формулой

$$J = J_2 + J_3 = \frac{K_2}{T_2^3} + pA(\varphi_1) \times \\ \times \left[ \frac{q}{T_2} - B(\varphi_1) \right]^3 + \frac{c_3}{T_3}. \quad (5.61)$$

Рассмотрим два предельных случая управления вектором тяги: а) ограничения отсутствуют,  $\Omega_{\max} \geq 1$ ; тогда  $c_3 = K_3$ ; б) вектор тяги сохраняет постоянное направление в планетоцентрической системе координат,  $\Omega_{\max} = 0$ ; тогда  $c_3 = 2K_3$  (значение коэффициента  $K_3$  приведено в разд. 4.4).

Найдем минимум  $J$  по  $T_2$ :

$$\min_{T_2} J = \min_{T_2} \left\{ \frac{K_2}{T_2^3} + pA(\varphi_1) \left[ \frac{q}{T_2} - B(\varphi_1) \right]^3 + \frac{c_3(\Omega_{\max})}{T - T_1 - T_2} \right\} \quad (5.62)$$

Приравняв нулю производную  $\frac{\partial J}{\partial T_2}$  и проводя преобразования; получаем уравнение 4-й степени для определения  $T_2$ :

$$c_3 T_2^4 - 3K_2(T - T_1 - T_2)^2 - 3pA(\varphi_1) \times \\ \times [q - B(\varphi_1)T_2]^2 (T - T_1 - T_2)^2 = 0. \quad (5.63)$$

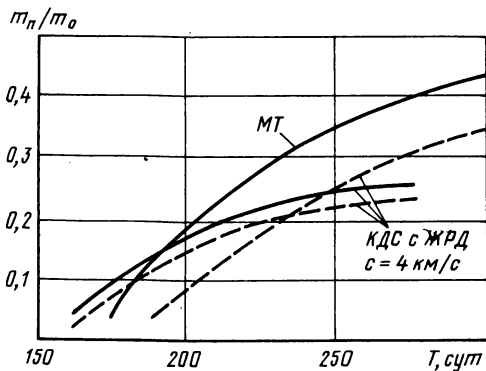


Рис. 5.5. Относительная полезная масса перелета Земля — Марс с различными типами двигательных систем ( $\varphi_1 = 150^\circ$ ): малая тяга (MT)  $\alpha = 10 \text{ кг/кВт}$ ; комбинация двигателей малой тяги  $\alpha = 10 \text{ кг/кВт}$  и ЖРД ( $c = 4 \text{ км/с}$ ); —  $\Omega_{max} > 1$ ; - - -  $\Omega_{max} = 0$

Уравнение (5.63) может быть решено численно, после чего расчет полезной массы перелета не вызывает затруднений (рис. 5.5).

Расчеты позволяют выделить область времени перелета ( $T = 150 \dots 200$  сут), где выгодно использовать КДС. Отметим, что применение КДС позволяет также существенно уменьшить проигрыш в полезной массе, обусловленный ограниченными возможностями управления вектором тяги КА с искусственной гравитацией. Это объясняется тем, что влияние ограничения на  $\Omega$  сказывается теперь лишь на участке торможения, а участок торможения у Марса дает обычно небольшой вклад в общую энергетику перелета, поэтому некоторое увеличение  $J_3$  не оказывает существенного влияния на полезную массу перелета в целом. Для перелетов продолжительностью порядка 200 сут проигрыш в полезной массе составляет 8 ... 10 %.

## КОММЕНТАРИИ

1. Возможность использования комбинированной системы, состоящей из двигателя ограниченной скорости истечения (большой тяговооруженности) и двигателя ограниченной мощности (малой тяги) для космических перелетов обсуждается в ряде работ, среди которых строгой математической постановкой и формулировкой условий оптимальности выделяется работа Ю.Н. Иванова [23]. В некоторых других работах приводятся результаты расчетов некоторых космических маневров и межпланетных перелетов с комбинированной двигательной системой, которые, однако, выполнены без привлечения методов оптимизации.

2. Поскольку в разд. 5.1 использовались лишь условия 1-го порядка максимума функции  $R$  по координатам, в каждом конкретном случае следует доказать, что найденная траектория перелета является абсолютно оптимальной. Такое доказательство, однако, можно провести лишь в исключительных случаях, например, для модельных типов гравитационных полей (однородного, однородного центрального и т.д.). Во всяком случае, найденное решение, характеризующееся включением двигателя большой тяги лишь на начальном участке траектории, может рассматриваться в качестве реального кандидата на последующее улучшение методами 2-го порядка.

3. Проблема оптимизации и универсализации параметров космических аппаратов рассматривалась многими авторами. К числу наиболее значительных публи-

каций относятся работы В.В. Токарева [17], В.С. Брусова и С.А. Пиявского [51], М.С. Константинова [32]. Специфика космических систем, не относящихся к классу систем массового обслуживания, привела, помимо традиционного, вероятностного подхода, к развитию игровых (минимаксных) постановок. Удобным объектом исследования задач универсализации оказались двигательные установки малой тяги, для которых характерна значительная масса источника энергии. Подобная задача универсализации двигательной установки малой тяги сформулирована и решена в работе [8] с помощью теории оптимальных покрытий. В работе [9] впервые теория оптимальных покрытий применена для решения задачи универсализации комбинированной двигательной системы (см. разд. 5.2).

## ГЛАВА 6

### ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ С МАЛОЙ ТЯГОЙ МЕЖДУ КРУГОВЫМИ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ

#### 6.1. УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРНОГО И УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЙ

**6.1.1. Предварительные замечания.** При оптимизации траекторий перелетов между некомпланарными орбитами решающее значение приобретают два фактора. Первый связан с различными схемами управления угловым движением аппарата и связанными с ними дополнительными затратами рабочего тела на разворот корпуса аппарата. Второй фактор — невозможность решения задачи оптимизации "в лоб" для достаточно сложной математической модели движения, включающей уравнения как траекторного, так и углового движений. Возникающие здесь трудности обусловлены многовитковым характером траектории, наличием нескольких точек переключения направления тяги на каждом витке, высоким порядком краевой задачи для расширенной системы уравнений движения.

Указанные проблемы предлагается решать следующим образом. Из всего множества схем управления угловым движением аппарата выделяются только две принципиальные: совместная, при которой развороты аппарата реализуются с помощью маршевых двигателей, разнесенных на некоторое расстояние относительно центра масс; и отдельная, при которой разворот корпуса осуществляется специальными управляющими двигателями.

"Проклятие размерности" задачи устраняется с помощью некоторых упрощений (например, расположения вектора тяги только в плоскости местного горизонта) и применения метода малого параметра. Указанный метод предполагает "расщепление" управления на периодическую (быстро меняющуюся) и вековую (медленно меняющуюся) составляющие и отдельную их оптимизацию.

Принцип расширения допустимых состояний и управления здесь

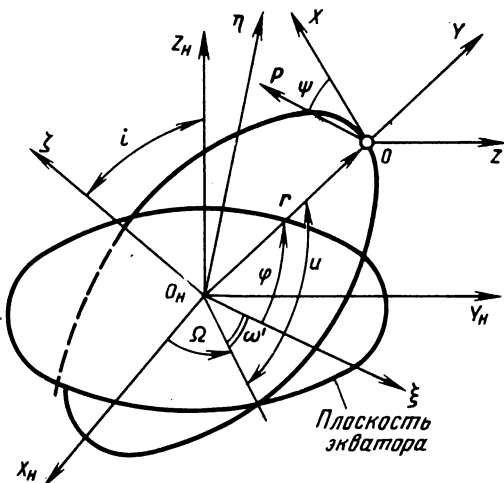
позволяет свести решение общей задачи оптимизации перелета к последовательности решений частных задач оптимизации меньшей размерности, получаемых путем отбрасывания некоторых связей. При этом решение каждой задачи меньшей размерности дает гарантированную оценку критерия оптимальности для "последующей" более сложной задачи.

**6.1.2. Уравнения движения для околокруговых орбит.** Пространственное движение КА можно представить как результат сложения двух движений: перемещения центра масс аппарата в мгновенной плоскости орбиты и вращения этой плоскости вокруг притягивающего центра. Систему уравнения движения удобно записывать в следующей форме [36] (рис. 6.1):

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{d\varphi} &= \frac{2A^3(1 - q_1^2 - q_2^2)}{1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi} (a_X + \\
 &+ a_Y \frac{q_1 \sin\varphi - q_2 \cos\varphi}{1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi}); \\
 \frac{dq_1}{d\varphi} &= \frac{A^2(1 - q_1^2 - q_2^2)}{(1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi)} (a_Y \sin\varphi + \\
 &+ a_X \frac{2 \cos\varphi + q_1 \cos^2\varphi + q_2 \sin\varphi \cos\varphi + q_1}{1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi}); \\
 \frac{dq_2}{d\varphi} &= \frac{A^2(1 - q_1^2 - q_2^2)}{(1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi)} (-a_Y \cos\varphi + \\
 &+ a_X \frac{2 \cos\varphi + q_2 \sin^2\varphi + q_1 \sin\varphi \cos\varphi + q_2}{1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi}); \\
 \frac{di}{d\varphi} &= \frac{a_Z A^2(1 - q_1^2 - q_2^2) \cos(\varphi + \omega')}{(1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi)^3}; \\
 \frac{d\Omega}{d\varphi} &= \frac{a_Z A^2(1 - q_1^2 - q_2^2) \sin(\varphi + \omega')}{(1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi)^3 \sin i}; \\
 \frac{d\omega'}{d\varphi} &= \frac{a_Z A^2(1 - q_1^2 - q_2^2) \sin(\varphi + \omega') \operatorname{ctg} i}{(1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi)^3}; \\
 \frac{dt}{d\varphi} &= \frac{A^{3/2}(1 - q_1^2 - q_2^2)^{3/2}}{(1 + q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi)^2}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Пусть тяга двигателя постоянна и направлена так, что ее радиальная составляющая  $a_Y$  равна нулю. Тогда направление вектора тяги задается

Рис. 6.1. Системы координат, используемые при составлении уравнений траекторного движения



всего одной величиной — углом  $\psi$  между вектором тяги и оскулирующей плоскостью орбиты. Составляющие реактивного ускорения представим в виде

$$a_X = a \cos \psi = \frac{a_0 \cos \psi}{1 - a_0 t/c} = a_0 \cos \psi \exp \frac{W}{c};$$

$$a_Y = 0;$$
(6.2)

$$-a \sin \psi = -\frac{a_0 \sin \psi}{1 - a_0 t/c} = -a_0 \sin \psi \exp \frac{W}{c},$$

где

$$W = \int_{t_0}^t a dt = c \ln(1 - a_0 t/c)^{-1}.$$
(6.3)

Отсюда следует формула для расчета продолжительности перелета

$$T = \frac{c}{a_0} [1 - \exp(-\frac{W_K}{c})],$$
(6.4)

где  $W_K$  — конечная характеристическая скорость перелета.

При помощи составляющей реактивного ускорения  $a_Z$ , нормальной к оскулирующей плоскости орбиты, можно изменять наклонение  $i$ . Если в точках, где аргумент широты  $u = \varphi + \omega'$

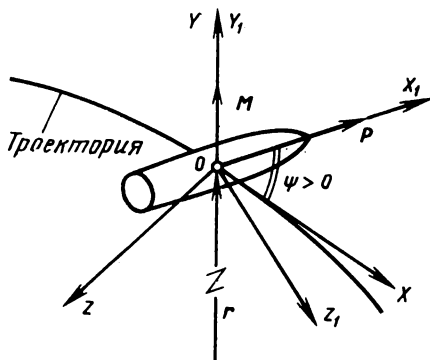


Рис. 6.2. Схема управления вектором тяги при перелетах между некомпланарными орбитами

принимает значения  $\pi/2, 3\pi/2, \dots$ , изменить направление бинормальной составляющей  $a_Z$  на противоположное, то наклонение орбиты  $i$  будет изменяться монотонно. Следовательно, при помощи управления

$$\begin{aligned} a_X &= a_0 \cos \psi \exp(W/c); \\ a_Y &= 0; \\ a_Z &= \pm a_0 \sin |\psi| \exp(W/c) \operatorname{sign}(\cos \mu) \end{aligned} \quad (6.5)$$

в принципе можно осуществить перелет между некомпланарными орбитами разного радиуса.

При малых значениях угла  $i$  правые части двух последних уравнений системы (6.1) могут неограниченно возрастать по модулю. Поэтому будем считать, что угол  $i$  в нашей задаче не меньше некоторого значения; этого всегда можно добиться соответствующим выбором плоскости отсчета, например, совмещая ее с плоскостью эклиптики.

Подставим значения компонент реактивного ускорения (6.5) в исходные уравнения (6.1). Полагая, что  $a_0 \ll 1$  и  $c \gg 1$  (масштабом измерения скорости истечения служит скорость движения по круговой начальной орбите), систему уравнений можно привести к стандартному виду систем с малым параметром и быстро и медленно меняющимися переменными. Быстро меняющейся фазой здесь считается угол  $\varphi$ .

Траектория движения КА с малым реактивным ускорением в "сильном" гравитационном поле обычно имеет многовитковую структуру, в которой сочетаются как периодические, так и вековые изменения элементов оскулирующей орбиты.

Разумно предположить, что управление — угол ориентации тяги  $\psi$  является функцией как положения КА на орбите, так и текущей характеристической скорости  $W$ , так что программа  $\psi(t)$  содержит как периодические, так и вековые составляющие.

Общая схема усреднения уравнений, содержащих малый параметр  $a_0$ , быстро ( $\varphi$ ) и медленно меняющиеся переменные, имеет вид

$$\frac{d\hat{S}}{d\varphi} = \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(S, \psi(\varphi, p), \varphi) d\varphi. \quad (6.6)$$

Здесь  $S$  — медленно меняющийся элемент орбиты;  $\hat{S}$  — элемент  $S$  после усреднения;  $\psi(\varphi, p)$  — управление, зависящее как от быстро меняющейся переменной  $\varphi$ , так и от медленно изменяющихся параметров  $p$ .

Особый интерес представляет случай, когда начальная орбита — круговая. Получим условия, при которых орбита остается близкой к круговой. Обращаясь ко второму и третьему уравнениям системы (6.1), видим, что для этого необходимо выполнение равенств

$$\int_0^{2\pi} \frac{dq_1}{d\varphi} d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \frac{dq_2}{d\varphi} d\varphi = 0. \quad (6.7)$$

Учитывая, что компоненты реактивного ускорения имеют вид (6.2), (6.3) и  $q_{10} = q_{20} = 0$ , условие (6.7) в первом приближении представляется так:

$$Q_1 = \int_0^{2\pi} \cos\psi \cos\varphi d\varphi = 0; \quad Q_2 = \int_0^{2\pi} \cos\psi \sin\varphi d\varphi = 0. \quad (6.8)$$

Равенство нулю интегралов  $Q_1$  и  $Q_2$  выражает свойство "симметрии" программы управления относительно осей  $OX$  и  $OZ$  (см. рис. 6.1), выполнение которого гарантирует равенство нулю вековых составляющих компонент вектора Лапласа  $q_1, q_2$ , а следовательно, и невозрастание эксцентриситета.

Из уравнений (6.1) следует, что при выполнении условий (6.8)  $\Omega = \Omega_0 = \text{const}$ ;  $\omega' = \omega'_0 = \text{const}$ . Примем, не нарушая общности,  $\omega'_0 = 0$ , что соответствует направлению оси  $O_{H\xi}$  по линии узлов. Поскольку  $\varphi + \omega' = u$  ( $u$  — текущий аргумент широты), в дальнейшем вместо угловой координаты  $\varphi$  будем использовать обозначение  $u$ .

В результате операции усреднения уравнения околокругового движения КА с малой тягой принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{du} &= \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \cos\psi \exp(W/c) du; \\ \frac{d\hat{i}}{du} &= \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin|\psi| |\cos u| \exp(W/c); \\ \frac{d\hat{W}}{du} &= \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{3/2} \exp(W/c) du = a_0 \hat{r}^{3/2} \exp(W/c); \\ \frac{dt}{du} &= \hat{r}^{3/2}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Здесь вместо большой полуоси  $A$  введен радиус "круговой" орбиты  $r$ , символом " $\hat{\phantom{r}}$ " обозначены усредненные величины. Дополним уравнения траекторного движения (6.9) уравнениями, описывающими динамику движения КА относительно центра масс. В данном случае угловое движение КА осуществляется только вокруг нормальной оси аппарата  $OY_1$ , совпадающей с направлением радиуса-вектора центра масс  $r$  (см. рис. 6.2):

$$\frac{d\psi}{du} = \omega_{Y_1} r^{3/2}; \quad \frac{d\omega_{Y_1}}{du} = \frac{M_{Y_1}}{I_{Y_1}} r^{3/2} = \epsilon r^{3/2}. \quad (6.10)$$

Здесь  $\omega_{Y_1}$  — скорость вращения КА вокруг связанной оси  $OY_1$ ;  $M_{Y_1}$  — управляющий момент;  $I_{Y_1}$  — момент инерции КА относительно оси  $OY_1$ ;  $\epsilon$  — угловое ускорение.

В дальнейшем удобно перейти к новому аргументу — характеристической скорости  $W$ . Система уравнений, описывающих траекторное движение аппарата, примет вид (символ " $\wedge$ ", означающий усреднение, опущен):

$$\frac{dr}{dW} = \frac{r^{3/2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\psi du; \quad (6.11)$$

$$\frac{di}{dW} = \frac{r^{1/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin|\psi| |\cos u| du.$$

Задача перелета между круговыми некомпланарными орбитами, описываемого усредненными уравнениями, формулируется теперь следующим образом: перейти с орбиты, параметры которой ( $r_0, i_0$ ) на орбиту с параметрами ( $r_K, i_K$ ), обеспечивая минимальное значение характеристической скорости  $W_K$ . Предполагается, что маршевый двигатель работает без выключения; управлением в данной задаче является момент  $M_{Y_1}$  (или угловое ускорение  $\epsilon$ ), который, вообще говоря, ограничен по величине некоторым значением  $M_{\max}(\epsilon \leq \epsilon_{\max})$ . Угол ориентации тяги  $\psi$  является теперь одной из компонент вектора состояния, причем включает как вековую, так и периодическую составляющие. Соответственно в управлении  $\epsilon$  целесообразно выделить вековую и периодическую компоненты. В среднем влияние управления вектором тяги на траекторию КА характеризуется интегралами:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos\psi du; \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin|\psi| |\cos u| du. \quad (6.12)$$

Задачу оптимизации перелета разделим на две самостоятельные задачи. Первая заключается в отыскании такой программы изменения угла  $\psi$  и соответствующего углового ускорения  $\epsilon$ , чтобы обеспечивался минимум затрат характеристической скорости в пределах каждого витка траектории. Назовем ее задачей локальной оптимизации, а соответствующую программу управления — локально-оптимальной. Вторая задача состоит в отыскании оптимального закона изменения интегралов  $I_1, I_2$  вдоль всей траектории перелета, или по существу в оптимальном программировании медленно меняющейся составляющей управления. Эту задачу назовем задачей оптимальной параметрической модуляции программы управления.

**6.1.3. Учет дополнительных затрат рабочего тела на управление угловым движением.** Запишем уравнение, описывающее изменение массы КА (все параметры по-прежнему безразмерные):

$$\frac{dm}{dt} = - \left( \frac{a_0}{c} + \delta_{\text{упр}} \beta_{\text{упр}} \right), \quad (6.13)$$

где  $\beta_{\text{упр}}$  — расход массы рабочего тела, идущего непосредственно на создание управляющего момента относительно оси  $OY_1$ .

Предположим для простоты, что скорость истечения рабочего тела управляющих двигателей такая же, как и у маршевых. В этом случае задача о минимуме суммарного расхода рабочего тела эквивалентна задаче о минимуме некоторой условной характеристической скорости  $W'_k$ :

$$W'_k = \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{m} (a_0 + \delta_{\text{упр}} a'_0) dt, \quad (6.14)$$

где  $m$  — текущая масса КА;  $a_0 = \text{const}$ ;  $a'_0 = P_{\text{упр}}/m_0 = \beta_{\text{упр}} c/m_0$ ;  $P_{\text{упр}}$  — тяга управляющего двигателя;  $\delta_{\text{упр}}$  — функция включения — выключения управляющих двигателей, равная нулю там, где не создается управляющий момент  $M_{Y_1}$ , который удобно представить в виде произведения

$$M_{Y_1} = \epsilon I_{Y_1} = P_{\text{упр}} h, \quad (6.15)$$

где  $h$  — плечо управляющей силы. Отсюда с учетом  $m_0 = 1$

$$a'_0 = |\epsilon| I_{Y_1} / h. \quad (6.16)$$

Введем параметр  $\kappa$ , которым будем в дальнейшем характеризовать дополнительный расход рабочего тела на управление:

$$\kappa = a'_0/a_0 = |\epsilon| I_{Y_1} / a_0 h. \quad (6.17)$$

Ясно, что для совместной схемы управления  $\kappa = 0$ . В результате приходим к следующему выражению:

$$W' = \int_{t_0}^t \frac{a_0}{m} (1 + \kappa \delta_{\text{упр}}) dt. \quad (6.18)$$

Перейдем к новому аргументу — ”условной” характеристической скорости  $W'$  в уравнениях (6.11). Для этого воспользуемся уравнением

$$\frac{dW'}{dW} = \frac{2\pi}{F_1}, \quad (6.19)$$

где

$$F_1 = \int_0^{2\pi} (1 + \delta_{\text{упр}} \kappa) du. \quad (6.20)$$

Переходя к аргументу  $W'$  в уравнениях (6.9), получим

$$\frac{dr}{dW'} = \frac{2r^{3/2}}{F_1} I_1; \quad \frac{di}{dW'} = \frac{r^{1/2}}{F_1} I_2. \quad (6.21)$$

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  здесь определяются выражениями (6.12). Отметим, что для совместной схемы управления  $\kappa \equiv 0$ ,  $F_1 = 2\pi$ ,  $W' \equiv W$ .

## 6.2. ЗАДАЧА ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

**6.2.1. Некоторые аналитические решения усредненных уравнений.** Исключим из рассмотрения уравнения углового движения КА. В таком случае управлением является угол ориентации тяги  $\psi$ , который можно считать функцией двух переменных: аргумента широты, характеризующего положение КА на орбите, и текущей характеристической скорости  $W$ . Легко показать, что уравнения системы (6.21) интегрируются, если угол  $\psi$  является функцией только аргумента широты. Пусть  $F_1 = \text{const}$ . Тогда решение этих уравнений, соответствующее граничным условиям перелета между круговыми некомпланарными орбитами, имеет вид

$$i - i_0 = \frac{I_2 \ln r}{2I_1} ; r = (1 - \frac{W'I_1}{F_1})^{-2}. \quad (6.22)$$

Конечная условная характеристическая скорость перелета  $W'_K$  будет определяться формулой

$$W'_K = (1 - r_K^{-\frac{1}{2}}) F_1 / I_1. \quad (6.23)$$

Решение (6.22), (6.23) справедливо и для случая, когда  $i_K \equiv i_0$ . Однако, если  $r_K = r_0 = 1$ , конечная характеристическая скорость перелета определяется путем непосредственного интегрирования второго уравнения системы (6.21):

$$W'_K = (i_K - i_0) F_1 / I_2. \quad (6.24)$$

Рассмотрим перелет КА, реализующего совместную схему управления траекторным и угловым движением КА. Тогда  $F_1 = 2\pi$ ,  $\kappa = 0$ . Зададим программу управления ориентацией вектора тяги следующим образом:

$$|\psi| = \text{const} = \psi_0 ; \text{sign} \psi = - \text{sign}(\cos u). \quad (6.25)$$

Тогда интегралы  $I_1$  и  $I_2$  принимают вид

$$I_1 = 2\pi \cos \psi_0 ; I_2 = 4\sin \psi_0. \quad (6.26)$$

Решение (6.22) окончательно записывается в виде

$$i - i_0 = \frac{\text{tg} \psi_0}{\pi} \ln r ; r(1 - W \cos \psi_0)^{-2}. \quad (6.27)$$

Перелет с орбиты единичного радиуса на орбиту радиуса  $r_K$ , плоскость которой повернута относительно плоскости орбиты на угол  $\Delta i_K = i_K - i_0$ , можно осуществить с помощью управления (6.25), если положить

$$\psi_0 = \arctg \pi \Delta i_K / \ln r_K. \quad (6.28)$$

Конечная характеристическая скорость и продолжительность перелета определяются формулами

$$W_{\kappa} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r_{\kappa}}}\right) \sec \psi_0 = \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi \Delta i_{\kappa}}{2 \operatorname{tg} \psi_0}\right)\right] \sec \psi_0; \quad (6.29)$$

$$T = \frac{c}{a_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{1 - r_{\kappa}^{-1/2}}{c \cos \psi_0}\right)\right].$$

В частном случае, когда  $\psi_0 = 0$ , получим изменение радиуса орбиты при перелете с трансверсальной тягой

$$r = (1 - W)^{-2} = \left[1 - c \ln(1 - a_0 t/c)\right]^{-2}. \quad (6.30)$$

Если  $a = \text{const}$ , то  $W = at$  и решение еще более упрощается:

$$r = (1 - at)^{-2}. \quad (6.31)$$

Поскольку орбита остается близкой к круговой, это означает, что увеличение потенциальной энергии поступательного движения центра масс при увеличении высоты орбиты компенсируется соответствующим уменьшением кинетической энергии. Отсюда можно получить простое выражение для величины скорости

$$V \approx r^{-1/2} \approx (1 - W) = 1 - c \ln(1 - a_0 t/c)^{-1} \quad (6.32)$$

при  $a = \text{const}$   $V = 1 - at$ .

Полученные решения наглядно показывают, что скорость (точнее, ее вековая составляющая) монотонно убывает при увеличении радиуса орбиты. В этом состоит известный "парадокс разгона" аппарата с малой тягой.

Решения, соответствующие случаю уменьшения радиуса орбиты, получаются при  $\psi = \pi$ , что приводит к смене знаков в формулах (6.30) и (6.32).

Если  $\psi_0 = \pi/2$ , имеем задачу поворота плоскости орбиты бинормальной тягой. При этом  $r_0 = r_{\kappa} = 1$ . Согласно решению (6.24)

$$i = i_0 + \frac{2W}{\pi}; \quad W_{\kappa} = \frac{\pi \Delta i_{\kappa}}{2}. \quad (6.33)$$

**6.2.2. Оптимальное управление вектором тяги в пределах витка.** Найдем такую программу изменения угла  $\psi(u)$ , которая обеспечивала бы минимум характеристической скорости при заданных приращениях радиуса и наклона орбиты. Пусть при этом  $u \in [0, 2\pi]$ . Согласно решению (6.23), будем искать максимум функционала  $I_1$  (6.12) при изопериметрическом условии  $2(i_{\kappa} - i_0)I_1 = I_2 \ln r_{\kappa}$ , которое с учетом (6.12) легко преобразуется к следующему виду:

$$\int_0^{2\pi} [2(i_{\kappa} - i_0) \cos \psi - \ln r_{\kappa} \sin |\psi| |\cos u|] du = 0. \quad (6.34)$$

Применяя принцип расширения к данной задаче без учета изопериметрической связи (6.34), легко установить, что

$$\max_E I_1 = I_{1s} = 2\pi. \quad (6.35)$$

Эту верхнюю грань можно использовать для оценки различных программ управления.

Для отыскания оптимальной программы  $\bar{\psi}(u)$ , дающей максимум  $I_1$  с учетом связи (6.34), исследуем на экстремум функцию

$$H = \cos\psi + \lambda[2(i_K - i_0)\cos\psi - \ln r_K \sin|\psi| |\cos u|]. \quad (6.36)$$

Здесь множитель Лагранжа  $\lambda = \text{const}$ . Локально-оптимальная программа  $\psi(u)$  получается в следующем виде:

$$\text{tg}\bar{\psi}(u) = - \frac{\lambda \ln r_K}{1 + 2\lambda(i_K - i_0)} \cos u. \quad (6.37)$$

Параметр  $-\lambda \ln r_K (1 + 2\lambda(i_K - i_0))^{-1}$  можно интерпретировать как тангенс угла  $\psi$ , соответствующего аргументу широты  $u = 0$ . Обозначая этот угол через  $\psi_{\max}$ , получим окончательно

$$\bar{\psi}(u) = \text{arctg}(\text{tg}\psi_{\max} \cos u). \quad (6.38)$$

Выражение (6.38) показывает, что угол ориентации тяги на витке дважды меняет знак. Максимальное значение угла  $\psi$  определяется граничными условиями перелета (приращением радиуса и наклона за виток). Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  для локально-оптимальной программы  $\bar{\psi}(u)$  приводятся к виду

$$I_1 = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\psi_{\max} du}{\sqrt{\cos^2\psi_{\max} + \sin^2\psi_{\max} \cos^2 u}}; \quad (6.39)$$

$$I_2 = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\psi_{\max} \cos^2 u du}{\sqrt{\cos^2\psi_{\max} + \sin^2\psi_{\max} \cos^2 u}}.$$

Интегралы (6.39) через элементарные функции не выражаются и сводятся к полным эллиптическим интегралам первого и второго рода  $K(\psi_{\max})$  и  $E(\psi_{\max})$ :

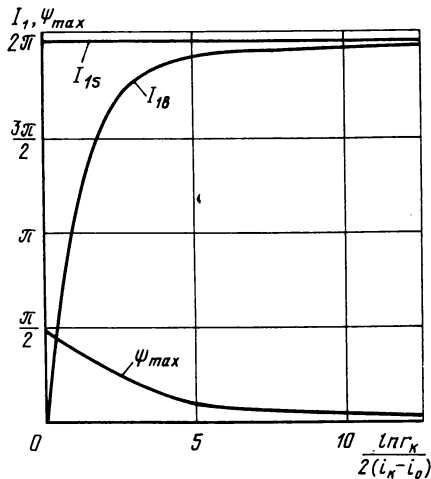
$$I_1 = 4K(\psi_{\max}) \cos\psi_{\max} = I_{1B} = \max_D I_1; \quad (6.40)$$

$$I_2 = \frac{4E(\psi_{\max})}{\sin\psi_{\max}} - \frac{4K(\psi_{\max})}{\text{tg}\psi_{\max}} \cos\psi_{\max}.$$

Зависимость интеграла  $I_{1B}$  от параметра  $\ln r_K / [2(i_K - i_0)]$ , который, будучи отношением интегралов  $I_1/I_2$  (см. (6.22)), в свою очередь, за-

Рис. 6.3. Предельная оценка  $I_{1s}$  и верхняя грань  $I_{1B}$  функционала  $I_1$

висит от угла  $\psi_{\max}$ , показана на рис. 6.3. Там же даны и соответствующие значения угла  $\psi_{\max}$ . В отличие от  $I_{1s}$ ,  $I_{1B}$  можно считать точной верхней гранью функционала  $I_1$  в сформулированной задаче локальной оптимизации и использовать для оценки других программ управления. Отметим, что для весьма широкого класса перелетов, когда параметр  $\ln r_k / [2(i_k - i_0)] > 5$ , точная граница  $I_{1B}$  отличается от  $I_{1s}$  не более чем на 3 ... 5 %, что позволяет использовать и гарантированную оценку  $I_{1s}$ .



**6.2.3. Оценка некоторых программ управления.** Простейшей программой управления вектором тяги является "релейная" (6.25)

$$\psi = \psi_0 \text{sign}(\cos u); \quad \psi_0 = \text{const.}$$

Этой программе соответствуют решения (6.26) ... (6.29). Ее вид показан на рис. 6.4, а.

Заметим, что эффективность поворота плоскости орбиты в окрестности точек, где  $u = \pi/2, 3\pi/2$ , наименьшая. Здесь целесообразно ориентировать вектор тяги точно по трансверсали. Вид этой программы показан на рис. 6.4, б. Если ее параметрами являются угол отклонения тяги от плоскости орбиты  $\psi_0$  и ширина участка  $\delta$  (в угловой мере), где тяга ориентирована точно по трансверсали, то

$$\psi = -\frac{\psi'_0}{2} \text{sign}(\cos u) \left\{ 1 - \text{sign} \left[ \sin^2 u - \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (6.41)$$

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  вычисляются так:

$$I_1 = 4 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \cos \psi'_0 + \frac{\delta}{2} \right]; \quad (6.42)$$

$$I_2 = 4 \sin \psi'_0 \cos \frac{\delta}{2}.$$

Получим соотношения для расчета параметров орбиты  $r$  и  $i$  в случае, когда  $\psi'_0, \delta$  остаются постоянными в течение всего перелета. Для этого подставим полученные интегралы в уравнения (6.22). По-прежнему полагая в данной задаче  $F_1 = 2\pi$ , получим решения:

$$i - i_0 = \frac{\sin \psi'_0 \cos(\delta/2) \ln r}{(\pi - \delta) \cos \psi'_0 + \delta}; \quad (6.43)$$

$$r = \left\{ 1 - W \left[ \left( 1 - \frac{\delta}{\pi} \right) \cos \psi'_0 + \delta / \pi \right] \right\}^{-2}.$$

Угол  $\delta$  можно определить из условия минимума величины конечной характеристической скорости, которая теперь выражается так:

$$W_K = (1 - r_K^{-1/2}) [\cos \psi'_0 (1 - \delta/\pi) + \delta/\pi]^{-1}, \quad (6.44)$$

причем  $\psi'_0$  определяется граничными условиями и находится из первого выражения (6.43):

$$\psi'_0 = \arccos \left( - \frac{2\delta(i_K - i_0)}{2\pi \sqrt{(i_K - i_0)^2 (1 - \delta/\pi)^2 + (\cos^2 \frac{\delta}{2} \ln^2 r_K) / \pi^2}} \right) -$$

$$- \arctg \frac{\cos(\delta/2) \ln r_K}{\pi(i_K - i_0)(1 - \delta/\pi)}. \quad (6.45)$$

Отыскание минимума  $W_K$  по параметру  $\delta$  целесообразно вести численными методами.

Ниже приведены значения критерия локальной оптимальности перелета — функционала  $I_1$ , рассчитанного для трех описанных программ управления и для фиксированных граничных условий, соответствующих перелету с низкой круговой орбиты на экваториальную орбиту стационарного ИСЗ:  $\Delta i_K = 0,9$ ;  $r_K = 6,2319$ . Здесь же даны значения конечной

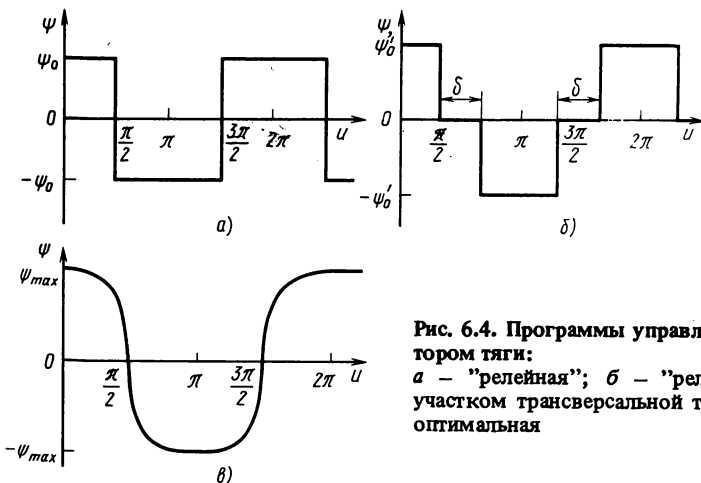


Рис. 6.4. Программы управления вектором тяги:  
 а — "релейная"; б — "релейная" с участком трансверсальной тяги; в — оптимальная

характеристической скорости, как безразмерной, так и в км/с. Последнее соответствует  $r_0^* = 6771$  км.

Программа управления	$I_1/I_{1B}$	$W_{к'}$ безр. км/с
$\psi = \arctg(\operatorname{tg}\psi_{\max}\cos u); \psi_{\max} = \text{const}$	1,00	$\frac{1,0640}{8,163}$
$\psi = \psi_0 \operatorname{sign}(\cos u); \psi_0 = \text{const}$	0,9666	$\frac{1,1038}{8,465}$
$\psi = -\frac{\psi'_0}{2} \operatorname{sign}(\cos u) \left\{ 1 - \operatorname{sign}[\sin^2 u - \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2})] \right\}; \psi'_0, \delta = \text{const}$	0,9851	$\frac{1,0831}{8,306}$

Результаты расчета показывают, что локальная оптимизация программы управления вектором тяги позволяет улучшить критерий оптимальности  $I_1$  на 2 ... 3,5 %. Характер изменения управления  $\psi(u)$  на витке траектории показан на рис. 6.4, в.

### 6.3. ОПТИМИЗАЦИЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ УПРАВЛЕНИЯ

**6.3.1. Достаточные условия оптимальности.** Рассмотрим задачу о минимуме характеристической скорости перелета между круговыми некомпланарными орбитами в классе допустимых траекторий и управлений, выбранных без учета динамики углового движения аппарата и затрат на управление. Уравнения имеют вид

$$\frac{dr}{dW} = \frac{r^{3/2}}{\pi} I_1; \quad \frac{di}{dW} = \frac{r^{1/2}}{2\pi} I_2. \quad (6.46)$$

Здесь управлениями являются интегралы  $I_1$  и  $I_2$ . Из выражений (6.12) видно, однако, что эти интегралы связаны функциональной зависимостью через угол ориентации вектора тяги  $\psi$ . Введем синтезирующую функцию  $\varphi(r, i)$ , частные производные которой по радиусу и наклону обозначим через  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial i}$ . Составим функцию

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{r^{3/2}}{\pi} I_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial i} \frac{r^{1/2}}{2\pi} I_2 + \varphi_W. \quad (6.47)$$

Зададим функцию  $\varphi(r, i)$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} r I_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial i} \frac{I_2}{2} = 0. \quad (6.48)$$

При таком выборе  $\varphi(r, i)$  функция  $R$  не зависит от управлений  $I_1$ ,  $I_2$  и условия (1, 2) теоремы 2 (гл. 2) выполняются автоматически. Составим характеристическое уравнение для линейного однородного уравнения в частных производных (6.48):

$$\frac{dr}{I_1 r} = \frac{2di}{I_2}. \quad (6.49)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{r}{r_0} = \exp\left(2 \int_{i_0}^i \frac{I_1}{I_2} di\right). \quad (6.50)$$

Соотношение (6.50) представляет собой достаточное условие оптимальности траекторного движения, описываемого усредненными уравнениями (6.46). Как всякое достаточное условие, оно не позволяет программировать оптимальную зависимость отношения интегралов  $I_1/I_2$  вдоль траектории перелета, но тем не менее пригодно для проверки любых допустимых управлений, найденных, например, с помощью необходимых условий оптимальности.

В частном случае, когда программа управления  $\psi(u)$  остается неизменной вдоль траектории, интегралы  $I_1$  и  $I_2$  постоянные, а соотношение (6.50) переходит в полученное ранее выражение (6.22), что говорит о единственности, а значит, и об оптимальности решения (6.22).

Заметим, что можно получить дискретный аналог достаточного условия оптимальности (6.50) в виде

$$\left(\frac{I_1}{I_2}\right)_j \Delta i_j = \frac{1}{2} \ln r_j, \quad (6.51)$$

где  $j$  — номер интервала, на котором можно считать  $I_1/I_2 = \text{const}$ .

**6.3.2. Амплитудная модуляция управления.** Сформулируем теперь задачу оптимизации параметра  $\psi_{\max}$  — максимального отклонения угла ориентации тяги от трансверсали в локально-оптимальной программе (6.38) — как функции текущей характеристической скорости при перелетах между круговыми орбитами. Траекторное движение аппарата описывается уравнениями (6.46), где интегралы  $I_1$  и  $I_2$  определяются теперь выражениями (6.40). Составим функцию  $R_1$ , соответствующую задаче о минимуме конечной характеристической скорости:

$$R_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{r^{3/2}}{\pi} I_1(\psi_{\max}) + \frac{\partial \varphi}{\partial i} \frac{r^{1/2}}{2\pi} I_2(\psi_{\max}) + \frac{\partial \varphi}{\partial W}. \quad (6.52)$$

Функция  $G$  для задачи с фиксированным концом на минимум не исследуется. Выпишем необходимые условия 1-го порядка максимума  $R_1$  по координатам  $(r, i)$  и уравнению  $\psi_{\max}$ :

$$\frac{d\psi_r}{dW} = \frac{3}{2\pi} r^{1/2} \psi_r I_1(\psi_{\max}) + \frac{r^{-1/2}}{4\pi} I_2(\psi_{\max}) = 0; \quad (6.53)$$

$$\bar{\psi}_{\max} = \arg \max_{\psi_{\max}} R_1.$$

Здесь частные производные синтезирующей функции  $\varphi(r, i, W)$ ,  $\psi_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ ,  $\psi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial i}$  вычисляются в точках предполагаемой минимали  $(\bar{r}, \bar{i})$ . Поскольку  $\psi_i = \text{const}$ , из условия нормировки положим  $\psi_i = 1$ .

Особенностью данной задачи является то, что оптимальное управление  $\bar{\psi}_{\max}(W)$  в явном виде не выражается из последнего условия (6.53), поскольку входит достаточно сложным образом в интегралы  $I_1, I_2$ .

Отыскание оптимальной модулирующей функции  $\bar{\psi}_{\max}(W)$  сводится к решению двухточечной краевой задачи для системы

$$\frac{dr}{dW} = \frac{r^{3/2}}{\pi} I_1(\bar{\psi}_{\max});$$

$$\frac{di}{dW} = \frac{r^{1/2}}{2\pi} I_2(\bar{\psi}_{\max}); \quad (6.54)$$

$$\frac{d\psi_r}{dW} = -\frac{3}{2\pi} r^{1/2} \psi_r I_1(\bar{\psi}_{\max}) - \frac{r^{-1/2}}{4\pi} I_2(\bar{\psi}_{\max})$$

с граничными условиями, соответствующими перелету между некопланарными круговыми орбитами.

Окончательно оптимальная программа управления получается в результате объединения вековой и периодической составляющих

$$\psi_{\text{opt}}(W, u) = \arctg[\text{tg} \bar{\psi}_{\max}(W) \cos u]. \quad (6.55)$$

**6.3.3. Синтезирующая функция и процедура оценки.** Оптимальная программа управления вектором тяги (6.55) не выражается аналитически. Между тем, если в пределах витка траектории использовать простую "релейную" программу переключения угла  $\psi$  (6.25), незначительно (в смысле интеграла  $I_1$ ) уступающую локально-оптимальной программе (6.38), то сравнительно просто удается получить аналитическое решение. Для "релейной" программы (6.25) интегралы  $I_1$  и  $I_2$  выражаются формулами (6.26). Функция  $R_2$  в задаче о минимуме характеристической скорости принимает следующий вид:

$$R_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} 2r^{3/2} \cos \psi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial i} \frac{2r^{1/2}}{\pi} \sin \psi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial W}. \quad (6.56)$$

Оптимальное управление  $\bar{\psi}_0$  можно найти из соотношения

$$\bar{\psi}_0 = \arctg(\pi r \frac{\partial \varphi}{\partial r} / \frac{\partial \varphi}{\partial i})^{-1}. \quad (6.57)$$

Отыскание управления  $\bar{\psi}_0$ , удовлетворяющего необходимым условиям 1-го порядка максимума  $R_2$  по координатам и управлениям, сводится к решению краевой задачи для следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dW} &= \frac{2\pi\psi_r r^{5/2}}{\sqrt{1 + \pi^2\psi_r^2 r^2}}; \\ \frac{di}{dW} &= \frac{2r^{1/2}}{\pi\sqrt{1 + \pi^2\psi_r^2 r^2}}; \\ \frac{d\psi_r}{dW} &= -\frac{3\pi\psi_r^2 r^{3/2}}{\sqrt{1 + \pi^2\psi_r^2 r^2}} - \frac{1}{\pi r^{1/2}\sqrt{1 + \pi^2\psi_r^2 r^2}}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

где  $\psi_r$  — частная производная  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ , вычисленная в точках предполагаемой минимали. Воспользуемся решением системы (6.58) [39]:

$$\begin{aligned} r &= \left[ 1 - \frac{2\left(1 - \frac{\cos(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2\cos(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} + \frac{1}{r_K}}} W + W^2 \right]^{-1}; & \text{а} \\ i &= i_0 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ W \frac{\sin(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} \left[ 1 - \frac{\cos(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} - W \sqrt{1 - \frac{2\cos(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} + \frac{1}{r_K}} \right]^{-1} \right\}; & \text{б} \\ \bar{\psi}_0 &= \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sin(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} \left[ 1 - \frac{\cos(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} - W \sqrt{1 - \frac{2\cos(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} + \frac{1}{r_K}} \right]^{-1} \right\}. & \text{в} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Конечная характеристическая скорость перелета определяется выражением

$$W_K = \sqrt{1 - \frac{2\cos(\pi\Delta i_K/2)}{\sqrt{r_K}} + \frac{1}{r_K}}. \quad (6.60)$$

Укажем здесь некоторые свойства решения (6.59), (6.60). Из первого выражения (6.59) следует, что зависимость радиуса  $r$  от характерис-

тической скорости может быть немонотонной. В частности, если радиус начальной орбиты больше, чем радиус конечной, при выполнении неравенства  $\sqrt{r_k} \cos(\pi \Delta i_k / 2) < 1$  радиус сначала возрастает до значения  $r_{\max}$ , а затем убывает до конечного значения  $r_k$ . При перелете на орбиту меньшего радиуса зависимость будет немонотонной, когда  $\cos(\pi \Delta i_k / 2) < \sqrt{r_k}$ ;  $r_k < 1$ .

В случае, когда радиусы начальной и конечной орбит одинаковы, при любых значениях угла между их плоскостями радиус сначала возрастает до  $W = W_k / 2$ , затем убывает до начального значения.

Анализ решений (6.59), (6.60) показывает, что максимальный радиус  $r_{\max}$  увеличивается с ростом  $\Delta i_k$ , стремясь к бесконечности при  $\Delta i_k = 2$  рад [39]. Поэтому, если угол между плоскостями орбит близок к двум радианам, решения, полученные на основе усредненных уравнений, будут давать большую погрешность. Таким образом, имеется определенные границы применимости метода усреднения.

Получим теперь выражение для синтезирующей функции  $\varphi(r, i, W)$ . Согласно теории (гл. 2) функция  $\varphi$ , вычисленная для произвольной точки траектории  $x(t)$ , есть взятое с обратным знаком минимальное значение функционала, соответствующее переходу от точки  $x(t)$  в точку  $x_k$ . В данной задаче минимизируемым функционалом является характеристическая скорость  $W_k$  (6.60). Поэтому выражение для синтезирующей функции можно записать так:

$$\varphi(r, i) = - \min_D W_k = - \left( 1 - \frac{2 \cos(\pi(i_k - i)/2)}{\sqrt{r_k/r}} + \frac{r}{r_k} \right)^{1/2}. \quad (6.61)$$

Индекс "0" в выражении (6.61) опущен, так как любая точка оптимальной траектории может теперь рассматриваться в качестве начальной.

Выражение (6.60) можно использовать для оценки оптимальности любых режимов управления и траекторий межорбитального перелета. Проблема оценки рассматривается в двух аспектах. Во-первых, выражение (6.61) приближенно задает нижнюю грань характеристической скорости перелета из точки с любыми начальными условиями  $(r, i)$  в точку с произвольными конечными условиями  $(r_k, i_k)$ . Во-вторых, следует помнить, что решения (6.59) получены с использованием усредненных уравнений, при условии, что эксцентриситет оскулирующей орбиты остается равным нулю. Если  $e \neq 0$ , то даже оптимальная амплитудная модуляция управления, вообще говоря, не гарантирует абсолютного оптимума в исходной задаче для модели движения (6.1). Однако, используя синтезирующую функцию (6.61), можно оценить степень близости решений (6.38) и (6.25) к абсолютно оптимальным (см. разд. 2.3), не прибегая к громоздкой процедуре отыскания последних в рамках модели движения (6.1).

Найдем частные производные функции  $\varphi$  по  $r, i$ . Очевидно,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2 \cos(\pi(i_K - i)/2)}{\sqrt{r_K/r}} + \right. \\
&+ \left. \frac{r}{r_K} \right)^{-1/2} \left( -\frac{1}{\sqrt{r r_K}} \cos \frac{\pi(i_K - i)}{2} + \frac{r}{r_K} \right); \\
\frac{\partial \varphi}{\partial i} &= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{2 \cos \frac{\pi(i_K - i)}{2}}{\sqrt{r_K/r}} + \right. \\
&+ \left. \frac{r}{r_K} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{r}{r_K}} \sin \frac{\pi(i_K - i)}{2}.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

При практическом вычислении оценки удобнее перейти от исходного аргумента — характеристической скорости, к другому аргументу — наклонению орбиты  $i$ . Последний изменяется монотонно, начальное и конечное значения его фиксированы. В итоге получим общее выражение для оценки в виде

$$\widetilde{W}_K - \min_D W_K \leq \Delta;$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_{i_0}^{i_K} \left\{ \max_{(r, \psi_{\max})} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{r I_1(\psi_{\max})}{2 I_2(\psi_{\max})} + \frac{\partial \varphi}{\partial i} - \frac{2\pi}{r^{1/2}} I_2^{-1}(\psi_{\max}) \right] - \right. \\
&- \left. \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{r \widetilde{I}_1(\widetilde{\psi}_{\max})}{2 \widetilde{I}_2(\widetilde{\psi}_{\max})} + \frac{\partial \varphi}{\partial i} - \frac{2\pi}{\widetilde{r}^{1/2}} \widetilde{I}_2^{-1}(\widetilde{\psi}_{\max}) \right] \right\} di.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Здесь  $\widetilde{I}_1(\widetilde{\psi}_{\max})$  и  $\widetilde{I}_2(\widetilde{\psi}_{\max})$  — интегралы, соответствующие оцениваемому режиму управления  $\widetilde{\psi}_{\max}(W)$ ;  $\widetilde{r}, \widetilde{i}$  — соответствующие параметры траектории.

На практике при оценке определенные трудности заключаются в операции взятия максимума по  $\psi_{\max}, r$  выражения, заключенного в квадратные скобки. Предлагается строить эту процедуру, разбивая ее, во-первых, на две: 1) взятие максимума по  $\psi_{\max}$ , точнее, по интегралам  $I_1$  и  $I_2$ , связанным с  $\psi_{\max}$  зависимостями (6.40); причем последняя операция может быть осуществлена в виде итерационной процедуры; в качестве начального приближения удобно брать границу  $I_{1B}$  или даже  $I_{1s}$  (разд. 6.2); 2) взятие максимума по  $r$ . Последняя операция должна выполняться с учетом нижних и верхних границ изменения радиуса орбиты  $r_H, r_B$ , которые, в свою очередь, определяются с учетом максимального эксцентриситета оскулирующей орбиты  $e_{\max}$  в виде  $r_H \approx r(1 - e_{\max})$ ;  $r_B \approx (1 + e_{\max})$ . Значение  $e_{\max}$  определяется либо в ходе чис-

Таблица 6.1

Вариант граничных условий	Программа управления	$W_{\text{к}}^*$ , км/с	$\psi_0, ^\circ$	$\psi_{\text{max}}, ^\circ$	$c^*$ , км/с	$m_{\text{T}}/m_0$
1	Релейная (6.25)	8,4650	57,12	—	20	0,345
					30	0,246
					50	0,156
2		6,0265	40,31	—	20	0,260
					30	0,182
					50	0,114
1	Локально-оптимальная	8,163	—	69,4	20	0,335
					30	0,238
					50	0,156
2	(6.38)	5,802	—	49,97	20	0,252
					30	0,176
					50	0,1095

ленного интегрирования серии траекторий с достаточно мелким шагом, либо задается априори (известно [39], например, что  $e_{\text{max}} \sim a_0$ ).

**6.3.4. Расчет перелетов на геостационарную орбиту.** Решения (6.27), (6.25), (6.38), (6.55), (6.59) позволяют сравнительно просто выполнить расчет перелетов между некомпланарными круговыми орбитами. Большой практический интерес представляет задача выведения стационарного спутника Земли: использование двигателей малой тяги позволит существенно увеличить массу полезного груза, выводимую на экваториальную орбиту.

Граничные условия перелета зададим в двух вариантах:

вариант 1:  $r_0^* = 6771$  км; ( $H_0^* = 400$  км);  $i_0^* = 51,6^\circ$ ;  $r_{\text{к}}^* = 42\,164$  км;  $i_{\text{к}}^* = 0$ ;

вариант 2:  $r_0^* = 6771$  км;  $i_0^* = 28,3^\circ$ ;  $r_{\text{к}}^* = 42\,164$  км;  $i_{\text{к}}^* = 0$ .

Сначала проведем сравнение двух программ управления: релейной (см. (6.25), рис. 6.4, а) и локально-оптимальной (см. (6.38), рис. 6.4, в), параметры которых  $\psi_0$  и  $\psi_{\text{max}}$  остаются постоянными вдоль траектории.

Результаты расчетов сведены в табл. 6.1. Следует отметить, что согласно (6.23) конечная характеристическая скорость не зависит от реактивного ускорения  $a_0$ , а определяется только граничными условиями перелета и интегралом  $I_1$ . Результаты расчетов показывают, что локальная оптимизация управления вектором тяги в пределах витка позволяет уменьшить характеристическую скорость перелета примерно на 3,5 ... 4 %. Выигрыш в массе рабочего тела составит при этом до 1 % начальной массы.

Рассмотрим теперь перелеты с оптимальной амплитудной модуляцией программы управления (6.55), (6.59, в). Краевые задачи, сформу-

лированные в разд. 6.3, решались модифицированным методом Ньютона [28].

В ходе численного решения задачи проводилась проверка достаточного условия оптимальности траектории (6.50), показавшая, что решение (6.55) действительно обеспечивает абсолютный оптимум в задаче о минимуме характеристической скорости. Конечная характеристическая скорость для 1-го варианта равна 7,640 км/с, для 2-го варианта – 5,483 км/с.

Результаты расчета оптимальной траектории перелета на орбиту стационарного спутника Земли для 1-го варианта граничных условий приведены на рис. 6.5.

Максимальный угол отклонения вектора тяги от трансверсали  $\psi_{\max}$  возрастает по мере приближения к конечной орбите. Характерно, что радиус орбиты сначала увеличивается до некоторого значения  $r_{\max} > r_k$ , а затем уменьшается до значения  $r_k$ . При достижении  $r_{\max}$  угол  $\psi_{\max}$  равен  $90^\circ$ , а затем тяга начинает тормозить аппарат и уменьшать радиус орбиты. Такая структура оптимальной траектории хорошо согласуется с известными законами механики космического полета, согласно которым поворот плоскости орбиты более эффективен на большем удалении от центра притяжения. Поскольку на участке торможения угол ориентации тяги превышает  $90^\circ$ , интеграл  $I_1$ , характеризующий среднее значение трансверсальной компоненты тяги, становится отрицательным.

Продолжительность перелета  $T$ , соответствующая оптимальной программе управления, представлена на рис. 6.6.

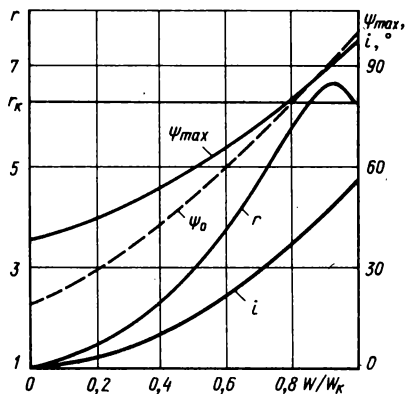


Рис. 6.5. Параметры оптимальной траектории перелета на стационарную орбиту:  $r_k = 6,2319$ ,  $\Delta i_k = 0,9$

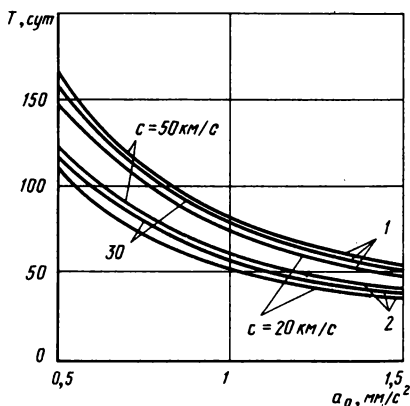


Рис. 6.6. Зависимость времени перелета на стационарную орбиту от реактивного ускорения  $a_0$  и скорости истечения  $c$  для двух вариантов (1,2) граничных условий

Оптимизация параметра  $\psi_0$  релейной программы (6.59, в) дает для 1-го варианта граничных  $W_k^* = 7,805$  км/с, а для 2-го  $W_k^* = 5,56$  км/с. Траектория перелета имеет те же особенности, которые отмечались для оптимальной траектории; зависимость параметра  $\psi_0$  от  $W$  показана пунктиром на рис. 6.5. В целом последовательная оптимизация периодической и вековой составляющих программы управления позволяет получить выигрыш в характеристической скорости порядка 10 %, что позволяет сэкономить до 2 ... 3 % начальной массы. В то же время программа (6.59), удобная для проведения расчетов, незначительно уступает оптимальному режиму (6.55), а потому может использоваться в качестве номинальной.

#### 6.4. МЕЖОРБИТАЛЬНЫЙ ПЕРЕЛЕТ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ

6.4.1. Перелет с ограничением на расстояние до притягивающего центра. В разд. 6.3 отмечалось, что оптимальные траектории межорбитальных перелетов, как правило, характеризуются немонотонностью расстояния до притягивающего центра. Так, при релейной программе управления (6.59) максимальный радиус определяется выражением

$$r_{\max} = \left(1 - \frac{2\cos(\pi\Delta i_k/2)}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{r_k}\right) \left(\frac{\sin^2(\pi\Delta i_k/2)}{r_k}\right)^{-1}. \quad (6.64)$$

Видно, что максимальный радиус увеличивается с ростом  $\Delta i_k$ , стремясь к бесконечности при  $\Delta i_k = 2$  рад (здесь сказывается погрешность метода усреднения, и аналитические решения становятся непригодными). По ряду причин максимальный радиус орбиты может быть ограничен некоторой величиной  $r_{\text{пред}}$ . Сформулируем задачу перехода между круговыми орбитами с учетом ограничения:  $r \leq r_{\text{пред}}$ . Примем, что движение КА описывается уравнениями (6.46). Найдем оптимальное управление  $\psi_0(W)$ , обеспечивающее максимум конечного наклонения орбиты  $i_k$  при фиксированной конечной характеристической скорости  $W_k$ . В силу взаимности эта задача эквивалентна исходной задаче о минимуме  $W_k$  при  $i_k = \text{fixe}$ . Итак, пусть

$$I = -i(W_k) = - \int_0^{W_k} \frac{di}{dW} dW \rightarrow \min. \quad (6.65)$$

Составим функцию  $R$ :

$$R = \frac{d\varphi}{dr} \cdot 2r^{3/2} \cos\psi_0 + (2/\pi)r^{1/2} \sin|\psi_0| + \frac{d\varphi}{dW}. \quad (6.66)$$

Здесь  $\frac{d\varphi}{dr}$ ,  $\frac{d\varphi}{dW}$  — частные производные синтезирующей функции  $\varphi(W, r)$  по соответствующим координатам.

Положим  $\frac{d\varphi}{dr} = 0$ . Тогда функция  $R$  принимает вид

$$R = R_1 = (2/\pi)\sqrt{r}A + \frac{d\varphi}{dW}. \quad (6.67)$$

Здесь в качестве управления рассматривается параметр  $A = \sin|\psi_0|$ ;  $A \in [0, 1]$ . Очевидно, абсолютный максимум  $R_1$  по  $A, r$  обеспечивается при

$$A \equiv 1; r = r_B. \quad (6.68)$$

Соотношения (6.68) задают абсолютную минималь функционала, не обеспечивающую, однако, выполнение терминальных условий. Решение (6.68) может служить для оценки оптимальности любых режимов  $(\psi_0, r)$ , принадлежащих исходному классу  $D$ , т.е. удовлетворяющих граничным условиям, уравнениям движения и ограничениям. Выражение для оценки имеет вид

$$I(\tilde{\psi}_0) - \min_D I \leq \Delta = \int_0^{W_K} \frac{2}{\pi} (\sqrt{r_B} - \sqrt{r} \sin|\tilde{\psi}_0|) dW. \quad (6.69)$$

Формула (6.69) подсказывает и подходящую реализацию режима, принадлежащего классу  $D$ : на начальном участке — скорейший выход на минималь (например, разгон с трансверсальной тягой без поворота плоскости орбиты), на конечном участке — скорейший сход с минимали (торможение без поворота плоскости орбиты). Соответствующие этому режиму зависимости  $r(W)$  дадут верхние границы  $r_B$  изменения радиуса, которые и следует использовать в формуле оценки (6.69). Если большую часть траектории занимает участок движения с  $r = r_{\text{пред}}$ , получается удовлетворительная оценка, что говорит о хорошей аппроксимации минимали в классе  $D$ .

Если величина оценки окажется завышенной, можно предположить следующий способ отыскания минимали, реализуемой в классе  $D$ . Положим

$\frac{d\varphi}{dr} = 0$  и исследуем на максимум выражение (6.67), учитывая связь  $A^2 + B^2 = 1$ . Здесь  $B = \cos\psi_0$ . Предположим, что при каждом фиксированном значении  $B$  можно построить верхнюю границу радиуса  $r_B(B)$ . Тогда приходим к исследованию на максимум функции

$$R_2 = (2/\pi)\sqrt{r}A + \lambda(A^2 + B^2 - 1) + \frac{d\varphi}{dW}. \quad (6.70)$$

Здесь  $\lambda < 0$  – постоянный множитель.

Приходим к соотношениям:

$$(2/\pi)\sqrt{r} + 2\lambda A = 0; \quad A = -\sqrt{r}/(\pi\lambda); \quad (6.71)$$

$$R_3 = \max_A R_2 = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{r}{\pi\lambda} + \frac{r}{\pi^2\lambda} + \lambda(B^2 - 1) + \frac{\partial \varphi}{\partial W},$$

откуда

$$\bar{r} = r_B(B_*). \quad (6.72)$$

Подберем  $\lambda$  так, чтобы при  $r = r_{\text{пред}}$  параметр  $A = \sin|\psi_0|$  становился равным единице:  $\lambda = -\pi/\sqrt{r_{\text{пред}}}$ , откуда получаем

$$\bar{A} = \sin|\bar{\psi}_0| = \sqrt{r/r_{\text{пред}}}. \quad (6.73)$$

Выражение (6.73) показывает, что  $\sin|\bar{\psi}_0|$  сначала монотонно возрастает с ростом радиуса, достигая максимального значения при  $r = r_{\text{пред}}$ , а затем монотонно убывает, достигая в конце заданного значения  $r_K$ . Точки прихода на минималь и схода с нее легко рассчитываются по уравнениям (6.46), замкнутым управлением (6.73). Легко проверить, что решение (6.72), (6.73) удовлетворяет условиям теоремы В.Ф. Кротова и реализуется в исходном классе  $D$ , а следовательно, задает искомую минималь.

**6.4.2. Перелет в заданную точку конечной орбиты.** Рассмотрим задачу пространственного перелета между круговыми орбитами при дополнительном условии – фиксированном угловом положении аппарата на конечной орбите. Задачи такого типа принято иногда называть задачами наведения в расчетную точку орбиты. Положение аппарата относительно заданной точки конечной орбиты будем характеризовать величиной:

$$u' = u - u_K, \quad (6.74)$$

где  $u$  – текущий аргумент широты КА;  $u_K$  – заданное значение аргумента широты на конечной орбите. Дифференцируя  $u'$  по времени, получим

$$\frac{du'}{dt} = 2\pi\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_{0K}}\right), \quad (6.75)$$

где  $T_0$ ,  $T_{0K}$  – текущий период обращения и период обращения на конечной орбите.

В качестве программы управления выберем близкую к оптимальной программу (6.59 в), которая характеризуется постоянством модуля угла ориентации тяги внутри витка и монотонным изменением  $\psi_0$  от витка к витку.

Радиус при таком управлении для задачи перелета с начальной орби-

ты ( $r_0 = 1, i = i_0$ ) на конечную ( $r_K, i_K$ ) меняется в соответствии с (6.59,а). Приведем уравнение (6.75) к другому аргументу – характеристической скорости  $W$ ; учитывая, что для околокруговой орбиты  $T_0 = 2\pi r^{3/2}$ , получим

$$\frac{du'}{dW} = \frac{r_K^{3/2} - r^{3/2}}{a_0 (rr_K)^{3/2}} \exp\left(-\frac{W}{c}\right). \quad (6.76)$$

Сформулируем теперь задачу об оптимальном (в смысле минимума  $W_K$ ) управлении медленно меняющимся параметром – модулем угла  $\psi_0$  в рамках модели движения, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dW} &= 2r^{3/2} \cos\psi_0; \\ \frac{di}{dW} &= \frac{2}{\pi} r^{1/2} \sin\psi_0; \\ \frac{du'}{dW} &= \frac{r_K^{3/2} - r^{3/2}}{a_0 (rr_K)^{3/2}} \exp\left(-\frac{W}{c}\right), \end{aligned} \quad (6.77)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} W = 0: r = 1; i = i_0; u' = u'_0; \\ W = W_K: r = r_K; i = i_K; u' = 0. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Введение дополнительного граничного условия, естественно, сужает класс допустимых траекторий и управлений. В соответствии с подходом, основанным на последовательной оптимизации перелета, решение задачи, содержащей меньшее число связей и ограничений, используем в качестве гарантирующей оценки решения задачи более высокого порядка.

Обозначим множество допустимых состояний и управлений в данной задаче через  $D_1$ . Если  $D$  – множество допустимых в задаче, сформулированной в разд. 6.3 (без учета граничного условия и  $u'$ ), то, очевидно,  $D_1 \subseteq D$  и

$$\min_{D_1} W_K \geq \min_D W_K. \quad (6.79)$$

Последнее соотношение позволяет сразу же получить нижнюю границу критерия оптимальности  $W_K$ , а также построить алгоритм оценки любого режима управления с учетом ограничения на угловую дальность перелета, используя решение (6.61).

В дальнейшем удобнее решать эквивалентную задачу: искать управление, дающее максимум конечного наклона  $i_K$  при фиксированной конечной характеристической скорости  $W_K$ .

Составим функции  $R$  и  $G$ :

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial r} 2r^{3/2} \cos \psi_0 + \frac{2}{\pi} r^{1/2} \sin \psi_0 +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial u'} \frac{r_K^{3/2} - r^{3/2}}{a_0 (r r_K)^{3/2}} \exp\left(-\frac{W}{c}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial W} = H + \frac{\partial \varphi}{\partial W}; \quad (6.80)$$

$$G = \varphi(W_K, r_K, i_K, 0) - \varphi(0, r_0, i_0, u'_0).$$

Задача оптимизации сводится теперь к исследованию на абсолютный максимум по координатам и управлениям функции  $R$  и к минимизации функции  $G$  по параметру  $u'_0$ , который может, вообще говоря, быть не заданным.

Условие минимума функции  $G$  и по  $u'_0$  приводит к соотношению

$$\frac{\partial G}{\partial u'_0} \delta u'_0 = - \frac{\partial \varphi(0, r_0, i_0, u'_0)}{\partial u'_0} \delta u'_0 = 0. \quad (6.81)$$

Потребуем, чтобы функция  $G$  не зависела от  $u'_0$ . Тогда, полагая  $\frac{\partial G}{\partial u'_0} \equiv 0$ , приведем к выражению для функции  $R$ , аналогичному (6.56). Следовательно, известные решения (6.59 в), (6.61) будут и решениями сформулированной задачи. При этом начальное положение аппарата на орбите  $u'_0$  выбирается оптимальным.

Расчет оптимального значения  $u'_0$  можно вести следующим образом. Пусть известно решение задачи, полученное без учета угловой дальности перелета, тогда известна зависимость  $r(W)$ . Проинтегрировав (6.76) вдоль траектории, получим связь конечного значения  $u'_K$  с начальными  $u'_0$

$$u'_K = u'_0 + \frac{1}{a_0 r_K^{3/2}} \int_0^{W_K} \frac{r_K^{3/2} - r^{3/2}}{r^{3/2}} \exp\left(-\frac{W}{c}\right) dW. \quad (6.82)$$

В результате интегрирования (6.82) с учетом зависимости  $r(W)$  (6.59 а), получим расчетное значение  $u'_0$ :

$$u'_0 = - \frac{2W_K - \xi}{8} r_K^{-1/2} \left[ r_K^{-1} + \frac{3}{0} (4 - \xi^2) \right] - \frac{3(4 - \xi^2)}{128} \ln(2r_K^{-1/2}) +$$

$$+ 2W_K \xi - \frac{\xi}{3} \left[ 1 + \frac{3}{8} (4 - \xi^2) \right]. \quad (6.83)$$

Здесь

$$\xi = 2 \left( 1 - \frac{\cos(\pi(i_K - i_0)/2)}{\sqrt{r_K}} \right) W_K^{-1}. \quad (6.84)$$

Очевидно, в случае оптимального выбора момента старта программа управления  $\bar{\psi}_0(W)$  не отличается от программы (6.59 в); синтеза

рующая функция также определяется выражением (6.61), поэтому процедура оценки любых режимов управления, удовлетворяющих заданным граничным условиям, в том числе и по  $u'$ , совпадает с описанной в разд. 6.3.

Отметим, что уравнение (6.75) позволяет указать некоторые особенности режимов, пригодных для практического использования: если  $u_{\kappa} > u_0$ , то необходимо уменьшить период обращения, уменьшая радиус орбиты и наоборот, если  $u_{\kappa} < u_0$  увеличить период обращения. Такая эволюция траектории достигается соответственно уменьшением или увеличением угла  $\psi_0$  на некоторую величину.

Рассмотрим теперь перелет с заданным относительным положением аппарата на начальной орбите,  $u'_0 = \text{fixe}$ .

Условия 1-го порядка максимума функции  $R$  по координатам и управлениям приводят к системе уравнений:

$$\frac{d\psi_r}{dW} + \frac{\partial H}{\partial r} = 0; \quad \frac{d\psi_W}{dW} + \frac{\partial H}{\partial W} = 0; \quad (6.85)$$

$$\frac{d\psi_u}{dW} = 0;$$

$$\bar{\psi}_0 = \arg \max H = \text{arctg}(\psi_r, \pi_r)^{-1}. \quad (6.86)$$

Здесь  $\psi_r, \psi_u, \psi_W$  — частные производные функции  $\varphi(r, u', W)$  в точках предполагаемой минимали.

Отыскание решения, удовлетворяющего условиям 1-го порядка максимума  $R$  по координатам и управлениям (необходимым условиям оптимума), сводится теперь к решению трехпараметрической краевой задачи для систем уравнений (6.77) и (6.85), замкнутых управлением (6.86), с граничными условиями (6.78).

Расчеты, проведенные для перелетов на орбиту стационарного ИСЗ с низкой круговой орбиты высотой  $H_0^* = 400$  км и наклоном  $i_0^* = 51,6^\circ$ , показали, однако, что конечная характеристическая скорость перелета слабо зависит от параметра  $u'_0$ . Это можно объяснить тем, что периоды обращения на начальной и конечной орбитах существенно отличаются, а время перелета при малых  $a_0$  достаточно велико; в результате время ожидания оптимального положения аппарата на начальной орбите не превышает начального периода обращения ( $\sim 1,5$  ч) и не сказывается сколько-нибудь значительным образом на энергетике перелета.

Большой практический интерес представляет определение времени начала маневра фазирования, удовлетворяющего требованиям: а) момент его начала должен располагаться по возможности ближе к окончанию перелета; б) дополнительные затраты характеристической скорости на удовлетворение граничного условия по  $u$  не должны превышать некоторого, наперед заданного значения.

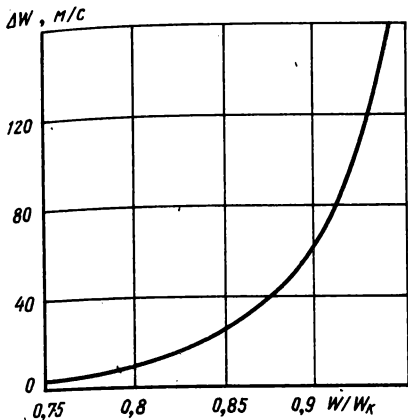


Рис. 6.7. Дополнительные затраты характеристической скорости

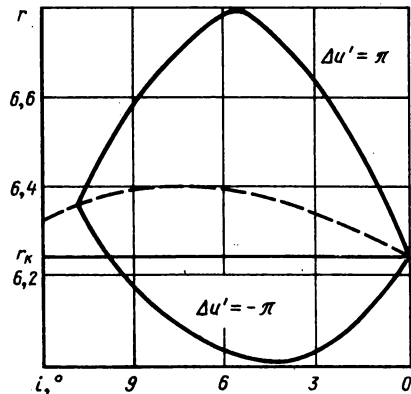


Рис. 6.8. "Предельные" траектории перелетов в заданную точку стационарной орбиты

На рис. 6.7 показана зависимость дополнительных затрат характеристической скорости на маневр фазирования  $|\Delta W|$  от отношения текущей характеристической скорости  $W$  к ее конечному значению  $W_k$ , вычисленному для граничных условий перелета согласно (6.60). Расчет выполнен для перелета, соответствующего  $a_0^* = 10^{-3} \text{ м/с}^2$ ;  $c^* = 60 \text{ км/с}$ .

Решение краевой задачи проводилось следующим образом: на траектории перелета (6.59 а, б) выбиралась точка  $(r_{\text{фаз}}, i_{\text{фаз}})$ ; требовалось перейти из этой точки в конечную  $(r_k, i_k, u_k)$ , причем  $u(W_{\text{фаз}}) - u_k = \pm \pi$  (предельные относительные положения аппарата). Затем велся поиск недостающих параметров  $\psi_{r_0}, \psi_{u_0}, \psi_{W_0}$  с использованием алгоритма модифицированного метода Ньютона. Окончание интегрирования происходило при достижении наклона  $i_k = 0$ .

Расчеты показали, что по мере приближения точки начала маневра фазирования к конечной происходит резкое увеличение дополнительных затрат  $\Delta W$ . Интересно отметить, что перелеты с  $\Delta u' = \pm \pi$  оказываются энергетически равноценными (различие в  $\Delta W$  не превышает десятых долей процента).

Пользуясь рис. 6.7, всегда можно указать такие значения  $r_{\text{фаз}}, i_{\text{фаз}}$ , для которых увеличение характеристической скорости не превысит некоторой допустимой величины. Эти значения соответствуют параметрам орбиты, достаточно близкой к стационарной. Например, если принять  $r_{\text{фаз}} = 6,37$ ,  $i_{\text{фаз}} = 9,6^\circ$ , то дополнительные затраты характеристической скорости не превысят 0,3 %. На рис. 6.8 показаны две "предельные" траектории, соответствующие случаям:  $\Delta u' = \pm \pi$ ; пунктиром показана зависимость  $r(i)$  для траектории (6.59 а, б), рассчитанной без учета граничного условия по  $u$ . Результаты показывают, что при  $\Delta u' = \pi$  аппарат

набирает значительно большую высоту, чем  $r_{\max}$ , увеличивая при этом период обращения, а затем снижается до высоты стационарной орбиты. Соответственно изменяется и программа управления углом ориентации тяги  $\psi_0$ ; в начале маневра фазирования угол  $\psi$  уменьшается для подъема орбиты, а затем тяга переключается на торможение. При  $\Delta u' = -\pi$  аппарат сначала снижается, уменьшая период обращения (тяги при этом сразу переключается на торможение), а затем снова поднимается до высоты стационарной орбиты).

## 6.5. СОВМЕСТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРНОГО И УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЙ

**6.5.1. Необходимые условия реализации оптимальной программы управления.** Прежде чем решать задачу совместной оптимизации траекторного и углового движений, необходимо определить условия, при которых программное изменение ориентации тяги оказывается реализуемым на более узком множестве  $D_1$  допустимых траекторий и параметров углового движения КА, чем исходное множество  $D$  допустимых траекторий и управлений. По-прежнему считая, что двигатели жестко закреплены относительно корпуса КА, а разворот КА происходит только вокруг связанной оси  $OY_1$ , совпадающей с радиусом-вектором  $r$ , получим выражение для управляющего момента  $M_{Y_1}$ .

Структура релейных программ управления вектором тяги (6.25), (6.41) показывает, что они являются практически нереализуемыми, так как требуют бесконечно большого управляющего момента для мгновенной переориентации аппарата.

Анализ уравнений углового движения аппарата (6.10) приводит к условию реализации программы управления  $\psi(t)$  в виде

$$\epsilon_{\max} = \left( \frac{M_{Y_1}}{I_{Y_1}} \right)_{\max} \geq \max_t \frac{d^2 \psi}{dt^2}. \quad (6.87)$$

Это условие носит глобальный характер, т.е. применимо к анализу на всей траектории перелета. Получим локальное условие реализации, пригодное для анализа движения в пределах витка, на котором используется программа  $\psi(t)$ . Тогда, учитывая, что

$$\frac{du}{dt} = \omega_0 = \sqrt{1/r^3} \approx \text{const}, \quad (6.88)$$

получим выражение

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} \approx \frac{d^2 \psi(u)}{du^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d^2 \psi}{du^2}. \quad (6.89)$$

Локальное условие реализации программы управления примет теперь вид

$$\epsilon_{\max} \geq \frac{1}{r^3} \max_u \frac{d^2 \psi}{du^2}, \quad (6.90)$$

а для всей траектории в целом

$$\epsilon_{\max} \geq \max_r \left( \frac{1}{r^3} \max_u \frac{d^2 \psi}{du^2} \right). \quad (6.91)$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что параметры траектории, в том числе и радиус  $r$ , меняются медленно, в силу чего переменные  $r$  и  $u$  разделяются.

Проверим с помощью условия (6.91) возможность реализации локально-оптимальной программы (6.38). Поскольку  $\operatorname{tg} \bar{\psi} = \operatorname{tg} \psi_{\max} \cos u$ , легко получить выражение

$$\frac{d^2 \psi}{du^2} = -\operatorname{tg} \psi_{\max} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{\max} (1 + \sin^2 u)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{\max} \cos^2 u)^2} \cos u. \quad (6.92)$$

Характер зависимости производной  $\frac{d^2 \psi}{du^2}$  от аргумента широты показан на рис. 6.9. Видно, что в пределах витка имеется несколько точек экстремума  $\frac{d^2 \psi}{du^2}$ , соответствующих локальным максимумам и минимумам углового ускорения. С возрастанием угла  $\psi_{\max}$  уровень

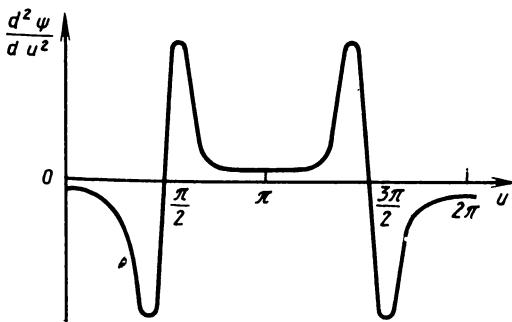


Рис. 6.9. Характер изменения  $\frac{d^2 \psi}{du^2}$  на витке траектории

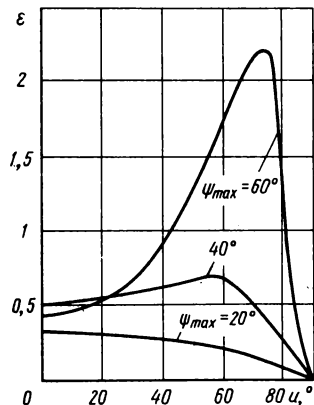


Рис. 6.10. Профиль изменения углового ускорения при различных значениях  $\psi_{\max}$

максимума  $\epsilon$  резко растет (рис. 6.10); при  $\psi_{\max} = \pi/2$  или  $3\pi/2$   $|\epsilon| = \infty$ . Это означает, что программа управления вектором тяги становится практически нереализуемой. Поэтому оптимальная программа (6.55), полученная путем объединения периодической и вековой составляющих управления, не удовлетворяет необходимому условию реализации (6.87), по крайней мере, в одной точке траектории и не обеспечивает поэтому абсолютного оптимума на множестве  $D_1$ .

В табл. 6.2. приведены максимальные значения модуля углового ускорения, рассчитанные по формуле (6.92), для уже упоминавшихся двух вариантов граничных условий перелета КА на орбиту стационарного ИСЗ, а также значения максимального управляющего момента  $M_{Y_1}$ , потребного для реализации локально-оптимальной программы управления вектором тяги (расчет выполнен для гипотетического КА с моментом инерции  $I_{Y_1} = 10^8$  кг·м<sup>2</sup>). Приведенные данные показывают, что для осуществления перелетов КА на геостационарную орбиту с локально-оптимальной программой изменения угла ориентации тяги на витке ( $\psi_{\max} = \text{const}$ ), требуется значительный управляющий момент, что создает определенные трудности и заставляет вести поиск приближенно-оптимальных программ, заведомо удовлетворяющих ограничениям на управляющий момент.

**6.5.2. Структура управления угловым движением.** Выберем такую структуру управления углом ориентации тяги  $\psi$  в пределах витка, которая была бы близкой по профилю к оптимальной программе (6.55) и заведомо реализуемой управляющим моментом. Потребуем, чтобы в окрестности точек с координатами  $u_{1,2} = \pi/2; 3\pi/2$  постоянный по модулю управляющий момент  $M_{Y_1}$  обеспечивал переориентацию аппарата из положения  $\psi = \psi_{\max}$  в положение  $\psi = -\psi_{\max}$  или наоборот. На остальной части витка, когда  $|\psi| = \psi_{\max}$ , управляющий момент равен нулю (рис. 6.11). Легко установить, что управление подобной структуры обеспечивает оптимальный по быстродействию разворот КА.

Угловое ускорение, реализующее данную программу, можно представить так:

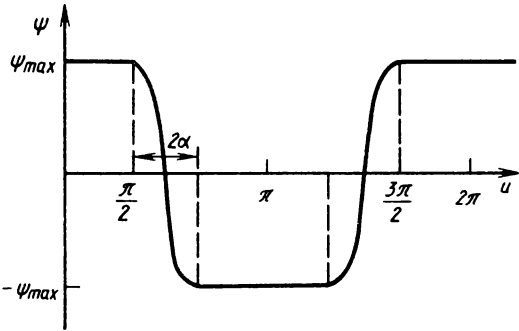
$$\epsilon = -\epsilon_{\max} \text{sign}(\cos u) \left\{ 1 + \text{sign}[\sin^2 u - \sin^2(\pi/2 - \alpha)] \right\} / 2, \quad (6.93)$$

где  $\epsilon_{\max}$  — модуль максимального углового ускорения, создаваемого

Таблица 6.2

Вариант граничных условий	$W_{K}^*$ , км/с	$\psi_{\max}^*$ , °	$\frac{ \epsilon _{\max, \text{ безр.}}}{1/c^2}$	$M_{Y_1}^*  _{\max}$ , Н·м
1	8,163	69,40	$\frac{4,810}{6,168 \cdot 10^{-6}}$	616,8
2	5,802	49,97	$\frac{1,148}{1,472 \cdot 10^{-6}}$	147,2

Рис. 6.11. Оптимальная по быстродействию программа переориентации вектора тяги



управляющим моментом  $M_{Y_1}$ . Через  $\alpha$  обозначен угол, характеризующий половину участка разворота КА. На этом участке угол  $\psi$  изменяется по закону

$$\psi = C_1 + C_2 t + \epsilon_{\max} t^2 / 2, \quad (6.94)$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые константы. Легко получить выражения для угла  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt{2\psi_{\max} / (\epsilon_{\max} r^3)}. \quad (6.95)$$

Ясно, что при фиксированных значениях  $\psi_{\max}, \epsilon_{\max}$ , угол  $\alpha$ , характеризующий протяженность участка разворота, будет тем меньше, чем больше радиус орбиты.

Заметим, что участок постоянства знака управляющего момента не должен превышать четверти витка. Отсюда  $\alpha \leq \pi/2$ . Подставляя предельное значение  $\alpha = \pi/2$  в (6.95) и выражая  $\psi_{\max}$ , получим предельные значения угла  $\psi_{\max}$ :

$$\psi_{\max\text{пред}} = \pi^2 \epsilon_{\max} r^3 / 8. \quad (6.96)$$

В этом случае на витке участок движения с постоянным углом  $\psi$  вырождается; аппарат совершает непрерывные развороты вокруг оси  $OY_1$  из положения  $\psi_{\max}$  в положение  $-\psi_{\max}$  и наоборот.

Определим теперь угол  $\psi$  на участке переориентации КА как функцию угла  $u$ . Для этого выразим  $\epsilon_{\max}$  из выражения (6.95) и подставим его в (6.94). С учетом граничных условий для участка разворота получим

$$\psi = \psi_{\max} - \psi_{\max} \frac{(u - \pi/2 + \alpha)^2}{\alpha^2}. \quad (6.97)$$

Интегралы  $I_1, I_2$  (см. разд. 6.3) приводятся в этом случае к виду

$$I_1 = 4 \left\{ \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \psi_{\max} + \alpha \int_0^1 \cos \psi_{\max} (1 - z^2) dz \right\}; \quad (6.98)$$

$$I_2 = 4 \left\{ \sin \psi_{\max} \cos \alpha + \alpha_0 \int_0^1 \sin \psi_{\max} (1 - z^2) \sin \alpha (1 - z) dz \right\}, \quad (6.99)$$

а интеграл  $F_1$ , выражающий расход рабочего тела на управление угловым движением,

$$F_1 = 2\pi(1 + 2\kappa\alpha/\pi). \quad (6.100)$$

Уравнения движения КА, реализующего оптимальную по быстродействию программу разворота вектора тяги (6.97), запишутся теперь так:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dW'} &= \frac{4r^{3/2}}{\pi(1 + 2\kappa\alpha/\pi)} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos\psi_{\max} + \alpha I_1 \right]; \\ \frac{di}{dW'} &= \frac{2r^{1/2}}{\pi(1 + 2\kappa\alpha/\pi)} [\cos\alpha \sin\psi_{\max} + \alpha I_2], \end{aligned} \quad (6.101)$$

где

$$\begin{aligned} I_1^0 &= \int_0^1 \cos\psi_{\max}(1 - z^2) dz; \\ I_2^0 &= \int_0^1 \sin\psi_{\max}(1 - z^2) \sin\alpha(1 - z) dz. \end{aligned} \quad (6.102)$$

При фиксированных граничных условиях перелета ( $r, i$ ) и параметрах  $\kappa, \epsilon_{\max}$  всегда можно подобрать такой  $\psi_{\max} = \text{const}$ , который обеспечивает переход с круговой орбиты с параметрами ( $r_0, i_0$ ) на круговую орбиту с параметрами ( $r_K, i_K$ ). Угол  $\alpha$  связан с  $\psi_{\max}, \epsilon_{\max}, r$  соотношением (6.94).

Расчеты некоторых перелетов на геостационарную орбиту были выполнены для уже упоминавшихся вариантов граничных условий, как для совместной ( $\kappa = 0$ ), так и для раздельной ( $\kappa = 0,1$ ) схемы управления движением. Результаты расчетов приведены в табл. 6.3 ( $\psi_{\max} = \text{const}$ ). Данные таблицы показывают, что характеристическая скорость перелета определенным образом зависит от уровня располагаемого углового ускорения. Эту зависимость можно объяснить двумя обстоятельствами. При очень малых значениях  $\epsilon$  на начальном этапе перелета (вариант 1,  $\epsilon = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}^2$ ) реализуется движение с  $\psi_{\max} = \psi_{\max \text{пред}}$  (6.95), при котором аппарат совершает непрерывные развороты в плоскости местного горизонта ( $\alpha \equiv \pi/2$ ). В результате наиболее интенсивное изменение наклонения орбиты происходит на большем удалении от центра притяжения, что энергетически гораздо выгоднее. Однако ясно, что при  $\epsilon = 0$  поворот плоскости орбиты вообще невозможен. Поэтому для каждого перелета, очевидно, существует некоторое "предельное" минимальное значение  $\epsilon$ , позволяющее реализовать перелет с заданными граничными условиями.

С другой стороны, чем больше уровень располагаемого углового ускорения, тем ближе профиль изменения угла к релейной программе

(6.25), которая, как было показано выше, не является абсолютно оптимальной. Поэтому можно предположить, что для совместной схемы управления существует некоторое оптимальное значение углового ускорения  $\epsilon_{opt}$ , обеспечивающее минимальную характеристическую скорость перелета.

Следует заметить, что в отличие от совместной раздельная схема управления всегда требует расхода рабочего тела на управление. Расчеты показывают, что дополнительные затраты рабочего тела составляют 2 ... 3 % от суммарного расхода или около 1 % начальной массы аппарата.

На рис. 6.12 показаны характерные зависимости параметров траектории  $r$ ,  $i$  и управления  $\psi_{max}$ ,  $\alpha$  для 1-го варианта граничных условий с различными значениями углового ускорения  $\epsilon$ .

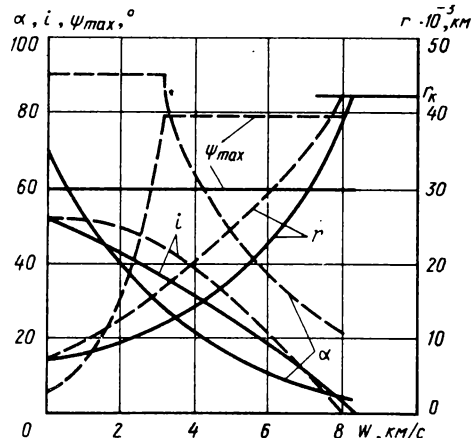
**6.5.3. Задача о минимуме суммарных затрат рабочего тела на управление траекторным и угловым движением.** Сформулируем теперь задачу выбора оптимальной программы изменения угла  $\psi_{max}$  и параметра  $\alpha$  при переходе между круговыми некомпланарными орбитами. Уравнения траекторного движения КА, учитывающие динамику его углового движения, имеют вид (6.101).

Располагаемое угловое ускорение  $\epsilon$  и параметр  $k$  фиксированы, а параметр  $\alpha$  связан с  $\epsilon$ ,  $r$  зависимостью (6.95). Управлением в данной

$\epsilon^*_{max} \cdot 10^6, 1/c^2$	$k$	Вариант граничных условий	$W^*_{к}, км/с$
0,1	0	1	8,031
		2	—
1,0	0	1	—
		2	5,912
1,1	0	1	8,119
		2	5,915
	0,1	1	8,429
		2	6,111
1,5	0	1	8,153
		2	5,925
2,0	0	1	8,183
		2	5,935

Рис. 6.12. Характер изменения параметров траектории  $r$ ,  $i$  и управления  $\psi_{max}$ ,  $\alpha$  при перелете на геостационарную орбиту:

$\epsilon_{max} = 2 \cdot 10^{-6} 1/c^2$ ; - - -  
 $\epsilon_{max} = 0,1 \cdot 10^{-6} 1/c^2$



задаче будет максимальный угол отклонения тяги из плоскости орбиты  $\psi_{\max}$ , который является медленно меняющейся функцией аргумента  $W'$ . Требуется найти минимум конечной характеристической скорости перелета  $W'_k$ .

Составим функцию

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{4r^{3/2}}{\pi(1 + 2\kappa\alpha/\pi)} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \psi_{\max} + \alpha I_1^0 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial i} \frac{2r^{1/2}}{\pi(1 + 2\kappa\alpha/\pi)} [\cos \alpha \sin \psi_{\max} + \alpha I_2^0] + \frac{\partial \varphi}{\partial W'} \quad (6.103)$$

Обозначая частные производные синтезирующей функции  $\varphi(r, i, W')$  в точках предполагаемой минимали через  $\psi_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  и  $\psi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial i}$ , запишем необходимые условия максимума  $R$  по переменным  $r, i, \psi_{\max}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_r}{dW'} + \psi_r \left\{ \frac{3r^{1/2} \cos \psi_{\max}}{1 + 2\kappa\alpha/\pi} + \frac{12\alpha r^{1/2} \kappa}{\pi^2(1 + 2\kappa\alpha/\pi)} \times \right. \\ \left. \times \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \psi_{\max} + \alpha I_1^0 \right] \right\} + \psi_i \times \\ \times \left\{ \frac{\sin \psi_{\max} (\cos \alpha + 3\alpha \sin \alpha) - 2\alpha I_2^0 - 3\alpha^2 I_3^0}{\pi r^{1/2} (1 + 2\kappa\alpha/\pi)} + \right. \\ \left. + \frac{6\alpha \kappa}{\pi^2 r^{1/2} (1 + 2\kappa\alpha/\pi)} [\cos \alpha \sin \psi_{\max} + \alpha I_2^0] \right\} = 0; \\ \psi_i = \text{const}; \bar{\psi}_{\max} = \text{argmax} R. \end{aligned} \quad (6.104)$$

$\psi_{\max}$

Здесь

$$I_3^0 = \int_0^1 \sin \psi_{\max} (1 - z^2)(1 - z) \cos(\alpha(1 - z)) dz. \quad (6.105)$$

Поскольку  $\psi_i = \text{const}$ , то из условия нормировки можно положить  $\psi_i = 1$ . Отыскание оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений (6.101), (6.104) с учетом зависимости (6.95).

Из вида функции  $R$  (6.103) видно, что оптимальное управление  $\bar{\psi}_{\max}$  в явном виде не выражается. Это существенно усложняет процесс решения краевой задачи, так как управление  $\bar{\psi}_{\max}$ , доставляющее максимум  $R$ , приходится определять только численно. Поэтому значения интегралов  $I_1^0, I_2^0, I_3^0$  предварительно вычислялись как функции пара-

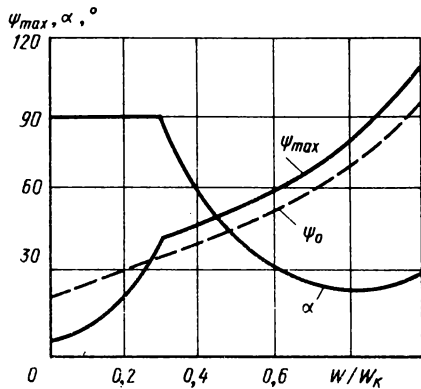
Рис. 6.13. Характер изменения оптимальных параметров управления  $\psi_{\max}$ ,  $\alpha$  при перелете на геостационарную орбиту ( $\Delta i_K = 0,9$ ;  $r_K = 6,2319$ )

метров  $\alpha$  и  $\psi_{\max}$  и табулировались с заданным шагом. Выборка из таблиц производилась с использованием процедуры линейной интерполяции. При численном решении задач удобнее перейти от оптимизации параметра  $\psi_{\max}$  к оптимизации параметра  $\alpha$ , учитывая связь между ними в форме (6.95).

Рассмотрим сначала результаты решения для совместной схемы управления ( $\kappa = 0$ ). На рис. 6.13 показано изменение параметров управления  $\psi_{\max}$ ,  $\alpha$  в зависимости от относительной характеристической скорости перелета  $W/W_K$ . Результаты приведены для относительно малого располагаемого углового ускорения  $\epsilon_{\max} = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}^2$ . Пунктирная линия на графиках соответствует случаю мгновенной переориентации КА ( $\epsilon = \infty$ ), релейной программе управления с оптимальным изменением параметра  $\psi_0$  вдоль траектории.

Результаты решения краевой задачи показали, что на начальном участке движения КА угол  $\psi_{\max}$  выходит на предельное значение  $\psi_{\max \text{ пред}} = \pi^2 \epsilon_{\max} r^3 / 8$  (при этом  $\alpha \equiv \pi/2$ ) и сохраняет его до достижения такого радиуса, при котором возможен переход на регулярный режим ( $\epsilon = \{ +\epsilon_{\max}, 0, -\epsilon_{\max} \}$ ). Характерным является изменение угла  $\alpha$ : сначала он принимает максимально возможное значение  $\pi/2$ . На этом участке КА совершает непрерывные развороты с периодом, равным периоду обращения аппарата на орбите. Затем  $\alpha$  плавно уменьшается, однако на заключительном этапе перелета, где радиус орбиты начинает уменьшаться от  $r_{\max}$  до  $r_K$ , несколько возрастает.

Серия расчетов, проведенных для различных значений  $\epsilon_{\max}$ , показала, что программа управления угловым движением (6.93) с оптимальным изменением параметров  $\psi_{\max}$ ,  $\alpha$  вдоль траектории лишь незначительно уступает по характеристической скорости перелета оптимальной программе (6.55). Характерным является свойство адаптации оптимальной траектории к величине располагаемого углового ускорения. При малых значениях  $\epsilon_{\max}$  поворот плоскости орбиты при  $r$ , близких к 1, неэффективен, поэтому сначала в основном идет увеличение радиуса орбиты; изменение наклона происходит на заключительном этапе перелета при достаточно больших значениях  $r$ . При достаточно больших значениях  $\epsilon_{\max}$  переориентация аппарата выполняется быстро, поэтому профиль изменения угла ориентации тяги  $\psi$  близок к релейному, харак-



теристическая скорость перелета близка к соответствующему значению  $W_K$  (6.60). Для траекторий, соответствующих первому варианту граничных условий перелета на стационарную орбиту, наблюдался слабый минимум характеристической скорости приблизительно при  $\epsilon_{\max} = 0,513 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}^2$ .

### Программа управления

I	$\begin{cases} \psi = \text{arctg}(\text{tg} \psi_{\max} \cos u); \\ \psi_{\max} = \bar{\psi}_{\max \text{opt}}(W) \end{cases}$	$W_K = 7,640 \text{ км/с}$
II	$\begin{cases} \psi = \psi_0 \text{sign}(\cos u); \\ \psi_0 = \psi_{0 \text{opt}}(W) \end{cases}$	$W_K = 7,805 \text{ км/с}$
III	$\begin{cases} \epsilon = -\epsilon_{\max} \text{sign}(\cos u) \frac{1}{2} [1 + \kappa = 0,1 & \kappa = 0 \\ + \text{sign}(\sin^2 u - \sin^2(\pi/2 - \alpha))]; \\ \psi_{\max} = \text{opt}; \alpha = \text{opt}; \\ \epsilon_{\max} = 0,1 \cdot 10^{-6}, \text{ 1/c}^2 & W_K = 7,822 \text{ км/с} \\ \epsilon_{\max} = 0,513 \cdot 10^{-6}, \text{ 1/c}^2 & 7,731 \\ \epsilon_{\max} = 1,1 \cdot 10^{-6}, \text{ 1/c}^2 & W_K = 7,919 \text{ км/с} \quad 7,741 \\ \epsilon_{\max} = 2,0 \cdot 10^{-6}, \text{ 1/c}^2 & W_K = 7,754 \text{ км/с} \end{cases}$	

Укажем теперь некоторые особенности, характерные для раздельной схемы управления.

Результаты решения задачи оптимального перелета на стационарную орбиту для двух схем управления, изменение траекторных параметров и программы управления вектором тяги показаны на рис. 6.14.

Особенностью решений для раздельной схемы управления является наличие начального участка трансверсального разгона без изменения плоскости орбиты. Здесь не удастся реализовать оптимальную программу (6.60), поэтому на втором участке угол  $\psi$  резко увеличивается, так как приходится компенсировать недостаточную эффективность управления на первом участке.

Следует отметить, что согласно (6.17) параметр  $\kappa$ , характеризующий расход рабочего тела на управление, пропорционален величине углового ускорения  $\epsilon$ . С увеличением  $\kappa$  (что по физическому смыслу задачи соответствует увеличению уровня тяги управляющих двигателей) растет протяженность участка движения КА без разворотов с направлением тяги по трансверсали. Развороты КА осуществляются при больших значениях  $r$ , где они выполняются за минимальное время и соответственно при умеренных затратах рабочего тела.

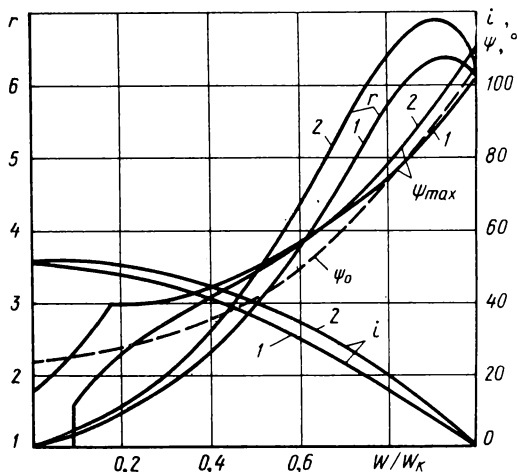
В пределе при достаточно больших угловых ускорениях  $\epsilon$ , характеристическая скорость возрастает не более чем на 4 ... 5 % по сравнению

Рис. 6.14. Характер изменения параметров оптимальной траектории и управления для совместной (1) и раздельной (2) схем управления траекторным и угловым движениями при перелетах на геостационарную орбиту:

1 -  $\epsilon_{\max} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}^2$ ;  $\kappa = 0$ ;  $W_{\kappa} = 7,741 \text{ км/с}$ ;  
 2 -  $\epsilon_{\max} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}$ ;  $\kappa = 0,1$ ;  $W_{\kappa} = 7,919 \text{ км/с}$

с совместной схемой управления траекторным и угловым движениями. Так, для 1-го варианта граничных условий перелета на геостационарную орбиту при  $\epsilon = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}^2$  и  $\kappa = 0$ ;  $W_{\kappa} = 7,741 \text{ км/с}$ , а при  $\kappa = 0,1$ ;  $W_{\kappa} = 7,919 \text{ км/с}$ .

Учет движения космического аппарата вокруг центра масс приводит к существенному усложнению модели движения. Тем не менее применение подхода, основанного на разделении компонент управления, позволило решить задачу оптимизации и установить качественные особенности оптимального управления ориентацией вектора тяги при межорбитальных переходах между некомпланарными круговыми орбитами. Совместной оптимизацией траекторного и углового движения удалось добиться того, что динамика аппарата относительно центра масс не вносит существенных поправок в энергетические характеристики перелетов между круговыми некомпланарными орбитами. Это достигается благодаря свойству адаптации программы управления к параметрам, характеризующим угловое движение аппарата прежде всего к располагаемому угловому ускорению и расходу рабочего тела на управление угловым движением.



## 6.6. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ С СОЛНЕЧНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

6.6.1. Управление ориентацией солнечных батарей. Электрическая мощность, вырабатываемая солнечными батареями на освещенных участках траектории, зависит от угла  $\beta$  между направлением на Солнце и нормалью к поверхности батарей:  $N = N_{\max} \cos \beta$ . Задачей управления ориентацией СБ является обеспечение максимального значения  $\cos \beta$ .

Положение солнечных батарей относительно корпуса КА будем ха-

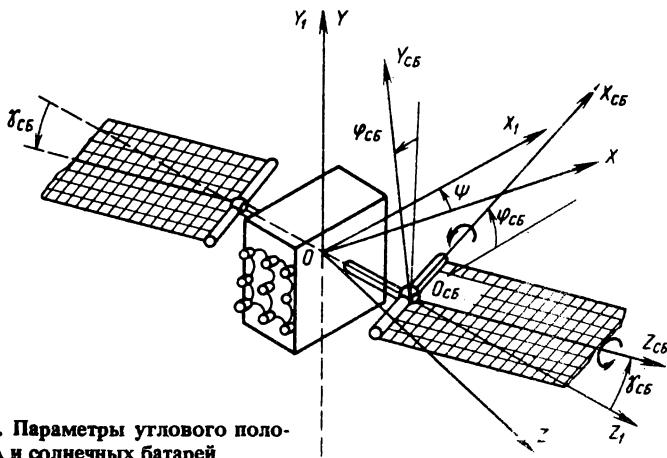


Рис. 6.15. Параметры углового положения КА и солнечных батарей

рактизовать двумя углами (рис. 6.15):  $\gamma_{CB}$  – угол крена оси батареи, который составлен осью вращения батареи  $OZ_{CB}$  и поперечной осью КА  $OZ_1$ ;  $\varphi_{CB}$  – угол собственного вращения батареи, характеризующим поворот нормали  $OY_{CB}$  к плоскости батареи вокруг ее собственной оси  $OZ_{CB}$ . Очевидно, с помощью последовательных поворотов на углы  $\gamma_{CB}$  и  $\varphi_{CB}$  можно добиться постоянного направления нормали  $Y_{CB}$  на Солнце. При этом следует учитывать, что сам КА одновременно осуществляет программу разворота по углу  $\psi$ .

Запишем выражения для проекций единичного вектора  $OY_{CB}$  нормали к плоскости солнечной батареи на оси орбитальной системы координат  $OXYZ$ :

$$\begin{aligned} n_X &= \cos\varphi_{CB} \cos\psi - \sin\gamma_{CB} \sin\varphi_{CB} \sin\psi; \\ n_Y &= \cos\gamma_{CB} \sin\varphi_{CB}; \\ n_Z &= \sin\gamma_{CB} \sin\varphi_{CB} \cos\psi + \cos\varphi_{CB} \sin\psi. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Будем считать, что в каждый момент известны компоненты единичного вектора  $r_s(r_{sX}, r_{sY}, r_{sZ})$  направления на Солнце в орбитальной системе координат. Максимальная мощность реализуется при  $\cos\beta = n \cdot r_s = 1$ . Для этого случая выражения для программных углов ориентации солнечных батарей таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_{CB} &= \arccos(r_{sX} \sin\psi + r_{sZ} \cos\psi); \\ \gamma_{CB} &= \arccos r_{sY} / \sin\varphi_{CB}. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Однако двухканальное управление ориентацией солнечных батарей в сочетании со сложной программой изменения положения корпуса КА в

пространстве может оказаться трудным для реализации. В этом случае рассматриваются альтернативные варианты одноканального управления: 1) батареи вращаются только вокруг оси  $OZ_{СБ}$ , постоянно совпадающей с поперечной осью  $OZ_1$  ( $\gamma_{СБ} \equiv 0$ ); угол  $\varphi_{СБ}$  в этом случае обозначим  $\varphi_1$ ; 2) ось вращения батарей совпадает с направлением связанной оси  $OY_1$ , а значит, и оси  $OY$ ;  $\gamma_{СБ} \equiv \pi/2$ ; угол собственного вращения обозначим  $\varphi_{II}$ . Очевидно, для этих двух вариантов  $\cos\beta_{I, II} < 1$ .

Получим выражение для  $\cos\beta_1$ . Для этого в (6.106) положим  $\gamma_{СБ} = 0$ :

$$\cos\beta_1 = r_{sX}\cos\varphi_1\cos\psi + r_{sY}\sin\varphi_1 + r_{sZ}\cos\varphi_1\sin\psi. \quad (6.108)$$

Для обеспечения максимума  $\cos\beta_1$  найдем оптимальное значение угла  $\varphi_1$ :

$$\varphi_{1opt} = \arctg \frac{r_{sY}}{r_{sX}\cos\psi + r_{sZ}\sin\psi}, \quad (6.109)$$

при этом

$$\cos\beta_{1max} = \sqrt{r_{sY}^2 + (r_{sX}\cos\psi + r_{sZ}\sin\psi)^2}. \quad (6.110)$$

Для второй схемы управления, очевидно,  $\cos\beta_{II}$  не зависит от углового положения самого аппарата. Положим  $\gamma_{СБ} = \pi/2$ :

$$\varphi_{II} = \arctg(r_{sZ}/r_{sX}) - \psi; \quad (6.111)$$

$$\cos\beta_{II} = \sqrt{r_{sX}^2 + r_{sY}^2}.$$

С учетом возможности выключения двигателя при попадании аппарата в тень Земли целесообразно анализировать поведение среднего за виток косинуса угла  $\beta$ . Освещенность КА зависит от взаимного положения Солнца и оскулирующей плоскости орбиты. Поскольку оно меняется в процессе полета, на отдельных этапах перелета может оказаться более выгодной первая схема одноканального управления солнечными батареями, а на других – вторая. Поскольку целью управления солнечными батареями является обеспечение максимальной мощности, можно рассмотреть также комбинированную схему, при которой возможны развороты аппарата по крену на  $\pm 90^\circ$  при смене знака разности ( $\cos\beta_I - \cos\beta_{II}$ ).

**6.6.2. Совместная оптимизация траекторного и углового движений аппарата и управления ориентацией панелей солнечных батарей.** Запишем уравнения околосферического орбитального движения (6.9).

$$\frac{dr}{du} = 2r^3 a \cos\psi; \quad \frac{di}{du} = ar^2 |\cos u| \sin|\psi|; \quad (6.112)$$

$$\frac{dt}{du} = r^{3/2}; \quad \frac{dW}{du} = ar^{3/2}.$$

Примем, что реактивное ускорение  $a$  изменяется в зависимости от косинуса угла между направлением на Солнце и нормалью к плоскости солнечных батарей

$$a = a_0 \cos\beta,$$

причем  $a_0 = \text{const}$ .

Если критерием оптимальности межорбитального перелета считать конечную характеристическую скорость  $W_k$ , легко показать, что оптимум дает локально-оптимальное управление (6.38):  $\text{tg}\psi = \text{tg}\psi_{\text{max}} \cos u$ . В самом деле, приводя уравнения (6.112) к аргументу  $W$ , получим систему уравнений, инвариантную по отношению к реактивному ускорению  $a$ :

$$\frac{dr}{dW} = 2r^{3/2} \cos\psi; \tag{6.113}$$

$$\frac{di}{dW} = r^{1/2} |\cos u| |\sin|\psi|.$$

Отсюда следует, что минимум характеристической скорости достигается при той же программе управления, что и в задаче без ограничений.

Рассмотрим теперь задачу на минимум времени перелета. Приведем систему (6.112) к аргументу  $t$  (уравнение для характеристической скорости не учитывается):

$$\frac{dr}{dt} = 2a_0 \cos\beta r^{3/2} \cos\psi; \tag{6.114}$$

$$\frac{di}{dt} = a_0 \cos\beta r^{1/2} |\cos u| |\sin|\psi|.$$

Пусть реализуется первый вариант управления ориентацией СБ, когда ось  $OZ_{\text{СБ}}$  постоянно совпадает с осью  $OZ_1$ . В этом случае  $\cos\beta_{\text{Imax}}$  определяется выражением (6.110).

Если  $\delta$  — угол между направлением на Солнце и нормалью к плоскости орбиты  $OZ$ , то из (6.110) можно получить

$$\cos\beta_{\text{Imax}} = (1 - (\cos\psi \cos\delta - \sin\psi \sin\delta \cos(u + u_0)))^{1/2}, \tag{6.115}$$

где  $\delta$  — функция оскулирующих элементов орбиты и определяется из выражения

$$\cos\delta = \cos i \sin \epsilon_0 \sin \theta - \sin i \cos \epsilon_0 \cos \Omega \sin \theta + \sin i \sin \Omega \cos \theta, \tag{6.116}$$

где  $\epsilon_0$  — угол наклона плоскости эклиптики к плоскости экватора;  $\theta$  — угол между направлением на точку весеннего равноденствия и линией Земля — Солнце. При расчете  $\delta$  необходимо учитывать движение Солнца по эклиптике (изменение  $\theta$ ) и прецессию восходящего узла орбиты  $\Omega$ .

Сформулируем задачу о минимуме конечного значения аргумента

$t$  системы уравнений (6.114) с учетом связи в форме (6.115). Управлениями в данной задаче служат углы  $\psi$  и  $\beta$ .

Введем в рассмотрение функцию  $R$ :

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial r} (2a_0 \cos \beta r^{3/2} \cos \psi) + \frac{\partial \varphi}{\partial i} (a_0 r^{1/2} \cos \beta \times \\ \times \cos u \sin \psi) + \lambda [1 - (\sin \delta \cos(u + u_0) \sin \psi + \cos \delta \cos \psi)^2], \quad (6.117)$$

где  $\lambda$  – неопределенный постоянный множитель.

Упростим задачу, полагая  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \text{const}$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial i} = \text{const}$  (это соответ-

ствует допущению о малости приращений  $r$ ,  $i$  в пределах выделенного витка). Такой подход приводит к отысканию локально-оптимального управления  $(\psi, \beta)$ , которое определяется условиями первого порядка максимума  $R$  по  $r$ ,  $i$ :

$$\frac{\partial R}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial \beta} = 0; \\ -2\psi_r a_0 r^{3/2} \cos \psi \sin \beta - \psi_i a_0 r^{1/2} \cos u \times \\ \times \sin \psi \sin \beta - 2|\cos \beta| \sin \beta = 0; \\ -2\psi_r a_0 \cos \beta r^{3/2} \sin \psi + \psi_i a_0 r^{1/2} \cos \beta \times \\ \times \cos u \cos \psi + 2(\sin \delta \cos(u + u_0) \sin \psi + \\ + \cos \delta \cos \psi)(\sin \delta \cos(u + u_0) \cos \psi - \cos \delta \sin \psi) = 0, \quad (6.118)$$

где  $\psi_r = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ ;  $\psi_i = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial i}$ .

Выражая из первого уравнения  $\cos \beta$  (тривиальное решение  $\sin \beta = 0$  исключается) и подставляя его во второе уравнение, после преобразований получаем следующие решения:

$$\cos \tilde{\beta} = | -\psi_r r^{3/2} \cos \psi - \frac{\psi_i}{2} r^{1/2} \cos u \sin \psi | a_0; \\ \text{tg} |2\tilde{\psi}| = \\ = \frac{\psi_r \psi_i a_0^2 r^2 \cos u + 2 \sin \delta \cos \delta \cos(u + u_0)}{\psi_r^2 a_0^2 r^3 - \frac{\psi_i^2}{4} a_0^2 r \cos^2 u - \sin^2 \delta \cos^2(u + u_0) + \cos^2 \delta}. \quad (6.119)$$

Решения (6.119) содержат две произвольные постоянные:  $\psi_r$  и  $\psi_i$ , которые, строго говоря, надо рассматривать как медленно меняющиеся переменные. Их можно определить, решая задачу оптимального управления "медленным" движением (см. разд. 6.3). Решение этой задачи,

однако, связано со значительными трудностями, обусловленными вычислением интегралов

$$I_{1\beta} = \int_0^{2\pi} \cos\beta \cos\psi du; \quad (6.120)$$

$$I_{2\beta} = \int_0^{2\pi} \cos\beta \sin|\psi| |\cos u| du.$$

Поэтому для выявления качественных закономерностей решения был использован следующий прием: начальное приближение для медленно меняющихся переменных  $\psi$ ,  $\psi_i$  задавалось решением задачи оптимизации без ограничений (см. разд. 6.3); вдоль траектории фиксировались характерные значения этих переменных, рассчитывались текущие значения угла  $\delta$ ; затем по формулам (6.119) рассчитывались  $\beta$  и  $\psi$ .

Результаты расчета показаны на рис. 6.16. Параметры расчета подобраны так, что они соответствуют переходу с низкой круговой орбиты с наклоном  $51^\circ$  на стационарную орбиту. На начальном участке траектории перелета  $\cos\beta$  мал, уровень реактивного ускорения поэтому недостаточен, процесс разгона аппарата затягивается. В средней части траектории значение  $\cos\beta$  увеличивается, профиль угла ориентации тяги  $\psi(u)$  становится близким к оптимальному в задаче без ограничений; наконец, на заключительном аппарате движется в плоскости, близкой к плоскости экватора, поэтому удается достигнуть близких к единице значений  $\cos\beta$ . С физической точки зрения полученные решения соответствуют компромиссу между достижением максимальной электрической мощ-

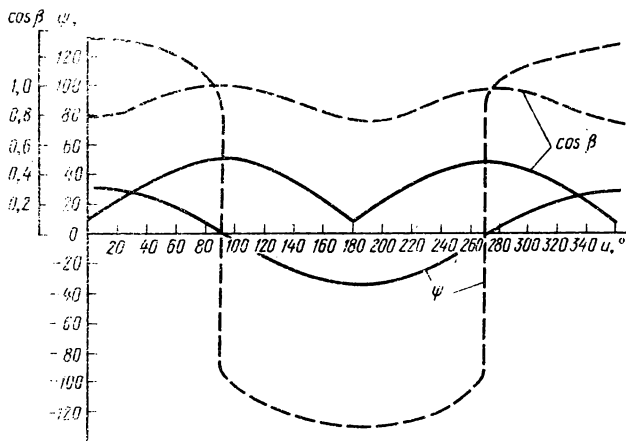


Рис. 6.16. Характер изменения параметров  $\psi$  и  $\cos\beta$  на траектории перелета: сплошная — движущееся орбиту при одноканальном управлении СБ ( $a_0 = 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>;  $\dot{\psi} = 0,01$  рад/с); — — — начальный участок:  $r = 6700$  км;  $i = 51^\circ$ ; - - - конечный:  $r = 6000$  км;  $i = 1,5^\circ$

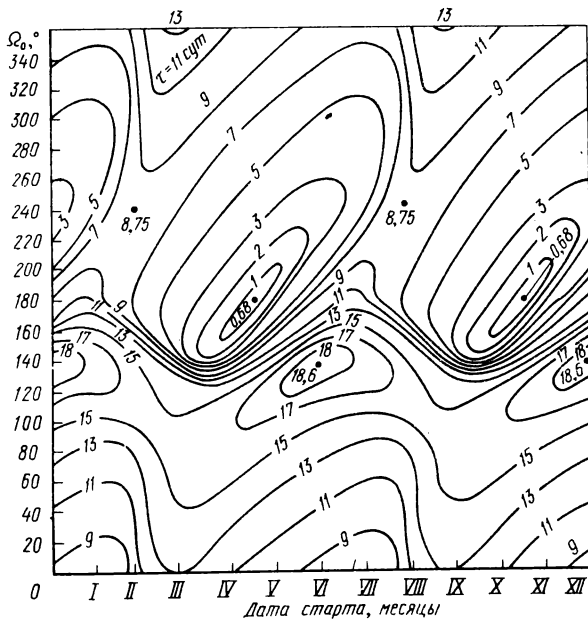


Рис. 6.17. Линии равной продолжительности теневого участка для перелетов аппарата с солнечным двигателем ограниченной мощности на геостационарную орбиту ( $a_0 = 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>,  $c = 60$  км/с)

ности солнечных батарей и оптимальной программой разворотов вектора тяги космического аппарата в плоскости орбиты.

**6.6.3. Выбор оптимальной даты старта.** В зависимости от даты старта, которая определяет начальную ориентацию плоскости орбиты относительно Солнца, траектория межорбитального перелета аппарата с солнечным ЭРД будет характеризоваться различным временем затенения. Поставим задачу отыскания таких дат старта, при которых суммарное время  $\tau$  пребывания КА в тени минимально. Протяженность  $\Phi$  теневого участка на витке определяется формулой

$$\Phi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{|(R_3/r)^2 - \cos^2 \delta|}{\sin^2 \delta}} \frac{\text{sign}[(R_3/r)^2 - \cos^2 \delta] + 1}{2}. \quad (6.121)$$

Здесь  $R_3$  – экваториальный радиус Земли.

При расчете суммарного времени затенения необходимо учитывать движение Солнца по эклиптике и прецессию восходящего угла орбиты. Если считать, что фактическая траектория мало отличается от номинальной программной траектории (6.59), а прецессия восходящего узла опередится выражением  $\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_{20} \left(\frac{R_3}{r}\right)^2 \cos i$ , то расчет существенно

упрощается. Параметрами расчета служат начальные значения долготы восходящего узла  $\Omega_0$  и положения Солнца  $\theta_0$  (или дата старта  $T_{\text{ст}}$ ), которые связаны между собой соотношением

$$\theta_0 \approx 0,0172 (T_{\text{ст}}^* - 80), \quad (6.122)$$

где  $T_{\text{ст}}$  — число суток с начала года до момента старта.

Серия расчетов перелетов в окрестность геостационарной орбиты, выполненных для различных значений параметров  $\Omega_0$ ,  $T_{\text{ст}}^*$  позволяет построить линии равных времен пребывания аппарата в тени и выбрать оптимальные дату старта и положение восходящего узла орбиты. Так, диаграмма (рис. 6.17), построенная для  $a_0^* = 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup> и  $c^* = 60$  км/с, показывает, что при одинаковом моторном времени перелета  $T_M^* = 86,4$  сут время пребывания в тени составляет от 0,7 до 18,6 сут. Оптимальные и неоптимальные даты старта повторяются с периодичностью 6 месяцев. При фиксированной дате старта можно добиться уменьшения времени пребывания КА в тени за счет оптимального выбора начальной ориентации плоскости орбиты (угла  $\Omega_0$ ). Описанная приближенная методика позволяет существенно сузить границы области поиска оптимальных дат старта для космических аппаратов с солнечными двигателями ограниченной мощности.

## КОММЕНТАРИИ

1. Исследование задачи оптимизации пространственных межорбитальных перелетов проводилось различными авторами как для импульсной схемы, соответствующей неограниченной тяге [25, 26], так и для непрерывно работающего двигателя малой тяги [33, 39, 68]. С помощью численных методов синтезированы оптимальные траектории перелетов с малой тягой в работе [68]. Особый интерес для механики полета с малой тягой представляет монография [39], где с помощью классических приемов усреднения уравнений, содержащих малый параметр и быстро меняющуюся переменную, получены оригинальные аналитические решения. По сути дела, использован прием искусственного расщепления управления и раздельной оптимизации его быстро и медленно меняющихся составляющих, впервые предложенный Н.Н. Моисеевым [45].

2. Проблема реализации оптимальных и близких к ним программ управления вектором тяги тесно связана с поиском минимали на расширенном множестве состояний и управлений и проверкой условий принадлежности этой минимали более узкому классу допустимых состояний и управлений. Учет углового движения аппарата по каналу рыскания позволил выделить класс "субоптимальных" программ управления, пригодных для практической реализации.

4. Проблема выведения ИСЗ на геостационарную орбиту служила предметом исследования для многих авторов. Наиболее интересные результаты в области перелетов с малой тягой содержатся в работе [39]. Различные подходы к задаче синтеза управления на заключительном этапе формирования стационарной орбиты описаны в работе [66].

4. Две принципиальные схемы управления траекторным и угловым движением аппарата (совместная и раздельная) впервые описаны в работе [20]. Новый фактор заключается в учете дополнительных затрат рабочего тела на управление ориента-

щей. Неожиданным здесь оказалось существование оптимального (достаточно малого) уровня располагаемого управляющего момента (или углового ускорения), обеспечивающего минимум характеристической скорости при совместной схеме управления. Физически этот факт объясняется тем, что основной поворот плоскости орбиты осуществляется здесь на значительном удалении от центра притяжения, т.е. там, где он энергетически наиболее выгоден.

6. Задачи оптимального управления космическим аппаратом с учетом ограничений на ориентацию солнечных багарей анализировались в работе [89]. Проблемы, возникающие при организации управляемого движения аппаратов с солнечными электрореактивными двигателями подробно изложены в обзоре [47].

## ГЛАВА 7

### ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ С МАЛОЙ ТЯГОЙ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Характерной особенностью задач управления движением искусственных спутников Земли с двигателями малой тяги является наличие возмущающих ускорений, обусловленных нецентральностью гравитационного поля Земли и сопротивлением верхних слоев атмосферы, сравнимых с величиной реактивного ускорения. Указанные возмущения, математическое описание которых достаточно хорошо известно, следует учитывать при выборе оптимальных программ управления. Модель задачи оптимизации становится при этом более сложной. Эллиптичность начальной и конечной орбит требует аккуратного описания динамики векового движения аппарата с малой тягой на больших интервалах времени. Не менее важным представляется учет дополнительных требований, связанных, например, с ограничением времени пребывания в радиационных поясах, а также ограничений на общую продолжительность активных участков.

#### 7.1. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КЕПЛЕРОВСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

7.1.1. **Конструкция синтезирующей функции.** При решении некоторых задач оптимального управления КА с малой тягой эффективным оказывается следующий прием: в силу того, что реактивное ускорение мало, находим асимптотическое (предельное) решение для  $a \rightarrow 0$ ; затем это решение распространяется на систему с  $a \neq 0$  и оценивается погрешность в функционале.

Рассмотрим перелет КА в центральном ньютоновском поле между произвольными эллиптическими орбитами. Сформулируем задачу на

быстродействие. Будем считать, что реактивное ускорение постоянно. Управлением здесь является угол  $\alpha$ , составленный векторами  $a$  и  $V$ , причем  $\alpha > 0$ , если он отсчитывается от вектора  $V$  против часовой стрелки. Уравнения плоского движения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V \sin \theta; \\ \dot{V} &= a \cos \alpha - \sin \theta / r^2; \\ \dot{\theta} &= \frac{a}{V} \sin \alpha - \frac{\cos \theta}{V} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{V^2}{r} \right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Переменные приведены в безразмерном виде, масштабами служат соответствующие величины на круговой орбите радиуса  $r_0$ .

Задачу минимизации времени перелета между компланарными орбитами при наличии связей (7.1) будем решать следующим образом. Составим функции  $R$  и  $G$  (см. гл. 2):

$$\begin{aligned} R &= \varphi_r V \sin \theta + \varphi_V \left( a \cos \alpha - \frac{\sin \theta}{r^2} \right) + \\ &+ \varphi_\theta \left[ \frac{a}{V} \sin \alpha - \frac{\cos \theta}{V} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{V^2}{r} \right) \right] + \varphi_t - 1; \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$G = \varphi(r_K, V_K, \theta_K, T) - \varphi(r_0, V_0, \theta_0, 0).$$

Необходимые условия максимума  $R$  по фазовым координатам  $r, V, \theta$  приводят к дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\psi_2 \frac{2 \sin \theta}{r^3} - \psi_3 \left( \frac{2}{V r^3} - \frac{V}{r^2} \right) \cos \theta; \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 \sin \theta + \psi_3 \left[ - \left( \frac{1}{V^2 r^2} + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \frac{a \sin \alpha}{V^2} \right]; \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_1 V \cos \theta + \psi_2 \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{\psi_3 \sin \theta}{V} \left( \frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  — частные производные функции  $\varphi(t, r, V, \theta)$  в точках предполагаемой минимали.

Управление  $\alpha_{\text{opt}}$  находится из условия максимума функции  $R$ :

$$\alpha_{\text{opt}} = \bar{\alpha} = \arg \max_{\alpha} R = \arctg(\psi_3 / (V \psi_2)). \quad (7.4)$$

Можно показать, что при управлении (7.4) выполняется не только необходимое, но и достаточное условие максимума  $R$  по  $\alpha$ , если знак  $\psi_2$  совпадает со знаком  $\cos \alpha$ .

Запишем условие минимума функции  $G$  по конечному моменту  $T$ :

$$H(T) = 0. \quad (7.5)$$

Здесь функция  $H$  имеет следующий вид:

$$H = \psi_1 V \sin \theta + \psi_2 \left( a \cos \alpha - \frac{\sin \theta}{r^2} \right) + \\ + \psi_3 \left[ \frac{a}{V} \sin \alpha - \frac{\cos \theta}{V} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{V^2}{r} \right) \right] - 1. \quad (7.6)$$

Поскольку основная система (7.1) автономна, соотношение (7.5) должно выполняться в любой момент времени

$$H(t) = 0. \quad (7.7)$$

Будем считать, что полет происходит в некоторой окрестности кеплеровской траектории с заданными начальными параметрами  $r_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$ . Полагая  $a \ll 1$ , построим предельные решения при  $a \rightarrow 0$ , отбросив члены, содержащие  $a$  в системах (7.1) и (7.3). Задача сводится к интегрированию сопряженной системы на дуге кеплеровской орбиты.

При  $a = 0$  соотношение (7.7) принимает вид

$$\psi_1 V \sin \theta - \psi_2 \frac{\sin \theta}{r^2} - \psi_3 \frac{\cos \theta}{V} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{V^2}{r} \right) - 1 = 0. \quad (7.8)$$

Запишем интегралы энергии и площадей для номинальной кеплеровской орбиты

$$V^2 = 2/r + 2C_1; \quad V r \cos \theta = C_2. \quad (7.9)$$

Воспользуемся решением Экенушлера:

а)  $C_1 < 0$ , эллиптическая орбита

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{\sqrt{2C_1 r^2 + 2r - C_2^2}}{2C_1 r} \left[ 1 - \frac{4C_1 C_2^2 + 3}{2C_1 r(1 + 2C_1 C_2^2)} \right] + \\ + \frac{K_1 C_1}{r} + \frac{3}{4C_1^2 r^2 \sqrt{-2C_1}} \arcsin \frac{-2C_1 r - 1}{\sqrt{1 + 2C_1 C_2^2}} + \frac{K_2}{r^2}; \quad (7.10)$$

б)  $C_1 = 0$ , параболическая орбита

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{r^2} \left\{ [K_1 C_2 r - \frac{C_2^2(2C_2^2 - r)}{3(1 + 2C_1 C_2^2)} + \right. \\ \left. + \frac{4C_2^4 + 4C_2^2 r - 6r^2}{15}] \sqrt{2r - C_2^2 + K_2} \right\}; \quad (7.11)$$

в)  $C_1 > 0$ , гиперболическая орбита

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{\sqrt{2C_1 r^2 + 2r - C_2^2}}{2C_1 r} \left[ 1 - \frac{4C_1 C_2^2 + 3}{2C_1 r(1 + 2C_1 C_2^2)} \right] + \frac{K_1 C_2}{r} + \\ + \frac{3}{4C_1^2 r \sqrt{2C_1}} \ln \frac{\sqrt{2C_1 r^2 + 2r - C_2^2} + r \sqrt{2C_1} + 1}{\sqrt{2C_1}} + \frac{K_2}{r^2}, \quad (7.12)$$

для всех типов орбит:

$$\tilde{\psi}_3 = -K_1 \sqrt{2C_1 r^2 + 2r - C_2^2} + \frac{C_2(C_2^2 - r)}{1 + 2C_1 C_2^2}. \quad (7.13)$$

Оставшаяся переменная  $\tilde{\psi}_2$  определяется через  $\tilde{\psi}_1$  и  $\tilde{\psi}_3$  с помощью выражений (7.8), (7.9):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_2 = & \frac{\sqrt{2r + 2C_1 r^2}}{\sqrt{2C_1 r^2 + 2r - C_2^2}} [\tilde{\psi}_1 r \sqrt{2C_1 r^2 + 2r - C_2^2} - \\ & - \psi_3 C_2 \frac{1 + 2C_1 r}{2(1 + C_1 r)} - r^2], \end{aligned} \quad (7.14)$$

где  $C_i, K_i$  – постоянные величины.

Таким образом, формулы (7.10) ... (7.14) определяют приближенный синтез оптимального управления (7.4). С помощью этих решений построим синтезирующую функцию

$$\tilde{\varphi}(r, V, \theta) = \tilde{\psi}_1 r + \tilde{\psi}_2 V + \tilde{\psi}_3 \theta, \quad (7.15)$$

которую можно использовать в процедуре оценки любых допустимых режимов управления.

**7.1.2. Задача со свободным правым концом траектории.** Если часть граничных условий на правом конце траектории не задана, удастся довести решение до конца, т.е. аналитически определить константы  $K_1$  и  $K_2$ . Зададим, например, граничные условия в следующем виде:

$$t = 0 : r = r_0 = 1; V = V_0; \theta = \theta_0;$$

$$t = T \neq \text{fixe} : r = r_K; V, \theta \neq \text{fixe}.$$

Такая запись соответствует задаче быстрейшего выхода на заданный радиус  $r_K$  при нефиксированной величине и направлении скорости.

Граничные условия для переменных  $\tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3$  на правом конце траектории определяются из условия минимума функции  $G$  по значениям фазовых координат  $V, \theta$  в конечной точке:

$$\tilde{\psi}_2(T) = 0; \tilde{\psi}_3(T) = 0. \quad (7.16)$$

Наибольший интерес для рассматриваемой задачи представляют эллиптические орбиты, поэтому в дальнейшем будем иметь дело с формулой (7.10). Константы  $K_1$  и  $K_2$  определяются из (7.16):

$$K_1 = \frac{C_2(C_2^2 - r_K)}{(1 + 2C_1 C_2^2) \sqrt{2C_1 r_K^2 + 2r_K - C_2^2}};$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= \tilde{\psi}_1(T)r_K^2 - \frac{r_K\sqrt{2C_1r_K^2 + 2r_K - C_2^2}}{2C_1} \times \\
&\times \left[1 - \frac{4C_1C_2^2 + 3}{2C_1r_K(1 + 2C_1C_2^2)}\right] - \frac{3}{4C_1^2\sqrt{-2C_1}} \times \\
&\times \arcsin \frac{-2C_1r_K - 1}{\sqrt{1 + 2C_1C_2^2}} - K_1C_2r_K.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Из (7.5) следует

$$\tilde{\psi}_1(T) = [V(T)\sin\theta(T)]^{-1}. \tag{7.18}$$

Так как для конического сечения справедливо соотношение

$$Vr\sin\theta = \sqrt{2C_1r^2 + 2r - C_2^2},$$

то, считая параметры  $C_1$  и  $C_2$ , вычисленные в начальной точке, постоянными по всей траектории, получим

$$\tilde{\psi}_1(T) = \frac{r_K}{\sqrt{2C_1r_K^2 + 2r_K - C_2^2}}. \tag{7.19}$$

Окончательная формула для  $K_2$  запишется в виде

$$\begin{aligned}
K_2 &= \frac{r_K^3}{\sqrt{2C_1r_K^2 + 2r_K - C_2^2}} - \frac{r_K}{2C_1} \times \\
&\times \sqrt{2C_1r_K^2 + 2r_K - C_2^2} \left[1 - \frac{4C_1C_2^2 + 3}{2C_1r_K(1 + 2C_1C_2^2)}\right] - \\
&- K_1C_2r_K + \frac{3}{4C_1^2\sqrt{-2C_1}} \arcsin \frac{2C_1r_K + 1}{\sqrt{1 + 2C_1C_2^2}}.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Приближенно-оптимальный закон управления записывается теперь в виде

$$\tilde{\alpha} = \arctg \tilde{\psi}_3 / (V\tilde{\psi}_2) = \tilde{\alpha}(r, V). \tag{7.21}$$

При граничных условиях (7.16) формула (7.4) при  $t = T$  должна давать неопределенность вида 0/0. Раскрывая ее по правилу Лопиталья, получим

$$\lim_{r \rightarrow r_K} \alpha_{opt} = \pi/2 - \theta. \tag{7.22}$$

Это означает, что в конечный момент тяга должна быть направлена по радиусу.

Реактивное ускорение $a$ , мм/с <sup>2</sup>	Время перелета по программе $\bar{\alpha}(t)$ , с	Время перелета по программе $\tilde{\alpha}(t)$ , с	$\bar{\alpha}(0)$ , °	$\tilde{\alpha}(0)$ , °
54,5	6018	6066	27,27	21,55
27,25	6573	6576	24,83	21,55
1,09	7326	7325	21,84	21,55
0	7366	7366	21,55	21,55

7.1.3. Приложение к задаче оптимального по быстродействию пролета через радиационные пояса Земли. Рассмотрим задачу о быстрейшем прохождении через радиационные пояса Земли управляемого космического аппарата с двигателем малой тяги. Пусть аппарат с электрореактивным двигателем входит в зону радиации, сечение которой плоскостью орбиты условно представляет собой кольцо с радиусами  $r_0$  и  $r_K$ . Например, зоне максимума интенсивности внешнего радиационного пояса Земли соответствуют  $r_0 = 19\ 100$  км,  $r_K \approx 25\ 200$  км. Проводилось сравнение закона управления (7.21) и оптимального управления (7.4), полученного в ходе решения краевой задачи для систем (7.1) и (7.3).

Краевая задача решалась модифицированным методом Ньютона. В качестве опорной была выбрана траектория с граничными условиями  $r_0 = 1$ ;  $V_0 = 1,1$ ;  $\theta_0 = 0,08725$ ;  $r_K = 1,32$ .

При пассивном полете аппарат проходит зону ( $r_0 - r_K$ ) за 7 366 с. Величина реактивного ускорения принималась равной 0,050; 0,025; 0,001 (это соответствовало 54,5; 27,25; 1,09 мм/с<sup>2</sup>). Разница во времени полета по различным программам, как видно из табл. 7.1, во всем диапазоне ускорений не превышает 0,08 %.

Расчитанные переменные сопряженной системы показаны на рис. 7.1, а. При больших значениях  $a$  аналитическое решение — функции  $\psi_1(r)$ ,  $\psi_2(r)$ ,  $\psi_3(r)$  сильно отличаются от численного, однако, в формулах (7.4) и (7.21) играют роль не сами

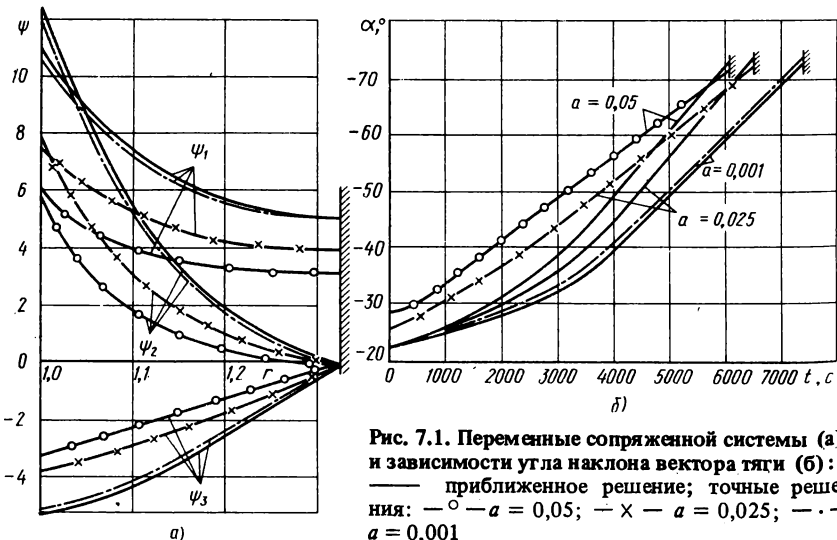


Рис. 7.1. Переменные сопряженной системы (а) и зависимости угла наклона вектора тяги (б): — приближенное решение; точные решения: —○—  $a = 0,05$ ; —×—  $a = 0,025$ ; —·—  $a = 0,001$

величины  $\psi_2$  и  $\psi_3$ , а их отношение, которое в обоих случаях примерно одинаково. Графики  $\alpha(t)$  приведены на рис. 7.1, б.

Описанный приближенный метод в чистом виде пригоден лишь для траекторий, совершающих менее одного оборота вокруг притягивающего центра. Однако, разбивая многовитковую траекторию на участки, можно использовать эту процедуру многократно, реализуя тем самым известную схему итеративного управления.

## 7.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТОЙ С УЧЕТОМ НЕСФЕРИЧНОСТИ ЗЕМЛИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ ВЕРХНИХ СЛОЕВ АТМОСФЕРЫ

**7.2.1. Постановка задачи и уравнения движения.** Рассмотрим плоское управляемое движение КА в поле сжатого сфероида с потенциалом

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_3}{r} \right)^2 P_{20}(\sin \varphi) \right]. \quad (7.23)$$

Здесь  $\mu$  – гравитационный параметр Земли;  $r$  – расстояние от центра Земли до КА;  $J_2$  – коэффициент при второй зональной гармонике разложения гравитационного потенциала;  $R_3$  – средний экваториальный радиус Земли;  $P_{20}(\sin \varphi)$  – полином Лежандра второго рода;  $\varphi$  – геоцентрическая широта.

Плотность атмосферы  $\rho$  аппроксимируем так:

$$\rho(H) = \rho_0 \exp[-\beta(H - H_0)], \quad (7.24)$$

где  $\rho_0$ ,  $\beta$ ,  $H_0$  – постоянные величины;  $H$  – высота над поверхностью Земли. С учетом сжатия земного эллипсоида  $H$  определяется соотношением

$$H = r - R_3 (1 - \epsilon \sin^2 i \sin^2 u). \quad (7.25)$$

Здесь  $\epsilon$  – коэффициент сжатия земного эллипсоида;  $i$  – наклонение орбиты;  $u$  – аргумент широты.

В первом приближении сжатие земного эллипсоида и атмосфера не изменяют наклонение орбиты, поэтому в дальнейшем будем считать  $i$  постоянным параметром задачи.

Будем считать, что КА располагает идеально регулируемым двигателем малой тяги, для которого не накладываются ограничения на величину реактивного ускорения. Направление вектора тяги относительно трансверсали характеризуется углом  $\alpha_1$ ; положительное значение  $\alpha_1$  соответствует внешнему по отношению к трансверсали положению тяги.

Трансверсальная  $a_X$  и радиальная  $a_Y$  составляющие ускорения соответственно равны  $a_X = a \cos \alpha_1$ ;  $a_Y = a \sin \alpha_1$ . В качестве критерия опти-

мальности перелета с идеально регулируемым двигателем берется интеграл от квадрата реактивного ускорения

$$J = \int_{t_0}^{t_K} a^2 dt \rightarrow \min.$$

Запишем дифференциальные уравнения возмущенного движения аппарата [58]

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} &= 2\gamma_1 r^3 (a \cos \alpha_1 + f_X + g_X); \\ \frac{dQ}{du} &= \gamma_1 [-L + 2r^3 (a \cos \alpha_1 + f_X + g_X)]; \\ \frac{dL}{du} &= \gamma_1 [Q + \frac{r^3 L}{p} (a \cos \alpha_1 + f_X + g_X) + r^2 (a \sin \alpha_1 + f_Y + g_Y)]; \\ \frac{dt}{du} &= \gamma_1 r^3 / \sqrt{p}; \\ r &= p / (1 + Q), \quad \gamma_1 = (1 - \frac{r^3}{p} g_Z \operatorname{ctg} i \sin u)^{-1}. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Здесь  $p$  – параметр орбиты;  $Q = e \cos \vartheta$ ;  $L = e \sin \vartheta$ ;  $e$  – эксцентриситет орбиты;  $\vartheta$  – истинная аномалия;  $f_X, f_Y$  – трансверсальная и радиальная проекции аэродинамического ускорения;  $g_X, g_Y, g_Z$  – трансверсальная, радиальная и бинормальная проекции возмущающего ускорения, обусловленного нецентральностью гравитационного поля. Система (7.26) записана в безразмерных переменных. Масштабом расстояния выбрано перигейное расстояние  $r^* = r_{\pi}^*$ ; масштабом времени, скорости и ускорения являются величины  $t^* = \mu^{-1/2} (r^*)^{3/2}$ ;  $V^* = \mu^{1/2} (r^*)^{-1/2}$ ;  $g^* = \mu (r^*)^{-2}$ .

Проекции возмущающего гравитационного ускорения на оси орбитальной системы координат можно представить в виде

$$\begin{aligned} g_X &= -3J_2 R_3^2 \frac{(Q+1)^4}{p^4} \sin^2 i \sin u \cos u; \\ g_Y &= 1,57 J_2 R_3^2 (Q+1)^4 p^{-4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1) = \\ &= g_X \kappa_1(i, u); \\ g_Z &= -3J_2 R_3^2 (Q+1)^4 p^{-4} \sin i \cos i \sin u = g_X \kappa_2(i, u). \end{aligned} \tag{7.27}$$

Бинормальной составляющей аэродинамического ускорения можно пренебречь, а трансверсальную и радиальную составляющие с учетом сжатия земного эллипсоида и вращения атмосферы представить в виде

$$f_X = -\sigma_T(Q+1)p^{-1}\sqrt{L^2 + (1+Q)^2}\exp\left\{-\beta[r - H_0 - R_3(1 - \varepsilon\sin^2 i \sin^2 u)]\right\}; \quad (7.28)$$

$$f_Y = \frac{kL}{Q+1}f_X,$$

где  $\beta$  и  $H_0$  – безразмерные параметры модели плотности атмосферы (7.24);  $\sigma_T$  – уточненный с учетом вращения атмосферы баллистический коэффициент ИСЗ;  $k$  – поправочный множитель, постоянный для данной орбиты

$$\sigma_T = \frac{\sigma}{k} = \frac{c_X S}{2mk}; \quad (7.29)$$

$$k = (1 - \omega_3 r_\pi \cos i / V_\pi)^{-1}.$$

Здесь  $\sigma = c_X S / (2m)$  – баллистический коэффициент ИСЗ;  $\omega_3$  – скорость вращения Земли;  $r_\pi$  – перигейное расстояние;  $m$  – масса КА;  $c_X$  – коэффициент лобового сопротивления;  $S$  – площадь мишени;  $V_\pi$  – скорость КА в перигее.

Масштабом баллистического коэффициента аппарата служит величина  $\sigma^* = (\rho_0^* r^*)^{-1}$ .

Обозначим  $x = \{p, Q, L, t\}^T$  вектор фазовых координат. Рассмотрим следующие граничные условия: начальная точка фиксирована, в конечной точке  $u = u_K$  заданы  $s$  фазовых координат ( $s \leq 4$ ) и  $m$  уравнений связи, причем  $m \leq 4 - s$

$$u = u_0 : x(u_0) = x_0; \quad u = u_K : \Phi[x(u_K)] = 0. \quad (7.30)$$

**7.2.2. Необходимые условия оптимальности.** Сформулируем задачу следующим образом: необходимо выбрать закон изменения реактивного ускорения  $a(u)$  и угла ориентации тяги  $\alpha_1(u)$ , обеспечивающие минимум функционала  $J$  при заданных дифференциальных связях (7.26) и граничных условиях (7.30). С учетом последнего уравнения системы (7.26) функционал  $J$  принимает вид

$$J = \int_{u_0}^{u_K} (\gamma_1 a^2 r^2 / \sqrt{p}) du. \quad (7.31)$$

Составим функцию  $R$ :

$$R = \gamma_1 \left\{ (a \cos \alpha_1 + g_X + f_X) A + r^2 [a \sin \alpha_1 + \right. \\ \left. + k r L p^{-1} f_X + \kappa_1(i, u) g_X] \varphi_L - L \varphi_Q + \right. \\ \left. + Q \varphi_L + r^2 p^{-1/2} \varphi_t - a^2 r^2 p^{-1/2} \right\} + \varphi_u = H_1 + \varphi_u. \quad (7.32)$$

Здесь  $A = 2r^3 \varphi_p + 2r^2 \varphi_Q + r^3 Lp^{-1} \varphi_L$ ;

$$\kappa_1 = -1,57 \frac{(\sin^2 i \sin^2 u - 1/3)}{\sin^2 i \sin u \cos u}; \quad (7.33)$$

$$\kappa_2 = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} u.$$

Управления  $a$  и  $\alpha_1$  предполагаем неограниченными; из условий 1-го порядка максимума  $R$  ( $\frac{\partial R}{\partial a} = 0, \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = 0$ ) следует:

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}_1 = \frac{1}{A} r^2 \varphi_L; \quad (7.34)$$

$$\bar{a} = \frac{1}{2r^3} \sqrt{p(A^2 + r^4 \varphi_L^2)}.$$

Проверим условия второго порядка относительного максимума  $R$  по управлениям. На оптимальной траектории матрица  $R_{a\alpha}$  имеет вид

$$R_{a\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial a} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial \alpha} & \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 2r^2 p^{-1/2} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma_1 \sqrt{p}(A^2 + r^4 \varphi_L^2)}{2r^2} \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Так как  $\gamma_1 > 0$ , то матрица  $R_{a\alpha}$  является отрицательно определенной, следовательно, условия 2-го порядка максимума  $R$  выполняются. Обозначая  $\psi_p, \psi_Q, \psi_L, \psi_t, \psi_k$  — частные производные функции  $\varphi$  в точках предполагаемой минимали, определим эти переменные, решая систему сопряженных уравнений

$$\frac{d\psi_j}{du} = - \frac{\partial H_1}{\partial x_j}; \quad x = (p, Q, L, t, u)^T. \quad (7.36)$$

**7.2.3. Условия трансверсальности.** Из последнего уравнения системы (7.36) следует, что  $\psi_t = \operatorname{const}$ . В результате анализа вариационная задача сводится к краевой задаче для системы восьми дифференциальных уравнений первого порядка. Условия максимума функции  $G$  по координатам имеют вид

$$\psi_{X_j}(u_k) = \sum_{i=1}^m \nu_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}, \quad (7.37)$$

где  $\nu_i$  — неопределенные коэффициенты.

Рассмотрим подробнее некоторые возможные варианты граничных условий и соответствующие условия трансверсальности.

1. В конечной точке  $u = u_K$  заданы все фазовые координаты ( $s = 4$ ). Это соответствует переходу из заданной начальной точки  $x_0$  в заданную конечную точку  $x_K$  за фиксированное время. В этом случае условие (7.37) теряет смысл.

2. Если в конечной точке  $u = u_K$  время  $t_K$  не задано, то  $\psi_t(u_K) = 0$ , или с учетом последнего уравнения системы (7.36)  $\psi_t \equiv 0$ , и порядок краевой задачи уменьшается на единицу.

3. В конечной точке  $u = u_K$  заданы только конечные значения фокального параметра  $p$  и эксцентриситета  $e$ :

$$\Phi = \sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)} - e_K = 0. \quad (7.38)$$

Из условия трансверсальности (7.37) следует

$$\psi_Q(u_K)L(u_K) - \psi_L(u_K)Q(u_K) = 0. \quad (7.39)$$

4. В конечной точке  $u = u_K$ , задано только перигейное расстояние  $r_\pi$ . Это соответствует попаданию на конечное многообразие

$$\Phi = p(u_K)[1 + \sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}]^{-1} - r_{\pi K} = 0. \quad (7.40)$$

Соответствующие условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_Q(u_K)L(u_K) - \psi_L(u_K)Q(u_K) &= 0; \\ \frac{\psi_Q(u_K)[1 + \sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}] + \psi_L(u_K)\sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}}{p(u_K)Q(u_K)} &+ \\ + \psi_p(u_K) &= 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

5. В конечной точке  $u = u_K$  задано только конечное значение апогейного расстояния  $r_\alpha$ :

$$\Phi = p(u_K)[1 - \sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}]^{-1} - r_{\alpha K} = 0. \quad (7.42)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \psi_Q(u_K)L(u_K) - \psi_L(u_K)Q(u_K) &= 0; \\ \frac{\psi_Q(u_K)[1 - \sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}] - \psi_L(u_K)\sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}}{p(u_K)Q(u_K)} &- \\ - \psi_p(u_K) &= 0. \end{aligned} \quad (7.43)$$

6. В конечной точке задано конечное значение аргумента перигента  $\omega$ :

$$\Phi = \omega_K - u_K + \arctg[L(u_K)/Q(u_K)]. \quad (7.44)$$

Это соответствует условиям

$$\psi_p(u_K) = 0; \quad \psi_L(u_K)L(u_K) + \psi_Q(u_K)Q(u_K) = 0. \quad (7.45)$$

7. В конечной точке  $u = u_K$  заданы перигейное расстояние  $r_\pi$  и аргумент перицентра  $\omega$ :

$$\Phi_1 = \frac{p(u_K)}{1 + \sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}} - r_{\pi K} = 0; \quad (7.46)$$

$$\Phi_2 = \omega_K - u_K + \operatorname{arctg}[L(u_K)/Q(u_K)].$$

Соответствующее условие трансверсальности примет вид

$$\begin{aligned} & \psi_Q Q(u_K) + \psi_L(u_K)L(u_K) + \\ & + \psi_p(u_K)p(u_K)\sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)} \times \\ & \times [1 + \sqrt{Q^2(u_K) + L^2(u_K)}] = 0. \end{aligned} \quad (7.47)$$

**7.2.4. Результаты моделирования перелетов.** Численное решение поставленной вариационной задачи проводилось для орбиты с наклоном  $i = 51^\circ$  высотой перигея 250 км, высотой апогея 350 км, для двух моделей атмосферы вида (7.24), соответствующих максимуму и минимуму солнечной активности. Краевые задачи решались модифицированным методом Ньютона. Для удобства оптимальные программы изменения ускорения и угла  $\alpha_1$  построены по истинной аномалии  $\vartheta$ .

На рис. 7.2, а показаны оптимальные программы изменения реактивного ускорения  $a$ , угла ориентации тяги  $\alpha_1$  и соответствующие им изменения функционала задачи  $J$  по траектории для случая коррекции возмущений перигейного расстояния и продолжительности полета  $t$  от действия атмосферы на двух витках полета. В конечной точке  $r_\pi(u_K) = r_{\pi K}$ ;  $t(u_K) = t_K$ , где  $r_{\pi K}$ ,  $t_K$  — номинальные перигейное расстояние и время в конечной точке, соответствующие движению под действием только гравитационных сил. Сплошные линии соответствуют максимуму, а штриховые — минимуму солнечной активности. Оптимальное ускорение имеет неравные максимумы в окрестностях апогея орбиты и близко по направлению к трансверсальному (в точках максимума оно строго трансверсально), наименьшие значения ускорения имеет вблизи перигея. Сдвиг максимумов ускорения относительно апогея объясняется совместным действием атмосферы и нецентральности гравитационного поля. Характерно, что изменение модели плотности атмосферы приводит только к изменению величины реактивного ускорения и не влияет на программу изменения угла  $\alpha_1$ . На рис. 7.2, б показаны оптимальные программы ускорения  $a$  и угла  $\alpha_1$  при коррекции ошибок в апогейном расстоянии  $r_\alpha$  и времени полета  $t$  от действия атмосферы. Максимальные ускорения соответствуют областям перигея. Сплошные линии соответствуют максимуму, а штриховые — минимуму солнечной активности.

На рис. 7.2, в показаны программы изменения трансверсального и

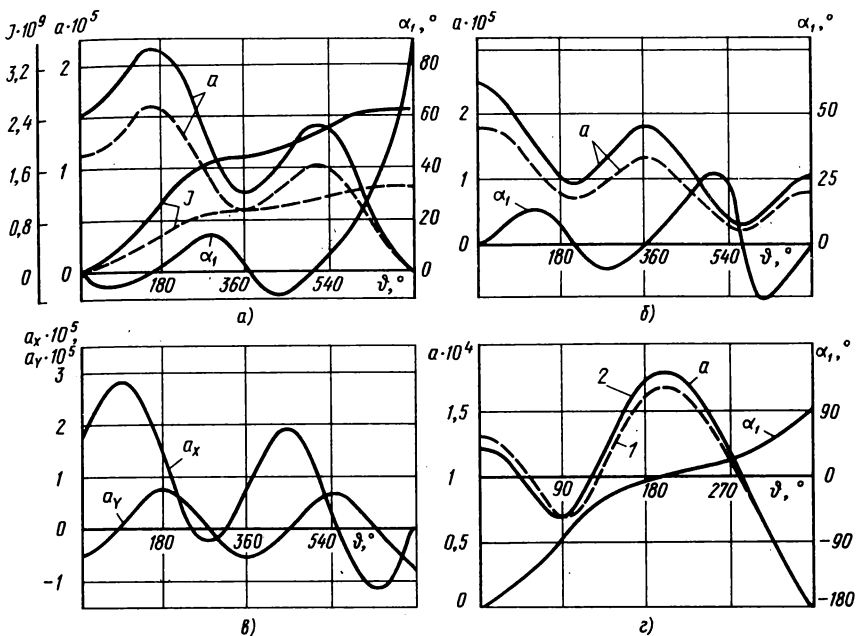


Рис. 7.2. Оптимальные программы управления:

*a* – при коррекции радиуса перигея; *б* – при коррекции радиуса апогея; *в* – при изменении аргумента; перигентра; *г* – при увеличении радиуса перигея на 10 км (1 – с учетом атмосферы; 2 – без учета атмосферы)

радиального реактивного ускорений для случая изменения аргумента перигентра  $\omega$  на  $1^\circ$  по сравнению с соответствующим номинальным значением за фиксированное время. Видно, что направление ускорения близко к трансверсальному, а величина достигает максимальных значений в точках, где  $\vartheta = (\pi/2)(2n + 1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

На рис. 7.2, *г* приведены оптимальные программы *a* и  $\alpha_1$  при увеличении конечного перигейного расстояния на 10 км за фиксированное время, соответствующее движению КА под действием только гравитационных сил. Сплошная линия соответствует маневру в атмосфере, штриховая – без учета атмосферы. Как и следовало ожидать, ускорение максимально в окрестности апогея (но несколько сдвинуто) и в области максимума близко к трансверсальному. Тормозной участок в начале траектории объясняется фиксированным временем полета, которое меньше периода, соответствующего измененному перигейному расстоянию. Из рисунка видно, что атмосфера не изменяет существенно характера поведения угла  $\alpha_1$ , но влияет на величину реактивного ускорения и соответственно на функционал задачи.

Результаты моделирования на ЭВМ выявили колебательный харак-

тер как реактивного ускорения, так и угла ориентации тяги относительно трансверсали. Период колебаний соответствует периоду обращения на орбите. Влияние возмущений проявляется в увеличении модуля реактивного ускорения и смещении вдоль орбиты характерных точек, определяющих направление тяги. Исследование закономерностей этой эволюции позволяет строить близкие к оптимальным программы управления с учетом дополнительных факторов и возмущений и оценивать увеличение функционала  $J$  по сравнению с известными решениями [17] для центрального поля.

### 7.3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТОЙ В БОЛЬШИХ ИНТЕРВАЛАХ ВРЕМЕНИ

**7.3.1. Уравнения движения.** При оптимизации длительных космических перелетов между эллиптическими орбитами малость реактивного ускорения оказывается важным фактором, позволяющим упростить математическую модель движения. В этом случае удобно использовать усредненные уравнения движения, описывающие вековую эволюцию параметров эллиптической орбиты. Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию изменении трех элементов орбиты: большой полуоси  $A$ , эксцентриситета  $e$  и аргумента перицентра  $\omega$  постоянным по величине реактивным ускорением  $a$ , направленным по трансверсали.

Уравнения движения КА с трансверсальным постоянным ускорением запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\vartheta} &= \gamma_2 \frac{2p\delta a}{(1-e^2)^2} \left[ \frac{r}{p} + e \cos\vartheta \left(1 + \frac{r}{p}\right) \right]; \\ \frac{de}{d\vartheta} &= \gamma_2 \delta a \left[ \cos\vartheta \left(1 + \frac{r}{p}\right) + \frac{er}{p} \right]; \\ \frac{d\omega}{d\vartheta} &= \frac{\gamma_2}{e} a \delta \sin\vartheta \left(1 + \frac{r}{p}\right) + \gamma_2 \frac{\epsilon}{2\sqrt{p}} (5\cos^2 i - 1); \\ \frac{dt}{d\vartheta} &= \gamma_2 \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \end{aligned} \tag{7.48}$$

где

$$\gamma_2 = \left[ \frac{\mu}{r^2} - \frac{a\delta}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin\vartheta \right]^{-1}. \tag{7.49}$$

Здесь  $\mu$  – гравитационный параметр Земли;  $r$  – геоцентрическое расстояние;  $p$  – фокальный параметр орбиты;  $A$  – большая полуось орбиты;  $\omega$  – аргумент перицентра;  $t$  – время;  $\vartheta$  – истинная аномалия;

$a$  – модуль ускорения;  $\delta = \{-1, 0, +1\}$  – функция переключения. Второе слагаемое в уравнении для  $\frac{d\omega}{d\vartheta}$  учитывает влияние нецентральной гравитационного поля Земли.

Введем некоторые упрощения исходной модели. Полагая, что величина  $a/e$  мала по сравнению с величиной  $\mu/r^2$ , равенство (7.49) заменим приближенной зависимостью

$$\gamma_2 \approx (\mu/r^2)^{-1}. \quad (7.50)$$

Учитывая (7.50), усредним правые части уравнения (7.48) на отрезке  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . Допустим, что на каждом витке имеется участок, на котором ускорение сохраняет постоянный знак.

Произведя усреднения уравнений (7.48), проведем некоторые исследования, обозначив через  $\eta = (E_0 + E_K)/2$  эксцентрискую аномалию середины активного участка,  $\xi = (E_K - E_0)/2$  половину его протяженности по эксцентриской аномалии, и переходя затем к аргументу  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2\pi} 4A \sqrt{\frac{A}{\mu}} \sqrt{1 - e^2} a \xi; \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} \sqrt{1 - e^2} a [-3e\xi + 4\sin\xi \cos\eta - \\ &- \frac{e}{2} \sin 2\xi \cos 2\eta]; \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{a}{e} [2(2 - e^2) \sin\xi \sin\eta - \\ &- \frac{e}{2} \sin 2\xi \sin 2\eta] + BA^{-7/2}. \end{aligned}$$

Здесь член  $BA^{-7/2}$  приближенно учитывает влияние второй зональной гармоники в разложении геопотенциала;  $B = \epsilon/(2\sqrt{\mu})(5\cos^2 i - 1)$ ;  $\epsilon = 2,634 \cdot 10^5 \text{ м}^5/\text{с}^2$ .

Рассмотрим случай, когда эксцентриситет начальной и конечной орбит достаточно мал, так что можно положить  $1 - e^2 \approx 1$ ;

$$\begin{aligned} -3e\xi + 4\sin\xi \cos\eta - (e/2)\sin 2\xi \cos 2\eta &\approx 4\sin\xi \cos\eta; \\ 2(2 - e^2)\sin\xi \sin\eta - 0,5e\sin 2\xi \sin 2\eta &\approx 4\sin\xi \sin\eta. \end{aligned}$$

С учетом упрощений перейдем от системы (7.51) к уравнениям, приближенно описывающим вековую эволюцию слабоэллиптической орбиты под действием постоянного по модулю трансверсального реактивного ускорения

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{2}{\pi} A \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \xi; \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \sin \xi \cos \eta; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{e} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \sin \xi \sin \eta + BA^{-7/2}.\end{aligned}\tag{7.52}$$

Управлениями являются параметры  $\xi$  и  $\eta$ , постоянные в пределах одного витка и медленно изменяющиеся от витка к витку.

Допустим, что на каждом витке имеется  $m$  разгонных участков (с положительным направлением ускорения), которые будем характеризовать параметрами  $\xi_i^+$  и  $\eta_i^+$ ,  $i = \overline{1, m}$  и  $n$  тормозных участков с параметрами  $\xi_j^-$ ,  $\eta_j^-$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Применяя принцип суперпозиции малых возмущений, получим

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{2}{\pi} A \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \left( \sum_{i=1}^m \xi_i^+ - \sum_{j=1}^n \xi_j^- \right); \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \left( \sum_{i=1}^m \sin \xi_i^+ \cos \eta_i^+ - \sum_{j=1}^n \sin \xi_j^- \cos \eta_j^- \right); \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2}{\pi e} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \left( \sum_{i=1}^m \sin \xi_i^+ \sin \eta_i^+ - \sum_{j=1}^n \sin \xi_j^- \sin \eta_j^- \right) + BA^{-7/2}.\end{aligned}\tag{7.53}$$

**7.3.2. Структура оптимального управления в пределах витка.** Сформулируем задачу об оптимальном управлении орбитой следующим образом: определить параметры управления  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ , которые обеспечивают коррекцию элементов  $A$ ,  $e$ ,  $\omega$  с помощью трансверсальной тяги за минимальное время, причем на каждом витке имеются пассивные участки. Суммарная продолжительность пассивных участков на витке считается заданной, а их расположение на орбите должно выбираться из соображений оптимальности.

Непосредственно из системы уравнений (7.48) легко получить локально-оптимальные управления, позволяющие осуществить требуемое изменение одного из элементов. Так, управление

$$\delta = \text{sign} \Delta A,\tag{7.54}$$

где  $\Delta A$  – требуемое приращение большой полуоси соответствует изменению величины  $A$  со скоростью, максимально возможной при заданном уровне ускорения  $a$ . Управление

$$\delta = \text{sign} (\Delta e \cos \vartheta)\tag{7.55}$$

соответствует максимальной скорости изменения эксцентриситета орбиты, а управление

$$\delta = \text{sign}(\Delta\omega \sin\vartheta) \quad (7.56)$$

обеспечивает наибольшую скорость поворота линии апсид.

Каждое из уравнений (7.55), (7.56) изменяет один из элементов орбиты, поэтому с помощью таких законов можно приближенно решить задачу коррекции, однако такая коррекция не будет оптимальной. Определим, каково оптимальное расположение рабочих участков на витке, используя дифференциальные связи (7.53).

Составим функцию

$$R = \varphi_A \left( \frac{dA}{dt} \right) + \varphi_e \left( \frac{de}{dt} \right) + \varphi_\omega \left( \frac{d\omega}{dt} \right) + \varphi_t. \quad (7.57)$$

Будем искать параметр  $\eta_i^+$ , исходя из максимума функции

$$H_i^+ = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a (\psi_e \sin \xi_i^+ \cos \eta + \psi_\omega \frac{1}{e} \sin \xi_i^+ \sin \eta). \quad (7.58)$$

Здесь  $\psi_A(t)$ ,  $\psi_e(t)$ ,  $\psi_\omega(t)$  — частные производные функции  $\varphi(t, A, e, \omega)$  в точках предполагаемой минимали.

Обозначим  $\bar{\eta}_i^+ = \arg \max_{\eta} H_i^+$ . Анализ выражения (7.58) показывает,

что величина  $\bar{\eta}_i^+$  остается постоянной для всех  $i = \overline{1, m}$ , так как  $\sin \xi_i \geq 0$  ( $0 \leq \xi \leq \pi$ );  $\bar{\eta}_i^+ = \arg \max_{\eta} H_i^+ = \bar{\eta}^+ \quad \forall i = \overline{1, m}$ . Следовательно, чтобы

обеспечить  $\max R$ , все разгонные участки должны быть сгруппированы в

один разгонный участок с центром  $\bar{\eta}^+$ . Координата центра тормозного участка  $\bar{\eta}_j^-$  должна обеспечивать максимум функции

$$H_j^- = - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a (\psi_e \sin \xi_j^- \cos \eta + \psi_\omega \frac{1}{e} \sin \xi_j^- \sin \eta). \quad (7.59)$$

Зависимость  $H_j^-(\eta)$  представляет собой синусоиду, сдвинутую на  $\pi$  относительно синусоиды  $H_i^+(\eta)$  по оси  $\eta$  (рис. 7.3).

Следовательно, чтобы обеспечить максимум функции  $R$ , необходимо все тормозные участки сгруппировать в один тормозной участок, центр которого сдвинут относительно центра разгонного участка на  $\pi$  по эксцентрической аномалии.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: структура управления для рассматриваемой задачи коррекции орбиты должна предусматривать два рабочих участка (разгонный и тормозной), центры которых разнесены на угол  $\pi$  по эксцентрической аномалии. Если на витке должен быть предусмотрен пассивный участок протяженностью  $2\alpha_*$ , то два пассивных участка шириной  $\alpha_*$  должны разделять тормозной и разгонный участки (рис. 7.4).

Расположение рабочих участков на витке будем характеризовать

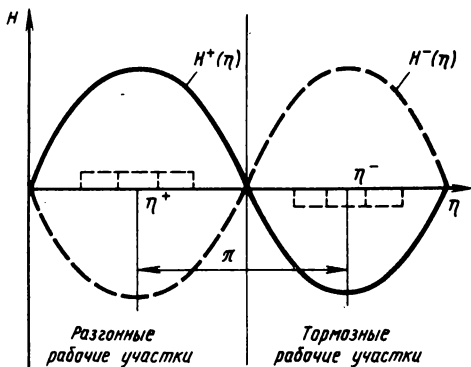


Рис. 7.3. Характер изменения функции Гамильтона

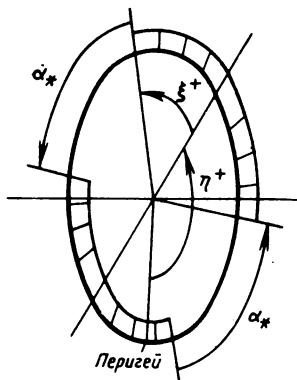


Рис. 7.4. Структура оптимального управления на витке

три параметра:  $\eta$  – центр разгонного участка;  $\xi$  – половина его ширины;  $\alpha_*$  – ширина одного пассивного участка. Таким образом, для оптимальной структуры управления имеем:  $m = 1$ ;  $n = 1$ ;  $\xi^+ = \xi$ ,  $\eta^+ = \eta$ . Суммарная ширина пассивных участков  $2\alpha_*$ , поэтому  $\xi^- = \pi - \alpha_* - \xi$ ;  $\eta^- = \eta + \pi$ . После подстановки в уравнения (7.53) получаем систему уравнений движения, описывающую вековую эволюцию элементов орбиты при оптимальной структуре управления в пределах витка:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{4}{\pi} A \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \left( \xi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \right); \\ \frac{de}{dt} &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \xi \right) \cos \eta; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{4}{\pi e} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \xi \right) \sin \eta + BA^{-7/2}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Система уравнений (7.60) позволяет получить уравнения, соответствующие наискорейшему изменению каждого из элементов орбиты. Например, из первого уравнения следует, что максимальной скорости изменения элемента  $A$  при  $\alpha_* = 0$  соответствует управление  $\xi = \pi$ , если  $\Delta A > 0$  и  $\xi = 0$ , если  $\Delta A < 0$ . Этот режим полностью соответствует (7.54).

Максимальную скорость изменения эксцентриситета обеспечивает управление  $\xi = \pi/2$ ;  $\cos \eta = \text{sign} \Delta e$ , что соответствует (7.55).

Максимальная скорость поворота линии апсид достигается при  $\xi = \pi/2$ ;  $\sin \eta = \text{sign} \Delta \omega$ , что совпадает с (7.56).

**7.3.3. Оптимизация медленно меняющихся компонент управления.** Обозначим  $x = \{A, e, \omega\}^T$  вектор состояния. В соответствии с постав-

ленной задачей необходимо выбрать параметры управления  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ , переводящие вектор состояния из положения  $x_0$  в положение  $x_K$  за минимальное время при дифференциальных связях (7.60). Параметры  $a$  и  $0 < \alpha_* \leq \pi$  считаются заданными.

Рассмотрим сначала движение аппарата в центральном поле. Запишем выражение для функции  $R_1$ :

$$R_1 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \left[ \varphi_A A \left( \xi + \frac{\alpha_*}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \varphi_e \cos \frac{\alpha_*}{2} \sin \left( \frac{\alpha_*}{2} + \xi \right); \right. \quad (7.61)$$

$$\left. \cos \eta + \varphi_\omega \frac{1}{e} \cos \frac{\alpha_*}{2} \sin \left( \frac{\alpha_*}{2} + \xi \right) \sin \eta \right] + \varphi_t.$$

Из условий 1-го порядка максимума функции  $R_1$  по управлению  $\eta$ , находим с учетом  $\varphi_A = \psi_A = \varphi_e = \psi_e$ ,  $\varphi_\omega = \psi_\omega$ :

$$\operatorname{tg} \bar{\eta} = \frac{1}{e} \frac{\psi_\omega}{\psi_e}; \quad \sin \bar{\eta} = \frac{\psi_\omega}{\sqrt{\psi_\omega^2 + \psi_e^2 e^2}}. \quad (7.62)$$

Управление  $\bar{\xi}$  определяем с учетом ограничения  $0 \leq \xi + \alpha_* \leq \pi$ . Вводя обозначение

$$\Phi = \arccos \left[ - \frac{\psi_A A}{\psi_e \cos \frac{\alpha}{2} \cos \eta + \psi_\omega \frac{\cos \alpha_*}{e} \sin \eta} \right], \quad (7.63)$$

из условия максимума  $R_1$  получим

$$\bar{\xi} = \begin{cases} \Phi - \alpha_* & \text{если } 0 \leq \Phi + \frac{\alpha_*}{2} \leq \pi. \\ \pi - \alpha_* & \text{если } \pi < \Phi + \frac{\alpha_*}{2}. \end{cases} \quad (7.64)$$

Запишем систему уравнений  $\frac{\partial R_1}{\partial x_i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_A}{dt} &= - \frac{6}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \left( \xi + \frac{\alpha_*}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \psi_A - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A\mu}} \times \\ &\times a \cos \frac{\alpha_*}{2} \sin \left( \frac{\alpha_*}{2} + \xi \right) \cos \eta \psi_e - \frac{2}{\pi} \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{A\mu}} a \times \\ &\times \cos \frac{\alpha_*}{2} \sin \left( \frac{\alpha_*}{2} + \xi \right) \sin \eta \psi_\omega; \end{aligned} \quad (7.65)$$

$$\frac{d\psi_e}{dt} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{e^2} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \cos \frac{\alpha_*}{2} \sin \left( \frac{\alpha_*}{2} + \xi \right) \sin \eta \psi_\omega;$$

$$\frac{d\psi_\omega}{dt} = 0.$$

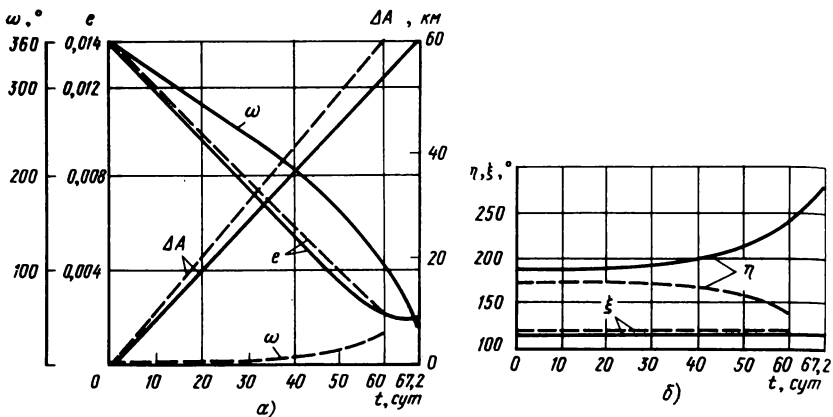


Рис. 7.5. Изменение элементов орбиты на оптимальной траектории (а) и параметров управления (б):

--- для центрального поля, — с учетом несферичности Земли

Из последнего уравнения системы (7.65) следует, что  $\psi_\omega = \text{const}$ , поэтому положим  $\psi_\omega = 1$ . В результате вариационная задача сводится к двучточной краевой задаче для системы из шести дифференциальных уравнений первого порядка.

Сформулированная краевая задача решалась модифицированным методом Ньютона. На рис. 7.5 представлены результаты решения для следующих граничных условий:  $t = t_0 : A^* = 6978 \text{ км}; e = 0,014; \omega = 0$ ;  $t = t_K : A^* = 7038 \text{ км}; e = 0,002; \omega = 36^\circ$ . Корректирующее ускорение принималось равным  $a^* = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2$ , пассивный участок отсутствовал ( $\alpha_* = 0$ ). Наклонение было выбрано равным  $98^\circ$ , что соответствует солнечно-синхронной орбите. На рис. 7.5, а изображены графики изменения величин  $A, e, \omega$ . Закон изменения  $A$  и  $e$  близок к линейному, причем производная  $\frac{de}{dt}$  несколько уменьшается к концу интервала коррекции.

Минимальное время коррекции в данной задаче оказалось равным  $t_K^* = 59,85 \text{ сут.}$  Значение параметра  $\eta$ , который определяет расположение рабочих участков на орбите, изменяется от  $\eta_0 = 174,6^\circ$  при  $t = 0$  до  $\eta_K = 138,6^\circ$  при  $t = t_K$ , т.е.  $\Delta\eta = -36^\circ = -\Delta\omega$ . Оптимальное значение параметра  $\xi$  практически не меняется.

Анализ полученного решения позволяет установить следующее свойство оптимальной по быстродействию коррекции орбиты: расположение рабочих участков относительно восходящего узла орбиты не изменяется по всей траектории. Это свойство позволяет находить оптимальное управление в результате решения двухпараметрической краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (7.60) без привлечения соп-

раженной системы уравнений (7.65). В результате решения параметрической краевой задачи рассчитываются следующие параметры управления:  $u_\eta = \text{const}$ , характеризующий расположение середины разгонного рабочего участка относительно восходящего узла орбиты, и  $\xi = \text{const}$ , определяющий протяженность разгонного рабочего участка на витке. Рассчитав по приближенной методике параметры управления для приведенных выше граничных условий, получим:  $\eta = 162,1^\circ$ ;  $\xi = 123^\circ$ ;  $t_K^* = 60,45$  сут. Таким образом, приближенное решение дает погрешность по функционалу (времени маневра) на 0,6 сут, что составляет всего 1% от общего времени межорбитального перелета.

**7.3.4. Учет несферичности Земли.** Исследуя вариационную задачу об оптимальной по быстродействию коррекции параметров орбиты с учетом прецессии, получим, что выражения (7.62) и (7.64) для оптимальных значений  $\eta$  и  $\xi$  сохраняются. В системе уравнений (7.65) меняется только

уравнение для  $\frac{d\psi_A}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_A}{dt} = & -\frac{6}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} a \left( \xi + \frac{\alpha_*}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \psi_A - \frac{2}{\pi} \frac{a}{\sqrt{A\mu}} \times \\ & \times \left( \cos \frac{\alpha_*}{2} \sin \left( \frac{\alpha_*}{2} + \xi \right) \cos \eta \psi_e - \frac{2}{\pi} \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{A\mu}} \times \right. \\ & \left. \times \cos \frac{\alpha_*}{2} \sin \left( \frac{\alpha_*}{2} + \xi \right) \sin \eta \cdot \psi_\omega \right) + \psi_\omega \cdot \frac{7}{2} BA^{-\frac{9}{2}}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Результаты решения вариационной задачи с учетом нецентральности гравитационного поля Земли приведены на рис. 7.5. Краевая задача решалась для тех же граничных условий и параметров, что и в разд. 7.3.3.

Из рис. 7.5 видно, что сжатие Земли оказывает существенное влияние на характеристики оптимального процесса. Минимальное время коррекции здесь равно  $t_K^* = 67,2$  сут. Зависимость  $\omega(t)$  представляет собой монотонную функцию, близкую к линейной. Это объясняется тем, что при заданном уровне корректирующего ускорения доминирующим фактором, определяющим изменение  $\omega$ , является прецессия орбиты, обусловленная влиянием 2-й зональной гармоники в разложении потенциала гравитационного поля Земли. Поскольку  $i = 98^\circ$ , то  $B < 0$ , и аргумент перигея уменьшается. Как показали расчеты, для оптимальной по быстродействию коррекции элементов орбиты с учетом прецессии характерно, что аргумент широты центра разгонного рабочего участка изменяется по закону, близкому к линейному:

$$u_\eta \approx u_{\eta_0} + BA^{-7/2} t, \quad (7.67)$$

поэтому оптимальный режим управления можно также определять в результате решения параметрической краевой задачи для системы уравнений (7.60) относительно неизвестных  $\xi$  и  $u_{\eta_0}$ .

## КОММЕНТАРИИ

1. Интегрирование уравнений сопряженной системы на кеплеровской орбите впервые было выполнено Лоуденом в работе "Оптимальные траектории для космической навигации". Более удобным является решение, приведенное в работе Экенуиллера "Замкнутая форма множителей Лагранжа для пассивных участков оптимальных траекторий полета", результаты которого используются в настоящей главе. Следует отметить, что автор работы проводил интегрирование с целью вычисления множителей Лагранжа на пассивных участках траекторий ракет, чтобы знать их величины в момент повторного включения двигателя. В механике полета с малой тягой прием отыскания предельных оптимальных управлений до сих пор не использовался.

2. В задачах со свободным правым концом траектории удастся избавляться от процедуры решения краевой задачи. При фиксированных конечных условиях можно воспользоваться каким-либо приемом расширения множества допустимых траекторий, например использующим метод штрафных функций. Существенным требованием при использовании такого метода управления является близость траектории полета к кеплеровской орбите, что накладывает ограничения на общую протяженность траектории (менее одного витка). Определенные перспективы возникают, если считать константы  $C_1$  и  $C_2$  разновидностью оскулирующих элементов орбиты и вычислять их либо в виде непрерывных функций времени, либо дискретно, по виткам.

3. Вопросы построения оптимальных программ управления движением спутников Земли с двигателями малой тяги были исследованы до настоящего времени недостаточно. Так, практически отсутствовал анализ совместного влияния сопротивления верхних слоев атмосферы и нецентральности гравитационного поля. Известные результаты в основном относятся к задачам поддержания устойчивого движения спутника в заданном шаровом слое, а также управления движением аппарата, накапливающего атмосферный газ [17]. Этот пробел был закрыт с появлением работы В.В. Васильева [11] (см. разд. 7.2). Выбор идеально регулируемого двигателя малой тяги в качестве объекта исследования позволил упростить решение краевых задач. Качественная картина влияния нецентральности гравитационного поля и сопротивления атмосферы на программы управления в этом случае выявляется достаточно наглядно.

4. Управление эллиптической орбитой спутника Земли на больших интервалах времени с помощью двигателя малой тяги давно служит предметом теоретических исследований. Серьезные проблемы здесь связаны с большой продолжительностью перелета и неэффективностью вычислительных алгоритмов при решении краевых задач с большим количеством точек переключения тяги. Разделение параметров движений на периодические и вековые составляющие и последовательная оптимизация управлений в пределах витка и вдоль траектории позволили В.В. Юрину [69] (см. разд. 7.3) обойти, по крайней мере, часть этих трудностей.

**ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОШАГОВЫХ  
МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ**

При исследовании многовитковых траекторий аппаратов с малой тягой в "сильных" гравитационных полях весьма эффективным оказался прием разделения "быстрых" и "медленных" движений и расщепления управления на быстро и медленно меняющиеся составляющие. Медленные эволюции параметров траектории хорошо описываются усредненными по быстро меняющейся фазе уравнениями. Эти уравнения, как правило, гораздо проще исходных и позволяют существенно упростить решение задачи оптимизации. Однако модель движения остается при этом дифференциальной, что сдерживает использование для оптимизации подходов, приводящих к условиям оптимальности типа Беллмана. Избежать некоторых трудностей можно, если применить дискретную модель движения, в которой шаг дискретности равен длительности одного витка траектории.

**8.1. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ  
С МАЛОЙ ТЯГОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ**

**8.1.1. Дискретные уравнения околокругового движения.** В качестве исходных уравнений возьмем усредненные уравнения, соответствующие случаю, когда начальная и конечная орбита круговые, радиальная составляющая тяги отсутствует, а управлением является угол  $\psi$  между вектором тяги и мгновенной плоскостью орбиты (гл. 6):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{du} &= 2ar^3 \cos\psi; \\ \frac{di}{du} &= \frac{2a}{\pi} r^2 \sin|\psi|; \\ \frac{dt}{du} &= r^{3/2}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Пусть аргумент этих уравнений  $u$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Считая, что переменные в правых частях уравнений (8.1) изменяются медленно, получим приращение параметров движения  $r, i, t$  за виток:

$$\begin{aligned} \Delta r &= 4\pi ar^3 \cos\psi; \\ \Delta i &= 4a r^2 \sin|\psi|; \\ \Delta t &= 2\pi r^{3/2}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Свяжем параметры движения в конце  $i$ -го витка и  $(i + 1)$ -го витков рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i + 4\pi a_i r_i^3 \cos\psi_i; \\ i_{i+1} &= i_i + 4a_i r_i^2 \sin|\psi_i|; \\ t_{i+1} &= t_i + 2\pi r_i^{3/2}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Аналогичным способом можно получить рекуррентные соотношения для скорости и механической энергии поступательного движения центра масс

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i - 2\pi a_i \frac{r_i}{V_i} \cos\psi_i; \\ h_{i+1} &= h_i + 2\pi a_i r_i \cos\psi_i. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Уравнения (8.3) соответствуют случаю "разгона", когда проекция вектора тяги на вектор скорости совпадает с ним на направлении. Для случая "торможения" знаки в правых частях формул надо изменить на противоположные. Символом  $a_i$  в правых частях уравнений движения обозначено текущее реактивное ускорение.

Окончательный вид дискретной модели околосферического пространственного движения таков:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i \pm 4\pi a_i r_i^3 \cos\psi_i; \\ V_{i+1} &= V_i \mp 2\pi a_i (r_i/V_i) \cos\psi_i; \\ h_{i+1} &= h_i \pm 2\pi a_i r_i \cos\psi_i; \\ i_{i+1} &= i_i \pm 4a_i r_i^2 \sin|\psi_i|; \\ t_{i+1} &= t_i + 2\pi r_i^{3/2}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Все переменные в (8.5) — безразмерные.

Численное моделирование показало, что уравнениями (8.5) можно пользоваться для приближенных расчетов перелетов между круговыми орбитами. Так, для  $a = 10^{-4}$  в задаче перехода с низкой орбиты на геостационарную относительная погрешность вычисления радиуса составила 0,2 ... 0,3 %, скорости — менее 0,1 %, энергии — также менее 0,1 %.

8.1.2. Учет движения аппарата относительно центра масс. Исходной предпосылкой для вывода дискретных уравнений (8.5) явилось допущение, что тяга двигателя все время располагается в плоскости местного горизонта. Если угловая скорость поворота вектора тяги в плоскости орбиты ограничена некоторой величиной  $\Omega_{\max}$  (см. гл. 4), то это допущение неверно. Однако в этом случае оптимальное управление  $\Omega(t)$  стремится удерживать вектор тяги в окрестности касательной к траекто-

рии, а нормальная составляющая тяги периодически меняет знак. Будем считать, что и в этом случае интегральный эффект радиальной составляющей тяги отсутствует.

Ясно, что усредненная, или эффективная, трансверсальная составляющая ускорения теперь будет меньше, чем без ограничений на управление вектором тяги.

Вычисление эффективного ускорения  $a_{\Sigma}$  в ряде случаев связано с определенными трудностями. Наиболее просто выполнить такое вычисление для аппаратов, сохраняющих неизменную ориентацию вектора тяги в пространстве (см. гл. 4). Достаточно положить  $\Omega \equiv 0$  и потребовать монотонного изменения энергии по траектории. При этом трансверсальная и радиальная составляющие ускорения будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_X &= a|\cos u|; \\ a_Y &= a \sin u \cdot \text{sign}(\cos u). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Видно, что радиальная составляющая  $a_Y$  дважды за виток меняет знак, оставаясь в среднем равной нулю. Трансверсальная составляющая в результате усреднения по углу  $u$  такова:

$$\hat{a}_X = a_{\Sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a|\cos u| du. \quad (8.7)$$

Пусть  $a = \text{const}$ , тогда  $a_{\Sigma} = 2a/\pi$ . Если, например,  $a = a_m \cos u$ , то  $a_{\Sigma} = a_m/2$ .

**8.1.3. Дискретные уравнения эллиптического движения.** В гл. 7 были получены усредненные уравнения, описывающие изменения элементов орбиты ( $A$ ,  $e$ ,  $\omega$ ) под действием постоянного трансверсального ускорения, работающего в пределах участков: разгонного, с координатой середины участка  $\eta$  (отсчитывается от положения оскулирующего перигея) и шириной  $2\xi$  (по эксцентрической аномалии) и тормозного, расположенного симметрично разгонному, шириной  $2(\pi - \xi - \alpha_*)$ . Здесь  $2\alpha_*$  — общая протяженность пассивных участков, разделяющих оба активных участка.

Переходя к приращениям  $\Delta A$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta \omega$  на витке, соответствующем изменению истинной аномалии  $\vartheta$  от 0 до  $2\pi$ , с учетом малости изменения параметров в правых частях уравнений приходим к системе дискретных уравнений

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= A_i + 4\pi A_i^3 a_i (2\xi_i - \alpha_{*i} - \pi); \\ e_{i+1} &= e_i + 4A_i^2 a_i \sin(\xi_i + 0,5\alpha_{*i}) \times \\ &\times \cos \eta_i \cos(0,5\alpha_{*i}); \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + 4e_i^{-1} \sqrt{A_i} a_i \sin(\xi_i + 0,5\alpha_{*i}) \times \\ &\times \sin \eta_i \cos(0,5\alpha_{*i}). \end{aligned} \quad (8.8)$$

В целом уравнения (8.8) хорошо отражают качественную картину процесса эволюции параметров движения по виткам под действием малого трансверсального ускорения.

## 8.2. КОНСТРУКЦИЯ ОЦЕНОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

**8.2.1. Оценка режимов управления энергией орбитального движения.** Рассмотрим задачу об изменении механической энергии орбитального движения центра масс КА при старте с круговой орбиты. Плоское движение аппарата будем описывать дискретными уравнениями

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i + 4\pi a_i r_i^3; \\ V_{i+1} &= V_i - 2\pi a_i r_i / V_i; \\ h_{i+1} &= h_i + 2\pi a_i r_i. \end{aligned} \quad (8.9)$$

В качестве критерия оптимальности выберем  $J$ -интеграл от квадрата реактивного ускорения, который в дискретной постановке принимает вид

$$J = \sum_{i=0}^N 2\pi a_i^2 \frac{r_i}{V_i} \rightarrow \min. \quad (8.10)$$

Здесь  $i$  – номер витка траектории (предполагается, что движение начинается с круговой орбиты, а витки остаются близкими к круговым);  $N$  – заданное общее число витков (является в некотором смысле эквивалентом конечного времени  $T$ ).

Запишем условие достижения заданного значения энергии  $h_K$  к началу  $(N + 1)$ -го витка. С учетом этого условия определим функционал задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^N 2\pi a_i^2 \frac{r_i}{V_i} + \nu (h_{N+1} - h_K)^2 = \\ &= \sum_{i=0}^N 2\pi a_i^2 \frac{r_i}{V_i} + \nu (h_N + 2\pi a_N r_N - h_K)^2, \end{aligned} \quad (8.11)$$

где  $\nu$  – постоянный весовой коэффициент.

Минимум  $I$  обеспечивает минимум  $J_{N+1}$  при одновременном условии достижения заданного значения энергии  $h_K$ .

Сформулируем окончательно следующую задачу: найти программу изменения уровня ускорения  $a(i)$  по виткам, обеспечивающую минимум функционала  $I$  или, по крайней мере, получить гарантированную оценку степени неоптимальности любого допустимого управления  $\tilde{a}(i)$ , обеспечивающего выполнение заданных граничных условий.

Для рассматриваемой задачи функция  $L$  (см. гл. 2) имеет вид

$$L = -\varphi(1, f(0, x_0, u_0)) + 2\pi a_0^2 \frac{r_0}{V_0} + \varphi(N, x_N) + \\ + 2\pi a_N^2 \frac{r_N}{V_N} + \nu(h_N + 2\pi a_N r_N - h_K)^2 - \\ - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \varphi[i+1, f(i, x, u) - \varphi(i, x) - 2\pi a_i^2 \frac{r_i}{V_i} \right\}. \quad (8.12)$$

Функцию Кротова  $\varphi(i, x)$  будем строить в соответствии с соотношениями (2.24):

$$\varphi(N, x_N) = -\min_{a_N} \left[ 2\pi a_N^2 \frac{r_N}{V_N} + \nu(h_N + 2\pi a_N r_N - h_K)^2 \right]; \quad (8.13)$$

$$\varphi(i, x) = \max_{a_i} \left[ -2\pi a_i^2 \frac{r_i}{V_i} + \varphi(i+1, x) \right]. \quad (8.14)$$

Здесь  $x = (r, V, h)^T$ ,  $u = a$ .

Найдем  $\varphi(N, x)$ . Минимизируя по  $a_N$  выражение в квадратных скобках в (8.13), получим

$$a_N = \nu(h_N - h_K) \left( \frac{1}{V_N} + 2\pi \nu r_N \right)^{-1},$$

откуда

$$\varphi(N, x) = -\nu(h_N - h_K)^2 (1 + 2\pi \nu V_N r_N)^{-1}.$$

При  $\nu \rightarrow \infty$  получим предельные решения

$$a_N = -\frac{h_N - h_K}{2\pi r_N}; \quad (8.15)$$

$$\varphi(N, x) = -\frac{(h_N - h_K)^2}{2\pi r_N V_N}, \quad (8.16)$$

соответствующие точному выполнению граничного условия  $h_{N+1} = h_K$ . Найдем  $\varphi(N-1, x)$ . Используя (8.14) и (8.16), получим

$$\varphi(N-1, x) = \max_{a_{N-1}} \left\{ -2\pi a_{N-1}^2 \frac{r_{N-1}}{V_{N-1}} - \right. \\ \left. - \frac{(h_{N-1} + 2\pi a_{N-1} r_{N-1} - h_K)^2}{2\pi r_{N-1} V_{N-1} (1 + 4\pi a_{N-1} r_{N-1}^2) (1 - 2\pi a_{N-1} r_{N-1} / V_{N-1})} \right\}.$$

Для сокращения выкладок введем обозначение

$$\xi(r, V, a) = (1 + 4\pi ar^2)(1 - 2\pi ar/V^2). \quad (8.17)$$

При отыскании максимума по  $a_{N-1}$  будем считать, что  $\xi(r_{N-1}, V_{N-1}, a_{N-1}) \approx 1$  в силу того, что  $a \ll 1$ , начальные значения безразмерных параметров  $r, V$  на исходной круговой орбите равны единице, и диапазон изменения этих параметров, вообще говоря, ограничен

$$\varphi(N-1, x) \approx \max_{a_{N-1}} \left\{ -2\pi a_{N-1}^2 \frac{r_{N-1}}{V_{N-1}} - \frac{h_{N-1} + 2\pi a_{N-1} r_{N-1} - h_K}{2\pi r_{N-1} V_{N-1}} \right\},$$

откуда

$$a_{N-1} = - \frac{h_{N-1} - h_K}{4\pi r_{N-1}}; \quad (8.18)$$

$$\varphi(N-1, x) = - \frac{(h_{N-1} - h_K)^2}{4\pi r_{N-1} V_{N-1}}. \quad (8.19)$$

Повторяя эту процедуру для  $i = N-2$  и считая по-прежнему, что  $\xi(r_{N-2}, V_{N-2}, a_{N-2}) \approx 1$ , получим

$$a_{N-2} = - \frac{h_{N-2} - h_K}{6\pi r_{N-2}};$$

$$\varphi(N-2, x) = - \frac{(h_{N-2} - h_K)^2}{6\pi r_{N-2} V_{N-2}}.$$

Аналогично для  $i = N-3$  получим

$$a_{N-3} = - \frac{h_{N-3} - h_K}{8\pi r_{N-3}};$$

$$\varphi(N-3, x) = - \frac{(h_{N-3} - h_K)^2}{8\pi r_{N-3} V_{N-3}}.$$

Окончательные выражения для управления  $a(i)$  и функции  $\varphi(i, x)$  получим методом математической индукции:

$$a(i) = - \frac{h_i - h_K}{2\pi r_i (N - i + 1)}; \quad (8.20)$$

$$\tilde{\varphi}(i, x) = - \frac{(h_i - h_K)^2}{2\pi r_i V_i (N - i + 1)}. \quad (8.21)$$

Поскольку  $\tilde{\varphi}(i, x)$  не является точным решением задачи, она пригодна лишь для приближенных оценок минимального значения функционала  $I$ :

$$\min_D I \approx - \tilde{\varphi}(0, x_0) = \frac{(h_0 - h_K)^2}{2\pi r_0 V_0 (N + 1)} = - \frac{(0,5 + h_K)^2}{2\pi (N + 1)}. \quad (8.22)$$

Здесь использованы начальные условия, соответствующие круговой орбите:  $r_0 = 1$ ,  $V_0 = 1$ ,  $h_0 = -0,5$ .

Построим алгоритм оценки близости любого режима  $\tilde{a}(i)$  к абсолютно оптимальному, используя решение (8.21). Для рассматриваемой задачи  $L$  принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} L = & \frac{(h_0 + 2\pi a_0 r_0 - h_K)^2}{2\pi N r_0 V_0 \xi(r_0, V_0, a_0)} + \\ & + 2\pi a_0^2 \frac{r_0}{V_0} - \frac{(h_N - h_K)^2}{2\pi r_N V_N} + 2\pi a_0^2 \frac{r_N}{V_N} + \\ & + \nu(h_N + 2\pi a_N r_N - h_K)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ - \frac{(h_i + 2\pi a_i r_i - h_K)^2}{2\pi(N-i)r_i V_i \xi(r_i, V_i, a_i)} + \right. \\ & \left. + \frac{(h_i - h_K)^2}{2\pi r_i V_i (N - i + 1)} - 2\pi a_i^2 \frac{r_i}{V_i} \right\}. \quad (8.23) \end{aligned}$$

Иследуем характер поведения функции  $L(i, r, V, h, a)$ . Прежде всего отметим, что при  $i = N$  функция  $L$  не зависит от  $x$  в силу выбора  $\varphi(N, x)$  и  $a_N$  согласно (8.15), (8.16). При  $i = 0$   $L$  является функцией только  $a$ , так как начальная точка  $x(0) = (r_0, V_0, h_0)$  фиксирована. Практически вычисление оценки в соответствии с (8.23) сводится теперь к минимизации при каждом  $i$  функции  $l_i(r, V, a)$ :

$$\begin{aligned} l_i = & \frac{(h_i + 2\pi a_i r_i - h_K)^2}{2\pi r_i V_i \xi(r_i, V_i, h_i) (N - i)} - \\ & - \frac{(h_i - h_K)^2}{2\pi r_i V_i (N - i + 1)} + 2\pi a_i^2 \frac{r_i}{V_i}, \end{aligned}$$

где  $h_i = 0,5 V_i^2 - r_i^{-1}$ , а  $\xi$  определяется выражением (8.17).

Отметим, что при каждом фиксированном  $i$  перечисленные состояния и управления  $(r, V, a)$  принадлежат некоторой области достижимости, границы которой строятся согласно методу построения априорных верхних и нижних границ изменения фазовых координат (см. гл. 2):  $a_i \in [0, a_{\max}]$ ;  $r_i \in [r_H(i), r_B(i)]$ ;  $V_i \in [V_H(i), V_B(i)]$ , где  $r_H(i)$ ,  $V_H(i)$ ,  $r_B(i)$ ,  $V_B(i)$  – нижние и верхние границы изменения параметров  $r, V$ . Ограничение сверху на величину реактивного ускорения может накладываться, например, из реальных технических соображений, устанавливающих определенные пределы регулирования тяги. При заданном значении  $a_{\max}$  нижние и верхние границы изменения  $r, V$  будем строить по уравнениям

$$\begin{aligned}
 r_H(i+1) &= r_H(i) + \min_{(a, r)} \left\{ 4\pi a(i) r^3(i) \right\} = r_H(i); \\
 r_B(i+1) &= r_B(i) + \max_{(a, r)} \left\{ 4\pi a(i) r^3(i) \right\} = \\
 &= r_B(i) + 4\pi a_{\max} r_B^3(i); \\
 V_H(i+1) &= V_H(i) + \min_{(a, r)} \left\{ -2\pi a(i) \frac{r(i)}{V(i)} \right\} = \\
 &= V_H(i) - 2\pi a_{\max} \frac{r_B(i)}{V_H(i)}; \\
 V_B(i+1) &= V_B(i) + \max_{(a, r, V)} \left\{ -2\pi a(i) \frac{r(i)}{V(i)} \right\} = V_B(i).
 \end{aligned}
 \tag{8.24}$$

Минимизация функции  $l_i$  на каждом шаге процесса проводилась методом простого перебора. Такой метод поиска экстремума, очевидно, не оптимален с точки зрения быстродействия, однако сравнительно прост и в принципе реализует глобальный минимум (при неограниченном увеличении числа точек разбиения).

Следует отметить, что величина оценки существенным образом зависит от верхних и нижних границ изменения параметров  $r, V$ , которые, в свою очередь, целиком определяются значением  $a_{\max}$ . Дело в том, что минимум функции  $l_i$  по  $r, V, a$  часто достигается на границах допустимой области, и от удачного построения этих границ зависит достоверность самой оценки.

”Настройка” алгоритма оценки с целью проверки правильности задания оценочной функции  $\varphi(i, x)$  проводилась для режима  $a(i) = \text{const}$ , заведомо близкого к оптимальному. Приращение энергии в этих расчетах было принято равным 0,3;  $\bar{a} = 5 \cdot 10^{-5} \dots 5 \cdot 10^{-4}$ ; число витков  $N = 750 \dots 1000$ ; отношение радиусов  $r_{N+1}/r_0 = 3 \dots 6$ . Максимально допустимое значение реактивного ускорения  $a_{\max}$  составляло от 1,05 до 1,25 оцениваемого программного значения. Для перечислен-

ных условий наибольшее относительное отклонение функционала  $I$  от его оцениваемого минимального значения не превышало 10,5 %, а в случаях, когда  $a_{\max} = = 1,05 \bar{a}$ , составило всего 1 ... 2 %.

Полученные результаты в определенной степени характеризуют методическую погрешность алгоритма оценки, обусловленную неточностью задания функции  $\varphi$  и границ допустимой области изменения координат. Сравнительно небольшая величина отношения  $\Delta/I(\bar{u})$  позволяет рекомендовать хорошее "нулевое приближение" в алгоритмах улучшения оценки.

**8.2.2. Межорбитальные переходы.** Рассмотрим задачу о переходе КА с двигателем малой тяги с круговой орбиты радиуса  $r_0$  на орбиту меньшего радиуса  $r_K$  за заданное число оборотов  $N$ . В качестве критерия оптимальности выберем приращение характеристической скорости. Дискретное уравнение, описывающее изменение радиуса, имеет вид  $r_{i+1} = r_i - 4\pi a_i r_i^3$ . Функционал задачи зададим так

$$I = \sum_{i=0}^N 2\pi a_i r_i + \nu(r_N - 4\pi a_i r_i^3 - r_K)^2 \rightarrow \min. \quad (8.25)$$

Второй член в функционале представляет собой невязку граничного условия;  $\nu$  – постоянный весовой коэффициент.

В данной задаче  $L$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L = & -\varphi[1, f(0, x_0, u_0)] + 2\pi a_0 r_0 - \varphi(N, x) - \\ & - 2\pi a_N r_N + \nu(r_N - 4\pi a_N r_N^3 - r_K)^2 - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \varphi[i+1, f(i, x, u)] - \varphi(i, x) - 2\pi a_i r_i \right\}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Будем искать  $\varphi(i, x)$  в соответствии с соотношениями (2.29) и (2.30):

$$\varphi(N, x) = -\min_{a_N} [2\pi a_N r_N + \nu(r_N - 4\pi a_N r_N^3 - r_K)^2].$$

Минимизируя выражение в квадратных скобках по  $a_N$ , а затем перейдя к  $\nu \rightarrow \infty$ , получим предельные решения, соответствующие точному выполнению граничных условий

$$a_N = \frac{r_N - r_K}{4\pi r_N^3}; \quad \varphi(N, x) = -\frac{r_N - r_K}{2r_N^2}. \quad (8.27)$$

Далее

$$\begin{aligned} \varphi(N-1, x) &= \max_{a_{N-1}} [-2\pi a_{N-1} r_{N-1} + \varphi(N, x)] = \\ &= \max_{a_{N-1}} \left[ -2\pi a_{N-1} r_{N-1} - \frac{r_{N-1} - 4\pi a_{N-1} r_{N-1}^3 - r_K}{2r_{N-1}^2(1 - 4\pi a_{N-1} r_{N-1}^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Считая приращение радиуса на одном обороте малым из-за малости  $a$ , будем считать, что  $\gamma = (1 - 4\pi a_{N-1} r_{N-1}^2) \approx 1$ . Тогда

$$\varphi(N-1, x) \approx -(r_{N-1} - r_K) / 2r_{N-1}^2.$$

Повторяя аналогичную процедуру для  $i = N-2$ ,  $i = N-3$  и т.д., с теми же допущениями получим окончательное решение – оценочную функцию Кротова  $\tilde{\varphi}(i, x)$ :

$$\tilde{\varphi}(i, x) = -(r_i - r_K) / 2r_i^2. \quad (8.28)$$

Как и для примера, рассматриваемого выше, решение  $\tilde{\varphi}(i, x)$  может служить оценкой минимального значения функционала.

Полученное решение (8.28) можно теперь использовать в алгоритме оценки режимов управления. Минимизация функции  $L$  для непосредственного вычисления оценки сводится к отысканию при каждом  $i$  минимума функции  $g_i$  по параметрам  $a, r$ , заключенным в пределах области, границы которой строятся способом, аналогичным описанному в предыдущей задаче:

$$\begin{aligned} \min_{(a_i, r_i)} g_i = \min_{\substack{r_H(i) \leq r_i \leq r_B(i) \\ 0 \leq a_i \leq a_{\max}}} & \left[ - \frac{r_i - 4\pi a_i r_i^3 - r_K}{2r_i^2 (1 - 4\pi a_i r_i^2)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{r_i - r_K}{2r_i^2} + 2\pi a_i r_i \right], \end{aligned} \quad (8.29)$$

причем  $r_H(i+1) = r_H(i) - 2\pi a_{\max} r_H^3(i)$ .

Если

$$r_H(i+1) \leq r_K, \text{ то } r_H \equiv r_K; r_B(i+1) = r_K + 2\pi a_{\max} r_B^3(j). \quad (8.30)$$

Если

$$r_B(j+1) \geq r_0, \text{ то } r_B \equiv r_0. \quad (8.31)$$

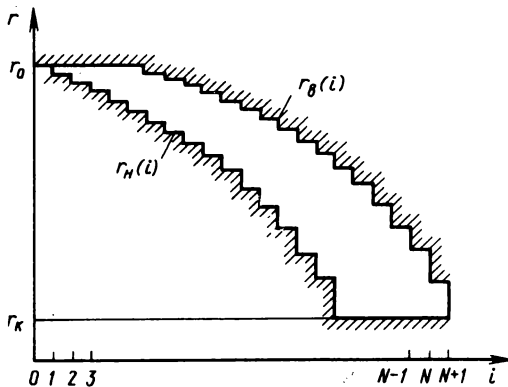
Здесь  $j = N + 1 - i$ .

Границы области допустимых  $r$  показаны на рис. 8.1. Заметим, что с учетом граничного условия  $r(N+1) = r_K$  верхняя граница  $r_B$  рассчитывается в обратном направлении, от  $i = N+1$  к  $i = 0$  предварительно, и значения  $r_B(i)$  запоминаются для использования в процедуре оценки.

Проведем приближенный анализ зависимости функции  $g_i$  от  $a, r$ . Приводя выражение (8.29) к общему знаменателю, раскрывая скобки и пренебрегая членами, содержащими множителями малые величины  $a_i^2, a_i^3$ , получим

$$g_i \approx \frac{4\pi a_i (r_i - r_K)}{1 - 8\pi a_i r_i^2}. \quad (8.32)$$

Рис. 8.1. Верхние и нижние границы изменения радиуса орбиты



Видно, что минимум этого выражения достигается при  $\bar{r}_i = r_{\text{в}}(i)$ ;  $\bar{a}_i = a_{\text{мах}}$ . Этот результат позволяет значительно упростить процедуру отыскания минимума функции  $g_i$  на каждом шаге процесса, так как область поиска минимума стягивается теперь в верхней границе возможных значений координат и управлений.

Расчет оценки был выполнен для режима торможения с постоянным уровнем реактивного ускорения  $\tilde{a}(i) = \text{const}$ ;  $N = 100 \dots 200$ ;  $r_0/r_{\text{к}} = 1,5 \dots 2,0$ . Результаты расчета приведены в табл. 8.1. Для малых значений  $\tilde{a}$  и сравнительно небольших

Таблица 8.1

Управление $\tilde{a}$	Функционал $I$	Оценка функционала $\varphi(0, x_0)$	Границы $a_{\text{мах}}/\tilde{a}$	$\Delta$	$\Delta/I, \%$
0,00005	0,030198	0,028495	1,25	0,000932	3,08
			1,50	0,001662	5,5
			2,0	0,003733	12,36
0,00010	0,058779	0,052650	1,25	0,004025	6,8
			1,50	0,007799	13,27
			2,0	0,014272	24,28

размеров области допустимых состояний и управлений отклонение функционала от его предполагаемого минимального значения невелико, что свидетельствует об удачном выборе оценочной функции, основанном на правильной интерпретации основных положений механики полета с малой тягой.

### 8.3. ОЦЕНКА РЕЖИМОВ УПРАВЛЕНИЯ ОРБИТОЙ СПУТНИКА ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

8.3.1. Задача коррекции периода обращения. Рассмотрим задачу коррекции периода обращения ИСЗ малым трансверсальным ускорением. Будем минимизировать интеграл от квадрата реактивного ускоре-

ния. Дискретное уравнение, описывающее изменение периода обращения для околокруговой орбиты, легко получить из 1-го уравнения (8.8):

$$T_{i+1} = T_i + 6\pi T_i (a_i - v_i), \quad (8.33)$$

где  $i$  – номер витка;  $a_i$  – реактивное ускорение;  $T_i$  – период обращения;  $v_i$  – возмущающее ускорение (все величины – безразмерные) на  $i$ -м витке. Введем функционал

$$I = \sum_{i=0}^N a_i^2 + \nu(T_{N+1} - T_K)^2. \quad (8.34)$$

Построим процедуру оценки оптимальности управления  $\tilde{\alpha}(i)$ , предназначенного для изменения периода обращения ИСЗ с начального значения  $T_0$  до конечного значения  $T_K$ . Возмущение  $\nu$  (которым может быть, например, отклонение реактивного ускорения от расчетного значения, возмущающее аэродинамическое ускорение и т.д.) предполагается неопределенным и неуточняемым в ходе процесса; задаются только априорные границы его изменения  $v_{\min} \leq \nu \leq v_{\max}$ . Решение задачи об оценке начнем с выбора синтезирующей функции  $\varphi(i, T)$ . Воспользуемся приемом, предложенным в разд. 2.2.4. Положим в уравнении (8.33)  $\nu = 0$ . Для системы (8.33) и (8.34)

$$\varphi(N, T) = - \min_a \left\{ a^2 + \nu(T + 6\pi Ta - T_K)^2 \right\}, \quad (8.35)$$

откуда

$$a_N = - \frac{\nu(T - T_K)6\pi T}{1 + 36\pi^2 \nu T^2}. \quad (8.36)$$

При  $\nu \rightarrow \infty$  получим предельные решения

$$a_N = - \frac{6\pi T(T - T_K)}{(6\pi T)^2} = - \frac{T - T_K}{6\pi T};$$

$$\varphi(N, T) = - \frac{(T - T_K)^2}{(6\pi T)^2}, \quad (8.37)$$

соответствующие точному выполнению граничного условия  $T_{N+1} = T_K$ .

Уравнение (2.52) имеет вид

$$\varphi(N-1, T) = \max_a \left\{ -a^2 - \frac{(T + 6\pi Ta - T_K)^2}{36\pi^2 T^2(1 + 6\pi a)} \right\} \quad (8.38)$$

При отыскании минимума по  $a$  можно считать  $1 + 6\pi a \approx 1$ , что соответствует предположению о малости приращения периода обращения на одном витке. Тогда

$$\varphi(N-1, T) \approx \max_a \left\{ -a^2 - \frac{(T + 6\pi T a - T_K)^2}{36\pi^2 T^2} \right\}, \quad (8.39)$$

откуда

$$a_{N-1} = -\frac{T - T_K}{12\pi T}; \quad \varphi(N-1, T) = -\frac{(T - T_K)^2}{2(6\pi T)^2}. \quad (8.40)$$

Повторяя процедуру отыскания  $a$  и  $\varphi$  с теми же допущениями, окончательно получим

$$a_i = -(T - T_K)/[(N - i + 1)6\pi T]; \quad (8.41)$$

$$\tilde{\varphi}(i, T) = -\left(\frac{T - T_K}{6\pi T}\right)^2 \frac{1}{(N - i + 1)}. \quad (8.42)$$

Поскольку функция  $\tilde{\varphi}$  не является точным решением задачи, она пригодна лишь для приближенных оценок нижней грани функционала  $L$ .

Для рассматриваемой задачи  $L$  имеет вид

$$\begin{aligned} L = & \frac{(T_0 + 6\pi a T_0 - T_K)^2}{N \cdot 36\pi^2 (T_0 + 6\pi a T_0)^2} + a^2 - \\ & - \frac{(T_N - T_K)^2}{6\pi T_N^2} + a^2 + \nu(T_N + 6\pi a T_N - T_K)^2 - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ -\frac{(T + 6\pi a T - T_K)^2}{(N - i)(T + 6\pi a T)^2 \cdot 36\pi^2} + \frac{(T - T_K)^2}{(N - i + 1)T^2 \cdot 36\pi^2} - a^2 \right\} \end{aligned} \quad (8.43)$$

При  $i = 0$  минимизация  $L$  в процедуре нахождения оценки производится только по  $a$ , так как начальная точка  $T_0$  фиксирована.

Минимизация  $L$  при каждом  $i \neq 0$  производится в области, границы которой задаются следующим образом:  $0 \leq a \leq a_{\max}$ ;  $T_H(i) \leq T(i) \leq T_B(i)$ , где  $a_{\max}$  — максимальное ускорение;  $T_B$  и  $T_H$  — верхняя и нижняя границы изменения периода обращения;  $a_{\max}$  — задается из практических соображений; верхние и нижние границы области достижимости  $T_B$ ,  $T_H$  строятся способом, описанным выше, согласно которому при каждом  $i$  проводится минимизация и максимизация по  $a$  и  $T$  правой части уравнения (8.33) при условии сохранения возможности выполнения конечных условий. В итоге получим

$$T_{Hi+1} = \begin{cases} T_{Hi} = T_0, & \text{если } i \leq N - m; \\ T_{Hi} + 6\pi a_{\max} T_H, & \text{если } i > N - m, \end{cases}$$

где  $m$  определяется в результате численного расчета;

$$T_{Bi+1} = T_{Bi} + 6\pi a_{\max} T_{Bi} \leq T_K.$$

Реализованный численный алгоритм отыскания минимума  $L$  состоит в переборе значений  $T$  и  $a$  в указанной области. Настройка алгоритма оценки проводилась для режима  $\tilde{a}(t) = \text{const}$ , переводящего КА с начальной круговой орбиты единичного радиуса с периодом обращения  $T_0 = 6,28318$  до конечной круговой орбиты с периодом обращения  $T_K = 6,35503$  за 60 оборотов. Необходимый уровень ускорения определялся в результате решения однопараметрической краевой задачи без учета возмущений. Оценка оптимальности траекторий при  $v = 0$  для  $0 < a < 2\tilde{a}$ , показала, что относительное отклонение функционала на оцениваемом режиме от его минимального значения не превышало 3 %. Это позволяет сделать вывод об удачном выборе оценочной функции (8.42). Однако учет неопределенного возмущения  $v$ , лежащего в пределах  $0,05\tilde{a} < v < 0,15\tilde{a}$ , увеличивает оценку до 20 ... 30 % от величины функционала. Резкое возрастание оценки обусловлено самой идеологией минимаксного оценивания, ориентированной на наихудший случай реализации возмущений. В ряде случаев целесообразно перейти к другой постановке задачи, предусматривающей пошаговое уточнение неопределенных факторов.

**8.3.2. Задача управления орбитой в верхних слоях атмосферы.** Рассмотрим задачу управления орбитой КА с электрореактивным двигателем малой тяги, совершающего полет по низкой геоцентрической орбите с учетом возмущающей силы сопротивления атмосферы.

Известно, что плотность атмосферы не является только функцией высоты, но зависит от времени суток, уровня солнечной активности и ряда других факторов.

Воспользуемся дискретной моделью управляемого движения КА с двигателем малой тяги (см. разд. 8.1). Дискретные уравнения движения, описывающие изменение параметров по виткам траектории, мало отличающихся от круговых, имеют вид

$$\tilde{r}_{i+1} = r_i \pm 4\pi b_i r_i^3; \quad (8.44)$$

$$V_{i+1} = V_i \mp 2\pi b_i \frac{r_i}{V_i}.$$

Здесь верхние знаки соответствуют случаю разгона, нижние – торможения;  $r$  – радиальное расстояние;  $V$  – скорость КА;  $b = a + v$ . В силу существенной неопределенности физической и математической моделей плотности верхних слоев атмосферы и неточности знания баллистического коэффициента КА априорная информация о величине  $v$  отсутствует. Заданы лишь границы изменения возмущающего ускорения  $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$ . Введем критерий оптимальности

$$I = \sum_{i=0}^N a_i^2 + \lambda_{11}(r_{N+1} - r_K)^2 + \lambda_{12}(r_{N+1} - r_K)(V_{N+1} - V_K) + \lambda_{22}(V_{N+1} - V_K)^2 \rightarrow \min. \quad (8.45)$$

Начальное состояние  $(r_0, V_0)$  предполагается заданным. Тогда задача  $\Delta$ -оптимального управления траекторией аппарата в условиях неполной информации о действующих возмущениях формулируется так:

оценить степень неоптимальности стратегии управления  $\tilde{a}(i, r, V)$ , удовлетворяющей следующему ограничению:

$$v_{\max} < a_{\min} \leq \tilde{a} \leq a_{\max}. \quad (8.46)$$

Для выбора функции  $\varphi(i, r, V)$  упростим задачу, считая, что изменение параметров  $r, V$  в процессе движения заведомо невелико. Введем обозначения  $x_{1i} = r_i - r_k$ ;  $x_{2i} = V_i - V_k$  и запишем линеаризованную систему дискретных уравнений относительно текущих отклонений от желаемого конечного состояния  $(r_k, V_k)$ , соответствующую случаю разгона:

$$x_{1i+1} = x_{1i} + 4\pi r_k (a_i - v_i); \quad (8.47)$$

$$x_{2i+1} = x_{2i} - 2\pi \frac{r_k}{V_k} (a_i - v_i).$$

Матрицы  $A, B, C$  (см. разд. 2.2) в данном случае постоянные:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = [4\pi r_k^3 - 2\pi \frac{r_k}{V_k}]^T; \quad C = [-4\pi r_k^3 2\pi \frac{r_k}{V_k}]^T. \quad (8.48)$$

Будем искать функцию  $\varphi(i, x_1, x_2)$  в виде (2.50) в соответствии с соотношениями (2.51). В результате получим рекуррентные соотношения для расчета коэффициентов квадратичной формы

$$\psi_i = \psi_{i+1} - G_{*i+1}^{-1} D_{i+1}; \quad (8.49)$$

$$\psi_{N+1} = -\Lambda,$$

где

$$G_* = 1 + 16\pi^2 r_k^2 \psi_{11} + 4\pi^2 \frac{r_k^2}{V_k^2} \psi_{22} - 16\pi^2 \frac{r_k^2}{V_k} \psi_{12};$$

$$D = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & \beta_1 \beta_2 \\ \beta_2 \beta_1 & \beta_2^2 \end{bmatrix}; \quad \beta_1 = 4\pi r_k^3 \psi_{11} - 2\pi \frac{r_k}{V_k} \psi_{12}; \quad (8.50)$$

$$\beta_2 = 4\pi r_k^3 \psi_{12} - 2\pi \frac{r_k}{V_k} \psi_{22},$$

позволяющие представить функцию  $\varphi$  в окончательном виде

$$\varphi(i, r, V) = \psi_{11i} (r_i - r_k)^2 + \psi_{22i} (V_i - V_k)^2 + \psi_{12i} (r_i - r_k)(V_i - V_k). \quad (8.51)$$

Стратегию управления выберем следующим образом:

$$\tilde{a}_i = a^0(i, r_k, V_k, N) + \Delta a(v^i), \quad (8.52)$$

где  $a^0(i, r_k, V_k, N)$  — закон управления, выбранный из условия попада-

ния в конечные условия при некоторой априорной модели возмущений  $v^0$ . Дополнительный член  $\Delta a(v^i)$  (корректирующее управление) формируется по результатам уточнения возмущения;  $v^i$  — его апостериорная модель на  $i$ -м шаге. В данном случае принималась простейшая стратегия, основанная на компенсации возмущающего воздействия:

$$\Delta a = \gamma v^i; \quad \gamma = \text{const} \geq 1. \quad (8.53)$$

В свою очередь, экстраполяция возмущения  $v$  на оставшийся временной интервал  $(i, N)$  проводилась в предположении, что возмущение  $v_i$ , определенное апостериори к концу интервала  $(i-1, i)$ , не изменится до конца движения:

$$v^i \equiv v_i. \quad (8.54)$$

Функция  $L$  в рассматриваемой задаче, с учетом представления  $\varphi$  в виде (8.49) ... (8.51), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L = & -\psi_{11}(1)[r_0 + 4\pi r_0^3(a(0) - v(0)) - r_K]^2 - \\ & -\psi_{12}(1)[r_0 + 4\pi r_0^3(a(0) - v(0)) - r_K] \times \\ & \times [V_0 - 2\pi \frac{r_0}{V_0}(a(0) - v(0)) - V_K] - \psi_{22}(1) \times \\ & \times [V_0 - 2\pi \frac{r_0}{V_0}(a(0) - v(0)) - V_K]^2 + a^2(0) + \\ & + \psi_{11}(N)[r(N) - r_K]^2 + \psi_{12}(N)[r(N) - \\ & - r_K][V(N) - V_K] + \psi_{22}(N)[V(N) - V_K]^2 + \\ & + a^2(N) + \lambda_{11}[r(N) + 4\pi r^3(N)(a(N) - \\ & - v(N)) - r_K]^2 + \lambda_{12}[r(N) + 4\pi r^3(N) \times \\ & \times (a(N) - v(N)) - r_K][V(N) - 2\pi \frac{r(N)}{V(N)} \times \\ & \times (a(N) - v(N)) - V_K] + \lambda_{22}[V(N) - \\ & - 2\pi \frac{r(N)}{V(N)}(a(N) - v(N)) - V_K]^2 - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \psi_{11i+1}[r_i + 4\pi r_i^3(a_i - v_i) - r_K]^2 + \right. \\ & + \psi_{12i+1}[r(i) + 4\pi r^3(i)(a(i) - v(i)) - r_K] \times \\ & \times [V(i) - 2\pi \frac{r(i)}{V(i)}(a(i) - v(i)) - V_K] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \psi_{22}(i+1)[V(i) - 2\pi \frac{r(i)}{V(i)}(a(i) - v(i)) - \\
 & - V_K]^2 - \psi_{11}(i)(r(i) - r_K)^2 - \psi_{12}(i)(r(i) - \\
 & - r_K)(V(i) - V_K) - \psi_{22}(i)(V(i) - V_K)^2 - a^2(i) \} . \quad (8.55)
 \end{aligned}$$

Задача оценки сводится теперь к вычислению функции  $L$ , соответствующей выбранному закону управления (8.52), (8.53), и к операции минимаксимизации функции  $L$  по переменным  $a$ ,  $v$ ,  $r$ ,  $V$ . Нижние и верхние границы области допустимых значений  $a$  и  $v$  задаются соотношениями (8.46). Аналогичные границы для  $r$  и  $V$  строятся путем минимизации и максимизации по фазовым координатам, управления и возмущения правых частей системы (8.44)

$$r_H(i+1) = r_H(i) + 4\pi r_H^3(i)(a_{\min} - v_{\max}(i));$$

$$r_B(i+1) = r_B(i) + 4\pi r_B^3(i)(a_{\max} - v_{\min}(i)),$$

если  $r_B(i) \geq r_K$ , то  $r_B \equiv r_K$ ;

$$V_H(i+1) = V_H(i) - 2\pi \frac{r_B(i)}{V_H(i)}(a_{\max} - v_{\min}(i)), \quad (8.56)$$

если  $V_H(i) \leq V_K$ , то  $V_H \equiv V_K$ ;

$$V_B(i+1) = V_B(i) - 2\pi \frac{r_H(i)}{V_B(i)}(a_{\min} - v_{\max}(i));$$

$$r_H(0) = r_B(0) = r_0; \quad V_H(0) = V_B(0) = V_0.$$

Расчет оценки  $\Delta_i$  был выполнен на ЭВМ для маневра перехода в центральном поле с круговой орбиты единичного радиуса на круговую орбиту радиусом 1,0076 за 60 оборотов ( $N+1=60$ ). Базовый закон управления (удовлетворяющий заданным конечным условиям в предположении, что сопротивление атмосферы отсутствует) имел следующий вид:  $\tilde{a} = \text{const} = 0,978 \cdot 10^{-5}$  (здесь и далее используются безразмерные переменные). Фактическая реализация возмущения  $v$  (торозящего аэродинамического ускорения) принималась в следующем виде:  $v = v_* \exp[-\kappa(r - r_*)]$ , где  $v_* = 0,1 \cdot 10^{-5}$ ;  $\kappa = 160$ .

Априорные границы изменения управления и возмущения задавались следующими:  $1,1 \cdot 10^{-5} < a < 1,25 \cdot 10^{-5}$ ;  $0,05 \cdot 10^{-5} < v < 0,15 \cdot 10^{-5}$ . Реализация алгоритмов оценки управления  $\tilde{a}$  "по наихудшему случаю" воздействия возмущений дала следующие результаты: при  $\lambda_{11} = 8 \cdot 10^{-5}$ ;  $\lambda_{12} = 5 \cdot 10^{-5}$ ;  $\lambda_{22} = 5 \cdot 10^{-5}$  - функционал  $I = 6,01 \cdot 10^{-9}$ , а  $\Delta_m = 3,58 \cdot 10^{-9}$ . Минимизация оценки по  $\lambda_{\xi}$  привела к тому, что  $I = 6,09 \cdot 10^{-9}$ , а  $\Delta_m = 2,66 \cdot 10^{-9}$ ; при этом  $\lambda_{11} = 1,01 \cdot 10^{-5}$ ;  $\lambda_{12} = 2,05 \cdot 10^{-5}$ ;  $\lambda_{22} = 3,55 \cdot 10^{-5}$ . Видно, что относительная оценка  $\Delta_m/I = 59,6$  и  $43,7$  % соответственно. Поэтому минимаксная оценка не дает достоверного представления о качестве процесса управления.

Параллельно строилась последовательность "апостериорных" оценок  $\left\{ \Delta_m^i \right\}$ , предполагающая уточнение возмущения и границ его изменения.

Предполагалось, что в конце каждого шага управления путем прямых измерений либо в результате решения задачи идентификации определяется возмущение, действовавшее на КА. Кроме того, принималось, что предельное отклонение погрешности оценки возмущения изменяется от витка к витку по экспоненциальному закону  $\sigma_v(i) = \sigma_{v_0} \exp(-ki)$ , причем  $\sigma_{v_0} = 0,03$ ,  $k = 1$ .

Расчеты показали, что при  $i = 0$  (используется только априорная информация),  $\Delta_m^0 = 2,66 \cdot 10^{-9}$ , а  $I = 6,09 \cdot 10^{-9}$ . При  $i = 3$  оценка  $\Delta_m^3 = 6,2 \cdot 10^{-10}$  и при последующих значениях практически не изменялась. Таким образом, начиная с третьего шага,  $\Delta_m^i/I \approx 10\%$ . Оцениваемая стратегия управления – наблюдения достаточно близка к оптимальной и может использоваться в задачах управления низкой орбитой спутника Земли.

## КОММЕНТАРИИ

1. Особенности движения аппаратов с малой тягой, относящихся к классу управляемых систем с большим интервалом управления, приводят к тому, что малые возмущения могут оказать сильное воздействие на конечное состояние. Важное значение имеет также неопределенность математической модели действующих возмущений, приводящая к значительному разбросу конечных параметров траектории. Такая ситуация имеет место при движении спутника по сравнительно низкой геоцентрической орбите, где влияние атмосферы оказывается достаточно сильно. Вопросы построения алгоритмов коррекции низких орбит спутников Земли рассмотрены в [13, 59].

2. Уровень тяги электрореактивного двигателя также реализуется с некоторой погрешностью, что приводит к дополнительным возмущениям и требует разработки соответствующих подходов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создание надежных и эффективных электрореактивных двигателей, легких и достаточно мощных источников энергии позволяет осуществлять полеты с малой тягой в ближайшем будущем. Классические постановки задач оптимизации перелетов данного класса будут представлять скорее академический интерес, уступая место более современным, учитывающим такие особенности движения и ограничения, которые представлялись ранее надуманными.

Задачи проектирования космических аппаратов с электрореактивными двигателями малой тяги требуют разработки моделей и методов совместной оптимизации проектно-баллистических характеристик, траекторий, режимов управления движением и основных проектных параметров аппарата. Очевидно, на практике целесообразно иметь модели двух типов: теоретические, рассчитанные на использование аналитических методов, и имитационные, ориентированные на организацию машинного эксперимента. Что касается методов отыскания оптимальных решений, то наряду со сложными вычислительными процедурами, использующими идеи математического программирования, большое значение имеют различные приближенные методы и оценки. Одним из таких методов является метод последовательных расширений допустимых состояний и управлений, заключающийся в ослаблении ряда связей и ограничений, решении последовательности вариационных задач меньшей размерности, с последующей проверкой условий реализации оптимума и оценкой приближенно-оптимальных режимов.

Автор надеется, что данная монография позволит по-новому взглянуть на некоторые "старые" задачи механики полета с малой тягой и указать подходы к решению "новых" задач, возникающих в последнее время, и более обоснованно подойти к оценке эффективности новых типов космических аппаратов и разработке методов управления ими.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 398 с.
2. Безменов В.М., Овсянников Р.Н., Токарев В.В. Минимальное время перелетов Земля – Марс, Земля – Венера с нерегулируемым двигателем ограниченной мощности / Космические исследования. 1973. Т. XI, вып. 2. С. 211–216.
3. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
4. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1977. 430 с.
5. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности / Космические исследования. 1964. Т. II, вып. 3. С. 360–392.
6. Белоконов И.В., Салмин В.В. Особенности управления движением и метод расчета энергозатрат маневра для аппаратов с малой тягой, вращающихся вокруг центра масс / Тр. VIII Чтений К.Э. Циолковского. Секция "Механика космического полета". М.: 1978. С. 107–121.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз. 1958. 410 с.
8. Брусов В.С., Пивяский С.А. Двигательная установка малой тяги, универсальная для двумерного диапазона маневров / Космические исследования. 1970. Т. VIII, вып. 4. С. 542–546.
9. Брусов В.С., Салмин В.В. Комбинированная двигательная система, универсальная для диапазона маневров / Космические исследования. 1974. Т. XII, вып. 3. С. 368–373.
10. Бэттин Р. Наведение в космосе: Пер. с англ. М.: Машиностроение. 1966. 340 с.
11. Васильев В.В. Оптимальное управление эллиптической орбитой спутника Земли с двигателем малой тяги / Космические исследования. 1980. Т. XVIII, вып. 5. С. 707–714.
12. Васильев В.В., Салмин В.В. Оптимальный разгон космического аппарата с электрореактивным двигателем при ограниченной скорости поворота вектора тяги / Космические исследования. 1976. Т. XIV, вып. 3. С. 336–342.
13. Васильев В.В., Салмин В.В. Многошаговые алгоритмы коррекции орбиты спутника Земли двигателем малой тяги / Космические исследования. 1984. Т. XXII, вып. 4. С. 507–519.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука. 1973. 256 с.
15. Грилихес В.А., Орлов П.П., Попов Л.Б. Солнечная энергия и космические полеты. М.: Наука, 1984. 215 с.
16. Гришин С.Д., Лесков Л.В., Козлов Н.П. Электрические ракетные двигатели. М.: Машиностроение. 1975. 272 с.
17. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука. 1975. 702 с.
18. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304 с.

19. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 284 с.
20. Гурман В.М., Попов Ю.Б., Салмин В.В. О возможности реализации траекторий аппаратов с малой тягой с учетом их движения вокруг центра масс // Космические исследования. 1970. Т. VIII, № 5. С. 684–692.
21. Ефимов Г.Б., Охочимский Д.Е. Об оптимальном разгоне космического аппарата в центральном поле // Космические исследования. 1965. Т. III, вып. 6. С. 811–825.
22. Захаров Ю.А., Иванов Р.К. Учет движения аппарата вокруг центра масс в механике космического полета с малой тягой / Тр. IX чтений К.Э. Циолковского. Секция "Механика космического полета". М., 1975. С. 103–118.
23. Иванов Ю.Н. Оптимальное сочетание двигательных систем / Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 2. С. 3–14.
24. Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Шалаев Ю.В. Оптимальные траектории и оптимальные параметры космических аппаратов с двигателями ограниченной мощности // Космические исследования. 1964. Т. II, вып. 3. С. 414–432.
25. Иващенко В.В. Оптимизация космических маневров. М., 1975. 392 с.
26. Ильин В.А., Кузмак Н.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателем большой тяги. М.: Наука. 1976. 744 с.
27. Ирвинг Д. Полеты с малой тягой в гравитационных полях при переменной скорости истечения // Космическая техника / Под ред. Г. Сейферта. М.: Наука. 1964. С. 286–324.
28. Исаев В.К., Сонин В.В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 6. С. 770–000.
29. Ишков С.А., Салмин В.В. Оптимальные программы управления в задаче межорбитального перелета с непрерывной тягой // Космические исследования. 1984. Т. XXII, вып. 5. С. 702–711.
30. Кауфман Г.Ф. Электростатические двигатели // ВФТ. 1973. № 8. С. 37–52.
31. Керслейк В.Р., Игначек Л.Р. Испытания установки SERT-II в 1979–1981 гг. / Аэрокосмическая техника. 1983. № 7. С. 144–149.
32. Константинов М.С. Методы математического программирования в проектировании летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1975. 164 с.
33. Константинов М.С. Оценка энергетики перелета между сильно некомпланарными круговыми орбитами аппаратов с двигателем малой тяги // Тр. Объединенных научных чтений по космонавтике. Секция "Прикладная небесная механика и управление движением". М. 1979. С. 78–86.
34. Космические аппараты с солнечными электроракетными двигательными установками: особенности проектирования траекторий полета, конструкции, систем (обзор) // Астронавтика и ракетодинамика. 1979. № 1. С. 14–42.
35. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука. 1973. 446 с.
36. Кузмак Г.Е., Копнин Ю.М. Новая форма уравнений движения спутника и приложения ее к исследованию движений, близких к круговым // ЖВМ и МФ. 1963. Т. III, № 4. С. 730–741.
37. Кунц К.Е. Характеристики двигательной установки для межорбитальной транспортировки больших космических систем // Ракетная техника и космонавтика. 1981. № 5. С. 59–66.
38. Ларичева В.В., Рейн М.В. О решениях задачи оптимального перелета с эллиптической орбиты на параболическую // Космические исследования. 1968. Т. 6, № 2. С. 201–208.
39. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой // Математические методы в динамике космических аппаратов. М., 1968. Вып. 5. 108 с.

40. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета. М.: Машиностроение. 1973. 616 с.

41. Летные испытания ионных электроракетных двигателей по проекту SERT-II (обзор) // Астронавтика и ракетодинамика. 1971. № 8. С. 15–42; № 9. С. 1–37.

42. Лурье А.И. Аналитическая механика М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

43. Мельбури У.Г., Соер К.Г. Оптимизация программы тяги постоянной ориентации // Ракетная техника и космонавтика. 1966. № 8. С. 69–74.

44. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета: / Пер. с англ. М.: Наука. 1965. 538 с.

45. Мойсеев Н.Ю. Асимптотические методы нелинейной механики. М. 1981. 400 с.

46. Морозов А. И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978. 328 с.

47. Некомпланарные переходы между орбитами с помощью ЭРД малой тяги с учетом возмущений и требований к системе управления ориентацией (обзор) // Астронавтика и ракетодинамика. 1975. № 35. С. 1–30.

48. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1969. С. 499.

49. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М.: Наука. 1975. 400 с.

50. Панкратов Б.М. Управление движением космического летательного аппарата при прохождении радиационных поясов Земли и солнечных космических излучениях / Тр. вторых Чтений К.Э. Циолковского. Секция "Механика космического полета". М., 1968. С. 96–101.

51. Пивяский С.А., Брусов В.С., Хвилон Е.А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974. 168 с.

52. Пономарев В.М. Теория управления движением космических аппаратов. М.: Наука, 1965. 455 с.

53. Проблемы разработки солнечной электроракетной двигательной установки универсальной космической ступени (обзор) // Астронавтика и ракетодинамика. 1974. № 20. С. 1–46.

54. Разработка стационарного плазменного двигателя (СПД) и его испытания на ИСЗ "Метеор" / Л.А. Арцимович, И.М. Андронов, Ю.В. Есинчук и др. // Космические исследования. 1974. Т. XII, вып. 3. С. 451–468.

55. Салмин В.В. Метод отыскания приближенно-оптимального управления космическими аппаратами с двигателями малой тяги // Космические исследования. 1968. Т. VI, вып. 5. С. 684–692.

56. Салмин В.В. Оптимальное управление комбинированной системой, состоящей из двигателя ограниченной скорости истечения и двигателя ограниченной мощности // Космические исследования. 1970. Т. VIII, № 4. С. 535–541.

57. Салмин В.В. Оптимизация режимов разгона вращающегося космического аппарата с двигателем малой тяги / Космические исследования. 1973. Т. XI, № 8. С. 842–853.

58. Салмин В.В. Оценка оптимальности режимов управления в задачах механики полета с малой тягой // Динамика управляемых систем. Новосибирск, Наука, 1979. С. 250–257.

59. Салмин В.В. Аналитическая оценка оптимальности многошаговых адаптивных алгоритмов управления // Космические исследования. 1980. Т. XVIII, вып. 3. С. 332–342.

60. Сердюк В.К., Толяренко Н.В. Межорбитальные транспортные космические аппараты. М.: ВИНТИ. 1985. 288 с.

61. Универсальная космическая ступень SEPS с солнечной электроракетной

двигательной установкой (обзор) / Астронавтика и ракетодинамика. 1974, № 10/11, реф. 184–190.

62. Управление траекторией космического аппарата с малой тягой на гелиоцентрическом участке перелета Земля – Марс / В.К. Безвербый, Р.К. Иванов, В.П. Кузьмин и др. // Космические исследования. 1974. Т. XII, вып. 6. С. 819–833.

63. Фаворский О.Н., Фишгойт В.В., Янтовский Е.Н. Основы теории космических электрореактивных двигательных установок. М.: Высшая школа, 1978. 384 с.

64. Филипп В.М. Электродерная энергетическая установка для полетов к планетам солнечной системы // Ракетная техника и космонавтика. 1981. Т. 19, № 2. С. 106–113.

65. Хоулдзвей Р. Использование двигателей малой тяги для коррекции орбиты и управления положением спутников // Навигация, наведение и оптимизация управления / Тр. VII международного симпозиума ИФАК. М., 1978. Т. 3. С. 14–22.

66. Чернявский Г.М., Баргенов В.А., Малышев В.А. Управление орбитой стационарного спутника. М.: Машиностроение. 1984. 142 с.

67. Шгулингер Э. Ионные двигатели для космических полетов. М., Воениздат, 1966. 344 с.

68. Эдельбаум Т.Н. Оптимальные задачи в механике полета маневрирующих космических аппаратов // Современное состояние механики космического полета / Под ред. П.Б. Ричардса. М.: Наука, 1969. С. 162–178.

69. Юрин В.В. Оптимальная коррекция параметров орбиты космического аппарата с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1983. Т. XXI, № 5. С. 666–674.

70. Angelo J., Buden D. Space nuclear power – a strategy for tomorrow // AIAA Paper, 1981, N 450, pp. 1–11.

71. Atkins K. The ion drive program: comet rendez – vous issues dor SEPS developers // AIAA Paper, 1979, N 2066, pp. 1–6.

72. Brown H., Coates G. Application of nuclear electric propulsion to manned Mars missions // J. Spacecraft and Rockets, 1966, 3, N 9, pp. 1402–1408.

73. Buden D., Garrison P.W. Space nuclear power system and the design of the nuclear electric propulsion OTV // AIAA Paper, 1984, N 1447, pp. 1–11.

74. Burrows R. Halley comet rendez – vous with a SEPS vehicle // AIAA Paper, 1978, N 50,

75. Duxbury J., Paul G. Interplanetary spacecraft design using solar electric propulsion // J. Spacecraft and Rockets. 1976, N 2, pp. 1–13.

76. Fearn D.G., Hughes P.C. The T5 – 10 cm mercury ion thruster system // AIAA Paper, 1978, N 650.

77. Johnson G.W., Winfield D.H. On a singular control problem in optimal rocket guidance // AIAA Paper. 1967. N 582. pp. 1–7.

78. Jones R.M. Comparison of potential electric propulsion systems for orbit transfer // J. Spacecraft and Rockets, 1984, 21, N 1. pp. 88–95.

79. Kaplan M.H., Trn R.M., Buden D. A nuclear / electric orbital transfer vehicle for the Shuttle era // AIAA Paper. 1979. N 2109. pp. 1–6.

80. Kaufman H.R., Robinson R.C. Electric thruster performance for orbit raising and maneuvering // AIAA Paper. 1982. N 1247. pp. 1–9.

81. Krulle G. Payload capacity of ARIANE launched geostationary satellites using on electric propulsion system for orbit raising // Acta Astronautica. 1980. vol. 7. pp. 633–652.

82. Loeb H.W. Electric propulsion for manned space flights of the future // AIAA Paper. 1981. N 707. pp. 1–8.

83. Mackay J.S. Manned Mars landing missions using electric propulsion // Spaceflight. 1970. 12, N 1. pp. 41–46.

84. **Maloy T.E., Dulgeroff C., Poeschel R.** Electric propulsion – characteristics applications and status // AIAA Paper. 1981. N 138. pp. 1–8.
85. **Mondt J.E.** Multimission NEP system for outer planet exploration // AIAA Paper. 1981. N 698. pp. 1–10.
86. **Pless L.C.** Planetary spacecraft – SEPS interface design // AIAA Paper. 1980. N 1227. pp. 1–7.
87. **Poher C.** European electronuclear OTV for the end of the 1990 S. Acta Astronaut., 1983, 10, N 10, pp. 703–707.
88. **Rudolph L.K., Kind D.Q.** Electromagnetic thrusters for spacecraft prime propulsion // AIAA Paper. 1984. N 1446. pp. 1–9.
89. **Sackett L., Edelbaum T.N.** Effect of attitude constraints on solar – electric geocentric transfers. – AIAA Paper. 1975. N 350. pp. 1–11.
90. **Selke W.** Einsatz von elektrischen Steuertriebwerken in Nachrichtensatelliten. Raumfahrtforschung, 1973, vol. 17, N 6, S. 313–319.
91. **Silva T.H., Byers D.G.** Nuclear electric propulsion system utilisation for Earth orbit transfer of large spacecraft structures // AIAA Paper. 1980. N 1223.
92. **Titus R.** Eaily manned exploration of the planets // J. Spacecraft and Rockets. 1971. N 5. pp. 517–522.
93. **Ungs M., Kornhauser A.L., Lion P.M.** Constrained low – thrust guidance // AIAA Paper. 1973. N 173. pp. 1–12.
94. **Vulpetti G.** Pulse-on-bias rocket propulsion concept // Acta astronautica. 1982. 9, N 3, pp. 155–164.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Электрореактивные двигательные установки малой тяги: состояние разработки и перспективы применения в космосе . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1. Основные схемы электрореактивных двигателей . . . . .	6
1.2. Характеристики современных ЭРД и космических энергоустановок . . . . .	7
1.3. Летные испытания ЭРД в космосе . . . . .	13
1.4. Перспективы применения электрореактивных двигательных установок малой тяги . . . . .	17
<b>Глава 2. Проблемы оптимизации космических перелетов с малой тягой . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1. Постановки задач оптимизации . . . . .	24
2.2. Современные методы решения задач оптимального управления . . . . .	32
2.3. Оценки перелетов с малой тягой на расширенном множестве допустимых траекторий и управлений . . . . .	43
Комментарии . . . . .	45
<b>Глава 3. Программные траектории и их реализация . . . . .</b>	<b>46</b>
3.1. Перелеты с непрерывной тягой в центральном поле . . . . .	47
3.2. Управление движением вращающегося космического аппарата . . . . .	58
Комментарии . . . . .	63
<b>Глава 4. Оптимальное управление угловым и траекторным движением космических аппаратов при межорбитальных и межпланетных перелетах . . . . .</b>	<b>64</b>
4.1. Редукция математической модели движения вращающегося аппарата . . . . .	65
4.2. Задача локальной оптимизации . . . . .	70
4.3. Оптимальные траектории космического аппарата с ограниченной угловой скоростью поворота вектора тяги . . . . .	75
4.4. Влияние ограничений на управление вектором тяги на энергетику межпланетного перелета . . . . .	85
Комментарии . . . . .	98
<b>Глава 5. Оптимизация траекторий и параметров космических аппаратов с комбинированной двигательной системой . . . . .</b>	<b>99</b>
5.1. Оптимальное управление комбинированной системой, состоящей из двигателей большой и малой тяги . . . . .	99
5.2. Выбор параметров комбинированной двигательной системы, универсальной для диапазона маневров . . . . .	108
5.3. Приближенный расчет энергетики межпланетного перелета . . . . .	112
Комментарии . . . . .	114
<b>Глава 6. Оптимальные перелеты с малой тягой между круговыми некомпланарными орбитами . . . . .</b>	<b>115</b>
6.1. Уравнения траекторного и углового движений . . . . .	115
6.2. Задача локальной оптимизации . . . . .	122
6.3. Оптимизация медленно меняющейся составляющей управления . . . . .	127

6.4. Межорбитальный перелет с дополнительными граничными условиями и ограничениями . . . . .	135
6.5. Совместная оптимизация траекторного и углового движений . . . . .	142
6.6. Оптимальное управление космическим аппаратом с солнечным двигателем ограниченной мощности. . . . .	151
Комментарии. . . . .	158
<b>Глава 7. Оптимальные перелеты с малой тягой между компланарными эллиптическими орбитами спутников Земли . . . . .</b>	<b>159</b>
7.1. Приближенный синтез оптимального управления в окрестности кеплеровской траектории. . . . .	159
7.2. Оптимальное управление эллиптической орбитой с учетом несферичности Земли и сопротивления верхних слоев атмосферы. . . . .	165
7.3. Оптимальное управление эллиптической орбитой в больших интервалах времени . . . . .	172
Комментарии. . . . .	180
<b>Глава 8. Оптимизация многошаговых межорбитальных переходов . . . . .</b>	<b>181</b>
8.1. Дискретные модели движения с малой тягой в центральном поле. . .	181
8.2. Конструкция оценочной функции для многошаговых процессов . . .	184
8.3. Оценка режимов управления орбитой спутника Земли с учетом возмущений . . . . .	191
Комментарии. . . . .	199
<b>Заключение. . . . .</b>	<b>200</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>201</b>

*Монография*

**Вадим Викторович Салмин**

**ОПТИМИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ  
С МАЛОЙ ТЯГОЙ  
ПРОБЛЕМЫ СОВМЕСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРНЫМ  
И УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ**

Редакторы *Е.И. Кравченко, Г.П. Филипповская*

Художественный редактор *В.В. Лебедев*

Обложка художника *Р.А. Казакова*

Технический редактор *О.В. Чеботарева*

Корректор *Г.Л. Сафонова*

ИБ № 4888

---

Сдано в набор 17.07.86.	Подписано в печать 6.02.87.	T-04560.	
Формат 60X84 1/16.	Бумага офсетная № 2.	Гарнитура Пресс Роман.	
Печать офсетная.	Усл. печ.л. 12,09.	Усл. кр.-отт. 12,32.	Уч.-изд.л. 13,13.
Тираж , 1160 экз.	Заказ 806	Цена 2 р.	

---

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4.

---

Отпечатано в Московской типографии № 9 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли. 109033, Москва, Волочаевская ул., 40, с оригинал-макета,  
изготовленного в издательстве "Машиностроение" на наборно-пишущих машинах

2 руб.