

И.В.МИНАЕВ
А.А.МОРДОВИН
А.Г.ШЕРЕМЕТЬЕВ

**Лазерные
информационные
системы
космических
аппаратов**

И.В.МИНАЕВ
А.А.МОРДОВИН
А.Г.ШЕРЕМЕТЬЕВ

**Лазерные
информационные
системы
космических
аппаратов**



Москва
„Машиностроение“
1981

ББК 39.67
М57
УДК 629.78 : 621.396.624

Рецензент проф. д-р техн. наук **В. П. Васильев**

Минаев И. В., Мордовин А. А., Шереметьев А. Г.
М57 **Лазерные информационные системы космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1981. — 272 с.**

В пер.: 1 р. 30 к.

В книге рассмотрены теоретические основы и принципы построения информационных и измерительных лазерных приборов и систем, предназначенных для работы на борту космических аппаратов. Изложены принципы построения лазерных систем поиска, обнаружения, сопровождения, связи и локации.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся проектированием и эксплуатацией лазерных приборов и информационных систем.

М $\frac{31904-181}{038(01)-81}$ 181-81. 3607060000

ББК 39.67
6Т6

© Издательство «Машиностроение», 1981 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Освоение человеком космического пространства открывает новые области применения лазерных информационных систем (ЛИС). К этим областям прежде всего относятся: изучение ресурсов Земли, исследование движения континентов, анализ облачных покровов, движения и скорости ветров, а следовательно, прогнозирование погоды на Земле, управление движением искусственных спутников Земли и космических аппаратов, связь между космическими аппаратами и наземными пунктами, слежение за метеорологическими ракетами и спутниками и т. д. Уже сейчас в этих областях лазерные системы измерения, сбора, обработки и передачи информации находят широкое применение. Промышленностью разрабатываются лазерные системы связи малой и большой дальности, лазерные измерительные системы для высокоточного измерения параметров движения объектов и др. Это объясняется принципиальной особенностью оптических квантовых генераторов — способностью генерировать когерентное оптическое излучение. Эта особенность позволяет обеспечить огромную информативность лазерных систем, высокую помехоустойчивость каналов связи, мгновенность выполнения сложнейших математических операций в устройствах обработки (интегрирование, преобразования Фурье и свертки, пространственная фильтрация, нахождение функции корреляции, запоминание больших массивов информации и т. д.). Состояние квантовой электроники и лазерной техники позволяет решать научные и технические задачи, имеющие большое значение для народного хозяйства.

Результатом проведенных в последнее десятилетие исследований и разработок явилось создание разнообразной лазерной аппаратуры, которая подтвердила большие перспективы ее использования. Однако на пути создания лазерных информационных систем космического применения имеется еще много трудностей. К ним можно отнести недостаточное развитие технологии элементной базы, сложность конструирования оптико-электронных систем и приборов космических аппаратов и отсутствие опыта конструирования лазерных информационных систем у инженеров. Кроме того, традиционный научный потенциал радиоинженеров и зачастую недостаточное понимание теоретических основ и возможностей лазерной

техники тормозят прогресс в этой области. Данная книга хотя бы в некоторой степени должна способствовать повышению уровня научных знаний радиоинженеров. В книге рассматриваются теоретические основы и возможности космических применений лазерных информационных систем. По данным зарубежной печати число серийных образцов лазерных информационных систем космического применения еще относительно мало, хотя имеются экспериментальные разработки (данные по некоторым из них приведены в книге). В связи с этим целесообразно расширять и углублять теоретические аспекты космического применения лазерной информационной техники и вооружать инженеров, проектирующих соответствующую аппаратуру, методиками, алгоритмами, расчетным аппаратом для оценки эффективности и математическими моделями систем. Весьма актуальным и важным является развитие инженерных методов расчета основных характеристик систем лазерной техники. Этим целям в основном посвящена данная книга.

В книге представлена модель оптического поля на входе приемного устройства, которая позволяет наиболее просто учесть его квантовостатистические свойства. При использовании энтропийного подхода определены матрицы плотности, характеризующие состояния оптического поля. Проведен анализ квантовых измерений, на основе которого определены наблюдаемые переменные, соответствующие когерентному и некогерентному методам приема, и найдены статистики этих наблюдаемых для различных состояний оптического поля.

На основе статистических данных проведен анализ помехоустойчивости безатмосферных цифровых оптических систем связи при различных видах модуляции и когерентном и некогерентном методах приема. Дан сравнительный анализ различных систем связи по их помехоустойчивости и отмечены условия, при которых квантовыми эффектами можно пренебречь.

Исследована помехоустойчивость оптических систем связи, в которых излучение, проходя космический канал, хотя бы частично распространяется через атмосферу. Проведен анализ влияния атмосферы на оптическое излучение. Рассмотрена помехоустойчивость оптических систем в условиях флуктуаций параметров оптического сигнала, вызываемых турбулентной атмосферой. Исследована эффективность некоторых методов ослабления влияния турбулентной атмосферы, таких, как усреднение по апертуре, разнесенный прием оптических сигналов, использование корректирующей обратной связи в информационных системах с амплитудой и поляризационной модуляцией и др. Кратко рассмотрены основные особенности высокоинформативной космической системы связи с пропускной способностью около 300 млн. дв. ед/с и оптические локаторы космического применения.

Рассмотрено оптимальное измерение параметров оптического сигнала, связанных с соответствующими параметрами движения космических аппаратов (дальностью, скоростью, углами). Даны

особенности построения пространственных оптико-голографических систем обработки цифровой радиотехнической информации; получены аналитические выражения для средней вероятности ошибочного приема двоичных сигналов и кодированных сообщений, а также при приеме сообщений в целом. Рассмотрены адаптивные оптические системы, позволяющие компенсировать возмущения волнового фронта оптического луча, распространяющегося по каналу, в результате чего интенсивность полезного сигнала у приемника космического аппарата становится максимальной. Даны математические модели, а также показатели эффективности, применяемые для исследования процесса управления ЛИС.

Особенности обеспечения режима поиска в ЛИС космических аппаратов (КА) рассмотрены в шестой главе, где на основании анализа источников возникновения неопределенности положения КА — абонентов в момент начала сеанса связи определяются статистические характеристики зоны определенности, а также параметры, характеризующие относительное движение абонентов в плоскости поиска КА — наблюдателя.

Глава седьмая посвящена рассмотрению автоматического сопровождения КА — абонента в режиме поддержания связи. В рамках общей математической модели управления проанализированы точностные характеристики основных способов автосопровождения в оптическом диапазоне, в том числе с учетом влияния турбулентной атмосферы в линии связи «КА — Земля». Рассмотрена возможность синтеза следящей системы по основным эксплуатационным критериям.

Гл. 1, 2 и подразд. 3.1—3.3 написаны А. А. Мордовиным и А. Г. Шереметьевым совместно, подразд. 3.4—3.6 и гл. 4 (кроме подразд. 4.4) написаны А. Г. Шереметьевым, подразд. 4.4 написан А. Т. Серобабиным и А. Г. Шереметьевым совместно, гл. 5, 6, 7 написаны И. В. Минаевым.

ГЛАВА 1

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ НА ВХОДЕ ПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА

Приемное устройство включает в себя оптическую систему, в фокальной плоскости которой располагается фотодетектор, преобразующий энергию светового поля в электрический сигнал. Каждой точке фокальной плоскости идеальной оптической системы соответствует сфокусированная энергия плоской волны, падающей на оптическую систему под определенным углом [11]. Другими словами, фокальная плоскость может рассматриваться как анализатор углового спектра, падающего на оптическую систему светового поля, поэтому поле на входе приемного устройства целесообразно представить в виде суперпозиции плоских волн. Такое представление удобно еще тем, что оно позволяет наиболее просто учесть квантостатистические свойства электромагнитного поля.

Для свободного пространства в отсутствие токов и зарядов уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$; $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$; $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$,

а величины μ_0 и ϵ_0 характеризуют свободное пространство.

Если ввести векторный потенциал \mathbf{A} , определяемый из условия

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

то при кулоновской калибровке ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и $U = 0$, где U — скалярный потенциал) поле в вакууме определяется волновым уравнением

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Электрическое поле связано с векторным потенциалом уравнением

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Следовательно, если решение (1.3) найдено, то при помощи уравнений (1.2) и (1.4) можно найти решения для \mathbf{E} и \mathbf{H} исходных уравнений (1.1).

Выделим в пространстве (x, y, z) объем V произвольной величины. Форма этого объема несущественна, но для простоты дальнейших рассуждений будем считать, что объем ограничен параллелепипедом со сторонами (a, b, c) . Представим векторный потенциал в объеме V в виде суперпозиции плоских волн [44]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l \epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{l\sigma} \{ a_{l\sigma} \exp[i(\mathbf{k}_l \mathbf{r} - \omega_l t)] + a_{l\sigma}^* \exp[-i(\mathbf{k}_l \mathbf{r} - \omega_l t)] \}. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{k}_l — волновой вектор; $\mathbf{e}_{l\sigma}$ — ортонормированный вектор моды l и поляризации σ ; $\hbar = 2\pi \hbar$ — постоянная Планка; $a_{l\sigma}$, $a_{l\sigma}^*$ — коэффициенты разложения.

При $|\mathbf{k}_l|^2 = \omega_l^2/c^2$ каждый член ряда (1.5) удовлетворяет волновому уравнению (1.3). Если ввести периодические граничные условия в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r} + i\mathbf{a}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{j}b, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{k}c, t), \quad (1.6)$$

то волновой вектор \mathbf{k}_l будет иметь дискретный набор значений, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{k}_l = 2\pi \left(\frac{l_1}{a} \mathbf{i} + \frac{l_2}{b} \mathbf{j} + \frac{l_3}{c} \mathbf{k} \right). \quad (1.7)$$

В уравнениях (1.6) и (1.7) \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} представляют собой единичные векторы конфигурационного пространства. Для единичного вектора конфигурационного пространства \mathbf{k} использовано такое же обозначение, как и для волнового вектора. В дальнейшем под \mathbf{k} понимается только волновой вектор, а l_1 , l_2 , l_3 — целые числа из интервала от $-\infty$ до $+\infty$. Для сокращения записи набор чисел l_1 , l_2 , l_3 будем обозначать одной буквой l . Таким образом, периодические граничные условия приводят к дискретному набору значений постоянной распространения. Каждой тройке целых чисел l_1 , l_2 , l_3 соответствуют две бегущие волны — по одной для каждой поляризации. Можно показать [44], что гамильтониан (энергия) поля в выделенном объеме V имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dV = \frac{1}{2} \sum_{l,\sigma} \hbar \omega_l (a_{l\sigma} a_{l\sigma}^* + a_{l\sigma}^* a_{l\sigma}). \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) видно, что каждая бегущая волна вносит свой независимый вклад в общую энергию поля объема V . В зависимости от характера возбуждающего поля $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ может оказаться, что не все коэффициенты разложения $a_{l\sigma}$, $a_{l\sigma}^*$ в выражении (1.5)

отличны от нуля. Так, если поле A сконцентрировано возле постоянной распространения k в интервале $\Delta k = \Delta k_x i + \Delta k_y j + \Delta k_z k$, то в соответствии с условием (1.7) в объеме V возбуждятся m независимых мод, определяемых выражением

$$m = 2\Delta l_1 \Delta l_2 \Delta l_3 = \frac{2V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (1.9)$$

Здесь множитель 2 учитывает две возможные поляризации, а $V = abc$. Отметим, что в выражение (1.9) входит только объем параллелепипеда, а соотношение между сторонами его несущественно. В правой части этого выражения стоит элемент объема в k -пространстве. Переходя в этом пространстве от прямоугольных координат (k_x, k_y, k_z) к сферическим, будем иметь

$$k = |k| (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

где $(|k|, \theta, \varphi)$ — сферические координаты.

Следовательно, элемент объема в k -пространстве равен

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = k^2 \Delta k \sin \theta \Delta \theta \Delta \varphi = k^2 \Delta k \Delta \Omega,$$

где $\Delta \Omega$ — телесный угол в направлении k .

Таким образом, выражение (1.9) можно переписать в виде

$$m = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta \Omega.$$

Так как $\omega^2 = c^2 k^2$, то $k^2 \Delta k = \frac{\omega^2}{c^3} \Delta \omega$, и поэтому $m = 2 \frac{V}{c^3} v^2 \Delta v \Delta \Omega$,

$$(1.10)$$

где $\omega = 2\pi\nu$.

Из формулы (1.10) видно, что число мод, приходящихся на единицу телесного угла, равно

$$\gamma = \frac{m}{\Delta \Omega} = 2 \frac{V}{c^3} v^2 \Delta v \quad (1.11)$$

и зависит от объема квантования V , который до сих пор считался совершенно произвольным. Необходимо теперь связать параметры выражения (1.11) с характеристиками приемного устройства. Для этого определим тот объем квантования ΔV , в котором на единицу телесного угла приходится одна мода (т. е. $\gamma = 1$). Для одной поляризации из выражения (1.11) имеем

$$\Delta V = \frac{c^3}{v^2 \Delta v} = \lambda^2 c \tau. \quad (1.12)$$

Выражение (1.12) показывает, что с оптическим приемником, имеющим площадь апертуры λ^2 и время наблюдения τ , в единичном телесном угле взаимодействует одна мода поля. Если площадь приемной апертуры равна S , а T — время наблюдения, то в объеме

$$V = S c T \quad (1.13)$$

на единицу телесного угла будет приходиться γ мод:

$$\gamma = \frac{V}{\Delta V} = \frac{S}{\lambda^2} \Delta \nu T. \quad (1.14)$$

Тогда полное число мод, взаимодействующих с оптическим приемником с углом поля зрения $\Omega_{\text{п}}$, равно

$$m = \frac{S}{\lambda^2} \Delta \nu T \Omega_{\text{п}}. \quad (1.15)$$

В том случае, когда излучение не поляризовано, число мод следует удвоить. Формулой (1.15) устанавливается связь между числом мод и параметрами оптических приемников. Обычно ширина спектра поля, взаимодействующего с приемником, ограничивается оптическим фильтром. В этом случае выражение (1.15) определяет максимальное число мод, которое анализируется приемником. Естественно, что широкополосный фоновый сигнал будет присутствовать во всех этих модах, в то время как полезный сигнал, генерируемый лазерами вследствие высокой монохроматичности своего излучения возбудит не все моды, а возможно, только одну, что в дальнейшем предполагается выполненным.

Таким образом, в дальнейшем будем полагать, что с оптическим приемником взаимодействует m независимых мод, т. е. в разложении (1.5) имеется только m отличных от нуля коэффициентов $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^*$.

В классической теории связи коэффициенты $a_{l\sigma}$ определяются исходя из решений уравнений Максвелла с учетом излучения передатчика и распространения этого излучения в пространстве. При этом в общем случае $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^*$ считаются случайными. Однако квантовых флуктуаций эта теория не может учитывать. Чтобы включить в модель поля на входе приемного устройства и квантовые флуктуации, необходимо каждую моду поля описать квантовомеханически.

Поскольку знание коэффициентов $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^*$ полностью определяет поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, то эти коэффициенты можно рассматривать как новые динамические переменные поля. На промежуточном этапе удобнее вместо комплексных переменных $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^*$ ввести действительные переменные $p_{l\sigma}$ и $q_{l\sigma}$:

$$\begin{aligned} a_{l\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\omega_l}} (\omega_{l\sigma} q_{l\sigma} + i p_{l\sigma}); \\ a_{l\sigma}^* &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\omega_l}} (\omega_{l\sigma} q_{l\sigma} - i p_{l\sigma}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

С учетом формул (1.16) гамильтониан поля (1.8) может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{l,\sigma} (p_{l\sigma}^2 + \omega_l^2 q_{l\sigma}^2). \quad (1.17)$$

Выражение (1.17) показывает, что каждой моде поля можно сопоставить осциллятор, для которого переменные $p_{l\sigma}$ и $q_{l\sigma}$ являются канонически сопряженными. Полная энергия поля равна сумме энергий не связанных между собой отдельных осцилляторов. Канонические уравнения движения для поля принимают вид [35]

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{l\sigma}} = \dot{q}_{l\sigma} = p_{l\sigma}; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{l\sigma}} = -\dot{p}_{l\sigma} = \omega_l^2 q_{l\sigma}. \quad (1.18)$$

Так как уравнения движения для моды поля полностью эквивалентны уравнениям движения гармонического осциллятора, квантовое поведение которого хорошо изучено, то квантование моды поля эквивалентно квантованию гармонического осциллятора. Согласно общей квантовой теории [35] с переменными $p_{l\sigma}$, $q_{l\sigma}$, \mathcal{H} связаны эрмитовы операторы. При этом принимается, что операторы $p_{l\sigma}$ и $q_{l\sigma}$ удовлетворяют коммутационным отношениям

$$[q_{l'\sigma'}, p_{l\sigma}] = \begin{cases} i\hbar & \text{при } l'=l, \sigma'=\sigma; \\ 0 & \text{при } l' \neq l, \sigma' \neq \sigma. \end{cases} \quad (1.19)$$

Классические коэффициенты разложения $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^*$ при квантовании поля в соответствии с формулами (1.16) рассматриваются как неэрмитовы операторы $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^+$, которые, подобно $p_{l\sigma}$ и $q_{l\sigma}$, не коммутируют друг с другом. Выражая $p_{l\sigma}$ и $q_{l\sigma}$ через $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^+$ из формул (1.16) и подставляя полученные выражения в выражение (1.19), получим правило коммутации для операторов $a_{l\sigma}$ и $a_{l\sigma}^+$

$$[a_{l'\sigma'}, a_{l\sigma}^+] = \begin{cases} 1 & \text{при } l'=l, \sigma'=\sigma; \\ 0 & \text{при } l' \neq l, \sigma' \neq \sigma. \end{cases} \quad (1.20)$$

С учетом выражения (1.20) гамильтониан поля в формуле (1.8) может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{l,\sigma} \hbar \omega_l \left(a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.21)$$

В дальнейшем приведем необходимые результаты только для одной моды поля, опуская индексы l и σ .

Эрмитов оператор a^+a называют оператором числа частиц. Его собственные значения есть целые числа или нуль. Собственные значения и собственные функции (векторы) оператора числа частиц обозначим через n и $|n\rangle$ соответственно. Собственные функции ортонормированны, т. е.

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } m=n; \\ 0, & \text{если } m \neq n \end{cases} \quad (1.22)$$

и образуют полный набор. (Здесь вектор $\langle m|$ является эрмитово сопряженным вектору $|m\rangle$). Условие полноты записывается в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = I, \quad (1.23)$$

где I есть единичный оператор.

Из формул (1.21) видно, что мода поля даже в нулевом (вакуумном) состоянии имеет отличную от нуля энергию, равную $\frac{1}{2} \hbar \omega$, обязанную своим происхождением квантовому методу описания. При этом полная энергия вакуума оказывается бесконечно большой. Однако этот недостаток теории может быть устранен изменением уровня отсчета энергии моды поля [44]. В дальнейшем полагаем гамильтониан поля равным

$$\mathcal{H} = \sum_{l,\sigma} \hbar \omega_l a_{l\sigma}^{\dagger} a_{l\sigma}. \quad (1.24)$$

Действия операторов a и a^{\dagger} на собственные функции оператора числа частиц сводятся к следующему:

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle; \\ a^{\dagger} |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Операторы a и a^{\dagger} называют операторами уничтожения и рождения соответственно.

Известно решение задачи на собственные значения и собственные функции оператора уничтожения [18]:

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (1.26)$$

При этом собственные значения α в общем случае комплексны, а собственные функции $|\alpha\rangle$ не ортогональны, но обладают свойством полноты.

Аналогично для оператора рождения можно написать

$$\langle \alpha | a^{\dagger} = \langle \alpha | \alpha^*.$$

Собственные функции оператора уничтожения называют когерентными состояниями моды поля. Разложение когерентного состояния по собственным функциям оператора числа частиц имеет вид [18]:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} |n\rangle. \quad (1.27)$$

Отсюда видно, что в состоянии $|\alpha\rangle$ числа фотонов распределены по закону Пуассона, т. е.

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) дает первый пример квантовой статистики.

В общем случае мода поля может не находиться в чистом состоянии (т. е. в состоянии, описываемом волновой функцией Шредингера), или это чистое состояние вследствие недостатка априорных знаний неизвестно, поэтому в квантовой теории вводится дополнительная статистика, при которой возможные чистые состояния характеризуются вероятностным законом распределения.

Учет как квантовых флуктуаций, связанных с функцией Шредингера, так и статистики чистых состояний осуществляется более общей характеристикой состояния системы — эрмитовой матрицей плотности, которая записывается в виде

$$\rho = \sum_m p_m |x_m\rangle \langle x_m|, \quad (1.29)$$

где $|x_m\rangle$ — возможные чистые состояния системы; p_m — вероятности этих чистых состояний.

В состоянии, характеризуемом матрицей плотности ρ , статистика наблюдаемых определяется следующим образом:

$$P(a_n) = \langle a_n | \rho | a_n \rangle. \quad (1.30)$$

Здесь через a_n и $|a_n\rangle$ обозначены собственные значения и собственные функции некоторой наблюдаемой (эрмитового оператора этой наблюдаемой A), а $\langle a_n | \rho | a_n \rangle$ — диагональный элемент матрицы плотности ρ в базе собственных функций наблюдаемой. Среднее значение наблюдаемой определяется выражением

$$\langle A \rangle = \text{sp}(\rho A), \quad (1.31)$$

где $\text{sp}(\cdot)$ обозначает сумму диагональных элементов матрицы ρA .

Таким образом, состояние моды поля, взаимодействующей со оптическим приемником при квантовомеханическом ее описании, характеризуется матрицей плотности $\rho_{i\sigma}$, а совокупность независимых мод — произведением матриц плотности отдельных мод.

1.2. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для получения конкретного вида матрицы плотности воспользуемся понятием энтропии как меры недостатка информации о состоянии системы (моды поля). В квантовой статистике энтропия определяется через матрицу плотности следующим образом:

$$S = -k \text{sp}(\rho \ln \rho), \quad (1.32)$$

где k — постоянная Больцмана.

Будем искать такие состояния системы, которые при заданных сведениях о ней содержали бы минимум информации. Другими словами, ищется экстремум энтропии при дополнительных условиях, отражающих имеющиеся сведения о системе. Под известными све-

дениями понимаются характеристики системы, получаемые при ее анализе классическими методами.

Пусть известна средняя энергия моды поля. Найдем экстремум энтропии при дополнительных условиях

$$\text{sp } \rho = 1, \quad (1.33)$$

$$\text{sp } \rho \mathcal{H} = \langle \mathcal{H} \rangle, \quad (1.34)$$

где, согласно формуле (1.24), для одной моды поля имеем

$$\mathcal{H} = \hbar \omega a^\dagger a. \quad (1.35)$$

Экстремум (1.32) будем искать методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого проварьируем энтропию S и дополнительные условия (1.33) и (1.34) по ρ :

$$\delta S = -k \text{sp} (1 + \ln \rho) \delta \rho = 0; \quad (1.36)$$

$$\text{sp } \delta \rho = 0; \quad (1.37)$$

$$\text{sp } \mathcal{H} \delta \rho = 0. \quad (1.38)$$

Умножим члены уравнений (1.37) и (1.38) на неопределенные множители Лагранжа λ и β соответственно и сложим с уравнением (1.36). В результате получим

$$\text{sp} (1 + \lambda + \ln \rho + \beta \mathcal{H}) \delta \rho = 0.$$

Так как $\delta \rho$ произвольна и все вариации теперь независимы, то это уравнение будет выполняться только в том случае, когда

$$1 + \lambda + \ln \rho + \beta \mathcal{H} = 0$$

$$\text{или } \rho = e^{-(1+\lambda)} e^{-\beta \mathcal{H}}. \quad (1.39)$$

Неопределенные множители λ и β определяются из дополнительных условий (1.33) и (1.34). Подставляя выражение (1.39) в уравнение (1.33), получим

$$\text{sp } \rho = e^{-(1+\lambda)} \text{sp} (e^{-\beta \mathcal{H}}) = 1.$$

Отсюда $e^{(1+\lambda)} = \text{sp} (e^{-\beta \mathcal{H}})$

и матрица плотности (1.39) принимает вид

$$\rho = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{\text{sp} (e^{-\beta \mathcal{H}})}. \quad (1.40)$$

Используя второе дополнительное условие (1.34), будем иметь

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{\text{sp} (\mathcal{H} e^{-\beta \mathcal{H}})}{\text{sp} (e^{-\beta \mathcal{H}})}, \quad (1.41)$$

или с учетом выражения (1.35)

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{\hbar\omega \text{sp} (a^+ a e^{-\beta \hbar\omega a^+ a})}{\text{sp} (e^{-\beta \hbar\omega a^+ a})}, \quad (1.42)$$

Вычисление следа в уравнении (1.42) удобнее всего произвести в базисе собственных функций оператора числа частиц $a^+ a$, которые обозначим через $|n\rangle$. Имеем

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{\hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | a^+ a e^{-\beta \hbar\omega a^+ a} | n \rangle}{\sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta \hbar\omega a^+ a} | n \rangle}. \quad (1.43)$$

После суммирования получим

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta \hbar\omega) - 1}. \quad (1.44)$$

Из уравнения (1.44) можно выразить β через $\langle \mathcal{H} \rangle$. Для системы связи важно определить матрицу плотности для теплового шума, характеризуемого шумовой температурой T . Из классической теории о равномерном распределении энергии по степеням свободы имеем $\langle \mathcal{H} \rangle = kT$. Но формула Релея — Джинса, полученная из этого предположения, показывает его справедливость для низких частот, т. е. для фотонов с малой энергией. Следовательно, переходя в уравнение (1.44) к пределу при $\hbar\omega \rightarrow 0$, мы должны получить $\langle \mathcal{H} \rangle = kT$. Выполнив этот переход, находим

$$kT = 1/\beta.$$

Отсюда $\beta = 1/kT$. (1.45)

Подставляя выражение (1.45) в формулу (1.40) и вычисляя $\text{sp} \left[\exp \left(\frac{\hbar\omega}{kT} a^+ a \right) \right]$, получим окончательное выражение для матрицы плотности, описывающей тепловой шум,

$$\rho = (1 - e^{-W}) e^{-W a^+ a}, \quad (1.46)$$

где $W = \hbar\omega/kT$.

Среднее значение оператора числа частиц в состоянии (1.46), как это следует из уравнения (1.44), равно

$$n_{ш} = \frac{1}{e^W - 1}. \quad (1.47)$$

Индекс «ш» в формуле (1.47) означает, что в теории связи эти фотоны следует считать шумовыми.

На рис. 1.1 представлена зависимость среднего числа шумовых фотонов от температуры для различных длин волн. Необходимо

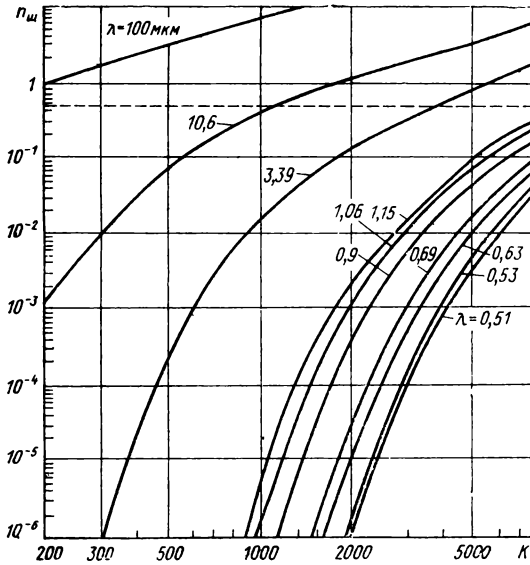


Рис. 1.1. Зависимость среднего числа тепловых фотонов в моде поля от температуры для различных длин волн

отметить, что для длин волн оптического диапазона n_m соизмеримо и меньше $1/2$, тогда как для радиодиапазона $n_m \gg 1/2$. Этот факт оказывает существенное влияние на анализ помехоустойчивости систем связи оптического диапазона.

Определим средние значения операторов рождения и уничтожения в состоянии (1.46), которым в классической теории соответствуют комплексные амплитуды. Имеем

$$\text{sp } \rho a = (1 - e^{-W}) \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-W a^+ a} a | n \rangle;$$

$$\text{sp } \rho a^+ = (1 - e^{-W}) \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-W a^+ a} a^+ | n \rangle.$$

Используя свойства операторов уничтожения и рождения (1.25), получим

$$\text{sp } \rho a = (1 - e^{-W}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-W n} \sqrt{n} \langle n | n - 1 \rangle = 0;$$

$$\text{sp } \rho a^+ = (1 - e^{-W}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-W n} \sqrt{n+1} \langle n | n + 1 \rangle = 0.$$
(1.48)

В равенствах (1.48) использовалось свойство ортогональности собственных функций оператора числа частиц.

Матрицу плотности [см. уравнение (1.46)] можно получить, если наряду с дополнительными условиями (1.33) и (1.34) ввести дополнительные условия

$$\text{sp } \rho a = 0; \quad \text{sp } \rho a^+ = 0. \quad (1.49)$$

Пусть методами классической электродинамики найдены комплексные амплитуды α и α^* (коэффициенты разложения $a_{1\alpha}$, $a_{1\alpha}^*$ в (1.5)), которым соответствуют в квантовой теории операторы уничтожения и рождения. Поскольку величины α и α^* известны, то известна соответствующая им классическая энергия, которую назовем энергией когерентного сигнала. В соответствии с выражением (1.24) эта энергия равна

$$E_c = \hbar \omega \alpha^* \alpha = \hbar \omega n_c, \quad (1.50)$$

где под n_c понимается число сигнальных фотонов.

Будем полагать, что полная энергия моды поля состоит из энергии теплового шума (которая в формуле (1.34) обозначена через $\langle \mathcal{H} \rangle$, а здесь обозначим ее через $E_{\text{ш}}$) и энергии сигнала (1.50). Другими словами, будем искать матрицу плотности, описывающую смесь сигнала с шумом. Для этого воспользуемся теоремой Эренфеста о среднем, которая утверждает, что уравнения движения для квантовых средних совпадают с классическими уравнениями движения осциллятора. Следовательно, рассчитанные методом классической электродинамики величины α , α^* , E_c совпадают с квантовыми средними соответствующих операторов. Поэтому будем искать матрицу плотности, максимизирующую (1.32), при дополнительных условиях:

$$\text{sp } \rho = 1; \quad \text{sp } \rho \mathcal{H} = E_c + E_{\text{ш}}; \quad (1.51)$$

$$\text{sp } \rho a = \alpha; \quad \text{sp } \rho a^+ = \alpha^*.$$

Введем два новых оператора c и c^+ :

$$c = a - \alpha; \quad c^+ = a^+ - \alpha^*. \quad (1.52)$$

Легко проверить, что операторы c и c^+ удовлетворяют тем же самым соотношениям коммутации, что и операторы a и a^+ . Оператор c^+c , как и оператор a^+a , имеет полный ортонормированный набор собственных функций и целочисленные собственные значения. Операторы a и a^+ выражаются через c и c^+ следующим образом [см. формулу (1.52)]:

$$a = c + \alpha; \quad a^+ = c^+ + \alpha^*. \quad (1.53)$$

Подставим (1.53) в дополнительные условия (1.51). В результате получим

$$\text{sp } \rho = 1; \quad \text{sp}(\rho \hbar \omega c^+ c) = E_{\text{ш}}; \quad (1.54)$$

$$\text{sp } \rho c = 0; \quad \text{sp } \rho c^+ = 0.$$

Если через \mathcal{H}_c обозначить гамильтониан $\hbar\omega c + c$, то видно, что дополнительные условия (1.54) совпадают с условиями (1.33), (1.34) и (1.49). Но для этого случая матрица плотности получена и имеет вид (1.46), в котором под a^+a следует понимать c^+c . Следовательно, $\rho = (1 - e^{-W})e^{-Wc^+c}$, или, возвращаясь снова к операторам a и a^+ , в соответствии с (1.52), получим окончательное выражение для матрицы плотности, описывающей смесь когерентного сигнала с тепловым шумом:

$$\rho = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W (a^+ - \alpha^*)(a - \alpha) \}. \quad (1.55)$$

Таким образом, используя информацию о состоянии моды поля, которая может быть получена из классической теории, найдены квантовые матрицы плотности, учитывающие микроструктуру электромагнитного поля.

В дальнейшем для оценки качества оптических систем связи необходимо конкретизировать тип измерительного устройства, т. е. указать какому оператору соответствует измеряемая величина.

1.3. АНАЛИЗ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

Известно, что электромагнитному полю присущи как волновые, так и корпускулярные свойства. Характеристикой поля, отражающей его корпускулярные свойства, является оператор числа частиц. В разд. 1.1 отмечалось, что этот оператор имеет положительные целочисленные собственные значения. Оператор числа частиц эрмитов и соответствует физически наблюдаемой величине.

Такие понятия как амплитуда и фаза являются чисто волновыми характеристиками поля. В классической электродинамике волна характеризуется комплексной амплитудой a . В квантовой теории комплексным амплитудам a и a^* соответствуют операторы уничтожения и рождения. Казалось бы, что именно эти операторы должны характеризовать волновые свойства поля. Но операторы a и a^+ неэрмитовы и, следовательно, физически ненаблюдаемы. Попытки выделить из операторов a и a^+ эрмитовы операторы амплитуды и фазы встречают большие трудности. В работе [33] вместо эрмитового оператора фазы вводятся два некоммутирующих оператора косинуса и синуса. Однако, собственные функции и собственные значения таких операторов имеют довольно сложный вид и их анализ затруднен.

В то же время опыт классической электродинамики свидетельствует о том, что понятие амплитуды и фазы строго определено только для когерентных сигналов (бесконечного во времени гармонического колебания), поэтому вместо того, чтобы выделять операторы амплитуды и фазы из неэрмитовых операторов a и a^+ , будем искать операторы оценки корректно определенной амплитуды и фазы когерентного сигнала в матрице плотности (1.55).

Естественно, что оценка этих параметров должна быть опти-

мальной в определенном смысле. Найдем операторы эффективной и несмещенной оценки амплитуды и фазы когерентного сигнала, минимизирующие среднеквадратичную ошибку оценки, т. е. удовлетворяющие условию

$$\text{sp}[\rho(\theta)(\hat{\theta} - \theta)^2] = \min, \quad (1.56)$$

где $\hat{\theta}$ — оператор оценки параметра θ в матрице плотности.

Пусть выбран некий эрмитов оператор оценки параметра θ , т. е. оператор $\hat{\theta}$. Для среднего значения этого оператора можно написать следующее выражение:

$$m(\theta) = \text{sp}[\hat{\theta}\rho(\theta)], \quad (1.57)$$

которое эквивалентно другой его записи

$$m(\theta) = \theta + \text{sp}[(\hat{\theta} - \theta)\rho(\theta)]. \quad (1.58)$$

В формуле (1.58) первое слагаемое — это истинное значение параметра, а второе — смещение оценки.

Продифференцируем выражение (1.58) по θ . В результате получим

$$\frac{d}{d\theta} m(\theta) = \text{sp}\left[(\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta}\right]. \quad (1.59)$$

При получении (1.59) учтено, что $\text{sp}\rho = 1$ и предполагается, что под знаком следа в формуле (1.58) стоят операторы, которые позволяют менять порядок суммирования и дифференцирования.

Введем эрмитов оператор L , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(L\rho + \rho L). \quad (1.60)$$

Подставляя выражение (1.60) в формулу (1.59), получим

$$\frac{d}{d\theta} m(\theta) = \frac{1}{2} \{\text{sp}[(\hat{\theta} - \theta)L\rho] + \text{sp}[(\hat{\theta} - \theta)\rho L]\}. \quad (1.61)$$

Используя операторное свойство [80]

$$\frac{1}{2} \text{sp}(ABC + CBA) = \text{Re}[\text{sp}(ABC)],$$

где A, B, C — эрмитовы операторы, выражения (1.61) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\theta} m(\theta) = \text{Re}[\text{sp}[(\hat{\theta} - \theta)L\rho]]. \quad (1.62)$$

Для этого выражения можно написать неравенство:

$$\left[\frac{d}{d\theta} m(\theta)\right]^2 \leq |\text{sp}[(\hat{\theta} - \theta)L\rho]|^2 = |\text{sp}[V\bar{\rho}(\hat{\theta} - \theta)LV\bar{\rho}]|^2. \quad (1.63)$$

При получении последнего равенства оператор ρ представили в виде произведения $V \bar{\rho} V \bar{\rho}$ (что возможно, так как оператор ρ положительно определен) и воспользовались свойством инвариантности следа относительно циклической перестановки операторов.

Усилим неравенство (1.63), воспользовавшись операторным неравенством Шварца, которое утверждает, что

$$|\text{sp } AB^+|^2 \leq \text{sp } AA^+ \text{sp } BB^+, \quad (1.64)$$

где A и B — операторы, а знак «+» означает операцию эрмитового сопряжения.

Полагая в неравенстве (1.63) $A = V \bar{\rho} (\hat{\theta} - \theta)$, а $B^+ = L V \bar{\rho}$ и применяя формулу (1.64), получим

$$\left[\frac{d}{d\theta} m(\theta) \right]^2 \leq \text{sp} [\rho (\hat{\theta} - \theta)^2] \text{sp} (\rho L^2). \quad (1.65)$$

Отсюда

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \text{sp} [\rho (\hat{\theta} - \theta)^2] \geq \frac{\left[\frac{d}{d\theta} m(\theta) \right]^2}{\text{sp} (\rho L^2)}. \quad (1.66)$$

Выражение (1.66) является квантовым обобщением известного классического неравенства Крамера — Рао, которое впервые получено Хелстромом [80].

Нетрудно проверить, что если существует решение операторного уравнения (1.60) в виде

$$L = k(\theta) (\hat{\theta} - \theta), \quad (1.67)$$

то оператор оценки $\hat{\theta}$ является несмещенным и дает минимум дисперсии (1.56).

Перейдем теперь непосредственно к нахождению оператора оценки амплитуды когерентного сигнала в матрице плотности (1.55). Для этого введем обозначения

$$A = |\alpha\rangle; \quad \mu = e^{j\tau}; \quad \alpha = A\mu. \quad (1.68)$$

Подставляя формулы (1.68) в выражение (1.55) и решая уравнение (1.60), в котором $\theta = A$, получим

$$L = (n_{\text{ш}} + 1/2)^{-1} [\mu (a^+ - A\mu^*) + \mu^* (a - A\mu)],$$

$$\text{или } L = 2(n_{\text{ш}} + 1/2)^{-1} [1/2(\mu a^+ + \mu^* a) - A]. \quad (1.69)$$

Сравнивая уравнение (1.69) с уравнением (1.67), заключаем, что эрмитов оператор

$$X = \frac{1}{2} (\mu a^+ + \mu^* a) \quad (1.70)$$

является оператором эффективной и несмещенной оценки амплитуды когерентного сигнала, который впервые получен в работе [80]. При этом дисперсия оценки равна

$$\sigma_x^2 = \frac{2n_{\text{ш}} + 1}{4}. \quad (1.71)$$

Принимая в матрице плотности ρ в качестве параметра фазу φ и проводя аналогичные вычисления, можно убедиться, что корректного оператора оценки фазы не получается, поэтому по аналогии с работой [33] будем искать операторы независимой оценки косинуса и синуса фазы. Для этого запишем α в виде

$$\alpha = A(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и подставим в (1.55).

Дифференцируя (1.55) по $\cos \varphi$ и подставляя полученное выражение в (1.60) найдем оператор L в виде

$$L = 2(n_{\text{ш}} + 1/2)^{-1} A^2 \left[\frac{1}{2A} (a + a^+) - \cos \varphi \right]. \quad (1.72)$$

Отсюда заключаем, что оператор

$$\hat{C} = \frac{1}{2A} (a + a^+) \quad (1.73)$$

является оператором эффективной и несмещенной оценки косинуса фазы. Аналогично можно получить оператор эффективной и несмещенной оценки синуса фазы в виде

$$\hat{S} = \frac{i}{2A} (a^+ - a). \quad (1.74)$$

Дисперсии оценок косинуса и синуса фазы одинаковы и равны

$$\sigma_C^2 = \sigma_S^2 = \frac{2n_{\text{ш}} + 1}{4A^2} = \frac{2n_{\text{ш}} + 1}{4n_c}. \quad (1.75)$$

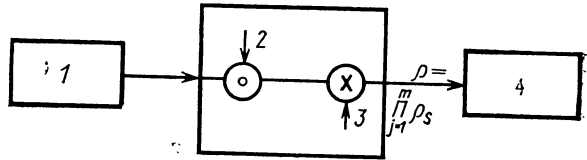
Выражение (1.75) показывает, что дисперсия оценки фазы зависит не только от величины шума, но и от величины сигнала и стремится к нулю при $n_c \rightarrow \infty$.

В работе [74] показано, что параметрический усилитель вырожденного типа обладает свойством усиливать один компонент поля (например, косинусоидальный) и во столько же раз ослаблять другой его компонент (например, синусоидальный). Поскольку операторы \hat{C} и \hat{S} представляют именно эти компоненты поля, то, следовательно, вырожденный параметрический усилитель можно рассматривать как измеритель этих операторов. Оператор оценки амплитуды представляет собой линейную комбинацию компонентов поля, и при его составлении используется фаза когерентного сигнала, которая предполагается известной (производится ее отслеживание). Измерителем этого оператора может быть также вырожденный параметрический усилитель, либо гомодинный приемник. Достоинством параметрических усилителей вырожденного типа является то, что они не ухудшают отношение сигнал/шум, поэтому анализ помехоустойчивости оптических систем связи можно производить на основе статистик операторов \hat{X} , \hat{C} или \hat{S} .

Таким образом, в качестве наблюдаемой, характеризующей корпускулярные свойства поля, выберем оператор числа частиц, изме-

Рис. 1.2. Обобщенная схема лазерной системы связи:

1 — лазерный передатчик;
2 — квантовый шум; 3 — мультипликативная помеха;
4 — квантовый приемник



рение которого осуществляется счетчиками фотонов. Волновые свойства поля будем характеризовать оператором «амплитуды» [см. уравнение (1.70)], измеряемого гомодинным приемником, либо вырожденным параметрическим усилителем.

В результате проведенного в этой главе анализа можно составить следующую обобщенную модель оптического канала связи (рис. 1.2).

Излучение передатчика, характеристики которого рассчитаны методами классической электродинамики, распространяется по каналу связи ко входу приемного устройства. В процессе распространения сигнал передатчика ослабляется и на него воздействуют мультипликативные помехи. Кроме сигнала на вход приемного устройства поступает внешний шум. Приемник анализирует m независимых мод, каждая из которых описывается квантово-механическими матрицами плотности вида (1.55). В качестве приемного устройства рассматривается или счетчик фотонов, или гомодинный приемник.

1.4. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ВХОДЕ ПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА

Чтобы найти оптимальную структуру оптических приемников необходимо, прежде всего, знать статистику наблюдаемой величины, которая измеряется квантовым приемником.

Сначала для одномодового поля найдем статистику фотонов и «амплитуды», соответствующие измеряемым операторам a^+a и уравнению (1.70) в состоянии

$$\rho = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W(a^+ - \alpha^*)(a - \alpha) \}. \quad (1.76)$$

В этом состоянии среднее число фотонов согласно (1.51) определяется в виде

$$\langle n \rangle = \text{sp}(\rho a^+ a) = n_{\text{ш}} + n_c. \quad (1.77)$$

Для нахождения статистики фотонов преобразуем матрицу плотности (1.76), используя свойства бозе-операторов, изложенные в работе [44]. Если операторная функция $f(a, a^+)$ имеет разложение в степенной ряд, то для нее справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned} e^{xa} f(a, a^+) e^{-xa} &= f(a, a^+ + x); \\ e^{-xa^+} f(a^+, a) e^{xa^+} &= f(a + x, a^+), \end{aligned} \quad (1.78)$$

где x — не оператор, а число. На основании формул (1.78) легко убедиться, что матрица плотности (1.76) может быть представлена в виде

$$\rho = (1 - e^{-W}) e^{aa^+} e^{-a^*a} e^{-Wa^+a} e^{a^*a} e^{-aa^+}. \quad (1.79)$$

Преобразуем выражение (1.79), воспользовавшись операторным тождеством [18]

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-1/2[A,B]}, \quad (1.80)$$

справедливым, если $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Знак $[A, B]$ обозначает коммутатор, т. е. $[A, B] = AB - BA$. Применяя тождество (1.80) к операторам $e^{aa^+} e^{-a^*a}$ и $e^{a^*a} e^{-aa^+}$, получим следующее выражение для матрицы плотности

$$\rho = (1 - e^{-W}) e^{-(a^*a - aa^+)} e^{-W+a} e^{a^*a - aa^+}. \quad (1.81)$$

Воспользуемся теперь следующим свойством бозе-операторов [44]:

$$e^{xa^+} f(a, a^+) = f(a e^{-x}, a^+ e^x) e^{xa^+} a. \quad (1.82)$$

Тогда (1.81) можно записать в виде

$$\rho = (1 - e^{-W}) e^{-(a^*a - aa^+)} e^{a^*e^W a - a e^{-W} a^+} e^{-Wa^+} a. \quad (1.83)$$

Применяя к последнему выражению последовательно свойство (1.80), получим

$$\rho = (1 - e^{-W}) e^{-|a|^2(1-e^{-W})} e^{a(1-e^{-W})a^+} e^{a^*(e^W-1)a} e^{-Wa^+} a. \quad (1.84)$$

Если учесть обозначения (1.47), то получим более компактное выражение

$$\rho = \frac{1}{n_{ш} + 1} e^{-\frac{n_c}{n_{ш}+1} \frac{\alpha}{n_{ш}+1} a^+} e^{\frac{\alpha^*}{n_{ш}} a} e^{-Wa^+} a. \quad (1.85)$$

Искомое распределение фотонов представляет собой диагональные элементы матрицы плотности (1.85) в базисе собственных функций оператора числа частиц. Пусть n и $|n\rangle$ соответственно собственные значения и собственные функции оператора числа частиц. Тогда

$$P(n) = \langle n | \rho | n \rangle = \frac{1}{n_{ш} + 1} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right) e^{-\frac{n_c}{n_{ш}+1}} \langle n | e^{\frac{\alpha}{n_{ш}+1} a^+} e^{\frac{\alpha^*}{n_{ш}} a} | n \rangle. \quad (1.86)$$

Вычислим матричный элемент $\langle n | e^{\frac{\alpha a^+}{n_{ш}+1}} e^{\frac{\alpha^* a}{n_{ш}}} | n \rangle$. Для этого учтем, что $|n\rangle = \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$, а также, что $e^{xa} |0\rangle = |0\rangle$ [18], и

снова воспользуемся свойством (1.78). В результате получим

$$\langle n | e^{\frac{\alpha a^+}{n_{ш}+1}} e^{\frac{\alpha^* a}{n_{ш}}} | n \rangle = \frac{1}{n!} \langle 0 | \left(a + \frac{\alpha}{n_{ш}+1} \right)^n \left(a^+ + \frac{\alpha^*}{n_{ш}} \right)^n | 0 \rangle. \quad (1.87)$$

Так как [44]

$$\begin{aligned} (a^+ + x)^n | 0 \rangle &= \sum_{m=0}^n \frac{n! x^{n-m}}{(n-m)! \sqrt{m!}} | m \rangle; \\ \langle 0 | (a + x)^n &= \sum_{l=0}^n \frac{n! x^{n-l}}{(n-l)! \sqrt{l!}} \langle l |, \end{aligned}$$

то выражение (1.87) после использования соотношения ортогональности $\langle l | m \rangle = \delta_{lm}$ приводится к виду

$$\langle n | e^{\frac{\alpha a^+}{n_{ш}+1}} e^{\frac{\alpha^* a}{n_{ш}}} | n \rangle = \sum_{m=0}^n \frac{[|\alpha|^2 \frac{1}{n_{ш}(n_{ш}+1)}]^{n-m}}{[(n-m)!]^2 m!}. \quad (1.88)$$

Поскольку [19]

$$\sum_{l=0}^r \frac{r! (-x)^l}{(r-l)! l!^2} = L_r(x),$$

где $L_r(x)$ — полином Лагерра, то для распределения фотонов получаем окончательное выражение

$$P(n) = \frac{1}{n_{ш}+1} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш}+1} \right)^n \exp \left(-\frac{n_c}{n_{ш}+1} \right) L_n \left[\frac{n_c}{n_{ш}(n_{ш}+1)} \right]. \quad (1.89)$$

Среднее значение и дисперсия распределения (1.89) соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= n_c + n_{ш}; \\ \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 &= n_c(2n_{ш}+1) + n_{ш}(n_{ш}+1). \end{aligned} \quad (1.90)$$

В отсутствии когерентного сигнала ($n_c=0$) распределение (1.89) сводится к распределению Бозе — Эйнштейна:

$$P(n) = \frac{1}{n_{ш}+1} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш}+1} \right)^n. \quad (1.91)$$

Из формул (1.90) видно, что при $n_{ш} \ll 1$ среднее значение и дисперсия распределения (1.89) приблизительно равны, что характерно для распределения Пуассона. Следовательно, при малом чис-

ле тепловых фотонов ($n_{\text{ш}} \ll 1$) распределение (1.89) может быть аппроксимировано распределением Пуассона:

$$P(n) = \frac{(n_c + n_{\text{ш}})^n}{n!} e^{-(n_c + n_{\text{ш}})}. \quad (1.92)$$

Таким образом, статистика оператора a^+a в состоянии (1.76) найдена. Она совпадает со статистикой, получаемой при глауберовском P -представлении матрицы плотности [35].

Для нахождения статистики оператора X проще всего воспользоваться аппаратом характеристических функций. По определению характеристической функцией оператора X называют функцию вида

$$G_x(z) = \text{sp}(\rho e^{izX}), \quad (1.93)$$

где $\text{sp}(\cdot)$ обозначает взятие следа оператора, заключенного в скобки.

Зная характеристическую функцию, можно определить все моменты величины x и ее распределение [35] по формулам

$$\langle x^l \rangle = \left. \frac{\partial^l G_x(z)}{\partial (iz)^l} \right|_{iz} = 0; \quad (1.94)$$

$$P(x) = \langle x | \rho | x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(z) e^{-izx} dz,$$

где x и $|x\rangle$ соответственно собственные значения и собственные функции оператора X .

Вычислим характеристическую функцию оператора

$X = \frac{1}{2}(\mu^*a + \mu a^+)$. Согласно (1.93) имеем

$$G_x(z) = \text{sp}[(1 - e^{-\mathcal{W}}) e^{-\mathcal{W}_i(a^+ - a^*)(a - a)} e^{i/2(\mu^*a + \mu a^+)z}]. \quad (1.95)$$

Для удобства вычисления следа в выражении (1.95) введем два новых оператора

$$c^+ = a^+ - a^*; \quad c = a - a. \quad (1.96)$$

Ранее отмечалось, что операторы c, c^+ удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и операторы a, a^+ . Исходя из этого можно ввести совокупность новых базисных векторов $\{|n_c\rangle\}$, таких, что

$$c^+c|n_c\rangle = n_c|n_c\rangle.$$

Выразив операторы a^+, a через операторы c^+, c согласно (1.53), вычислим след в выражении (1.95) в базисе собственных функций оператора c^+c :

$$G_x(z) = (1 - e^{-\mathcal{W}}) e^{iz|\alpha|} \sum_{n_c=0}^{\infty} e^{-\mathcal{W}n_c} \langle n_c | e^{i/2\mu c^+z + i/2\mu^*cz} | n_c \rangle.$$

Воспользуемся свойством (1.80). В результате получим

$$G_x(z) = (1 - e^{-W}) \exp\left(iz|\alpha| - \frac{1}{8}z^2\right) \sum_{n_c=0}^{\infty} \langle n_c | e^{i/2\mu c^+ z} e^{i/2\mu^* cz} | n_c \rangle. \quad (1.97)$$

Вычисление матричного элемента $\langle n_c | e^{i/2\mu c^+ z} e^{i/2\mu^* cz} | n_c \rangle$ аналогично вычислению, проведенному для выражения (1.87), поскольку операторы c^+ , c ведут себя по отношению к функциям $\{|n_c\rangle\}$ так же, как и операторы a^+ , a по отношению к функциям $\{|n_c\rangle\}$.

Следовательно, этот матричный элемент представляет собой нечто иное, как полином Лагерра.

Таким образом,

$$G_x(z) = (1 - e^{-W}) \exp\left(iz|\alpha| - \frac{1}{8}z^2\right) \sum_{n_c=0}^{\infty} e^{-W n_c} L_{n_c}\left(\frac{z^2}{4}\right). \quad (1.98)$$

Сумма в выражении (1.98) представляет собой производящую функцию полинома Лагерра, т. к. [19]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)}{1-t}. \quad (1.99)$$

Учитывая (1.99) и используя обозначения (1.74), получим окончательное выражение для характеристической функции

$$G_x(z) = \exp\left[iz|\alpha| - \frac{1}{2}z^2\left(\frac{2n_{ш} + 1}{4}\right)\right]. \quad (1.100)$$

Согласно формулам (1.94) два первых момента для x имеют вид

$$\langle x \rangle = \frac{\partial G_x(z)}{\partial (iz)} \Big|_{iz=0} = |\alpha| = \sqrt{n_c}; \quad (1.101)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\partial^2 G_x(z)}{\partial (iz)^2} \Big|_{iz=0} = |\alpha|^2 + \frac{2n_{ш} + 1}{4} = n_c + \frac{2n_{ш} + 1}{4}.$$

Следовательно, дисперсия величины x равна

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{2n_{ш} + 1}{4}. \quad (1.102)$$

Характеристическая функция (1.100) соответствует нормальному закону распределения с определенными выше параметрами. Таким образом, переменная x , соответствующая эрмитовому оператору X , распределена по закону Гаусса:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-|\alpha|)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (1.103)$$

Заметим, что в отсутствии теплового шума ($n_{\text{ш}}=0$), т. е. когда мода поля находится в чистом когерентном состоянии, переменная x флюктуирует с энергией, равной четверти фотона.

Из выражения (1.103) видно, что переменная x , соответствующая оператору эффективной и несмещенной оценки амплитуды когерентного сигнала, допускает и отрицательные значения, в то время как классическое определение амплитуды представляет собой существенно положительную величину. Именно поэтому квантовый оператор оценки классической амплитуды назван оператором «амплитуды».

В общем случае с оптическим приемником взаимодействует m независимых мод, определяемых выражением (1.14). Состояние каждой моды задается матрицей плотности (1.76). Результирующая матрица плотности определяется как произведение (тензорное) матриц плотности отдельных мод:

$$\rho = \prod_{j=1}^m \rho_j. \quad (1.104)$$

В многомодовом поле будем искать статистику суммарного числа фотонов (соответствующий оператор определяется как сумма операторов числа частиц каждой моды) и суммарной «амплитуды» (соответствующий оператор определяется как оператор эффективной и несмещенной оценки суммы амплитуд). При достаточно узкой полосе оптического фильтра можно считать, что средние числа тепловых фотонов в модах одинаковы.

Для нахождения статистики суммарного числа фотонов в многомодовом поле удобно воспользоваться аппаратом производящих функций. По определению производящая функция дискретной случайной величины n с законом распределения $P(n=k)$ имеет вид [35]

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(n=k) z^k. \quad (1.105)$$

Если производящая функция известна, то по ней можно определить все моменты случайной величины и ее закон распределения. Связь этих характеристик случайной величины с производящей функцией определяется соответственно формулами

$$\langle k(k-1)\dots(k-m+1) \rangle = \frac{d^m}{dz^m} \varphi(z) \Big|_{z=1}; \quad (1.106)$$

$$P(n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \varphi(z) \Big|_{z=0}. \quad (1.107)$$

Определим производящую функцию распределения чисел фотонов в одной моде, соответствующую лагеровскому распределению (1.89):

$$\begin{aligned}\varphi_j(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n_{ш} + 1} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^n \exp \left(- \frac{n_{cj}}{n_{ш} + 1} \right) L_n \left[- \frac{n_{cj}}{n_{ш}(n_{ш} + 1)} \right] z^n = \\ &= \frac{1}{n_{ш} + 1} \exp \left(- \frac{n_{cj}}{n_{ш} + 1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} L_n \left[- \frac{n_{cj}}{n_{ш}(n_{ш} + 1)} \right] \left(\frac{z n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^n.\end{aligned}$$

Используя свойство полиномов Лагерра (1.99), получим окончательное выражение для производящей функции

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{n_{ш} + 1} \exp \left(- \frac{n_{cj}}{n_{ш} + 1} \right) \frac{\exp(-y_j t)/(1-t)}{1-t}, \quad (1.108)$$

$$\text{где } y_j = \frac{n_{cj}}{n_{ш}(n_{ш} + 1)}; \quad t = \frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} z.$$

В силу независимости мод производящая функция суммарного числа фотонов определяется как произведение производящих функций (1.108) m мод:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \prod_{j=1}^m \varphi_j(z) = \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^m \exp \left(- \frac{\sum_{j=1}^m n_{cj}}{n_{ш} + 1} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\exp \left(- \sum_{j=1}^m y_j t / (1-t) \right)}{(1-t)^m}.\end{aligned} \quad (1.109)$$

$$\text{Поскольку [19]} \quad \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{m-1}(x) t^k = \frac{\exp(-xt/(1-t))}{(1-t)^m},$$

то видно, что производящей функции (1.109) соответствует следующее распределение суммарного числа фотонов n :

$$P(n) = \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^m \exp \left(- \frac{n_c}{n_{ш} + 1} \right) \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^n L_n^{m-1} \left[\frac{-n_c}{n_{ш}(n_{ш} + 1)} \right]. \quad (1.110)$$

В последнем выражении $n_c = \sum_{j=1}^m n_{cj}$, а $n_{ш}$ представляет собой среднее число тепловых фотонов, приходящихся на одну моду.

Отметим, что распределение (1.110) не зависит от того, как распределены сигнальные фотоны по модам, в то время как допущение о равенстве тепловых фотонов в модах является существенным.

Среднее значение и дисперсия распределения (1.110) определяются соответственно в виде

$$\langle n \rangle = n_c + mn_{ш}; \quad (1.111)$$

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = mn_{ш}(n_{ш} + 1) + n_c(2n_{ш} + 1).$$

Если $n_c = 0$, то [19]

$$L_n^{m-1}(0) = \binom{n+m-1}{n}, \quad (1.112)$$

где $\binom{n+m-1}{n}$ есть число сочетаний из $(n+m-1)$ элементов по n .

С учетом выражения (1.112) в отсутствии сигнала для суммарного числа фотонов получаем распределение

$$P(n) = \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^m \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^n \binom{n+m-1}{n}, \quad (1.113)$$

которое известно как отрицательно биномиальное распределение.

Из выражения (1.111) видно, что при малом числе тепловых фотонов, приходящихся на одну моду, т. е. когда $n_{ш} \ll 1$, среднее значение суммарного числа фотонов и дисперсия их флуктуаций совпадают. Следовательно, в этом случае распределение (1.110) можно аппроксимировать распределением Пуассона:

$$P(n) = \frac{(n_c + mn_{ш})^n}{n!} e^{-(n_c + mn_{ш})}. \quad (1.114)$$

Используя рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра [19]

$$(n+1)L_{n+1}^{m-1}(-x) = (2n+m+x)L_n^{m-1}(-x) - (n-m)L_{n-1}^{m-1}(-x),$$

можно выразить исходное распределение (1.110) в рекуррентной форме

$$P(n+1) = \frac{2n+m+\frac{n_c}{n_{ш}(n_{ш}+1)}}{n+1} P(n) - \frac{(n+m-1)\frac{n_{ш}^2}{(n_{ш}+1)^2}}{n+1} \times \\ \times P(n-1). \quad (1.115)$$

Выражение (1.115) удобно для вычисления распределения фотонов на ЭВМ.

В многомодовом поле когерентному приему соответствует оператор

$$X = \sum_{j=1}^m X_j, \quad (1.116)$$

где

$$X_j = \frac{1}{2} (\mu_j a_j^\dagger + \mu_j^* a_j).$$

Будем считать, что когерентный сигнал содержится только в одной моде, поскольку в качестве носителя информации используется когерентное лазерное излучение. Так как переменные x_j , соответствующие операторам X_j , распределены по нормальному закону, то в силу независимости мод наблюдаемая x , соответствующая оператору X , также распределена по нормальному закону со средним значением, равным амплитуде когерентного сигнала, и дисперсией, равной сумме дисперсий. Таким образом,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-|a|)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (1.117)$$

где

$$\sigma_x^2 = \frac{m(2n_{ш} + 1)}{4}.$$

Выражение (1.117) показывает, что при когерентном приеме квантовые шумы мод суммируются.

Распределение (1.110) описывает статистику фотонов в многомодовом поле. Если в качестве детектора используется счетчик фотонов, то необходимо установить связь между статистикой фотонов и статистикой фотоотсчетов.

Обозначим через η вероятность того, что фотон освободит один фотоэлектрон. Величина η обычно много меньше единицы и поэтому можно считать, что фотоны поглощаются независимо друг от друга. Вероятность появления на выходе фотодетектора l фотоэлектронов при условии, что на вход фотодетектора поступило точно n фотонов подчиняется биномиальному распределению

$$P(l/n) = \begin{cases} C_n^l \eta^l (1-\eta)^{n-l}, & \text{если } l \leq n \\ 0, & \text{если } l > n. \end{cases} \quad (1.118)$$

Безусловная вероятность l фотоотсчетов определяется усреднением выражения (1.118) по закону распределения фотонов $P(n)$:

$$P(l) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) P(l/n) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^l \eta^l (1-\eta)^{n-l} P(n). \quad (1.119)$$

Связь между законами распределения фотонов и фотоэлектронов значительно проще выражается через их производящие функции. Пусть $F(z)$ — производящая функция распределения фотоотсчетов $P(l)$, а $\phi(z)$ — производящая функция распределения фотонов $P(n)$. Тогда с учетом (1.119) получим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) [1 + \eta(z-1)]^n. \quad (1.120)$$

Отсюда видно, что

$$F(z) = \varphi [1 - \eta(1 - z)]. \quad (1.121)$$

Производящая функция распределения фотонов $P(n)$ (1.110) получена ранее и определяется выражением (1.109), которое можно преобразовать к более удобному виду

$$\varphi(z) = \left[\frac{1}{1 + n_{\text{ш}}(1 - z)} \right]^m \exp \left\{ - \frac{n_c(1 - z)}{1 + n_{\text{ш}}(1 - z)} \right\}. \quad (1.122)$$

Подставляя уравнение (1.122) в уравнение (1.121), получим для производящей функции распределения фотоотсчетов следующее выражение:

$$F(z) = \left[\frac{1}{1 + \eta n_{\text{ш}}(1 - z)} \right]^m \exp \left\{ - \frac{\eta n_c(1 - z)}{1 + \eta n_{\text{ш}}(1 - z)} \right\}. \quad (1.123)$$

Сравнивая выражение (1.123) с выражением (1.122), заключаем, что распределение фотоотсчетов имеет такой же вид, что и распределение фотонов (1.110) с заменой $n_c \rightarrow \eta n_c$, $n_{\text{ш}} \rightarrow \eta n_{\text{ш}}$. Таким образом,

$$P(l) = \left(\frac{1}{\eta n_{\text{ш}} + 1} \right)^m \exp \left(- \frac{\eta n_c}{\eta n_{\text{ш}} + 1} \right) \left(\frac{\eta n_{\text{ш}}}{\eta n_{\text{ш}} + 1} \right)^l L_l^{m-1} \left[\frac{-\eta n_c}{\eta n_{\text{ш}}(\eta n_{\text{ш}} + 1)} \right], \quad (1.124)$$

Фактически доказано утверждение, что статистика (1.110) устойчива к биномиальному преобразованию (1.119). Естественно, что поскольку одномодовое поле является частным случаем многомодового, то полученное доказательство справедливо и для одномодового поля. Больше того, поскольку распределение Бозе — Эйнштейна отрицательно, биномиальное распределение и распределение Пуассона являются частными случаями более общего распределения (1.110), то, следовательно, определена статистика фотоотсчетов, соответствующая и этим законам распределения чисел фотонов.

Выше отмечалось, что распределение чисел фотонов (1.110) можно аппроксимировать пуассоновским, если выполняется условие $n_{\text{ш}} \ll 1$ выражения (1.120). Распределение фотоотсчетов [см. выражение (1.124)] можно аппроксимировать пуассоновским распределением, при условии $\eta n_{\text{ш}} \ll 1$, которое вследствие малости η является менее жестким, чем для чисел фотонов. Именно поэтому исследованию систем со статистикой Пуассона для фотоотсчетов посвящено много работ.

Поскольку статистика фотонов и фотоотсчетов имеет одинаковый вид, то в дальнейшем будем пользоваться статистикой фотонов. Переход к фотоотсчетам можно осуществить на любом этапе расчета.

**ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СВЯЗИ
С РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ МОДУЛЯЦИИ**

**2.1. ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
СВЯЗИ С НЕКОГЕРЕНТНЫМ НОСИТЕЛЕМ
ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ**

С точки зрения классической статистической радиотехники определение структуры приемника на основе известных статистических характеристик наблюдаемых и некоторых дополнительных априорных данных представляет собой предмет синтеза оптимальных приемников. Под оптимальностью понимается способность системы удовлетворять заданному критерию качества. Чаще всего в качестве критерия оптимальности используют критерий минимума среднего байесова риска, который в цифровых системах связи сводится к критерию минимума средней вероятности ошибки различения символов. Самое минимальное значение средней вероятности ошибки характеризует помехоустойчивость цифровой системы связи.

Ввиду того, что в настоящее время все шире используются ЭЦВМ для обработки информации, ниже проводится оценка помехоустойчивости оптимальных цифровых лазерных систем связи, которые обеспечивают более рациональное совмещение с вычислительными устройствами. Необходимые для синтеза оптимальных структур статистики получены в предыдущей главе.

Пусть полезный сигнал на входе оптического приемника имеет такую же статистику, как и статистика теплового фона. Такой ситуации соответствует случай, когда в качестве носителя информации используется некогерентный источник света. Для систем связи с пассивной паузой при передаче символа «0» на вход приемного устройства поступает только внешний тепловой фон, который характеризуется шумовой температурой T_0 . При передаче символа «1» наряду с тепловым фоном присутствует полезный сигнал. Поскольку статистика полезного сигнала такая же, как и фона, то смесь полезного сигнала с фоном можно характеризовать эффективной температурой T_1 . Следовательно, соответствующие символам «1» и «0» матрицы плотности оптического поля, взаимодействующего с оптическим приемником, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1 - e^{-W_1})^m \exp \left\{ -W_1 \sum_{j=1}^m a_j^\dagger a_j \right\}; \\ \rho_0 &= (1 - e^{-W_0})^m \exp \left\{ -W_0 \sum_{j=1}^m a_j^\dagger a_j \right\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Согласно формуле (1.47), среднее число фотонов, приходящихся на одну моду поля, равно соответственно

$$n_{T_1} = \frac{1}{e^{W_1} - 1}; \quad n_{T_0} = \frac{1}{e^{W_0} - 1}.$$

Так как сигнал ρ_0 представляет собой шум, то обозначим $n_{T_0} = n_{ш}$. В сигнале ρ_1 содержится и сигнал, и шум, поэтому n_{T_1} можно представить в виде

$$n_{T_1} = n_c + n_{ш}.$$

Статистика фотонов в сигналах ρ_1 и ρ_0 определяется выражением (1.113), которое с учетом введенных обозначений можно записать как

$$\begin{aligned} P_1(n) &= \left(\frac{1}{n_c + n_{ш} + 1} \right)^m \left(\frac{n_c + n_{ш}}{n_c + n_{ш} + 1} \right)^n \binom{n + m - 1}{n}; \\ P_0(n) &= \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^m \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^n \binom{n + m - 1}{n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для оценки помехоустойчивости такой системы связи при некогерентном методе приема необходимо определить пороговое значение числа фотонов, выше которого принимается решение в пользу гипотезы H_1 (передан символ «1»). В том случае, когда в качестве критерия оптимальности используется критерий минимума средней вероятности ошибки, порог $n_{ш}$ определяется из уравнения [1]

$$p_1 P_1(n) = p_0 P_0(n), \quad (2.3)$$

где p_1 и p_0 — априорные вероятности передачи символов «1» и «0» соответственно.

Подставляя формулы (2.2) в выражение (2.3) и логарифмируя полученное выражение, получим следующее значение для $n_{ш}$:

$$n_{ш} = \left\{ \ln \left[p_0/p_1 \left(\frac{n_c + n_{ш} + 1}{n_{ш} + 1} \right)^m \right] / \ln \left[\frac{(n_{ш} + 1)(n_c + n_{ш})}{n_{ш}(n_c + n_{ш} + 1)} \right] \right\}, \quad (2.4)$$

где знак $\{ \cdot \}$ означает, что необходимо взять наибольшее целое число в вычисленном выражении.

Средняя вероятность ошибки, следовательно, равна

$$\begin{aligned} P_{ош} &= p_1 \sum_{n=0}^{n_{ш}-1} \left(\frac{1}{n_c + n_{ш} + 1} \right)^m \left(\frac{n_c + n_{ш}}{n_c + n_{ш} + 1} \right)^n \binom{n + m - 1}{n} + \\ &+ p_0 \sum_{n=n_{ш}}^{\infty} \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^m \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^n \binom{n + m - 1}{n}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) упрощается, если с оптическим приемником взаимодействует одна мода и априорные вероятности передач

символов равны ($p_0 = p_1 = 1/2$). В этом случае для вероятности ошибки получим следующее выражение:

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^{n_{\text{п}}} - \left(\frac{n_{\text{ш}} + n_{\text{с}}}{n_{\text{ш}} + n_{\text{с}} + 1} \right)^{n_{\text{п}}} \right], \quad (2.6)$$

а порог $n_{\text{п}}$ определяется выражением

$$n_{\text{п}} = \left\{ \ln \left(\frac{n_{\text{с}} + n_{\text{ш}} + 1}{n_{\text{ш}} + 1} \right) / \ln \left[\frac{(n_{\text{ш}} + 1)(n_{\text{с}} + n_{\text{ш}} + 1)}{n_{\text{ш}}(n_{\text{с}} + n_{\text{ш}} + 1)} \right] \right\}. \quad (2.7)$$

Когерентному методу приема соответствует измерение наблюдаемой x (1.116), которая согласно уравнению (1.117) распределена в сигналах ρ_1 и ρ_0 по нормальному закону с нулевым средним, но с различными дисперсиями:

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{x_0}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{x_0}^2}};$$

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{x_1}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{x_1}^2}}, \quad (2.8)$$

где $\sigma_{x_1}^2 = \frac{m [2(n_{\text{с}} + n_{\text{ш}}) + 1]}{4};$

$$\sigma_{x_0}^2 = \frac{m(2n_{\text{ш}} + 1)}{4}.$$

При равных априорных вероятностях передачи символов «1» и «0» порог находят приравниванием отношения правдоподобия (2.3) единице. Решения уравнения имеют вид

$$x_{\text{п}1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2n_{\text{с}}} (2n_{\text{ш}} + 1) [2(n_{\text{с}} + n_{\text{ш}}) + 1] \ln \left[\frac{2(n_{\text{с}} + n_{\text{ш}}) + 1}{2n_{\text{ш}} + 1} \right]}. \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) показывает, что равенство вероятностей $P_1(x)$ и $P_0(x)$ достигается в двух точках, симметричных относительно начала координат. Следовательно, область значений x , соответствующая принятию гипотезы H_0 (передан символ «0»), ограничена слева значением $-x_{\text{п}}$, а справа — значением $x_{\text{п}}$. Средняя вероятность ошибки при когерентном методе приема равна

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} + \Phi \left(\sqrt{\frac{m}{n_{\text{с}}} [2(n_{\text{с}} + n_{\text{ш}}) + 1] \ln \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_{x_0}}} \right) -$$

$$- \Phi \left(\sqrt{\frac{m}{n_{\text{с}}} (2n_{\text{ш}} + 1) \ln \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_{x_0}}} \right), \quad (2.10)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt$ — табличный интеграл.

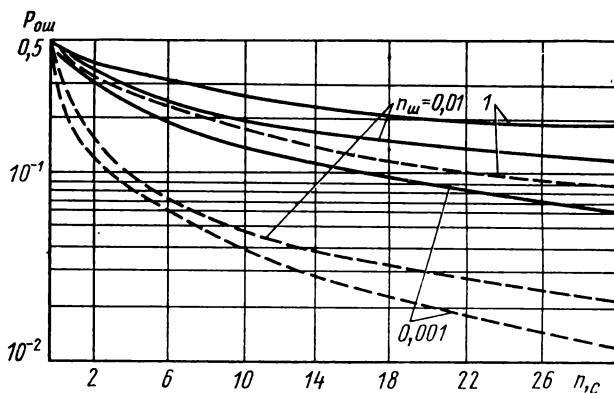


Рис. 2.1. Зависимость средней вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов в системе связи с некогерентным носителем цифровой информации: — когерентный прием; - - - - некогерентный прием

На рис. 2.1 представлены графики зависимости вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов и различных значений среднего числа шумовых фотонов в случае, когда с оптическим приемником взаимодействует одна мода поля. Анализ приведенных графиков показывает, что для исследуемой системы связи некогерентный метод приема эффективнее когерентного. Однако для достижения малой вероятности ошибки требуется мощный сигнал. Ниже исследуются системы связи, в которых в качестве носителя информации используются когерентные источники света.

2.2. ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ БИНАРНЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ С АМПЛИТУДНОЙ И ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Функциональные схемы приемников, реализующих когерентный и некогерентный прием амплитудно-модулированных сигналов, представлены на рис. 2.2, а и б соответственно.

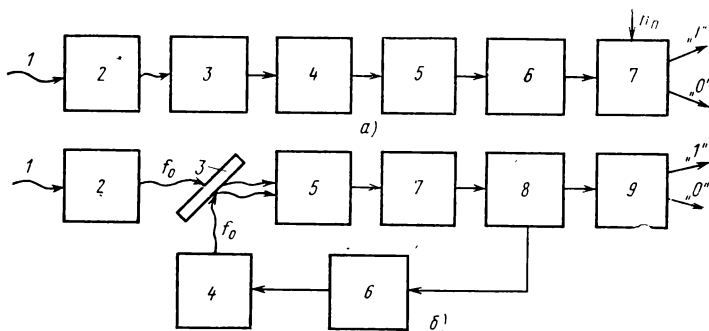


Рис. 2.2. Структурные схемы приемника амплитудно-модулированных цифровых сигналов: а — некогерентного: 1 — входной сигнал; 2 — оптический фильтр; 3 — оптический детектор; 4 — селектор темновых импульсов; 5 — генератор стандартных импульсов; 6 — счетчик фотоэлектронов; 7 — решающее устройство; б — когерентного: 1 — входной сигнал; 2 — оптический фильтр; 3 — полупрозрачное зеркало; 4 — местный гомодин; 5 — оптический детектор; 6 — устройство управления фазой местного гомодина; 7 — усилитель; 8 — нагрузка оптического приемника; 9 — схема принятия решения

Для системы связи с пассивной паузой (при передаче в активной паузе когерентного сигнала) соответствующие символам «1» и «0» матрицы плотности записываются в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1 - e^{-W}) \exp \left\{ -W \sum_{j=1}^m (a_j^\dagger - \alpha_j^*) (a_j - \alpha_j) \right\}; \\ \rho_0 &= (1 - e^{-W}) \exp \left\{ -W \sum_{j=1}^m a_j^\dagger a_j \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В этих состояниях распределения фотонов имеют вид выражений (1.110) и 1.113) соответственно. При равных априорных вероятностях передачи символов «1» и «0» для вероятности ошибки при некогерентном приеме получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{n_{\text{п}}-1} \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}}+1} \right)^n \left(\frac{1}{n_{\text{ш}}+1} \right)^m L_n^{m-1}(0) + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=0}^{n_{\text{п}}-1} \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}}+1} \right)^n \left(\frac{1}{n_{\text{ш}}-1} \right)^m \exp \left(-\frac{n_c}{n_{\text{ш}}+1} \right) L_n^{m-1} \left[-\frac{n_c}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}}+1)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где порог $n_{\text{п}}$ определяется как наименьшее из всех k , для которых выполняется неравенство

$$L_k^{m-1} \left[-\frac{n_c}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}}+1)} \right] \geq \exp \left(-\frac{n_c}{n_{\text{ш}}+1} \right) L_k^{m-1}(0). \quad (2.13)$$

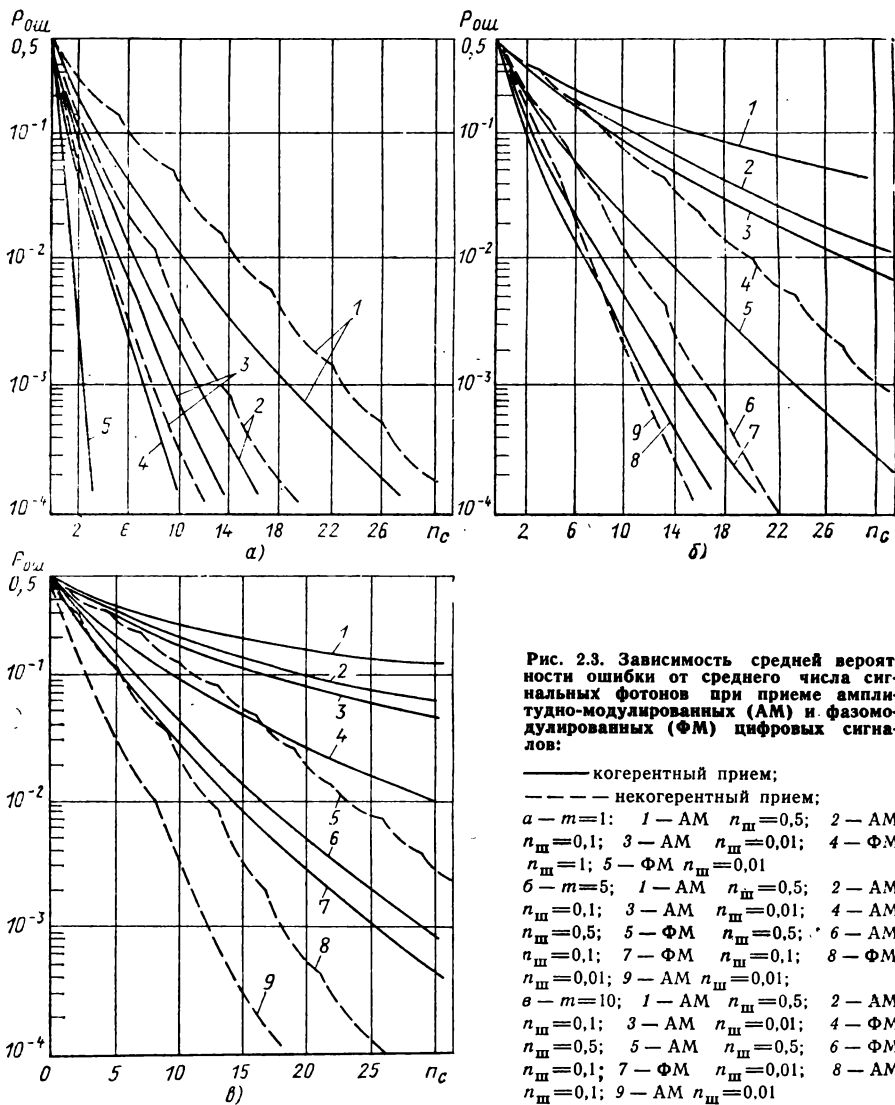
Зависимость (2.12) не может быть представлена замкнутым аналитическим выражением, а распределения (1.110) и (1.113) непротабулированы и их табулирование усложняется тем, что они зависят от многих параметров.

Поэтому, используя рекуррентное соотношение (1.115), составлена программа на ЭВМ для вычисления вероятности ошибки по формуле (2.12). Результаты расчета представлены графически на рис. 2.3 а, б, в.

Для оценки помехоустойчивости системы связи при когерентном методе приема необходимо знать распределение «амплитуды» x в сигналах (2.11). Согласно уравнению (1.117) эти распределения имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x - |a|)^2}{2\sigma_1^2} \right\}; \\ P_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_0^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{где } \sigma_1^2 = \sigma_0^2 = \frac{m(2n_{\text{ш}}+1)}{4}.$$



При этом по-прежнему предполагается, что когерентный сигнал содержится только в одной моде поля, т. е.

$$a_j = \begin{cases} a, & \text{при } j = k; \\ 0, & \text{при } j \neq k. \end{cases} \quad (2.15)$$

Учитывая, что $|\alpha|^2 = n_c$, нетрудно показать, что вероятность ошибки при когерентном приеме равна

$$P_{ош} = \Phi \left(\sqrt{\frac{n_c}{m(2n_{ш} + 1)}} \right). \quad (2.16)$$

Результаты вычислений по формуле (2.16) также представлены графически на рис. 2.3 а, б, в.

Зависимость средней вероятности ошибки от энергии сигнала и шума [см. выражение (2.16)] позволяет проследить условия перехода из квантового анализа помехоустойчивости в классический. Действительно, при выборе зависимости (2.16) нигде не оговаривается к какому диапазону длин волн она относится. Следовательно, она применима для любого диапазона длин волн и, в частности, для радиодиапазона. Особенностью выражения (2.16) является то, что при его получении учитывалась квантовая микроструктура поля. Согласно выражению (2.16) квантовыми эффектами можно пренебречь, если выполняется условие $n_{\text{ш}} \gg 1/2$. В этом случае вероятность ошибки зависит только от отношения сигнал/шум и вместо зависимости (2.16) получается выражение, известное в классической теории связи. Но согласно (1.47) (см. рис. 1.1) условие $n_{\text{ш}} \gg 1/2$ для реальных шумовых температур выполняется для длинноволнового диапазона и не выполняется для оптического диапазона длин волн. Поэтому пренебрежение квантовыми эффектами в оптическом диапазоне длин волн приведет к погрешностям в оценке качества работы ОЛС, в то время как для систем радиодиапазона такое пренебрежение вполне оправдано.

Интересно отметить, что помехоустойчивость при некогерентном методе приема может оказаться выше, чем при когерентном методе приема, что для систем связи радиодиапазона невозможно. Такая ситуация наступает тогда, когда в одномодовом случае среднее число «шумовых» фотонов меньше 0,01. В многомодовом случае некогерентные методы приема эффективнее когерентных при больших значениях $n_{\text{ш}}$, приходящихся на одну моду поля.

Переходя к определению помехоустойчивости фазомодулированных бинарных систем связи, заметим, что если через α обозначить комплексную амплитуду когерентного сигнала при передаче символа «1», а через β — комплексную амплитуду когерентного сигнала при передаче символа «0», то при фазовой манипуляции на 180° они связаны соотношением $\beta = -\alpha$. Поэтому соответствующие символам «1» и «0» матрицы плотности запишутся в виде

$$\rho_1 = (1 - e^{-W})^m \exp \left\{ -W \sum_{j=1}^m (a_j^\dagger - \alpha_j^*) (a_j - \alpha_j) \right\}; \quad (2.17)$$

$$\rho_0 = (1 - e^{-W})^m \exp \left\{ -W \sum_{j=1}^m (a_j^\dagger + \alpha_j^*) (a_j + \alpha_j) \right\}.$$

По-прежнему будем предполагать, что условие (2.17) выполняется.

Так как распределение фотонов [см. выражение (1.110)] не зависит от фазы когерентного сигнала α , то при некогерентном методе приема средняя вероятность ошибки различения сигналов (2.17)

равна $1/2$, т. е. энергетический (фотонный) приемник не может быть использован для различения фазомодулированных сигналов.

«Амплитуда» x в сигналах распределена по нормальному закону с одинаковыми дисперсиями, но их математические ожидания противоположны по знаку:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-|\alpha|)^2}{2\sigma_1^2}\right\}; \\ P_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(x+|\alpha|)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\sigma_1^2 = \sigma_0^2 = \frac{m(2n_{ш} + 1)}{4}$.

Нетрудно получить, что средняя вероятность ошибки при равных априорных вероятностях передачи символов «1» и «0» при когерентном приеме фазомодулированных сигналов равна

$$P_{ош} = \Phi\left(\sqrt{\frac{4n_c}{m(2n_{ш} + 1)}}\right). \quad (2.19)$$

Относительно формулы (2.19) можно также заметить, что она переходит в классическое выражение при выполнении условия $n_{ш} \gg 1/2$. Результаты расчета вероятности ошибки по формуле (2.19) представлены графически на рис. 2.3, *а, б, в*.

При когерентном методе приема весьма эффективной является фазовая модуляция сигнала, которая дает энергетический выигрыш 8 дБ по сравнению с амплитудной модуляцией.

2.3. ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ БИНАРНЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ С ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ И ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

При поляризационной (частотной) модуляции возбуждаются моды с различной поляризацией (частотой). Пусть при передаче символа «1» возбуждаются моды, операторы уничтожения которых обозначим через a_j , а символу «0» соответствуют возбужденные моды, операторы уничтожения которых обозначим через b_j .

Селектирующие свойства частотного и поляризационного приемников в отношении мод таковы, что на приемной стороне обе группы мод поля могут наблюдаться независимо. При практической реализации таких приемников в первом случае используются фильтры с неперекрывающимися полосами пропускания, во втором — призма Волластона, пространственно расщепляющая лучи с различными поляризациями [35]. На рис. 2.4, *а* и *б* представлены структурные схемы некогерентного и когерентного приемников поляризационно-модулированных сигналов.

На приемной стороне при передаче символа «1» совокупность мод a_j содержит смесь когерентного сигнала с тепловым шумом,

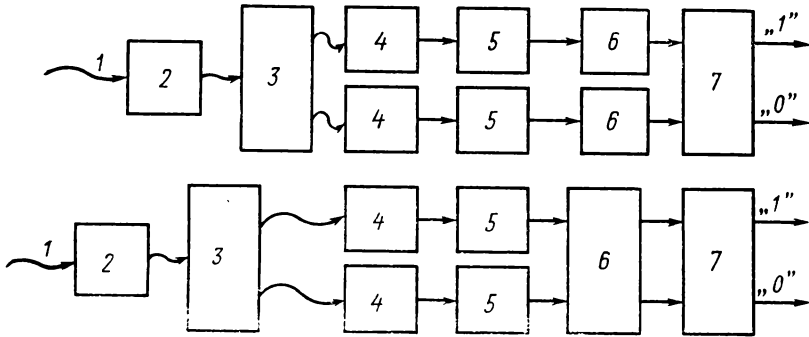


Рис. 2.4. Структурные схемы приемника цифровых сигналов, модулированных по поляризации:

a — некогерентного: 1 — входной сигнал; 2 — оптический фильтр; 3 — пространственный делитель; 4 — оптический детектор; 5 — формирователь импульсов; 6 — счетчик фотонов; 7 — решающее устройство;
b — когерентного: 1 — входной сигнал; 2 — оптический фильтр; 3 — пространственный делитель; 4 — гомодинный приемник; 5 — усилитель; 6 — вычитающее устройство; 7 — решающее устройство

а совокупность мод b_j — только тепловой шум; при передаче символа «0» — обратная ситуация. Матрицы плотности сигналов ρ_1 и ρ_0 можно записать в виде

$$\rho_1 = (1 - e^{-W})^{2m} \exp \left\{ -W \left[\sum_{j=1}^m (a_j^+ - \alpha_j^*) (a_j - \alpha_j) + b_j^+ b_j \right] \right\}; \quad (2.20)$$

$$\rho_0 = (1 - e^{-W})^{2m} \exp \left\{ -W \left[\sum_{j=1}^m a_j^+ a_j + (b_j^+ - \alpha_j) (b_j - \alpha_j) \right] \right\}.$$

Обозначим суммарное число фотонов совокупности мод a_j через k , а совокупность мод b_j — через n . Тогда, согласно выражениям (1.110) и (1.113) совместное распределение фотонов в сигналах ρ_1 и ρ_0 имеет вид

$$\begin{aligned} P_1(k, n) &= \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^{2m} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^{k+n} \exp \left(- \frac{n_c}{n_{ш} + 1} \right) \times \\ &\quad \times L_k^{m-1} \left[\frac{-n_c}{n_{ш}(n_{ш} + 1)} \right] L_n^{m-1}(0); \\ P_0(k, n) &= \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^{2m} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^{k+n} \exp \left(- \frac{n_c}{n_{ш} + 1} \right) \times \\ &\quad \times L_k^{m-1}(0) L_n^{m-1} \left[\frac{-n_c}{n_{ш}(n_{ш} + 1)} \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

При равных априорных вероятностях передачи символов порог ищется приравниванием отношения правдоподобия единице. При этом двухмерное пространство (k, n) разбивается на две непересекающиеся области уравнением $k=n$. Для тех значений k и n , для

которых выполняется условие $k-n < 0$, принимается решение в пользу гипотезы H_0 . По общему правилу средняя вероятность ошибки определяется в виде

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{k,n \\ (k-n > 0)}} P_0(k, n) + \sum_{\substack{k,n \\ (k-n < 0)}} P_1(k, n) \right] = \frac{1}{2} (q + p), \quad (2.22)$$

$$\text{где } q = \sum_{\substack{k,n \\ (k-n > 0)}} P_0(k, n), \quad p = \sum_{\substack{k,n \\ (k-n < 0)}} P_1(k, n). \quad (2.23)$$

Подставляя в уравнение (2.22) $P_0(k, n)$ из выражения (2.21), получим

$$q = \sum_{\substack{k,n \\ (k-n > 0)}} \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^{2m} \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^{k+n} \exp \left(- \frac{n_c}{n_{\text{ш}} + 1} \right) \times \\ \times L_n^{m-1} \left[\frac{-n_c}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)} \right] L_k^{m-1}(0).$$

Если n пробегает все значения от 0 до ∞ , то для того, чтобы выполнялось условие $k-n > 0$, индекс k должен пробегать все значения от $k=n+1$ до ∞ . Следовательно,

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^{2m} \exp \left(- \frac{n_c}{n_{\text{ш}} + 1} \right) L_n^{m-1} \left[- \frac{n_c}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)} \right] \times \\ \times \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^{k+n} L_k^{m-1}(0) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^{2m} \times \\ \times \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^n \exp \left(- \frac{n_c}{n_{\text{ш}} + 1} \right) L_n^{m-1} \left[\frac{-n_c}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)} \right] \times \\ \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^k L_k^{m-1}(0). \quad (2.24)$$

Последнее выражение в общем случае нельзя получить в замкнутой форме. Однако для частного случая ($m=1$) суммирование можно провести до конца. В этом случае

$$q = \frac{n_{\text{ш}}}{(n_{\text{ш}} + 1)^2} \exp \left(- \frac{n_c}{n_{\text{ш}} + 1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^n \times \\ \times L_n \left[\frac{-n_c}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^k = \frac{n_{\text{ш}}}{2n_{\text{ш}} + 1} \exp \left(- \frac{n_c}{2n_{\text{ш}} + 1} \right). \quad (2.25)$$

При получении выражения (2.25) использовались формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и свойство (1.99).

Для вычисления p подставим формулы (2.21) в выражение (2.23). В результате получим

$$p = \sum_{\substack{k, n \\ (k-n > 0)}} \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^{2m} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^{k+n} \exp \left(- \frac{n_c}{n_{ш} + 1} \right) \times \\ \times L_k^{m-1} \left[\frac{-n_c}{n_{ш}(n_{ш} + 1)} \right] L_n^{m-1}(0).$$

Продельвая аналогичные вычисления, что и для q , можно получить

$$p = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_{ш} + 1} \right)^{2m} \exp \left(- \frac{n_c}{n_{ш} + 1} \right) \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^k \times \\ \times L_k^{m-1} \left[- \frac{n_c}{n_{ш}(n_{ш} + 1)} \right] \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{n_{ш}}{n_{ш} + 1} \right)^n L_n^{m-1}(0). \quad (2.26)$$

При $m=1$ выражение для p упрощается:

$$p = \frac{n_{ш} + 1}{2n_{ш} + 1} \exp \left(- \frac{n_c}{2n_{ш} + 1} \right). \quad (2.27)$$

Подставляя формулы (2.25) и (2.27) в выражение для $P_{ош}$, получим формулу для средней вероятности ошибки, которое для одномодового поля принимает простой вид

$$P_{ош} = \frac{1}{2} \exp \left(- \frac{n_c}{2n_{ш} + 1} \right). \quad (2.28)$$

«Амплитуды» в совокупностях мод распределены в сигналах ρ_1 и ρ_0 по нормальному закону с равными средними значениями и дисперсиями. Обозначая через x_a и x_b значения «амплитуд» в модах a и b , получим следующие их совместные распределения:

$$P_1(x_a, x_b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ - \frac{(x_a - |\alpha|)^2 + x_b^2}{2\sigma^2} \right\}; \\ P_0(x_a, x_b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ - \frac{(x_b - |\alpha|)^2 + x_a^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (2.29)$$

Граница областей разбиения пространства (x_a, x_b) на две непесекающиеся области при равных априорных вероятностях передачи символов определяется уравнением $x_a = x_b$. Это можно заметить из симметрии функции [см. формулу (2.29)].

Средняя вероятность ошибки определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[\int \int_{(x_a - x_b > 0)} P_0(x_a, x_b) dx_a dx_b + \int \int_{(x_a - x_b < 0)} P_1(x_a, x_b) dx_a dx_b \right]. \quad (2.30)$$

Интегралы из уравнения (2.30) легко вычислить, поскольку переменные разделяются. В результате простых вычислений получим

$$P_{\text{ош}} = \Phi \left(\sqrt{\frac{2n_c}{m(2n_{\text{ш}} + 1)}} \right). \quad (2.31)$$

При $n_{\text{ш}} \gg 1/2$ выражение (2.31) совпадает с соответствующим классическим при когерентном методе приема. Интересно отметить, что при измерении числа частиц средняя вероятность ошибки [см. формулу (2.28)] имеет такой же вид, что и при некогерентном приеме ортогональных сигналов. На рис. 2.5 представлены графики, рассчитанные по формулам (2.28) и (2.31) при одномодовом режиме приема, которые показывают, что помехоустойчивость систем связи, использующих ортогональные сигналы, при когерентном и некогерентном методе приема отличаются незначительно.

Таким образом, получены аналитические выражения для оценки помехоустойчивости бинарных квантовых систем связи. Анализ полученных формул показывает,

что при $n_{\text{ш}} \gg 1/2$ вероятности ошибок совпадают с соответствующими классическими характеристиками. Но это условие как раз и выполняется для длин волн радиодиапазона и не выполняется в оптическом диапазоне, поэтому анализ помехоустойчивости лазерных систем связи при помощи выражений, полученных для радиодиапазона, приводит к погрешностям и возникает необходимость учитывать микроструктуру поля.

Другой существенной особенностью оптического диапазона является тот факт, что с оптическим приемником взаимодействует много мод, число которых определяется выражением (1.15). Зависимость числа мод от длины волны порядка λ^{-2} . Поэтому с уменьшением

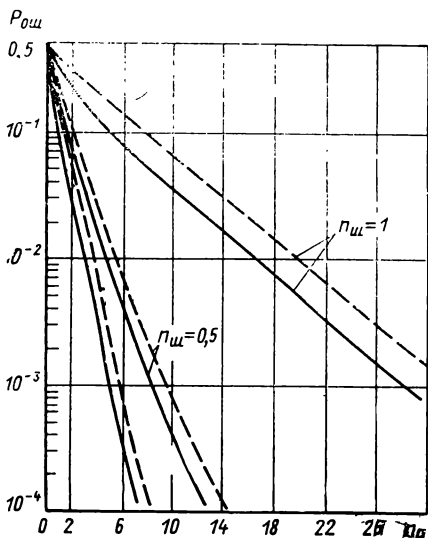


Рис. 2.5. Зависимость средней вероятности ошибки от среднего значения сигнальных фотонов при приеме цифровых сигналов, модулированных по поляризации при одномодовом режиме:

— когерентный прием; --- некогерентный прием

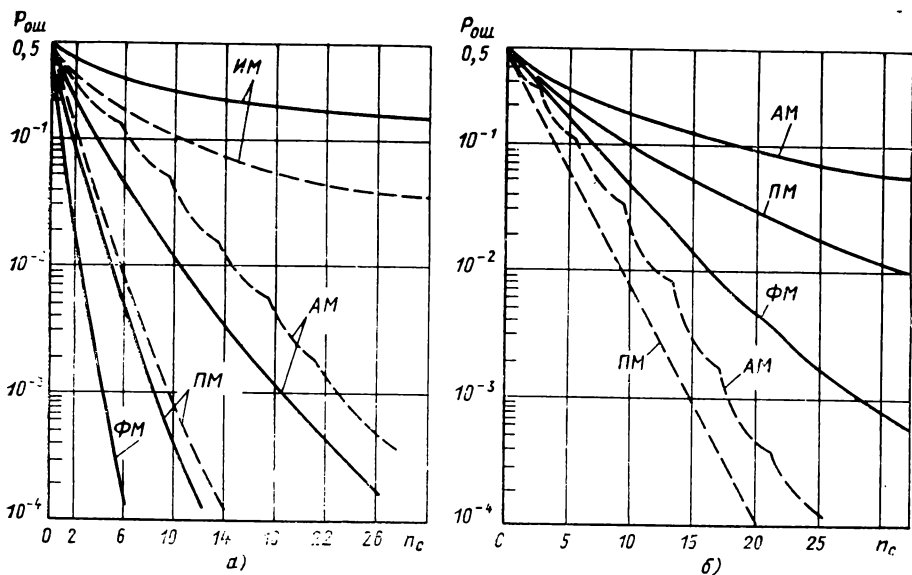


Рис. 2.6. Зависимость средней вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов при приеме цифровых сигналов модулированных по интенсивности некогерентным источником (ИМ), амплитудно-модулированные (АМ), Фазомодулированные (ФМ) и модулированных по поляризации (ПМ) сигналов:

— когерентный прием; - - - - некогерентный прием

а — одномодовый режим; $m=1$; $n_{ш}=0,5$;

б — многомодовый режим $m=1$; $n_{ш}=0,1$.

длины волны реализовать одномодовый прием значительно труднее. Сравнительно просто одномодовый режим работы оптического приемного устройства может быть реализован при $\lambda=10,6$ мкм и выше (для систем связи радиодиапазона это основной режим). На рис. 2.6, а представлены графики зависимости средней вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов при различных видах модуляции и методах приема, соответствующие одномодовому режиму работы. Из этих графиков видно, что наименьшей помехоустойчивостью обладают системы связи, использующие в качестве носителя информации некогерентные источники. Лучшей помехоустойчивостью в этом режиме обладают системы связи с фазовой и частотной (поляризационной) модуляцией при когерентном методе приема сигналов. Следовательно, в системах связи, в которых в качестве генератора применяется лазер на CO_2 ($\lambda=10,6$ мкм), целесообразно использовать сигналы с фазовой либо частотной модуляцией с последующим их когерентным приемом.

При переходе к видимому диапазону число мод, взаимодействующих с оптическим приемником, растет и становится значительным. В этих условиях меняется соотношение между видами модуляции и методами приема по их помехоустойчивости. Основные закономерности этих изменений можно видеть из рис. 2.6, б, на котором представлены зависимости средней вероятности ошибки от

числа сигнальных фотонов при $m=10$. Так, в многомодовом случае эффективность когерентных методов приема резко падает; при реальных для оптического диапазона значениях $n_{ш}$ некогерентный метод приема имеет лучшую помехоустойчивость. Поэтому в видимом диапазоне целесообразно использовать сигналы с поляризационной (частотной) либо амплитудной модуляцией с последующим их некогерентным приемом.

Общая закономерность, которая выявляется при квантовом описании электромагнитного поля такова, что для обнаружения когерентного сигнала при низком уровне шума корпускулярные свойства поля содержат больше информации, чем его волновые свойства. С увеличением теплового шума ситуация меняется, и когерентные методы приема становятся эффективнее некогерентных.

В свою очередь, уровень теплового шума зависит от соотношения между длиной волны и шумовой температурой (см. рис. 1.1) и при постоянной температуре растет с увеличением длины волны. Этим объясняется тот факт, что в радиодиапазоне наибольшее распространение получили когерентные методы приема. В этом случае иерархия систем связи по помехоустойчивости в зависимости от вида модуляции при учете квантовых характеристик сигналов не меняется: наибольшей помехоустойчивостью обладают системы связи с фазовой модуляцией; затем следуют системы связи с поляризационной (частотной) модуляцией; далее системы связи с амплитудной модуляцией и наименее эффективны системы связи с некогерентными носителями информации.

2.4. КВАНТОВЫЙ СИНТЕЗ БИНАРНЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА

В предыдущих разделах этой главы был проведен классический синтез оптимальных приемников оптического диапазона, особенностью которого является предположение, что тип измерителя и статистические характеристики его выхода известны априори. Тот факт, что при этом учитывалась микроструктура поля, позволил только обобщить известные из классического синтеза выражения для помехоустойчивости бинарных систем связи. Сам же метод синтеза оставался классическим. При этом можно заметить, что для одних и тех же состояний поля качество работы системы (ее помехоустойчивость) зависит от того, какую характеристику поля измеряют. Поэтому встает вопрос об определении такой характеристики поля, измерение которой давало бы наилучшие характеристики качества системы связи. Эта задача не может быть решена методами классического синтеза, и она решается в рамках квантового синтеза, отличительной особенностью которого является описание состояния поля на входе приемного устройства при помощи матрицы плотности, содержащей информацию о статистике всех наблюдаемых, характеризующих поле. Таким образом, задача квантового синтеза сводится к отысканию оптимальной наблюдаемой, измерение которой должен реализовать квантовый приемник, и оптимизации алгоритма работы приемника, измеряющего оптимальную наблюдаемую. Доказательство этого утверждения и решение этой задачи содержится в работе [80], в которой оператор проектирования обладает как свойствами оптимальной наблюдаемой, так и содержит в себе оптимальный алгоритм работы квантового обнаружителя. Поскольку не всегда удается дать рекомендации по практической реализации оптимальных квантовых обнаружителей, но можно определить характеристики качества оптимальной в квантовом смысле системы

связи, то положительное содержание квантового синтеза можно трактовать как определение потенциально возможных характеристик качества систем связи.

В данном разделе приводится решение задачи квантового синтеза бинарных систем связи в явном виде и для средней вероятности ошибки находится выражение в форме, позволившей найти нижнюю границу для средней вероятности ошибки оптимального квантового обнаружителя.

Принимая в качестве критерия оптимальности решения в двухальтернативной задаче обнаружения минимум средней вероятности ошибки, оптимизация алгоритма работы приемника сводится к разбиению спектра возможных значений наблюдаемой на две непересекающиеся области A_0 и A_1 . Если измеренное значение наблюдаемой принадлежит области A_1 , то принимается решение, что был передан символ «1», в противном случае — принимается решение, что был передан символ «0».

Пусть оператор X соответствует наблюдаемой, спектр собственных значений и собственных функций которого обозначим соответственно через x_n и $|x_n\rangle$, а символам «1» и «0» соответствуют состояния поля на входе приемного устройства, описываемые матрицами плотности ρ_1 и ρ_0 . Тогда средняя вероятность ошибки такой системы связи определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = p_1 \sum_{x_n \in A_0} \langle x_n | \rho_1 | x_n \rangle + p_0 \sum_{x_n \in A_1} \langle x_n | \rho_0 | x_n \rangle. \quad (2.32)$$

В этом выражении p_1 и p_0 есть априорные вероятности передачи символов «1» и «0» соответственно ($p_0 + p_1 = 1$), а $\langle x_n | \rho_1 | x_n \rangle = P_1(x_n)$ и $\langle x_n | \rho_0 | x_n \rangle = P_0(x_n)$ — распределение вероятностей собственных значений наблюдаемой в сигналах, характеризуемых матрицами плотности ρ_1 и ρ_0 .

Учитывая, что

$$\sum_{x_n \in A_0} \langle x_n | \rho_1 | x_n \rangle = 1 - \sum_{x_n \in A_1} \langle x_n | \rho_1 | x_n \rangle$$

и

$$\sum_{x_n \in A_1} \langle x_n | \rho_0 | x_n \rangle = 1 - \sum_{x_n \in A_0} \langle x_n | \rho_0 | x_n \rangle$$

выражение (2.32) можно переписать в двух эквивалентных формах

$$P_{\text{ош}} = p_1 - \sum_{x_n \in A_1} \langle x_n | (p_1 \rho_1 - p_0 \rho_0) | x_n \rangle, \quad (2.33)$$

$$P_{\text{ош}} = p_0 - \sum_{x_n \in A_0} \langle x_n | (p_0 \rho_0 - p_1 \rho_1) | x_n \rangle. \quad (2.34)$$

Первая минимизация $P_{\text{ош}}$ достигается таким разбиением спектра $\{x_n\}$ на две непересекающиеся области A_1 и A_0 , при котором под знаком сумм в уравнениях (2.33) и (2.34) содержатся неотрицательные члены. В этом случае очевидно, что суммы приобретают максимальное значение, а вероятность ошибки, следовательно, будет минимальной. Предполагая такое разбиение выполненным и складывая выражения (2.33) и (2.34), получим следующее выражение для средней вероятности ошибки после первой минимизации:

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{x_n \in A} |\langle x_n | (p_1 \rho_1 - p_0 \rho_0) | x_n \rangle| \right], \quad (2.35)$$

где через $|\cdot|$ обозначим модуль выражения $\langle x_n | (p_1 \rho_1 - p_0 \rho_0) | x_n \rangle$, а A есть область, включающая весь спектр возможных значений наблюдаемых.

Поскольку операторы ρ_1 и ρ_0 эрмитовы и с конечным следом, то таковым является и оператор $(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)$, поэтому последний оператор может быть записан в канонической форме

$$\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0 = \sum_k \eta_k |\eta_k\rangle \langle \eta_k|, \quad (2.36)$$

где η_k и $|\eta_k\rangle$ соответственно собственные значения и собственные функции оператора $(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)$. Используя уравнение (2.36), раскроем второй член выражения (2.35)

$$\sum_{x_n \in A} |\langle x_n | (\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0) x_n \rangle| = \sum_{x_n \in A} \left| \sum_k \eta_k \langle x_n | \eta_k \rangle \langle \eta_k | x_n \rangle \right|.$$

Так как модуль суммы алгебраического выражения меньше или равен сумме модулей его членов, то для последнего выражения выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{x_n \in A} \left| \sum_k \eta_k \langle x_n | \eta_k \rangle \langle \eta_k | x_n \rangle \right| &\leq \sum_{x_n \in A} \sum_k \left| \eta_k | \langle x_n | \eta_k \rangle \langle \eta_k | x_n \rangle | = \right. \\ &= \sum_{x_n \in A} \langle x_n | \left(\sum_k |\eta_k| |\eta_k\rangle \langle \eta_k| \right) | x_n \rangle. \end{aligned}$$

Здесь знак равенства имеет место только тогда, когда выполняется условие

$$\langle x_n | \eta_k \rangle = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = n; \\ 0, & \text{при } k \neq n. \end{cases} \quad (2.37)$$

Условием (2.37) осуществляется вторая минимизация $P_{\text{ош}}$. Это условие означает, что минимум средней вероятности ошибки достигается только при измерении наблюдаемой, оператор которой коммутирует с оператором $(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)$. В этом случае можно записать

$$\sum_{x_n \in A} \langle x_n | \left(\sum_k |\eta_k| |\eta_k\rangle \langle \eta_k| \right) | x_n \rangle = \sum_n |\eta_n| = \|(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)\|_1, \quad (2.38)$$

где через $\|\cdot\|_1$ обозначена следовая норма оператора $(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)$ [35].

Таким образом, при измерении оптимальной наблюдаемой и оптимальном алгоритме работы приемника средняя вероятность ошибки принимает минимальное значение, определяемое выражением

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [1 - \|(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)\|_1]. \quad (2.39)$$

Нетрудно убедиться, что оптимальный алгоритм работы приемника, соответствующий минимуму уравнения (2.39), есть сравнение отношения правдоподобия с порогом, т. е. тот же, что и у классических оптимальных приемников. Действительно, пусть измеряется оптимальная наблюдаемая величина, оператор которой обозначим через Y . Из условия (2.37) заключаем, что оператор Y коммутирует с оператором $(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)$. Следовательно, операторы Y и $(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)$ имеют общий набор собственных функций, который по-прежнему обозначим через $|\eta_k\rangle$.

Матричный элемент $\langle \eta_k | \rho_1 | \eta_k \rangle$ определяет вероятность наблюдаемой y_k в состоянии ρ_1 . Аналогично $\langle \eta_k | \rho_0 | \eta_k \rangle$ есть вероятность значения наблюдаемой y_k в состоянии ρ_0 . Поскольку оператор $(\rho_1\rho_1 - \rho_0\rho_0)$ эрмитов, то его следовая

норма есть сумма модулей диагональных элементов. Таким образом, вероятность ошибки [см. выражение (2.39)] равна

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sum_k \left| \langle \eta_k | (p_1 p_1 - p_0 p_0) | \eta_k \rangle \right| \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \sum_k |p_1 P_1(y_k) - p_0 P_0(y_k)| \right]. \quad (2.40)$$

Для того чтобы произвести суммирование в этом выражении, необходимо определить значения y_k , при которых величина $p_1 P_1(y_k) - p_0 P_0(y_k)$ меняет знак. В этом случае от знака модуля можно освободиться произведя суммирование по различным областям. Разбиение областей определяется условием

$$p_1 P_1(y_k) - p_0 P_0(y_k) \cong 0,$$

или
$$\frac{P_1(y_k)}{P_0(y_k)} \cong \frac{p_1}{p_0},$$

которое представляет собой сравнение отношения правдоподобия с порогом.

Рассмотренный в разд. 2.1 некогерентный прием сигналов, задаваемых матрицами плотности (2.1), является оптимальным в квантовом смысле, поскольку оператор $(p_1 p_1 - p_0 p_0)$ в этом случае коммутирует с оператором полного числа фотонов. В то же время оператор «амплитуды» с оператором $(p_1 p_1 - p_0 p_0)$ не коммутирует, поэтому он не является оптимальным. Графики (см. рис. 2.1) показывают, что действительно некогерентный прием таких сигналов эффективнее когерентного.

Чтобы определить среднюю вероятность ошибки квантового канала связи по формуле (2.39) для произвольных сигналов p_1 и p_0 , необходимо, во-первых, решить задачу на собственные значения оператора $(p_1 p_1 - p_0 p_0)$ и, во-вторых, произвести суммирование в соответствии с уравнением (2.38).

При некомутирующих операторах p_1 и p_0 уже при решении первой задачи возникают большие трудности. Однако запись выражения для средней вероятности ошибки по формуле (2.39) позволяет оценить потенциальную помехоустойчивость квантовых каналов связи, которая не может быть улучшена никаким квантовым измерением. С этой целью воспользуемся неравенством Шварца для следовых норм.

Известно [35], что всякий оператор T с конечной следовой нормой может быть представлен в виде произведения двух операторов A и B , для которых имеет место следующее соотношение:

$$\|T\|_1 = \|A \cdot B\|_1 \leq \|A\|_2 \|B\|_2, \quad (2.41)$$

где величина

$$\|A\|_2 = [\text{sp}(A^+ A)]^{1/2} \quad (2.42)$$

носит название нормы Гильберта — Шмидта.

Чтобы воспользоваться неравенством (2.41), представим оператор $p_1 p_1 - p_0 p_0$ в виде

$$p_1 p_1 - p_0 p_0 = \frac{1}{2} [(V \overline{p_1 p_1} - V \overline{p_0 p_0})(V \overline{p_1 p_1} + V \overline{p_0 p_0}) +$$

$$+ (\sqrt{p_1 p_1} + \sqrt{p_0 p_0})(\sqrt{p_1 p_1} - \sqrt{p_0 p_0})]. \quad (2.43)$$

Операторы $\sqrt{p_1}$ и $\sqrt{p_0}$ хорошо определены, поскольку исходные операторы p_1 и p_0 положительны.

Из уравнения (2.43) получим

$$\|(p_1 p_1 - p_0 p_0)\|_1 \leq \frac{1}{2} [\|(V \overline{p_1 p_1} - V \overline{p_0 p_0})(V \overline{p_1 p_1} + V \overline{p_0 p_0})\|_1 +$$

$$+ \|\sqrt{p_1 p_1} + \sqrt{p_0 p_0}\|_2 \|\sqrt{p_1 p_1} - \sqrt{p_0 p_0}\|_2].$$

Очевидно, что знак равенства в последнем выражении достигается в том случае, когда операторы ρ_1 и ρ_0 (а следовательно, и операторы $\sqrt{\rho_1}$ и $\sqrt{\rho_0}$) коммутируют.

Воспользовавшись соотношением (2.41), последнее неравенство можно усилить. В результате получим

$$\|(\rho_1 \rho_1 - \rho_0 \rho_0)\|_1 \leq \|(\sqrt{\rho_1} \rho_1 - \sqrt{\rho_0} \rho_0)\|_2 \|(\sqrt{\rho_1} \rho_1 + \sqrt{\rho_0} \rho_0)\|_2.$$

Раскрывая в этом выражении $\|\cdot\|_2$ в соответствии с условием (2.42) и учитывая, что $\text{sp } \rho_1 = \text{sp } \rho_0 = 1$, получим следующее неравенство:

$$\|(\rho_1 \rho_1 - \rho_0 \rho_0)\|_1 \leq \sqrt{1 - 4\rho_1 \rho_0 [\text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0})]^2}. \quad (2.44)$$

Подставляя неравенство (2.44) в выражение (2.34), получим, что каково бы не было измерение и каков бы не был алгоритм работы приемника вероятность ошибки не может быть меньше величины $P_{\text{ош.гр}}$ определяемой выражением

$$P_{\text{ош.гр}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4\rho_1 \rho_0 [\text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0})]^2} \right]. \quad (2.45)$$

Для некоторого частного класса матриц плотности ρ_1 и ρ_0 известно точное решение уравнения (2.39). Сравним насколько граничное значение вероятности ошибки ниже истинного значения.

Пусть матрицы плотности ρ_1 и ρ_0 описывают чистые состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_0\rangle$, т. е.

$$\rho_1 = |\psi_1\rangle \langle \psi_1|; \quad \rho_0 = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|. \quad (2.46)$$

Для таких состояний известно точное решение уравнения (2.39), которое при равных априорных вероятностях ρ_1 и ρ_0 записывается в виде [80]

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|^2} \right]. \quad (2.47)$$

Операторы ρ_1 и ρ_0 вида (2.46) являются проекционными, т. е. они обладают свойством:

$$\rho_1^2 = \rho_1; \quad \rho_0^2 = \rho_0. \quad (2.48)$$

Из условий (2.48) видно, что $\sqrt{\rho_1} = \rho_1$ и $\sqrt{\rho_0} = \rho_0$. Следовательно, для $P_{\text{ош.гр}}$ определяемой выражением (2.45), получим следующее значение:

$$P_{\text{ош.гр}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|^4} \right]. \quad (2.49)$$

Предположим, что состоянию $|\psi_0\rangle$ соответствует вакуумное состояние, т. е. состояние с нулевой средней энергией, которое обозначим через $|0\rangle$, а состоянию $|\psi_1\rangle$ соответствует чистое когерентное состояние, которое обозначим через $|\alpha\rangle$. Согласно работе [44] эти состояния могут быть записаны в виде

$$|\alpha\rangle \langle \alpha| = \lim_{(T \rightarrow 0)} [(1 - e^{-W}) \exp\{-W(a^+ - \alpha^*)(a - \alpha)\}]; \quad (2.50)$$

$$|0\rangle \langle 0| = \lim_{(T \rightarrow 0)} [(1 - e^{-W}) \exp\{-W a^+ a\}].$$

В этом случае

$$|\langle 0 | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} = e^{-n_c}$$

и, следовательно, для выражений (2.47) и (2.49) получим соответственно следующие значения:

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - e^{-n_c}} \right]; \quad (2.51a)$$

$$P_{\text{ош.гр}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - e^{-2n_c}} \right]. \quad (2.51б)$$

Видно, что оценка потенциальной помехоустойчивости $P_{\text{ош.гр}}$ отличается от истинной наличием под знаком экспоненты множителя 2 и является методической погрешностью.

Для одномодовой бинарной системы связи с амплитудной модуляцией согласно формулам (2.11) состояния поля, соответствующие символам «1» и «0», имеют вид

$$\rho_1 = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W(a^+ - \alpha^*)(a - \alpha) \}; \quad (2.52)$$

$$\rho_0 = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W a^+ a \}.$$

Матрицы плотности не коммутируют между собой, поэтому вычисление точного значения $P_{\text{ош}}$ по формуле (2.39) весьма затруднительно. Однако нижнюю границу для средней вероятности ошибки по формуле (2.45) легко вычислить.

Из выражений (2.52) для операторов $\sqrt{\rho_1}$ и $\sqrt{\rho_0}$ получаем

$$\sqrt{\rho_1} = (1 - e^{-W})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} W(a^+ - \alpha^*)(a - \alpha) \right\}; \quad (2.53)$$

$$\sqrt{\rho_0} = (1 - e^{-W})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} W a^+ a \right\}.$$

Вычислим $\text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0})$ в базисе собственных функций оператора числа частиц:

$$\text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0}) = (1 - e^{-W}) \sum_n e^{-\frac{1}{2} W n} \langle n | \exp \left\{ -\frac{1}{2} W(a^+ - \alpha^*)(a - \alpha) \right\} | n \rangle.$$

Вычисление матричного элемента $\langle n | \exp \left\{ -\frac{1}{2} W(a^+ - \alpha^*)(a - \alpha) \right\} | n \rangle$

было проведено в разд. 1.4. Воспользовавшись результатом вычисления, получим

$$\begin{aligned} \text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0}) &= \frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \exp \left\{ -\frac{n_c (\sqrt{n_{\text{ш}} + 1} - \sqrt{n_{\text{ш}}})}{\sqrt{n_{\text{ш}} + 1}} \right\} \times \\ &\times \sum_n \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^n L_n \left[-\frac{n_c (\sqrt{n_{\text{ш}} + 1} - \sqrt{n_{\text{ш}}})}{\sqrt{n_{\text{ш}}} \sqrt{n_{\text{ш}} + 1}} \right]. \end{aligned}$$

Вычислив в последнем выражении сумму с помощью производящей функции полиномов Лагерра [см. уравнение (1.99)], окончательно получим

$$\text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0}) = \exp \left\{ -n_c \frac{\sqrt{n_{\text{ш}} + 1} - \sqrt{n_{\text{ш}}}}{\sqrt{n_{\text{ш}} + 1}} (1 - n_{\text{ш}} + \sqrt{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)}) \right\}.$$

Подставляя это значение в выражение (2.45), можно написать

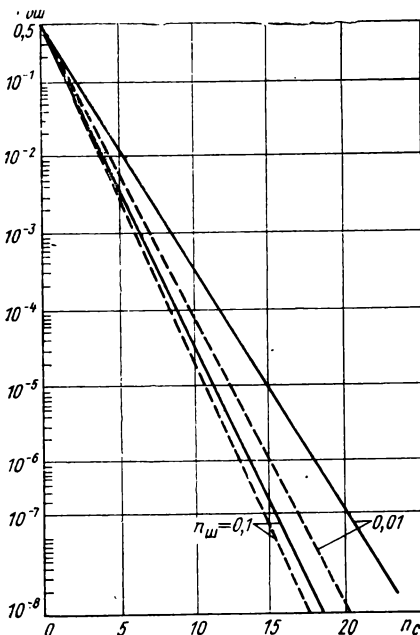
$$P_{\text{ош-гр}} = \frac{1}{2} \times \left[1 - \sqrt{1 - \exp \left\{ -2n_c \frac{\sqrt{n_{\text{ш}} + 1} - \sqrt{n_{\text{ш}}}}{\sqrt{n_{\text{ш}} + 1}} (1 - n_{\text{ш}} + \sqrt{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)}) \right\}} \right]. \quad (2.54)$$

Поскольку чистые состояния $|\alpha\rangle$ и $|0\rangle$ являются предельными для состояний (2.53) при $W \rightarrow \infty$, то и выражение (2.516) получается из уравнения (2.54) в пределе при $n_{\text{ш}} \rightarrow 0$ (что эквивалентно $W \rightarrow \infty$). Однако на примере чистых состояний $|\alpha\rangle$ и $|0\rangle$ видно, что множитель 2 под знаком экспоненты появился в результате методической погрешности и его отбрасывание приводит к точному значению потенциальной помехоустойчивости [выражение (2.516)]. В выражении (2.54) этот множитель не претерпевает изменений.

Поэтому можно ожидать, что отбрасывание множителя 2 под знаком экспоненты в формуле (2.54) дает, если не точное значение $P_{\text{ош}}$ [см. выражение (2.39)], то, во всяком случае, более близкое к нему значение. Вследствие этого положим, что

$$P_{\text{ош-гр}} = \frac{1}{2} [1 - \sqrt{1 - \exp(-n_c \beta)}], \quad (2.55)$$

$$\text{где } \beta = \frac{\sqrt{n_{\text{ш}} + 1} - \sqrt{n_{\text{ш}}}}{\sqrt{n_{\text{ш}} + 1}} (1 - n_{\text{ш}} + \sqrt{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)}). \quad (2.56)$$



На рис. 2.7 представлены графики для потенциальной помехоустойчивости, рассчитанные по формулам (2.55) и (2.56) и по точной формуле (2.39) на ЭВМ в работе [80]. Их сравнение показывает хорошее совпадение результатов. Отсюда можно сделать вывод, что для гауссовых матриц плотности вида

$$\rho = (1 - e^{-W})^m \times \exp \left\{ -W \sum_{j=1}^m (a_j^\dagger + a_j^*) (a_j + a) \right\} \quad (2.57)$$

Рис. 2.7. Зависимость средней вероятности ошибки и ее граничного значения от среднего числа сигнальных фотонов, получаемая в результате квантового синтеза приемного устройства:

— точное значение; - - - - оценка

потенциальную помехоустойчивость можно оценивать выражением

$$P_{\text{ош.гр}} \approx \frac{1}{2} [1 - \sqrt{1 - \text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0})}]. \quad (2.58)$$

В рассмотренном приближении оценим потенциальную помехоустойчивость бинарных систем связи с поляризационной (частотной) и фазовой модуляцией. В случае поляризационной модуляции согласно уравнения (2.20) при $m=1$ матрицы плотности ρ_1 и ρ_0 имеют вид

$$\rho_1 = (1 - e^{-W})^2 \exp \{ -W [(a^+ - \alpha^*) (a - \alpha) + b^+ b] \};$$

$$\rho_0 = (1 - e^{-W})^2 \exp \{ -W [a^+ a + (b^+ - \alpha^*) (b - \alpha)] \}.$$

Запишем матрицы $\sqrt{\rho_1}$ и $\sqrt{\rho_0}$:

$$\sqrt{\rho_1} = (1 - e^{-W})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} W [(a^+ - \alpha^*) (a - \alpha) + b^+ b] \right\}; \quad (2.59)$$

$$\sqrt{\rho_0} = (1 - e^{-W})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} W [a^+ a + (b^+ - \alpha^*) (b - \alpha)] \right\}.$$

Обозначая собственные значения и собственные функции операторов числа частиц мод a и b через m , $|m\rangle$ и n , $|n\rangle$ соответственно, вычислим $\text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0})$ в базисе собственных функций оператора полного числа частиц, т. е. в базисе $|m\rangle |n\rangle$.

Учитывая коммутационность операторов, принадлежащих различным модам, получим

$$\begin{aligned} \text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0}) &= (1 - e^{-W}) \sum_m e^{-\frac{1}{2} W m} \langle m | \exp \left\{ -\frac{1}{2} W (a^+ - \alpha^*) \times \right. \\ &\times (a - \alpha) \left. \right\rangle |m\rangle (1 - e^{-W}) \sum_n e^{-\frac{1}{2} W n} \langle n | \exp \left\{ -\frac{1}{2} W (b^+ - \alpha^*) (b - \alpha) \right\} |n\rangle. \end{aligned}$$

Значение каждой суммы вычислено ранее. Следовательно,

$$\text{sp}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_0}) = \exp(-2n_c \beta), \quad (2.60)$$

где β определяется по формуле (2.56).

Таким образом, потенциальную помехоустойчивость системы связи с поляризационной (частотной) модуляцией можно оценивать выражением

$$P_{\text{ош.гр}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \exp(-2n_c \beta)} \right], \quad (2.61)$$

которое отличается от потенциальной помехоустойчивости системы связи с амплитудной модуляцией наличием под знаком экспоненты множителя 2. При $n_m \rightarrow 0$ из выражения (2.61) получим

$$P_{\text{ош.гр}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \exp(-2n_c)} \right], \quad (2.62)$$

что совпадает с точным значением, вычисленным по формуле (2.47).

В соответствии с уравнениями (2.17) матрицы плотности ρ_1 и ρ_0 системы связи с фазовой модуляцией при $m=1$ записываются в виде

$$p_1 = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W (a^+ - \alpha^*) (a - a) \}; \quad (2.63)$$

$$p_0 = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W (a^+ + \alpha^*) (a + a) \}.$$

Введем операторы $c^+ = a^+ + \alpha^*$, $c = a + \alpha$.
Отсюда

$$a^+ = c^+ - \alpha^*, \quad a = c - \alpha. \quad (2.64)$$

Подставляя условия (2.64) в уравнение (2.63), получим

$$p_1 = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W (c^+ - 2\alpha^*) (c - 2\alpha) \}; \quad (2.65)$$

$$p_0 = (1 - e^{-W}) \exp \{ -W c^+ c \}.$$

Вновь введенные операторы c^+ и c обладают всеми свойствами операторов рождения и уничтожения. Вид сигналов в выражении (2.65) эквивалентен сигналам в выражении (2.52), поэтому сразу можно воспользоваться результатом уравнения (2.55), в котором вместо $|\alpha|^2 = n_c$ надо подставить $|2\alpha|^2 = 4n_c$. Таким образом, потенциальную помехоустойчивость системы связи с фазовой модуляцией можно оценить выражением

$$P_{\text{ош.гр}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \exp(-4n_c\beta)} \right]. \quad (2.66)$$

При $n_c \rightarrow 0$ из выражения (2.66) получим

$$P_{\text{ош.гр}} = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \exp(-4n_c)} \right], \quad (2.67)$$

что совпадает с точным значением, вычисленным по формуле (2.47), когда $|\psi_1\rangle = |\alpha\rangle$, а $|\psi_0\rangle = |-\alpha\rangle$.

Полученные результаты легко обобщаются на многомодовый случай. При этом можно заметить, что потенциальная помехоустойчивость реализуется в том случае, если над каждой модой производится измерение оптимальной наблюдаемой, а алгоритм обработки соответствует сравнению обобщенного отношения правдоподобия с порогом.

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ АТМОСФЕРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СВЯЗИ И СПОСОБЫ ЕЕ ПОВЫШЕНИЯ

3.1. АТМОСФЕРА КАК КАНАЛ ОПТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Можно выделить два момента, существенно определяющих возможности атмосферной оптической связи. Это затухание сигнала и флуктуации параметров сигнала, вызываемые атмосферной турбулентностью.

Ослабление излучения видимых и инфракрасных волн в атмосфере происходит вследствие молекулярного рассеяния, аэрозольного рассеяния и поглощения потока излучения аэрозольными частицами.

Изменение интенсивности оптического излучения, распространяющегося по некоторой трассе, описывается законом Бугера, дифференциальная форма которого имеет вид

$$dI(l) = -\alpha(\lambda)I(l)dl, \quad (3.1)$$

где $dI(l)$ — ослабление излучения интенсивности $I(l)$, прошедшего через слой среды толщиной dl .

Коэффициент $\alpha(\lambda)$ в выражении (3.1) называют коэффициентом ослабления среды, и он равен сумме коэффициентов поглощения $\alpha_{\text{п}}$ и рассеяния $\alpha_{\text{р}}$.

Интегрирование выражения (3.1) по толщине слоя L для случая однородной среды дает известное выражение закона Бугера:

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) e^{-\alpha(\lambda)L}. \quad (3.2)$$

Величину $\tau = I(\lambda)/I_0(\lambda) = e^{-\alpha(\lambda)L}$ называют коэффициентом пропускания атмосферы. Этот коэффициент может быть представлен в виде произведения двух коэффициентов $\tau_{\text{п}}$ и $\tau_{\text{р}}$, учитывающих только рассеяние и поглощение соответственно. Произведение $\gamma = \alpha(\lambda)L$ называют оптической толщиной среды.

Молекулярное рассеяние обусловлено главным образом флуктуациями плотности воздуха. Этот вид рассеяния достаточно хорошо изучен, имеются обширные таблицы коэффициентов рассеяния в видимой и инфракрасной областях, обеспечивающие возможность достаточно точного количественного определения потерь энергии волн, распространяющихся по любым направлениям в атмосфере. Теория молекулярного рассеяния света дает следующее выражение для коэффициента рассеяния в газах [30]:

$$\alpha_{\text{рм}} = \frac{8\pi^3 (n^2 - 1)^2}{3N\lambda^4} \cdot \frac{6 + 3\delta}{6 - 7\delta}, \quad (3.3)$$

Таблица 3.1

Длина ванны λ , мкм	Высота, км						
	0	5	10	15	20	30	40
0,3	$1,44 \cdot 10^{-1}$	$8,693 \cdot 10^{-2}$	4,881	2,999	1,049	$2,173 \cdot 10^{-3}$	$4,716 \cdot 10^{-4}$
0,55	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$6,988 \cdot 10^{-3}$	3,924	1,848	$8,436 \cdot 10^{-4}$	1,747	$3,791 \cdot 10^{-5}$
1,06	$8,458 \cdot 10^{-4}$	5,085	2,855	1,345	$6,138 \cdot 10^{-5}$	1,271	$2,757 \cdot 10^{-6}$

где N — число молекул в единице объема; n — показатель преломления; λ — длина волны излучения; δ — фактор деполяризации рассеянного излучения.

О величине коэффициента рассеяния дает представление табл. 3.1, в которой для различных высот и длин волн приведены значения α_{pm} (км^{-1}) [1].

Наряду с молекулярным рассеянием, затухание излучения происходит на атмосферных аэрозолях. Несмотря на многообразие спектров размеров и широкий диапазон изменения концентрации и химического состава частиц атмосферных аэрозолей, можно выделить некоторые характерные типы аэрозолей, существенно отличающиеся по своим свойствам ослаблять электромагнитные волны оптического диапазона. К этим типам относятся облака, туманы, осадки, дымки, пыль.

Затухание на аэрозолях зависит от многих факторов, таких как химический состав аэрозолей, их концентрация, размер капель и др. В работе [94] на основании обобщения экспериментальных данных построена оптическая модель безоблачной атмосферы для метеорологической дальности видимости у поверхности Земли $S_m(0)$, равной 25 км. Исходя из этой модели, построена зависимость коэффициента аэрозольного ослабления и молекулярного рассеяния в приземном слое атмосферы (рис. 3.1) [30].

На рис. 3.2 показан высотный ход суммарной оптической толщи для различных длин волн. Значение коэффициентов аэрозольного рассеяния для других метеорологических дальностей видимости находятся из этих графиков, поскольку величина $\alpha(\lambda)$ обратно пропорциональна S_m . Недостатки этой модели заключаются в том, что в ней не учитывается перелом в высотном ходе концентрации частиц аэрозоля на высоте порядка 5 км и наличие аэрозольных слоев. Кроме того, модель ограничена диапазоном длин волн от 0,27 до 4,0 мкм. В этой модели аэрозольное ослабление на высотах свыше 30 км считается равным нулю.

Ослабление оптического излучения осадками не зависит от длины волны, а зависит только от интенсивности осадков J и, как показали измерения [30], определяется выражением

$$\alpha = 0,21J^{0,74}, \quad (3.4)$$

где J имеет размерность мм/ч, а α — км^{-1} .

Оптическое излучение, распространяющееся в реальной атмосфере кроме потерь энергии, вызванных явлениями поглощения и рассеяния света, испытывает флуктуации амплитуды и фазы, обязанные своим происхождением случайному пространственно-временному распределению показателя преломления воздуха. Последнее вызывается турбулентными движениями в атмосфере, влекущими за собой случайное изменение температуры и связанного с ней показателя преломления. Поле показателя преломления n среды со случайными неоднородностями принято характеризовать структурной функцией [75]

$$D_n(\rho) = \langle [n(r+\rho) - n(r)]^2 \rangle, \quad (3.5)$$

где знак $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение.

Вид структурной функции в предположении локально изотропной и однородной турбулентности при изменении ρ в интервале $l_0 < \rho < L_0$ носит название закона двух третей Колмогорова — Обухова:

$$D_n(\rho) = C_n^2 \rho^{2/3}, \quad (3.6)$$

где L_0 и l_0 являются внешним и внутренним масштабами турбулентности; коэффициент C_n называют структурной постоянной.

Флуктуации показателя преломления вызывают флуктуации всех параметров лазерного излучения: амплитуды, фазы, направления распространения, ширины пучка.

На основе волнового уравнения и теории возмущений показано [75], что в случае распространения плоской волны амплитуда принимаемого оптического поля подчиняется логарифмически нормаль-

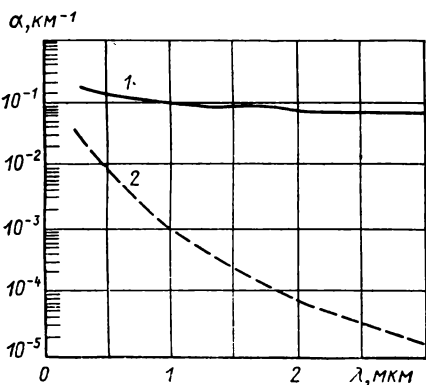


Рис. 3.1. Зависимость коэффициента ослабления от длины волны излучения в приземном слое атмосферы:
1 — аэрозольное ослабление; 2 — молекулярное рассеяние

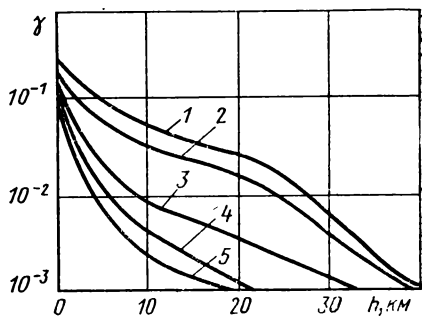


Рис. 3.2. Зависимость суммарной оптической толщи атмосферы от высоты для различных длин волн:

1 — $\lambda=0,55$ мкм; 2 — $\lambda=0,65$ мкм; 3 — $\lambda=0,8$ мкм; 4 — $\lambda=0,9$ мкм; 5 — $\lambda=1,06$ мкм

ному распределению. Средний квадрат флуктуаций логарифма нормированной амплитуды определяется соотношением

$$\sigma_{\ln v}^2 = 0,56 k^{7/6} \int_0^L C_n^2 (L-x)^{5/6} dx, \quad (3.7)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; L — расстояние, проходимое волной в атмосфере; $v = A/A_0$; A — текущая амплитуда; A_0 — амплитуда в отсутствие турбулентности.

В случае однородной среды, когда C_n^2 не меняется на всем пути L , из соотношения (3.7) получается выражение

$$\sigma_{\ln v}^2 = 0,31 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (3.8)$$

Дисперсия нормированной амплитуды и ее среднее значение связаны с дисперсией логарифма нормированной амплитуды соотношениями

$$\sigma_v^2 = 1 - \exp(-\sigma_{\ln v}^2); \quad m_v = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{\ln v}^2\right).$$

Выражением (3.8) можно пользоваться для горизонтальных трасс. При распространении плоской волны через всю толщу атмосферы под углом β к зениту дисперсия логарифма нормированной амплитуды определяется в виде

$$\sigma_{\ln v}^2 = 0,56 k^{7/6} (\sec \beta)^{11/6} \int_0^\infty C_n^2(h) h^{5/6} dh, \quad (3.9)$$

где h — высота в метрах.

Как видно из выражения (3.9) для оценки $\sigma_{\ln v}^2$ в случае распространения через всю толщу атмосферы необходимо знать значение интеграла

$$\int_0^\infty C_n^2(h) h^{5/6} dh = C_n^*.$$

Оценки C_n^* получены из данных по наблюдению сцинтилляций звезд. Согласно измерениям [81], среднее значение C_n^* равно $0,47 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{7/6}$.

Расчет амплитудных флуктуаций пространственно ограниченного гауссова пучка показал, что соответствующее значение $\sigma_{\ln v}$ отличается от соотношения (3.7) небольшими поправками.

Многочисленные экспериментальные исследования флуктуаций амплитуды ограниченного пучка ОКГ, распространяющегося в турбулентной атмосфере, дают хорошее совпадение с логарифмическим нормальным законом замираний. Однако величина дисперсий логарифма амплитуды оказывается зависящей от многих факторов: диаметра апертуры источника и приемника, угла расходимости излучения, постоянной времени приемника и других факторов. Не-

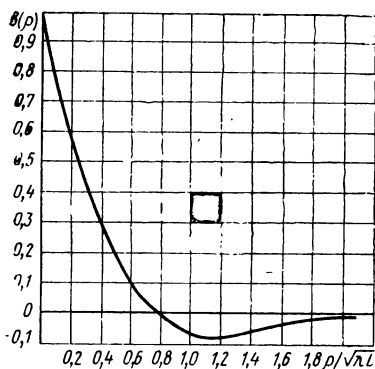


Рис. 3.3. Зависимость нормированной корреляционной функции от безразмерного параметра $\rho/\sqrt{\lambda L}$

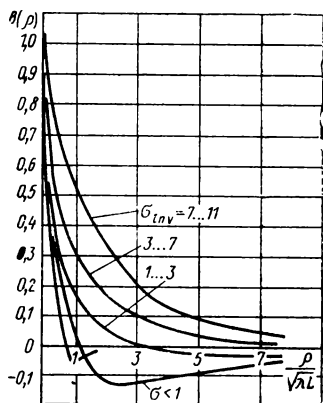


Рис. 3.4. Экспериментальная зависимость нормированной корреляционной функции от безразмерного параметра $\rho/\sqrt{\lambda L}$

которые из этих факторов можно использовать для ослабления влияния турбулентной атмосферы на качество работы оптических каналов связи.

Другим важным моментом является обнаружение эффекта насыщения в дисперсии логарифма амплитуды, который до настоящего времени не получил удовлетворительного теоретического обоснования. Данные этих экспериментов показали, что теоретическое значение σ_{nlv}^2 [см. формулу (3.8)] справедливо вплоть до $\sigma_{lnv} \leq \leq 0,8$. При дальнейшем увеличении пути распространения наблюдается эффект насыщения, при котором значение σ_{lnv} остается постоянным и равным 0,8.

Пространственная корреляционная функция $B(\rho)$ логарифма амплитуды сложным образом зависит от безмерного параметра $\rho/\sqrt{\lambda L}$. На рис. 3.3 представлен график зависимости нормированной корреляционной функции $b(\rho) = B(\rho)/B(0)$ от параметра $\rho/\sqrt{\lambda L}$, рассчитанной в работе [75], из которого видно, что независимо от величины турбулентности (до насыщения) корреляционная функция равна нулю для двух точек приемника, разделенных расстоянием $\sim 0,75\sqrt{\lambda L}$. В работе [96] пересчитана зависимость $b(\rho)$ и получен первый нуль, при $r_c = 0,71\sqrt{\lambda L}$. Там же отмечено, что при распространении излучения через всю толщу атмосферы первый нуль корреляционной функции достигается при расстоянии между точками приемника, равном

$$r_c = 1,198 (\lambda \sec \beta h_0)^{1/2}, \quad (3.10)$$

где $h_0 = 320$ м.

В условиях сильной турбулентности корреляционные функции интенсивности света измерялись экспериментально [20]. Результа-

ты эксперимента представлены графически на рис. 3.4. Из анализа этих графиков можно заключить, что при возрастании $\sigma_{\text{ин}v}$ радиус корреляции заметно увеличивается.

Флюктуации амплитуды точечного приемника определяются, в основном, движением неоднородностей поперек направления распространения волны. Предполагая, что поперечная составляющая скорости ветра V_{\perp} постоянна вдоль трассы, можно показать [75], что временная корреляционная функция $R(\tau)$ связана с пространственной соотношением

$$R(\tau) = B(V_{\perp} \tau). \quad (3.11)$$

Используя графики рис. 3.3, можно определить время автокорреляции логарифма амплитуды для точечного приемника:

$$\tau_c = 0,71 \sqrt{\lambda L} / 2V_{\perp}. \quad (3.12)$$

В то время как для флюктуаций амплитуды существенная область масштабов неоднородностей сосредоточена около ширины зоны Френеля, для флюктуаций фазы более существенны большие масштабы. Однако для масштабов больших зон Френеля статистические характеристики не имеют универсальной формы. Поэтому определить дисперсию флюктуаций фазы весьма затруднительно. Распределение вероятностей для флюктуаций фазы принимается нормальным, но поскольку эти флюктуации около среднего значения могут значительно превышать 2π , то распределение, отнесенное к интервалу $0 \dots 2\pi$, принимается равномерным. Частотный спектр флюктуаций фазы незначительно отличается от частотных спектров флюктуаций амплитуды.

При распространении световой волны в турбулентной атмосфере имеют место также искажения волнового фронта или нарушения фазовой когерентности. Нарушения фазовой когерентности оцениваются диаметром когерентности r_0 , равным размеру максимальной области, в которой происходит когерентное взаимодействие с излучением гетеродина. Для случая распространения плоской волны вдоль горизонтальной трассы показано [95], что

$$r_0 = 1,165 \cdot 10^{-8} \lambda_{\mu}^{6/5} L^{-3/5} C_n^{-6/5}, \quad (3.13)$$

где λ_{μ} — длина волны в микронах.

Для распространения плоской волны через всю толщу атмосферы под углом β к зениту можно записать следующее выражение:

$$r_0 = 1,165 \cdot 10^{-8} \lambda_{\mu}^{6/5} (C_n^+)^{-3/5} (\cos \beta)^{3/5}, \quad (3.14)$$

где

$$C_n^+ = C_{n_0}^2 \left[h^{(1-b)} \Gamma(1-b) - \frac{h_a^{(1-b)}}{1-b} \right]. \quad (3.15)$$

Здесь $\Gamma(1-b)$ — гамма-функция, а смысл параметров h_0 , b , $C_{n_0}^2$ будет раскрыт ниже при анализе зависимости структурной постоянной от высоты; h_a — высота антенны над поверхностью Земли.

Турбулентная атмосфера вызывает также флюктуации угла прихода волны принимаемого сигнала на приемнике. Этот угол определяется для какой-либо точки приемника, так как для неплоского волнового фронта, возникающего из-за неоднородностей атмосферы, не имеет смысла говорить об угле перехода волнового фронта сразу относительно всей апертуры приемника. В случае распространения плоской волны вдоль горизонтальной трассы дисперсия угла прихода σ_α^2 определяется выражением [62]

$$\sigma_\alpha^2 = 1,73 C_n^2 L l_0^{-1/3}. \quad (3.16)$$

Для сигнала, распространяющегося под углом β к зениту из космоса к приемнику на Земле, вместо выражения (3.16) имеем

$$\sigma_\alpha^2 = 157 C_{n_0}^2 \sec \beta. \quad (3.17)$$

Приведенные в этом разделе выражения, характеризующие влияние турбулентной атмосферы на оптическое излучение, получены для плоской волны и точечного приемника. Излучение же лазера имеет характер ограниченного в пространстве пучка. Широко распространенной моделью излучения лазера является представление его в виде гауссова пучка. Теоретические и экспериментальные исследования по распространению пучков в условиях турбулентной атмосферы дают результаты, близкие к приведенным для плоской волны. Однако для оптических пучков возникает необходимость дополнительно учитывать влияние атмосферы на расширение диаграммы направленности и рефракции лазерного луча. В работе [62] рассмотрена задача о расширении пространственно ограниченного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере. При этом учитывалось как размытие пучка, так и его дифракционное расхождение и качание как целого около направления распространения. Полное расширение пучка записывается в виде

$$\langle \bar{\rho}^2 \rangle = \Delta \bar{\rho}^2 + \bar{\rho}_c^2,$$

где $\bar{\rho}_c^2$ характеризует качание пучка как целого около направления распространения; $\Delta \bar{\rho}^2$ определяет расширение пучка относительно возмущенного положения его центра.

В случае гауссова распределения поля в сечении пучка получено следующее выражение:

$$\bar{\rho}^2 = a^2 + \frac{L^2}{k^2 a^2} + 2,19 C_n^2 l_0^{1/3} L^3. \quad (3.18)$$

Значение параметра a бралось равным 35,7 см. Все приведенные характеристики зависят от структурной постоянной C_n^2 , которая в свою очередь зависит от времени года, суток, состояния атмосферы и т. д. и колеблется в пределах от $10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$ до $10^{-17} \text{ м}^{-2/3}$. Обычно для сильной турбулентности принимают $C_n^2 = 5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$, для средней $C_n^2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$ и слабой $C_n^2 =$

Таблица 3.2

Характеристика трассы	Длина волны,							
	$\lambda = 0,53$				$\lambda = 0,84$			
	$\sigma_{\text{ПлФ}}^2$	r_c , см	τ_c , мм	Δf , Гц	$\sigma_{\text{ПлФ}}^2$	r_c , см	τ_c , мм	Δf , Гц
Горизонтальная трасса, км								
0,5	0,25	1,15	2,9	346	0,14	1,45	3,6	274
5	0,64	3,65	9,1	109	0,64	4,6	11,5	86,9
10	0,64	5,16	12,9	77,3	0,64	6,5	16,2	61,4
15	0,64	6,3	15,8	63,1	0,64	7,96	9,8	50,1
Вертикальная трасса $\beta=0$	0,047	1,6	3,9	256	0,028	1,9	4,9	203,6
Наклонная трасса, °								
$\beta=20$	0,053	1,61	4,04	247	0,031	2,03	5,06	197
$\beta=40$	0,077	2,07	5,18	193	0,078	2,61	6,52	153,3
$\beta=80$	0,64	3,78	9,46	10,5	0,64	4,76	11,9	84

$= 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$. На основании экспериментальных данных изменение C_n^2 с высотой часто описывается следующей зависимостью:

$$C_n^2 = C_{n_0}^2 h^{-b} \exp(-h/h_0), \quad (3.19)$$

где $C_{n_0}^2$, b , h_0 — постоянные параметры.

Наилучшее совпадение с экспериментом достигается при $b = 2/3 \dots 5/6$ и $h_0 = 320$ м. Значение $b = 2/3$ наилучшим образом подходит для описания атмосферы на рассвете и сумерках, а $b = 5/6$ — в солнечный день и ясной ночью. Значение $C_{n_0}^2$ выбирается таким, чтобы при $h = 30$ м величина $C_n^2(h)$ соответствовала турбулентным условиям вдоль горизонтальных трасс (сильной, средней или слабой турбулентности).

На основе приведенных в данном разделе аналитических зависимостей рассчитана табл. 3.2, которая позволяет судить о степени влияния турбулентной атмосферы на характеристики оптического излучения.

3.2. ВЛИЯНИЕ АТМОСФЕРНЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ НА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ЛАЗЕРНЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ

Из анализа турбулентных флуктуаций, проведенного в разд. 3.1, следует, что комплексную амплитуду когерентного сигнала в атмосферных оптических каналах связи необходимо считать случайной величиной, каждая реализация которой удовлетворяет уравнениям Максвелла. При этом, как отмечалось, действительная амплитуда комплексного сигнала флуктуирует по логарифмически-нормальному закону, а фаза распределена равномерно на интервале $0 \dots 2\pi$. Поэтому поле на входе приемного устройства должно описываться матрицей плотности, получаемой из выраже-

MKM							
$\lambda=1,06$				$\lambda=10,6$			
$\sigma_{\text{лпв}}^2$	$r_c, \text{ см}$	$\tau_c, \text{ мм}$	$\Delta f, \text{ Гц}$	$\sigma_{\text{лпв}}^2$	$r_c, \text{ см}$	$\tau_c, \text{ мм}$	$\Delta f, \text{ Гц}$
0,11	1,63	4,1	244	0,07	5,1	12,9	77,3
0,51	5,17	12,9	77,3	0,32	16,3	40,9	24,4
0,64	7,3	18,2	54,7	0,51	23,1	57,7	17,3
0,64	8,95	22,3	44,7	0,64	28,3	70,7	14,1
0,021	2,2	5,52	181,3	0,0014	6,98	17,4	57,3
0,024	2,28	5,69	175,7	0,0016	7,2	17,9	55,5
0,06	2,94	7,33	136,5	0,004	9,3	23,2	43,1
0,54	5,35	13,4	74,7	0,036	16,9	42,3	23,6

ния (1.76) усреднением по флуктуациям амплитуды и фазы комплексного сигнала α . Можно показать [80], что при усреднении матрицы плотности [см. выражение (2.1)] по равномерным флуктуациям фазы матрица плотности получается диагональной в базисе собственных функций оператора числа частиц. Поэтому оператор числа частиц в этом случае является оптимальной наблюдаемой в квантовомеханическом смысле. Вследствие этого проведем анализ помехоустойчивости атмосферных лазерных систем связи реализующих некогерентный прием.

При амплитудной модуляции статистика фотонов при передаче символов «1» и «0» получается усреднением выражения (1.110) по логарифмически-нормальному закону. Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned}
 P_1(n) &= \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^m \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^n \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{лпв}} v} \times \\
 &\times \exp \left[- \frac{(\ln v + \sigma_{\text{лпв}}^2)^2}{2\sigma_{\text{лпв}}^2} \right]^2 \exp \left[- \frac{v^2 n_c}{n_{\text{ш}} + 1} \right] L_n^{m-1} \left[- \frac{v^2 n_c}{n_{\text{ш}} (n_{\text{ш}} + 1)} \right] dv; \\
 P_0(n) &= \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^m \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^n L_n^{m-1}(0). \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

При равных априорных вероятностях передачи символов порог $n_{\text{п}}$ ищем приравниванием отношения правдоподобия к единице. В результате для порогового значения $n_{\text{п}}$ получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{лпв}} v} \exp \left[- \frac{(\ln v + \sigma_{\text{лпв}}^2)^2}{2\sigma_{\text{лпв}}^2} - \frac{v^2 n_c}{n_{\text{ш}} + 1} \right] \times \\
 &\times L_{n_{\text{п}}}^{m-1} \left[- \frac{v^2 n_c}{n_{\text{ш}} (n_{\text{ш}} + 1)} \right] dv = L_{n_{\text{п}}}^{m-1}(0). \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Это уравнение в замкнутом виде решения не имеет, поэтому была составлена программа для его решения на ЭВМ.

Если значения n_n найдены, то средняя вероятность ошибки определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = 1 - \sum_{n=0}^{n_n} \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^m \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^n L_n^{m-1}(0) + \sum_{n=0}^{n_n} \left(\frac{1}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^m \times \\ \times \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}} + 1} \right)^n \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\ln v} v} \exp \left[- \frac{(\ln v + \sigma_{\ln v}^2)^2}{2\sigma_{\ln v}^2} - \right. \\ \left. - \frac{v_{nc}^2}{n_{\text{ш}} + 1} \right] L_n^{m-1} \left[\frac{-v_{nc}^2}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}} + 1)} \right] dv. \quad (3.22)$$

На рис. 3.5, а, б, в представлены графики зависимости средней вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов при различных значениях дисперсии флюктуаций логарифма интенсивности и среднего числа шумовых фотонов. Для сравнения на этих же графиках изображены кривые помехоустойчивости безатмосферного канала связи. Анализ этих графиков показывает, что с увеличением дисперсии $\sigma_{\ln v}^2$ помехоустойчивость системы связи значительно ухудшается.

Аналогичный анализ можно произвести для системы связи с поляризационной (частотной) модуляцией. Одним из достоинств этих систем является тот факт, что уровень порога у них нулевой и не зависит от флюктуаций сигнала. Кроме того, с высокой точностью установлено [43], что атмосферные флюктуации практически не влияют на поляризационные характеристики сигналов. Ввиду громоздкости аналитических выражений для средней вероятности ошибки при многомодовом режиме работы остановимся на исследовании помехоустойчивости в одномодовом режиме. Соответствующее выражение для средней вероятности ошибки получается усреднением выражения (2.28) по логарифмически-нормальному закону:

$$P_{\text{ош}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sigma_{\ln v} v} \exp \left\{ - \frac{(\ln v + \sigma_{\ln v}^2)^2}{2\sigma_{\ln v}^2} + \frac{v^2 n_c}{2n_{\text{ш}} + 1} \right\} dv. \quad (3.23)$$

Выражение (3.23) также вычислено на ЭВМ. Результаты расчета представлены на рис. 3.6.

Значительное ухудшение помехоустойчивости атмосферных оптических каналов связи даже при оптимальном методе приема

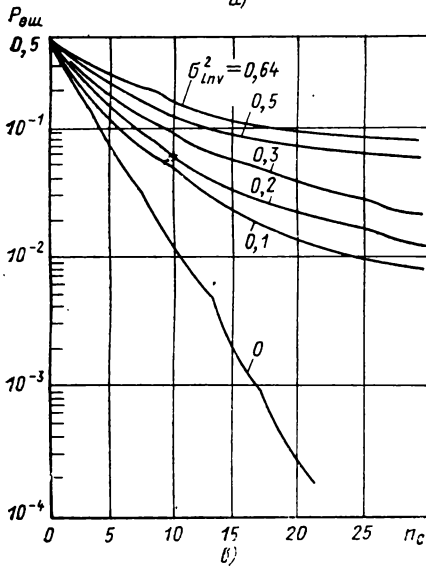
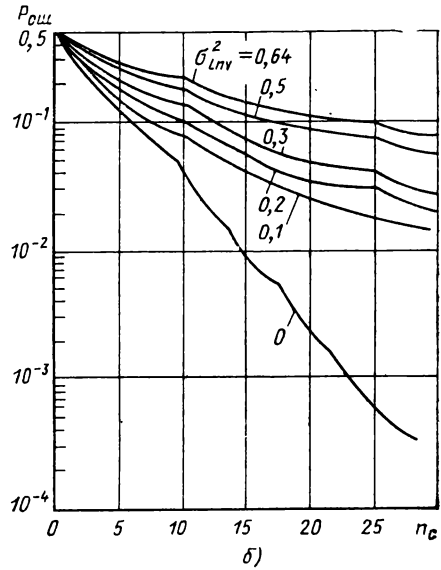
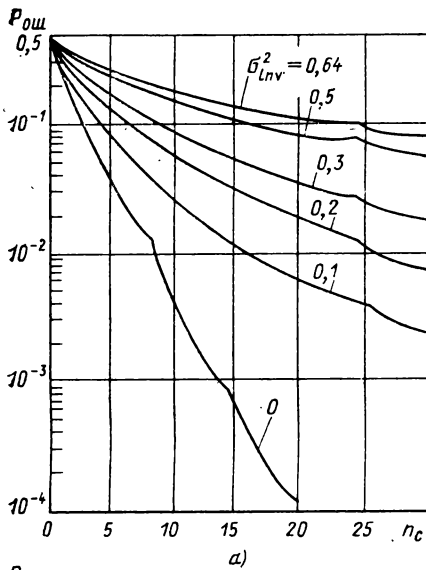
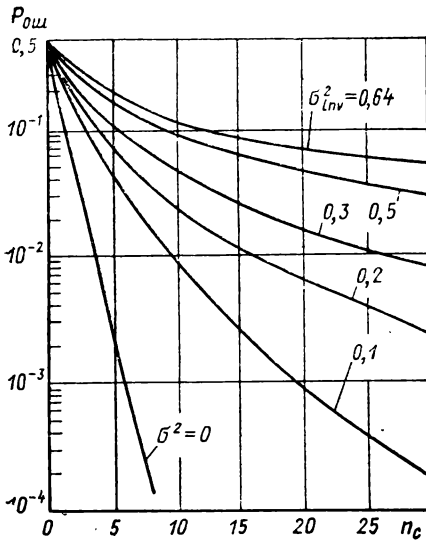


Рис. 3.5. Зависимость средней вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов при приеме АМ сигналов, прошедших турбулентную атмосферу:

одномодовый режим: а — $m=1$, $n_{ш}=0,1$; б — $m=1$, $n_{ш}=0,5$; многомодовый режим: в — $m=5$, $n_{ш}=0,1$



стимулировало более глубокие исследования по мерам ослабления влияния турбулентных флюктуаций на характеристики систем. Некоторые методы, позволяющие повысить помехоустойчивость атмосферных оптических систем связи, рассмотрены в следующем разделе.

Рис. 3.6. Зависимость средней вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов при приеме ПМ (ЧМ) — сигналов, прошедших турбулентную атмосферу:

одномодовый режим; $m=1$; $n_{ш}=0,1$

3.3. МЕТОДЫ ОСЛАБЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ

Из астрономических наблюдений с телескопом было установлено, что флюктуации интенсивности принимаемого излучения ослабляются с увеличением диаметра телескопа. Впервые теоретическая интерпретация этих экспериментальных данных была произведена в работе [75], где исследовано усредняющее действие приемной апертуры в случае слабых флюктуаций. Показано, что выражение (3.8) для дисперсии флюктуаций логарифма интенсивности справедливо только для точечной апертуры, т. е. апертуры, размеры которой меньше пространственного радиуса корреляции флюктуаций. Если же на приемной апертуре укладывается несколько таких ячеек когерентности, то флюктуации ослабляются. Однако закон замираний остается логарифмически-нормальным, что хорошо согласуется с экспериментами.

Усредняющее действие приемной апертуры можно характеризовать величиной $\theta(R)$, которая показывает во сколько раз относительные флюктуации полного светового потока через апертуру радиуса R меньше, чем для точечной апертуры. В работе [75] показано, что для круговой апертуры

$$\theta(R) = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} R_I(\rho) \left(\arccos \frac{\rho}{2R} - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right) \rho d\rho, \quad (3.24)$$

где $R_I = G_I(\rho)/G_I(0)$ — коэффициент корреляции флюктуаций интенсивности.

Согласно результатам целого ряда независимых экспериментов, проведенных на горизонтальных трассах в условиях насыщения, дисперсия флюктуаций логарифма интенсивности принимаемого сигнала для приемника, поле зрения которого много больше радиуса корреляции, стремится не к нулю, а к значению, равному $\sim 30\%$ от величины, определяемой формулой (3.8) для точечной апертуры. В отсутствии насыщения предельное значение дисперсии соответственно равно $\sim 10\%$.

Так как в результате усредняющего действия апертуры закон флюктуаций интенсивности не меняется, то в этом случае для оценки помехоустойчивости можно пользоваться графиками, изображенными на рис. 3.5 и 3.6, понимая под $\sigma_{\ln v}^2$ эквивалентную дисперсию.

Другой способ, позволяющий ослабить влияние турбулентных флюктуаций на помехоустойчивость системы связи, заключается в использовании идеи разнесенного приема. Сущность этого способа в том, что прием осуществляется на решетку фотодетекторов, разнесенных на радиус пространственной корреляции, определяемой формулой $r_i = 0,71 \sqrt{\lambda L}$. При таком разнесении распределения вероятностей фотоотчетов для различных фотодетекторов можно считать независимыми. В этом случае обобщенное отношение правдоподобия имеет вид

$$h = \frac{\prod_{k=1}^k \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2 n_c}{n_{ш} + 1}\right) L_{n_i}^{m-1} \left[-\frac{v^2 n_c}{n_{ш} (n_{ш} + 1)}\right] P(v) \frac{dv}{v}}{\prod_{i=1}^k L_{n_i}^{m-1}(0)}, \quad (3.25)$$

где k — число разнесений.

Теперь подсчитанное число фотонов не является достаточной статистикой, и требуется сложная нелинейная обработка без памяти в соответствии с выражением (3.25).

Ввиду сложности алгоритма работы такого оптимального приемника и больших трудностей в оценке качества его работы рассмотрим более простую схему, которая также позволяет повысить помехоустойчивость системы связи и легко реализуется на практике.

Этот способ обработки сигналов заключается в том, что в каждой ветви разнесения выносится частное решение в пользу гипотезы H_1 или H_0 и по совокупности этих частных решений принимается общее решение в пользу определенной гипотезы. Рассмотрим в общем виде алгоритм работы такого приемника. Будем по-прежнему считать, что все приемники в ветвях разнесения идентичны и среднее число сигнальных и шумовых фотонов в них одинаково. Для простоты анализа примем, что наблюдается непрерывная

наблюдаемая x , закон распределения которой при передаче символов «1» и «0» известен ($P_1^i(x)$ и $P_0^i(x)$).

В каждой ветви производится разбиение пространства наблюдения x (в общем случае x — это выборка некоторого объема) на две непересекающиеся области с целью принятия решения в пользу той или иной гипотезы. Пусть A_1 есть область принятия гипотезы H_1 . Тогда вероятность того, что в i -й ветви разнесения при передаче символа «1» будет принято решение в пользу гипотезы H_1 , имеет вид

$$p_i = \int_{A_1} P_1^i(x) dx. \quad (3.26)$$

Соответственно вероятность того, что при передаче символа «0» будет принята гипотеза в пользу символа «1» равна

$$q_i = \int_{A_1} P_0^i(x) dx. \quad (3.27)$$

Поскольку в этих рассуждениях априори известно, что передается символ «1» или «0», то естественно порог выбрать таким, чтобы величина P_i была как можно больше, а q_i — как можно меньше. Этим требованиям можно удовлетворить только в том случае, если выбрать порог из условия максимизации разности $p_i - q_i$:

$$p_i - q_i = \int_{A_1} [P_1^i(x) - P_0^i(x)] dx = \max(A_1). \quad (3.28)$$

В свою очередь условию (3.28) можно удовлетворить, если к области A_1 отнести те значения наблюдаемой x , при которых

$$P_1^i(x) - P_0^i(x) \geq 0. \quad (3.29)$$

Таким образом, в i -й ветви разнесения алгоритм работы приемника основан на сравнении отношения правдоподобия с единицей независимо от априорной вероятности передачи символов.

Вследствие того, что законы распределения наблюдаемой x в ветвях одинаковы, все p_i и q_i равны между собой. Кроме того, при разнесении приемников на расстояние, больше пространственного радиуса корреляции турбулентных флюктуаций, эти вероятности являются независимыми.

Поэтому вероятность того, что в l ветвях из k ветвей разнесения при передаче символа «1» будет принято решение в пользу гипотезы H_1 дается биномиальным распределением

$$P_1(l) = C_k^l p^l (1-p)^{k-l}. \quad (3.30)$$

Аналогично вероятность того, что в l ветвях разнесения будет принято решение в пользу гипотезы H_1 при передаче символа «0» имеет вид

$$P_0(l) = C_k^l q^l (1-q)^{k-l}. \quad (3.31)$$

Из законов распределения (3.30) и (3.31) получается оптимальный алгоритм работы схемы окончательного принятия решения. Если через η_1 и η_0 обозначить априорные вероятности передачи символов «1» и «0», то схема окончательного принятия решения должна сравнивать отношение правдоподобия с порогом согласно выражению

$$\frac{P_1(l)}{P_0(l)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \eta_0/\eta_1. \quad (3.32)$$

Пространство $\{l\}$ разбивается на две области уравнением

$$(p/q)^{l_n} \left(\frac{1-p}{1-q} \right)^{k-l_n} = \frac{\eta_0}{\eta_1}. \quad (3.33)$$

Логарифмируя уравнение (3.33), для l_n , получим следующее значение:

$$l_n = \left\{ \frac{\ln(\eta_0/\eta_1) - k \ln \left[\frac{1-p}{1-q} \right]}{\ln \frac{p}{q} - \ln \left(\frac{1-p}{1-q} \right)} \right\}, \quad (3.34)$$

где знак $\{\cdot\}$ означает, что необходимо взять целую часть полученного выражения в большую сторону.

Последнее выражение упрощается, если априорные вероятности передачи символов равны и распределения $P_1(x)$ и $P_0(x)$ симметричны, т. е. $\eta_1 = \eta_0 = 1/2$ и $p = 1 - q$. В этом случае

$$l_n = \frac{k}{2}. \quad (3.35)$$

В общем случае средняя вероятность ошибки равна

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{l=0}^{l_n-1} C_k^l p^l (1-p)^{k-l} + \sum_{l=l_n}^k C_k^l q^l (1-q)^{k-l} \right]. \quad (3.36)$$

Проведенный в общем виде математический анализ применим к оценке помехоустойчивости системы связи с амплитудной модуляцией. Согласно выражениям (2.22, 2.23) для p и q можно записать:

$$\begin{aligned} p &= 1 - \sum_{n=0}^{n_{\text{ш}}-1} \left(\frac{1}{n_{\text{ш}}+1} \right)^m \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}}+1} \right)^n \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{v^2 n_c}{n_{\text{ш}}+1} \right) \times \\ &\quad \times L_n^{m-1} \left[-\frac{v^2 n_c}{n_{\text{ш}}(n_{\text{ш}}+1)} \right] P(v) dv, \\ q &= 1 - \sum_{n=0}^{n_{\text{ш}}-1} \left(\frac{n_{\text{ш}}}{n_{\text{ш}}+1} \right)^n \left(\frac{1}{n_{\text{ш}}+1} \right)^m L_n^{m-1}(0). \end{aligned} \quad (3.37)$$

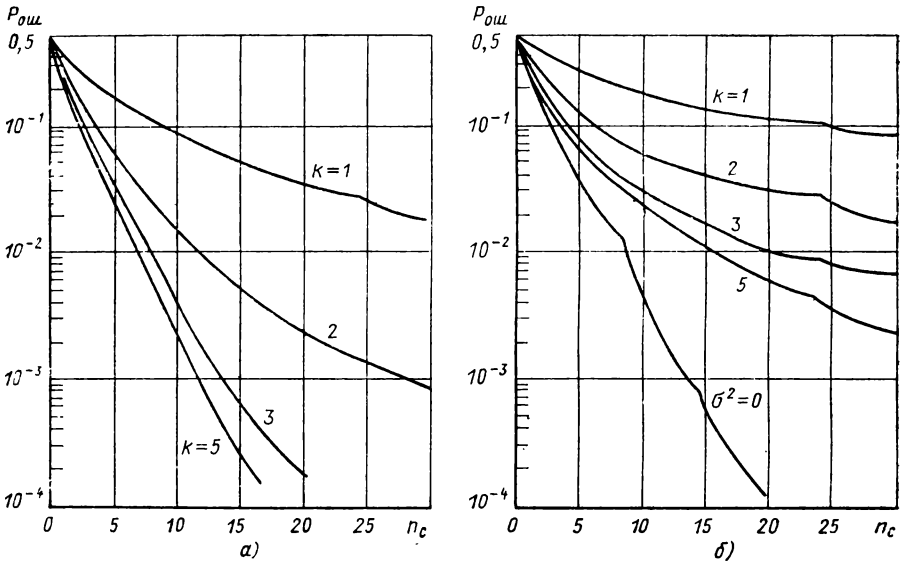


Рис. 3.7. Зависимость средней вероятности ошибки от среднего числа сигнальных фотонов при пространственно-разнесенном приеме АМ сигналов, прошедших турбулентную атмосферу: а — до насыщения флюктуаций, $m=1$, $n_{\text{ш}}=0,1$, $\sigma^2=0,3$; б — при насыщенных флюктуациях, $m=1$, $n_{\text{ш}}=0,1$, $\sigma^2=0,64$

Эти значения p и q необходимо подставить в выражение (3.33) для вычисления порога и затем в уравнение (3.36) для определения средней вероятности ошибки.

Необходимые количественные расчеты выполнены на ЭВМ и результаты представлены на рис. 3.7, а, б. Анализ этих графиков показывает, что разнесенный прием является достаточно эффективным средством борьбы с турбулентными искажениями сигналов. Наибольший рост эффективности соответствует переходу к 2- и 3-кратному разнесению. При дальнейшем увеличении числа ветвей разнесения рост эффективности замедляется. Однако создание решеток фотодетекторов позволяет получить необходимую помехоустойчивость системы связи даже в условиях сильной турбулентности.

При большом числе каналов разнесения ($k > 10$) распределения (3.30) и (3.31) хорошо аппроксимируются нормальным законом распределения [11], т. е.

$$P_1(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k p q}} \exp \left\{ -\frac{[l - (k+1)p]^2}{2k p q} \right\};$$

$$P_0(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k p q}} \exp \left\{ -\frac{[l - (k+1)q]^2}{2k p q} \right\}. \quad (3.38)$$

В этом случае вместо выражения (3.36) для средней вероятности ошибки получим

$$P_{\text{ош}} = \Phi \left[\frac{(k+1)(1-2q)}{2kpq} \right] \quad (3.39)$$

Отсюда следует, что при $k=19$ и $q=1-p=10^{-1}$ средняя вероятность ошибки оказывается меньше, чем 10^{-7} .

3.4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В последнее время значительное внимание уделяется оптическим системам передачи информации с обратной связью. Применение обратной связи позволяет существенно повысить помехоустойчивость информационных систем при одинаковых затратах энергоресурса (по сравнению с системами без обратной связи). Особенно интересно применение обратной связи в спутниковых системах связи [92, 93].

Системы спутниковой связи характеризуют следующие свойства:

1) ограниченность энергоресурса бортовой аппаратуры накладывает ограничения на среднюю мощность бортового передающего устройства в прямом канале передачи информации;

2) обратный канал, передатчик которого находится на Земле, обладает неограниченным энергоресурсом.

Последнее свойство позволяет принять допущение о «бесшумовом» обратном канале. Кроме того известна конфигурация спутниковой системы связи, когда бортовое ретранслирующее устройство в прямом канале передает информацию, модулируя переотражаемое излучение, принимаемое с наземного пункта. В этом случае также можно считать, что обратный канал обладает неограниченным энергоресурсом. Как отмечается в работе [92], в указанных двух конфигурациях систем спутниковой связи, характеризующихся ограничением по мощности в прямом канале, целесообразно применение информационной обратной связи.

Используя результаты работ [92, 93], рассмотрим основные особенности оптических систем передачи информации с амплитудной и поляризационной модуляцией, в которых применяется информационная обратная связь.

Оптическая информационная система с амплитудной модуляцией

В системах спутниковой связи передача информации осуществляется на относительно большие расстояния. При использовании в качестве передатчика лазера, работающего в одномодовом режиме, статистическое распределение фотоэлектронов подчиняется закону Пуассона:

$$P(k, \tau) = \frac{(\bar{s} + \bar{n})^k}{k!} e^{-(\bar{s} + \bar{n})}, \quad (3.40)$$

где \bar{s} — средний отсчет фотоэлектронов за время τ , обусловленный действием лазерного сигнала, т. е. $\bar{s} = \alpha I \tau$ (α — постоянная пропорциональности; I — интенсивность принимаемого сигнала); \bar{n} — средний отсчет, обусловленный действием фонового излучения и шумов фотоприемника.

В выражении (3.40) непрерывный параметр \bar{s} является сигналом, подлежащим оценке в приемнике. В приемнике для оценки сигнала анализируется m независимых отсчетов, каждый длительностью τ . Очевидно, что средний отсчет есть одна из возможных мер величины \bar{s} . Процедура усреднения обеспечивает лучшую линейную оценку величины \bar{s} в смысле минимума дисперсии и является также максимально правдоподобной оценкой.

Если считать, что N_i — отсчет в i -м интервале длительностью τ , то выражение для оценки равно

$$\bar{s}^* = \left(\sum_{i=1}^m N_i / m \right) - \bar{n} = A_m - \bar{n}. \quad (3.41)$$

В этом выражении вычитание \bar{n} осуществляется для того, чтобы оценка была несмещенной. Символ A_m использован для обозначения среднего отсчета

$$A_m = \sum_{i=1}^m N_i / m. \quad (3.42)$$

При оценке принятого сигнала отсчет фонового излучения \bar{n} должен быть известен в приемнике или независимо от принятого сигнала оценен. Это позволяет считать оценку несмещенной. При рассмотренном усреднении дисперсия оценки \bar{s}^* уменьшается обратно пропорционально числу m .

Рассмотрим теперь усреднение с помощью информационной обратной связи. Система с информационной обратной связью обеспечивает оценку величины \bar{s} , дисперсия которой, как будет показано, уменьшается как $1/m^2$. Это свойство существенно сказывается при достаточно больших m .

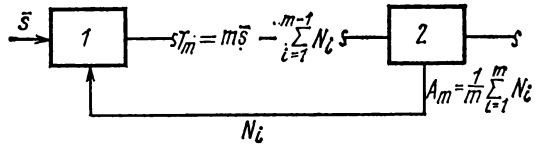
При применении информационной обратной связи принятый по прямому каналу сигнал направляется в обратный канал без изменения в отличие от системы с решающей обратной связью, где в обратный канал посылается результат решения о принятом сигнале.

Будем считать, что сообщение передается при модуляции излучения по интенсивности, т. е. передается непрерывный информационный параметр \bar{s} , пропорциональный интенсивности излучаемого сигнала.

В течение времени τ в приемнике наблюдается первый фотоэлектронный отсчет N_1 . Этот отсчет используется как первая оценка \bar{s} , и затем посылается обратно к передатчику. Если отсчет N_1 велик по сравнению с \bar{s} , то передатчик уменьшает свою мощность. Если этот отсчет мал по сравнению с \bar{s} , то передатчик увеличивает свою мощность. Количество дискретных вариаций выходной мощ-

Рис. 3.8. Схема информационной системы с усредняющей обратной связью:

1 — передатчик; 2 — приемник



ности передатчика длительностью τ согласуется так, чтобы отсчет N_i (после сравнения с новой интенсивностью лазерного излучения) равнялся \bar{s} . Эта процедура повторяется последовательно со следующей выборкой длительностью τ и т. д. Результирующее передаваемое значение сигнала в течение j -го интервала длительностью τ равно

$$T_j = j\bar{s} - \sum_{i=1}^{j-1} N_i. \quad (3.43)$$

На приемнике отсчеты N_i усредняются для формирования величины среднего отсчета [см. формулу (3.42)]. На рис. 3.8 показана лазерная система передачи информации с обратной связью.

Величина T_j может иногда принимать отрицательное значение. В этом случае лазер выключается, при этом $T'_j \geq 0$, где T'_j — действительное передаваемое значение, отличающееся от расчетного отрицательного значения T_j . Это приводит к появлению так называемой ошибки «выброса».

В работе [92] показано, что ошибка «выброса» вносит лишь второстепенные вариации в свойства величины A_m почти для всех рассматриваемых значений \bar{s} .

Метод усреднения с обратной связью имеет следующие свойства:

1) величина A_m имеет несмещенную оценку, если $\bar{n} = 0$, т. е. $E(A_m) = \bar{s}$. (Знак $E(\cdot)$ означает операцию математического ожидания);

2) если $\bar{n} \neq 0$, то $E(A_m) = \bar{s} + \bar{n}/m$. Следовательно, величина аддитивной помехи в среднем уменьшается в m раз относительно ее значения в системе без обратной связи после m передач;

3) дисперсия оценки A_m равна $\sigma_{A_m}^2 = \bar{s}/m^2$; для системы без обратной связи — $\sigma_{A_m}^2 = (\bar{s} + \bar{n})/m$, следовательно, дисперсия оценки при наличии обратной связи падает в m^2 раз, где m — число циклов длительностью τ ;

4) система уменьшает влияние фединга на среднюю скорость прихода сигнальных фотонов;

5) система имеет такую же среднюю мощность, при данном передаваемом сообщении \bar{s} , что и система без обратной связи.

Первое свойство легко доказывается, если учесть допущение о пуассоновском распределении отсчетов.

Рассмотрим второе свойство. В системе без обратной связи, при

$\bar{n} \neq 0$, $E(A_m) = \bar{s} + \bar{n}$. Таким образом, если \bar{n} неизвестно, то оценка $1/m \sum_{i=1}^m N_i$ является смещенной.

В работе [92] показано, что когда используется усреднение с помощью обратной связи аддитивный член в $E(A_m)$ уменьшается с увеличением числа m (при условии $\bar{s} > \bar{n}$). Допускается, что $\bar{s} > \bar{n}$ и T_j — положительно. Тогда

$$E(A_1) = \bar{s} + \bar{n}; \quad (3.44)$$

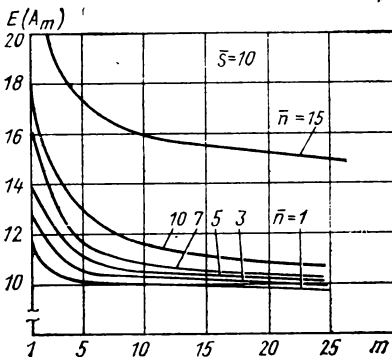
$$\begin{aligned} E(A_2) &= E_{N_1, N_2} \left[\frac{N_1 + N_2}{2} \right] = E_{N_1} \left[E_{N_2} \frac{[N_1 + N_2]}{2} \right] = \\ &= E_{N_1} \left[\frac{N_1 + 2s + \bar{n} - N_1}{2} \right] = \bar{s} + \bar{n}/2; \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$E(A_m) = \bar{s} + \bar{n}/m. \quad (3.46)$$

Таким образом, аддитивный член линейно уменьшается с увеличением m . Для значений \bar{n} , достигающих или превышающих \bar{s} , ошибка «выброса» может быть велика. Для проверки поведения $E(A_m)$ в этих условиях использовались вычисления на ЭВМ [92]. Графики зависимости $E(A_m)$ от числа m для $\bar{s} = 10$ и различных значений \bar{n} показаны на рис. 3.9. При $\bar{s} > \bar{n}$ аддитивный член уменьшается как функция $1/m$. Значение оценки $E(A_m)$ начинается с $\bar{s} + \bar{n}$ при $m = 1$ и сходится к \bar{s} при $m \gg 1$. Для $\bar{s} \leq \bar{n}$ математическое ожидание оценки $E(A_m)$ начинается с $\bar{s} + \bar{n}$ при $m = 1$ и сходится к \bar{n} при $m \gg 1$. Следовательно, имеет место своеобразный эффект «захвата» при $\bar{n} > \bar{s}$. Таким образом, при $\bar{s} > \bar{n}$ система способна уменьшать аддитивный член в среднем в m раз без необходимости предварительного знания значения \bar{n} .

Рассмотрим характер изменения дисперсии оценки. Для системы без обратной связи при использовании максимально правдоподобного оценивания дисперсия оценки равна

$$\sigma_{\text{оц}}^2 = [\bar{s} + \bar{n}]/m, \quad (3.47)$$



где m — число точек оценки.

Усреднение с помощью обратной связи при $\bar{s} > \bar{n}$ дает оценку дисперсии, равную \bar{s}/m^2 [92].

При выводе выражения для дисперсии пренебрегается влиянием ошибки «выброса» и допускается, что $\bar{s} > \bar{n}$. Тогда

Рис. 3.9. График уменьшения влияния аддитивных шумов

для $m=1$

$$\sigma_{A_1}^2 = E(A_1^2) - E^2(A_1) = \bar{s} + \bar{n},$$

так как отсчет N_1 распределяется по закону Пуассона.

Для $m=2$ $\sigma_{A_2}^2 = E(A_2^2) - E^2(A_2)$. Определяя

$$E(A_2^2) = \frac{1}{4} E(N_1^2 + 2N_1N_2 + N_2^2) = \frac{1}{4} (4\bar{s}^2 + \bar{n}^2 + \bar{s} + 4\bar{n}\bar{s})$$

и

$$E(A_2) = \bar{s} + \bar{n}/2,$$

получим следующее выражение для дисперсии: $\sigma_{A_2}^2 = \bar{s}/4$. . Подобным образом можно показать, что $\sigma_{A_m}^2 = \bar{s}/m^2$. . Таким образом, дисперсия для $m \gg 2$ не зависит от \bar{n} и обратно пропорциональна m^2 . При учете ошибки «выброса» дисперсия несколько увеличивается.

Рассмотрим влияние медленного фединга на оценку A_m . Медленный фединг (флуктуации интенсивности сигнала в канале) не приводит к серьезным ошибкам в оценке A_m . При пуассоновской модели сигнала учет фединга можно осуществить в виде мультипликативного коэффициента K , умножаемого на среднюю скорость прихода фотонов, т. е. $K T m'$. Коэффициент K является постоянным для данного сообщения и характеризует меру глубины фединговых замираний.

Оценка A_m для системы с обратной связью может быть представлена в виде

$$E(A_m) = \left[\frac{(1-K)^{m+1} + K(m+1) - 1}{mK} \right] \bar{s} = f(K) \bar{s},$$

где функция $f(K)$ является множителем при \bar{s} .

При увеличении m величина $f(K)$ приближается к единице. Это следует из графиков рис. 3.10 и рис. 3.11. Следовательно, с увели-

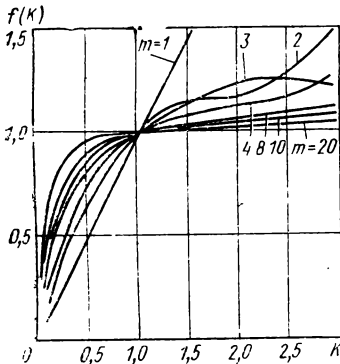


Рис. 3.10. Влияние фединговых замираний

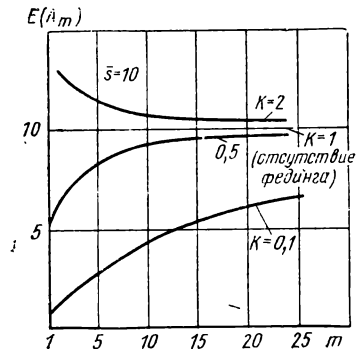


Рис. 3.11. Оценка среднего отсчета в приемнике для канала с федингом

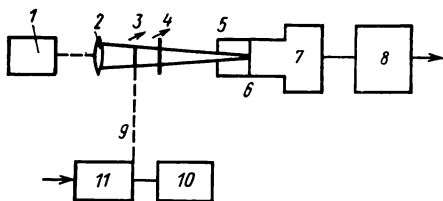


Рис. 3.12. Экспериментальная система передачи информации с обратной связью:

1 — лазер; 2 — линза; 3 — поляризатор; 4 — ослабитель; 5 — точечное отверстие; 6 — фотоэмиссионная поверхность; 7 — фотоумножитель; 8 — широкополосный импульсный усилитель; 9 — ручная регулировка; 10 — печатающее устройство; 11 — цифровой счетчик

чением m оценка сообщения в системе сходится к \bar{s} . В предельном случае при $m \rightarrow \infty$ для $0 < K < 2 \lim_{m \rightarrow \infty} f(K) = 1$.

Таким образом, для значений $m \gg 1$ влияние фединга на оценку $E(A_m)$ компенсируется действием обратной связи в системе.

Средняя мощность сигнала приблизительно пропорциональна математическому ожиданию величины T_m . Учитывая пуассоновское распределение величины N_i , значение $E(T_m)$ можно определить по формуле

$$E(T_m) = E\left[m\bar{s} - \sum_{j=1}^{m-1} N_j\right] = m\bar{s} - E\left[\sum_{j=1}^{m-1} N_j\right] = m\bar{s} - (m-1)\bar{s} - n = \bar{s} - n.$$

Отсюда следует, что средняя мощность при передаче данного сообщения \bar{s} в системе с обратной связью совпадает со средней мощностью, отводимой на сообщение в системе без обратной связи (при $\bar{n} = 0$). Эта мощность пропорциональна \bar{s} .

Эффективность действия усредняющей обратной связи, уменьшающей фотонные флюктуации в канале лазерной системы связи, была проверена экспериментально (рис. 3.12) [92]. В качестве передатчика использовался гелий-неоновый лазер, излучение которого линейно-поляризовано. Регулирование амплитуды излучения осуществлялось вручную вращением поляризатора на выходе передатчика. Кроме того, в канале использовался аттенюатор. В качестве приемника использовался фотоэлектронный умножитель, на выходе которого устанавливался широкополосный усилитель и счетчик. Выходной сигнал счетчика поступал на записывающее устройство и использовался для регулирования интенсивности потока фотонов в канале с помощью поляризатора. От величины отсчета в приемнике зависла ручная регулировка положения поляризатора в канале (тем самым обеспечивалось действие обратной связи). Экспериментально был исследован характер изменения математического ожидания и дисперсии оценки A_m в отсутствие и при наличии обратной связи; кроме того, было оценено влияние аддитивного шумового сигнала.

Величина $\bar{s} = 10$ отсчетов/мкс передавалась как сообщение. Оценка A_m записывалась печатающим устройством. Количество циклов обратной связи составляло $m = 10$. Эта процедура повторялась 100 раз при $\bar{n} = 0$ и столько же раз при $\bar{n} = 2$ отсчетов/мкс. Шумовой отсчет моделировался рассеянным фоновым излучением. Выводы, полученные в результате эксперимента, совпадают с первыми тремя свойствами системы с обратной связью, указанными

выше [92]. Для системы передачи информации без обратной связи выводы эксперимента находятся в соответствии с точечной теорией оценки. При исследовании системы без обратной связи экспериментально было показано, что среднее значение и дисперсия отсчета фотоэлектронов одинаковы, что является необходимым условием пуассоновского распределения фотоэлектронов.

Оптическая информационная система с поляризационной модуляцией

Рассмотрим усреднение с помощью обратной связи в системе с M -ичной поляризационной модуляцией (ПМ) [93]. В системе с поляризационной модуляцией горизонтальной и вертикальной поляризации соответствуют в приемнике отсчеты x и y соответственно. Для оценки сигнала \bar{s} используется величина $N_i x_i - y_i$.

В M -ичной цифровой системе связи каждому сообщению соответствует свой угол поляризации θ линейно-поляризованного лазерного излучения. Ансамбль сообщений определяет угловой диапазон изменения вектора поляризации от $\theta = 0^\circ$ (горизонтальная поляризация) до $\theta = 90^\circ$ (вертикальная поляризация) с приращениями $\Delta\theta = 90^\circ / (M - 1)$.

В приемнике линейно-поляризованное излучение разлагается на горизонтальную и вертикальную составляющие. Каждая составляющая поступает на свой фотоумножитель и счетчик. Считается, что фоновые шумы в каждом канале статистически независимы. В x -канале средний шумовой и сигнальный отсчеты равны \bar{n}_x и \bar{s}_x , соответственно; в y -канале аналогичные отсчеты равны \bar{n}_y и \bar{s}_y . Накопление отсчетов происходит на интервале длительностью τ . Считая распределение отсчетов пуассоновским, запишем следующие выражения для вероятности:

$$P(x=k) = \frac{(\bar{s}_x + \bar{n}_x)^k}{k!} e^{-\bar{s}_x - \bar{n}_x}; \quad (3.48)$$

$$P(y=k) = \frac{(\bar{s}_y + \bar{n}_y)^k}{k!} e^{-\bar{s}_y - \bar{n}_y}. \quad (3.49)$$

Если отсчет в y -канале вычитается из отсчета в x -канале, то можно связать ожидаемое значение этой разности с данным углом поляризации передаваемого излучения θ . Например, будем считать излучение линейно-поляризованным с вектором поляризации, направленным под углом θ ; интенсивность излучения равна I . Тогда для x -канала

$$E[x/\theta] = \bar{s}_x + \bar{n}_x = \alpha I \tau \cos^2 \theta + \bar{n}_x; \quad (3.50)$$

для y -канала

$$E[y/\theta] = \bar{s}_y + \bar{n}_y = \alpha I \tau \sin^2 \theta + \bar{n}_y. \quad (3.51)$$

Ожидаемое значение разности равно

$$E[(x - y)/\theta] = \alpha I \tau \cos 2\theta + \bar{n}_D, \quad (3.52)$$

где α — постоянная пропорциональности, которую в последующем можно ввести в величину I ; τ — интервал наблюдения и

$$\bar{n}_D = \bar{n}_x - \bar{n}_y. \quad (3.53)$$

Тогда сообщение можно отождествить следующим образом:

$$\bar{s} = I\tau \cos 2\theta.$$

Дисперсия разности отсчетов x и y равна

$$D[(x-y)/\theta] = D[(x+y)/\theta] = E[(x+y)/\theta] = I\tau + \bar{n}, \quad (3.54)$$

где $\bar{n} = \bar{n}_x + \bar{n}_y$.

Условные случайные переменные x/θ и y/θ являются статистически независимыми, поэтому математическое ожидание и дисперсия, определяемые формулой (3.54), не являются функциями θ .

В работе [93] предполагается, что обратный канал не подвержен действию шумов и не вносит дополнительной временной задержки.

Если обозначить отсчет в приемнике в течение времени τ как $N_i = x_i/\theta - y_i/\theta$ и применить методику усреднения с помощью обратной связи, то оценка A_m сигнала \bar{s} в приемнике и значение передаваемого сигнала после m циклов повторений будут определяться выражением

$$A_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_i; \quad (3.55)$$

$$T_m = \bar{m}s - \sum_{i=1}^{m-1} N_i. \quad (3.56)$$

Для сравнительного анализа вначале рассматривается система передачи информации без обратной связи с M -ичной поляризационной модуляцией [93].

Минимальная вероятность ошибки обеспечивается выбором в качестве алгоритма правила Байеса по проверке M гипотез. Поскольку отсчеты фотонов в каждом канале при известном θ статистически независимы, можно записать совместное распределение вероятностей отсчетов j и k при послышке сообщения \bar{s}_1 : $P(x=k, y=j/\bar{s}_1)$.

Данное конкретное сообщение (команда) \bar{s}_1 может быть связано с θ следующим образом:

$$\bar{s}_1 = I\tau \cos 2\theta_1. \quad (3.57)$$

Отношение правдоподобия для данного сообщения \bar{s}_1 и произвольного сообщения \bar{s}_i имеет вид

$$l = \frac{P(x=k, y=j/\bar{s}_1)}{P(x=k, y=j/\bar{s}_i)}. \quad (3.58)$$

При равенстве априорных вероятностей посылки сообщений $1/M$ правило решения состоит в выборе сообщения \bar{s}_1 , если $l > 1$. Подставляя формулы (3.48—3.51) в выражение (3.58) и обозначая $\bar{n}_x = \bar{n}_y = \bar{n}/2$, имеем

$$l = \left[\frac{I\tau + \bar{s}_1 + \bar{n}}{I\tau + \bar{s}_i + \bar{n}} \right]^k \left[\frac{I\tau - \bar{s}_1 + \bar{n}}{I\tau - \bar{s}_i + \bar{n}} \right]^j. \quad (3.59)$$

Прологарифмировав выражение (3.59), имеем правило решения, состоящее в выборе сообщения \bar{s}_1 , если [93]

$$k \left[\log \left(1 + \frac{\bar{s}_1}{I\tau + \bar{n}} \right) - \log \left(1 + \frac{\bar{s}_i}{I\tau + \bar{n}} \right) \right] + j \left[\log \left(1 - \frac{\bar{s}_1}{I\tau + \bar{n}} \right) - \log \left(1 - \frac{\bar{s}_i}{I\tau + \bar{n}} \right) \right] > 0. \quad (3.60)$$

Если разложить логарифмические члены в ряд, то выражение (3.60) сводится к виду

$$\left(\frac{k-j}{k+j} \right) (I\tau + \bar{n}) > K_3 (\bar{s}_1 + \bar{s}_i)/2; \quad (\bar{s}_1 > \bar{s}_i), \quad (3.61)$$

где

$$K_3 = \left[\frac{1 + (\bar{s}_1^2 + \bar{s}_i^2)/2(I\tau + \bar{n})^2 + \dots}{1 + (\bar{s}_1^2 + \bar{s}_i^2)/3(I\tau + \bar{n})^2} \right], \quad (k+j \neq 0).$$

Неравенство реверсируется, если $\bar{s}_1 < \bar{s}_i$. Как указано в работе [93], почти для всех значений \bar{s}_1 и \bar{s}_i , встречающихся на практике, $K_3 \cong 1$. Тогда правило решения запишется так:

$$\left(\frac{k-j}{k+j} \right) (I\tau + \bar{n}) > (\bar{s}_1 + \bar{s}_i)/2, \quad (\bar{s}_1 > \bar{s}_i). \quad (3.62)$$

Это неравенство реверсируется, если $\bar{s}_1 < \bar{s}_i$. Если алгоритм (3.62) применять ко всем сообщениям и допустить, что все s_i равномерно распределены в диапазоне от $-I\tau$ до $+I\tau$, то области решения вырождаются в равномерно распределенные полосы; уровни решений также равномерно разделяют соседние сообщения.

Таким образом, приемник производит отсчет в x -канале и y -канале, формирует сумму и разность отсчетов, умножает на $I\tau + \bar{n}$, определяет, в какой полосе области решений находится результирующее число, и выбирает соответствующее сообщение. Для некоторых случаев выражение (3.62) упрощается. Так, для двоичного случая ($M=2$), $\bar{s}_1 = I\tau$ и $\bar{s}_2 = -\bar{s}_1$; тогда по алгоритму (3.62) выбор \bar{s}_1 осуществляется, если $k > j$. Можно также измерить разность $k-j$ и сравнивать ее с нулем.

Алгоритм легко обобщается на случай, когда сигнал наблюдает-

ся в нескольких интервалах длительностью τ . Тогда в выражении (3.62) производится замена

$$k = \sum_{l=1}^m k_l; \quad (3.63)$$

$$j = \sum_{l=1}^m j_l,$$

где m — количество интервалов.

Правило решения состоит в том, что выбирается \bar{s}_1 , если

$$\left[\sum_{l=1}^m (k_l - j_l) / \sum_{l=1}^m (k_l + j_l) \right] (I\tau + n) > (\bar{s}_1 + \bar{s}_i) / 2, \\ \left(\sum_{l=1}^m (k_l + j_l) \neq 0 \right). \quad (3.64)$$

Здесь снова допускается, что $\bar{s}_1 > \bar{s}_i$. Можно получить упрощенный вариант правила решения. Для больших m , независимо от сообщения \bar{s}_1 , которое передается, величина $\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (k_l + j_l)$ приблизительно равна $(I\tau + \bar{n})$. Таким образом, приближенное правило решения состоит в выборе \bar{s}_1 , если

$$\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (k_l - j_l) > (\bar{s}_1 + \bar{s}_i) / 2, \quad \bar{s}_1 > \bar{s}_i. \quad (3.65)$$

Алгоритм (3.65) является более простым и удобным для вычислительных процедур, чем алгоритм (3.64). Определим среднее значение и дисперсию левой части алгоритма (3.65). Полученную дисперсию можно затем сравнить с аналогичной дисперсией для информационной системы с обратной связью. В приемнике осуществляется оценка

$$A_m = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (k_l - j_l). \quad (3.66)$$

Поскольку k -отсчеты независимы от j -отсчетов (при данном \bar{s}_i) и, кроме того, отсчеты в каждом интервале l также независимы, то, используя выражения (3.48) и (3.52), можно показать, что

$$E(A_m) = \frac{mE[k_l - j_l]}{m} = \bar{s}_i;$$

$$D(A_m) = \frac{mD[k_l - j_l]}{m^2} = \frac{I\tau + \bar{n}}{m}.$$

Как видно, оценка A_m является несмещенной.

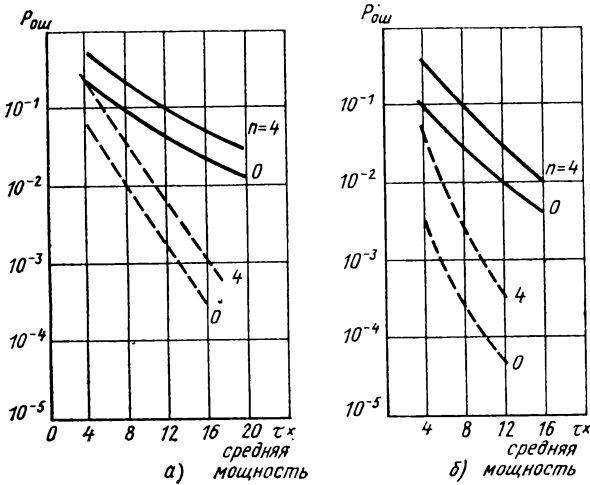


Рис. 3.13. Зависимость вероятности ошибки от средней мощности для четверичной системы с обратной связью (---) и без обратной связи (—):
 а — $m=4$; $M=4$; б — $m=7$; $M=4$

Рассмотрим теперь M -ичную поляризационную систему с обратной связью. Пользуясь методикой, приведенной в работе [93] для оценки эффективности системы, используем условную случайную переменную $N_i = x_i/\theta - y_i/\theta$ из уравнений (3.55) и (3.56). Среднюю и пиковую мощность сигнала обозначим I . При использовании усредняющей обратной связи величина T_m , рассчитанная по формуле (3.56), может превышать уровни сигнала передатчика (диапазон изменения сигнала в передатчике лежит от $-I\tau$ до $I\tau$). Когда такая ситуация имеет место, передатчик посылает экстремальное значение $-I\tau$ или $I\tau$. Это ограничение оказывает наибольшее влияние на распределение N_i , когда $|\bar{s}| \rightarrow I\tau$. Пренебрежем этими граничными эффектами.

Среднее значение и дисперсия оценки A_m легко находятся:

$$E(A_m) = \bar{s};$$

$$\sigma_{A_m}^2 = \frac{I\tau + \bar{n}}{m^2} = \frac{1}{m^2} (I\tau + \bar{n}). \quad (3.67)$$

Оценка является несмещенной. Коэффициент $1/m^2$, появляющийся в выражении (3.67), обусловлен применением усреднения с помощью обратной связи.

Можно также показать, что небаланс фонового шума в фотумножителях (x - и y -каналов) уменьшается при применении обратной связи (при отсутствии обратной связи $E(A_m) = \bar{s} + \bar{n}_D$ при применении обратной связи $E(A_m) = \bar{s} + \bar{n}_D/m$). Для сравнения эффективности систем связи с обратной связью и без обратной связи построены графики вероятности ошибки $P_{ош}$ для четверичной системы ($M=4$). Четыре сообщения равномерно распределены в диапа-

зоне от $-I\tau$ до $I\tau$. Результаты моделирования показаны на рис. 3.13, а, б для количества циклов $m=4$ и $m=7$. Оба случая рассматриваются для $\bar{n}=0$ и $\bar{n}=4$. Из графиков следует, что информационная система с обратной связью значительно эффективнее оптимальной системы без обратной связи.

3.5. ДВУХКАНАЛЬНАЯ ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СВЯЗИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАЗНЕСЕНИЕМ

Оптические системы связи с пространственным разнесением каналов кроме реализации метода разнесенного приема, повышающего помехоустойчивость передачи информации, могут иметь различные применения [89]. Поэтому представляет интерес оценка помехоустойчивости такой системы, каналы которой проходят в турбулентной атмосфере. Одна из конфигураций двухканальной системы связи с пространственным разнесением показана на рис. 3.14. При дальности трассы распространения порядка 200 км и угловой расходимости лучей обоих каналов около $1''$ площади сечения лучей составляют приблизительно 1 м^2 ; это позволяет сохранить небольшое геометрическое разнесение каналов.

В системе двоичная цифровая информация передается следующим образом [89]. Двоичной единице «1» соответствует посылка оптического импульса по каналу А со средним числом фотонов \bar{s}_A и по каналу В со средним числом \bar{s}_B ; при этом $\bar{s}_A > \bar{s}_B$. Двоичный нуль «0» передается такой же парой импульсов, но $\bar{s}_A < \bar{s}_B$. Влияние турбулентной атмосферы на оба канала одинаково. При этом считается, что турбулентные эффекты развиваются медленней во времени, т. е. время заметной автокорреляции значений интенсивности сигналов (время когерентности турбулентного канала) много больше длительности импульса. Предполагается так же, что информационные сигналы в обоих каналах испытывают примерно одинаковое затухание. Как известно, функция плотности вероятности интенсивности сигнала, прошедшего турбулентную атмосферу, подчиняется логарифмически-нормальному закону.

При приеме оптических импульсов в каждом канале подсчитывается число фотонов на импульс, точнее, — число фотоэлектронов (для простоты будем считать, что квантовая эффективность счетчиков равна единице). В устройстве обработки информации показания обоих счетчиков сравниваются, и по максимальному показанию того или иного счетчика принимается решение о пере-

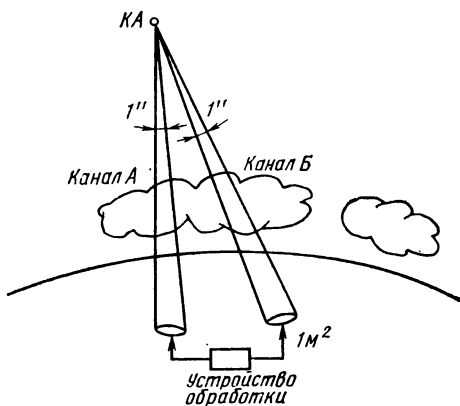


Рис. 3.14. Двухканальная система связи с пространственным разнесением

данном сигнале. В случае одинаковых показаний обоих счетчиков выбор сигнала на приемной стороне осуществляется по случайному закону; такой выбор при одинаковых априорных вероятностях посылки «1» и «0» является наилучшим.

При расчете вероятности ошибочного приема двоичного знака предполагается, что распределение фотоэлектронов описывается законом Пуассона, и учитываются только квантовые шумы сигнала. Полученные выражения легко обобщаются для учета аддитивных внешних и внутренних шумов. Вначале рассматривается двухканальная система передачи цифровой информации при отсутствии мультипликативных шумов, обусловленных явлениями турбулентности атмосферы в канале. При передаче «1» в каналах *A* и *B* передаются оптические импульсы со средним значением числа наблюдаемых фотоэлектронов \bar{s}_A и \bar{s}_B , соответственно. При этом $\bar{s}_A = K\bar{s}_B$, где $K > 1$. Числа наблюдаемых фотоэлектронов в счетчиках равны соответственно n_A и n_B . Вероятность того, что счетчик *A* подсчитает меньше фотоэлектронов, чем счетчик *B*, т. е. $n_A < n_B$, равна

$$P_1 = \sum_{n_B=1}^{\infty} \frac{\bar{s}_B^{-n_B} e^{-\bar{s}_B}}{n_B!} \sum_{n_A=0}^{n_B-1} \frac{(K\bar{s}_B)^{n_A}}{n_A!} e^{-K\bar{s}_B}.$$

Когда показания обоих счетчиков одинаковы, т. е. $n_A = n_B$, вероятность такого события равна

$$P_2 = \sum_{n_B=0}^{\infty} \frac{\bar{s}_B^{-n_B} e^{-\bar{s}_B}}{n_B!} \frac{(K\bar{s}_B)^{n_B} e^{-K\bar{s}_B}}{n_B!}.$$

Учитывая эти вероятности, можно получить вероятность приема символа «0», когда в действительности передан символ «1», т. е. среднюю вероятность ошибочного приема двоичного знака (в силу симметричности обоих каналов):

$$P_{\text{ош}}^* = P_1 + \frac{1}{2} P_2.$$

Для учета действия турбулентной среды на оптический канал необходимо произвести усреднение вероятности ошибки двоичного знака по логарифмически-нормальному закону. Считаем, что входящая в выражение для $P_{\text{ош}}^*$ величина \bar{s}_B распределена по логарифмически-нормальному закону, т. е.

$$G(\bar{s}_0, \sigma, \bar{s}_B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\bar{s}_B}} \exp\left[-\frac{(\ln \bar{s}_B/\bar{s}_0 + \sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где \bar{s}_0 — среднее значение величины \bar{s}_B ; σ — среднеквадратическое отклонение величины $\ln \bar{s}_B$. Тогда усредненная вероятность ошибочного приема двоичного знака будет иметь вид

$$P_{\text{ош}} = \int_0^{\infty} G(\bar{s}_0, \sigma, \bar{s}_B) P_{\text{ош}}^*(\bar{s}_B) d\bar{s}_B.$$

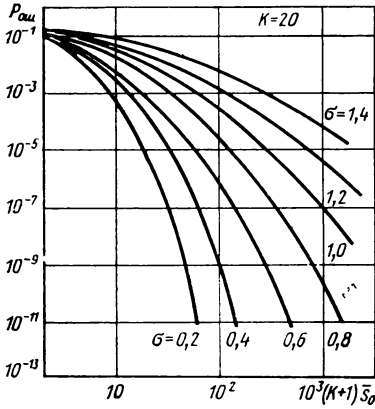


Рис. 3.15. Зависимость вероятности ошибочного приема двоичного знака от полного среднего числа фотонов, приходящегося на двоичный знак

ванных вероятностей ошибки, в функции σ и $K^{-1} \cdot 10^2$. Величина K связана с глубиной модуляции, а величина $K^{-1} \cdot 10^2$ соответствует отношению импульсных энергий в двух каналах, выраженному в процентах.

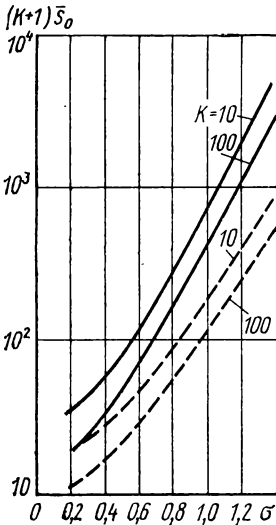


Рис. 3.16. Зависимость полного среднего числа фотонов на двоичный знак от интенсивности флюктуаций атмосферы:

— $P_{ош} = 10^{-6}$; - - - $P_{ош} = 10^{-4}$

На рис. 3.15 приведены графики вероятности ошибки в функции параметра $(K+1)\bar{\sigma}_0$. Параметр $(K+1)\bar{\sigma}_0$ соответствует полному среднему числу фотонов на импульс и пропорционален энергии на входе оптического приемника, приходящейся на двоичную единицу. В качестве параметра на рис. 3.15 используется величина, характеризующая интенсивность флюктуаций, σ . Среднеквадратичное отклонение флюктуаций σ зависит от условий атмосферной турбулентности и характеристик передающей и приемной оптических антенн. На рис. 3.16 и 3.17 приведены графики полного среднего числа фотонов на импульс, необходимого для получения фиксированных вероятностей ошибки, в функции σ и $K^{-1} \cdot 10^2$. Величина K связана с глубиной модуляции, а величина $K^{-1} \cdot 10^2$ соответствует отношению импульсных энергий в двух каналах, выраженному в процентах.

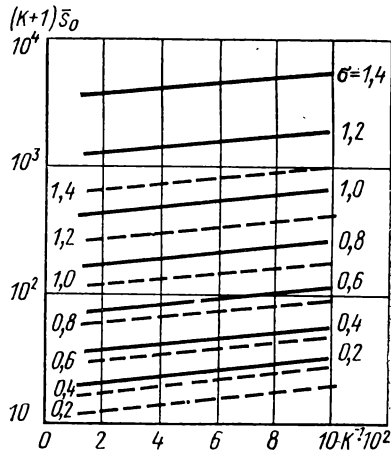


Рис. 3.17. Зависимость полного среднего числа фотонов на двоичный знак от процентного соотношения энергий в импульсе в двух каналах:

— $P_{ош} = 10^{-6}$; - - - $P_{ош} = 10^{-4}$

Из рассмотрения рис. 3.17 следует, что применение большой глубины модуляции не дает каких-либо существенных преимуществ. Это обстоятельство позволяет снизить требования к модуляторам. Вероятность ошибки в системе связи сильно зависит от σ (см. рис. 3.15 и 3.16), что предъявляет жесткие требования к выбору трассы распространения и к геометрическим размерам приемных и передающих оптических антенн.

При применении оптической связи часто используется так называемый режим ограничения тепловыми шумами (в отличие от режима ограничения дробовым или квантовым шумом) [84, 16, 59]. В этом режиме интенсивность излучения лазера сильно увеличивается. Дискретные импульсы тока фотодетектора сливаются в непрерывный сигнал, а основными шумами являются тепловые шумы приемника. Следовательно, плотность распределения значений сигнального тока в смеси с током тепловых шумов подчиняется нормальному закону:

$$p(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} \exp\left[-\frac{(i-i_s)^2}{2\sigma_T^2}\right],$$

где σ_T^2 — дисперсия флюктуаций теплового тока; i_s — среднее значение сигнального тока.

Как указывалось ранее, в турбулентной атмосфере интенсивность I сигнального излучения претерпевает флюктуации, характеризуемые логарифмически-нормальным распределением. Ток i_s линейно связан с интенсивностью I при времени передачи сигнала τ много меньшем, чем время когерентности турбулентного канала [32]. Поэтому ток будет подчиняться логарифмически-нормальному закону

$$p(i_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s i_s} \exp\left[-\frac{(\ln i_s/\bar{i}_s + \sigma_s^2/2)^2}{2\sigma_s^2}\right],$$

где σ_s^2 — дисперсия флюктуаций $\ln i_s$, а \bar{i}_s — среднее значение i_s .

В результате усреднения по логарифмически-нормальному распределению плотность вероятности флюктуаций тока i запишется в виде

$$p_0(i) = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{(i-i_s)^2}{2\sigma_T^2} - \frac{(\ln(i_s/\bar{i}_s + \sigma_s^2/2))^2}{2\sigma_s^2}\right]^2}{i_s} di_s.$$

Для вычисления интеграла в работе [32] был применен метод наискорейшего спуска. В результате было найдено

$$p_0(i) = \frac{\exp\left[-\frac{(i-i_{s_0})^2}{2\sigma_T^2} \left(1 + \left(\frac{i_{s_0}\sigma_s}{\sigma_T}\right)^2\right)\right]}{\sqrt{2\pi} [2(i_{s_0}\sigma_s)^2 - (i_{s_0}\sigma_s^2 + \sigma_T^2)]},$$

где i_{s_0} для тока i определяется из уравнения

$$-(i_{s_0}/\sigma_T)^2 + i i_{s_0}/\sigma_T^2 - (\ln(i_{s_0}/\bar{i}_s) + \sigma_s^2/2)/\sigma_s^2 = 0.$$

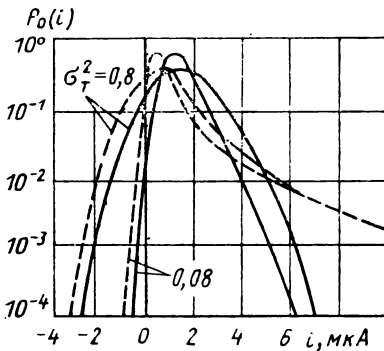


Рис. 3.18. Графики стационарного распределения флюктуаций тока:
 $\sigma_s = 0,5$; ———— $\sigma_s = 1,5$; $i_s = 1$

Кривые плотности распределения $\rho_0(i)$ приведены на рис. 3.18. Из рисунка видно, что кривые асимметричны и существенно отличаются от гауссовой кривой; с возрастанием интенсивности флюктуаций турбулентной атмосферы асимметрия значительно увеличивается. Кроме того, при высоких уровнях турбулентности статистика флюктуаций тока i в области больших отклонений i от i_s определяется уровнем турбулентности атмосферы (это следует из сопоставления пунктирных кривых).

Таким образом, для расчета помехоустойчивости двухканальной системы связи в режиме ограничения

тепловыми шумами можно воспользоваться аналитическими выражениями для плотности распределения тока $\rho_0(i)$ и графиками, представленными на рис. 3.18 [32].

3.6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ И ЛОКАЦИИ

Целесообразность применения лазерных систем связи и локации для ближнего и дальнего космоса была осознана еще с момента изобретения лазера. Однако отсутствие достаточно мощных и компактных когерентных излучателей, не высокое качество элементов систем, отсутствие глубоких теоретических проработок путей применения — все это сдерживало развитие лазерной связи и локации. В настоящее время эти сдерживающие факторы преодолены, и начался этап разработки и экспериментальных испытаний указанных систем. По данным зарубежной печати рассмотрим некоторые из них.

Система связи для ближнего космоса

Рассматриваемая информационная система разработана для комплексного исследования Земли из космоса [45, 93]. Эта система должна обладать информационной пропускной способностью не менее $3 \cdot 10^8$ дв. ед./с. При выборе конфигурации системы исходили из того, что самым эффективным способом передачи информации с исследовательского ИСЗ на Землю является способ передачи через синхронный спутник-ретранслятор (высота орбиты около 36 тыс. км). При такой конфигурации необходимы две линии связи: «Исследовательский ИСЗ — синхронный спутник-ретранслятор» и «синхронный спутник — Земля». При этом наиболее целесообразным было рекомендовано на линии «исследовательский ИСЗ — синхронный спутник» использовать лазерную систему с когерентным излучателем — лазером на двуокиси углерода (CO_2).

Техническими факторами, определяющими возможность создания такой лазерной системы связи, явились:

- 1) высокий коэффициент усиления антенн при данных апертурах;
- 2) наличие достаточно мощного источника излучения (на длине волны

10,6 мкм);

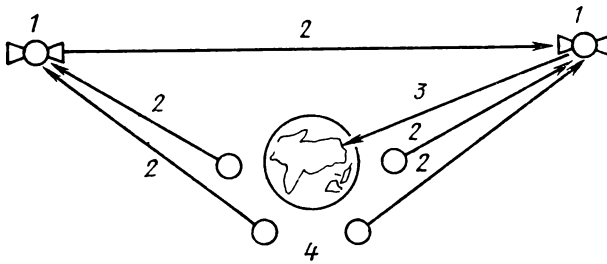


Рис. 3.19. Конфигурация спутниковой системы передачи информации:

1 — синхронные ИСЗ; 2 — лазерные каналы; 3 — СВЧ канал; 4 — исследовательский ИСЗ

3) точностные требования к изготовлению оптических элементов и требования к наведению антенн оказываются в пределах возможностей современной технологии.

Создание рассматриваемого информационного комплекса определялось необходимостью изучения окружающих условий и ресурсов атмосферы Земли, ее континентов, береговых шельфов, океанов, морей и озер.

Рассмотрим основные особенности и характеристики лазерной информационной системы, предназначенной для исследования Земли из космоса. Типовая схема спутникового информационного комплекса показана на рис. 3.19. Сеть низкоорбитальных исследовательских спутников осуществляет сбор научной информации о земной поверхности и атмосфере. Информация с низкоорбитальных спутников передается по лазерным каналам в реальном масштабе времени на геостационарные спутники. Последние осуществляют прием данных и их ретрансляцию в реальном масштабе времени на земную станцию. Все межспутниковые линии оснащаются лазерными системами связи, все линии ИСЗ — Земля — системы радиосвязи СВЧ диапазона.

Достоинствами лазерных каналов связи являются малые габаритные размеры антенн и оптических элементов, отсутствие частотных ограничений и, вследствие высокого коэффициента усиления антенн и узкой диаграммы направленности, отсутствие помех, создаваемых наземными источниками.

В оптическом диапазоне могут быть сконструированы антенны с высоким усилением, поскольку коэффициент усиления антенны обратно пропорционален квадрату длины волны. Так, при радиусе первичного зеркала 10 см на волне 10,6 мкм коэффициент усиления составляет около 94 дБ и половинный угол равен 50 мкрад.

Высокий коэффициент усиления оптических антенн усложняет решение проблемы поиска, обнаружения и отслеживания сигнала. При решении этой проблемы необходимо учитывать отклонение координат космического аппарата и неопределенность их мгновенных значений. Это приводит к необходимости установления двусторонней связи. Как указывается в работе [45], космический аппарат может быть стабилизирован с точностью $\pm 0,1^\circ$ ($\pm 1,75$ мрад) и перемещаться с угловой скоростью $0,01^\circ/\text{с}$; если ширина луча связанной антенны равна 35 мкрад, то угловым отклонениям на $\pm 0,1^\circ$ будет соответствовать 100 угловых размеров ширины луча или 100×100 возможных положений станции, с которой устанавливается связь, в поле зрения антенны. Если учесть, что из-за углового перемещения космического аппарата местоположение станции будет меняться, то ясно, что обе станции должны активно отслеживать друг друга.

Последовательность операций системы при обнаружении и захвате включает пять этапов:

- 1) облучение лазерным лучом одного спутника зоны неопределенности нахождения второго; при этом ширина луча охватывает всю зону неопределенности (широкий луч) [45];
- 2) приемник второго спутника сканирует узким лучом зону неопределенности положения первого спутника;
- 3) после обнаружения и захвата сигнала первого спутника станция второго

спутника наводит передающую антенну с узким лучом на первый спутник (с возможным упреждением);

4) приемник первого спутника осуществляет узким лучом поиск луча передатчика второго спутника (в пределах зоны неопределенности положения второго спутника);

5) после обнаружения луча передатчика осуществляется передача информации со второго спутника на первый.

При необходимости обеспечения дуплексной широкополосной связи нужно еще включить этап сужения широкого луча на первом спутнике для передачи соответствующей информации.

После завершения процедуры обнаружения и захвата необходимо обеспечить режим углового сопровождения. Угловое сопровождение можно реализовать моноимпульсным методом или методом конического сканирования. Моноимпульсный метод слежения требует четырех фотодетекторов с криогенными охладителями. При круговом сканировании необходим генератор синусоидального опорного сигнала и квадратурные фазовые детекторы, с помощью которых вырабатываются сигналы ошибок слежения по горизонтали и вертикали. Отслеживание частоты сигнала при гетеродинном приеме может осуществляться автоматически с помощью приемника с фазовой автоподстройкой, установленного на выходе фотосмесителя.

Конфигурация спутниковой системы связи определяет необходимость выбора соответствующих полей зрения и углов раствора диаграмм. Станция на синхронном спутнике должна иметь угловое поле зрения, полностью охватывающее самую высокую из орбит низковысотных исследовательских спутников; для круговой орбиты с высотой 1852 км поле зрения должно составлять $22,5^\circ$. В пределах этого кругового конуса станция спутника-ретранслятора на высокой орбите должна сканировать узкий приемный луч, типовая угловая ширина которого составляет от 50 до 100 мкрад. Для исследовательского спутника на низкой орбите поле зрения должно охватить полусферу, в пределах которой необходимо сканировать свой узкий луч. Угловые скорости, которые требуется отслеживать, следующие: для синхронного спутника от 0 до 220 мкрад/с, для низкоорбитального ИСЗ от 0 до 1460 мкрад/с [45].

Углы упреждения, связанные с конечностью скорости света, составляют 15 ... 20 мкрад. Доплеровские сдвиги частоты на линии связи между синхронным и низкоорбитальными спутниками зависят от высоты орбиты спутника и могут изменяться в пределах ± 700 МГц.

С учетом приведенных цифровых данных рассмотрим структурную схему и функционирование лазерного гетеродинного приемопередатчика [45].

Упрощенная структурная схема лазерного гетеродинного приемопередатчика показана на рис. 3.20. Полезный сигнал попадает на плоское зеркало грубого наведения, укрепленное в кардановом подвесе. Отражаясь от зеркала, излучение

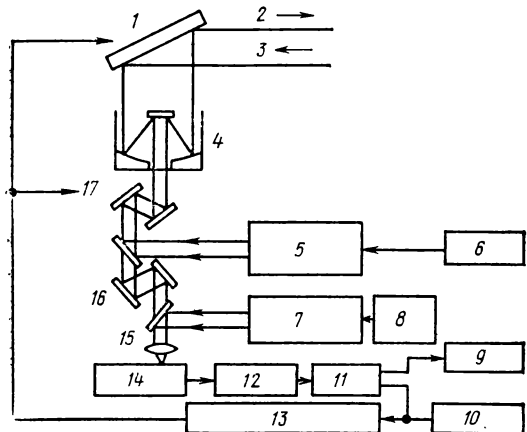
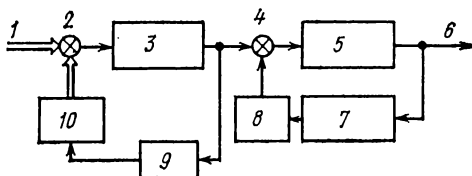


Рис. 3.20. Структурная схема лазерного гетеродинного приемопередатчика:

1 — зеркало грубого наведения; 2 — передача; 3 — прием; 4 — телескоп; 5 — лазерный передатчик и модулятор; 6 — видеовыход; 7 — лазерный гетеродин; 8 — стабилизатор на ячейке Штарка; 9 — видеовыход; 10 — команда; 11 — УПЧ; 12 — предусилитель; 13 — обнаружение и слежение; 14 — смеситель; 15 — ввод энергии гетеродина; 16 — нутатор; 17 — УНД

Рис. 3.21. Лазерный гетеродинный приемник с двойным преобразованием частоты сигнала:

1 — принимаемый сигнал; 2 — фотосмеситель; 3 — широкополосный УПЧ; 4 — радиочастотный смеситель; 5 — 2-й УПЧ; 6 — информация; 7 — следящая система; 8 — ГУН; 9 — АПЧ; 10 — лазерный гетеродин



поступает в приемный телескоп. Поле зрения зеркала грубого наведения определяет телесный угол, в котором должно осуществляться сканирование и захват сигнала. Мгновенное поле зрения телескопа определяется размером диаграммы направленности антенны. Для управления местоположением мгновенного поля зрения в полном поле зрения телескопа используется устройство наведения луча (УНЛ) с пьезоэлектрическим приводом. Ширина мгновенного поля зрения составляет 35 мкрад, а ширина полного поля зрения 35 мрад. В процессе обнаружения и захвата сигнала, а также при последующем слежении, мгновенное поле зрения совмещается с направлением прихода принимаемого сигнала. УНЛ сканирует мгновенное поле зрения в пределах полного поля зрения во время начального поиска и осуществляет коррекции при сопровождении. При приближении УНЛ к концу максимального диапазона отклонения вырабатывается сигнал, обеспечивающий сдвиг зеркала грубого наведения до тех пор, пока УНЛ не окажется вновь в центре своего диапазона.

Для разделения каналов приема и передачи используется дуплексер. Для кругового конического вращения сигнального луча используется нутатор. При вращении сигнального луча вырабатывается сигнал ошибки слежения. Для совмещения сигнального и гетеродинного лучей используется комбинированная оптическая система, после которой оба луча направляются на фотосмеситель, вырабатывающий сигнал промежуточной частоты. В качестве чувствительного элемента фотосмесителя гетеродинного приемника использован фотовольтаический диод на тройном соединении HgCdTe. Диапазон рабочих температур от 77 до 130 К, квантовая эффективность более 0,25, граничная частота по уровню 3 дБ около 850 МГц (фотосмеситель обеспечивает хорошее качество работы на промежуточных частотах до 1500 МГц) [45].

Чувствительность можно характеризовать эквивалентной шумовой мощностью, которая при промежуточной частоте 20 МГц, и указанных рабочих температурах составляла от 10^{-19} до $1,45 \cdot 10^{-19}$ Вт/Гц. Фотосмеситель konstruировался совместно с широкополосным предуслителем с полосой пропускания от 5 до 1500 МГц. Промежуточная частота содержит доплеровский сдвиг, который может достигать очень больших значений. Поэтому отслеживание доплеровского сдвига частоты осуществляется приемником с двойным частотным преобразованием (рис. 3.21).

В приемнике с двойным преобразованием первый контур преобразования на основе лазерного гетеродина отслеживает доплеровскую частоту с помощью АПЧ и обеспечивает получение первой промежуточной частоты, равной 400 МГц. Второй контур обеспечивает фазовую синхронизацию с помощью генератора управляемого напряжением (ГУН) следящей системы.

Передающий тракт включает источник информации, лазерный передатчик и модулятор, дуплексер, устройство наведения луча (УНЛ), телескопическую систему и зеркало грубого наведения.

Блок лазерного передатчика состоит из оптического квантового генератора на CO_2 , модулятора и подмодулятора. Металлокерамическая конструкция генератора включает разрядную трубку из окиси бериллия. Давление газа в трубке 120 мм рт. ст., ток разряда 3 мА, напряжение разряда 3,93 кВ. Выходная мощность 4,5 Вт, рабочий КПД 9%. Срок службы свыше 5000 часов. Охлаждение генератора осуществляется за счет отвода тепла к теплопоглотителю ИСЗ.

В электрооптическом модуляторе в качестве кристалла использован стержень из теллурида кадмия длиной 6 см. Стержень служит также диэлектриком симметричной полосковой линии передачи, связывающей модулятор с подмодулятором. Подмодулятор работает на согласованную нагрузку в широкой полосе

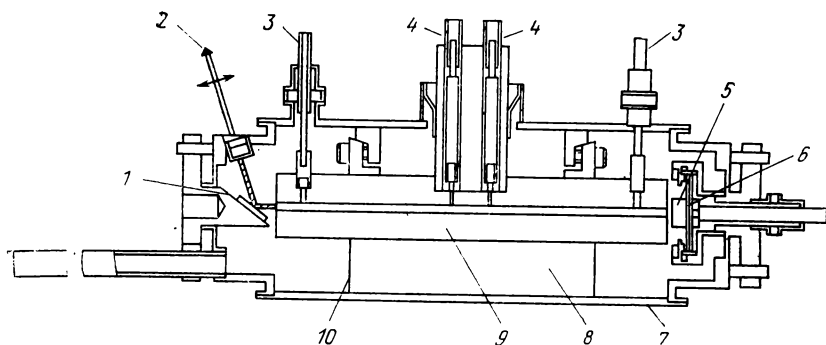


Рис. 3.22. Лазерный гетеродин:

1 — решетка; 2 — выход; 3 — анод; 4 — катоды; 5 — отражающее зеркало; 6 — пьезоэлектрическое устройство; 7 — коваровый цилиндр; 8 — алюминиевый теплоотвод; 9 — трубка из окиси бериллия; 10 — индиевая прокладка

частот. Температура корпуса модулятора стабилизируется около 50°C с точностью $\pm 0,04^{\circ}\text{C}$.

Лазерный гетеродин сконструирован на основе волноводного лазера высокого давления. Вследствие высокого давления в капилляре с газом CO_2 имеет место уширение линии молекулярного перехода из-за эффекта столкновений активных частиц (столкновительное уширение). Поэтому пределы перестройки лазера высокого давления могут составлять ± 600 МГц (а не ± 60 МГц, как это имеет место только из-за доплеровского уширения линии молекулярного перехода). Требуемый диапазон перестройки приемника для системы связи с пропускной способностью 300 млн. дв. ед/с составляет ± 400 МГц.

Для селективного выбора генерирующего перехода в активном веществе в лазерном гетеродинном генераторе используется решетка (эшелетт), которая выполняет также функции зеркала, поляризатора и элемента связи (рис. 3.22). Подбором угла наклона решетки добиваются генерации лазера на одном из 16 отдельных переходов в диапазоне волн от 10,467 до 10,788 мкм. Технические характеристики лазерного гетеродинного генератора следующие: выходная мощность 65 МВт, подводимая мощность к разрядной трубке 10 Вт, диапазон перестройки (1 дБ) более ± 300 МГц, давление газа 150 мм рт. ст., ток разряда 2 мА, общая длина 17,8 см, масса 0,63 кг [45]. После выбора с помощью эшелетта требуемого перехода гетеродин можно перестраивать в пределах ± 300 МГц с помощью перемещаемого пьезоэлектрическим устройством отражающего зеркала. Для стабилизации и регулирования частоты генерации использована поглощающая ячейка Штарка, т. е. часть энергии лазера пропускается через ячейку Штарка и производится стабилизация частоты лазера по линии поглощения ячейки. Управление частотой линии поглощения осуществляется приложенным к ячейке постоянным электрическим полем; изменением величины напряжения обеспечивается перестройка лазера. Долговременная и кратковременная стабильность частоты лазера составляет $3,5 \cdot 10^{-9}$. В качестве поглощающего вещества в ячейке Штарка применяются смешанные изотопные формы аммиака (смесь $\text{ND}_3\text{—NH}_3$).

Таким образом, рассмотрение некоторых особенностей лазерной спутниковой системы передачи широкополосной информации свидетельствует о том, что создание такой системы является решением крупной инженерной проблемы. Эта проблема решалась в рамках пятилетней программы работ, завершившихся созданием технических макетов системы [45]. Важно отметить, что реализация программы показала принципиальную техническую осуществимость лазерной системы связи. Как указывается в работе [45] остается спланировать и провести всестороннюю экспериментальную проверку опытных образцов системы в космических условиях.

Оптические локаторы

Применения оптической локации в научно-исследовательских целях весьма многообразны: уточнение вопросов небесной механики и космической геодезии, изучение дрейфа континентов и движения земных полюсов, уточнение модели Земли, точные геодезические измерения, локация ИСЗ на низких и средних орбитах, слежение за межпланетными космическими аппаратами, исследования прозрачности атмосферы, дистанционные измерения загрязнений атмосферы, стыковка космических аппаратов, измерение малых высот летательных аппаратов, измерение параметров движения космических аппаратов. Рассмотрим лишь некоторые из них.

В работе [98] сообщалось о разработке оптического локатора для измерения дальности и обеспечения стыковки космических аппаратов; кроме того, он может быть использован в качестве высотомера для летательных аппаратов. В качестве оптического квантового генератора передатчика использован лазер на арсениде галлия (GaAs). Выбор полупроводникового ОКГ определяется следующими факторами:

- 1) малые размеры и масса ОКГ;
- 2) прямое преобразование тока в инфракрасное излучение с высоким КПД;
- 3) возможность работы без специального охлаждения;
- 4) возможность прямой модуляции лазера короткими импульсами.

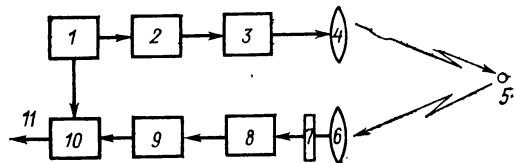
Структурная схема экспериментального лазерного локатора показана на рис. 3.23. Технические параметры локатора следующие: длина волны излучения 0,8440 мкм, импульсная мощность 9 Вт, длительность импульса 100 нс, частота повторения импульсов 330 Гц, ток накачки 40 А, телесный угол луча передатчика $3,2 \cdot 10^{-7}$ ср ($0,4 \times 0,8$ мрад), фотоприемник — ФЭУ с квантовой эффективностью $3 \cdot 10^{-3}$ (фотослой типа $S=1$), темновой ток фотоприемника 10^{-13} , а при температуре 300 К, телесный угол поля зрения приемника $3,8 \cdot 10^{-5}$ ср (ширина диаграммы направленности 7 мрад), площадь приемной апертуры $1,6 \cdot 10^{-2}$ м² при диаметре 14 см. Функции согласованного фильтра выполняет одноимпульсный линейный интегратор.

Лазерный дальномер был испытан в наземных условиях. По крупным целям, таким как деревья, дома, ангары рабочий диапазон дальностей, на которых надежно обнаруживался сигнал, составил 200 м ... 2 км. Рабочий диапазон дальностей при работе с уголкового зеркальным отражателем составил 2 ... 10 км. Также было обнаружено довольно сильное влияние турбулентной атмосферы, приводившее к сцинтилляциям направления луча и флуктуациям интенсивности сигнала [98].

В США по заданию NASA фирмой RCA был разработан оптический локатор, предназначенный для определения координат космонавтов на поверхности Луны [65]. Технические параметры локатора следующие: излучатель — полупроводниковый лазер на арсениде галлия с мощностью излучения в импульсе до 25 Вт; длительность импульса 60 нс. Линзовый объектив формирует луч $1^\circ \times 3^\circ$, который с помощью плоского зеркала направляется в сторону уголкового отражателя, носимого космонавтом. Небольшая часть излучения подается на фотодиод, запускающий счетчик дальности. Отраженное от уголкового отражателя излучение фокусируется на квадратную мозаику из четырех фотодиодов. При отклонении уголкового отражателя от оптической оси локатора сигналы в фотодиодах, образующих мозаику, не равны, что позволяет получить приращения

Рис. 3.23. Структурная схема экспериментального лазерного локатора, предназначенного для обеспечения стыковых космических аппаратов [89]:

1 — синхронный импульсный генератор; 2 — модулятор; 3 — ОКГ (GaAs); 4 — оптическая антенна; 5 — объект; 6 — оптическая антенна; 7 — интерференционный фильтр; 8 — фотоприемник; 9 — согласованный фильтр; 10 — измеритель дальности; 11 — информация о дальности



сигналов, пропорциональные углам рассогласования. В случае нахождения уголкового отражателя на оптической оси локатора сигналы равны, поскольку фотодиоды облучаются одинаковым световым потоком. Сигналы с выхода фотодиодов подаются на электронный блок слежения; одновременно ответный импульс подается в блок измерения дальности. Для обеспечения стабильности работы локатора при произвольной ориентации космонавта в качестве отражателя использовался 8-ячеистый призмный уголкового отражатель. Разработанный локатор обеспечивает слежение за космонавтами с угловой точностью $\pm 0,5$ мрад, измерение расстояния до них в пределах 1200 м с точностью $\pm 0,5$ м. Кроме того, локатор может быть использован для наведения телевизионной камеры на космонавта.

Для слежения за искусственными спутниками Земли с высотами орбит, лежащими в диапазоне 300 ... 2000 км, в Японии был разработан оптический локатор на рубиновом лазере [65]. Предполагается, что на ИСЗ установлены отражатели. Измеренная точность следящей за ИСЗ системы оказалась в 10 раз лучше радиотехнической системы аналогичного назначения. Для фокусировки луча используется телескопическая система. Чувствительным элементом приемника является ФЭУ, снабженный зеркальным объективом и интерференционным фильтром. Мощность передатчика в импульсе 5 МВт, частота следования импульсов 1 Гц, угол раствора луча 1 мрад, продолжительность сеанса измерений около 1 мин.

В целях изучения изменений конфигурации континентов Земли в 1976 г. в США был выведен на орбиту пассивный геодезический ИСЗ, оснащенный 426 уголковыми отражателями [65]. Две лазерных мобильных станции использовались для слежения за ИСЗ. Каждая станция имеет 5 лазерных передатчиков с генераторами оптического излучения на иттрий — алюминиевых гранатах, работающих в режиме удвоения частоты. Мощность в импульсе составляет $1,5 \cdot 10^9$ Вт, длина волны 0,532 мкм, длительность импульса 0,2 нс. В каждый данный момент времени независимо от ориентации спутника излучение отражается семью уголковыми отражателями. Точность измерения дальности составляет 5 см.

В заключение следует упомянуть о разработках самолетных и спутниковых лазерных локационных систем, предназначенных для исследования загрязнения атмосферы окисью азота [65]. Принцип действия систем состоит в использовании эффекта свечения окиси азота при облучении лазерным лучом. Спутниковая система, использующая лазер на окиси углерода, позволяет производить измерения на уровне моря при концентрации окиси азота $2 \cdot 10^{11}$ см⁻³ и энергии излучения лазера 5 Дж.

Лазерный высотомер

Управлением электроники армии США был разработан лазерный высотомер для бортовых обзорных систем [108]. Он может быть использован как альтиметр в самолетных системах посадки, а также в системах стыковки космических аппаратов. Упрощенная структурная схема лазерного альтиметра показана на рис. 3.24. Входная оптическая антенна построена по принципу оптической системы Кассегрена. Лазерный передатчик на арсениде галлия установлен перед вторым зеркалом системы Кассегрена. Длина волны излучения лазерного диода равна 0,902 мкм, импульсная мощность 25 Вт. Расходимость луча лазерного диода составляет 17,5°. С помощью коллиматора луч сужается до 2 мрад.

Поле зрения приемника составляет 5 мрад. В качестве чувствительного элемента приемника использован фотоэлектронный умножитель с фотослоем типа S=1 и внутренним усилением тока $5 \cdot 10^4$. Предварительный усилитель, использованный для усиления выходного сигнала ФЭУ, имеет усиление 55 дБ, полосу пропускания 40 МГц. Усиленный сигнал подается на цифровое и аналоговое вычислительные устройства. Цифровое устройство выдает информацию о дальности каждую секунду и предназначено для регистрации дальности до неподвижных или медленно движущихся целей. Для быстро перемещающихся целей используется аналоговое вычислительное устройство, способное выдавать непре-

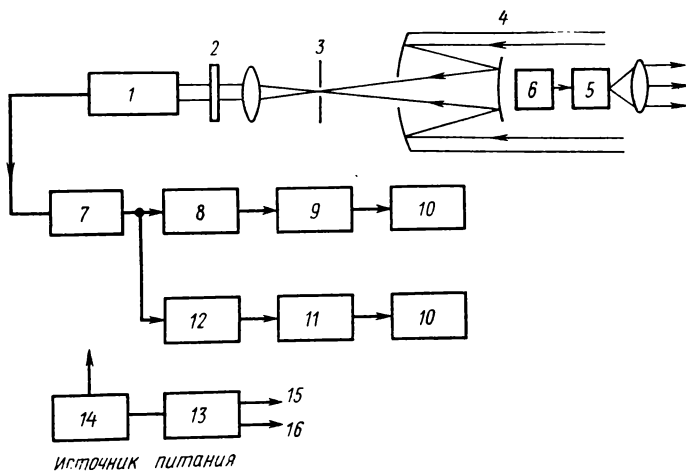


Рис. 3.24. Структурная схема лазерного альтиметра:

1, 15 — ФЭУ; 2 — фильтр; 3 — диафрагма; 4 — оптика Кассегрена; 5 — ОКГ (GaAs); 6, 16 — модулятор; 7 — предварительный усилитель; 8, 12 — пороговое устройство; 9 — цифровое ВУ; 10 — устройства отображения; 11 — аналоговое ВУ; 13 — преобразователь; 14 — батарея

ровную информацию. Эта информация отображается на панельном градуированном вольтметре. Оптический альтиметр обеспечивает всепогодные условия работы в диапазоне высот от 0 до 400 м.

ОПТИМАЛЬНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ, ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ И АДАПТИВНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

4.1. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Измерение параметров движения космических объектов с помощью оптических локаторов предполагает наблюдение отраженного или ретранслированного оптического сигнала. Оценка дальности, скорости, угловых параметров объектов связана с оценкой параметров оптического сигнала, таких, как интенсивность излучения, временная задержка сигнала, фаза несущей или фаза поднесущей, доплеровский частотный сдвиг несущей или поднесущей и др.

Очевидно, что устройства, производящие оценку параметров оптического сигнала, должны быть оптимальными. Проектирование оптимальных устройств оценки параметров сигнала основано на результатах статистической теории оценки. Статистическая теория оценки позволяет в обобщенном виде получить алгоритмы оценивания параметров оптического сигнала и аналитические выражения для расчета эффективности оценки. Таким образом, конечной целью применения теории оценки является синтез устройств обработки сигнала, сводящийся к нахождению оптимальных алгоритмов определения значений наблюдаемого сигнала.

Классическая теория оценки параметров сигнала основана на том, что полезный сигнал в смеси с шумом может быть измерен с той точностью и детальностью, которые необходимы. Например, минимальная дисперсия несмещенной оценки несущей частоты сигнала, принимаемого на фоне белого гауссова шума, обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и длительности сигнала [80, 101]. Следовательно, увеличивая отношение сигнал/шум или длительность сигнала можно сколь угодно точно измерить параметр сигнала. Классическая теория показывает как производить обработку сигнала для оценки параметров сигнала с минимально возможной средней ошибкой.

При измерении параметров сигнала оптических частот часто, особенно в предельных случаях, необходимо использовать аппарат квантовой механики и представлять сигнал в виде совокупности фотонов. Тогда обычные совместные функции плотности вероятности заменяются статистическим оператором (матрицей плотности) наблюдаемого сигнала. Кроме того, при квантовых измерениях важно решить не только как осуществляется обработка сигнала

(т. е. каков алгоритм оценки), но и какие измерения наблюдаемого сигнала являются наилучшими.

В обоих случаях (классическом и квантовом) теория оценки должна позволять находить несмещенную оценку параметра с минимальной дисперсией.

Ниже дан обзор некоторых результатов теории оценки параметров оптических сигналов.

4.2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

При анализе квантовых измерителей в разд. 1.3 было показано, что при оценке одного параметра θ из матрицы плотности $\rho(\theta)$ нижняя граница для среднеквадратичной ошибки оценки параметра подчиняется квантовомеханическому неравенству Крамера — Рао [см. выражение (1.66)], впервые полученному в работах [101, 104, 105]. Легко показать, что когда оценка является несмещенной, то

$$\sigma_{\theta}^2 \geq [\text{sp } \rho L^2]^{-1} = \left[\text{sp} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} L \right) \right]^{-1}, \quad (4.1)$$

где L — симметризованная логарифмическая производная $\rho(\theta)$ по θ , определяемая уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (L\rho + \rho L). \quad (4.2)$$

Если симметризованная логарифмическая производная L пропорциональна разности $\hat{\theta} - \theta$, т. е.

$$L = k(\theta) (\hat{\theta} - \theta), \quad (4.3)$$

где $k(\theta)$ — функция только истинного значения параметра θ , но не оператора $\hat{\theta}$, то неравенство в выражении (4.1) переходит в равенство. Тогда оператор $\hat{\theta}$ обеспечивает эффективную несмещенную оценку параметра θ .

В разд. 1.3 были приведены операторы эффективной и несмещенной оценки амплитуды когерентного сигнала, синуса фазы, косинуса фазы, а также дисперсии их оценок.

Рассмотрим оценку интенсивности некогерентного одномодового сигнала, времени прихода сигнала, средней частоты сигнала и других параметров, следуя в основном [80, 101, 104, 105].

Оценка интенсивности некогерентного одномодового сигнала. Пусть в полости резонатора идеального приемника возбуждается одна мода электромагнитного поля. Как было показано ранее, генерирующая мода эквивалентна простому гармоническому осциллятору, энергетические уровни которого кратны величине $\hbar\omega$, где ω — угловая частота моды. Если мода возбуждается тепловым излучением (шумом) внутренних стенок полости резонатора, находя-

щихся в тепловом равновесии при абсолютной температуре T , то матрица плотности моды равна

$$\rho = (1 - e^{-\omega}) e^{-\omega a^+ a}, \quad \omega = \hbar\omega/kT.$$

Среднее число фотонов в моде определяется формулой Планка

$$n = \text{sp } \rho a^+ a = (e^{\omega} - 1)^{-1}. \quad (4.4)$$

Из этого выражения следует, что оценка среднего числа n эквивалентна измерению температуры T полости резонатора (что в принципе всегда может быть осуществлено).

Будем считать, что мода возбуждается тепловым шумом полости резонатора и некогерентным сигналом, имеющим статистические характеристики такие же, как и тепловой шум [101]. Тогда среднее число фотонов в моде $n = n_c + n_{\text{ш}}$, где n_c , $n_{\text{ш}}$ — средние числа фотонов, обусловленные действием некогерентного сигнала и теплового шума полости резонатора, соответственно. Если $n_{\text{ш}}$ известно, то оценка среднего числа фотонов n позволяет измерить интенсивность некогерентного сигнала, пропорциональную n_c .

Полагаем, что оценке подлежит среднее число фотонов в моде n . Тогда, учитывая формулу (4.4), матрицу плотности можно привести к виду

$$\rho = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{a^+ a}.$$

Дифференцируя последнее выражение по n , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial n} &= - \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{a^+ a} + \frac{1}{n+1} a^+ a \left(\frac{n}{n+1} \right)^{a^+ a-1} \times \\ &\times \frac{1}{(n+1)^2} = - \frac{1}{n+1} \rho + a^+ a \frac{1}{n(n+1)} \rho = \rho [n(n+1)]^{-1} (a^+ a - n). \end{aligned}$$

Из формулы (4.2) следует выражение для симметризованной логарифмической производной L (при условии коммутации ее с ρ):

$$L = [n(n+1)]^{-1} (a^+ a - n).$$

Нижняя граница дисперсии несмещенной оценки среднего числа фотонов в моде n получается из формулы (4.1):

$$\sigma_n^2 \geq [n(n+1)]^2 [\text{sp } \rho (a^+ a - n)^2]^{-1}.$$

В работе [101] проведено вычисление этого выражения:

$$\sigma_n^2 \geq n(n+1).$$

Как и следовало ожидать, полученное выражение совпадает с дисперсией распределения Бозе — Эйнштейна, которое характеризует статистику фотонов одномодового излучения, возбуждаемого теп-

ловым полем [84]. Полученное выражение для симметризованной логарифмической производной L пропорционально оператору $a^+a - n$. Сравнив этот оператор с общим выражением (4.3) для симметризованной логарифмической производной видим, что оператор a^+a обеспечивает несмещенную эффективную оценку среднего числа фотонов в моде с минимальной дисперсией $n(n+1)$.

Оценка параметров многомодового оптического сигнала. При описании многомодового когерентного сигнала, наблюдаемого в резонаторе приемника, в качестве базиса разложения часто используются когерентные состояния, подробно рассматривавшиеся в работе [97].

Оператор электрического поля в точке \mathbf{r} резонатора можно записать в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = E^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E^{(-)}(\mathbf{r}, t).$$

Операторы $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$, рассматриваемые порознь, не являются эрмитовыми. Однако они являются эрмитово-сопряженными по отношению друг к другу, т. е.

$$E^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [E^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^+.$$

Выражение для положительно-частотной части оператора электрического поля при разложении по нормальным типам колебаний (модам) резонатора имеет вид

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \mathbf{e}_s a_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)],$$

где L^3 — нормировочный куб, размеры которого совпадают с размерами резонатора; \mathbf{e}_s — единичный вектор поляризации (вследствие кулоновской калибровки вектор поляризации описывает поперечную поляризацию $s=1, 2$); $a_{\mathbf{k}}$ — оператор уничтожения фотона в \mathbf{k} -й моде.

Подобным образом можно записать выражение для отрицательно-частотной части оператора электрического поля. В последнем случае в выражение будет входить оператор рождения фотона. Оператор $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ связан с поглощением фотонов поля. Приложенный к вектору, характеризующему состояние поля с n фотонами, он переводит исходное состояние в состояние с $n-1$ фотонами. Операторы уничтожения и рождения фотона в \mathbf{k} -й моде удовлетворяют правилам коммутации:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^+, a_{\mathbf{k}'}^+] = 0; [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.$$

Как показано в работе [97], существуют квантовые состояния поля, которые являются собственными состояниями (функциями) положительно-частотной и отрицательно-частотной частей оператора электрического поля:

$$E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \rangle = \epsilon_s(\mathbf{r}, t) | \rangle; \langle | E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_s^*(\mathbf{r}, t) \langle |,$$

где s — индекс поляризации.

Функции $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ и $\varepsilon^*(\mathbf{r}, t)$ являются функциями координат и времени, интерпретируются как комплексные собственные значения. Поскольку $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет волновому уравнению, этому же уравнению удовлетворяет функция $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$. Следовательно, функцию $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ можно представить в виде разложения по нормальным типам колебаний резонатора (модам):

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\hbar \omega_k}{2L^3} \right)^{1/2} e_s \mu_k \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)].$$

где μ_k — комплексные коэффициенты.

Известно, что представление поля в виде разложения по нормальным типам колебаний эквивалентно разложению по элементарным гармоническим осцилляторам. Тогда поле рассматривается как совокупность осцилляторов. Каждый из нормальных типов колебаний есть квантовый осциллятор с уровнями энергии $\hbar\omega_k(n_k + 1/2)$, которые являются собственными значениями оператора энергии поля $H = \sum_k \hbar\omega_k(a_k^+ a_k + 1/2)$.

Комплексные коэффициенты μ_k соответствуют классическим полевым амплитудам принимаемого сигнала и обычно нормируются так, что $|\mu_k|^2$ есть среднее число сигнальных фотонов в k -й моде.

Совокупность подлежащих оценке параметров принимаемого сигнала можно представить в виде вектора θ . Составляющими вектора θ могут быть амплитуда сигнала, время прихода сигнала в приемник, несущая частота сигнала и другие составляющие. Тогда функция ε будет зависеть не только от координат и времени, но и от вектора параметров θ , т. е.

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t, \theta) = i \sum_k \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\hbar \omega_k}{2L^3} \right)^{1/2} e_s \mu_k(\theta) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)].$$

Если когерентный сигнал наблюдается в смеси с гауссовым шумом (фоновым излучением), то поле в резонаторе является смесью квантовомеханических состояний. Эта смесь характеризуется матрицей плотности. В когерентном представлении, т. е. в представлении собственных функций операторов уничтожения и рождения фотонов, матрица плотности имеет вид [97, 101]

$$\begin{aligned} \rho(\theta) = & \int \dots \int \exp \left[- \sum_k |\alpha_k - \mu_k(\theta)|^2 / n_k \right] \prod_k |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k | (d^2\alpha_k / \pi n_k) = \\ & = \prod_k [1 - \exp(-\omega_k)] \exp \{ -\omega_k [a_k^+ - \mu_k^*(\theta)][a_k - \mu_k(\theta)] \}, \end{aligned}$$

где μ_k — амплитуда когерентной части поля в k -й моде; $n_k = (\exp \omega_k - 1)^{-1}$ — среднее число шумовых фотонов в k -й моде.

При такой записи матрицы плотности считается, что корреляция между модами отсутствует.

В соответствии с выражением (4.1) для получения дисперсии оценки параметра необходимо вычислить производную матрицы плотности $\rho(\theta)$ по j -му параметру θ_j и соответствующую симметризованную логарифмическую производную L_j , удовлетворяющую уравнению (4.2). Эти вычисления были проведены в работе [101]. Результаты вычислений следующие:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} \sum_k n_k^{-1} \left[\frac{\partial \mu_k^*}{\partial \theta_j} (a_k - \mu_k) \rho + \rho \frac{\partial \mu_k}{\partial \theta_j} (a_k^+ - \mu_k^*) \right];$$

$$L_j = \sum_k (n_k + 1/2)^{-1} \left[\frac{\partial \mu_k^*}{\partial \theta_j} (a_k - \mu_k) + \frac{\partial \mu_k}{\partial \theta_j} (a_k^+ - \mu_k^*) \right].$$

Тогда для совместной оценки i -го и j -го параметров сигнала имеем

$$\text{sp} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} L_j \right) = 2 \sum_k (n_k + 1/2)^{-1} \text{Re} \left(\frac{\partial \mu_k^*}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mu_k}{\partial \theta_j} \right).$$

Если производится оценка одного параметра сигнала θ_i , то

$$\text{sp} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} L_i \right) = 2 \sum_k (n_k + 1/2)^{-1} |\partial \mu_k / \partial \theta_i|^2,$$

и дисперсия оценки параметра имеет вид

$$\sigma_{\theta_i}^2 \geq \left[2 \sum_k (n_k + 1/2)^{-1} |\partial \mu_k / \partial \theta_i|^2 \right]^{-1}.$$

При достаточно длительном наблюдении сигнала приемником тепловое излучение в полости резонатора находится в равновесном состоянии и может характеризоваться абсолютной температурой T . Среднее число шумовых фотонов в k -й моде определяется известной формулой Планка: $n_k = (\exp \omega_k - 1)^{-1}$, где $\omega_k = \hbar \omega_k / kT$. Как правило, в информационных системах когерентный сигнал занимает узкую полосу частот, поэтому среднее число шумовых фотонов в относительно небольшом числе возбуждаемых мод можно приближенно характеризовать формулой $n = (\exp \omega - 1)^{-1}$, $\omega = \hbar \Omega / kT$, где Ω — несущая частота сигнала. Тогда [101]

$$\sigma_{\theta_i}^2 \geq \frac{1}{2} (n + 1/2) \left[\sum_k |\partial \mu_k / \partial \theta_i|^2 \right]^{-1}.$$

Учитывая, что энергия когерентного сигнала в приемнике

$E_c = \sum_k \hbar \omega_k |\mu_k|^2 \cong \hbar \Omega \sum_k |\mu_k|^2$, запишем окончательное выражение для нижней границы дисперсии оценки параметра сигнала:

$$\sigma_{\theta_i}^2 \geq \left[\frac{2E_c}{\hbar \Omega (n + 1/2)} \sum_k |\partial \mu_k / \partial \theta_i|^2 \right]^{-1} \sum_k |\mu_k|^2.$$

Как видно из последнего выражения, отношение сигнал/шум имеет квантовую форму $2E_c/\hbar\Omega(n+1/2)$ (вместо $2E_c/kT$, справедливую для классического случая).

Можно показать, что при приеме линейно поляризованного узкополосного сигнала распределение амплитуд поля μ_k пропорционально положительно-частотной части спектра сигнала $S_{(+)}(\omega_k)$. Тогда, при достаточно большом резонаторе приемника суммирование по модам можно приближенно заменить интегрированием по частоте, т. е.

$$\sum_k |\mu_k|^2 \cong B \int_{-\infty}^{\infty} |S_{(+)}(\omega)|^2 d\omega,$$

где B — постоянная пропорциональности.

Оценка несущей частоты сигнала. Полагаем, что оцениваемым параметром является несущая частота Ω узкополосного сигнала. Задача оценки частоты сигнала возникает в доплеровских системах измерения скорости движущихся объектов. Спектр сигнала с учетом доплеровского сдвига можно представить в форме

$$S_{(+)}(\omega) = f(\omega - \Omega).$$

Очевидно, что производная $\partial\mu_k/\partial\Omega$ пропорциональна $\partial f(\omega_k - \Omega)/\partial\Omega$. Тогда

$$\sigma_{\Omega}^2 \geq \left[\frac{2E_c}{\hbar\Omega(n+1/2)} \right]^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} f'(\omega)|^2 d\omega \right\}.$$

Оценка времени прихода сигнала. При оценке времени прихода сигнала τ необходимо рассматривать временную задержку комплексной огибающей сигнала. Амплитуды типов колебаний (мод) сигнала будут иметь вид

$$\mu_k = \bar{\mu}_k \exp[i(\omega_k - \Omega)\tau + i\Psi],$$

где $\bar{\mu}_k$ — известная величина, а Ψ — общая фаза сигнала, которая может быть неизвестна.

Матрица плотности зависит от двух величин $\rho = \rho(\tau, \Psi)$. Дифференцируя выражение для амплитуды моды сигнала, имеем

$$\partial\mu_k/\partial\tau = i(\omega_k - \Omega)\mu_k.$$

Из очевидных физических предпосылок последнее выражение можно записать в виде

$$\partial\mu_k/\partial\tau = (\omega_k - \Omega) f(\omega_k - \Omega).$$

Тогда нижняя граница дисперсии оценки времени прихода сигнала равна (при фиксированном значении общей фазы Ψ):

$$\sigma_{\tau}^2 \geq \left[\frac{2E_c}{\hbar\Omega(n+1/2)} \right]^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega - \Omega)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \Omega)^2 \times \right. \\ \left. \times |f(\omega - \Omega)|^2 d\omega \right\} = \left[\frac{2E_c}{\hbar\Omega(n+1/2)} \right]^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |f(\omega)|^2 d\omega \right\}.$$

Поскольку в это выражение общая фаза Ψ не входит, его можно использовать и в случаях, когда фаза Ψ неизвестна.

Совместная оценка двух параметров сигнала. Если двумя параметрами сигнала являются время и частота, т. е. $\theta_1 = \tau$ и $\theta_2 = \Omega$, то справедлива следующая формула [101]:

$$\text{sp} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta_1} L_j \right) = \text{sp} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta_1} L_2 \right) = \frac{2E_c}{\hbar \Omega (n + 1/2)} \times \\ \times \text{Re} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \omega f^*(\omega) f'(\omega) d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega \right\}.$$

Эта величина с точностью до постоянного коэффициента может рассматриваться как смешанный момент второго порядка времени и частоты узкополосного сигнала (корреляционный момент случайных величин τ и Ω).

Как указывается в работах [101, 104, 105] квантовая теория оценки параметров позволяет найти лишь нижнюю границу дисперсий оценки времени прихода сигнала и его частоты; она оставляет открытым вопрос определения динамических переменных, измерение которых позволяет достичь этой границы. В этом смысле квантовая теория идет не далее, чем классическая теория оценки. Классическая теория указывает, что при высоком отношении сигнал/шум нижняя граница может быть достигнута с использованием приемника с большим ансамблем параллельных фильтров, согласованных с сигналом. Резонансные частоты фильтров должны быть плотно расположены в ожидаемом диапазоне изменений частоты Ω . Для оценки частоты сигнала и времени его прихода выходные напряжения ансамбля фильтров должны анализироваться детектором максимального сигнала с временным синхронизатором. Оценке подлежат максимальное значение выходного напряжения соответствующего фильтра и момент появления этого пикового значения. Очевидно, что оценка параметров квантового сигнала едва ли будет проще.

Для некогерентного оптического сигнала в смеси с фоновым излучением матрица плотности имеет обобщенную гауссову форму. В этом случае, если сигнал занимает спектральную полосу много меньше, чем полоса шума, нижний предел дисперсии оценки параметра определяется формулой [101, 105]

$$\sigma_{\theta}^2 \geq \hbar \Omega \Phi_{\text{ш}}(\Omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} [\partial \Phi_c / \partial \theta]^2 d\omega \right]^{-1},$$

где Ω — центральная частота сигнала; $\Phi_{\text{ш}}(\Omega)$ — спектральная плотность энергии шумового излучения; Φ_c — спектральная плотность энергии сигнального излучения.

4.3. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Приемник, производящий оценку параметра сигнала θ , состоит из оптической антенны, фотодетектора и устройства оценки. Обозначим через $z(t, \theta)$ наблюдаемый на выходе фотодетектора полезный сигнал в смеси с мешающим шумом. Наблюдаемый процесс зависит также от оцениваемого параметра θ . Устройство оптимальной оценки Y параметра сигнала θ производит математические операции над наблюдаемым процессом $z(t, \theta)$ и выдает оценку параметра $Y(z) = \hat{\theta}$, оптимальную в некотором смысле (рис. 4.1). Чаще всего в качестве критериев оптимальности используют критерий максимума апостериорной вероятности значения параметра θ и критерий минимума среднеквадратичного отклонения оценки $\hat{\theta}$ от истинного значения параметра θ . обстоятельный обзор по методам определения точностных характеристик в задачах оценки параметров сигнала дается в работе [5]. В данном разделе рассмотрим несколько примеров формирования алгоритмов устройств оценки, работающих в соответствии с критерием максимума апостериорной вероятности параметра θ [16, 84]. В соответствии с этим критерием оценкой параметра θ является такое значение параметра θ , при котором условная плотность вероятности параметра при наблюдении процесса на выходе фотодетектора $p(\theta/z)$ максимальна, т. е.

$$p(\hat{\theta}/z) = \max_{\hat{\theta}} p(\theta/z). \quad (4.5)$$

Следовательно, оценкой $\hat{\theta}$ является наиболее вероятное значение параметра θ , которое получается при наблюдении процесса z . Используя формулу полной вероятности, представим $p(\theta/z)$ в виде

$$p(\theta/z) = P(z/\theta) p(\theta) / P(z), \quad (4.6)$$

где $P(z/\theta)$ — вероятность получения значения z при данном значении параметра θ ; $p(\theta)$ — априорная плотность вероятности параметра θ ; $P(z)$ — вероятность значений процесса z (если z — непрерывная случайная величина, то вероятности необходимо заменить плотностями).

Для нахождения условия максимальности $p(\theta/z)$ по θ прологарифмируем выражение (4.6):

$$\log p(\theta/z) = \log P(z/\theta) + \log p(\theta) - \log P(z). \quad (4.7)$$

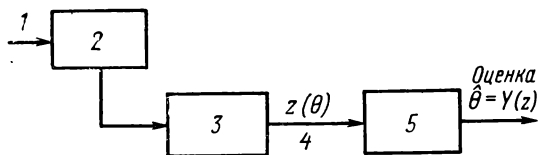


Рис. 4.1. Обобщенная схема устройства оценки параметра сигнала:

1 — входной сигнал; 2 — оптическая антенна; 3 — фотодетектор; 4 — выходной сигнал фотодетектора; 5 — устройство оценки

Последнее слагаемое выражение (4.7) от θ не зависит, поэтому уравнение максимальности, которому должна удовлетворять оптимальная оценка, равно [16]

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \log P(z/\theta) + \log p(\theta) \} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = 0. \quad (4.8)$$

При подстановке явных выражений для вероятностей и плотностей уравнение (4.8) может быть использовано для получения алгоритма вычисления оценки параметра $\hat{\theta}$ или структуры устройства оценки.

Качество работы устройства оценки или эффективность алгоритма, по которому производится вычисление оценки, характеризуют смещением и дисперсией оценки, которые определяются в виде

$$m(\hat{\theta}) = E[\theta - \hat{\theta}]; \quad (4.9)$$

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = E[\theta - \hat{\theta}]^2 - [m(\hat{\theta})]^2. \quad (4.10)$$

В выражениях (4.9) и (4.10) E означает усреднение, которое производится по совместным распределениям θ и z . Величина смещения характеризует среднее значение отклонения оценки от истинного значения параметра; дисперсия характеризует разброс относительно этого среднего. В каждом конкретном случае оценку необходимо выразить в виде аналитического соотношения в функции наблюдаемого процесса z , т. е. $\hat{\theta}(z)$, и затем воспользоваться соотношениями (4.9) и (4.10) для вычисления смещения и дисперсии оценки.

Нижняя граница дисперсии несмещенной оценки, так называемая граница Крамера — Рао, равна [16]

$$\text{ГКР } \sigma^2(\hat{\theta}) = \left\{ -E \left[\frac{\partial^2 \log [P(z/\theta)p(\theta)]}{\partial \theta^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (4.11)$$

Использование границы Крамера — Рао в практических расчетах обусловлено тем, что она близка к среднеквадратичной ошибке оптимальной оценки. Кроме того, в большинстве случаев граница Крамера — Рао достаточно просто вычисляется.

Оценка параметров оптического сигнала при лагеровской и пуассоновской статистиках отсчетов. Будем считать, что при действии оптического поля на фотодетектор выходной сигнал последнего $z(t, \theta)$ может быть представлен в виде дискретного вектора отсчетов $k = (k_1, k_2, \dots, k_M)$. Длительность одного отсчета составляет величину τ . Дискретный вектор отсчетов наблюдается на интервале $(0, T)$ и является результатом приема оптического поля с интенсивностью $\gamma(t, \theta)$, где θ — оцениваемый параметр и $0 \leq t \leq T$.

В качестве оцениваемого параметра θ могут быть интенсивность сигнала, его частота, фаза, амплитуда, временная задержка и т. д.

При работе оптического квантового генератора в одномодовом режиме и при наблюдении генерируемого поля на фоне тепловых

шумов статистическое распределение фотоэлектронов на временном интервале подчиняется распределению Лагерра [16, 84]:

$$P(k/\theta) = \frac{n_{ш}^k}{(1+n_{ш})^{k+1}} \exp\left[\frac{-n_c(\theta)}{1+n_{ш}}\right] L_k\left[\frac{-n_c(\theta)}{n_{ш}(1+n_{ш})}\right], \quad (4.12)$$

где $n_{ш} = \gamma_{ш}\tau$ — среднее число шумовых фотоэлектронов в интервале τ ($\gamma_{ш}$ — интенсивность шумовых фотоэлектронов)

$n_c(\theta) = \int_{t-\tau}^t \gamma_c(t, \theta) dt$ (γ_c — интенсивность сигнальных фотоэлектронов). При отсутствии статистической связи между отсчетами $\{k_i\}$ и при стационарном шуме

$$P(\mathbf{k}/\theta) = \prod_{i=1}^M P(k_i/\theta) = \prod_{i=1}^M \frac{n_{ш}^{k_i}}{(1+n_{ш})^{k_i+1}} \times \\ \times \exp\left[\frac{-n_{ci}(\theta)}{1+n_{ш}}\right] L_{k_i}\left[\frac{-n_{ci}(\theta)}{n_{ш}(1+n_{ш})}\right], \quad (4.13)$$

где $n_{ci}(\theta) = \int_{t_i-\tau}^{t_i} \gamma_c(t, \theta) dt$.

Для нахождения алгоритма устройства оценки по методу максимума апостериорной вероятности необходимо составить уравнение экстремальности в соответствии с уравнением (4.8). Получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sum_{i=1}^M \log P(k_i/\theta) + \log p(\theta) \right\} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = 0. \quad (4.14)$$

Подставляя в уравнение (4.14) выражения (4.13) и дифференцируя, имеем выражение, которое несколько отличается от приведенного в работе [16]:

$$\frac{p'(\hat{\theta})}{p(\hat{\theta})} + \sum_{i=1}^M \left\{ k_i \left[\frac{L_{k_i}\left(\frac{-n_{ci}(\hat{\theta})}{n_{ш}(1+n_{ш})}\right) - L_{k_i-1}\left(\frac{-n_{ci}(\hat{\theta})}{n_{ш}(1+n_{ш})}\right)}{L_{k_i}\left(\frac{-n_{ci}(\hat{\theta})}{n_{ш}(1+n_{ш})}\right)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{n'_{ci}(\hat{\theta})}{n_{ci}(\hat{\theta})} \right] - \frac{n'_{ci}(\hat{\theta})}{1+n_{ш}} \right\} = 0, \quad (4.15)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по параметру θ . При получении выражения (4.15) использовано известное из теории полиномов Лагерра функциональное соотношение [16]

$$\frac{\partial L_n^\alpha(x)}{\partial x} = \frac{1}{x} [nL_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)].$$

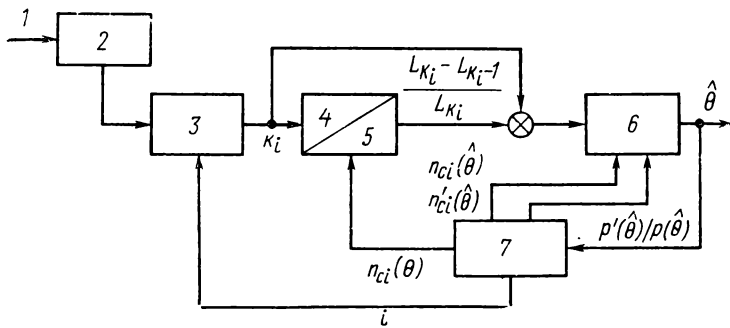


Рис. 4.2. Функциональная схема устройства оценки параметра сигнала при наблюдении отсчетов с распределением Лагерра:

1 — входной сигнал; 2 — оптическая антенна; 3 — фотодетектор; 4 — блок памяти; 5 — вычислитель; 6 — умножитель-сумматор (коррелятор); 7 — генератор сигналов

При построении устройства оценки в соответствии с уравнением (4.15) необходимо при каждом отсчете k_i вычислять функцию $L_{k_i} - L_{k_i-1} / L_{k_i}$; ввиду зависимости этой функции от k_i и θ , ее вычисление должно осуществляться непрерывно. Функциональная схема устройства оценки приведена на рис. 4.2.

Выражение (4.15) можно упростить, если считать, что отношение сигнал/шум мало (что может иметь место в ряде практических случаев). Тогда при $n_{ci} / n_{ш}(1 + n_{ш}) \ll 1$ имеем [84]

$$L_{k_i} \left(\frac{-n_{ci}}{n_{ш}(1 + n_{ш})} \right) \cong 1 + k_i \frac{n_{ci}}{n_{ш}(1 + n_{ш})}. \quad (4.16)$$

Учитывая выражение (4.16), уравнение (4.15) может быть преобразовано к виду

$$\frac{p'(\hat{\theta})}{p(\hat{\theta})} + \sum_{i=1}^M \left\{ k_i \left[\frac{n'_{ci}(\hat{\theta})}{[k_i n_{ci}(\hat{\theta}) + n_{ш}(1 + n_{ш})]} \right] - \frac{n'_{ci}(\hat{\theta})}{1 + n_{ш}} \right\} = 0. \quad (4.17)$$

Функциональная схема устройства оценки, соответствующая уравнению (4.17), приведена на рис. 4.3. Как видно из схемы, использованная аппроксимация полинома Лагерра привела не только к упрощению уравнения (4.15), но и к упрощению устройства оценки, поскольку отпала необходимость при каждом отсчете вычислять сложную функцию, связанную с полиномами Лагерра.

При наблюдении сигнала с пуассоновским распределением отсчетов вероятность наблюдения вектора отсчетов $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M)$ на интервале $(0, T)$ имеет вид

$$P(\mathbf{k}/\theta) = \prod_{i=1}^M \frac{(n_{ci}(\theta) + n_{ш})^{k_i}}{k_i!} \exp \left\{ -[n_{ci}(\theta) + n_{ш}] \right\}. \quad (4.18)$$

Алгоритм устройства оценки по методу максимума апостериорной вероятности получается из уравнения экстремальности (4.8). Учти-

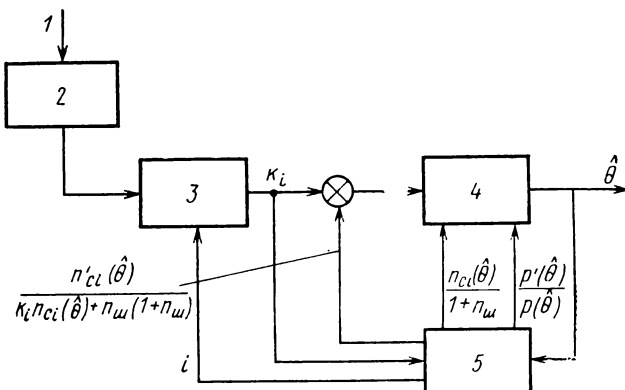


Рис. 4.3. Упрощенная функциональная схема устройства оценки параметра сигнала:
 1 — входной сигнал; 2 — оптическая антенна; 3 — фотодетектор; 4 — сумматор; 5 — генератор сигналов

тывая (4.18), можно получить следующее уравнение экстремальности [16]:

$$\frac{p'(\hat{\theta})}{p(\hat{\theta})} + \sum_{i=1}^M \left\{ k_i \left[\frac{n'_{ci}(\theta)}{n_{ci}(\hat{\theta}) + n_{ш}} \right] - n'_{ci}(\hat{\theta}) \right\} = 0. \quad (4.19)$$

Как видно, это уравнение мало отличается от уравнения (4.17).

В работе [16] получена граница Крамера — Рао для дисперсии оценки путем подстановки выражения (4.18) в уравнение (4.11) и соответствующего усреднения сигнала по статистике отсчетов k при фиксированном θ , а затем по распределению θ :

$$\text{ГКР } \hat{\sigma}^2(\hat{\theta}) = \left\{ E_{\theta} \left[-\frac{\partial^2 \log p(\theta)}{d\theta^2} + \sum_i \frac{n'_{ci}(\theta)}{n_{ci}(\theta) + \gamma_{ш} T} \right] \right\}^{-1}, \quad (4.20)$$

где символ E_{θ} означает усреднение по распределению θ .

По методике, разработанной в работах [16, 84], найдем оценку интенсивности излучения с различными априорными распределениями параметра θ и с пуассоновским распределением отсчетов.

Будем считать, что $\gamma(t, \theta) = \theta \gamma_c$, где γ_c — средняя интенсивность отсчетов, создаваемых полем сигнала, $n_{ci}(\theta) = \theta \gamma_c \tau$ и априорная плотность вероятности распределения параметра θ равномерная, т. е.

$$p(\theta) = \frac{1}{\theta_0}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0. \quad (4.21)$$

Уравнение экстремальности приобретает вид

$$\sum_{i=1}^M \left\{ k_i \left[\frac{\gamma_c \tau}{\hat{\theta} \gamma_c \tau + n_{ш}} \right] - \gamma_c \tau \right\} = 0$$

и

$$\frac{\gamma_c \tau}{\hat{\theta} \gamma_c \tau + \gamma_{ш} \tau} \sum_{i=1}^M k_i - \gamma_c T = 0. \quad (4.22)$$

Отсюда оценка параметра $\hat{\theta}$ получается в виде

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\gamma_c T} \sum_{i=1}^M k_i - \frac{\gamma_{ш}}{\gamma_c}. \quad (4.23)$$

Правило, по которому должен работать оптимальный с точки зрения максимума апостериорной вероятности (максимума функции правдоподобия) приемник, заключается в предварительном определении (до начала измерений) скорости прихода шумовых фотоэлектронов $\gamma_{ш}$, фиксации этого числа запоминающим устройством приемника, затем в подсчете числа фотоэлектронов в течение интервала наблюдения T и проведения вычислений согласно алгоритму (4.23) (γ_c — известная величина). Полученное число будет максимально правдоподобной оценкой измеряемого параметра (интенсивности излучения). Функциональная схема оптимального измерителя приведена на рис. 4.4. Математическое ожидание оценки равно

$$E(\hat{\theta}) = \left\{ E \left[\frac{\sum_{i=1}^M k_i}{\gamma_c T} \right] - \frac{\gamma_{ш}}{\gamma_c} \right\} = \frac{E(\theta) \gamma_c T + \gamma_{ш} T}{[\gamma_c T]} - \frac{\gamma_{ш}}{\gamma_c} = E(\theta) = \frac{\theta_0}{2}. \quad (4.24)$$

Как видно из (4.24), оценка является несмещенной. Дисперсия оценки равна

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 = \frac{E(\theta) \gamma_c T + \gamma_{ш} T}{(\gamma_c T)^2} = \frac{1}{\gamma_c T} \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\gamma_{ш}}{\gamma_c} \right).$$

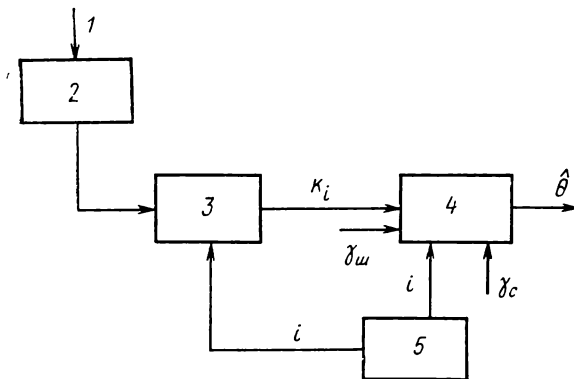


Рис. 4.4. Функциональная схема измерителя, формирующего максимально-правдоподобную оценку интенсивности излучения:

1 — входной сигнал; 2 — оптическая антенна; 3 — фотодетектор; 4 — вычислитель-сумматор; 5 — синхронизатор

При увеличении интенсивности полезного сигнала ($\gamma_c \rightarrow \infty$) дисперсия оценки стремится к нулю, а оценка соответственно стремится к истинному значению параметра. При экспоненциальной плотности вероятности параметра θ ,

$$p(\theta) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{\theta}{2\sigma^2}\right], \quad \theta \geq 0,$$

оценка и ее статистические характеристики найдены в работе [16]:

$$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{\gamma_c T + 1/2\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^M k_i - \frac{\gamma_{ш}}{\gamma_c}; \quad E(\hat{\theta}) = \frac{2\sigma^2 \gamma_c T + \gamma_{ш} T}{\gamma_c' T + 1/2\sigma^2} - \frac{\gamma_{ш}}{\gamma_c};$$

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = \frac{2\sigma^2 \gamma_c T + \gamma_{ш} T_i}{(\gamma_c T + 1/2\sigma^2)^2}.$$

Функциональная схема оптимального измерителя принципиально не отличается от схемы, рассмотренной в предыдущем примере.

В доплеровских системах измерения скорости космического объекта доплеровский сдвиг можно измерять на частоте сигнала, модулирующего по интенсивности оптическое излучение. Сигнал, частоту которого необходимо оценить, можно представить в виде

$$\gamma(t, \omega) = \gamma_c [1 + m \cos(\omega t)], \quad 0 \leq t \leq T,$$

где ω — оцениваемый параметр (частота изменения интенсивности сигнала); m — глубина модуляции интенсивности излучения ($m \leq 1$).

Как показано в работе [16], при гауссовой априорной плотности вероятности параметра ω

$$p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где ω_c — средняя частота изменения интенсивности сигнала ($\omega_c \gg 1/T$) и при пуассоновской статистике отсчетов максимально правдоподобная оценка получается, когда выражение

$$\sum_{j=1}^{M=T/\tau} k(t_j - \tau, t_j) \log[\gamma(t_j, \omega) + \gamma_{ш}] - \int_0^T \gamma(t, \omega) dt + \log p(\omega) \quad (4.25)$$

достигает максимума.

В случае достаточно мощного оптического сигнала дискретные импульсы тока фотодетектора сливаются в непрерывный сигнал $z(t)$. Тогда входным сигналом устройства оценки является непрерывный сигнал с выхода фотодетектора, а не вектор отсчетов. Это обстоятельство позволяет суммирование в выражении (4.25) заменить эквивалентным интегрированием. Учитывая условие $\omega_c \gg 1/T$ и опуская не зависящие от ω слагаемые, можно записать интегральную форму выражения (4.25)

$$\int_0^T z(t) \log[(\gamma_c + \gamma_{ш}) + \gamma_c m \cos(\omega t)] dt - \frac{(\omega - \omega_c)^2}{2\sigma^2}. \quad (4.26)$$

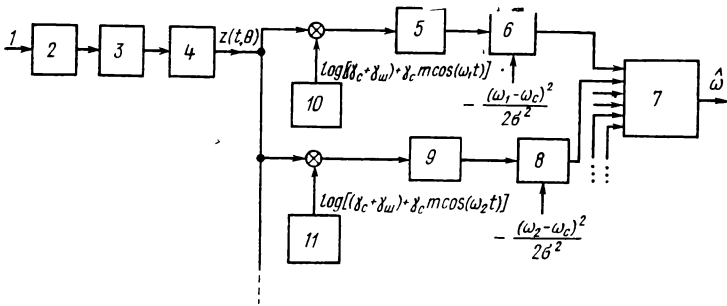


Рис. 4.5. Схема устройства оценки частоты изменения интенсивности сигнала: 1 — входной оптический сигнал; 2 — оптическая антенна; 3 — фотодетектор; 4 — электрический фильтр; 5, 9 — интегратор \int_0^T ; 6, 8 — сумматор; 7 — ДМС (детектор максимального сигнала); 10, 11 — генератор, логарифмический преобразователь

Следовательно, устройство оценки частоты сигнала должно содержать набор корреляторов, выходы которых должны поступать на детектор максимального сигнала. Последний выдает оценку параметра, соответствующую максимальному выходу набора корреляторов. Функциональная схема устройства оценки частоты изменения интенсивности сигнала показана на рис. 4.5.

Аналогичным образом может быть получена оценка фазы φ сигнала поднесущей, модулирующей оптическое поле по интенсивности [16]. Алгоритм обработки, подобный выражению (4.26), при гауссовой плотности распределения фазы принимает форму

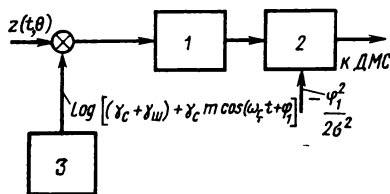
$$\max \left\{ \int_0^T z(t) \log[(\nu_c + \nu_m) + \nu_c m \cos(\omega_c t + \varphi)] dt - \frac{\varphi^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Как и в предыдущем примере, устройство оценки фазы должно содержать приемную часть, набор корреляторов и детектор максимального сигнала. Одна ветвь устройства оценки, а именно — коррелятор, показана на рис. 4.6.

Таким образом, из анализа устройств оценки следует, что последние могут конструироваться как в виде набора корреляторов, определяющих максимум параметра путем перебора всех возможных значений, так и в виде следящих систем, автоматически отслеживающих максимум.

Рис. 4.6. Коррелятор устройства оценки фазы сигнала поднесущей:

1 — интегратор \int_0^T ; 2 — сумматор; 3 — генератор, логарифмический преобразователь



4.4. ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЦИФРОВОЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

В настоящее время голографические методы обработки информации применяются в различных областях науки и техники [54, 57, 69]. Одним из возможных вариантов применения голографии и когерентной оптики является использование их в устройствах обработки связной (радиотехнической) информации. Интерес к применению оптических методов для обработки информации обусловлен тем, что оптическая система по своей природе является аналоговым устройством обработки информации. Сочетание достоинств оптических методов и голографии позволяет создать многоканальные устройства обработки больших массивов информации с высокой скоростью выполнения математических операций, независимых от степени их сложности. Кроме того, когерентные оптико-голографические системы обработки радиотехнической информации обладают следующими достоинствами:

- возможностью реализации произвольно сложных амплитудных и фазовых соотношений в передаточной функции согласованного голографического фильтра;

- высокой информационной емкостью и высоким разрешением голографических фильтров;

- возможностью создания в компактной форме эквивалентного набора согласованных фильтров, которые можно согласовать с быстрыми изменениями сложных сигналов, передаваемых передатчиком;

- высокой надежностью элементной базы.

Для обработки радиотехнических сигналов методами когерентной оптики и голографии необходимо преобразовать временной сигнал $s(t)$ в пространственный аналог $s(x)$. Ввод электрических сигналов в реальном масштабе времени в оптические устройства обработки осуществляется с помощью пространственных модуляторов света (ПМС), которые имеют электронный вход и оптический выход. Обычно в качестве ПМС используются одноканальные или многоканальные ультразвуковые модуляторы света (УЗМС), либо электронно-лучевые трубки с термопластической мишенью. УЗМС широкополосны и могут работать в диапазоне от единиц до тысяч мегагерц. Кроме того, УЗМС обладают низким управляющим напряжением, сравнительной простотой изготовления многоканальных модуляторов света при незначительных световых апертурах и небольшой стоимостью. Поэтому для обработки широкополосных сигналов предпочтительнее применять волноводные УЗМС.

Структура и принцип действия пространственного согласованного фильтра

Один из возможных вариантов построения приемной части системы для приема двоичных сигналов представлен на рис. 4.7. Принимаемый антенной А радиосигнал усиливается уси-

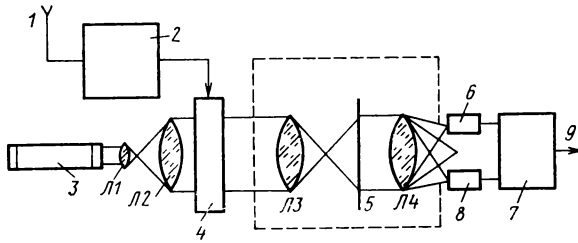


Рис. 4.7. Схема когерентной оптико-голографической обработки двоичных радиосигналов: 1 — антенна А; 2 — усилитель высокой частоты (УВЧ); 3 — лазер; 4 — пространственный модулятор света (ПМС); 5 — согласованный голографический фильтр (СГФ); 6 — ФЭУ1; 7 — решающее устройство (РУ); 8 — ФЭУ2; 9 — выход информации

лителем высокой частоты (УВЧ) и поступает на пространственный модулятор света (ПМС), выполненный, например, в виде волноводного ультразвукового модулятора света (УЗМС). Оптический луч ОКГ расширяется телескопической системой Л1, Л2 и проходит через ПМС. Преобразующая линза Л3 выполняет операцию переноса изображения из плоскости модулятора в плоскость согласованного голографического фильтра (СГФ). На СГФ записаны оптические образы радиосигнала. Отклик фильтра фокусируется восстанавливающей линзой Л4 в плоскость изображения, в которой размещены два фотодетектора ФЭУ1, ФЭУ2. Решающим устройством РУ по максимальному значению тока на выходе фотодетекторов принимается решение о принятом сигнале.

Принимаемый сигнал

$$U(t) = U_0 \cos 2\pi Ft, \quad (4.27)$$

где U_0 — амплитуда сигнала; F — частота высокочастотного заполнения поступает на ПМС. В ультразвуковом модуляторе света под действием звукопреобразователя распространяется ультразвуковая волна. Поле напряжений этой волны создает в среде периодические изменения показателя преломления. В результате в среде возникает фазовая дифракционная решетка, движущаяся со скоростью ультразвука. Будем считать, что среда упруга и оптически изотропна, а потери световой волны отсутствуют. Если на электронный вход УЗМС подается сигнал [см. уравнение (4.27)], то поле напряжений ультразвуковой волны создает в среде периодические изменения показателя преломления:

$$n(x, t) = n_0 + \Delta n \cos(2\pi F_{\text{ак}} t - Kx),$$

где n_0 — показатель преломления среды в невозмущенном состоянии; Δn — амплитуда изменения показателя преломления; $F_{\text{ак}}$ — акустическая частота ультразвуковой волны (при линейном преобразовании звукопреобразователя и недиспергирующей среде звукопровода она равна частоте радиосигнала); K — волновое число ультразвуковой волны ($K = 2\pi/\Lambda_x$, Λ_x — период акустической волны).

Рассмотрим взаимодействие плоских световых и акустических волн, распространяющихся в фотоупругой среде. Пусть волновой вектор K упругой волны направлен по оси x , а волновой вектор k световой волны направлен по оси z . В этом случае уравнение для напряженности электрического поля электромагнитной волны, распространяющейся в среде с переменным показателем преломления, может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{|n(x, t)|^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Для решения этого волнового уравнения можно использовать метод, основанный на решении связанных дифференциальных уравнений в частных производных [11]. Если предположить, что толщина УЗМС вдоль оси z мала и скорость распространения ультразвука много меньше скорости света, напряженность электрического поля на выходе ПМС без учета частоты светового поля будет иметь вид

$$E(x, t) = E_0 \exp \left\{ j2\pi \left[\frac{n_0 z}{\lambda} + \frac{\Delta n z}{\lambda} \cos(2\pi F_{\text{ак}} t - Kx) \right] \right\}, \quad (4.28)$$

где E_0 — амплитуда электрической составляющей поля.

При $z=l$, где l — толщина УЗМС, выражение (4.28) имеет вид

$$E(x, t) = E_0 \exp \left\{ j2\pi \left[\frac{n_0 l}{\lambda} + \frac{\Delta n l}{\lambda} \cos(2\pi F_{\text{ак}} t - Kx) \right] \right\} \cdot e^{j2\pi \frac{n_0 l}{\lambda}}$$

Фазовый множитель $e^{j2\pi \frac{n_0 l}{\lambda}}$ в последнем выражении не вносит изменений в фазовую пространственную структуру фронта волны, поэтому в дальнейшем его не будем учитывать.

Рассмотрим математическую основу записи СГФ. Если запись согласованного голографического фильтра ведется в сходящихся пучках, то в плоскости голограммы волновые функции предметной и опорной волн имеют вид

$$U_{\text{п}}(x) = E_{\text{п}} \exp \{ j2\pi f_{\text{п}}(x) \};$$

$$U_{\text{о}}(x) = E_{\text{о}} \exp \{ j2\pi f_{\text{о}} x \},$$

где $f_{\text{п}}(x) = \frac{\Delta n l}{\lambda} \cos \left[2\pi F_{\text{ак}} T t - \frac{2\pi}{\Lambda_x} x \right]$ — фаза предметного поля в каждой точке голограммы (предметная волна падает нормально к плоскости голограммы); $f_{\text{о}} = \sin \theta / \lambda$ — пространственная частота опорной волны; (θ — угол падения опорной волны относительно нормали к голограмме).

Распределение суммарной интенсивности поля в плоскости голограммы будет описываться выражением

$$I(x) = |U_{\text{п}}(x) + U_{\text{о}}(x)|^2 = |E_{\text{п}}|^2 + |E_{\text{о}}|^2 + 2E_{\text{п}}E_{\text{о}} e^{j2\pi [f_{\text{п}}(x) - f_{\text{о}}x]} + 2E_{\text{п}}E_{\text{о}} e^{-j2\pi [f_{\text{п}}(x) - f_{\text{о}}x]},$$

или

$$I(x) = |E_{\parallel}|^2 + |E_{\circ}|^2 + 2E_{\parallel}E_{\circ} \cos 2\pi [f_{\parallel}(x) - f_{\circ}x]. \quad (4.29)$$

Амплитудный коэффициент пропускания голографического фильтра, на котором зарегистрирована картина распределения суммарной интенсивности [см. выражение (4.29)], будет иметь вид [57]

$$\tau(x) = \tau_0 + \Delta\tau \cos 2\pi [f_{\parallel}(x) - f_{\circ}x] = \tau_0 + \frac{\Delta\tau}{2} e^{j2\pi [f_{\parallel}(x) - f_{\circ}x]} + \frac{\Delta\tau}{2} e^{-j2\pi [f_{\parallel}(x) - f_{\circ}x]}, \quad (4.30)$$

где τ_0 — амплитудное пропускание, обусловленное пространственно-постоянной интенсивностью; $\Delta\tau = 2\beta E_0 E_{\parallel} T_3 M(\nu)$ (β — тангенс угла наклона линейного участка характеристической кривой; T_3 — время экспозиции; $M(\nu)$ — функция, характеризующая частотную чувствительность материала).

Синтезированный голографический фильтр, как следует из выражения (4.30), в своем составе имеет образ записанного оптического сигнала, а также комплексно-сопряженный образ. Из радиотехники известно, что фильтр является согласованным, если его импульсная передаточная характеристика комплексно сопряжена с сигналом. Следовательно, третье слагаемое в выражении (4.30) с точностью до постоянного фазового множителя $e^{-j2\pi f_{\circ}x}$ описывает импульсную передаточную характеристику пространственного согласованного фильтра.

Пространственная частота записанного образа на голограмме определяется углом падения опорной волны и фазовой структурой оптического образа радиосигнала. Для радиосигнала в виде отрезка синусоиды длительностью T пространственная фаза радиосигнала будет равна

$$f_{\parallel}(x) = \frac{\Delta n l}{\lambda} \cos \left(2\pi F_{\text{ак}} T - \frac{2\pi}{\Delta x} x \right) \quad (4.31)$$

Рассмотрим свойства СГФ при прохождении через него световой волны. Определим амплитуду поля в плоскости регистрации, расположенной в задней фокальной плоскости восстанавливающей линзы Л4. Голограмму будем освещать световой волной, прошедшей через ПМС:

$$E(x, t) = E_0 \exp [j 2\pi f_c(x, t)], \quad (4.32)$$

где E_0 — амплитуда поля;

$$f_c(x, t) = \frac{\Delta n l}{\lambda} \cos \left[2\pi F_{\text{ак}} t - \frac{2\pi}{\Delta x} x \right] \quad (4.33)$$

— пространственная фаза поля.

Поле сигнала, прошедшего через голографический фильтр, можно определить из соотношения [22]

$$E(x, t)|_{z=0} = E(x, t) \tau(x). \quad (4.34)$$

Подставляя выражения (4.30) и (4.32) в уравнение (4.34) определяем

$$E(x, t)|_{z=0} = E_0 \tau_0 e^{j 2\pi f_c(x)} + \frac{E_0 \Delta \tau}{2} e^{j 2\pi [f_n(x) - f_0 x + f_c(x, t)]} + \frac{E_0 \Delta \tau}{2} e^{-j 2\pi [f_n(x) - f_0 x - f_c(x, t)]}. \quad (4.35)$$

На выходе СГФ, как следует из выражения (4.35), образуется три пучка. Первый пучок распространяется в направлении оптической оси и описывает приходящий сигнал с амплитудой $E_0 \tau_0$. Второй пучок

$$\frac{E_0 \Delta \tau}{2} e^{j 2\pi [f_n(x) - f_0 x + f_c(x, t)]}$$

идет в направлении, в каком шел опорный пучок на стадии записи согласованного голографического фильтра. Третье слагаемое

$$\frac{E_0 \Delta \tau}{2} e^{-j 2\pi [f_n(x) - f_0 x - f_c(x, t)]}$$

описывает пучок, отклоняющийся относительно оптической оси в противоположном направлении.

В плоскости фотодетекторов поле сигнала будет описываться выражением

$$E(\xi, t) = E_0 \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j 2\pi [\xi' x - f_c(x, \xi, t)]} dx + \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j 2\pi [\xi' x - f_n(x) + f_0 x - f_c(x, t)]} dx + \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j 2\pi [\xi' x + f_n(x) - f_0 x - f_c(x, t)]} dx, \quad (4.36)$$

где $P(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases}$ — апертурная функция СГФ;

$L = V_0 T$ (L — линейные размеры СГФ; V_0 — скорость распространения акустической волны в звукопроводе); $\xi' = \frac{\xi}{\lambda F_L}$ (ξ — пространственная координата в задней фокальной плоскости восстанавливающей линзы; F_L — фокусное расстояние линзы).

Первое слагаемое в выражении (4.36) не несет информации о взаимодействии двух сигналов, записанного и падающего, поэтому в дальнейшем будем его опускать. Для дальнейшего анализа представляет интерес только третье слагаемое, так как оно описывает отклик согласованного фильтра на приходящее возмущение.

Таким образом, в фокальной плоскости линзы амплитуда отклика СФ будет равна

$$E(\xi, t) = \frac{E_0 \Delta v}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j2\pi[(\xi' - f_0)x + f_n(x) - f_c(x, t)]} dx. \quad (4.37)$$

В случае, когда падающая световая волна модулируется сигналом; согласованным с записанным на голограмме, т. е. $f_n(x) = f_c(x)$, выражение для амплитуды поля с учетом выражения (4.31) можно записать в виде

$$E(\xi, t) = \frac{E_0 \Delta v}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \times e^{-j2\pi[(\xi' - f_0)x + \frac{\Delta n l}{\lambda} [\cos(2\pi F_{ак} T - \frac{2\pi}{\Lambda_x} x) - \cos(2\pi F_{ак} t - \frac{2\pi}{\Lambda_x} x)]]} dx. \quad (4.38)$$

Учитывая соотношения

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$e^{jz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{jn\varphi}, \quad (4.39)$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя n -го порядка первого рода, выражение (4.38) приводится к виду

$$E(\xi, t) = \frac{E_0 \Delta v}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l \sin [\pi F_{ак} (T - t)] \right) e^{-j\pi n F_{ак} (T + t)} \times \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j2\pi(\xi' - f_0 - \frac{n}{\Lambda_x})x} dx. \quad (4.40)$$

Вычисляя интеграл в выражении (4.40), окончательно получим

$$E(\xi, t) = \frac{E_0 \Delta v}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l \sin [\pi F_{ак} (T - t)] \right) e^{-j\pi n F_{ак} (T + t)} \times \frac{\sin \pi L (\xi' - f_0 - n/\Lambda_x)}{\pi L (\xi' - f_0 - n/\Lambda_x)}. \quad (4.41)$$

В фокальной плоскости линзы поле представляет собой Фурье-спектр, который описывается набором функций $\sin z/z$, где $z = \pi L (\xi' - f_0 - n/\Lambda_x)$, разнесенных в пространстве друг от друга на расстоянии $\lambda F_{п}/\Lambda_x$. Амплитуда в каждом порядке спектра определяется функцией Бесселя n порядка первого рода.

Аргумент функции Бесселя зависит от времени и изменяется с изменением t от значения $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l \sin \pi F_{ак} (T - t)$ до нуля. При ра-

венстве аргумента нулю функция Бесселя нулевого порядка принимает значение, равное единице, а значения функций Бесселя высших порядков равны нулю. Равенство аргумента нулю соответствует полному совпадению приходящего сигнала с записанным. При полном совпадении двух сигналов отклик фильтра на согласованный сигнал будет равен

$$E(\xi) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L \frac{\sin \pi \frac{L}{\lambda F_n} (\xi - \lambda F_n f_0)}{\pi \frac{L}{\lambda F_n} (\xi - \lambda F_n f_0)}. \quad (4.42)$$

Анализ формулы (4.42) показывает, что максимальное значение амплитуды поля достигает в точке, сдвинутой от оптической оси на $\xi = \lambda F_n f_0$. Нетрудно показать, что в центральном пятне с диаметром $2\lambda F_n/L$ будет сосредоточено более 84% всей световой энергии отклика фильтра на согласованный сигнал.

Рассмотрим второй случай, когда фронт волны, падающий на голограмму, модулируется противоположным сигналом, т. е. $f_{\pi}(x) - f_c(x)$ (при $T=t$). В этом случае выражение (4.37) примет вид

$$E(\xi, t) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \times \\ \times e^{-j2\pi \left\{ (\xi' - f_0) x + \frac{\Delta n l}{\lambda} \left[\cos \left(2\pi F_{ак} T - \frac{2\pi}{\Delta x} x \right) + \cos \left(2\pi F_{ак} t - \frac{2\pi}{\Delta x} x \right) \right] \right\}} dx. \quad (4.43)$$

С учетом соотношений (4.39) выражение (4.43) можно представить в виде

$$E(\xi, t) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{4\pi}{\lambda} \Delta n l \cos [\pi F_{ак} (T-t)] \right) e^{-j\pi n F_{ак} (T+t)} \times \\ \times \frac{\sin \pi L (\xi' - f_0 - n/\Delta x)}{\pi L (\xi' - f_0 - n/\Delta x)}. \quad (4.44)$$

При $t=T$ косинус в аргументе функции Бесселя будет равен единице и выражение (4.44) приводится к виду

$$E(\xi) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{4\pi}{\lambda} \Delta n l \right) e^{-j2\pi n F_{ак} T} \frac{\sin \pi L (\xi' - f_0 - n/\Delta x)}{\pi L (\xi' - f_0 - n/\Delta x)}. \quad (4.45)$$

Анализ выражения (4.45) показывает, что основная энергия отклика будет сосредоточена в высших пространственных порядках Фурье-спектра.

Рассмотрим третий случай, когда радиосигнал, поступающий на пространственный модулятор света, отличается по частоте от за-

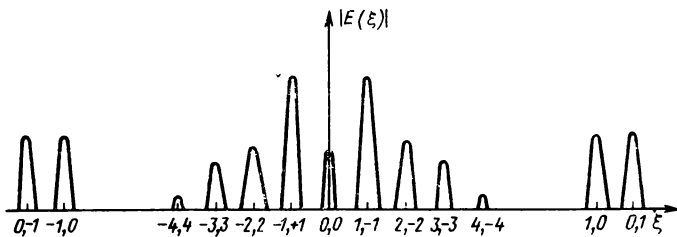


Рис. 4.8. Распределение амплитуд отклика фильтра на сигнал, отличающийся по частоте с записанным на СГФ в плоскости изображения

писанного оптического образа радиосигнала. Тогда амплитуда поля в фокальной плоскости линзы будет описываться выражением

$$E(\xi, t) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \exp \left\{ -j2\pi \left[(\xi' - f_0) x + \frac{\Delta n l}{\lambda} \cos \left(2\pi F_{ак1} T - \frac{2\pi}{\Delta x_1} x \right) - \frac{\Delta n l}{\lambda} \cos \left(2\pi F_{ак2} t - \frac{2\pi}{\Delta x_2} x \right) \right] \right\} dx. \quad (4.46)$$

Учитывая соотношения (4.39), выражение для амплитуды поля примет вид (при $t=T$)

$$E(\xi) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l \right) J_k \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l \right) \times \\ \times e^{-j2\pi (nF_{ак1} T + kF_{ак2} T)} \frac{\sin \pi L [\xi' - f_0 - (nF_{ак1} - kF_{ак2})/V_0]}{\pi L [\xi' - f_0 - (nF_{ак1} - kF_{ак2})/V_0]}. \quad (4.47)$$

Реакция фильтра на оптический сигнал, модулированный радиосигналом с несущей, отличающейся от записанного образа на СГФ, представляет собой набор спектральных составляющих. Расстояние между спектральными составляющими будет равно

$$d = \frac{nF_{ак1} - kF_{ак2}}{V_0} \lambda F_{л}.$$

Ширина каждого спектра равна $2\lambda F_{л}/L$, а амплитуда определяется произведением значений функций Бесселя.

При увеличении аргумента функции Бесселя амплитуда в спектре нулевого порядка будет падать, а в спектрах высших и промежуточных порядков будет расти. На рис. 4.8 представлено распределение амплитуд поля в плоскости изображения. Как следует из рисунка и выражения (4.47), спектр в плоскости изображения является симметричным. Ближайшая спектральная составляющая нулевой спектральной составляющей сдвинута на расстояние $(\Delta F_{ак}/V_0)\lambda F_{л}$ и имеет амплитуду, пропорциональную $|J_1|^2$.

Полуширина нулевой и первой близлежащей спектральных составляющих равна

$$D^* = \lambda F_{\text{л}} / L.$$

Для того, чтобы не происходило перекрывания нулевого и соседнего спектров в пространстве, необходимо выполнение условия:

$$\frac{\Delta F_{\text{ак}}}{V_0} \lambda F_{\text{л}} \geq \frac{2\lambda F_{\text{л}}}{L},$$

или $\Delta F \geq 2/T,$ (4.48)

где T — длительность сигнала.

Выражение (4.48) определяет минимальный разнос частот радиосигналов и определяет частотное разрешение оптико-голографического устройства обработки информации. Следовательно, для уверенного выделения радиосигналов на приемной стороне при частотной модуляции разнос частот радионесущих должен удовлетворять данному условию.

Прохождение аддитивной смеси сигнала и шума через согласованный голографический фильтр

Радиотехнический сигнал, принимаемый приемником и поступающий в устройство обработки (в рассматриваемом случае — в оптико-голографическое устройство), состоит из аддитивной смеси информационного сигнала и шума. Этой аддитивной смесью в ПМС осуществляется модуляция оптического излучения ОКГ.

Рассмотрим особенности прохождения через согласованный фильтр оптической волны, модулированной аддитивной смесью сигнала и шума.

По аналогии с выражением (4.32) запишем поле на выходе пространственного модулятора

$$E(x) = E_0 e^{j 2\pi f_{\text{ш+с}}(x)},$$

где $f_{\text{ш+с}}(x) = f_{\text{ш}}(x) + f_{\text{с}}(x)$; $f_{\text{ш}}(x)$ — пространственная фаза, обусловленная приемом шума.

Если прием сигналов осуществляется на фоне флюктуационных помех с равномерным энергетическим спектром N_0 в полосе пропускания приемника, то мгновенные значения случайной величины $f_{\text{ш+с}}$ будут подчинены нормальному закону распределения. Математическое ожидание случайной величины будет равно $f_{\text{с}}(x)$, а дисперсия

$$\sigma_f^2 = \alpha^2 \sigma_{\text{ш}}^2,$$

где $\alpha = \Delta n l / \lambda$ — индекс фазовой модуляции; $\sigma_{\text{ш}}^2$ — дисперсия шума на входе пространственного модулятора света.

Радиус пространственной корреляции, т. е. величина радиуса круга, внутри которого отклонения фронта волны от средней плоскости коррелируют, с учетом временной функции корреляции аддитивной смеси сигнала и шума [86] будет равен [54]

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} r(\Delta x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \Delta F_{\text{ак}} \frac{\Delta x}{V_0}}{\pi \Delta F_{\text{ак}} \frac{\Delta x}{V_0}} dx = \frac{V_0}{2 \Delta F_{\text{ак}}},$$

где $r(\Delta x)$ — нормированная функция пространственной корреляции; $\Delta F_{\text{ак}}$ — полоса пропускания приемника; V_0 — скорость ультразвука.

При $\Delta F_{\text{ак}} \rightarrow \infty$ радиус пространственной корреляции будет равен дельта-функции $\delta(x)$. Отсутствие пространственной корреляции свидетельствует о полном отсутствии взаимосвязи между мгновенными значениями помехи по апертуре принимаемого сигнала.

Отклик согласованного фильтра на приходящую световую волну, модулированную аддитивной смесью сигнала и шума, будет равен

$$E(\xi) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j 2\pi [(\xi' - f_0)x + f_{\text{п}}(x) - f_{\text{ш+c}}(x)]} dx.$$

Вследствие случайного характера изменения пространственной фазы произведем усреднение и определим среднее значение амплитуды поля:

$$\begin{aligned} \bar{E}(\xi) &= \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_f} e^{-\frac{(f_{\text{ш+c}} - f_c)^2}{2\sigma_f^2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j 2\pi [(\xi' - f_0)x + f_{\text{п}}(x) - f_{\text{ш+c}}(x)]} dx df_{\text{ш+c}}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Изменяя порядок интегрирования и производя замену переменных, приведем выражение (4.49) к виду

$$\bar{E}(\xi) = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-j 2\pi [(\xi' - f_0)x + f_{\text{п}}(x) - f_c(x)]} dx. \quad (4.50)$$

Анализ выражения (4.50) показывает, что среднее значение амплитуды поля в плоскости регистрации по сравнению со случаем отсутствия шума будет меньше на величину $e^{-2\pi^2 \sigma_f^2}$. Физически это можно объяснить тем, что вследствие присутствия случайной пространственно-фазовой составляющей поля часть энергии в плоскости регистрации будет распределяться в высшие спектральные составляющие.

Оценим теперь потенциальную помехоустойчивость цифровых систем связи с оптико-голографическим устройством обработки на основе теории статистических решений.

Помехоустойчивость системы связи при амплитудной манипуляции сигналов

При амплитудной манипуляции сигналы принимают два значения:

$$U(t) = \begin{cases} U_c \cos 2\pi F_0 t, & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \end{cases}$$

где U_c — амплитуда сигнала; F_0 — частота высокочастотного заполнения; T — длительность сигнала.

Сигнал с амплитудой U_c соответствует посылке двоичной единицы «1», а нулевое значение амплитуды соответствует посылке двоичного нуля «0» (сигналы с активной и пассивной паузой).

Особенностью построения приемной части при приеме амплитудно-манипулированных сигналов является то, что прием ведется на один фотодетектор. При приеме «1», т. е. когда $f_{\text{п}} = f_c$, средняя амплитуда поля на входе фотодетектора определяется из выражения (4.50) и будет равна

$$\bar{E}(\xi) = \frac{E_0 \Delta v}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{\sin \pi L (\xi - \lambda F_{\text{л}} f_0) / \lambda F_{\text{л}}}{\pi L (\xi - \lambda F_{\text{л}} f_0) / \lambda F_{\text{л}}}, \quad (4.51)$$

а при приеме «0»

$$\bar{E}(\xi) = \frac{E_0 \Delta v}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} J_0(\alpha) \frac{\sin \pi L (\xi - \lambda F_{\text{л}} f_0) / \lambda F_{\text{л}}}{\pi L (\xi - \lambda F_{\text{л}} f_0) / \lambda F_{\text{л}}}. \quad (4.52)$$

Если диаметр апертуры фотодетектора выбрать равным диску Эйри, то математическое ожидание тока на выходе фотодетектора будет определяться выражением [85]

$$\bar{i} = \frac{D}{2} |\bar{E}_{\text{эф}}|^2, \quad (4.53)$$

где D — коэффициент преобразования фотодетектора; $\bar{E}_{\text{эф}}$ — эффективная амплитуда поля на входе фотодетектора. Под эффективной амплитудой поля будем понимать среднюю амплитуду поля в пределах площади пропускания фотодетектора:

$$\bar{E}_{\text{эф}} = \frac{L}{2\lambda F_{\text{л}}} \int_{-\lambda F_{\text{л}}/L}^{\lambda F_{\text{л}}/L} \bar{E}(\xi) d\xi, \quad (4.54)$$

где $\lambda F_{\text{л}}/L$ — радиус диска Эйри.

Интегрирование в выражении (4.54) ведется по переменной ξ , так как свертка одномерного сигнала производится с помощью ци-

линдрической линзы. Подставляя значения амплитуды поля для активной паузы (4.51) в выражение (4.54), получим

$$\bar{E}_{\text{эфп}} = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz,$$

а для пассивной паузы имеем

$$\bar{E}_{\text{эфш}} = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} J_0(\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Тогда средние значения токов на выходе фотодетектора при приеме «1» и «0» соответственно будут равны

$$\bar{i}_p = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2; \quad (4.55)$$

$$\bar{i}_ш = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} J_0(\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2. \quad (4.56)$$

При «сильных полях» на выходе фотодетектора плотность вероятности значений тока распределена по нормальному закону [84]:

$$P(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(i-\bar{i})^2}{2\sigma_i^2}}, \quad (4.57)$$

где $\sigma_i^2 = 2\bar{i}e\Delta f$ (Δf , e — полоса пропускания приемника и заряд электрона).

Для уверенного различения «1» и «0» приемник должен иметь пороговое устройство. Средняя вероятность ошибки определяется из выражения [86]

$$P_{\text{ош}} = p(1) \int_{-\infty}^{i_0} P(i_p) di_p + p(0) \int_{i_0}^{\infty} P(i_ш) di_ш, \quad (4.58)$$

где $p(1)$ — априорная вероятность посылки «1»; $p(0)$ — априорная вероятность посылки «0»; i_0 — уровень порогового значения по току.

Подставляя уравнение (4.57) в выражение (4.58), имеем

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{i_0 - \bar{i}_p}{\sigma_{i_p}} \right) - \Phi \left(\frac{i_0 - \bar{i}_ш}{\sigma_{i_ш}} \right) \right], \quad (4.59)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа; $\sigma_{i_p}^2 = 2\bar{i}_p e \Delta f$;

$$\sigma_{i_ш}^2 = 2\bar{i}_ш e \Delta f.$$

Для определения порогового уровня по току используем критерий идеального наблюдателя, так как для данного критерия при известных априорных вероятностях посылки сигналов ошибки считаются равноценными по своей значимости. Для бинарной системы передачи информации прием символа «0» вместо «1» или «1» вместо «0» одинаково нежелателен, и критерий идеального наблюдателя с этой точки зрения вполне пригоден.

Отношение правдоподобия гипотез для критерия идеального наблюдателя с учетом специфики оптического диапазона и статистики распределения тока на выходе фотодетектора можно записать в виде неравенства

$$p(1) \frac{1}{\sigma_{i_p}} e^{-\frac{(i-\bar{i}_p)^2}{2\sigma_{i_p}^2}} > p(0) \frac{1}{\sigma_{i_{ш}}} e^{-\frac{(i-\bar{i}_{ш})^2}{2\sigma_{i_{ш}}^2}}.$$

Это выражение представлено графически на рис. 4.9 для случая бинарного канала, где по оси ординат отложены значения функции решения $f(\Gamma_k) = p(i_k)P(i_k - \bar{i}_k)$. Здесь Γ_k — гипотеза принятия k -го сигнала, а k принимает значения p и $ш$. Из рисунка видно, что правило решения имеет вид

$$i = \begin{cases} i_p & \text{при } |i| > i_0; \\ i_{ш} & \text{при } |i| < i_0. \end{cases}$$

Пороговое значение i_0 , определяющее границу области решений θ_1, θ_2 и θ_3 , равно

$$i_0 = \pm \sqrt{\bar{i}_p \bar{i}_{ш} \left(1 + \frac{4e\Delta f}{\bar{i}_p - \bar{i}_{ш}} \ln \frac{p(1)}{p(0)} \sqrt{\frac{\bar{i}_p}{\bar{i}_{ш}}} \right)}. \quad (4.60)$$

Площади $S_1 + S_2$ и $S_3 + S_1$ на рис. 4.9 численно равны вероятности ошибочных решений при приеме сигналов $i_p, i_{ш}$.

При равновероятных априорных сведениях приема сигналов выражение (4.60) принимает вид

$$i_0 = \pm \sqrt{\bar{i}_p \bar{i}_{ш} \left(1 + \frac{4e\Delta f}{\bar{i}_p - \bar{i}_{ш}} \ln \sqrt{\frac{\bar{i}_p}{\bar{i}_{ш}}} \right)}. \quad (4.61)$$

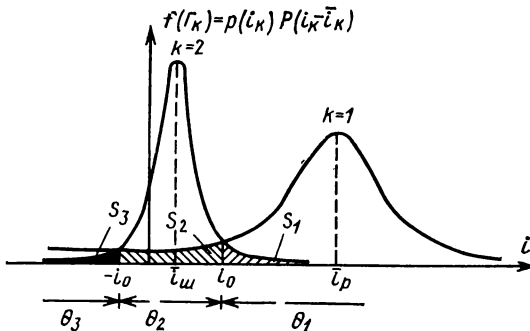


Рис. 4.9. Геометрическая модель критерия идеального наблюдателя

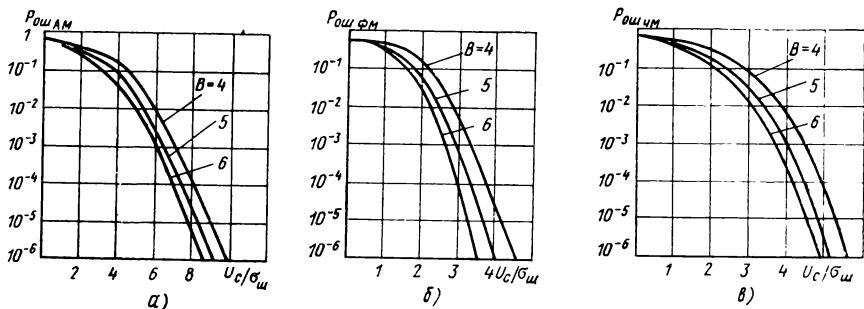


Рис. 4.10. Характеристики помехоустойчивости двоичного канала при флюктуационных помехах:

a — с амплитудной манипуляцией сигналов; *b* — с фазовой манипуляцией; *v* — с частотной манипуляцией сигналов

Подставляя уравнения (4.55), (4.56) и (4.61) в выражение (4.59), получим

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ош}}|_{\text{AM}} = & \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left[A \left(\sqrt{\bar{i}_{\text{ш}}} + \frac{J_0^2(\alpha)}{1 + J_0^2(\alpha)} C - \sqrt{\bar{i}_{\text{p}}} \right) \right] + \right. \\
 & + \Phi \left[A \left(-\sqrt{\bar{i}_{\text{ш}}} + \frac{J_0^2(\alpha)}{1 + J_0^2(\alpha)} C - \sqrt{\bar{i}_{\text{p}}} \right) \right] - \\
 & - \Phi \left[A \left(\sqrt{\bar{i}_{\text{p}}} + \frac{1}{1 - J_0^2(\alpha)} C - \sqrt{\bar{i}_{\text{ш}}} \right) \right] - \\
 & \left. - \Phi \left[A \left(-\sqrt{\bar{i}_{\text{p}}} + \frac{1}{1 - J_0^2(\alpha)} C - \sqrt{\bar{i}_{\text{ш}}} \right) \right] \right\}, \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

где $A = \frac{1}{\sqrt{2e\Delta f}}$; $C = 4e\Delta f \ln(1/J_0^2(\alpha))$.

Графики, построенные по выражению (4.62), представлены на рис. 4.10, *a*, где по оси абсцисс отложены значения отношения сигнал/шум на входе схемы когерентной оптико-голографической обработки информации. Как следует из графиков, вероятность ошибки с увеличением $U_c/\sigma_{\text{ш}}$ уменьшается, кроме того за счет выбора характеристик ПМС и увеличения дифракционной эффективности СГФ можно также минимизировать вероятность ошибки.

Помехоустойчивость системы связи при фазовой манипуляции сигналов

При передаче информации фазоманипулированными сигналами информативным параметром является фаза генерируемых высокочастотных сигналов. Принцип фазовой манипуляции

заключается в том, что фаза высокочастотных колебаний при передаче «1» и «0» изменяется на π , а частота и амплитуда остаются неизменными. Если символу «1» соответствует сигнал $U_c \cos 2\pi F_0 t$, то символу «0» — $U_c \cos(2\pi F_0 t + \pi)$.

Распределение поля в плоскости фотодетекторов (регистрации) с учетом выражения (4.34) при приеме «1» будет равно

$$\begin{aligned}
 E(\xi) = & E_0 \tau_0 L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n} + \\
 & + \frac{E_0 \Delta v}{2} L \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_n f_0 \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi - \lambda F_n f_0 \right) / \lambda F_n} + \\
 & + \frac{E_0 \Delta v}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi + \lambda F_n f_0 - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi + \lambda F_n f_0 - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n}, \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

а при приеме «0» —

$$\begin{aligned}
 E(\xi) = & E_0 \tau_0 L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n} + \\
 & + \frac{E_0 \Delta v}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_n f_0 - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi - \lambda F_n f_0 - \lambda F_n \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_n} + \\
 & + \frac{E_0 \Delta v}{2} L \frac{\sin \pi L \left(\xi + \lambda F_n f_0 \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi + \lambda F_n f_0 \right) / \lambda F_n}. \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

В выражении (4.63) отклик фильтра на согласованный сигнал описывает второе слагаемое, пространственное положение которого в плоскости регистрации будет сдвинуто относительно оптической оси на расстояние $-\lambda F_n f_0$. При приходе символа «0» отклик фильтра на согласованный сигнал будет сдвинут относительно оптической оси в плоскости регистрации на расстояние $\lambda F_n f_0$.

Анализ выражений (4.63) и (4.64) показывает, что согласованный голографический фильтр, синтезированный для одного сигнала, содержит компонент, согласованный для противоположного сигнала. Следовательно, отпадает необходимость в формировании двух независимых фильтров для противоположных сигналов.

Прием фазоманипулированных ФМ сигналов на фоне флюктуационных помех имеет ряд особенностей по сравнению с приемом амплитудно-манипулированных АМ сигналов. Эти особенности обусловлены наличием в приемном устройстве неперекрывающихся в пространстве двух трактов приема. Решение об идентификации

принятого сигнала («1» или «0») с соответствующим сигналом-эталоном принимается определением того из трактов, выходной сигнал которого достигает максимального значения. Если, например, передавалась «1», то амплитуда тока в первом фотодетекторе ФЭУ1 будет больше, чем во втором ФЭУ2. При передаче «0» картина меняется на противоположную. Это означает, что сбой знака может произойти в том случае, если пиковое значение помехи $i_{ш}$ в тракте без сигнала превысит амплитуду тока i_p в сигнальном тракте. Тогда вероятность ошибочного приема сигнала при равенстве априорных вероятностей передачи противоположных сигналов будет определяться выражением

$$P_{ош} = \int_{-\infty}^{\infty} P(i_p) \left(\int_{i_p}^{\infty} P(i_{ш}) di_{ш} \right) di_p, \quad (4.65)$$

где $P(i_p)$ — плотность распределения тока в рабочем тракте; $P(i_{ш})$ — плотность распределения тока в холостом тракте.

При «сильных сигналах» оптического излучения в рабочем и холостом трактах на выходе фотодетекторов имеет место нормальное распределение тока. Подставляя уравнение (4.57) в выражение (4.65), получим

$$P_{ош} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{i_p}} e^{-\frac{(i_p - \bar{i}_p)^2}{2\sigma_{i_p}^2}} \left(\int_{i_p}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{i_{ш}}} e^{-\frac{(i_{ш} - \bar{i}_{ш})^2}{2\sigma_{i_{ш}}^2}} di_{ш} \right) di_p, \quad (4.66)$$

где $\sigma_{i_p}^2 = 2\bar{i}_p e\Delta f$; $\sigma_{i_{ш}}^2 = 2\bar{i}_{ш} e\Delta f$.

Осуществляя замену переменных, последнее выражение можно привести к виду

$$P_{ош} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \operatorname{erfc} \left(z \frac{\sigma_{i_p}}{\sigma_{i_{ш}}} + \frac{\bar{i}_p - \bar{i}_{ш}}{\sqrt{2}\sigma_{i_{ш}}} \right) dz, \quad (4.67)$$

где

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Используя равенство [15]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \operatorname{erfc}(\alpha y + \beta) dy = \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right),$$

запишем выражение (4.67) в виде

$$P_{ош} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\bar{i}_p - \bar{i}_{ш}}{2\sqrt{e\Delta f} \sqrt{\bar{i}_p - \bar{i}_{ш}}} \right]. \quad (4.68)$$

Учитывая, что апертурные размеры фотодетекторов соизмеримы с размерами первого дифракционно-ограниченного пятна, можно вычислить эффективные амплитуды поля на входе фотодетекторов для рабочего и холостого трактов:

$$\bar{E}_{\text{эФр}} = \frac{|E_0 \Delta \tau|}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz; \quad (4.69)$$

$$\bar{E}_{\text{эФш}} = \frac{|E_0 \Delta \tau|}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} J_0(2\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz. \quad (4.70)$$

Подставляя соотношения (4.69) и (4.70) в выражение (4.53), получим средние значения токов на выходе фотодетекторов соответственно для рабочего и холостого трактов:

$$\bar{i}_p = \frac{D_i}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{|2|} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2; \quad (4.71)$$

$$\bar{i}_{\text{ш}} = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{|2|} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} J_0(2\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2. \quad (4.72)$$

Тогда, подставляя соотношения (4.71) и (4.72) в выражение для вероятности ошибки (4.68), получим

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[B e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1 - J_0^2(2\alpha)}{\sqrt{1 + J_0^2(2\alpha)}} \right], \quad (4.73)$$

где $B = \frac{E_0 \Delta \tau}{4\sqrt{2e} \Delta f} \sqrt{D} L \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz.$

Результаты расчетов по формуле (4.73) представлены на рис. 4.10, б. Анализ выражения (4.73) и полученных графиков показывает, что ошибка уменьшается с увеличением протяженности сигнала L и дифракционной эффективности голографического фильтра $\Delta \tau/2$, а также с уменьшением уровня шума, характеризующегося величиной σ_f^2 .

Помехоустойчивость системы связи при частотной манипуляции сигналов

Принцип частотной манипуляции состоит в том, что передатчик генерирует попеременно колебания двух частот, одна из которых F_{01} соответствует символу «1», а другая F_{02} — символу «0».

Алгоритм работы приемника при частотной манипуляции сигналов не отличается от приема сигналов с фазовой манипуляцией. Отличительной особенностью приема частотно-манипулированных

(ЧМ) сигналов является то, что голографический фильтр формируется для двух сигналов и амплитудный коэффициент пропуска такого фильтра может быть описан выражением

$$\tau(x) = \tau_0 + \Delta\tau \{ \cos 2\pi [f_{n1}(x) - f_{o1}x] + \cos 2\pi [f_{n2}(x) - f_{o2}x] \}. \quad (4.74)$$

В данном выражении $f_{o1} \neq f_{o2}$, т. е. формирование СГФ для сигналов $f_{n1}(x)$ и $f_{n2}(x)$ производилось в разных пространственных частотах. Или, другими словами, угловое положение опорного пучка при каждой записи менялось.

При приеме сигнала $U_c \cos 2\pi F_{01}t$ амплитуда отклика фильтра в плоскости регистрации будет описываться выражением

$$\begin{aligned} E(\xi) = & E_0 \tau_0 L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{nF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{nF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_n} + \\ & + \frac{E_0 \Delta\tau}{2} L \frac{\sin \frac{\pi L}{\lambda F_n} (\xi - \lambda F_n f_{01})}{\frac{\pi L}{\lambda F_n} (\xi - \lambda F_n f_{01})} + \frac{E_0 \Delta\tau}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\alpha) \times \\ & \times \frac{\sin \pi L \left(\xi + \lambda F_n f_{01} - \lambda F_n \frac{nF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi + \lambda F_n f_{01} - \lambda F_n \frac{nF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_n} + \frac{E_0 \Delta\tau}{2} L \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) J_k(\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_n f_{02} - \lambda F_n \frac{nF_{01} - kF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi - \lambda F_n f_{02} - \lambda F_n \frac{nF_{01} - kF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_n} + \\ & + \frac{E_0 \Delta\tau}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) J_k(\alpha) \times \\ & \times \frac{\sin \pi L \left(\xi + \lambda F_n f_{02} - \lambda F_n \frac{nF_{01} - kF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi + \lambda F_n f_{02} - \lambda F_n \frac{nF_{01} - kF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_n}. \quad (4.75) \end{aligned}$$

а при приеме сигнала $U_c \cos 2\pi F_{02}t$

$$\begin{aligned} E(\xi) = & E_0 \tau_0 L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{nF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_n}{\pi L \left(\xi - \lambda F_n \frac{nF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_n} + \\ & + \frac{E_0 \Delta\tau}{2} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) J_k(\alpha) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\sin \pi L \left(\xi - \lambda F_{\pi} f_{01} - \lambda F_{\pi} \frac{nF_{02} - kF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_{\pi}}{\pi L \left(\xi - \lambda F_{\pi} f_{01} - \lambda F_{\pi} \frac{nF_{02} - kF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_{\pi}} + \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \times \\
& \times L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) J_k(\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi + \lambda F_{\pi} f_{01} - \lambda F_{\pi} \frac{nF_{02} - kF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_{\pi}}{\pi L \left(\xi + \lambda F_{\pi} f_{01} - \lambda F_{\pi} \frac{nF_{02} - kF_{01}}{V_0} \right) / \lambda F_{\pi}} + \\
& + \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L \frac{\sin \pi L (\xi - \lambda F_{\pi} f_{02}) / \lambda F_{\pi}}{\pi L (\xi - \lambda F_{\pi} f_{02}) / \lambda F_{\pi}} + \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \times \\
& \times L \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2\alpha) \frac{\sin \pi L \left(\xi + \lambda F_{\pi} f_{02} - \lambda F_{\pi} \frac{nF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_{\pi}}{\pi L \left(\xi + \lambda F_{\pi} f_{02} - \lambda F_{\pi} \frac{nF_{02}}{V_0} \right) / \lambda F_{\pi}}. \quad (4.76)
\end{aligned}$$

Из выражений (4.75) и (4.76) следует, что фотодетекторы для приема символов «1» и «0» необходимо располагать на расстоянии $-\lambda F_{\pi} f_{01}$, $-\lambda F_{\pi} f_{02}$, сдвинутых относительно оптической оси соответственно.

Если принимается «1», то средний ток на выходе фотодетектора ФЭУ1, который соответствует сигналу $U_c \cos 2\pi F_{01} t$, будет определяться из соотношения

$$\bar{i}_p = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2, \quad (4.77)$$

в то же время средний ток на выходе фотодетектора ФЭУ2, который соответствует символу «0», будет равен

$$\bar{i}_ш = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} J_0^2(\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2. \quad (4.78)$$

При приеме символа «0» значения средних токов на выходе фотодетекторов меняются на обратные.

При равенстве априорных вероятностей передачи символов «1» и «0» вероятность ошибки будет соответствовать вероятности принятия решения о приеме сигнала $U_c \cos 2\pi F_{02} t$, когда в действительности передавался сигнал $U_c \cos 2\pi F_{01} t$. С учетом принятых предположений вероятность ошибки будет определяться выражением (4.68). Тогда подставляя соотношения (4.77) и (4.78) в выражение (4.68) и осуществляя ряд несложных преобразований, получим

$$P_{ош} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[B \frac{1 - J_0^4(\alpha)}{\sqrt{1 + J_0^4(\alpha)}} e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \right]. \quad (4.79)$$

На рис. 4.10, в представлены результаты расчетов по формуле (4.79).

Анализ полученных графиков для АМ, ФМ и ЧМ сигналов показывает, что наиболее помехоустойчивыми сигналами являются фазоманипулированные сигналы. Для достижения той же вероятности ошибки для АМ сигналов, что и для ФМ сигналов, отношение сигнал/шум должно быть в два раза больше. Вероятность ошибки для сигналов с частотной манипуляцией является промежуточным случаем между вероятностью ошибки для ФМ и АМ сигналов. Графики вероятности ошибки для ЧМ сигналов при больших a будут приближаться к кривым ФМ сигналов.

Помехоустойчивость системы связи при обработке кодированных сообщений в целом

В предыдущих разделах рассматривался только элементарный метод приема дискретных сообщений, при котором решение о принятом сигнале принималось по результату анализа элемента непрерывного сигнала длительностью T .

При использовании кодированных сообщений для передачи информации поэлементный прием не является оптимальным, так как в приемном устройстве не полностью учитывается вся информация о сигнале. Оптимальным приемом кодированных сообщений следует считать прием в целом [2]. В этом случае приемное устройство анализирует как единое целое принимаемый сигнал, соответствующий всей переданной кодовой комбинации, принимая решение в пользу сообщения с наибольшей апостериорной вероятностью.

Использование для передачи информации ортогональных и псевдослучайных сигналов позволяет осуществлять выделение сигналов на приемной стороне по форме сигнала. В радиотехнических системах выделение кодированных сообщений по форме осуществляется, как правило, в корреляторах или согласованных фильтрах, причем каждому сигналу соответствует свой коррелятор или согласованный фильтр. При передаче информации большим числом кодированных сообщений, описываемых различными функциями времени, возникают технические трудности реализации приемных устройств. Достоинством когерентных оптико-голографических систем обработки информации является то, что увеличение числа сигналов для передачи информации не приводит к существенному усложнению приемных устройств.

Известно [69], что на одной голограмме можно зарегистрировать большое число изображений. Запись их может осуществляться двумя методами. В одном из них все изображения одновременно экспонируются на одну голограмму. Во втором методе запись изображений производится несколькими разделенными во времени экспозициями. Причем при каждой экспозиции голографируется только одно изображение. Для разделения изображений в пространстве на стадии реконструкции голограммы необходимо при каждом эксп-

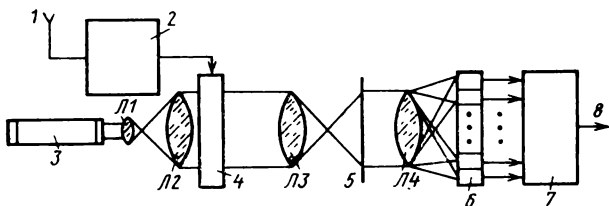


Рис. 4.11. Схема когерентной оптико-голографической обработки сложных кодированных радиосигналов:

1 — антенна А; 2 — усилитель высокой частоты (УВЧ); 3 — лазер; 4 — пространственный модулятор света (ПМС); 5 — согласованный голографический фильтр (СГФ); 6 — фотодетекторы; 7 — решающее устройство (РУ); 8 — выход информации

нировании менять пространственное положение опорного или предметного луча.

При формировании голограммы первым методом регистрируются взаимно-интерференционные изображения, которые могут внести искажения при реконструкции голограммы в исходное изображение.

При многократном экспонировании на голограмме суммируются частные интенсивности при каждой записи, так что полная интенсивность, приходящаяся на голограмму, будет равна

$$I(x) = \sum_{q=1}^M |a_{oq} + U_q(x)|^2 = \sum_{q=1}^M |a_{oq}|^2 + \sum_{q=1}^M |U_q(x)|^2 + \sum_{q=1}^M a_{oq} U_q^*(x) + \sum_{q=1}^M a_{oq}^* U_q(x), \quad (4.80)$$

где a_o — амплитуда опорного пучка; $U_q(x)$ — амплитуда предметного пучка; M — число записанных изображений.

Из выражения (4.80) видно, что при реконструкции голограммы будет восстанавливаться каждое изображение, а также его комплексно-сопряженный аналог.

Таким образом, для записи многопозиционных СГФ на одной голограмме целесообразней использовать метод многократной экспозиции отдельных изображений. При таком методе записи амплитудный коэффициент пропускания СГФ равен

$$\tau(x) = \tau_0 + \Delta\tau \sum_{q=1}^M \cos \{2\pi [f_{nq}(x) - f_{oq} x]\}, \quad (4.81)$$

где $f_{oq}x$ — пространственная фаза опорного луча при q -м экспонировании; $f_{nq}(x)$ — пространственная фаза q -го образа радиосигнала.

При рассмотрении процесса приема кодированных сообщений воспользуемся схемой, представленной на рис. 4.11. Особенностью схемы приема кодированных сообщений в целом по сравнению с

приеме АМ, ФМ и ЧМ сигналов является то, что каждому сообщению соответствует свой фотодетектор в плоскости регистрации.

При приеме k -го сообщения поле в плоскости регистрации будет описываться выражением

$$\begin{aligned}
 E(\xi) = & \frac{E_0 \Delta v}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{\sin \pi L (\xi - \lambda F_{\lambda} f_{ok}) / \lambda F_{\lambda}}{\pi L (\xi - \lambda F_{\lambda} f_{ok}) / \lambda F_{\lambda}} + \\
 + & \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^{M-1} \frac{E_0 \Delta v}{2} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \exp \{ -j2\pi [(\xi' - f_{oq})x + f_{nq} - f_k(x)] \} dx + \\
 + & \frac{E_0 \Delta v}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2a) \frac{\sin \pi L \left(\xi + \lambda F_{\lambda} f_{ok} - \lambda F_{\lambda} \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_{\lambda}}{\pi L \left(\xi + \lambda F_{\lambda} f_{ok} - \lambda F_{\lambda} \frac{n}{\Delta_x} \right) / \lambda F_{\lambda}} + \\
 + & \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^{M-1} \frac{E_0 \Delta v}{2} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \exp \{ -j2\pi [(\xi' + f_{oq})x - f_{nq}(x) - f_k(x)] \} dx.
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Из анализа выражения (4.28) следует, что при приеме k -го сообщения максимальная амплитуда отклика фильтра соответствует направлению k -го сообщения в пространстве. Таким образом, на выходе k -го фотодетектора значение тока будет больше, чем в остальных. Ошибка может произойти в том случае, если пиковое значение помехи $i_{ш}$ в q -м фотодетекторе ($q \neq k$) превысит амплитуду тока i_p в k -м фотодетекторе. Полагая все сигналы равновероятными и считая, что токи на выходе фотодетекторов статистически независимы, безусловная вероятность правильного приема k -го сообщения будет равна

$$\begin{aligned}
 P_{\text{пр}}(i_k > i_1, i_k > i_2, \dots, i_k > i_q, \dots, i_k > i_M) = & \int_{-\infty}^{\infty} P(i_k) \times \\
 \times & \left[\int_{-\infty}^{i_k} P(i_1) di_1 \times \dots \times \int_{-\infty}^{i_k} P(i_q) di_q \times \dots \times \int_{-\infty}^{i_k} P(i_M) di_M \right] di_k.
 \end{aligned}$$

Тогда средняя вероятность ошибочного приема кодированного сообщения определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = 1 - P_{\text{пр}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P(i_k) \left[\prod_{q=1}^{M-1} \int_{-\infty}^{i_k} P(i_q) di_q \right] di_k, \tag{4.83}$$

где $P(i_k)$ — плотность распределения тока на выходе k -го фотодетектора; $P(i_q)$ — плотность распределения тока на выходе q -го фотодетектора.

При «сильных сигналах» на выходе фотодетекторов плотность распределения тока будет подчиняться нормальному закону. Математическое ожидание и дисперсия тока прямо пропорционально зависят от квадрата амплитуды поля на входе фотодетектора. Подставляя уравнение (4.57) в выражение (4.83), получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{i_k}^2}} e^{-\frac{(i_k - \bar{i}_k)^2}{2\sigma_{i_k}^2}} \left[\prod_{q=1}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{i_q}^2}} e^{-\frac{(i_q - \bar{i}_q)^2}{2\sigma_{i_q}^2}} di_q \right] di_k. \quad (4.84)$$

Учитывая соотношение

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt,$$

последнее выражение приводится к виду

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \prod_{q=1}^{M-1} \Phi\left(\sqrt{\frac{\bar{i}_k}{\bar{i}_q}} y + \frac{\bar{i}_k - \bar{i}_q}{\sqrt{2e\Delta f \bar{i}_q}}\right) dy,$$

или через интеграл вероятности Гаусса ($V(z) = 1 - \Phi(z)$)

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \prod_{q=1}^{M-1} \left[1 - V\left(\sqrt{\frac{\bar{i}_k}{\bar{i}_q}} y + \frac{\bar{i}_k - \bar{i}_q}{\sqrt{2e\Delta f \bar{i}_q}}\right) \right] dy. \quad (4.85)$$

Средний ток на выходе фотодетектора прямо пропорционален квадрату эффективной амплитуды на входе фотодетектора. Для сложных кодированных сообщений амплитуда отклика фильтра на приходящее возмущение зависит от формы приходящего сигнала и записанного на СГФ. При совпадении элементарных символов фронт волны на выходе СГФ будет представлять собой апертурно-ограниченную плоскую волну. Совпадение двух или нескольких символов на расположенных рядом позициях образуют на выходе СГФ плоскую волну, апертурные размеры которой определяются как сумма линейных размеров элементарных символов. В случае несовпадения элементарных символов на одноименных позициях фронт волны на выходе СГФ будет модулирован по сложному закону. Апертурные размеры однородного фронта волны на выходе СГФ будем называть длиной серии, а число однородных фронтов, образованных при сравнении двух кодовых последовательностей по апертуре, числом серий.

Для ортогональных сигналов число совпадений и число несовпадений одинаково. Поэтому максимально возможное число серий при сравнении ортогональных сигналов, несогласованных с записанным на СГФ, будет равно числу элементарных символов, а ми-

нимальное — двум. Тогда для ортогональных сигналов с фазовой модуляцией амплитуда поля на выходе фотодетекторов для несогласованных сигналов будет изменяться от величины

$$\bar{E}_{\text{эф}q=n} = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \frac{L}{M} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} [1 + J_0(2\alpha)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{\sin z}{z} dz,$$

до $\bar{E}_{\text{эф}q=m} = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} \frac{L}{2} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} [1 + J_0(2\alpha)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin z}{z} dz.$

Следовательно, и средний ток на выходе фотодетекторов также изменяется от

$$\bar{i}_{q=n} = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} \frac{L}{M} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} [1 + J_0(2\alpha)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2 \quad (4.86)$$

до $\bar{i}_{q=m} = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} \frac{L}{2} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} [1 + J_0(2\alpha)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2.$ (4.87)

На выходе других фотодетекторов средний ток будет принимать промежуточные значения; этот ток может быть описан выражением

$$\bar{i} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{E_0 \Delta \tau}{2} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} [S_q + S'_q J_0(2\alpha)] \right\}^2, \quad (4.88)$$

где S_q — коэффициент, характеризующий число совпадений и длину серии в каждом совпадении; S'_q — коэффициент, характеризующий число несовпадений и длину серии в каждом несовпадении. Например, при сравнении k и n , а также k и m последовательностей [см. выражения (4.86) и (4.87)], соответствующие коэффициенты равны

$$S_{k,n} = \frac{L}{M} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{\sin z}{z} dz; \quad S'_{k,n} = \frac{L}{M} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{\sin z}{z} dz;$$

$$S_{k,m} = \frac{L}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin z}{z} dz; \quad S'_{k,m} = \frac{L}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin z}{z} dz.$$

При приеме другой кодовой последовательности эффективная амплитуда на фиксированном фотодетекторе будет изменяться. Но так как отклик фильтра на приходящее возмущение будет обладать свойством цикличности, то можно считать, что коэффициенты S_q и S'_q не зависят от приходящего сигнала.

Средняя эффективная амплитуда поля на входе k -го фотодетектора определяется из соотношения

$$\bar{E}_{\phi} = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Тогда средний ток на выходе фотодетекторов, характеризующий согласованный тракт, равен

$$\bar{i}_k = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2. \quad (4.89)$$

Значения токов на выходе фотодетекторов в несогласованных трактах неодинаковы, поэтому выражение ошибки (4.85) не приводится к табулированным функциям. Но если положить, что отношение сигнал/шум на входе КОГС больше единицы, то, раскрывая подынтегральное произведение и ограничиваясь линейными членами этого разложения, получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \left\{ 1 - \sum_{q=1}^{M-1} V \left(\sqrt{\frac{\bar{i}_k}{\bar{i}_q}} y + \frac{\bar{i}_k - \bar{i}_q}{\sqrt{2e\Delta f \bar{i}_q}} \right) \right\} dy. \quad (4.90)$$

При оценке вероятности ошибки погрешность не превышает 20%, так как при отношении сигнал/шум больше единицы значение интеграла вероятности Гаусса меньше 10^{-3} .

Учитывая равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(z + v\xi) e^{-\xi^2/2} d\xi = V\left(\frac{z}{\sqrt{v^2 + 1}}\right),$$

выражение (4.90) примет вид

$$P_{\text{ош}} = \sum_{q=1}^{M-1} V\left(\frac{\bar{i}_k - \bar{i}_q}{\sqrt{2e\Delta f} \sqrt{\bar{i}_k + \bar{i}_q}}\right),$$

или через интеграл вероятности

$$P_{\text{ош}} = 0,5 \sum_{q=1}^{M-1} \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{i}_k - \bar{i}_q}{\sqrt{2e\Delta f} \sqrt{\bar{i}_k + \bar{i}_q}}\right). \quad (4.91)$$

Тогда, подставляя соотношения (4.88) и (4.89) в выражение (4.91), получим выражение для вероятности ошибки при приеме ортогональных сигналов с фазовой модуляцией:

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{M-1} \operatorname{erfc} \left\{ B e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1 - \frac{1}{M^2 \beta^2} [S_q + S'_q J_0(2\alpha)]^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{M^2 \beta^2} [S_q + S'_q J_0(2\alpha)]^2}} \right\}, \quad (4.92)$$

где $\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz$.

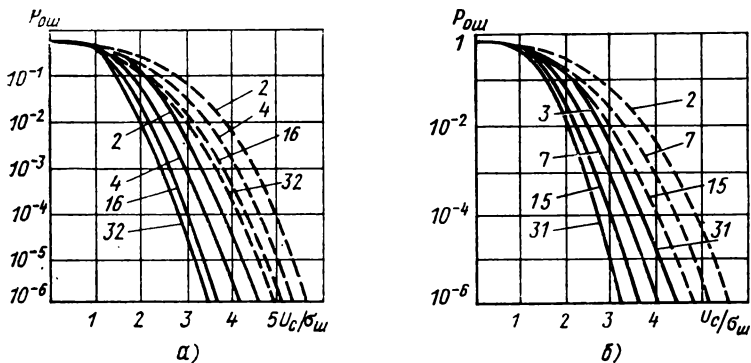


Рис. 4.12. Характеристики помехоустойчивости при флюктуационных помехах:

— при фазовой модуляции; - - при частотной модуляции; а — ортогональных сигналов; б — псевдоослучайных сигналов

При $M=2$ это выражение переходит в формулу (4.73). Графики вероятности ошибки при приеме ортогональных сигналов с фазовой модуляцией представлены на рис. 4.12, а для различного числа элементарных символов в кодовой последовательности. Как следует из графиков, с увеличением числа символов вероятность ошибки уменьшается.

Для ортогональных сигналов с частотной модуляцией средний ток на выходе q -го фотодетектора равен

$$\bar{i}_q = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} \frac{L}{M} e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} (S_q + S'_q J_0^2(\alpha)) \right]^2, \quad (4.93)$$

а на выходе k -го фотодетектора, соответствующего согласованному сигналу,

$$\bar{i}_k = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2. \quad (4.94)$$

Подставляя соотношения (4.93) и (4.94) в выражение (4.91), получим

$$P_{0ш} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{M-1} \operatorname{erfc} \left\{ B e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{1 - \frac{1}{M^2 \beta^2} [S_q + S'_q J_0^2(\alpha)]^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{M^2 \beta^2} [S_q + S'_q J_0^2(\alpha)]}} \right\}. \quad (4.95)$$

На рис. 4.12 пунктирными линиями представлены графики, построенные по выражению (4.95) для различного числа символов. Вероятность ошибочного приема ортогональных сигналов с частотной модуляцией выше, чем с фазовой модуляцией.

Помехоустойчивость системы связи при приеме M -последовательности с ФМ и ЧМ. При приеме M -последовательности амплитуда отклика фильтра на входе фотодетекторов будет практически

одинакова. Поэтому выражение (4.85) для вероятности ошибки можно привести к виду

$$P_{\text{ош}} \simeq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\bar{i}_k - \bar{i}_q}{2 \sqrt{e \Delta f} \sqrt{\bar{i}_k + \bar{i}_q}} \right]. \quad (4.96)$$

Средняя эффективная амплитуда поля в плоскости регистрации на несогласованный сигнал равна

$$\bar{E}_{\text{эф}} = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{2L}{M-1} [S_q + S'_q J_0(2\alpha)],$$

а амплитуда отклика фильтра на согласованный сигнал определяется из соотношения

$$\bar{E}_{\text{эф}} = \frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Тогда средние токи на выходе фотодетекторов для согласованного и несогласованного сигналов соответственно равны

$$\bar{i}_k = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2; \quad (4.97)$$

$$\bar{i}_q = \frac{P}{2} \left[\frac{E_0 \Delta \tau}{2} \frac{2L}{M-1} e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} [S_q + S'_q J_0(2\alpha)] \right]^2. \quad (4.98)$$

Подставляя значения средних токов (4.97) и (4.98) в выражение (4.96) для вероятности ошибки, получим

$$P_{\text{ош}} = \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ B e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{1 - \frac{1}{(M-1)^2} [S_q + S'_q J_0(2\alpha)]^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{(M-1)^2} [S_q - S'_q J_0(2\alpha)]^2}} \right\}. \quad (4.99)$$

Для частотной модуляции M -последовательностей выражение для вероятности ошибки имеет вид

$$P_{\text{ош}} \simeq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ B e^{-2\pi^2 \sigma^2 f} \frac{1 - \frac{1}{(M-1)^2} [S_q + S'_q J_0^2(\alpha)]^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{(M-1)^2} [S_q - S'_q J_0^2(\alpha)]^2}} \right\}. \quad (4.100)$$

На рис. 4.12, б сплошными линиями представлены графики, построенные по выражению (4.99), а пунктирными — по выражению (4.100). Анализ графиков показывает, что с увеличением числа символов вероятность ошибки уменьшается. Сигналы с фазовой модуляцией обладают более помехоустойчивыми свойствами, чем с частотной модуляцией.

Помехоустойчивость системы связи при приеме ДЧМ сигналов. Для сигналов с дискретной частотной модуляцией число совпаде-

ний при сравнении любой пары сообщений между собой будет равно единице, а число несовпадений $M - 1$.

Средняя эффективная амплитуда поля отклика фильтра на согласованный сигнал будет равна

$$\bar{E}_{\text{эф}} = \frac{E_0 \Delta v}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz,$$

а на несогласованный сигнал

$$\bar{E}_{\text{эф}} = \frac{E_0 \Delta v}{2} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{L}{M-1} [1 + MJ_0^2(\alpha)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Тогда математические ожидания токов на выходе соответствующих фотодетекторов имеют значения

$$\bar{i}_k = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta v}{2} L e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2; \quad (4.101)$$

$$\bar{i}_q = \frac{D}{2} \left[\frac{E_0 \Delta v}{2} \frac{L}{M-1} e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} [1 + MJ_0^2(\alpha)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{\sin z}{z} dz \right]^2. \quad (4.102)$$

Подставляя соотношения (4.101) и (4.102) в выражение (4.96), получим вероятность ошибочного приема ДЧМ сигналов

$$P_{\text{ош}} \cong \frac{M-2}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \operatorname{Be} \frac{e^{-2\pi^2 \sigma_f^2} \frac{1 - \frac{1}{M^4} [1 + MJ_0^2(\alpha)]^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{M^4} [1 + MJ_0^2(\alpha)]^2}} \right\}. \quad (4.103)$$

Результаты расчетов по формуле (4.103) приведены на рис. 4.13. Проведенный анализ помехоустойчивости системы связи при приеме различных сигналов указывает на перспективность применения когерентных оптико-голографических систем для обработки радиосигналов сложной формы. С увеличением базы сигналов и усложнением их формы вероятность ошибочного приема уменьшается. Из рассмотренных сигналов наиболее помехоустойчивыми свойствами обладают ДЧМ сигналы и псевдослучайные сигналы (типа M -последовательностей) с фазовой модуляцией.

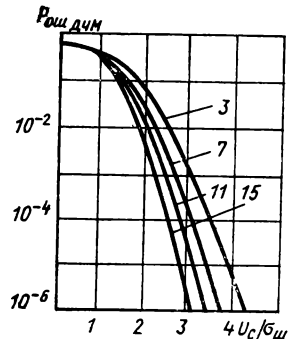


Рис. 4.13. Характеристики помехоустойчивости сигналов с дискретной частотной модуляцией при флюктуационных помехах

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЛАЗЕРНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

5.1. ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИС

Решение разнообразных задач лазерных информационных систем (ЛИС) связано с необходимостью управления характеристиками оптического излучения. Управление производится изменением интенсивности светового потока, частоты, фазы и поляризации оптического излучения, длительности световых импульсов, т. е. модуляцией излучения лазера. При установлении и поддержании связи одной из важнейших операций является сканирование лазерным лучом исследуемой области пространства, т. е. управление угловой расходимостью лазерного луча и его положением в пространстве.

Таким образом, термин «управление» применительно к ЛИС охватывает широкий круг вопросов теории и практики создания данных систем. Отсутствие систематизированных материалов по вопросам установления и поддержания связи в ЛИС КА и возрастающий интерес специалистов к созданию таких систем требуют рассмотрения особенностей организации поиска и сопровождения сигнала абонента в ЛИС КА. Поэтому при дальнейшем изложении под управлением ЛИС будет подразумеваться управление формой и положением луча лазера в пространстве в режиме поиска и сопровождения абонентов ЛИС.

В заключительных главах книги рассматриваются вопросы, связанные с управлением формой и положением диаграммы направленности в пространстве, представляющие наибольший интерес при установлении и поддержании связи в ЛИС КА. Основное внимание уделяется рассмотрению параметров системы установления связи между абонентами для наиболее сложного случая автономного управления работой систем КА, т. е. при минимально возможном контакте с наземным командно-измерительным комплексом.

Управление лазерными информационными системами для установления контакта с абонентом предполагает, в первую очередь, целенаправленное воздействие на форму и положение диаграммы направленности излучения лазера в пространстве. Чрезвычайно узкие диаграммы направленности оптических антенн требуют обеспечения высокой точности сопровождения сигнала абонента, оцениваемой ошибками в доли угловой секунды. Поэтому процесс установления связи в ЛИС реализуется в виде последовательно выполня-

емых этапов поиска, обнаружения и сопровождения сигнала абонента.

Сложность установления связи в ЛИС КА обусловлена как особенностями оптического диапазона волн, так и спецификой функционирования аппаратуры на борту КА. Влияние КА как носителя аппаратуры, а также характера выполняемых им задач на функционирование ЛИС проявляется в следующем [110]:

больших дальностях связи;

длительном времени существования абонентов;

большом количестве случайных факторов, влияющих на параметры движения КА;

недостаточной точности стабилизации и ориентации КА;

значительных угловых скоростях и ускорения линии визирования КА.

При установлении связи в ЛИС возникает необходимость учета особенностей оптического диапазона волн, обуславливающих:

узкие диаграммы направленности антенны;

абберации оптических систем;

влияния атмосферы, особенно на гетеродинный прием;

ограничения на выбор аппаратуры, связанные с используемым диапазоном и состоянием материально-технической базы;

особенности когерентной оптики в применяемых способах поиска и автосопровождения;

особенности шумовой составляющей применяемого сигнала;

ограничения на размеры оптических антенн для различных видов приема;

противоречие узких диаграмм направленности, малого времени поиска и резкого уменьшения числа «сигнальных» фотонов;

влияние на процедуру поиска эффекта абберации скорости света.

Состояние ЛИС в процессе управления непосредственно определяется величиной углового «промаха» δ — углом между линией визирования оптической антенны объекта A и направлением на истинное положение объекта B . В момент начала поиска в результате действия различных возмущающих факторов «промах» δ равен своему начальному значению δ_n , а его составляющие в сферической системе координат, совмещенной, например, с объектом A , запишутся в виде

$$\delta = \begin{bmatrix} \theta_A - \theta_B \\ \Phi_A - \Phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

На вход решающего устройства системы управления будет воздействовать выходной сигнал приемника $U_{\text{пр}}$, величина которого описывается законом

$$U_{\text{пр}} = \begin{cases} U(\delta), & \delta \in \Omega; \\ 0, & \delta \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

где Ω — область допустимых положений оптической оси антенны.

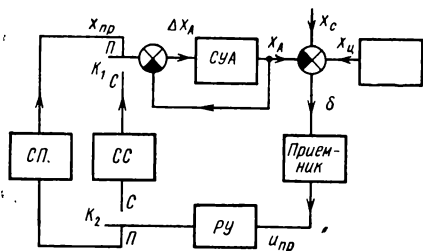


Рис. 5.1. Структурная схема системы управления ЛИС

Следовательно, система управления должна функционировать таким образом, чтобы обеспечить выполнение условия $\delta \in \Omega$.

За время установления связи величина δ будет изменяться в соответствии с выбранным законом поиска и в момент, когда произойдет захват сигнала, промах не будет превышать максимальной ошибки следящей системы ЛИС. При возможном срыве слежения

система вновь переходит в режим поиска.

Таким образом, возможные состояния ЛИС в процессе управления включают поиск, слежение, срыв слежения, повторный поиск. Следует отметить, что узкие диаграммы направленности, ограниченная мощность передатчиков и необходимость в ряде случаев автономной работы бортовых систем КА, обеспечивающих ЛИС, часто исключает такое возможное в радиотехнических системах состояние при управлении, как обзор пространства. Обычно задача обзора в ЛИС решается комбинированием с другими средствами обнаружения, например, с радиотехническими.

Принцип функционирования системы управления ЛИС можно рассмотреть с помощью структурной схемы, показанной на рис. 5.1. Расчетное положение оптической антенны x_a определяется программой $x_{пр}$, задаваемой системе управления антенной (СУА). Точность отработки программы зависит от работы системы стабилизации и ориентации (ССО) антенны и расчетного движения объекта по известным начальным условиям.

В результате действия различных возмущающих факторов реальное положение КА и работа ССО будут отличаться от расчетных, что приведет к случайной установке антенны в положение x_c . Разность $\Delta x_c = x_c - x_a$ создает отклонение δ за счет характеристик первого КА. Другая составляющая угла δx_c образуется в результате отклонения реального движения (x_c) второго КА от расчетного.

Если $\delta \in \Omega$, то решающее устройство (РУ) включает систему поиска (СП), которая по определенному закону $x_{пр}$ управляет СУА (ключи K_1 и K_2 — в положении «П»). При обнаружении сигнала РУ переключает СУА на работу от системы сопровождения (СС): ключи K_1 и K_2 — в положении «С». Иногда контур поиска называют контуром грубого наведения антенны, а контур сопровождения — контуром точного наведения.

Приведенная схема отражает наиболее общие черты управления ЛИС КА различного назначения. Однако принципы аппаратной реализации системы управления определяются назначением конкретной линии связи. Рассмотрим некоторые примеры управления ЛИС в космических системах.

В линии связи «синхронный ИСЗ — низкоорбитальный ИСЗ»

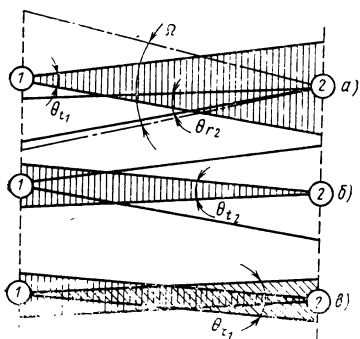


Рис. 5.2. Схема установления связи: 1 — синхронный ИСЗ; 2 — низкоорбитальный ИСЗ; θ_r — поле зрения приемника; θ_t — ширина диаграммы направленности передатчика; Ω — угловая неопределенность положения синхронного ИСЗ

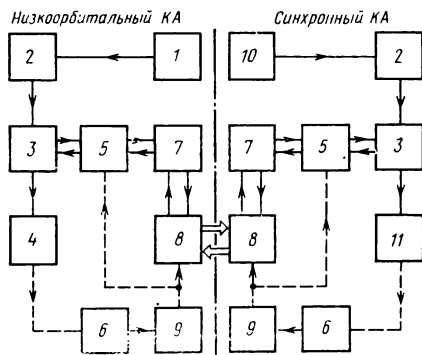


Рис. 5.3. Структурная схема системы установления и поддержания связи

[109] процесс установления связи обычно разбивается на три этапа (рис. 5.2) и выполняется в следующей последовательности:

1) маяк на синхронном КА излучает, а низкоорбитальный КА осуществляет поиск и обнаружение в пределах зоны неопределенности положения синхронного ИСЗ (см. рис. 5.2, а);

2) приемник низкоорбитального КА обнаруживает излучение маяка и переходит в режим слежения; включается связной передатчик, луч которого автоматически направляется на синхронный КА (см. рис. 5.2, б);

3) синхронный КА осуществляет поиск с целью обнаружения луча связанного передатчика, затем переходит в режим слежения и направляет узкий луч сопровождения своего передатчика на низкоорбитальный КА. После захвата луча сопровождения низкоорбитальным КА устанавливается режим двусторонней связи (см. рис. 5.2, в).

Размещение аппаратуры системы установления и поддержания связи для обоих КА показано на рис. 5.3. На низкоорбитальном КА размещается лазер связного передатчика 1, излучение которого через компенсатор относительного движения 2, разделитель каналов «передача — прием» 3, устройство выработки сигнала ошибки контура точного наведения 5, оптическую антенну 7 и зеркало контура грубого наведения 8 в режиме передачи информации направляется в сторону синхронного КА.

Приемник маяка 4 выполняет функции поиска и сопровождения, осуществляя переключение режимов работы системы. Вращение изображения, вызванное азимутальным движением зеркала 8, устраняется с помощью компенсатора 6.

В режиме сопровождения с помощью устройства 5 реализуется выбранный метод автосопровождения. Получаемый детектором со-

проведения приемника сигнал ошибки обрабатывается приводом точного контура 9. Зеркало 8 направляет луч передатчика связи на синхронный КА при любом положении низкоорбитального КА, а также реализует программу поиска. Приемник синхронного КА 11 осуществляет прием связной информации и обеспечивает работу системы поиска и сопровождения. Передатчик маяка 10 обеспечивает работу как в режиме поиска, так и в режиме сопровождения.

Последовательность установления связи может отличаться от рассмотренной. Например, поиск может начинаться с низкоорбитального КА, на котором в этом случае устанавливается дополнительный передатчик маяка.

Главной особенностью рассмотренной схемы установления связи является наличие специального маяка, работающего в импульсном режиме. Необходимость применения в ЛИС маяка наряду с информационной системой связана с различием в режимах их работы, обусловленным в первую очередь, требованиями к энергетике линии, потребляемой мощности и продолжительности работы.

Другую особенность представляет управление по схеме «маяк — сканирующий приемник». По аналогичной схеме строится и ряд других систем управления ЛИС, например, используемых при стыковке КА или контроле полета ракет-носителей на активном участке их траектории [110].

В общем случае поиск представляет собой двустороннюю процедуру, когда оба абонента имеют передатчики и приемники и производят одновременный поиск в зонах неопределенности (ЗН) положения абонентов. ЗН при этом разбивается на ячейки, размеры которых определяются угловой разрешающей способностью станций (рис. 5.4).

Рассмотрим один из возможных алгоритмов поиска [99,119]. В процессе поиска передатчик объекта A излучает в фиксированном направлении в пределах плоского угла θ_A в течение времени t_1 . За это время приемник объекта B производит сканирование полного кадра ЗН положения объекта A (размером $\Omega_A \times \Omega_A$), после чего луч A перемещается в следующее положение, а приемник B снова осуществляет полный цикл сканирования. В момент обнаружения приемником A излучения его сканирование прекращается, включа-

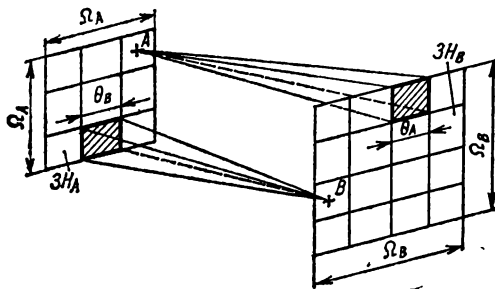


Рис. 5.4. Схема двустороннего поиска

ется передатчик *B*, излучение которого принимается приемником *A*, и завершается взаимная ориентация оптических антенн *A* и *B*, обеспечивающая возможность начала передачи информации.

При организации поиска возможны такие случаи, когда диаграмма направленности (ДН) передатчика или после зрения приемника одного из абонентов перекрывают ЗН положения другого. Тогда в системе «передатчик — приемник» различают поиск сканированием (СК) и широким лучом (ШЛ), причем возможны следующие основные виды поиска:

- «сканирование — сканирование» (СК — СК);
- «сканирование — широкий луч» (СК — ШЛ);
- «широкий луч — сканирование» (ШЛ — СК);
- «широкий луч — широкий луч» (ШЛ — ШЛ).

В процессе поиска информация, получаемая в каждой ячейке ЗН, может обрабатываться в обнаружителе последовательно, параллельно (например, в конце кадра сканирования) или комбинированно. В связи с этим различают последовательный, параллельный и комбинированный (последовательно-параллельный, параллельно-параллельный) способы получения, преобразования и обработки поисковой информации [28].

По характеру просмотра участков ЗН различают регулярный и случайный (статистический) поиски. При регулярном поиске осмотр ячеек ЗН осуществляется построчным, спиральным, розеточным и другими видами сканирования, описанными в работе [34]. Поисковые усилия в процессе поиска могут распределяться как равномерно, так и с учетом априорной и текущей информации о местоположении объекта.

Наконец, по характеру причинно-следственных связей между условиями поиска и его результатам закономерности процесса поиска можно подразделить на регулярные, вероятностные и конфликтные [1]. В режиме установления связи между кооперируемыми объектами наиболее реален вероятностный характер закономерностей поиска, когда положение и параметры движения объекта, а также условия обнаружения сигнала имеют случайный характер. При противодействии абонента, стремящегося избежать обнаружения, закономерности поиска носят конфликтный характер.

Особой разновидностью поиска является сопровождение, заключающееся в поддержании непрерывного контакта абонентов. Сопровождение — основной режим работы любой системы связи, в процессе которого осуществляется передача информации и (или) измерение параметров движения объектов.

5.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЛИС

Принципы построения ЛИС и их основные характеристики во многом определяются типом используемого лазера. В результате этого выбор лазера является важнейшим моментом при разработке всей системы.

Таблица 5.1

Активное вещество ОКГ	Характеристики лазеров						
	λ , мкм	КПД, %	Режим	Мощ- ность, Вт	Энер- гия, Дж	$\tau_{инс}$	F , Гц
СО ₂	10,6	12...15	Непрерывный	1500	—	—	—
АИГ: Nd	1,06	2	Импульсный	—	0,02	12...25	100
АИГ: Nd (вторая гармони- ка)	0,53	1	Импульсный	—	20	20	$3 \cdot 10^{-3}$

Основу разрабатываемых в настоящее время и перспективных лазерных информационных и поисковых систем составляют лазеры на иттрий — алюминиевом гранате с ниодимом с удвоением и без удвоения частоты (длина волны соответственно 0,53 и 1,06 мкм) и лазеры на двуокиси углерода СО₂ с длиной излучаемой волны 10,6 мкм [45, 107, 109]. Сравнительные характеристики этих ОКГ приведены в табл. 5.1 [109, 110]. При $\lambda = 10,6$ мкм порог чувствительности, ограниченный квантовым пределом, в 20 раз меньше, чем при $\lambda = 0,53$ мкм, т. е. в линиях лазера на СО₂ достигается более высокий энергетический потенциал при одинаковых мощностях лазерных передатчиков.

Достижение указанных преимуществ в диапазоне 10,6 мкм связано с применением гетеродинирования, в то время, как при $\lambda = 0,53$ мкм легко осуществляется энергетическое детектирование падающего светового потока методом счета фотонов с помощью ФЭУ с большим коэффициентом внутреннего усиления ($10^5 \dots 10^6$). Однако реализация гетеродинного способа приема сопряжена с рядом трудностей:

лазер — гетеродин должен быть высокостабильным, узкополосным источником;

световой поток гетеродина должен быть пространственно сфазирован со световым потоком сигнала;

наличие значительных доплеровских частот требует либо очень широкой полосы пропускания фотоприемника, либо перестраиваемой в требуемом диапазоне частоты излучения гетеродина;

излучение от местного гетеродина и входной сигнал должны падать на одну и ту же площадь фотодетектора.

Другим препятствием к применению систем на СО₂ в бортовой аппаратуре КА может явиться необходимость охлаждения приемника до низких температур при значительной мощности гетеродина [45]. Тем не менее в настоящее время известны маяки ЛИС, работающие как в видимом [107, 109], так и в ИК-диапазоне [45].

Рассмотрим требования к мощности излучения передатчика маяка ЛИС при трехэтапной процедуре установления связи [107, 109]. При использовании данного метода обнаружения рекомендуется применять лазер на АИГ: Nd с накачкой от лампы-вспышки, работающей в режиме модулированной добротности. Поскольку этот

маяк должен давать световой пучок, расходящийся под большим углом (0,017 рад), пиковая мощность излучения лазера, необходимая для превышения фонового излучения, очень высока. Однако если учесть, что полоса пропускания системы в режиме обнаружения невелика, то можно сконцентрировать энергию лазера в импульсы большой мощности с малой частотой повторения (10 ... 100 Гц), что даст возможность получить мощность, достаточную для обнаружения.

Во время обнаружения число фотоэлектронов n_c , приходящихся на один импульс на выходе фотоприемника маяка, определяется выражением

$$n_c = \frac{\eta \lambda P D^2 \tau_o \tau_a}{hc F \theta^2 L^2}, \quad (5.1)$$

где $\eta = 0,01$ — квантовый выход фотоэлемента; $\lambda = 1,06$ мкм; P — средняя мощность излучения передатчика маяка; D — диаметр приемной антенны маяка; $\tau_o = 0,25$ — пропускание оптической системы (с учетом пропускания фильтра); $\tau_a = 0,1$ — пропускание атмосферы; F — частота повторения импульсов маяка; $\theta = 0,017$ рад — ширина диаграммы направленности передатчика обнаружения; h — постоянная Планка; c — скорость света; L — дальность связи. Задавая значения $P = 1$ Вт, $F = 10$ Гц и $D = 0,4$ м, находим, что n_c равно 43 фотоэлектронам в импульсе.

Среднее число фоновых фотоэлектронов n_ϕ , поступающих за время импульса длительностью $\tau_n = 10^{-8}$ с, равно

$$n_\phi = \frac{\eta \lambda N_\lambda \pi^2 D^2 \Omega_r T_0 \Delta \lambda \tau_n}{16hc}, \quad (5.2)$$

где $N_\lambda = 2 \cdot 10^8$ Вт/м² · мкм · ср — спектральная яркость фона; Ω_r — поле зрения приемника; $\Delta \lambda = 10^{-3}$ мкм — ширина полосы пропускания фильтра.

При значении $\Omega_r = 10^{-6}$ рад $n_\phi = 0,16$ фотоэлектронов в импульсе. Полагая распределение сигнальных фотоэлектронов близким к пуассоновскому и применяя в приемнике фильтр с порогом, соответствующим двадцати фотоэлектронам, получим вероятность обнаружения импульса маяка около 98%. При этом вероятность ложного обнаружения не будет превышать 10^{-10} .

При расчете предполагалось, что лазер на АИГ: Nd может иметь энергию 10 мДж в импульсе длительностью 10^{-8} с. Как следует из табл. 5.1, создание такого лазера в настоящее время вполне возможно.

Для уменьшения времени поиска необходимо максимально увеличивать ширину диаграммы направленности антенн маяка и соответственно — поле зрения поискового приемника при сохранении неизменными энергетических характеристик системы. Рассмотрим требования к энергетике системы, обеспечивающей заданную расходимость луча передатчика и поля зрения приемника с учетом влияния фоновой засветки.

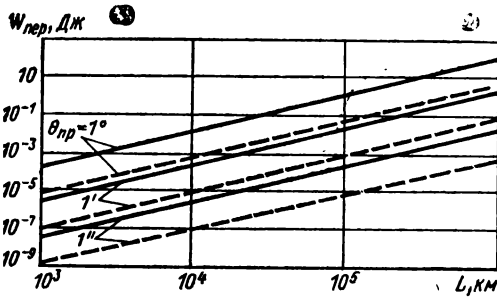


Рис. 5.5. Зависимость энергии сигнала, необходимой для поддержания требуемого отношения сигнал/шум, от дальности связи:

— $\lambda=0,53$ мкм; --- $\lambda=10,6$ мкм

Самые худшие фоновые условия возникают при ориентации приемника низкоорбитального КА на спутник-ретранслятор. Детальное исследование влияния фонового излучения приведено в работе [16]. Здесь же рассмотрим случай, когда в секторе обзора находится такой источник естественных помех как Луна со спектральной энергетической яркостью излучения N_λ .

Мощность фонового излучения P_ϕ на поверхности фотодетектора (ФД) равна [16]

$$P_\phi = \frac{\pi^2}{16} N_\lambda \Delta \lambda D^2 \theta^2 \tau_a \tau_o, \quad (5.3)$$

где θ — поле зрения приемной антенны, рад.

Выразим отношение сигнал/шум (S/N) через токи ФД (сигнальный I_c и помех I_n) [109]:

$$S/N = I_c / I_n, \quad (5.4)$$

где $I_c = \frac{P_{\text{пер}} D_0^2 \tau_a \tau_o \eta q}{\theta_{\text{пер}}^2 R^2 h \nu}$ — максимальный ток ФД;

$P_{\text{пер}}$ — пиковая мощность передатчика; q — заряд электрона; $\theta_{\text{пер}}$ — ширина диаграммы передатчика, рад;

$$I_n = (2q I_\phi \Delta f)^{1/2};$$

($I_\phi = P_\phi \eta q / h \nu$ — постоянный ток ФД, наводимый фоном; Δf — полоса пропускания фильтра приемника, согласованная с длительностью импульса излучения лазера; ν — частота колебаний).

С помощью соотношения (5.4) оценим энергию излучаемого сигнала ($W_{\text{пер}}$) в импульсе, необходимую для поддержания требуемого отношения S/N , с точки зрения обеспечения максимальных значений ширины диаграммы направленности антенн маяка и поля зрения поискового приемника:

$$W_{\text{пер}} = \frac{\pi S/N \theta_{\text{пер}}^2 R^2 \theta_{\text{пр}}}{4 \tau_o} \left(\frac{0,8 \tau_n N_\lambda \Delta \lambda h \nu}{\tau_a \tau_o \eta} \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Результаты вычислений по формуле (5.5) для следующих параметров рез системы показаны на рис. 5.5: $\tau_o = 0,3$; $\tau_a = 1$; $\tau_n = 10^{-8}$ с; $D_o =$

$=0,35$ м; $\Delta\lambda=10^{-3}$ мкм; $S/N=10$; $\theta_{\text{пер}}=0,0175$; $R=5 \cdot 10^7$ м; $\eta=0,2$.

Из рис. 5.5 следует, что в условиях рассмотренной фоновой за- светки для поддержания отношения $S/N=10$ при ширине диаграм- мы направленности маяка и поле зрения приемника в 1° необходимо обеспечить в импульсе длительностью 10^{-8} с ($\lambda=0,53$ мкм) энергию около 300 мДж.

С рассмотренными характеристиками ЛИС непосредственно свя- зан вопрос об энергопотреблении системы. Мощность $P_{\text{пот}}$, потреб- ляемая маяком, будет зависеть от частоты следования импульсов, которая определяется степенью стабилизации оптической антенны, скоростью ухода линии визирования, требуемой точностью сопро- вождения и другими параметрами системы управления ЛИС (см. разд. 7.5):

$$P_{\text{пот}} = \frac{W_{\text{пер}}}{\eta_{\text{пер}}} F, \quad (5.6)$$

где F — частота следования импульсов; $\eta_{\text{пер}}$ — КПД передатчика ма- яка.

Таким образом, основные характеристики системы управления ЛИС (диапазон рабочих волн, способ приема и обработки сигналов, энергетические характеристики линии) определяются типом ис- пользуемого в системе лазера. При решении вопроса о предпочти- тельности применения того или иного лазера должны также учиты- ваться и такие важные факторы, как возможность приборной реа- лизации на борту КА (весовые и габаритные ограничения, связан- ные, например, с необходимостью охлаждения фотодетекторов в ди- апазоне 10,6 мкм), время активного существования передатчика, стоимость и ряд других характеристик.

5.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Модель на основе дискретной марковской цепи

Процессы установления и поддержания связи в ЛИС удобно исследовать с помощью моделей, позволяющих сформулировать принципы при- менения аналитических методов для проектирования систем. Кроме того с по- мощью моделей обнаруживаются физические и функциональные операции, кото- рые осуществляются в системе.

Теоретическая модель любой системы или процесса должна отражать существенные особенности реальности, а используемый для описания функцио- нальных связей математический аппарат — обеспечивать по возможности простое получение основных количественных характеристик, в первую очередь — показа- телей эффективности.

Как уже отмечалось, физическая модель управления ЛИС в процессе уста- новления и поддержания связи должна объединить следующие взаимосвязанные этапы: поиск — обнаружение — захват — сопровождение — срыв слежения — по- вторный поиск. Хотя организация повторного поиска технически может несколь- ко отличаться от начального, с точки зрения теоретического исследования параметры управления при любом поиске можно приблизительно считать одина- ковыми. Это подтверждается как выводами из результатов моделирования процесса образования зоны поиска, из которых следует, что основной вклад в образование зоны поиска вносят системы ориентации и стабилизации оптиче- ских антенн ОА, так и параметрами систем поиска реальных ЛИС [106].

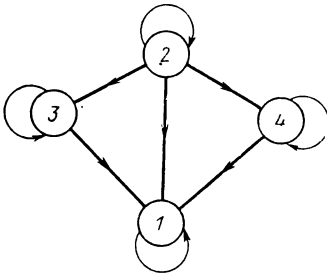


Рис. 5.6. Модель установления связи без учета вероятности ложной тревоги

Приняв необходимые допущения, сформируем основные принципы построения теоретической модели управления ЛИС.

Пусть взаимодействующие абоненты *A* и *B* имеют приемопередающие устройства, а их диаграммы направленности сканируют в пределах соответствующих зон неопределенности (см. рис. 5.4). Сначала предположим, что поиск осуществляется по случайному закону, причем вероятности ложного обнаружения пренебрежимо малы. Тогда ситуации, возникающие при установлении связи, могут быть представлены сигнальным графом, показанным на рис. 5.6 [31, 84, 99]. Рассмотрим возможные состояния системы в данном режиме.

1. Произошло взаимное обнаружение сигналов абонентов. Связь установлена, система

находится в режиме взаимного сопровождения.

2. Диаграммы направленности объектов *A* и *B* ориентированы случайным образом или же ориентированы по одной оси, но сигналы приемниками не обнаруживаются. Система находится в режиме сканирования.

3. Сигнал на объекте *B* обнаружен приемником *A*, диаграмма которого фиксируется в пространстве. Диаграмма направленности объекта *B* сканирует. Система находится в режиме одностороннего обнаружения.

4. Сигнал от объекта *A* обнаружен приемником *B*, диаграмма которого фиксируется в пространстве. Диаграмма направленности объекта *A* сканирует. Система находится в режиме одностороннего обнаружения.

Поскольку вероятности перехода из одного состояния в другое зависят от исходных состояний системы и не зависят от предыдущих состояний, то процесс поиска в рассматриваемой системе может быть описан дискретной марковской цепью с одним поглощающим состоянием. Состояния 2, 3 и 4 называются невозвратными, поскольку из них всегда можно перейти в другие состояния, в то же время вернуться из них в первоначальное невозможно. Представление процессов поиска марковской цепью позволяет вычислить ряд статистических характеристик систем, в том числе среднее время установления связи.

Поскольку число состояний системы конечно, то можно составить стохастическую матрицу переходных вероятностей за 1 шаг процесса, считая для простоты вероятности перехода независимыми от времени:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix},$$

где в обозначении P_{ij} первый индекс означает начальное состояние системы, а второй — возможное конечное.

Стохастическую матрицу P обычно представляют в канонической форме, разбирая ее на подматрицы следующим образом:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & 0 & P_{33} & 0 \\ P_{41} & 0 & 0 & P_{44} \end{bmatrix},$$

$$\text{или } P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hline R & Q \end{bmatrix}.$$

Левая верхняя подматрица представляет собой единичную матрицу, порядок которой определяется числом поглощающих состояний. При этом правая верхняя подматрица обязательно состоит из одних нулей.

Левая нижняя подматрица включает в себя элементы, характеризующие переход из невозвратных состояний в поглощающие. Правая нижняя подматрица описывает поведение процесса в множестве невозвратных состояний до перехода в поглощающие состояния.

Основные параметры системы определяются характером изменения в процессе поиска элементов подматрицы Q . Вычислить их можно с помощью так называемой фундаментальной матрицы

$$N = (I - Q)^{-1},$$

каждый элемент которой означает среднее число попаданий процесса в данное невозвратное состояние в зависимости от начального состояния. Поскольку с учетом масштабного коэффициента, время t_i , в течение которого процесс находится в невозвратных состояниях, включая время пребывания в начальном состоянии, представляет собой число шагов n , совершаемых процессом при переходе из начального в поглощающее состояние, т. е.

$$t_i = \sum_j n_j,$$

то среднее время до поглощения из начального состояния i определяется суммированием построчно элементов фундаментальной матрицы:

$$\langle t_{i \text{ ср}} \rangle = \left\langle \sum_j n_j \right\rangle_i.$$

Пользуясь данной методикой, определим среднее время установления связи в рассматриваемой системе поиска:

$$Q = \begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ 0 & P_{33} & 0 \\ 0 & 0 & P_{44} \end{bmatrix};$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \frac{P_{23}}{(1 - P_{22})(1 - P_{23})} & \frac{P_{24}}{(1 - P_{22})(1 - P_{44})} \\ 0 & \frac{1}{1 - P_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - P_{44}} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} t_{2 \text{ ср}} \\ t_{3 \text{ ср}} \\ t_{4 \text{ ср}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_{41}P_{31} + P_{23}P_{41} + P_{24}P_{31}}{(P_{21} + P_{23} + P_{24})P_{31}P_{41}} \\ \frac{1}{P_{31}} \\ \frac{1}{P_{41}} \end{bmatrix}.$$

Из физических условий задачи следует, что с вероятностью, близкой к единице, процесс начнется в состоянии 2. Тогда среднее время установления связи определится величиной

$$t_{2 \text{ ср}} = \frac{P_{41}P_{31} + P_{23}P_{41} + P_{24}P_{31}}{(P_{21} + P_{23} + P_{24})P_{31}P_{41}}.$$

Величину t_{2cp} необходимо умножить на масштабный коэффициент, в качестве которого следует выбрать сумму времени анализа сигнала приемником в каждой ячейке зоны поиска и инерционность исполнительного устройства, обеспечивающего сканирование.

Методика расчета вероятности достижения поглощающего состояния из любого заданного, а также распределение конкретного поглощающего состояния, в которое попадает система, рассмотрена в работе [31].

Если в системе производится регулярный поиск, т. е. поиск по определенному закону, то среднее время установления связи может быть определено по методике, аналогичной рассмотренной выше. В работе [99] приводится зависимость, позволяющая определить среднее время установления связи t_{cp} для регулярного поиска, описанного в разд. 5.1:

$$t_{2cp} = \frac{1}{2(2P_a - P_a^2)} (2m^2 + (m^2 - 4m - 1)P_a^2 + (-2m^2 + 4m + 2)P_a],$$

где $m = \left(\frac{\Phi}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{P_A} = \frac{1}{P_B}$ (Φ^2 — границы зоны поиска объектов A и B ; θ^2 — телесные углы лучей станции A и B , P_A (P_B) — вероятность того, что луч объекта A (B) нацелен в требуемом направлении (на B или на A , соответственно); $P_a = P_b$ — вероятность обнаружения сигнала приемником A (B)).

Модель на основе разрывных марковских процессов

Рассмотрим теперь более общий случай установления связи, когда необходимо при обнаружении сигнала учитывать вероятность ложной тревоги. Процесс поиска в таких системах исследовался в работах [31, 84, 99].

Исходя из задачи отыскания моментов распределения времени поиска, при схематизации процесса установления связи в данных работах учитывалось, что система может находиться в режимах сканирования или обнаружения сигнала, причем решение принимается n -ступенчатым обнаружителем. При обнаружении сигнала станция прекращает сканирование на время принятия решения.

Схема модели без детализации состояний обнаружителя показана на рис. 5.7, а (ребра графа без стрелок обозначают двусторонние связи), а состояния системы определяются следующим образом:

1. Диаграммы направленности (ДН) объектов A и B взаимно не ориентированы или ориентированы, но сигналы не обнаружены ни в A , ни в B .

2. Приемник объекта A осуществил ложное обнаружение (ложная тревога — ЛТ_A).

3. ДН объектов взаимно ориентированы, но сигнал обнаружен только A (одностороннее обнаружение — Об_A).

4. Ложная тревога в B (ЛТ_B).

5. Одностороннее обнаружение в B (Об_B).

6. Приемники обоих объектов обнаруживают полезные сигналы (захват — З).

Хотя выбор количества и смыслового содержания вершин и ребер графа, соответствующего схематизации рассматриваемой системы, достаточно произволен, все же существует ряд основных требований к этим характеристикам, определяемых:

характером решаемой задачи;
 степенью адекватности разрабатываемой модели;
 имеющимся опытом исследования подобных систем;
 интуицией исследователя.

С точки зрения этих требований рассмотренная схема нуждается в уточнении по следующим причинам:

1. В процессе поиска ДН объектов могут быть неориентированными (производится сканирование с остановками при $ЛТ_A$ и $ЛТ_B$) и взаимно ориентированными (с возможными состояниями $Об_A$ и $Об_B$, $З$ и взаимного необнаружения). Поэтому логично представить состояние I на рис. 5.7, a в следующем виде: I — сканирование, т. е. пространственное перемещение ДН объектов A и B до их взаимной ориентации, и I' — остановка ДН при их взаимной ориентации.

2. Теоретически возможен переход из режима сканирования I в состояние одновременного ложного обнаружения сигналов в A и B (состояние 7).

3. При принятом определении состояний $З$ и $Б$ в графе на рис. 5.7, a могут оказаться лишними ребра $З-Б$ и $Б-З$, а также ребро $I-Б$, так как после $Об_A$ смещается ДН объекта B (и наоборот), а захват может наступить случайным образом на любом этапе работы обнаружителя (рис. 5.8).

В связи с этим более оправданной является схематизация системы в виде графа, показанного на рис. 5.7, b при условии уточнения отмеченных в п. 3. особенностей первоначальной схемы.

Поскольку исследуемые бинарные отношения на фиксированном множестве состояний системы образуют булеву алгебру, с помощью тождественных формул алгебры логики (например, соответствующих преобразованию «звезда — треугольник» на рис. 5.7, b) граф на рис. 5.7, b может быть приведен к эквивалентному виду (см. рис. 5.7, $г$), более удобному для последующего анализа. При этом изме-

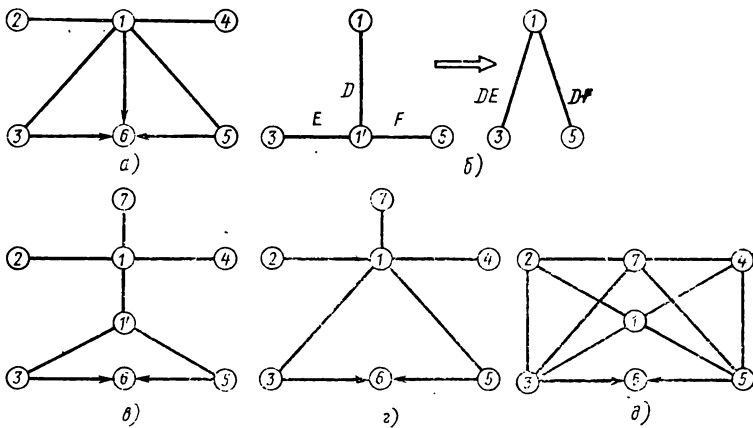


Рис. 5.7. Модель установления связи с учетом вероятности ложной тревоги

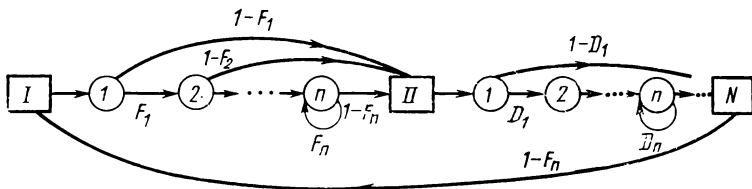


Рис. 5.8. Функциональная схема n -ступенчатого обнаружителя сигнала

няется смысловое содержание вершины 1 и ребер $1-3$ и $1-5$, а также исчезнет ребро $1-6$.

Чтобы граф (см. рис. 5.7 г) можно было использовать в качестве рабочей схемы для разрабатываемой модели управления ЛИС, необходимы некоторые дополнительные уточнения, поскольку управление в режиме установления связи в общем случае определяется графом, представленным на рис. 5.7, д (ребра $2-5$ и $3-4$ для простоты изображения не показаны):

считается, что при ЛТ $n=2$ ступень обнаружителя принимает правильное решение на отсутствие сигнала;

в группе состояний $2 \dots, 5, 7$ возможен переход только через состояние сканирования 1;

как показано в работах [84, 99], вероятность появления события в потоке, переводящем систему из состояния 1 в состояние 7, имеет порядок, не превышающий F^2 , где F — вероятность ложного обнаружения сигнала. При $F < (10^{-4} \dots 10^{-8})$ состояние 7 можно считать практически невозможным;

для соответствия полученной схемы процессу управления ЛИС с учетом возможного срыва слежения граф должен быть дополнен ребром $6-1$.

Таким образом, учитывая сделанные допущения, с точки зрения определения основных статистических показателей эффективности системы, процесс управления ЛИС может быть структурно определен в виде графа, показанного на рис. 5.9, где состояния определяются следующим образом:

1. ДН объектов A и B взаимно не ориентированы (режим сканирования).
2. Ложная тревога в A (ЛТ_A).
3. ДН объектов взаимно ориентированы — одностороннее обнаружение в A (Об_A).
4. Ложная тревога в B (ЛТ_B).
5. ДН объектов взаимно ориентированы — одностороннее обнаружение в B (Об_B).
6. Взаимное обнаружение сигналов обоими объектами (захват).

Рассмотрим возможность построения аналитической модели на базе полученной схемы системы для определения основных показателей эффективности управления ЛИС. При выборе математического аппарата, необходимого для описания данной модели, бу-

дем исходить из основных предпосылок, используемых в существующих моделях процесса установления связи в ЛИС [31, 84, 99]:

1) поскольку переход к любому из возможных состояний статистически зависит лишь от того, в каком из них система находится в данный момент и не зависит от предыдущих состояний, процесс в системе можно рассматривать как марковский;

2) процесс установления связи описывается с помощью аппарата дискретных марковских цепей.

Дискретизация времени является удобной идеализацией, позволяющей использовать метод марковских цепей. Однако этот метод накладывает следующие ограничения:

процесс двустороннего сканирования в системе должен быть синхронизирован;

закон начальной неопределенности положения объектов не учитывается;

нахождение общего выражения для фундаментальной матрицы системы при большом числе состояний затруднено;

определение закона распределения времени поиска как основного показателя эффективности управления даже при небольшом числе состояний существенно усложнено нахождением ряда распределения на основании вычисления фундаментальной матрицы для последовательных моментов времени и последующими попытками определения соответствующего дискретного закона распределения.

В связи с этим целесообразно перейти к естественному описанию системы в понятиях непрерывного времени и рассматривать ее как разрывную марковскую цепь с конечным числом состояний. Такое описание позволяет использовать аппарат дифференциальных уравнений и получить решение задачи для выбранных показателей эффективности управления в удобном для исследования виде.

Если считать, что перевод системы (см. рис. 5.9) из состояния i в состояние j осуществляется пуассоновскими потоками Π_{ij} , то для вероятностей состояний такой системы $P_k(t)$ может быть составлена система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [52]:

$$\frac{dP_k}{dt} = - \sum_{j=1}^n \lambda_{kj}(t) P_k(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_{ik}(t) P_i(t), \quad (5.7)$$

где $\lambda_{pq}(t)$ — интенсивность потока, переводящего систему из состояния P в состояние q ; n — число состояний системы ($n=1, 2, \dots, 6$); $\lambda_{kk}(t) \equiv 0$.

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (5.7) необходимо задать начальные условия:

$$P_1(0)=1, \quad P_2(0)=\dots=P_n(0)=0 \quad (5.8)$$

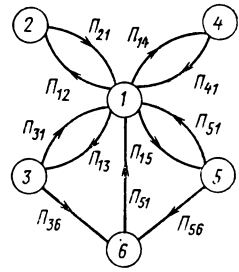


Рис. 5.9. Обобщенная модель установления связи

при естественных ограничениях

$$0 \leq P_k(t) \leq 1; \quad \sum_{k=1}^n P_k = 1.$$

Перепишем систему (5.7) в векторном виде:

$$\frac{d[P(t), P_6(t)]}{dt} = [P(t), P_6(t)] \begin{bmatrix} & 0 \\ & 0 \\ \Lambda(t) & \lambda_{36}(t) \\ & 0 \\ & \lambda_{56}(t) \\ -\lambda_{61}(t) & -\lambda_{61}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

где

$$P(t) = [P_1(t), P_2(t), \dots, P_5(t)];$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -\lambda_1(t) & \lambda_{12}(t) & \lambda_{13}(t) & \lambda_{14}(t) & \lambda_{15}(t) \\ \lambda_{21}(t) & -\lambda_2(t) & & & \\ \lambda_{31}(t) & & -\lambda_3(t) & & \\ \lambda_{41}(t) & & & -\lambda_4(t) & \\ \lambda_{51}(t) & & & & -\lambda_5(t) \end{bmatrix}; \quad (5.10)$$

$$\lambda_1(t) = \sum_{i=1}^5 \lambda_{1i}(t); \quad \lambda_2(t) = \lambda_{21}(t); \quad \lambda_3(t) = \lambda_{31}(t) + \lambda_{36}(t);$$

$$\lambda_4(t) = \lambda_{41}(t); \quad \lambda_5(t) = \lambda_{51}(t) + \lambda_{56}(t).$$

Если систему (5.9) представить как

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \Lambda(t); \\ \frac{dP_6(t)}{dt} &= \lambda_{36}(t) P_3(t) + \lambda_{56}(t) P_5(t) - \lambda_{61}(t) P_6(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

то очевидно, что система (5.9) может быть исследована на основании первого уравнения (система 5.11), поскольку уравнения для $P(t)$ не содержат $P_6(t)$. Такой подход справедлив для исследования режима установления связи в ЛИС, и, хотя система (5.11) отличается от системы (5.9), закон распределения времени пребывания ее в группе состояний (1 ... 5) будет таким же, как и у системы (5.9).

Действительно, поскольку предполагается, что в момент $t=0$ система (5.9) находится в одном из состояний 1 ... 5 и рассматривается только время до первого выхода из этих состояний, то безразлично, как система (5.9) ведет себя за пределами этой группы и как она в нее возвращается.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t) \mathbf{\Lambda}(t). \quad (5.12)$$

Матричное уравнение (5.12) соответствует нормальной системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Решение уравнения, полученное с помощью метода последовательных приближений, может быть записано в виде [17]

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t_0) \mathcal{Q}_{t_0}^t[\mathbf{\Lambda}(t)],$$

где $\mathcal{Q}_{t_0}^t[\mathbf{\Lambda}(t)] = \left\{ \mathbf{E} + \int_{t_0}^t [\mathbf{\Lambda}(t)] dt + \int_{t_0}^t [\mathbf{\Lambda}(t)] dt \int_{t_0}^t [\mathbf{\Lambda}(t)] dt + \dots \right\}$ — матрица ($\mathbf{E} = [1]$ — единичная матрица); $t_0 = 0$.

Поскольку в общем случае интенсивности управляющих потоков λ_{ij} являются функциями времени для всех значений интервала (t_0, t) , то вычисление $\mathcal{Q}_{t_0}^t[\mathbf{\Lambda}(t)]$ будет весьма затруднительным. Эти трудности приводят к тому, что при исследовании систем с переменными параметрами пользуются либо аналитическими методами, основанными на применении теории систем с постоянными параметрами (например, метод «замороженных» коэффициентов), либо получают численное решение с помощью ЭВМ [68].

Получение аналитического решения даже в условиях упрощенной постановки задачи, когда во внимание принимаются лишь существенные, принципиальные факторы, позволяет выявить общие качественные закономерности и определить направления дальнейших углубленных исследований с использованием ЭВМ. Поэтому вначале рассмотрим решение уравнений (5.12), полагая систему стационарной в течение всего интервала установления связи (t_0, t_n) или n составляющих его частей:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n; t_n = t_n).$$

Это условие позволяет записать следующее выражение для матрицанта системы (5.12) [17]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{t_0}^t[\mathbf{\Lambda}(t)] &= \exp\{[\mathbf{\Lambda}(t_n)] \Delta t_n\}, \dots, \exp\{[\mathbf{\Lambda}(t_1)] \Delta t_1\} + (*) = \\ &= \{\mathbf{E} + [\mathbf{\Lambda}(t_n)] \Delta t_n\}, \dots, \{\mathbf{E} + [\mathbf{\Lambda}(t_1)] \Delta t_1\} + (*), \end{aligned}$$

где символом $(*)$ обозначена сумма членов, начиная со второго порядка малости.

Степень приближенности решения системы (5.12) с помощью полученного выражения для $\mathcal{Q}_{t_0}^t$ определяется способом выбора момента времени t_k в интервале Δt_k и точностью определения матричной функции $\exp\{[\mathbf{\Lambda}(t_k)] \Delta t_k\}$. При выборе момента t_k обычно исходят из возможности представления коэффициентов матрицы $\mathbf{\Lambda}(t)$ квазистационарной системы в виде суммы постоянной и изменяющейся частей и дальнейшей оценки влияния изменяющейся части коэффициентов на параметры системы [68]. Влияние отброшен-

ных членов (*) для систем высокого порядка оценивается, в основном, с помощью ЭВМ, причем, в идеальном случае — относительно точного аналитического решения.

Матричная функция $\exp\{\Lambda(\tau_k)\Delta t_k\}$ может быть вычислена с помощью формул Бэкера или Сильвестра [3]. Однако кроме вычисления собственных значений матрицы $\Lambda(t)$ при этом необходимо также вычислить ряд определителей Вандермонда или матричных дробей, число которых зависит от степени характеристического многочлена.

Поскольку в любом случае аналитическое решение системы (5.12) связано с определением собственных значений матрицы (5.10), рассмотрим ее характеристическое уравнение

$$\det(\Lambda - vE) = 0, \quad (5.13)$$

где $\Lambda(t) \approx \text{const} = \Lambda$.

Вычисление определителя (5.13) приводит к уравнению 5-й степени:

$$f(v) = -v^5 - F_1 v^4 + F_2 v^3 + F_3 v^2 + F_4 v + F_5 = 0, \quad (5.14)$$

где $F_1 = \sum_{i=1}^5 \lambda_i;$

$$F_2 = \sum_{k=2}^5 \lambda_{1k} \lambda_{k1} - \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) - \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) - \lambda_3(\lambda_4 + \lambda_5) - \lambda_4 \lambda_5;$$

$$F_3 = \lambda_{13} \lambda_{31} (\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_{14} \lambda_{41} (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_{15} \lambda_{51} (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_4 \lambda_5 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5) + (\lambda_{12} \lambda_{21} - \lambda_1 \lambda_2) (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) - \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_4 + \lambda_5);$$

$$F_4 = \lambda_{12} \lambda_{21} (\lambda_3 \lambda_5 + \lambda_4 \lambda_5 + \lambda_3 \lambda_4) + \lambda_{13} \lambda_{31} (\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_5 + \lambda_4 \lambda_5) + \lambda_{14} \lambda_{41} (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_5 + \lambda_3 \lambda_5) + \lambda_{15} \lambda_{51} (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4) - \lambda_1 [\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5] - \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5;$$

$$F_5 = \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_{14} \lambda_{41} \lambda_5 + \lambda_{15} \lambda_{51} \lambda_4) + \lambda_4 \lambda_5 (\lambda_{12} \lambda_{21} \lambda_3 + \lambda_{13} \lambda_{31} \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$$

Для исследования характеристических уравнений высоких порядков необходимо задать численные значения коэффициентов, т. е. конкретные значения интенсивностей управляющих потоков $\lambda_{ij}(t)$.

Далее будет рассмотрен практически важный случай устойчивого решения системы (5.12), когда все корни характеристического уравнения (5.14) в соответствии с теоремой Ляпунова имеют отрицательные вещественные части. Применительно к конкретным ЛИС решение системы (5.12) приводится к устойчивому изменению параметров системы управления.

Решение системы уравнений (5.12)
для случая постоянных
коэффициентов

Поскольку при вещественных коэффициентах F_k ($k=1, \dots, 5$) комплексные корни уравнения (5.14) всегда являются парно сопряженными, то число отрицательных действительных корней равно 5,3 или 1. Уточнение числа действительных корней в общем виде известными способами затруднительно. Поэтому для получения общего решения системы (5.12) воспользуемся операторным методом, особенно удобным для решения задачи Коши.

Изображение по Лапласу вектора $P(t)$ имеет вид

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} P(t) dt = \left[\int_0^{\infty} e^{-zt} P_1(t) dt, \dots, \int_0^{\infty} e^{-zt} P_5(t) dt \right],$$

а изображение системы дифференциальных уравнений (5.12)

$$zf(z) - P(0) = f(z) \Lambda, \quad (5.15)$$

где $f(z) = [f_1(z), \dots, f_5(z)]$; $P(0) = [P_1(0), \dots, P_5(0)]$.

Для $k \neq 1$ из уравнения (5.15) получим

$$zf_k(z) = P_k(0) + \lambda_{1k} f_1(z) - \lambda_k f_k(z),$$

$$f_k(z) = \frac{\lambda_{1k}}{z + \lambda_k} f_1(z) + \frac{P_k(0)}{z + \lambda_k}, \quad (k=2, 3, 4, 5). \quad (5.16)$$

Так как $P(0) = [1, 0, 0, 0, 0]$, то $P_k(0) = 0$ и

$$f_k(z) = \frac{\lambda_{1k}}{z + \lambda_k} f_1(z). \quad (5.17)$$

Для $k=1$ из уравнения (5.15) получим

$$zf_1(z) = \sum_{k \neq 1} f_k(z) \lambda_{k1} + P_1(0) + \lambda_1 f_1(z);$$

$$(z + \lambda_1) f_1(z) = \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (z + \lambda_k) f_1(z) + 1;$$

$$f_1(z) = \frac{1}{z + \lambda_1 - \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (z + \lambda_k)}. \quad (5.18)$$

Для получения оригинала по изображению (5.18) необходимо преобразовать его в сумму простых дробей, т. е. определить корни уравнения $F(z) = 0$,
где

$$F(z) = z + \lambda_1 - \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (z + \lambda_k). \quad (5.19)$$

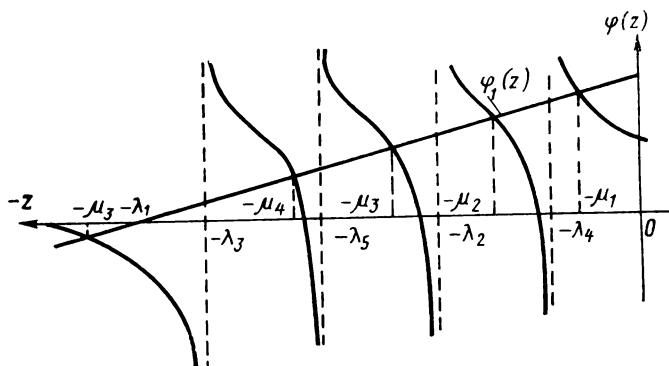


Рис. 5.10. Графическое определение вещественных корней уравнения (5.19)

Из формулы (5.19) следует, что

$$F(-\lambda_i - 0) = +\infty \quad \text{и}$$

$$F(-\lambda_i + 0) = -\infty, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Поскольку $F(0) > 0$, то, в силу теоремы о промежуточном значении, существуют нули функции $F(z)$ на интервалах $(-\infty, -\lambda_5)$, $(-\lambda_5, -\lambda_4)$, ..., $(-\lambda_1, 0)$. Других нулей, ни вещественных, ни комплексных, быть не может, ибо у многочлена 5-й степени не может быть больше пяти корней. Графический способ решения уравнения (5.19) показан на рис. 5.10.

Тогда для случая однократных корней дробно-рациональную функцию (5.18) можно представить в виде суммы простых дробей:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z + \lambda_1 - \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (z + \lambda_k)} = \\ &= \frac{A_1}{z + \mu_1} + \frac{A_2}{z + \mu_2} + \dots + \frac{A_5}{z + \mu_5}, \end{aligned}$$

где $-\mu_i$ — корни уравнения $F(z) = 0$.

Коэффициенты A_i определяются по формуле

$$A_i = \frac{1}{F'(z)|_{z=-\mu_i}} = \frac{1}{1 + \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (\lambda_k - \mu_i)^2}.$$

Тогда выражение для $P_1(t)$ получится непосредственно из формулы (5.18):

$$P_1(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{1 + \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (\lambda_k - \mu_i)^2} \exp(-\mu_i t), \quad (5.20)$$

а выражение для $P_k(t)$ — в соответствии с теоремой свертывания из формулы (5.17):

$$P_k(t)\lambda_{1k} \int_0^t P_1(\tau) \exp[-\lambda_k(t-\tau)] d\tau = \\ = \lambda_{1k} \exp(-\lambda_k t) \sum_{l=1}^5 \frac{1}{1 + \sum_{k \neq l} \lambda_{lk} \lambda_{kl} / (\lambda_k - \mu_l)^2} \frac{1 - \exp[-(\mu_l - \lambda_k)t]}{\mu_l - \lambda_k}. \quad (5.21)$$

Если имеется вероятность наличия одинаковых нулей многочлена $F(z)$, то отыскание оригинала функции [см. формулу (5.18)] потребует проведения дополнительных вычислений. Выражение (5.20) в этом случае примет вид

$$P_1(t) = \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{n_i} A_i^{(k)} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\mu_i t),$$

где n_i — кратность i -го нуля многочлена $F(z)$.

Коэффициенты $A_i^{(k)}$ могут быть определены одним из способов, описанных в работе [25]:

$$A_i^{(k)} = \frac{1}{(n_i - k)!} \left\{ \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left[\frac{1}{r_i(z)} \right] \right\} \Big|_{z=-\mu_i},$$

где $r_i(z) = \frac{F(z)}{(z + \mu_i)^{n_i}}$.

Решение системы уравнений (5.12) для случая переменных коэффициентов

Решение системы дифференциальных уравнений (5.12) с переменными коэффициентами в общем случае может быть получено на основании рассмотренной выше методики для стационарного варианта. Для этого воспользуемся кусочно-стационарной аппроксимацией функций $\lambda_{ij}(t)$ в течение n частей интервала установления связи $[t_0, t_n] \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$; $t_n = t_n$) и способом «сшивания» решений для отдельных участков Δt_i . При этом решение для Δt_1 , полученное с помощью начальных условий (5.8), используется в качестве начального условия для решения системы (5.12) на участке Δt_2 и так далее.

Запишем выражения для $f_k(z)$, получаемые из уравнения (5.13) для произвольного отрезка Δt_i :

$$f_k^{(i)}(z) = \frac{\lambda_{1k}^{(i)}}{z + \lambda_k^{(i)}} f_1^{(i)}(z) + \frac{P_k(\Delta t_{i-1})}{z + \lambda_k^{(i)}}; \\ f_1^{(i)}(z) = \sum_{k \neq 1} \lambda_{k1}^{(i)} f_k^{(i)}(z) + P_1(t_{i-1}), \quad (k=2, 3, 4, 5). \quad (5.22)$$

Тогда зависимость (5.18) примет вид (индексы i для простоты записи в дальнейшем опускаются)

$$f_1(z) = f_1^{(1)}(z) + f_1^{(2)}(z), \quad (5.23)$$

$$\text{где } f_1^{(1)}(z) = \frac{P_1(t_{i-1})}{z + \lambda_1 - \sum_{\tilde{k} \neq 1} \lambda_{1\tilde{k}} \lambda_{\tilde{k}1} (z + \lambda_{\tilde{k}})};$$

$$f_1^{(2)}(z) = \sum_{\tilde{k}=2}^5 f_{1\tilde{k}}^{(2)}(z) = \sum_{\tilde{k}=2}^5 \frac{\lambda_{\tilde{k}1} P_{\tilde{k}}(t_{i-1})}{F_{\tilde{k}}(z)}.$$

$$\text{Здесь } F_{\tilde{k}}(z) = (z + \lambda_{\tilde{k}}) \left(z + \lambda_1 - \sum_{\tilde{k}=2}^5 \frac{\lambda_{1\tilde{k}} \lambda_{\tilde{k}1}}{z + \lambda_{\tilde{k}}} \right).$$

В силу линейности преобразования Лапласа оригинал для $f_1^{(1)}(z)$ будет отличаться от выражения (5.29) только множителем $P_1(t_{i-1})$. Отыскание оригинала для изображения $f_1^{(2)}(z)$ произведем, как и ранее, разложением функции $f_1^{(2)}(z)$ на простейшие дроби.

Для определения корней уравнения $F_{\tilde{k}}(z) = 0$ воспользуемся графическим способом, представив $F_{\tilde{k}}(z)$ в виде

$$\varphi_{\tilde{k}}^{(1)}(z) = \varphi_{\tilde{k}}^{(2)}(z),$$

$$\text{где } \varphi_{\tilde{k}}^{(1)}(z) = (z + \lambda_{\tilde{k}})(z + \lambda_1); \quad \varphi_{\tilde{k}}^{(2)}(z) = (z + \lambda_{\tilde{k}}) \sum_{\tilde{k}=2}^5 \lambda_{1\tilde{k}} \lambda_{\tilde{k}1} / (z + \lambda_{\tilde{k}}).$$

Особые точки функции $\varphi_{\tilde{k}}^{(2)}(z)$ соответствуют условию $z = -\lambda_{\tilde{k}} (\tilde{k} \neq k)$. Так как в интервалах $(z = -\lambda_{\tilde{k}}^{(i)}, z = -\lambda_{\tilde{k}}^{(j)})$ производная $\varphi_{\tilde{k}}^{(2)}(z)$ существует:

$$\varphi_{\tilde{k}}^{(2)'}(z) = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq \tilde{k}}}^5 \frac{\lambda_{1j} \lambda_{j1} (\lambda_{\tilde{k}} - \lambda_j)}{(z + \lambda_j)^2}$$

и сохраняет постоянный знак, то при выполнении условия

$$\varphi_{\tilde{k}}^{(2)}(z)|_{z=0} = \sum_{j=2}^5 \lambda_{1j} \lambda_{j1} / \lambda_j \leq \varphi_{\tilde{k}}^{(1)}(z)|_{z=0} = \lambda_1 \lambda_{\tilde{k}}$$

функция $F_{\tilde{k}}(z) = 0$ будет иметь три или пять отрицательных действительных корней (выполнение данного неравенства исключает наличие действительного положительного корня).

Если все корни $F_{\tilde{k}}(z)$ отрицательны и действительны, то выражения для $P_1(t_i)$ и $P_k(t_i)$ по аналогии с выражениями (5.20) и (5.21) запишутся в виде

$$P_1(t_i) = \sum_{m=1}^5 \frac{P_1(t_{i-1})}{V(\mu_m)} \exp(-\mu_m t) + \sum_{\tilde{k}=2}^5 \sum_{n=1}^5 \frac{\lambda_{\tilde{k}1} P_{\tilde{k}}(t_{i-1})}{U_{\tilde{k}}(\mu_{n,\tilde{k}})} \exp(-\mu_{n,\tilde{k}} t), \quad (5.24)$$

где $V(\mu_m) = 1 + \sum_{j=1}^5 \lambda_{1j} \lambda_{j1} / (\lambda_j - \mu_m)^2$

— нули многочленов

$$U_{\tilde{k}}(\mu_{n,\tilde{k}}) = F'_{\tilde{k}}(z) |_{z=-\mu_{n,\tilde{k}}} = \lambda_{\tilde{k}} (1 + \lambda_1 - \mu_{n,\tilde{k}}) \left(1 + \sum_{j=2}^5 \lambda_{1j} \lambda_{j1} / (\lambda_j - \mu_{n,\tilde{k}})^2\right);$$

$\mu_{n,\tilde{k}}$ — нули многочленов $F_{\tilde{k}}(z)$;

$$P_k(t_i) = \left\{ \lambda_{1\tilde{k}} \left[\sum_{m=1}^5 \frac{P_1(t_{i-1})}{V(\mu_m)} \frac{1 - \exp[-(\mu_m - \lambda_k) t]}{\mu_m - \lambda_k} + \sum_{j=2}^5 \sum_{n=1}^5 \frac{\lambda_{j1} P_j(t_{i-1})}{U_j(\mu_{n,j})} \frac{1 - \exp[-(\mu_m - \lambda_k) t]}{\mu_{n,j} - \lambda_k} \right] + P_k(t_{i-1}) \right\} \times \exp(-\lambda_k t). \quad (5.25)$$

Если многочлен $F_{\tilde{k}}(z)$ имеет пару комплексных корней

$$\mu_{m,\tilde{k}} = \alpha_{\tilde{k}} + j\beta_{\tilde{k}} \quad \text{и} \quad \mu_{m+1,\tilde{k}} = \alpha_{\tilde{k}} - j\beta_{\tilde{k}},$$

то соответствующие составляющие функции $f_{1\tilde{k}}^{(2)}(z)$ могут быть представлены в виде суммы простых дробей следующим образом:

$$f_{1\tilde{k}}^{(2)}(z) = \frac{\lambda_{\tilde{k}1} P_{\tilde{k}}(t_{i-1})}{F_{\tilde{k}}(z)} = \frac{A_{1\tilde{k}}}{z + \mu_{1,\tilde{k}}} + \frac{A_{2\tilde{k}}}{z + \mu_{2,\tilde{k}}} + \frac{A_{3\tilde{k}}}{z + \mu_{3,\tilde{k}}} + \frac{A_{4\tilde{k}} + A_{5\tilde{k}}}{z^2 + pz + q},$$

где $p = 2\alpha_{\tilde{k}}$; $q = \alpha_{\tilde{k}}^2 + \beta_{\tilde{k}}^2$.

Если действительные корни $\mu_{i\tilde{k}}$ ($i=1, 2, 3$) могут быть определены графическим способом с последующим применением итерационного метода, то выделение множителя в виде $z^2 + pz + q$ для многочленов высших порядков, записанных в общем виде, представляет

сложную задачу. Известные способы определения комплексных корней (например, способ Лобачевского — Греффе [24]) позволяют определить их приближенные значения для конкретных значений коэффициентов многочлена $F_{\tilde{k}}(z)$. Поскольку применение данных способов связано с большими трудностями, разработаны соответствующие программы для ЭВМ [21].

Оригинал функции $f_{1\tilde{k}}^{(2)}(z)$ имеет вид

$$f_{1\tilde{k}}^{(2)}(t) = \sum_{n=1}^3 A_{n\tilde{k}} \exp(-\mu_{n,\tilde{k}} t) + A_{4\tilde{k}} \left\{ \frac{1}{\beta_{\tilde{k}}} [(\alpha_{\tilde{k}} + d_{\tilde{k}})^2 + \beta_{\tilde{k}}]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times e^{\alpha_{\tilde{k}} t} \sin(\beta_{\tilde{k}} t + \gamma_{\tilde{k}}) \right\},$$

где $d_{\tilde{k}} = A_{5\tilde{k}}/A_{4\tilde{k}}$, а коэффициенты $A_{i\tilde{k}}$ ($i=1, 2, \dots, 5$) находятся методом неопределенных коэффициентов;

$$\gamma_{\tilde{k}} = \arctg[\beta_{\tilde{k}}/(\alpha_{\tilde{k}} + d_{\tilde{k}})].$$

Соответствующая изображению $f_{1\tilde{k}}^{(2)}(z)$ составляющая оригинала функции $f_{\tilde{k}}(z)$ получается с помощью теоремы свертывания для функций $\lambda_{1\tilde{k}}/(z + \lambda_k)$ и $f_{1\tilde{k}}^{(2)}(z)$. Обозначив эту составляющую через $P_{\tilde{k}}^k(z)$, получим (опустив индексы « \tilde{k} » в правой части)

$$P_{\tilde{k}}^k(t) = \lambda_{1k} \int_0^t f_{1\tilde{k}}^{(2)}(\tau) \exp[-\lambda_k(t - \tau)] d\tau = \\ = \sum_{n=1}^3 A_{n\tilde{k}} \frac{1 - \exp[-(\mu_{n,\tilde{k}} - \lambda_k)t]}{\mu_{n,\tilde{k}} - \lambda_k} + \\ + D \{-C e^{-\lambda_k t} + e^{\alpha t} [n \sin(\beta t + \gamma) - \beta \cos(\beta t + \gamma)]\}, \quad (5.26)$$

где $D = \frac{A_4 \lambda_{1k} [(\alpha + d)^2 + \beta^2]^{1/2}}{\beta(n^2 + \beta^2)}$; $C = n \sin \gamma - \beta \cos \gamma$; $n = \alpha + \lambda_k$;

$\tilde{k} = 2, 3, 4, 5$.

С помощью полученных зависимостей может быть определено решение системы уравнений (5.12) в общем случае при наличии комплексных корней характеристических многочленов $F_{\tilde{k}}(z)$. Для этого необходимо на каждом отрезке Δt_i определить корни многочленов [см. уравнение (5.19)] и $F_{\tilde{k}}(z)$ ($\tilde{k} = 2, 3, 4, 5$), выделить, при необходимости, многочлены вида $z^2 + pz + q$, найти коэффициенты $A_{i\tilde{k}}$ для разложения функций $f_{1\tilde{k}}^{(2)}(z)$ на простые дроби, а затем определить соответствующие оригиналы $P_k(t_i)$.

Окончательное выражение для $P_k(t_i)$ ($k=1, 2, \dots, 5$) имеет следующий вид:

$$P_1(t_i) = \sum_{m=1}^5 \frac{P_1(t_{i-1})}{V(\mu_m)} \exp(-\mu_m t) + \sum_{\tilde{k}=2}^5 \left[\sum_{n=1}^3 A_{n\tilde{k}} \exp(-\mu_{n,\tilde{k}} t) + A_{4\tilde{k}} \left\{ \frac{1}{\beta_{\tilde{k}}} [(\alpha_{\tilde{k}} + d_{\tilde{k}})^2 + \beta_{\tilde{k}}^2]^{1/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(\alpha_{\tilde{k}} t) \sin(\beta_{\tilde{k}} t + \gamma_{\tilde{k}}) \right\} \right]; \quad (5.27)$$

$$P_k(t_i) = \left\{ \lambda_{1k} \left[\sum_{m=1}^5 \frac{P_1(t_{i-1})}{V(\mu_m)} \frac{1 - \exp[-(\mu_m - \lambda_k) t]}{\mu_m - \lambda_k} \right] + \sum_{\tilde{k}=2}^5 \left[\sum_{n=1}^3 A_{n\tilde{k}} \frac{1 - \exp[-(\mu_{n,\tilde{k}} - \lambda_k) t]}{\mu_{n,\tilde{k}} - \lambda_k} \right] + D_{1\tilde{k}} \{-C_{\tilde{k}} + \exp[(\alpha_{\tilde{k}} + \lambda_k) t] [n_{\tilde{k}} \sin(\beta_{\tilde{k}} t + \gamma_{\tilde{k}}) - \beta_{\tilde{k}} \cos(\beta_{\tilde{k}} t + \gamma_{\tilde{k}})]\} + P_k(t_{i-1}) \right\} \exp(-\lambda_k t), \quad (5.28)$$

где $D_{1\tilde{k}} = D_{\tilde{k}} / \lambda_{1k}$; $k=2, 3, 4, 5$.

Решение системы уравнений (5.12) для эргодической системы

После установления связи (достижения состояния 6) ЛИС переводится в режим автосопровождения, при котором система будет обладать эргодическими свойствами, так как для этого выполняются необходимые условия [77]:

1) граф состояний системы (см. рис. 5.9) не имеет ни одного состояния и ни одной группы состояний без выхода — входа;

2) все потоки событий, переводящие процесс из состояния в состояние, являются простейшими, т. е. интенсивности являются постоянными во времени величинами.

Следовательно, для ЛИС существует стационарный режим работы, который характеризуется финальными (предельными) вероятностями состояний. Предельные вероятности состояний определяются системой уравнений (5.7), которая в случае стационарного режима управления превращается в систему однородных алгебраических уравнений

$$-\sum_{j=1}^6 \lambda_{kj} P_k + \sum_{i=2}^6 \lambda_{ik} P_i = 0, \quad (5.29)$$

решение которой должно удовлетворять нормировочному условию

$$\sum_{i=2}^6 P_i = 1. \quad (5.30)$$

Для получения ненулевого решения необходимо из системы уравнений (5.29) взять пять уравнений и дополнить их условием (5.30). Выразив в последних пяти уравнениях все P_i ($i=2, 3, \dots, 6$) через P_1 и подставив эти значения в условие (5.30), получим

$$P_1 = 1 - \sum_{i=2}^6 P_i = 1 - AP_1, \quad (5.31)$$

$$\text{где } A = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{13}(\lambda_{61} + \lambda_{36})}{\lambda_{61}(\lambda_{31} + \lambda_{36})} + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{41}} + \frac{\lambda_{15}(\lambda_{61} + \lambda_{56})}{\lambda_{61}(\lambda_{51} + \lambda_{56})}. \quad (5.32)$$

Из выражения (5.30) и (5.31) можно получить выражения для всех предельных вероятностей состояний:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{1+A}; & P_2 &= P_1 \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}; & P_3 &= P_1 \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{31} + \lambda_{36}}; \\ P_4 &= P_1 \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{41}}, & P_5 &= P_1 \frac{\lambda_{15}}{\lambda_{51} + \lambda_{56}}; & P_6 &= \frac{P_1}{\lambda_{61}} \left(\frac{\lambda_{13}\lambda_{36}}{\lambda_{31} + \lambda_{36}} + \frac{\lambda_{15}\lambda_{56}}{\lambda_{51} + \lambda_{56}} \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Располагая зависимостями для предельных вероятностей, можно получить ряд других важных характеристик управления. Например, если рассматривать вероятности P_k как среднее относительное время пребывания системы в состоянии « k » [52], то можно произвести оценку среднего времени нахождения системы в режиме сопровождения ($k=6$), т. е. среднего времени до срыва слежения \bar{t}_6 :

$$P_6 = \frac{\bar{t}_6}{\bar{t}_6 + \bar{t}_{1,2,3,4,5}} = \frac{\bar{t}_6}{\bar{t}_6 + \bar{t}_n},$$

откуда

$$\bar{t}_6 = \frac{\bar{t}_n P_6}{1 - P_6}. \quad (5.34)$$

Адекватность модели изучаемой системе рассмотрим с точки зрения получения методики расчета показателей эффективности, а также исследования различных свойств системы. При этом модель считается адекватной, если она, во-первых, дает правильное качественное описание системы по выбранным характеристикам, и, во-вторых, правильное количественное описание системы по выбранным характеристикам с некоторой разумной степенью точности [9].

Ожидаемую степень адекватности оценим с помощью понятий внешнего и внутреннего правдоподобия схемы. Первое из них характеризует соответствие математической модели изучаемой реаль-

ной системе, второе — ожидаемое соответствие решения уравнениям задачи.

При построении модели, т. е. при схематизации системы и выборе математического аппарата, снижение внешнего правдоподобия возможно на следующих этапах:

- 1) разработке рабочего графа системы;
- 2) допущении о представлении моделируемых процессов марковскими;
- 3) получении зависимостей для интенсивностей управляющих потоков конкретных ЛИС.

Поскольку за основу взят «апробированный» тип модели, то, с учетом проведенной коррекции схемы графа, можно предполагать степень структурной адекватности, достаточно близкую к единице.

Допущение о представлении исследуемых процессов марковскими не противоречит известным положениям теории массового обслуживания и исследования операций.

Известно, что в большинстве задач прикладного характера замена пуассоновских потоков пуассоновскими с теми же интенсивностями приводит к получению решения с погрешностью в пределах точности исходных данных (порядка 3 ... 5%).

Наибольшая потеря степени внешнего правдоподобия будет, видимо, связана с точностью определения зависимостей для λ_{ij} применительно к различным способам поиска, принятия решения, типам обнаружителей и т. п. и, в зависимости от степени приближения, может достигать десятков процентов.

Если обозначить степень внешнего правдоподобия модели через p , то адекватность модели по данной характеристике может быть определена как $p = p_{гр} p_{ап} p_{л}$, где $p_{гр}$, $p_{ап}$, $p_{л}$ — степень правдоподобия за счет структуры графа, выбранного математического аппарата и методики определения λ_{ij} .

Если считать степень внутреннего правдоподобия чисто дедуктивного исследования равной единице, то потеря правдоподобия может быть из-за решения нестационарного варианта модели приближенным методом «сшивания» и нахождения значений корней характеристического уравнения методом итераций.

Учитывая незначительную вероятность нестационарности процессов для характеристики ЛИС, можно считать, что внутреннее правдоподобие модели ограничивается только точностью итеративных приближений и практически близко к единице.

При проведении практических расчетов, однако, необходимо соразмерять строгость получаемого решения с внешним правдоподобием. При этом обычно следуют принципу соответствия внешнего и внутреннего правдоподобия: степень точности вычислений должна соответствовать степени точности исходных данных.

Так как общую адекватность модели p_{Σ} можно определить зависимостью $p_{\Sigma} = pq$ (q — степень внутреннего правдоподобия схемы), то задача сводится к максимизации разности

$$R = f_1(pq) - f_2(q),$$

где $f_1(pq)$ — выигрыш от достижения данной степени адекватности; $f_2(q)$ — необходимые наименьшие затраты для достижения заданного уровня q .

Поскольку в большинстве прикладных задач функция $f_2(q)$ начинает существенно расти уже на заметном удалении от $q=1$, то чрезмерное повышение степени внутреннего правдоподобия в таких случаях нецелесообразно. Обычно оптимальным считается положение, когда разности $1-p$ и $1-q$ имеют одинаковый порядок.

Отметим основные особенности рассмотренной аналитической модели управления ЛИС.

1. Известные модели управления ЛИС [31, 84, 99], построенные феноменологически, могут быть получены из рассматриваемой модели (если не учитывать процесс поддержания связи и допустить дискретность времени), в связи с чем предложенную модель можно отнести к разряду асимптотических [49].

2. Наиболее полно отражая реально протекающие в системе процессы, модель позволяет использовать достаточно простой математический аппарат и получить зависимости для показателей эффективности и исследования основных процессов в системе в удобном для дальнейшего использования виде.

3. Существенное упрощение решения основных соотношений модели обусловлено использованием понятий управляющих потоков, выражения для интенсивностей которых должны учитывать: характер неопределенности начального положения абонентов и их относительное движение;

состояния системы, обусловленные n -ступенчатым обнаружителем сигналов, значительно сокращающим размерность системы; способы поиска сигнала абонента и принятия решения на его обнаружение;

связь параметров модели и ЛИС.

4. Упрощение используемого в модели математического аппарата предполагает необходимость предварительного определения ряда параметров управления ЛИС, например, характеристик ЗН начального положения абонентов, их относительного движения в процессе управления, аналитического выражения для интенсивности потока Π_{61} , сведения о которых в настоящее время либо весьма ограничены, либо отсутствуют вообще.

5.4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ ЛИС

Показатели эффективности управления ЛИС

Поскольку управление ЛИС осуществляется в условиях действия большого числа случайных факторов, его результаты неизбежно носят случайный характер. Поэтому, чтобы оценка эффективности управления относилась к некоторому среднему ее поведению в сложных условиях и не зависела от случайного сочетания действующих на систему случайных факторов, обычно в качестве показателей эффективности выбираются вероятности случайных событий или среднее значение случайной величины.

Управление ЛИС включает поиск сигнала абонента (установление связи), его захват, отслеживание направления луча передатчика (поддержание связи) и, при возможном срыве слежения, повторный поиск сигнала. Обращаясь к математической модели управления (см. рис. 5.9), данный процесс можно представить как случайное блуждание точки по графу с мгновенными скачками из состояния в состояние под воздействием потоков, характеризующих интенсивностями $\lambda_{ij}(t)$. Поэтому, а также с точки зрения особенностей работы ЛИС, когда неустановление связи или ее срыв может привести к невосполнимым потерям информации, целесообразно в качестве показателей эффективности управления ЛИС рассматривать вероятности установления связи $F(t_n)$ и срыва слежения $F(t_c)$, что эквивалентно нахождению закона распределения времени пребывания процесса в состояниях 1 ... 5 и 6 модели:

$$F(t_n) = P(t_{1,2,3,4,5} < t); \quad F(t_c) = P(t_6 < t), \quad (5.35)$$

где $F(t_n)$ — вероятность установления связи за заданное время поиска, а $F(t_c)$ — вероятность потери связи или срыва слежения за временной интервал t_c .

Очевидно, что ряд возможных показателей эффективности управления (среднее время поиска, среднее время до потери связи и другие показатели) может быть получен из зависимостей для $F(t_n)$ и $F(t_c)$.

Наиболее сложной частью исследования выбранных показателей эффективности управления является установление их функциональной зависимости от параметров управления. Рассмотрим физические предпосылки формирования указанных показателей эффективности.

В общем виде показатель эффективности управления ЛИС можно представить как условное математическое ожидание, которое, применительно к $F(t_n)$, запишется в виде

$$F(t_n) = \int_{(D)} q_n(c|\delta) \varphi(\delta) d\delta, \quad (5.36)$$

где $q_n(c|\delta)$ — вероятность обнаружения объекта, зависящая от способа поиска и способа принятия решения о наличии сигнала; c — вектор параметров системы обнаружения сигнала; $\varphi(\delta)$ — плотность вероятности распределения вектора промаха в пределах зоны поиска D .

Выбранный способ поиска символизируется индексом «п» и зависит от времени в неявном виде через функции $\varphi(\delta)$ и $q_n(c|\delta)$.

Выражение (5.36) характеризует эффективность управления при одностороннем поиске, т. е. вариант «СК — ШЛ». В общем случае поиска двусторонним сканированием «СК — СК» выражение для вероятности установления связи будет определяться параметрами систем обоих объектов:

$$F_{\Sigma}(t_n) = \int_{(D_A)} \left[\int_{(D_B)} q_{nA}(c_A|\delta_B) \varphi(\delta_B) d\delta_B \right] \varphi(\delta_A) q_{nB}(c_B|\delta_A) d\delta_A, \quad (5.37)$$

где индексы «А» и «В» определяют принадлежность к системам объектов А и В.

Из приведенных выражений для $F(t_n)$ следует их зависимость от таких параметров управления ЛИС в режиме установления связи, как начальное положение объектов в пределах соответствующих зон поиска, способов организации поиска и принятия решения, относительного движения объектов. Анализируя характер изменения показателей качества при различных зависимостях для q_n , можно установить, какой способ организации поиска или принятия решения является наилучшим.

Конкретное аналитическое выражение для общего случая [см. формулу (5.37)] может быть получено из предложенной математической модели управления (5.7). Поскольку функция распределения $P(t_1, 2, 3, 4, 5 < t)$ времени пребывания системы в группе состояний до захвата сигнала равна вероятности того, что к моменту времени t система будет находиться в состоянии b , то из первого уравнения (5.11) и начального условия $P_6(t) = 0$ для постоянных λ_{ij} находим:

$$\begin{aligned}
 F(t_n) &= P(t_n < t) = P_6(t) = \lambda_{36} \int_0^t P_3(t') dt' + \lambda_{56} \int_0^t P_5(t') dt' = \\
 &= \lambda_{13} \lambda_{36} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{(1 + \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (\lambda_k - \mu_i)^2) (\mu_i - \lambda_3)} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{1 - e^{-\lambda_3 t}}{\lambda_3} - \frac{1 - e^{-\mu_i t}}{\mu_i} \right) + \\
 &+ \lambda_{15} \lambda_{56} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{(1 + \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (\lambda_k - \mu_i)^2) (\mu_i - \lambda_5)} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{1 - e^{-\lambda_5 t}}{\lambda_5} - \frac{1 - e^{-\mu_i t}}{\mu_i} \right). \tag{5.38}
 \end{aligned}$$

Так как рассматриваемый марковский случайный процесс является процессом с непрерывным временем и счетным числом состояний, то производная $dF(t)/dt$ существует, а плотность распределения непрерывной случайной величины t_n будет равна

$$\begin{aligned}
 f(t_n) &= \frac{dF(t_n)}{dt} = \\
 &= \lambda_{13} \lambda_{36} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{(1 + \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (\lambda_k - \mu_i)^2) (\mu_i - \lambda_3)} (e^{-\lambda_3 t} - e^{-\mu_i t}) + \\
 &+ \lambda_{15} \lambda_{56} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{(1 + \sum_{k \neq 1} \lambda_{1k} \lambda_{k1} / (\lambda_k - \mu_i)^2) (\mu_i - \lambda_5)} (e^{-\lambda_5 t} - e^{-\mu_i t}). \tag{5.39}
 \end{aligned}$$

Зная закон распределения времени установления связи, можно определить его среднее значение:

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_{\Pi} &= \langle t_{\Pi} \rangle = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \\
 &= \lambda_{36} \int_0^t t' p_3(t') dt' + \lambda_{56} \int_0^t t' p_5(t') dt' = \\
 &= \lambda_{13} \lambda_{36} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\left(1 + \sum_{k \neq 1} \frac{\lambda_{1k} \lambda_{k1}}{(\lambda_k - \mu_i)^2}\right) (\mu_i - \lambda_3)} \times \\
 &\quad \times \left(\int_0^t t' e^{-\lambda_3 t'} dt' - \int_0^t t' e^{-\mu_i t'} dt' \right) + \\
 &+ \lambda_{15} \lambda_{56} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\left(1 + \sum_{k \neq 1} \frac{\lambda_{1k} \lambda_{k1}}{(\lambda_k - \mu_i)^2}\right) (\mu_i - \lambda_5)} \times \\
 &\quad \times \left(\int_0^t t' e^{-\lambda_5 t'} dt' - \int_0^t t' e^{-\mu_i t'} dt' \right) = \\
 &= \lambda_{13} \lambda_{36} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\left(1 + \sum_{k \neq 1} \frac{\lambda_{1k} \lambda_{k1}}{(\lambda_k - \mu_i)^2}\right) (\mu_i - \lambda_3)} \left(\frac{1}{\lambda_3^2} - \frac{1}{\mu_i^2} \right) + \\
 &+ \lambda_{15} \lambda_{56} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\left(1 + \sum_{k \neq 1} \frac{\lambda_{1k} \lambda_{k1}}{(\lambda_k - \mu_i)^2}\right) (\mu_i - \lambda_5)} \left(\frac{1}{\lambda_5^2} - \frac{1}{\mu_i^2} \right). \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

Дисперсия времени установления связи t_{Π} может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned}
 D(t_{\Pi}) &= a_{2t} - (\bar{t}_{\Pi})^2, \\
 \text{где } a_{2t} &= \langle \bar{t}_{\Pi}^2 \rangle = 2\lambda_{13} \lambda_{35} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\left(1 + \sum_{k \neq 1} \frac{\lambda_{1k} \lambda_{k1}}{(\lambda_k - \mu_i)^2}\right) (\mu_i - \lambda_3)} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{\lambda_3^3} - \frac{1}{\mu_i^3} \right) + 2\lambda_{15} \lambda_{56} \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\left(1 + \sum_{k \neq 1} \frac{\lambda_{1k} \lambda_{k1}}{(\lambda_k - \mu_i)^2}\right) (\mu_i - \lambda_5)} \left(\frac{1}{\lambda_5^3} - \frac{1}{\mu_i^3} \right). \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

Если рассматривать потерю связи как выход ошибки слежения за некоторые фиксированные уровни γ_1 и γ_2 , связанные тем или иным образом с апертурой дискриминационной характеристики контура сопровождения, то вероятность $F(t_c) = P(t_6 < t)$ может быть отождествлена с вероятностью появления хотя бы одного выброса шума над заданным уровнем γ за время t_c [51]. Для малых вероятностей срыва $P < (0,1 \dots 0,2)$, представляющих особый интерес для исследования управления ЛИС, выражение для $F(t_c)$ может быть представлено следующей зависимостью:

$$F(t_c) \approx (\nu_1 + \nu_2)t_c, \quad (5.42)$$

где ν_1, ν_2 — частоты выбросов ошибки за уровни γ_1 и γ_2 .

Таким образом, расчет вероятности потери связи в процессе управления ЛИС при сделанных допущениях сводится к определению частот выбросов ν_1 и ν_2 , сумму которых можно рассматривать как частоту или интенсивность срыва слежения (см. разд. 7.7).

Основы синтеза управления ЛИС

Как отмечалось, управление ЛИС разбивается на два этапа, характеризующихся своими показателями эффективности, смена которых происходит после захвата сигнала, когда система переходит в режим сопровождения. Наличие нескольких показателей эффективности существенно усложняет задачу синтеза управления ЛИС уже на уровне системного проектирования.

Раскрытие неопределенности целей управления в условиях множественности показателей обычно производится на основе неформального анализа. При этом для выбора способа действия (вектора x), обеспечивающего optimum функционалам $W_1(x), W_2(x), \dots, W_N(x)$, применяются методы, основанные на сведении тем или иным способом векторного синтеза к скалярному [23].

Основными из них являются:

последовательная оптимизация решения по каждому показателю;

перевод всех показателей, кроме главного, в разряд ограничений;

назначение допустимых пределов для всех показателей с последующей вариацией этих пределов;

применение обобщенного показателя.

Для выбора метода синтеза управления ЛИС обратимся к модели управления (см. разд. 5.3), позволяющей представить управление как случайное блуждание точки по графу с мгновенными скачками из состояния s_i в состояние s_j ($s_i, s_j \in S; i, j = 1, 2, \dots, 6$) под воздействием управляющих потоков $\lambda_{ij}(t)$. При этом нормальным состоянием системы является поддержание режима связи (состояние s_6), из которого система случайным образом может перейти в результате срыва слежения в режим поиска (состояние s_1).

Обозначим через $\theta(\delta(t), c)$ потери времени на поиск абонента после срыва слежения в течение отдельного интервала связи T_i .

Тогда средние потери W на поиск за время полного сеанса связи T можно оценить функционалом

$$W = W[\vartheta(\delta(t), c), T], \quad (5.43)$$

а средние потери системы — математическим ожиданием $W[83]$:

$$J = \langle W[\vartheta(\delta(t), c), T] \rangle, \quad (5.44)$$

где $T = \sum_{i=1}^N T_i$

($T_i = t_{ni} + t_{cvi}$, где t_{ni} — время поиска в i -м интервале связи; t_{cvi} — время поддержания связи в i -м интервале связи). Представим потери системы W в виде

$$W[\vartheta(\delta(t), c), T] = a_1 W_1[\vartheta(\delta(t), c_1, \beta_1, t_n), T] + a_2 W_2(t_n, c_2, \beta_2), \quad (5.45)$$

где $W_1[\vartheta(\delta(t_1), c_1, \beta_1, t_n), T]$ — средние потери сеанса связи при данном значении t_n ; c_1 — вектор параметров системы, определяющий способы слежения; β_1 — вектор параметров системы слежения; $W_2(t_n, c_2, \beta_2)$ — средние потери мощности, массы аппаратуры и других параметров на обеспечение данного t_n ; c_2 — вектор параметров системы, определяющей способы поиска и принятия решения; β_2 — вектор параметров системы поиска; a_1, a_2 — нормирующие множители.

Расходы W_2 направлены на уменьшение времени поиска. С уменьшением t_n потери на поиск за время T уменьшаются так же, как и расходы типа W_1 .

Тогда задача (с учетом рассмотренного показателя эффективности) синтеза системы состоит в следующем: определить такой вектор параметров системы c , чтобы функционал W принимал минимальное значение

$$\min_c W[\vartheta(\delta(t), c), T] \quad (5.46)$$

при выполнении следующих условий:

$$c = [c_1, c_2, \beta_1, \beta_2];$$

$$\beta_{1i}, \beta_{2j} \geq 0; \quad \beta_{1i} \in B_1; \quad \beta_{2j} \in B_2; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$$c_{1i} \in C_1, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad c_{2j} \in C_2, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Указанные неравенства показывают, что параметры системы положительны, а количество способов поиска, обнаружения и сопровождения ограничено.

Поставленная задача оптимизации W является частным случаем оптимизации по нескольким показателям. Образованный в ре-

зультате линейной суперпозиции функционалов W_1 и W_2 , функционал W [см. выражение (5.45)] обладает той особенностью, что его составляющие равноценны. Поэтому при решении задачи воспользуемся принципом Парето, заключающемся в исключении из неформального анализа тех вариантов решений, которые заведомо будут неудовлетворительны. В его основе лежит определение совокупности «нехудших» систем на основании метода безусловного отношения предпочтения [23]. Для этого установим функциональные связи W_1 и W_2 с временем поиска $t_{\text{п}}$, в качестве которого будем рассматривать его среднее значение.

Функционал W_2 определяет «стоимость» затрат, обеспечивших уменьшение времени поиска $\Delta t_{\text{п}}$ в результате варьирования параметров системы поиска. При этом в качестве опорного значения $t_{\text{п}} = t_{\text{п.о}}$ может быть принята величина времени поиска, определяемая параметрами какого-либо известного способа поиска, например, регулярного равномерного сканирования. Учитывая, что время поиска в конечном итоге определяется энергетическими затратами, для оценки $\Delta t_{\text{п}}$ воспользуемся следующей зависимостью:

$$\Delta t_{\text{п}} = \sum_{j=1}^m a_j \Delta \beta_{2j}, \quad (5.47)$$

где

$$a_j = \left. \frac{\partial t_{\text{п}}}{\partial \beta_{2j}} \right|_{t_{\text{п}} = t_{\text{п.о}}} \quad (\beta_2 = [P, D, \dots]).$$

Пусть $K^T = [K_P, K_D, \dots]$ — вектор нормирующих множителей, в качестве которых может выступать стоимость размещения аппаратуры на объекте, энергопотребление и другие характеристики системы. Тогда можно поставить задачу определения минимальной «стоимости» приращения $\Delta t_{\text{п}}$ (минимума функционала W_2):

$$\min W_2 = \min \left(\sum_{j=1}^m K_j a_j \Delta \beta_{2j} \right) \quad (5.48)$$

при ограничениях вида $\sum_{j=1}^m a_j \Delta \beta_{2j} = \Delta t_{\text{п}}; \quad 0 \leq \Delta \beta_{2j} \leq (\Delta \beta_{2j})_{\text{дон}}$.

Задача данного типа относится к задачам линейного программирования и решается способами, рассмотренными в работе [48]. Варьированием $\Delta t_{\text{п}}$ для рассматриваемых способов поиска c_{2j} определяются зависимости, показанные на рис. 5.11, а.

Функционал $a_1 W_1$ определяет «стоимость» суммарных потерь времени полного сеанса связи T на поиск сигнала абонента и в стационарном режиме может быть выражен в виде $W_1 = \lambda_{61} T t_{\text{п}}$, где λ_{61} — интенсивность потока срыва слежения математической модели управления ЛИС, зависящая от типа следящей системы (c_1) и ее параметров (β_1).

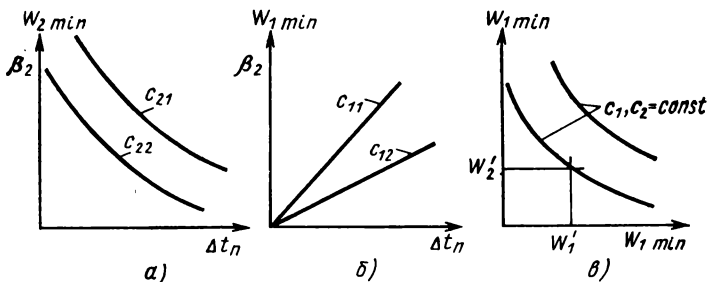


Рис. 5.11. Графики оптимизации по двум критериям:

a — зависимость W_2 (Δt_π); *б* — зависимость W_1 (Δt_π); *в* — определение множества нехудших точек

Приращение интенсивности $\Delta\lambda_{61}$ относительно интенсивности для опорного способа автосопровождения ($\lambda_{61} = \lambda_{61_0}$) может быть оценено зависимостью

$$\Delta\lambda_{61} = \sum_{i=1}^n b_i \Delta\beta_{1i}, \quad (5.49)$$

где $b_i = \frac{\partial\lambda_{61}}{\partial\beta_{1i}} \Big|_{\lambda_{61} = \lambda_{61_0}}$ ($\beta_i = [K, T_0, \dots]$).

Пусть $\gamma^T = [\gamma_K, \gamma_{T_0}, \dots]$ — вектор нормирующих множителей системы автосопровождения. Тогда, по аналогии с исследованием W_2 может быть поставлена задача минимизации функционала W_1 :

$$\min W_1 = \min \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta\beta_{1i} \right). \quad (5.50)$$

при ограничениях вида $\sum_{i=1}^n b_i \Delta\beta_{1i} = \Delta\lambda_{61}$; $0 \leq \Delta\beta_{1i} \leq (\Delta\beta_{1i})_{\text{дон}}$

для каждого фиксированного значения Δt_π .

Данная задача также решается методами линейного программирования, и, при использовании интенсивностей λ_{61} , соответствующих различным способам автосопровождения c_{1i} , могут быть определены зависимости, показанные на рис. 5.11, б. Исключая из соотношений для $W_1(t_\pi)$ и $W_2(t_\pi)$ величину t_π , получим зависимость $W_1 = W_1(W_2)$, представленную на рис. 5.11, в.

Эта зависимость характеризует множество нехудших систем, монотонно убывающее как при возрастании W_1 , так и при возрастании W_2 , и является левой нижней границей области всех возможных систем [23]. Тогда полученная характеристика обладает важным для практики свойством: при каждом значении W_2 она дает минимальную (по всем параметрам системы сопровождения) величину функционала W_1 , а при каждом данном значении W_1 — минимальное (по всем параметрам системы поиска) значение W_2 .

Чтобы из совокупности нехудших систем выбрать какую-либо одну систему, необходимо к безусловному отношению предпочтения ввести дополнительное условие (или совокупность условий). Таким условием может быть ограничение на время поиска t_n , позволяющее определить оптимальное построение системы (точки W_1' и W_2' на рис. 5.11, в).

Последовательность рассмотренного синтеза схематически представлена на рис. 5.12, где применяются использованные в данном разделе обозначения.

В качестве примера определим область нехудших точек системы управления ЛИС, осуществляющей равномерный регулярный поиск абонента. С помощью выражения (5.47), а также зависимостей для вероятностей правильного обнаружения D_A и D_B при пуассоновском характере сигнала и шума [84] и числа сигнальных фотоэлектронов на выходе фотоприемника (см. разд. 5.2) определим связь приращения времени поиска Δt_n с приращением параметров системы поиска:

$$\Delta t_n = \frac{\partial t_n}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \bar{n}_c} \left(\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial P} \Delta P + \frac{\partial \bar{n}_c}{\partial D_n} \Delta D_n + \frac{\partial \bar{n}_c}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial \bar{n}_c}{\partial D_{np}} \Delta D_{np} \right).$$

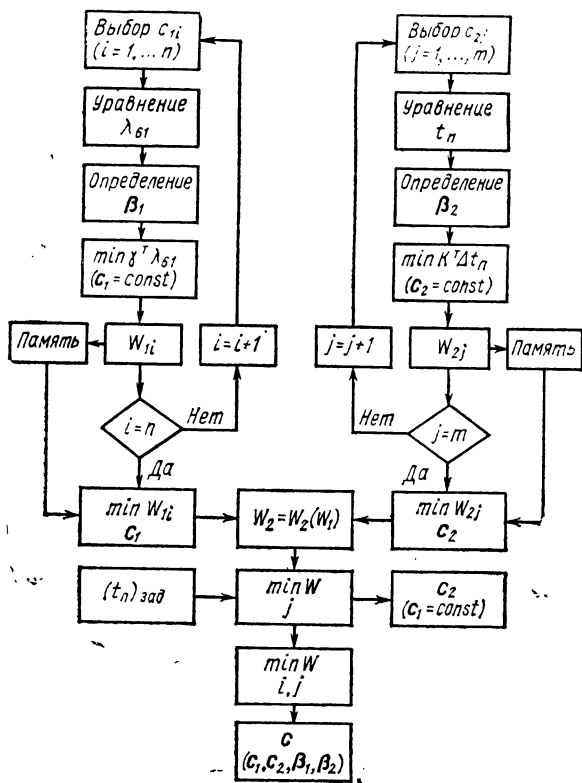


Рис. 5.12. Схема синтеза алгоритма управления ЛИС

Положим равенство вероятностей обнаружения обоих объектов ($D_A = D_B = D$), а также постоянство параметров F и $D_{\text{пр}}$. Тогда вектор $\Delta \beta_2 = [\Delta P, \Delta D_{\text{п}}]$, а задача оценки влияния мощности передатчика P и размеров его антенны $D_{\text{п}}$ на длительность времени поиска сведется к рассмотренной выше формулировке: определению минимальной «стоимости» приращения

$$\min W_2 = \min(K_P \Delta P + K_D \Delta D_{\text{п}});$$

при ограничениях вида

$$\frac{\partial t_{\text{п}}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \bar{n}_c} \left(\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial P} \Delta P + \frac{\partial \bar{n}_c}{\partial D_{\text{п}}} \Delta D_{\text{п}} \right) = \Delta t_{\text{п}};$$

$$0 \leq \Delta P \leq (\Delta P_{\text{п}})_{\text{дон}}; \quad 0 \leq \Delta D_{\text{п}} \leq (\Delta D_{\text{п}})_{\text{дон}}.$$

Раскрывая соответствующие частные производные, перепишем выражение для $\Delta t_{\text{п}}$ в виде

$$-\frac{2\tau N_B(N_A + 1)}{D^3} \frac{(\bar{n}_c + \bar{n}_\phi)^{n_0 - 1}}{(n_0 - 1)!} \exp[-(\bar{n}_c + \bar{n}_\phi)] \times$$

$$\times \frac{\eta \tau_0 \tau_a D_{\text{пр}}^2 D_{\text{п}}}{2,44\lambda h\nu FL^2} \left[\Delta P + \frac{D_{\text{п}}}{2,44\lambda} \Delta D_{\text{п}} \right] = \Delta t_{\text{п}}.$$

Для численной иллюстрации воспользуемся условиями примеров в рассмотренных разд. 5.1, 5.2, а относительно вектора K будем полагать, что он характеризует стоимость изготовления и размещения на объекте элементов передатчика и антенны [16]: $N_B = N_A = 9$; $D = 0,9$; $\bar{n}_c = 6,4$; $\bar{n}_\phi = 0,84$; $n_0 = 4$; $\lambda = 0,53$ мкм; $F = 100$ Гц; $P = 25$ МВт; $\tau_0 \tau_a = 0,04$; $h\nu = 3,76 \cdot 10^{-19}$ Дж; $\eta = 0,1$; $R = 4 \cdot 10^7$ м; $D_{\text{пр}} = D_{\text{п}} = 0,3$ м; $K_P = 3,5 \cdot 10^3$ руб/Вт; $K_D = 250 \cdot 10^3$ руб/м.

Окончательное условие задачи сформулируем следующим образом: найти значения ΔP и $\Delta D_{\text{п}}$, обеспечивающие

$$\min W_2 = \min(3,5 \cdot 10^3 \Delta P + 250 \cdot 10^3 \Delta D_{\text{п}})$$

при ограничениях

$$-0,153 \cdot 10^{-2} \Delta P - 77,4 \Delta D_{\text{п}} = \Delta t_{\text{п}}; \quad 0 \leq \Delta P \leq 0,2 \text{ Вт}; \quad 0 \leq \Delta D_{\text{п}} \leq 0,2 \text{ м}.$$

Графическое решение задачи приведено на рис. 5.13, а.

В результате аналогичных рассуждений получается решение задачи и для заданного способа автосопровождения. Для определения параметров системы считаем, что значение $W_{1\text{min}}$ при $T = 4800$ с, $\lambda_{61} = 10^{-3}$ л/с, $\gamma = 0,5 \cdot 10^3$ руб/с определяется зависимостью $W_1 = 48\gamma \Delta t_{\text{п}}$, функциональная связь $W_2 = W_2(W_1)$ в диапазоне $0 \leq \Delta t \leq 5$ с имеет вид, показанный графически на рис. 5.13, б. Монотонность убывания данной зависимости свидетельствует о том, что она представляет левую нижнюю границу всех возможных точек системы.

Рассмотренный синтез оптимального управления ЛИС из условия минимизации обобщенного показателя эффективности, характе-

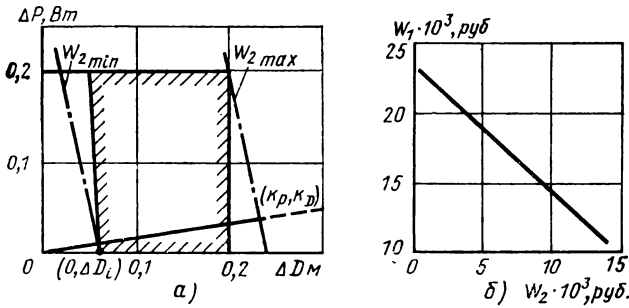


Рис. 5.13. Пример синтеза управления ЛИС:

а — графическое решение задачи минимизации W_2 ; б — множество нехудших точек управления

ризирующего потери времени сеанса связи на восстановление режима передачи информации после срыва слежения, учитывает, таким образом, возможность оптимизации параметров как системы поиска, так и системы сопровождения, что имеет существенное значение на всех этапах проектирования системы управления ЛИС.

Возможности оптимизации управления в режиме одностороннего поиска

Установление связи в ЛИС — одновременная двусторонняя процедура, характеристики которой определяются как режимом работы поисковых систем каждого абонента, так и их взаимодействием. Как следует из классификации видов поиска, в режиме установления связи поисковая система, по крайней мере одного абонента, осуществляет режим сканирования. Поэтому целесообразно рассмотреть сканирующий режим системы поиска отдельного абонента.

В большинстве разработанных к настоящему времени оптических поисковых систем осуществляется регулярный осмотр зоны поиска, характеризуемый равномерным распределением поисковых усилий по просматриваемому пространству [28, 45, 106]. Данный способ поиска заключается в последовательном просмотре всех ячеек зоны неопределенности и фиксации тех из них, сигнал абонента в которых превысит заданный порог. Реализуется метод сканирования созданием различных законов движения луча оптической антенны: растровых, спиральных, конических и других законов [34]. Относительная простота реализации

данного метода сканирования в большинстве практических случаев компенсирует его основные недостатки: неоптимальность, неуниверсальность и другие недостатки. Обнаружение при регулярном сканировании осуществляется как фиксацией однократного превышения заданного порога, так и более сложными алгоритмами. Рассмотрим характеристики регулярного сканирования и возможные пути его оптимизации.

Регулярное сканирование в общем случае характеризуется последовательным способом получения, преобразования и обработки поисковой информации. В качестве исходной для равномерного сканирования рассмотрим двухэтапную процедуру поиска и обнаружения, работа которой поясняется графиком, представленным на рис. 5.14.

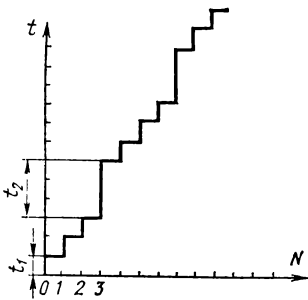


Рис. 5.14. График обнаружения сигнала при двухэтапной процедуре поиска

Каждая ячейка кадра сканирования осматривается в течение времени t_1 . Если произошло превышение порога на первом этапе, то поиск останавливается еще на время t_2 , после чего принимается окончательное решение о наличии сигнала в ячейке, и система либо продолжит поиск, либо перейдет в режим сопровождения.

Пусть время t_2 выбрано таким образом, что ошибки в работе второй ступени обнаружения отсутствуют. Тогда при поиске, начинающемся с края зоны неопределенности положения абонента и мгновенном переходе луча между ячейками, среднее время поиска сигнала \bar{t}_n определится следующим выражением [15]:

$$\bar{t}_n = \tau \sum_{k=1}^N k P_k + \frac{1-D}{D} [t_1 + (N-1)\tau], \quad (5.51)$$

где $\tau = t_1 + Ft_2$ — среднее время анализа ячейки, в которой цель отсутствует; (F — вероятность ложной тревоги в пустой ячейке); P_k — априорная вероятность нахождения сигнала в k -й ячейке; D — вероятность правильного обнаружения сигнала на первом этапе; N — общее число ячеек в кадре сканирования.

Для рассматриваемой циклической процедуры получено также выражение для интегрального распределения времени поиска [56]:

$$P(t_n) = \sum_k p_k P_k(t_n),$$

где $P_k(t_n) = \sum_{n,q} P(n, q)$ — вероятность обнаружения за время t_n объекта, расположенного в k -й ячейке ($P(n, q) = D(1-D)C_l^q F^q (1-F)^{l-q}$ — вероятность того, что захват сигнала произойдет на $(n=1)$ -м проходе кадра сканирования и за это время возникнет q ложных тревог, где C_l^q — число сочетаний из l по q , $l = n(N-1) + k - 1$; p_k — априорная вероятность нахождения цели в k -й ячейке. При $N \gg 1$ формула (5.51) принимает вид

$$\bar{t}_n \approx \tau \sum_k k P_k + N\tau \frac{1-D}{D}.$$

Возможные пути оптимизации рассмотренной процедуры приведены на рис. 5.15.

Увеличение скорости сканирования снижает не только величину \bar{t}_n , но и уменьшает вероятность обнаружения сигнала на первой ступени в результате уменьшения времени t_1 . Существование и величина оптимальной скорости поиска

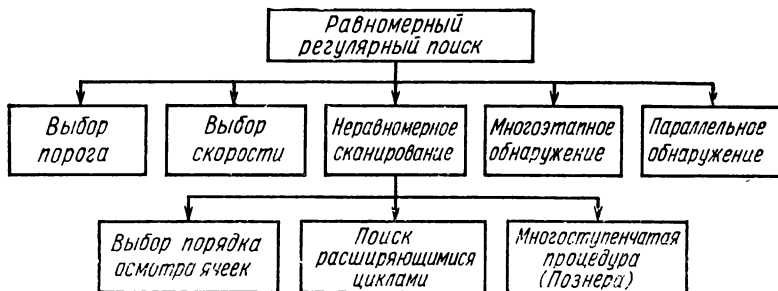


Рис. 5.15. Классификация направления оптимизации равномерного регулярного поиска

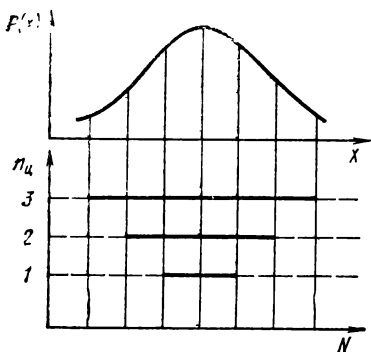


Рис. 5.16. Схема поиска расширяющимися циклами

определяются энергетическими характеристиками линии связи, способом обнаружения сигнала, длительностью анализа на второй ступени t_2 и другими характеристиками.

Изменение порога обнаружения оказывает также противоречивое влияние на величину \bar{t}_n , так как с повышением порога и уменьшением вероятности ложной тревоги F происходит одновременное уменьшение вероятности правильного обнаружения D . В данном случае необходимо исследовать характеристику обнаружения $D = D(F)$, либо воспользоваться другими способами оптимизации порогового обнаружения, как, например, многопороговым обнаружением с использованием последовательного анализа [15].

Уменьшить время поиска в системах циклического поиска можно увеличением числа этапов при обнаружении сигнала. В этих системах при превышении порога на первом этапе последовательно выполняется второй, третий этапы обнаружения и т. д. При этом среднее время поиска приблизительно определяется зависимостью [56]

$$\bar{t}_n \approx t' \sum_k k P_k + N t' \frac{1 - D_{\Sigma}}{D_{\Sigma}},$$

где $t' = t_1 + F_1 t_2 + \dots + F_1 F_2 \dots F_{n-1} t_n$

(n — число этапов обнаружения сигнала; F_i — вероятность ложной тревоги на i -м этапе; t_i — время анализа на i -м этапе ($i=1, 2, \dots, n$)); D_{Σ} — результирующая вероятность правильного обнаружения сигнала после проведения n этапов.

При этом, как и ранее, полагается, что последняя ступень обнаружителя является безошибочной.

При неравномерном априорном распределении углового промаха $P_0(\delta)$, как показывает анализ выражения (5.51), оптимальным является осмотр ячеек в порядке убывания априорного распределения. Реализовать на практике такой способ поиска сложно, за исключением случая центросимметричного распределения $P(\delta)$ и спирального поиска.

Выигрыш в уменьшении среднего времени поиска в результате оптимального осмотра ячеек (для случая нормального распределения положения объекта в зоне поиска) можно оценить по следующей зависимости [15, 56]:

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi}(2 - D_{\Sigma})(1 - P_0) f(1 - P_0/2)}{\sqrt{2} D_{\Sigma} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} f^2 (1 - P_0/2) \right] \right\} + 2 [1 - D_{\Sigma} f(P_0/2)]}$$

где P_0 — вероятность непопадания объекта в интервал поиска; $f(\cdot)$ — функция, обратная интегралу вероятности.

Характерно, что максимальных и весьма значительных величин выигрыши достигают при результирующей вероятности правильного обнаружения $D_{\Sigma} = 1$, т. е. когда процедура поиска заканчивается за 1 цикл. С увеличением P_0 , т. е. с ростом дисперсии априорного закона и приближением его к равномерному, выигрыши сокращаются.

Другим способом уменьшения времени поиска является переход к поиску с переменным числом ячеек в цикле — к поиску расширяющимися циклами [15].

При данном способе каждый последующий цикл содержит все ячейки предыдущего цикла (рис. 5.16, где n_{μ} — номер цикла осмотра зоны неопределенности).

Среднее время поиска расширяющимися циклами определяется выражением

$$\bar{t}_n = \frac{1-D}{D} (t_1 - \tau) + \tau \sum_k K P_k + \frac{\tau}{D} \sum_{\nu=1}^{\infty} n_{\nu} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\nu} P(n_{\mu}) (1-D)^{\nu+1-\mu} + \sum_{\nu+1}^{\infty} P(n_{\mu}) [D(\mu - \nu) + 1] \right\} \quad (5.52)$$

где n_{ν} — число ячеек, впервые просматриваемых в ν -м цикле; $P(n_{\mu})$ — вероятность того, что $k \in n_{\mu}$; $\mu = \nu - 1$, если k -я ячейка впервые просматривается в ν -м цикле ($k \in n_{\nu}$).

Остальные обозначения в выражении (5.52) соответствуют обозначениям выражения (5.51).

Следующим шагом на пути оптимизации поиска является выбор такого порядка осмотра, при котором решение о том, какую из ячеек осматривать следующей, принимается после осмотра каждой ячейки на основании сведений, известных априори и полученных при предшествующих осмотрах. Данный способ оптимизации реализуется осмотром ячеек в порядке убывания апостериорной вероятности [15], анализом на последующем этапе осмотра только тех ячеек, в которых произошло превышение порога на предыдущем этапе, осмотром на последующих этапах ячеек, сгруппированных в области по порядку интенсивности принятого сигнала, начиная с области, в которой получен максимальный сигнал [114].

Описанный в работе [114] способ поиска обеспечивает наименьшее среднее время поиска уже при двухступенчатой процедуре, если на предварительном этапе каждая ячейка прошла классификацию по интенсивности. При использовании данного способа вместо равномерного сканирования выигрыш в среднем времени поиска равен

$$\Delta \bar{t}_n = m t_1 (n-1) P(0 < z < x) - \frac{2N t_0 \chi^2}{(\mu/\sigma)^2},$$

где $m = N/n$ — число ячеек в каждой из n областей классификации; t_1 — время осмотра ячеек на втором этапе; z — нормированная нормальная случайная величина; t_0 — время осмотра ячеек при равномерном сканировании; $\chi = \frac{\mu}{\sqrt{2} \sigma_{\tau}}$, (где μ — среднее значение сигнала в ячейке при наличии и отсутствии в ней объекта; $\sigma_{\tau}^2 = \frac{m \sigma^2 t_0}{t}$; σ^2 — дисперсия аддитивного гауссова шума; \bar{t} — оптимальное время поиска на первом этапе).

Время поиска может быть существенно уменьшено в системах, осуществляющих осмотр пространства по многим элементарным параллельным каналам (мозаичный приемник). Обнаружение сигнала осуществляется решеткой фотоприемников, и среднее время поиска ограничивается временем осмотра одной ячейки T_1 :

$$\bar{t}_n = T_1.$$

Поиск с помощью мозаичных приемников обладает рядом ценных качеств. Он позволяет получить глобальный минимум времени поиска, повышает информационные характеристики системы, дает возможность следить за быстродвижу-

щимися объектами. Однако наряду с ценностью и перспективностью многоканальных систем необходимо отметить, что наличие многих каналов приводит к значительным усложнениям таких систем и затрудняет их аппаратную реализацию.

В отличие от рассмотренного регулярного поиска введение элементов случайности в алгоритмы поиска позволяет реализовать такие ценные характеристики, как высокая надежность и помехоустойчивость, быстроедействие, простота введения операций, что позволяет сделать оптимизацию поиска очень гибкой. Проведенные теоретические исследования применения случайного поиска в ЛИС показали их высокие потенциальные возможности [84]. Однако из сравнительного анализа систем регулярного и случайного поиска следует, что системы регулярного поиска на больших дальностях имеют такие же характеристики качества, как и системы со случайным поиском, уступая им на малых дальностях. Особенности случайного поиска рассмотрены в работах [61, 84, 99].

ОСОБЕННОСТИ ПОИСКА В ЛАЗЕРНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Установление связи в космических системах передачи информации с ОКГ осуществляется последовательно выполняемыми этапами поиска, обнаружения и сопровождения сигнала абонента. Специфические условия поиска в ЛИС КА обусловлены особенностями возникновения зоны неопределенности начального положения абонентов, связанными как с необходимостью учета законов свободного движения КА, так и с высокими требованиями к стабилизации и ориентации бортовых оптических антенн.

Наибольшие сложности представляет анализ характеристик зоны неопределенности в случае, когда все подготовительные операции и непосредственно поиск абонентов в ЛИС осуществляются бортовыми системами КА автономно или при ограниченной связи с наземным командно-измерительным комплексом. Анализ основных источников возникновения зоны неопределенности и их влиянию на ее характеристики в указанной ситуации посвящается данная глава.

6.1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ НАЧАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ АБОНЕНТОВ ЛИС

Моменту начала сеанса связи предшествуют следующие операции, выполняемые бортовыми системами КА автономно или во взаимодействии с наземным измерительным комплексом:

- 1) измерение параметров движения;
- 2) обработка результатов измерений;
- 3) определение параметров орбиты;
- 4) прогнозирование движения;
- 5) расчет и проведение коррекции параметров движения;
- 6) построение орбитальной системы координат.

Количество и объем данных операций будут определяться назначением КА и возможностями его бортовой аппаратуры. При идеальном выполнении указанных операций антенны КА-абонентов будут наведены друг на друга, и система связи будет готова к работе. Однако в результате действия различных возмущающих факторов

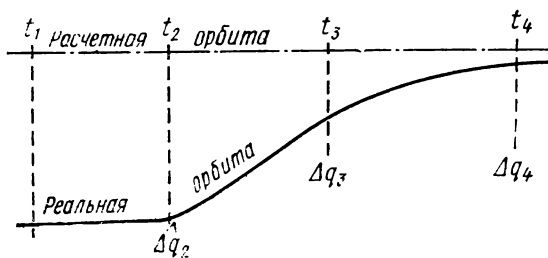


Рис. 6.1. Схема решения навигационной задачи

реальные линии визирования антенн не совпадут друг с другом, а точки их пересечения с плоскостью, нормальной к расчетной линии визирования (с «картинной» плоскостью), образуют геометрическое место, называемое зоной неопределенности. В связи с этим принято говорить о неопределенности положения КА-абонентов в момент начала связи, т. е. о неопределенности начального положения абонентов.

Рассмотрим основные источники возникновения неопределенности начального положения абонентов. Реальное положение КА в момент начала сеанса отличается от расчетного из-за действия ошибок вывода КА на орбиту и ошибок коррекции, а также в результате действия частично или полностью неучитываемых при прогнозировании свободного полета КА источников различных возмущающих сил [87]. Смещение реальной орбиты относительно расчетной является первой составляющей неопределенности положения КА в момент начала поиска. Другой составляющей являются ошибки работы систем ориентации и стабилизации положения КА и оптических антенн [16]. В результате зона неопределенности (ЗН) положения КА в момент начала поиска будет характеризоваться как ошибками схемы прогнозирования движения КА, так и ошибками системы поиска.

На рис. 6.1 показана схема решения навигационной задачи прогнозирования свободного полета КА от момента определения параметров собственного движения (t_1) до момента начала сеанса связи (t_4). Под навигационной задачей в данном случае понимаются выполняемые бортовыми системами КА первые пять из перечисленных выше операций.

Коррекция параметров орбиты производится в случае отклонений реальной орбиты от программной, превышающих допустимые.

На участке $t_1—t_2$ измеряются параметры движения, определяют отклонения от расчетной орбиты и принимается решение на проведение коррекции траектории, которая может быть осуществлена на участке $t_2—t_3$. Участок $t_3—t_4$ — это участок свободного полета, на котором осуществляется построение орбитальной системы координат и начальная установка оптических антенн.

В условиях безаварийного полета ошибка оценки вектора отклонения истинного положения КА от расчетного в момент времени

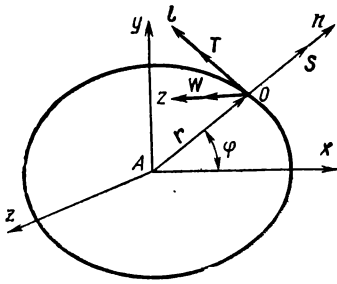


Рис. 6.2. Цилиндрическая и орбитальная системы координат

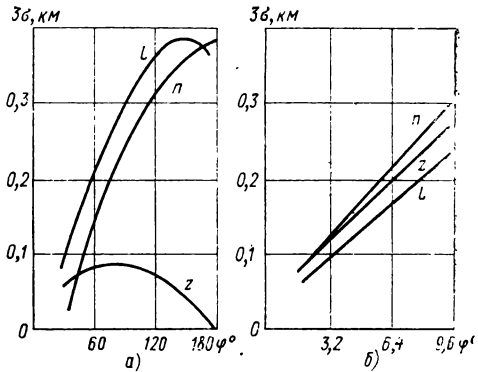


Рис. 6.3. Изменение начальных отклонений КА в процессе поиска:

а — высота орбиты КА 200 км; б — высота орбиты КА 40 000 км

$t_4(\Delta q_i)$ может быть определена по схеме линейного приближения в виде

$$\Delta q_4 = A_3(A_2\tilde{\Delta q}_2 + A_{2k}\Delta K) + \Delta q_F, \quad (6.1)$$

где $A_3 = \left[\frac{\partial q_{4i}}{\partial q_{3j}} \right]$ — матрица частных производных параметров движения КА в момент t_4 по параметрам движения в момент t_3 ; $A_2 = \left[\frac{\partial q_{3i}}{\partial q_{2j}} \right]$ — матрица частных производных параметров движения в момент t_3 по параметрам движения в момент t_2 ; $\tilde{\Delta q}_2 = \Delta q_2 - \hat{\Delta q}_2$ — ошибка оценки реального состояния КА по данным измерений; $(\hat{\Delta q}_2)$ — оценка состояния КА в момент t_2 ; $A_{2k} = \left[\frac{\partial q_{3i}}{\partial K_j} \right]$ — матрица частных производных параметров движения в момент t_3 по параметрам системы коррекции движения КА; $\Delta K^T = [\Delta P, \Delta \alpha, \Delta T_{23}]$ — вектор отклонений параметров системы коррекции движения КА (ΔP — отклонение тяги, $\Delta \alpha$ — отклонение угла ориентации двигателя коррекции; ΔT_{23} — отклонение времени работы двигателя коррекции); $\Delta q_F = \sum_{i=1}^n \Delta q_{F_i}$ — отклонение состояния КА за счет

неучитываемых при прогнозировании источников возмущающих сил (атмосферы, второго члена разложения нормального поля Земли, светового давления и др.).

Влияние матрицы $A_2(A_3)$ в уравнении (6.1) на пересчет отклонений вдоль орбиты можно определить расчетом соответствующих частных производных в орбитальной системе координат (рис. 6.2) и выбором начальных отклонений [87]. Значения частных производных приведены в табл. 6.1 и 6.2, где φ — угловая дальность полета КА от начальной точки; $\mu = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ — коэффициент, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли; r_0 и r — радиусы-векторы КА в начальный и текущий моменты времени в геоцентрической системе координат; p — фокальный параметр урав-

Таблица 6.1

	∂n_0	∂l_0	∂v_{n_0}	∂v_{l_0}
∂n	$a \left[-3 \frac{v_n}{r_0^2} t + \frac{1}{r_0} \left(2 \frac{r}{r_0} - \frac{v_n v_{n_0}}{\mu} \right) - \frac{p}{r} + 1 - \cos \varphi \right] - \frac{v_n v_{n_0}}{\mu}$	$\sin \varphi$	$a \left[\frac{3v_n v_{n_0}}{\mu} t + \frac{2}{\mu} (r v_{n_0} - r_0 v_n) + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \varphi \right]$	$a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[1 - \frac{3v_n}{r_0} t - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \cos \varphi + 2 \frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{p} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right]$
∂l	$a \left\{ -\frac{3v_l}{r_0^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \times \left[\frac{v_n}{r_0} - \frac{v_{l_0}}{r} + \frac{r}{r_0 p} \times (v_n - v_{n_0}) \right] + \frac{1}{r_0} \times \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \varphi \right\}$	$\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi - \frac{r}{p}$	$a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{3v_{n_0}}{r} t + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi - 2 \frac{r_0}{r} + \frac{r}{p} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \right]$	$a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\frac{3v_{l_0}}{r} t + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) r_0 v_n - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) r v_{n_0} \right] \right\}$

	∂n_0	∂t_0	∂v_{n_0}	∂v_{l_0}
∂v_n	$a \left[\frac{3\mu}{r^2 r_0^2} t - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin \varphi}{r r_0} + \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{v_{n_0}}{r} - \frac{v_n}{r_0} \right) \right]$	$\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \times (1 - \cos \varphi)$	$a \left[\frac{3v_{n_0}}{r^2} t - \frac{1}{r} \left(\frac{p}{r_0} + \cos \varphi - 1 \right) + 2 \frac{r_0}{r^2} - \frac{v_n v_{n_0}}{\mu} \right]$	$a \left\{ \frac{3v_{l_0}}{r^2} t - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{v_{n_0}}{r} - \frac{v_n}{r_0} + \frac{r_0}{pr} (v_{n_0} + v_n) \right] \right\}$
∂v_l	$-\frac{v_{l_0}}{p} (1 - \cos \varphi)$	$-\frac{1}{p} (v_n - v_{n_0}) + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$\left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \cos \varphi - \frac{r_0}{p}$

Таблица 6.2

	∂z_0	∂v_{z_0}
∂z	$1 - \frac{r}{p} (1 - \cos \varphi)$	$\frac{r_0 r}{\sqrt{\mu p}} \sin \varphi$
∂v_z	$-\frac{1}{p} (v_l - v_{r_0} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi)$	$1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \varphi)$

нения орбиты КА в полярной системе координат; a — большая полуось орбиты КА.

Для иллюстрации изменения начальных отклонений КА в процессе полета на рис. 6.3 приведены расчеты отклонения (3σ) для КА на высотах 200 и 40 000 км при начальных среднеквадратичных отклонениях, равных $n_0 = l_0 = z_0 = 1$ м, $v_{n_0} = v_{l_0} = v_{z_0} = 0,1$ м/с. При расчете было принято, что КА движутся по круговым орбитам и время движения соответствует прохождению низколетящим КА угловой дальности $\varphi = 180^\circ$.

Вопросы расчета требуемого импульса коррекции и отклонения состояния КА из-за неточности работы системы коррекции рассматриваются в работах [8, 72].

В связи со значительным уменьшением ширины диаграммы направленности оптических антенн по сравнению с радиодиапазоном при оценке ЗН ЛИС необходимо рассматривать влияние неучитываемых при прогнозировании свободного полета КА источников возмущающих сил. Анализ вызываемых ими отклонений положения КА от расчетного Δq_F производится в разд. 6.2.

6.2. ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КА НА ОБРАЗОВАНИЕ ЗОНЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Точность выражения (6.1) зависит от степени учета возмущающих факторов, влияющих на движение КА, т. е. от модели, используемой для расчета его свободного полета. Полная модель движения КА должна учитывать следующие источники сил, влияющие на его полет [87]:

- 1) истинную форму Земли (нормальное и аномальное поле сил тяготения);
- 2) сопротивление воздуха;
- 3) притяжение Луной, Солнцем и планетами солнечной системы;
- 4) световое давление.

Точность полной модели движения в настоящее время ограничена либо статистической природой источников возмущающих сил (сопротивление воздуха, световое давление), либо недостаточной изученностью их характеристик (например, аномалий поля сил тяготения).

На практике используются модели движения различной полноты. Иногда вполне достаточно получить качественную картину процесса, используя лишь модель неподвижной Земли без учета всех остальных факторов. Однако, хотя в сфере действия Земли указанные силы малы по сравнению с основной силой притяжения, они могут существенно отклонить орбиту КА, а в некоторых случаях — целиком изменить характер его движения.

При этом наиболее существенны так называемые вековые возмущения орбиты, которые за длительный промежуток времени даже при сравнительно незначительных возмущающих силах могут существенно изменить расчетную орбиту КА. При решении ряда практических задач (в том числе и задачи поиска КА) необходимо учитывать и периодические возмущения, значения которых повторяются после полного оборота КА.

Таким образом, КА, наряду с ускорением силы притяжения g , определяемым в виде $g = -\frac{\mu}{r^3} r$, где μ — произведение гравитационной постоянной на массу Земли; r — расстояние от центра Земли до КА, испытывает некоторое возмущающее ускорение j . При этом уравнение движения КА в векторной форме имеет вид

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^3} r + j. \quad (6.2)$$

В цилиндрической системе координат $Ar\varphi z$ (см. рис. 6.2) уравнение движения КА (6.2) можно записать следующим образом:

$$S - g = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; T = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}); W = \ddot{z} + g \frac{z}{r}, \quad (6.3)$$

где r — расстояние от центра Земли (A) до проекции КА на плоскость невозмущенной орбиты; φ — угол, отсчитываемый в плоскости невозмущенной орбиты от начального направления Ax по направлению полета КА; z — расстояние от плоскости невозмущенной орбиты до КА (точка O); S, T, W — проекции возмущающего ускорения J на оси орбитальной системы координат $Onlz$. Ось On совпадает с продолжением радиуса-вектора r , ось Ol нормальна к r в плоскости невозмущенной орбиты.

Поскольку систему уравнений (6.3) в общем виде при произвольных S, T и W решить нельзя, то анализ влияния источников возмущающего ускорения J на характер свободного движения целесообразно произвести по следующей схеме: в качестве опорного движения КА считать его невозмущенное движение ($S=T=W=0$), а действие возмущающих источников оценить через отклонения положения КА от расчетной точки на опорной орбите. Так как к моменту начала поиска t_4 (см. рис. 6.1) завершается выполнение навигационной задачи, то будем считать, что установление связи будет осуществлено, за последующий оборот КА на орбите, которая в дальнейшем полагается круговой.

Влияние поля притяжения Земли. Потенциал поля притяжения Земли определяется по формуле [87].

$$U = U_0 + \Delta U,$$

где $U_0 \approx \frac{\mu}{r} + \frac{\varepsilon}{r^3} P_{20}(\sin B)$ — потенциал нормального поля притяжения; ($\varepsilon = 2,634 \cdot 10^{25} \text{ м}^5 \text{ с}^{-2}$);

$$\Delta U = g_0 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin B) -$$

потенциал аномального поля притяжения (g_0 — среднее значение ускорения силы притяжения на поверхности Земли; R — средний радиус Земли; α_{nm}, β_{nm} — коэффициенты разложения превышения поверхности геоида над поверхностью общего земного эллипсоида (ОЗЭ); L, B — геоцентрические долгота и широта соответственно; $P_{nm}(\sin B)$ — присоединенные функции Лежандра).

Первый член потенциала U_0 соответствует сферической модели Земли. Отклонения КА от расчетной орбиты за 1 оборот могут быть рассчитаны по зависимостям, приведенным в работе [87], где символ « δ » соответствует вековым отклонениям, а « Δ » — периодическим:

$$\delta l = \pi a_e \frac{a_e}{r} \alpha \left(2 - 3 \sin^2 i + \frac{3}{2} \sin^2 i \cos 2u_0 \right);$$

$$\delta z_{\max} = \frac{\pi^1}{r} \frac{\varepsilon}{\mu} |\sin 2i|;$$

$$\Delta l_{\text{пер}} = -\frac{1}{r} \frac{\varepsilon}{\mu} \left\{ (2 - 3 \sin^2 i) \sin \varphi + \frac{\sin^2 i}{12} [9 \sin 2u_0 + 6 \sin (2u_0 \varphi) - \sin 2(u_0 + \varphi) - 14 \sin (2u_0 - \varphi)] \right\}; \quad (6.4)$$

$$\Delta r_{\text{пер}} = -\frac{1}{2r} \frac{\varepsilon}{\mu} \left\{ (2 - 3 \sin^2 i) (1 - \cos \varphi) + \frac{\sin^2 i}{6} [12 \cos^2 u_0 - 3 \cos (2u_0 + \varphi) - 2 \cos 2(u_0 + \varphi) - 7 \cos (2u_0 - \varphi)] \right\},$$

Таблица 6.3

Возмущающие силы	Отклонения	Высота, км					
		200	1000	5000	10000	20000	40000
Аномальное притяжение Земли	Δl	125	112	72	50	31	17
	Δn	28	24	16	11	6	4
	Δz	15	13	8	6	3,7	2,1
Сопrotивление воздуха	Δl	1,6					
	Δn	0,4					
	Δz	0,35					
Притяжение Луны	Δl					2	18,9
	Δn					0,3	3,1
	Δz					0,2	2
Световое давление	Δl				3	12,5	67,9
	Δn				0,1	0,6	3,3
	Δz				0,6	2,5	13,3

где a_e — 6378,16 км — большая полуось ОЗЭ; $\alpha = 1/298,2$ — сжатие эллипсоида; i — наклонение орбиты; u_0 — угловое расстояние начальной точки от восходящего узла орбиты; φ — угловое расстояние рассматриваемой точки от начальной точки.

Максимальные суммарные значения отклонений за 1 оборот КА, полученные в результате расчета по зависимостям (6.4), приведены в табл. 6.3 ($i = 70^\circ$).

Влияние сопротивления воздуха. Влияние сопротивления воздуха на движение КА резко убывает с увеличением высоты полета. При этом соответствующие периодические возмущения орбит становятся незаметными на высотах порядка 400 км. Что касается вековых возмущений, то при прогнозировании движения КА на несколько витков вперед их влиянием можно пренебречь на высотах порядка 600 ... 700 км и выше. Оценку отклонений КА по осям орбитальной системы координат за 1 виток можно произвести по следующему формулам [87]:

$$\delta l = 12 \pi^2 c \rho r^2; \quad |\Delta l|_{\max} = 8 c \rho r^2; \quad \delta n = -4 \pi c \rho r^2; \quad (6.5)$$

$$|\Delta n|_{\max} = 2 c \rho r^2,$$

где $c = c_x F_m / 2m$ (c_x — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления; F_m — площадь миделева сечения КА; m — масса КА; ρ — плотность атмосферы; r — радиус круговой орбиты).

Максимальные значения отклонений за 1 оборот КА, полученные в результате расчета по зависимостям (6.5), приведены в табл. 6.3 ($c = 0,16 \text{ м}^2/\text{Н}$, значения ρ соответствовали стандартной атмосфере CIRA 1961).

Влияние притяжения Луны и планет. Возмущения от притяжения к небесным телам превосходят аномалии силы тяжести, начиная с высот порядка 20 000 км, а начиная с высот порядка 50 000 км превосходят все остальные гравитационные возмущения. При этом возмущающее ускорение, вызываемое притяжением Луны, примерно в 2,2 раза превосходит соответствующее возмущение от Солнца.

Максимальные возмущения расчетной орбиты за 1 оборот КА за счет притяжения Луной могут быть оценены по следующим зависимостям [87]:

$$\left| \frac{\delta l}{r} \right|_{\max} = 3,25 \pi \left| \frac{f_{11}}{g_0} \right|_{\max}; \quad \left| \frac{\delta z}{r} \right|_{\max} = \frac{3}{4} \pi \left| \frac{f_{11}}{g_0} \right|_{\max}, \quad (6.6)$$

где $\left| \frac{f_{11}}{g_0} \right|_{\max}$ — табулированное максимальное значение отношения возмущающего ускорения к основному.

Результаты расчетов приведены в табл. 6.3.

Влияние светового давления. В предположении, что сила светового давления постоянна по величине и направлена по прямой Солнце — КА, существенны лишь вековые возмущения, действующие в плоскости орбиты и приводящие к нарастающему искажению ее формы. В качестве характеристики скорости искажения формы орбиты обычно принимается изменение расстояния от КА до центра Земли (или высоты полета) за один виток, максимальное значение которого можно оценить по формуле [87].

$$\delta r_{\max} = 3\pi A \frac{r_{\text{ср}}^3}{\mu} Q, \quad (6.7)$$

где $A = F/m$ — отношение поперечного сечения F КА к его массе m ; $r_{\text{ср}}$ — средний радиус орбиты; $Q = kq_0$ (k — коэффициент, зависящий от характера отражения света, а также от распределения теплового излучения по поверхности КА, при полном диффузном отражении $k = 1,44$; $q_0 = 0,45 \cdot 10^{-5}$ Н/м² — световое давление в районе земных орбит).

Расчеты по формуле (6.7) приведены в табл. 6.3. Из расчетов следует, что влияние светового давления на движение КА становится существенным и требует учета для больших высот ($h > 10\,000$ км).

Из табл. 6.3, где отклонения приведены в км, следует, что угловые смещения КА в результате действия возмущающих сил даже на дальностях связи в 40 000 км могут составить единицы и десятки угловых минут, что может на порядок и более превзойти ширину диаграммы направленности оптических антенн.

Из анализа результатов, приведенных в табл. 6.3, следует:

модель сферической неподвижной Земли может привести к существенным отклонениям реального положения КА от расчетного, т. е. к значительному возрастанию размеров ЗН начального положения объектов;

алгоритм прогнозирования свободного движения КА для всех высот их орбит должен учитывать потенциал аномального поля притяжения Земли. На высотах более 30 000 км существенное влияние оказывают силы притяжения Луны и Солнца, а также световое давление.

6.3. ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ПОСТРОИТЕЛЕЙ СИСТЕМ КООРДИНАТ НА ОБРАЗОВАНИЕ ЗОНЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Для определения навигационных параметров и управления работой бортовых систем КА обычно используется орбитальная система координат (см. рис. 6.2). Анализ современных систем ориентации КА показывает, что требования к точности сопровождения луча абонента в ЛИС ими выполнены быть не могут. В связи с этим для бортовых систем, в том числе для оптических антенн, осуществляется автономное, независимое от стабилизации и ориентации самого аппарата, построение орбитальной системы координат, в которой производится управление положением соответствующей измерительной и контрольной аппаратуры.

Моделирование направлений осей орбитальной системы координат реализуется, как правило, с помощью двух устройств: построителя местной вертикали, определяющего направление радиуса-вектора, и орбитального компаса.

Построитель вертикали и орбитальный компас могут выполняться в виде отдельных приборов или объединяться в единую курсо-вертикаль. Каждый из этих приборов основывается на различных методах измерений. В качестве построителей вертикали могут использоваться следующие вертикали [7, 72]: оптические, гравитационные, аналитические, радиотехнические.

Орбитальные компасы разделяют на гиросорбитанты, ионные измерители, магнитные измерители.

Наибольшее распространение получили системы, состоящие из оптической вертикали и гиросорбитанта. Эта система обеспечивает в настоящее время точность ориентации в пределах $1 \dots 1,5^\circ$ [67], что объясняется, в основном, несовершенством чувствительных элементов. Более высокими характеристиками обладают радиотехнические вертикали, а также астрономические средства ориентации КА.

Принцип работы рассмотренного построителя орбитальной системы координат поясняется схемой, изображенной на рис. 6.4. В результате движения КА происходит отклонение оси построителя вертикали (ПВ) от центра планеты. Сигнал x , пропорциональный этому отклонению, обрабатывается гиросорбитантом (ГО) и исполнительным устройством (ИУ), формируя сигнал угловой коррекции $\Delta\alpha$ к заданному программному развороту $\alpha_{пр}$ объекта регулирования (ОР) (например, оптической антенны).

В качестве примера рассмотрим методику оценки точности построителя орбитальной системы координат на основе гиросорбитанта, корректируемого радиотехнической вертикалью (РВ), считая возмущения, действующие на систему, стационарными случайными функциями времени [7, 29, 66, 67].

Дисперсии угловых погрешностей гиросорбитанта, корректируемого датчиком вертикали, могут быть найдены из зависимостей [67]

$$D(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2) + 2j\xi\Omega\omega} \right|^2 \left\{ \left(4\xi^2 \frac{\Omega^2\omega^2}{H^2\omega_{z_0}^2} + \frac{\mu^2}{H^2} \right) S_{\mu_x}(\omega) + \omega^2 \left(4\xi^2 \frac{\Omega^2\omega^2}{\omega_{z_0}^2} + \mu^2 \right) S_{\Delta\beta}(\omega) + \frac{\omega^2}{H^2} S_{\mu_y}(\omega) + \omega^4 S_{\Delta\alpha}(\omega) \right\} d\omega; \quad (6.8)$$

$$D(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2) + 2j\xi\Omega\omega} \right|^2 \left\{ \frac{\omega^2}{H^2} S_{\mu_x}(\omega) + \omega^4 S_{\Delta\beta}(\omega) + \frac{\omega_{z_0}^2}{H^2} S_{\mu_y}(\omega) + \omega^2 \omega_{z_0}^2 S_{\Delta\alpha}(\omega) \right\} d\omega, \quad (6.9)$$

где α, β — углы рассогласования (рис. 6.5); Ω — собственная частота колебаний гиросорбитанта; ξ — показатель затухания (равный 0,7 ... 0,8); ω_{z_0} — угловая скорость вращения радиуса-вектора КА в плоскости орбиты; $\mu = \omega_{z_0} + k_1/H$; k_1 — коэффициент передачи по углу; H — кинетический момент гироскопа; $S_{\Delta\alpha}(\omega)$, $S_{\Delta\beta}(\omega)$ — спектральные плотности угловых отклонений построителя вертикали от

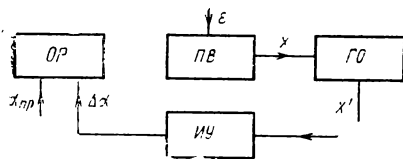


Рис. 6.4. Структурная схема построителя орбитальной системы координат

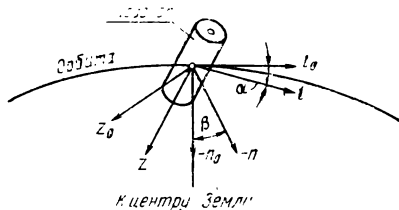


Рис. 6.5. Схематическое представление орбитальной и истинной системы координат

осей истинной системы координат; $S_{\mu_x}(\omega)$, $S_{\mu_y}(\omega)$ — спектральные плотности моментов трения по осям кардана подвеса.

Ошибки определения вертикали с помощью импульсной РВ [7, 29] подразделяются на аппаратные ошибки, ошибки, обусловленные структурой сигнала, зависящей от способа сканирования поверхности планеты; внешние (неровности поверхности планеты, влияние атмосферы и др.).

При анализе статистических характеристик и ошибок РВ их обычно разбивают на группы в зависимости от длительности их корреляционных связей:

а) слабокоррелированные или независимые ошибки (время корреляции порядка десятков микросекунд). Вызываются флуктуациями сигнала в результате отражения от поверхности планеты;

б) среднекоррелированные ошибки (время корреляции порядка единиц секунд). Вызываются, в основном, нестабильностью передающего и приемного трактов РВ;

3) сильнокоррелированные ошибки (время корреляции порядка десятков минут и более). Вызываются изменениями характера отражения по трассе полета КА, неточностью стабилизации оси диаграммы направленности, флуктуациями задержки сигнала в трактах передатчика.

Тогда корреляционные функции отдельных источников ошибок РВ можно представить в виде

$$K_i(\tau) = D_i \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_i}\right|\right), \quad i=1, 2, 3, \quad (6.10)$$

где D_i — дисперсии источников ошибок; τ_i — интервал корреляции источника ошибок.

Корреляционная функция суммарной ошибки отдельного измерения высоты определится суммой корреляционных функций отдельных источников ошибок РВ;

$$K_{\Sigma}(\tau) = \sum_{i=1}^3 D_i \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_i}\right|\right),$$

а ошибка определения вертикали (в одной плоскости) и ее дисперсия запишутся в виде

$$\sigma_{\phi} = A\sigma_{\Sigma}; \quad D_{\phi} = A^2 D_{\Sigma}, \quad (6.11)$$

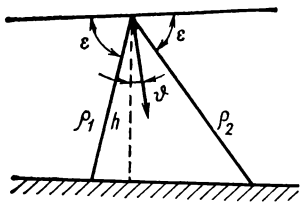


Рис. 6.6. Схема функционирования радиовертикали

где $A = \operatorname{tg} \epsilon \sin \epsilon/2h$; σ_{Σ} , D_{Σ} — суммарная среднеквадратичная ошибка и дисперсия отдельного измерения высоты. Положения углов ϵ и φ показаны на рис. 6.6.

Если принять $\epsilon = 70^\circ$, $\sigma_{\Sigma} = 60$ м, то для $H = 250$ км величина σ_{Φ} , рассчитанная по формуле (6.11), будет несколько больше 1'. Таким образом, точность работы РВ над ровной поверхностью может составлять единицы угловых минут.

Спектральная плотность ошибок определения вертикали $S_{\Phi}(\omega)$ определяется через спектральную плотность ошибок измерения высоты $S_h(\omega)$:

$$S_{\Phi}(\omega) = A^2 S_h(\omega); \quad (6.12)$$

$$S_h(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^3 D_i \exp(-\beta_i |\tau|) \right] \cos \omega \tau d\tau = \sum_{i=1}^3 \frac{D_i \beta_i}{\pi(\beta_i^2 + \omega^2)}, \quad (6.13)$$

где $\beta_i = 1/\tau_i$.

Так как значение $\beta_1 = 1/\tau_1$ велико, то $S_{h_1}(\omega)$ можно рассматривать как спектральную плотность белого шума:

$$S_{h_1}(\omega) = \frac{1}{2\pi} C, \quad \text{где } C = 2D_1/\beta_1.$$

Зная конкретные значения D_i и β_i , с помощью выражения (6.13) можно получить окончательное выражение для спектральной плотности ошибки определения вертикали $S_{\Phi}(\omega)$, где φ соответствует углу α или β из выражения (6.9) для соответствующей плоскости отсчета. Если задать характеристики групп ошибок РВ: $\sigma_1 = 5$ м, $\tau_1 = 10^{-4}$, $\sigma_2 = 30$ м, $\tau_2 = 1$ с, $\sigma_3 = 20$ м, $\tau_3 = 500$ с, то после проведения необходимых преобразований получим следующее выражение для $S_{\Phi}(\omega)$:

$$S_{\Phi}(\omega) \approx \frac{2,35}{h^2} \frac{\sigma_1 25\omega^4 + 900\omega^2 + 0,8}{\omega^4 + \omega^2 + 4 \cdot 10^{-6}}. \quad (6.14)$$

Оценим вклад ошибок гироорбитанта в общую точность построителя вертикали.

Ошибки гироскопических датчиков (ГД) зависят от конструктивного выполнения (кинетического момента ротора, типа подвеса, способа съема сигнала, тщательности балансировки и т. д.) и условий, в которых они работают. Рассмотрим в первом приближении статистические характеристики ГД. При этом будем предполагать, что начальной балансировкой ГД перед его использованием устранена систематическая составляющая ухода гироскопа.

Тогда общее выражение для случайной составляющей момента $M(t)$, действующего по оси вращения внутреннего карданова кольца, может быть представлено в виде

$$M(t) = M_n(t) + M_r(t) + M_b(t),$$

где M_H — момент неуравновешенности гиروزла; M_T — момент сил трения в оси вращения внутреннего карданова кольца; M_B — другие возмущающие моменты (моменты сопротивления токопроводов, реактивные моменты в датчике моментов системы коррекции и т. п.).

Уход ГД, вызванный возмущающими моментами, равен

$$\gamma = \frac{1}{H} \int_0^t M(\tau) d\tau,$$

где H — кинетический момент ротора.

Для анализа точности гиросорбитанта рассмотрим гироскопы в шарикоподшипниковом подвесе типа «роторейс», позволяющем при тех же габаритных размерах и незначительном увеличении массы гироскопа уменьшить его уход более чем на порядок по сравнению с уходом гироскопа при обычных подшипниках. Наиболее существенной особенностью такого подвеса является то, что дисперсия ухода гироскопа из-за знакопеременной составляющей момента трения не растет пропорционально времени, как это происходит при случайных колебаниях объекта и при отсутствии вращения опор.

В работе [63] на основании обработки экспериментальных данных было определено, что случайная составляющая момента трения подвеса «роторейс» является нормальной случайной величиной с корреляционной функцией вида

$$K_{M_T}(\theta) = \sigma_{M_T}^2 \exp(-n|\theta|) \cos \lambda\theta, \quad (6.15)$$

где θ — угол поворота наружного кольца подшипника относительно внутреннего, градус.

Параметры корреляционной функции имеют в среднем следующие значения: $\sigma_{M_T}^2 = 3,85 \cdot 10^{-10} (\text{Н} \cdot \text{м})^2$, $n = 34,4$ градус $^{-1}$, $\lambda = 74,3$ градус $^{-1}$.

Корреляционной функции (6.15) соответствует спектральная плотность

$$S_M(\omega) = \frac{\sigma_{M_T}^2 n}{\pi} \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \quad (6.16)$$

где $a = n^2 - \lambda^2$; $b^2 = n^2 + \lambda^2$.

С учетом выражений для спектральных плотностей возмущающих моментов гиросорбитанта (6.16) и ошибок определения вертикали РВ (6.14) дисперсии угловых погрешностей гиросорбиты записываются в виде

$$D(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega^4 + \omega^4} \left[\left(\mu^2 + \omega^2 + \frac{2Q^2\omega^2}{\omega_{z_0}^2} \right) \frac{2,76}{H^2} \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4} + \right. \\ \left. + \frac{3,76\omega^2}{h^2} \left(\frac{1,0075 + 1881\omega^2}{\omega^4 + \omega^2 + 4 \cdot 10^{-6}} \right) \left(\mu^2 + \omega^2 + \frac{2Q^2\omega^2}{\omega_{z_0}^2} \right) \right] d\omega;$$

$$D(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega^4 + \omega^4} \left[\frac{2,76}{H^2} \left(\omega^2 + \omega_{z_0}^2 \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3,76}{h^2} \omega^2 (\omega^2 + \omega_{z_0}^2) \left(\frac{1,0075 + 1881\omega^2}{\omega^4 + \omega^2 + 4 \cdot 10^{-6}} \right) \right] d\omega; \\ D(\vartheta) = D(\alpha) + D(\beta). \quad (6.17)$$

Расчитанные по зависимостям (6.17) оценки точности построения орбитальной системы координат ($3\sigma_\vartheta$) с помощью гироорбиты приведены в табл. 6.4.

Достаточно высокая точность построителей орбитальной системы координат с РВ достигается за счет увеличения мощности передатчика, что связано с увеличением габаритных размеров и массы аппаратуры. Оценку необходимой мощности передатчика РВ можно произвести следующим образом.

Известно, что в импульсных РВ мощность принимаемого сигнала может быть оценена по формуле [17]:

$$P_{\text{пр}} = \frac{2P_{\text{и}}G_0\lambda^2km_0}{(4\pi)^2h^2}, \quad (6.18)$$

где $P_{\text{и}}$ — импульсная мощность; G_0 — коэффициент усиления антенны; m_0 — коэффициент обратного рассеивания; $k = 0,5 \dots 0,67$ — коэффициент формы диаграммы направленности антенны; h — высота орбиты.

Коэффициент усиления G_0 обычно выражают через эффективную поверхность антенны $S_{\text{эф}}$:

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{эф}} \eta_a,$$

где η_a — КПД антенны (для зеркальных антенн $\eta_a \approx 1$).

Тогда зависимость (6.18) можно переписать в виде

$$P_{\text{и}} = \frac{2\pi h^2 P_{\text{пр}}}{km_0 S_{\text{эф}}}. \quad (6.19)$$

Результаты расчета требуемой мощности передатчика и массы его аппаратуры (Q) по формуле (6.19) приведены в табл. 6.5, где τ — время прохождения электромагнитного излучения до поверхности планеты и обратно; P_∞ — мощность непрерывного излучения; Q [кг] $\approx 0,6 P_{\text{и}}$ [Вт] [88]. При расчете использовали следующие ис-

Таблица 6.4

Ошибка	Высота h , км						
	500	1000	2000	5000	10000	20000	40000
$3\sigma_\vartheta$, рад	0,016	0,0085	0,0046	0,0023	0,0015	0,001	0,0008

Таблица 6.5

Параметр	h, км						
	500	1000	2000	5000	10000	20000	40000
τ , мс	3,34	6,66	13,32	33,3	66,6	132,2	266,4
$P_{\text{и}}$, кВт	124	500	2000	$1,25 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$
P_{∞} , Вт	37,4	75,8	150	376	758	1500	3000
Q, кг	22,4	45,5	90	224	455	900	1800

ходные данные: $S_{\text{эф}} = 0,021 \text{ м}^2$; $P_{\text{пр}} = 10^{-10} \text{ Вт}$, длительность импульса — 10^{-6} с .

Из табл. 6.5 следует, что возможность применения гироорбиты с РВ может быть существенно ограничена как весовыми характеристиками РВ, так и массой гироорбитанта.

6.4. ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ АБОНЕНТОВ В ПЛОСКОСТИ ПОИСКА

Учет влияния относительного движения абонентов

Успешное решение различных задач поиска во многом определяется распределением поисковых усилий в пределах ЗН абонента. Поэтому необходимо иметь некоторые априорные сведения о предполагаемом местоположении искомого КА. Обычно эти сведения носят вероятностный характер, определяя, например, плотность распределения $\varphi(x)$ вероятностей появления КА в точке x его ЗН.

Функция $\varphi(x)$ может быть определена на основе предыдущего опыта, теоретически, при помощи косвенных оценок или использованием информации, получаемой в процессе работы системы поиска, т. е. текущей информации. Специфика исследования процесса установления связи в космических лазерных системах, связанная со сложностью получения достаточного экспериментального материала, оправдывает стремление получить априорные теоретические характеристики ЗН, основанные на использовании моделей различной степени сложности. Данные модели должны учитывать рассмотренные в предыдущих разделах источники возникновения ЗН, а также влияние относительного движения абонентов и конечного времени распространения оптического излучения.

При большой протяженности оптических линий связи, когда время распространения оптического излучения становится значительным, а скорости относительного движения достаточно велики, поиск в ЛИС осложняется за счет эффекта скоростной абберации, в результате которого направление луча передатчика не совпадает с направлением приема [16, 112]. На рис. 6.7 показано взаимное положение двух КА (A и B) в последовательные моменты времени t_0 , t_1 , t_2 , разделенных интервалами $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1$. Оптический сиг-

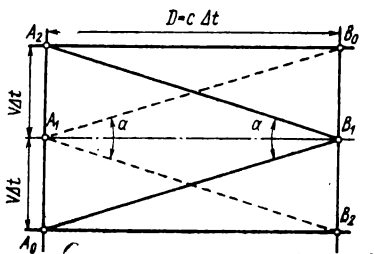


Рис. 6.7. Схема для определения угла упреждения в системах связи «КА—КА»

Таблица 6.6

Высота орбиты КА, км	Максимальная угловая скорость относительного движения КА, мкрад/с	
	геостационарного	низкоорбитального
105	219	1408
556	215	1308
1850	205	1052

нал из A_0 достигает B в момент t_1 , когда A перемещается в точку A_1 . Чтобы отраженный (переизлученный) сигнал мог быть снова принят A , необходимо в момент t_1 наводить антенну B в точку A_2 . Угол упреждения (аберрации) α , необходимый для осуществления связи при взаимно перемещающихся КА, определяется отношением скоростей и не зависит от расстояния:

$$\alpha \approx 2V_T/c,$$

где V_T — тангенциальная скорость взаимного перемещения КА; c — скорость света.

Очевидно, что при посылке сигнала из A в B необходимо делать аналогичное упреждение, поскольку для наблюдателя в A точка B кажется движущейся в противоположном направлении.

Для оценки величин скоростей относительного движения V_T , которые могут быть в ЛИС, в табл. 6.6 приведены значения угловых скоростей движения КА в системе связи «низкоорбитальный КА — геостационарный КА» [45].

Станция на геостационарном КА должна отслеживать скорости в пределах от 0 до 220 мкрад/с, тогда как низколетящий КА должен отслеживать скорости, изменяющиеся от 0 до 1410 мкрад/с.

Если угол α не укладывается в ширину посылаемого луча (см. рис. 6.7), то необходимо вводить компенсирующее смещение между линией отслеживаемого положения объекта и направлением наведения передатчика. Принимая во внимание другие источники ошибок, можно считать, что допустимая ошибка от этого эффекта не должна превышать $1/4$ длины луча [112].

Приведенные данные об особенностях организации связи в ЛИС свидетельствуют о том, что если не учитывать эффект скоростной аберрации (СА), то это может привести к существенным нарушениям работы ЛИС вплоть до срыва режимов поиска и сопровождения.

Рассмотрим возможные пути компенсации эффекта СА в ЛИС (рис. 6.8). Наиболее очевидными путями компенсации эффекта СА в режиме поиска являются отслеживание относительного движения КА и расширение зоны поиска на величину относительного перемещения абонентов [16, 111].

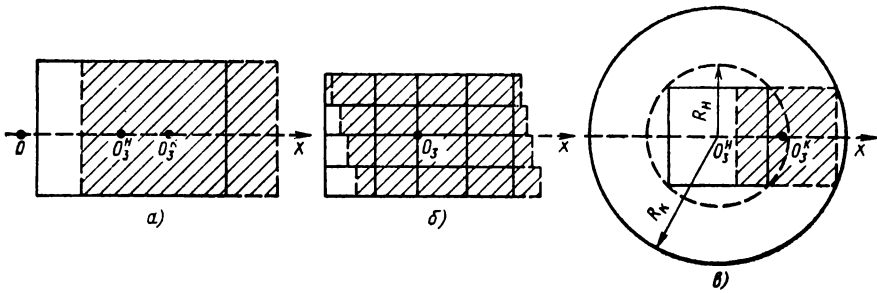


Рис. 6.8. Способы компенсации СА:

a — отслеживание положения центра зоны поиска; *б* — изменение размеров зоны в процессе поиска; *в* — расширение широкого луча

При первом методе (см. рис. 6.8, *a*) центр зоны поиска последовательно перемещается из начального (O_3^H) в конечное положение (O_3^K) вдоль орбиты КА (Ox). Для реализации данного метода необходимо располагать вычислительным устройством, а также данными от эфемериды КА от наземного измерительного комплекса [112].

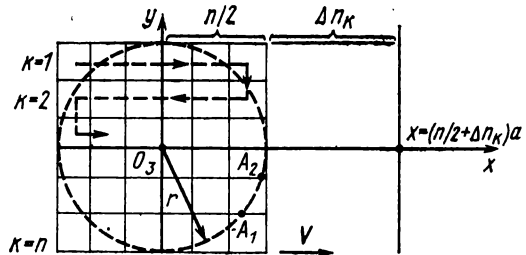
Второй метод компенсации эффекта СА (см. рис. 6.8, *б*) предполагает последовательное изменение положения строк кадра по мере сканирования всей зоны поиска. Для получения основных соотношений данного метода предположим, что зона поиска абонента имеет вид, показанный на рис. 6.9.

При поиске сканированием луч передатчика последовательно осматривает все ячейки зоны поиска в указанном направлении (см. рис. 6.9). Если КА-абонент перемещается в плоскости поиска с относительной скоростью V , то в момент просмотра k -й строки ($k=1, 2, \dots, n$) произойдет смещение статистической картины начального распределения положения абонента в этой строке на величину Vt_{k-1} , где t_{k-1} — время осмотра лучом ($k-1$) строк.

Чтобы предотвратить выход абонента за пределы зоны поиска в результате его относительного движения, необходимо увеличить k -ю строку на соответствующее количество Δn_k элементов. Увеличение каждой строки кадра сканирования можно определить из условия совпадения отмеченных на рис. 6.9 точек окружности A_k (границы расчетной зоны поиска) с линией $x\left(\frac{n}{2} + \Delta n_k\right)a$, где a —

Рис. 6.9. Изменение размеров зоны неопределенности в процессе поиска.

O_3 — расчетная точка положения КА на орбите; $r = \frac{n}{2}\theta R$ — радиус зоны поиска (θ — угол видимости зоны поиска со стороны второго абонента); n^2 — количество элементарных ячеек зоны поиска; V — скорость относительного движения КА в плоскости поиска



линейный размер элемента сканирования. Для этого необходимо в уравнение движения окружности

$$(x - Vt_k)^2 + y^2 = \left(\frac{n}{2} \theta R\right)^2 \quad (6.20)$$

подставить координаты соответствующих точек A_k :

$$x_k = \left(\frac{n}{2} + \Delta n_k\right) a, \quad y_k = \left(\frac{n}{2} - k\right) a. \quad (6.21)$$

Решив уравнение (6.21) относительно Δn_k , получим

$$\Delta n_k = \frac{Vt_k}{a} - \frac{n}{2} + \sqrt{k(n-k)}. \quad (6.22)$$

Поскольку время анализа ячейки при отсутствии в ней сигнала является случайной величиной, то для указанного на рис. 6.9 закона осмотра ячеек и кадра размером $(n \times n)$ ячеек время осмотра каждой строки можно выразить следующей зависимостью:

$$t_k = \tau_i k_n + \tau_i \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^{k/2+1} \Delta n_{2i+1}, & k - \text{четное;} \\ 2 \sum_{i=0}^{(k-3)/2} \Delta n_{2i+1} + \Delta n_k, & k - \text{нечетное,} \end{cases} \quad (6.23)$$

где τ_i — среднее время анализа i -й ячейки, зависящее от вероятностей ложного срабатывания F_i предварительных ступеней анализа сигнала.

Например, при двухступенчатой процедуре обнаружения с идеальной 2-й ступенью $\tau_i = t_1 + F_1 t_2$, где t_i — время анализа на i -й ступени [14].

Подстановкой выражения (6.23) в уравнение (6.22) определяет необходимое для компенсации эффекта СА увеличение каждой строки кадра.

Поскольку реализовать рассмотренный алгоритм компенсации аппаратно затруднительно, его можно упростить, если все строки кадра увеличить на число ячеек, соответствующее строке k_n с максимальным приращением Δn_{\max} .

Для определения Δn_{\max} приравняем нулю производную от выражения (6.22) по k :

$$\frac{\partial n}{\partial k_m} = \chi \tau_i n + \frac{1}{2} \frac{n - 2k_m}{\sqrt{k(n-k)}} = 0,$$

где $\chi = V/a$.

Отсюда

$$k_m^2 - nk_m + \frac{n^2}{4 + B^2} = 0,$$

где $B = 2\chi \tau_i n$.

Учитывая, что строка k_m должна находиться в нижней полуплоскости зоны поиска, окончательно получим

$$k_m = \frac{n}{2} \left(1 - \chi \tau_i n \sqrt{\frac{1}{1 + (\chi \tau_i n)^2}} \right). \quad (6.24)$$

По выражению (6.24) могут быть построены графические зависимости, позволяющие определить номер строки максимальной длительности (рис. 6.10). Общий вид зависимости $\Delta n(k)$ приведен на рис. 6.11.

Таким образом, для компенсации эффекта СА вторым методом необходимо по приведенным зависимостям определить дополнительное количество ячеек в каждой строке Δn_k или номер строки с максимальным приращением ячеек k_m и соответствующее ему максимальное приращение Δn_{\max} .

Третий метод компенсации эффекта СА (см. рис. 6.8, в) применим при поиске широким лучом [109] и заключается в последовательном увеличении радиуса зоны поиска от R_n до R_k . За критерий эффективности метода можно принять величину энергии в импульсе передатчика, необходимую для качественного функционирования приемника абонента.

В качестве примера рассмотрим линию связи «низкоорбитальный КА — геостационарный КА».

Для расчета воспользуемся зависимостью (5.1) при следующих исходных данных: $P_{\text{пр}} = 3 \cdot 10^{-6}$ Вт; $\tau_n = 10^{-8}$ с; $D = 0,35$ м; $\tau_{\text{отв}} = 0,21$, $\theta_0 = 6 \cdot 10^{-5}$ рад. При этом будем полагать, что в процессе поиска происходит расширение диаграммы направленности передатчика по линейному закону:

$$\theta = \theta_0 + \dot{\theta} t,$$

где $\dot{\theta}$ — угловая скорость относительного движения КА.

Результаты расчета для нескольких значений дальности связи L и угловой скорости $\dot{\theta}$, приведенных в табл. 6.7, показаны на рис. 6.12 (кривые 1... 4).

Из графиков (рис. 6.12) следует, что для компенсации эффекта СА расширением луча могут потребоваться такие энергетические характеристики передатчика, которые на современном уровне развития техники реализовать весьма сложно.

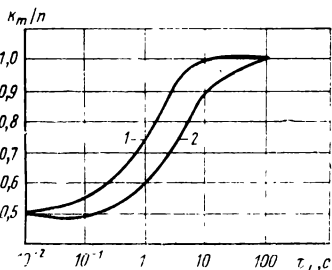


Рис. 6.10. Определение строки максимальной длительности:
1 — $\chi = 0,5$; 2 — $\chi = 0,125$

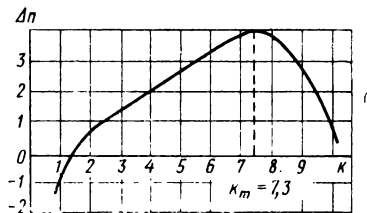


Рис. 6.11. Зависимость приращения длительности строки от ее номера

Таблица 6.7

№ по пор.	$L \cdot 10^7$, км	$\dot{\theta}$, мрад/с
1	4,9	1
2	4,7	1,2
3	4,7	1,27
4	3,6	3,7

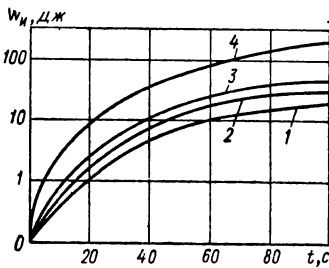


Рис. 6.12. Зависимость энергии передатчика, необходимой для компенсации СА методом расширения луча от времени

Один из возможных методов компенсации эффекта СА в процессе сопровождения поясняется рис. 6.13 [112]. Пусть орбита абонента A радиуса r лежит в картинной плоскости M поисковой антенны абонента B , а A_0, A_1, A_2 — последовательные положения A , разделенные интервалами времени Δt . Из рис. 6.13 следуют геометрические зависимости:

$$\overline{A_0 A_2} = 2 r \sin \omega \Delta t; \alpha = 2 r \sin \omega \Delta t / D,$$

где α — угол упреждения; ω — угловая скорость движения КА на орбите.

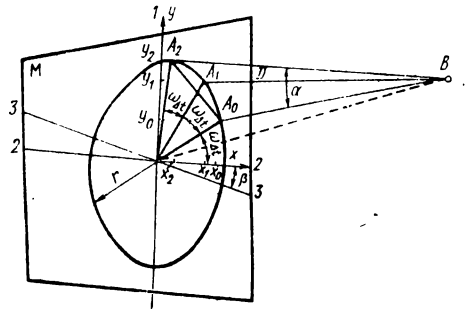


Рис. 6.13. Схематическое представление компенсации СА при сопровождении

Прямоугольные координаты текущей (A_0) и упрежденной (A_2) точек соответственно запишутся в виде

$$x_0 = r \cos \omega t; y_0 = r \sin \omega t;$$

$$x_2 = r \cos \omega (t + 2\Delta t); y_2 = r \sin \omega (t + 2\Delta t).$$

В общем случае плоскость орбиты будет составлять угол β с плоскостью, перпендикулярной линии визирования, а орбита будет казаться эллипсом с осями, направленными вдоль осей 1—1 и 3—3. В этом случае кажущееся положение КА задается координатами

$$x_0 = r \cos \omega t \cos \beta; y_0 = r \sin \omega t,$$

а упрежденная точка — координатами

$$x_2 = r \cos \omega (t + 2\Delta t) \cos \beta; y_2 = r \sin \omega (t + 2\Delta t).$$

При сопровождении обычно вектор упреждения $\overline{A_0 A_2}$ связывают непосредственно с положением A . В этой системе отсчета координаты точки A_2 имеют вид

$$x(A) = r \cos \beta [\cos \omega (t + 2\Delta t) - \cos \omega t];$$

$$y(A) = r [\sin \omega (t + 2\Delta t) - \sin \omega t].$$

Из приведенных зависимостей следует, что точность поправки на СА и время прохождения сигнала зависит от точности ориентации оптических систем, обуславливающей величину угла β .

Простейшим компенсирующим устройством может быть призма, устанавливаемая в кардановом подвесе на выходе оптической системы передатчика (рис. 6.14). Такая система обеспечивает линейное смещение d падающего луча, рассчитываемое по следующей зависимости:

$$d = T \left(\sin i - \frac{\sin i}{2(n^2 - \sin^2 i)^{1/2}} \right),$$

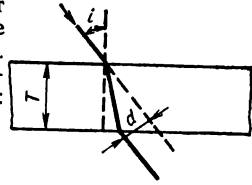


Рис. 6.14. Устройство компенсации СА

где n — показатель преломления; T — толщина преломляющего устройства.

Данная система является линейной с точностью 1% в пределах угла наклона призмы 15° .

Моделирование характеристик относительного движения абонентов в картинной плоскости наблюдателя

Основу теоретического анализа статистических характеристик ЗН составляет исследование источников возникновения ЗН и эффекта скоростной аберрации. Однако проведение исследования аналитическими методами сопряжено с преодолением больших трудностей.

Эти трудности объясняются, в первую очередь, сложностью аналитических зависимостей и громоздкостью вычислительных преобразований. Другое ограничение связано со сложностью единого представления возмущений, действующих на свободное движение КА.

Анализ источников, вызывающих отклонение КА от его расчетного положения (см. разд. 6.2, 6.3), показывает, что возмущающие силы имеют как случайный (ошибки вывода на орбиту, определения параметров движения, систем наведения, точность знания сил, влияющих на свободный полет КА), так и детерминированный характер (силы, влияющие на свободный полет КА). Поскольку характеристики рассеивания положения объекта необходимо определить для «картинной» плоскости (КП) в системе координат одного из абонентов, то общий метод решения данной задачи может быть следующим.

Полагая все источники отклонений независимыми, необходимо найти композицию всех соответствующих законов распределения, например, в абсолютной геоцентрической системе координат, произвести линейное преобразование над суммарным законом распределения, пересчитав его в орбитальную систему координат одного из абонентов, а затем «спроектировать» полученный закон распределения на КП данного КА.

Основная трудность такого аналитического преобразования заключается в следующем. Отклонение КА из-за неучитываемых при прогнозировании сил есть немонотонная функция случайного аргумента, которым является само положение КА на расчетной орбите, т. е.

$$U = \varphi(\vartheta),$$

где $U = \Delta l, \Delta n, \Delta z$; ϑ — случайное значение угловой аномалии.

Тогда функция распределения величины u имеет вид

$$G(u) = P(U < u) = \sum_i \int_{\Delta_i(u)} f(\vartheta) d\vartheta,$$

где $f(\vartheta)$ — плотность распределения случайной величины ϑ ; $\Delta_i(u)$ — участки оси абсцисс, для которых выполняется условие $U < u$ (рис. 6.15).

Границы интервалов $\Delta_i(u)$ зависят от величины u и, при заданном виде функции $u = \varphi(\vartheta)$ должны быть выражены как явные функции. Это необходимо, для того чтобы при интегрировании можно было бы выразить верхний предел интегрирования ϑ через u :

$$\vartheta = \psi(u),$$

где ψ — функция, обратная функции φ [12].

Ввиду сложности реальных функциональных зависимостей вида $U = \varphi(\vartheta)$ (см. формулы 6.4) получить соответствующие обратные функции не представляется возможным.

Существенным ограничением является и то, что аналитический подход к исследованию статистических характеристик ЗН требует конкретизации условий функционирования ЛИС, что исключает возможность получения общих решений, выводов и рекомендаций.

Из изложенного следует, что наиболее целесообразным методом решения поставленной задачи является метод экспериментального исследования, а именно метод статистического моделирования. При этом модель механизма образования ЗН должна учитывать:

законы движения КА;

влияние факторов, возмущающих расчетное движение объектов;

относительное движение КА;

влияние факторов, ухудшающих точность ориентации и стабилизации оптических антенн;

возможность исследования характеристик ЗН в линиях связи различного назначения.

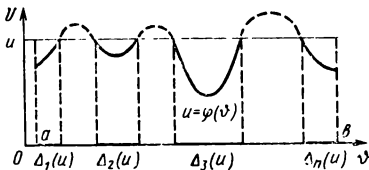


Рис. 6.15. Номонотонная функциональная зависимость

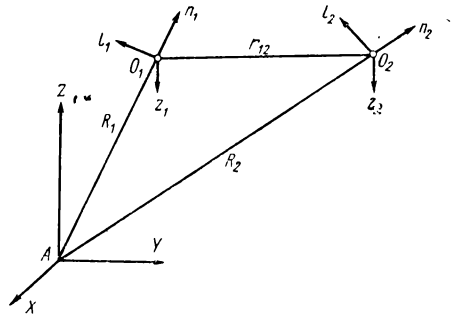


Рис. 6.16. Геоцентрическая и орбитальная системы координат

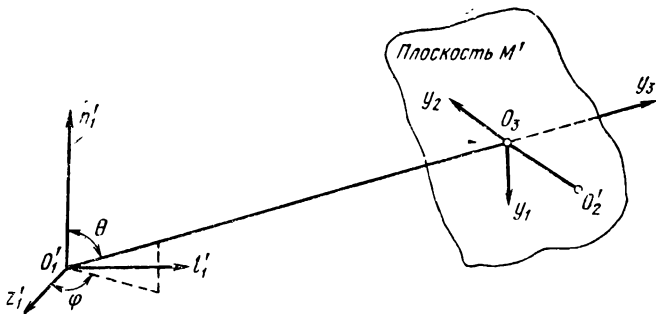


Рис. 6.17. Координаты в картинной плоскости

Для исследования характеристик ЗН воспользуемся следующими системами координат (рис. 6.16):

1) абсолютной геоцентрической $AXYZ$ с началом в центре Земли, плоскостью XAY , совпадающей с плоскостью экватора, и осью AZ , направленной в северное полушарие;

2) подвижной орбитальной $Olnz$ с началом в центре масс КА, осью On , направленной вдоль местной вертикали, плоскостью nOl , совпадающей с плоскостью орбиты, и осью Ol , направленной в сторону движения КА;

3) сферической с началом в точке O орбитальной системы координат, направление на объект в которой характеризуется азимутом φ и углом места θ . (рис. 6.17).

При движении объекта в центральном поле тяготения Земли плоскость его орбиты проходит через центр Земли и характеризуется наклоном орбиты i и долготой восходящего узла Ω . Положение КА при его движении по орбите будет задаваться как величиной угловой аномалии u , отсчитываемой от линии узлов, так и временем движения от момента прохождения экватора.

В соответствии со сделанными предположениями дифференциальные уравнения кругового движения в абсолютной геоцентрической системе координат имеют вид [87]

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z, \quad \dot{v}_x = -\mu \frac{x}{R^3}, \quad (6.25)$$

$$\dot{v}_y = -\mu \frac{y}{R^3}, \quad \dot{v}_z = -\mu \frac{z}{R^3},$$

где $v_x, v_y, v_z, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z$ — скорости и ускорения по соответствующим осям абсолютной геоцентрической системы координат; μ — произведение постоянной тяготения на массу Земли (см. разд. 6.1); R — радиус орбиты КА.

Начальные условия, необходимые для интегрирования уравнений (6.25), определяются в точке $u=0$:

$$\begin{aligned}x_0 &= R \cos \Omega, & y_0 &= R \sin \Omega, \\z_0 &= 0, & v_{x_0} &= -v_k \cos i \sin \Omega, \\v_{y_0} &= v_k \cos i \cos \Omega, & v_{z_0} &= v_k \sin i,\end{aligned}\quad (6.26)$$

где $v_k = \sqrt{\mu/R}$ - скорость КА на круговой орбите.

Для определения относительных координат одного КА в орбитальной системе другого необходимо вычислить элементы матрицы A перехода от абсолютной геоцентрической к орбитальной системе координат:

$$A = \begin{bmatrix} -\sin \Omega \sin i & \cos \Omega \sin i & -\cos i \\ -\sin \Omega \cos i \cos u - \cos \Omega \cos i \cos u - \sin i \cos u & \cos \Omega \cos i \cos u - \sin i \cos u & \\ -\cos \Omega \sin u & -\sin \Omega \sin u & \\ -\sin \Omega \cos i \sin u + & \cos \Omega \cos i \sin u + \sin i \sin u & \\ + \cos \Omega \cos u & + \sin \Omega \cos u & \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Величина угловой аномалии u определяется по известным координатам КА в абсолютной геоцентрической системе координат:

$$\sin u = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C. \quad (6.28)$$

Для упрощения вычисления u по зависимости (6.28) удобно перейти к новым геоцентрическим координатам объекта (x_1, y_1, z_1) , которые получаются совмещением оси Ax системы $AXYZ$ с линией узлов орбиты:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Получающиеся при этом значения u сведены в табл. 6.8.

Таблица 6.8

x_1, y_1	u
$x_1 \geq 0 \wedge y_1 \geq 0$	$u_0 = \arcsin C$
$x_1 < 0 \wedge y_1 \geq 0$	$\pi - u_0$
$x_1 < 0 \wedge y_1 < 0$	$\pi + u_0$
$x_1 \geq 0 \wedge y_1 < 0$	$2\pi - u_0$

Таблица 6.9

Координаты	Углы
$n_1 < 0$	$\theta' = \pi - \theta$, где
$z_1 < 0$	$\theta = \arcsin C_1$
	$\varphi' = \pi - \varphi$
$z_1 > 0 \wedge$	$\varphi' = 2\pi + \varphi$, где
$\wedge l_1 < 0$	$\varphi = \arcsin C_2$

Относительные координаты вычисляются по формуле (см. рис. 6.16)

$$\overline{O_1O_2} = A_1(\overline{AO_2} - \overline{AO_1}), \quad (6.29)$$

где A_1 — матрица перехода от системы координат $AXYZ$ к системе $O_1l_1n_1z_1$.

С помощью формулы (6.29) можно вычислить углы θ и φ , определяющие ориентацию линии визирования:

$$\begin{aligned} \overline{O_1O_2} &= (l_1, n_1, z_1); \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{l_1^2 + z_1^2}}{\sqrt{l_1^2 + n_1^2 + z_1^2}} = C_1; \\ \sin \varphi &= \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + z_1^2}} = C_2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Условию $l_1^2 + z_1^2 = 0$ соответствует $\theta = \varphi = 0$.

Неоднозначность расчетов устраняется в соответствии с табл. 6.9.

Знание этих данных позволяет определить скорость второго КА (точка O_2 на рис. 6.16) относительно неинерциальной системы координат $O_1l_1n_1z_1$. На основании законов сложного движения материальной точки можно получить

$$V^{\text{отн}} = V_2 - V_1 - (\omega \times r_{12}), \quad (6.31)$$

где ω — вектор угловой скорости системы $O_1l_1n_1z_1$ относительно системы $AXYZ$; V_1, V_2 — векторы абсолютных скоростей точек O_1 и O_2 . Для вычисления ω используются кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_{z_1} &= -\dot{\Omega}_1 \cos i_1 - \ddot{u}_1; \\ \omega_{l_1} &= \dot{\Omega}_1 \cos u_1 \sin i_1 - \dot{J}_1 \sin u_1; \\ \omega_{n_1} &= \dot{\Omega}_1 \sin u_1 \sin i_1 + \dot{J}_1 \cos u_1, \end{aligned}$$

где $J_{z_1}, \omega_{l_1}, \omega_{n_1}$ — проекции вектора ω на оси системы $O_1l_1n_1z_1$; Ω_1, J_1, u_1 — расчетные параметры движения первого КА ($J_1 \equiv i_1$).

Для малого времени установления связи Ω и J являются постоянными, т. е. $\dot{\Omega} = \dot{J} = 0$. Тогда проекции векторов уравнения (6.31) на оси системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} V_{z_1}^{\text{отн}} &= (V_2)_{z_1}; \\ V_{l_1}^{\text{отн}} &= (V_2)_{l_1} - (V_1)_{l_1} + (r_{12})_{n_1} \omega_{z_1}; \\ V_{n_1}^{\text{отн}} &= (V_2)_{n_1} - (r_{12})_{l_1} \omega_{z_1}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

При движении по круговым орбитам $|\omega| = \sqrt{\mu/R^3}$.

Аналогично можно получить зависимости для составляющих относительно ускорения $W^{\text{отн}}$:

$$W^{\text{отн}} = W_2 - 2(\omega \times V^{\text{отн}}) - W_1 - (\omega \times (\omega \times r_{12})),$$

где W_1 и W_2 — векторы абсолютных ускорений соответствующих КА.

Проекции $W^{\text{отн}}$ на оси системы $O_1 l_1 n_1 z_1$ имеют вид

$$W_{z_1}^{\text{отн}} = (W_2)_{z_1},$$

$$W_{l_1}^{\text{отн}} = (W_2)_{l_1} - (W_1)_{l_1} + 2\omega_{z_1} V_{n_1}^{\text{отн}} + \omega_{z_1}^2 l_1, \quad (6.33)$$

$$W_{n_1}^{\text{отн}} = (W_2)_{n_1} - (W_1)_{n_1} - 2\omega_{z_1} V_{l_1}^{\text{отн}} + \omega_{z_1}^2 n_1.$$

Как отмечалось в разд. 6.1, реальное положение КА-абонентов (точки O'_1 и O'_2 на рис. 6.19) отличается от расчетного (точки O_1 и O_2). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать орбитальные системы координат, связанные с реальным положением абонентов ($O'_1 l'_1 n'_1 z'_1$ и $O'_2 l'_2 n'_2 z'_2$).

Для оценки эффекта СА необходимо знать тангенциальные составляющие скорости движения КА в КП, т. е. проекции скорости $V^{\text{отн}}$ на оси прямоугольной системы координат $O_3 y_1 y_2 y_3$, две из которых (y_1 и y_2) лежат в КП M' , перпендикулярной линии визирования $O'_1 O_3$ (см. рис. 6.17). Переход от системы $AXYZ$ к орбитальной реальной положения КА осуществляется с помощью матрицы A' , которая, например, для первого КА, имеет вид:

$$A'_1 = M(\beta_1) M(u_1) M(i_1) M(\gamma_1) M(\Omega_1), \quad (6.34)$$

где

$$M(\beta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix}; \quad M(u_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u_1 & -\sin u_1 \\ 0 & \sin u_1 & \cos u_1 \end{bmatrix};$$

$$M(i_1) = \begin{bmatrix} \sin i_1 & -\cos i_1 & 0 \\ \cos i_1 & \sin i_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(\gamma_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$M(\Omega_1) = \begin{bmatrix} \cos \Omega_1 & \sin \Omega_1 & 0 \\ -\sin \Omega_1 & \cos \Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проекции скорости относительного движения на оси реальной орбитальной системы координат описываются формулами (6.32), однако правые части данных равенств включают проекции на оси системы $O'_1 l'_1 n'_1 z'_1$. Тогда составляющие скорости относительно-

го движения на оси системы $O_3y_1y_2y_3$ получаются из зависимости

$$\begin{bmatrix} V_{y_1} \\ V_{y_2} \\ V_{y_3} \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\theta, \varphi) \begin{bmatrix} V_{z_1} \\ V_{l_1} \\ V_{n_1} \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Матрица перехода $\mathbf{M}(\theta, \varphi)$ получается следующим образом. Реальные относительные координаты одного КА в орбитальной системе другого определяются из выражений

$$\begin{aligned} \overline{O_1 O_2} &= A_1'(\overline{AO_2} - \overline{AO_1}), \quad \overline{AO_1} = A_1^T \overline{O_1 O_2} + \overline{AO_1}, \\ \overline{AO_1} &= [x_1', y_1', z_1']^T, \end{aligned}$$

где индекс « T » определяет операцию транспонирования.

Угол β определяется по формуле (см. рис. 6.19)

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{z_1'^2 + l_1'^2}}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2}} = K,$$

где $\overline{O_1 O_1} = [n_1, l_1, z_1]^T$.

Неоднозначность расчетов устраняется по следующей схеме:

если $l_1 \geq 0$, то $\beta = \arcsin K$;

если $l_1 < 0$, то $\beta = -\arcsin K$.

Находим координаты точки пересечения линии визирования с КП (в системе $O_1 l_1 n_1 z_1$):

$$z'_{o_2} = C_1 \sin \theta \cos \varphi; \quad l'_{o_2} = C_1 \sin \theta \sin \varphi; \quad n'_{o_2} = C_1 \cos \theta,$$

где $C_1 = z'_{o_2} \sin \theta \cos \varphi + l'_{o_2} \sin \theta \sin \varphi + n'_{o_2} \cos \theta$.

Тогда координаты точки O_2 в системе $O_3y_1y_2y_3$ можно записать как

$$\overline{O_3 O_2} = M(\theta, \varphi)(\overline{O_1 O_2} - O_1 O_2),$$

где

$$\mathbf{M}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Окончательно составляющие относительного ускорения на оси системы $O_3y_1y_2y_3$ получаются из зависимости, аналогичной (6.35):

$$\begin{bmatrix} W_{y_1} \\ W_{y_2} \\ W_{y_3} \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\theta, \varphi) \begin{bmatrix} W_{z_1}^{\text{отн}} \\ W_{l_1}^{\text{отн}} \\ W_{n_1}^{\text{отн}} \end{bmatrix}.$$

Для определения параметров контура автосопровождения системы управления ЛИС необходимо иметь сведения об угловых перемещениях линии визирования, т. е. о скоростях и ускорениях изменения углов θ и φ .

Перевод линейных относительных скоростей и ускорений в угловые производится по следующим зависимостям [53]:

$$\dot{\theta} = V_{y_1}/r_{12}, \quad \dot{\varphi} = V_{y_2}/r_{12} \sin \theta, \quad (6.36)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{r_{12}} (W_{y_1} + r_{12} \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - 2V_{y_2} \dot{\theta}); \quad (6.37)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{r_{12} \sin \varphi} (W_{y_2} - 2V_{y_1} \sin \theta \dot{\varphi} - 2r_{12} \cos \theta \dot{\theta}),$$

где V_{y_3} — радиальная линейная скорость.

В соответствии с рассмотренным алгоритмом характеристики относительного движения абонента в КП наблюдателя могут быть определены на ЭВМ по программе, структурная схема которой приведена на рис. 6.18. Программа состоит из отдельных блоков (расчетного движения, учета возмущающих сил), позволяющих усложнить модель движения КА, максимально приближая ее к реальной.

По полученным значениям проекций скорости относительного движения на КП могут быть определены абберрационные углы по формуле $\Delta\theta = 2V_T/c$, где V_T — проекция скорости относительного движения КА на КП; c — скорость света.

В табл. 6.10 приведены некоторые результаты расчета V_T и $\Delta\theta$ с использованием рассмотренной выше модели для различных линий связи при следующих исходных данных: $i_{CA} = 77^\circ$; географическая широта наблюдательного пункта (НП) на поверхности Земли равна 45° ; наклонение орбиты СР, связанного с НП, равно 60° .

Как видно, величина углов упреждения $\Delta\theta$ сравнима с угловыми размерами диаграммы направленности лазера и в ряде случаев может ее значительно превосходить.

Таблица 6.10

Линия связи	H_{CA} , км	V_T , мрад/с	$\Delta\theta$, угл.с
СР—СА	130	160	8,8
	500	154	8,6
	1000	148	8,3
СА—СР	130	1220	78
	500	1100	69
	1000	1050	67
СР—СР		64	6,3
СР—НП		150	7,6

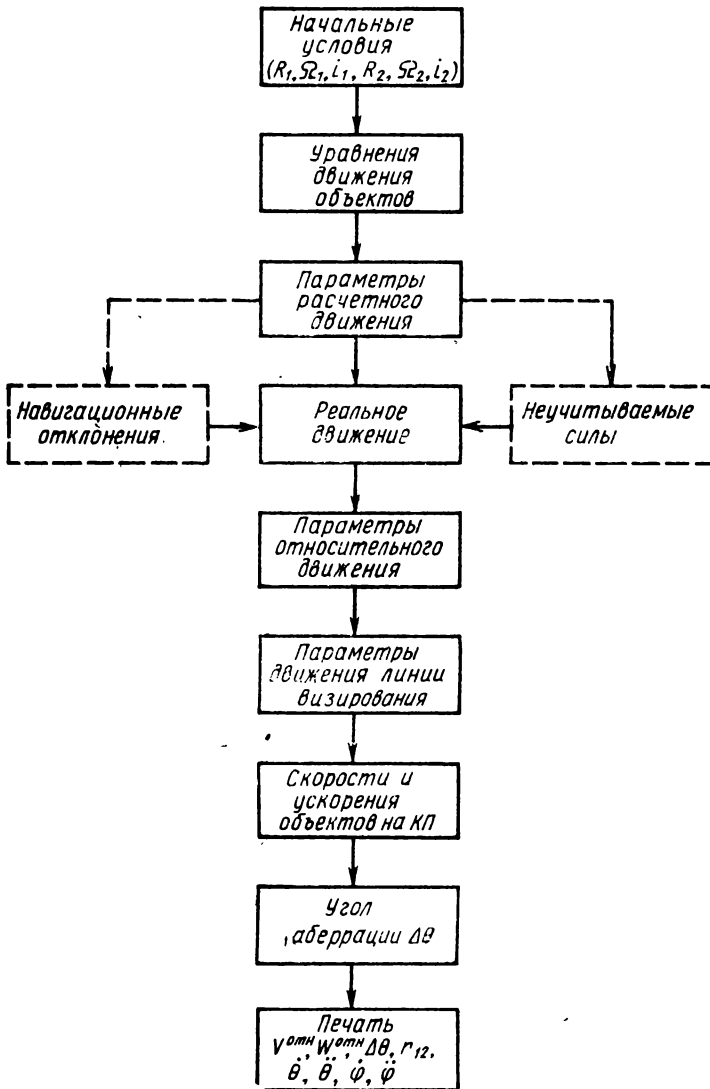


Рис. 6.18. Структурная схема моделирования относительного движения абонентов на ЭВМ

Моделирование образования зоны неопределенности положения абонентов

При поиске объекта по угловым координатам характеристики ЗН будут зависеть от характеристик рассеивания проекции реального положения объекта поиска на КП и от характеристик рассеивания точек пересечения линии визирования оптической антенны наблюдателя на этой плоскости.

Рассмотрим определение характеристик зоны неопределенности начального положения объекта в картинной плоскости. На рис. 6.19 показано взаимное положение абонентов 1 и 2 в момент начала поиска: O_1 и O_2 — расчетное положение; O'_1 и O'_2 — реальное положение в результате действия различных источников возмущающих сил; A — центр Земли.

Пусть расчетное положение линии визирования оптической антенны объекта 1 (КА-1) характеризуется ортом k^o и определяется углами θ и φ сферической системы координат. Тогда КП для КА-1 будет совпадать с плоскостью M , проходящей через расчетное положение КА-2 (точку O_2).

Поскольку реально углы θ и φ устанавливаются в системе координат $O'_1 l'_1 n'_1 z'_1$, совмещенной с реальным положением КА-1, то линия визирования антенны КА-1 (орт k^o_1) пересечется с реальной КП (плоскость M'), проходящей через реальное положение КА-2 (точку O'_2) в точке O_3 . Следовательно, неопределенность положения КА-2 относительно линии визирования оптической ан-

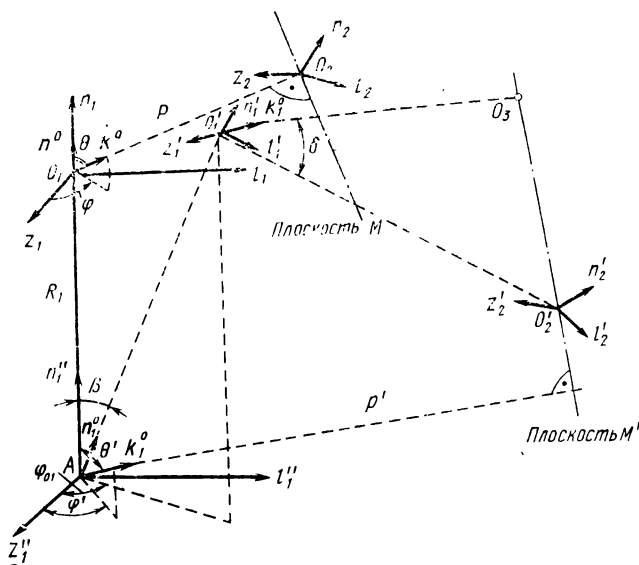


Рис. 6.19. Системы координат для определения зоны неопределенности начального положения абонентов

тенны КА-1 будет характеризоваться линейным промахом $O_2' O_3$, отсчитываемым в плоскости M' .

Необходимые для расчета характеристик промаха зависимости можно определить из следующих геометрических связей (см. рис. 6.19). Рассмотрим дополнительную орбитальную систему координат $A l_1'' n_1'' z_1''$, центр которой совмещен с центром Земли A , а оси параллельны осям орбитальной системы координат $O_1 l_1 n_1 z_1$ в момент начала поиска. Поскольку реальная линия визирования с КА-1 (орт k_1) устанавливается под расчетными углами θ и φ , но в реальной системе координат, то этим углам в исходной системе $A l_1'' n_1'' z_1''$ будут соответствовать углы θ' и φ' :

$$\theta' = \theta + \beta; \quad \varphi' = (\varphi_{01} + \varphi - \pi/2) \cos \gamma, \quad (6.38)$$

где $\varphi_{01} = \text{arctg}(l_1'/z_1')$; $\beta = \text{arctg}(\sqrt{l_1'^2 + z_1'^2}/(R_1 + n_1'))$; $\cos \gamma = n^\circ \times n_1^\circ/n^\circ n_1^\circ$; $n^\circ = (0, 1, 0)$ — орт расчетной линии визирования из точки A на КА-1; $n_1^\circ = (\sin \beta \sin \varphi_{01}, \cos \beta, \sin \beta \cos \varphi_{01})$ — орт реальной линии визирования из точки A на КА-1.

Реальное положение картинной плоскости M' можно определить из уравнения:

$$r_1'' k_1^\circ = p' = 0, \quad (6.39)$$

где $k_1^\circ = (\sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta', \sin \theta' \cos \varphi')$;

$$r_1'' = (l_1'', n_1'', z_1'');$$

p' — расстояние от A до плоскости M .

Точка пересечения O_3 реальной линии визирования определяется совместным решением уравнений картинной плоскости и линии, проходящей через точку O_1' параллельно направляющему вектору k_1 :

$$\frac{l_1'' - l_{O_1}'}{\sin \theta' \sin \varphi'} = \frac{n_1'' - n_{O_1}'}{\cos \theta'} = \frac{z_1'' - z_{O_1}'}{\sin \theta' \cos \varphi'}.$$

Определим реальное положение КА-2 — координаты точки O_2' . В абсолютной геоцентрической системе координат вектор $\overline{AO_2'}$ имеет вид

$$\overline{AO_2'} = A_2^T \overline{O_2 O_2'} + \overline{AO_2},$$

где $\overline{O_2 O_2'}$ — вектор смещения КА-2 относительно его расчетного положения O_2 .

Тогда координаты точки O_2' в системе $O_1' l_1' n_1' z_1'$ определяются следующим образом:

$$\overline{O_1' O_2'} = A_1^T (\overline{AO_2'} - \overline{AO_1'}); \quad \overline{AO_1'} = A_1^T \overline{O_1 O_1'} + \overline{AO_1};$$

$$\overline{O_1' O_2'} = (z_1', l_1', n_1'),$$

где матрицы A и A_1' определяются по зависимостям (6.27) и (6.34) соответственно, что позволяет найти угловое положение точки O_1' в этой же системе координат:

$$\theta_1' = \arcsin \left(\frac{\sqrt{z_1'^2 + l_1'^2}}{\sqrt{z_1'^2 + l_1'^2 + n_1'^2}} \right); \quad \varphi_1' = \arcsin \left(\frac{l_1'}{\sqrt{z_1'^2 + l_1'^2}} \right)$$

при устранении неоднозначности расчетов в соответствии с табл. 6.9.

Начальная неопределенность положения абонентов будет определяться пространственным «промахом», который равен углу δ между векторами $\overline{O_1'O_3}$ и $\overline{O_1'O_2'}$ (рис. 6.20):

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \sin(\theta_1 + \Delta\theta) \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) \sin \theta_1' \sin \varphi_1' + \\ &+ \cos(\theta_1 + \Delta\theta) \cos \theta_1' + \sin(\theta_1 + \Delta\theta) \cos(\varphi_1 + \Delta\varphi) \sin \theta_1' \cos \varphi_1'; \\ \delta &= \arcsin(\sqrt{1 - \cos^2 \delta}), \quad \delta < \pi/2, \end{aligned}$$

где θ_1, φ_1 — программные углы линии визирования из реального положения КА-1 (точка O_1'); $\Delta\theta, \Delta\varphi$ — составляющие ошибки ориентации линии визирования в сферической системе координат.

Таким образом, определив статистические характеристики рассеивания положений КА-1 и КА-2 в расчетный момент начала поиска и характеристики систем ориентации и стабилизации антенн, можно получить на КП статистическую картину взаимного положения линии визирования оптической антенны КА-наблюдателя и КА-абонента.

Полученные зависимости позволяют провести статистическое моделирование характеристик зоны поиска по следующей схеме:

рассчитать положение КА-1 и КА-2 на опорных орбитах (точки O_1 и O_2);

по известным характеристикам источников возмущающих сил получить реальное положение КА-1 и КА-2 в те же моменты времени (точки O_1' и O_2');

определить мгновенное положение реальной картинной плоскости M' ;

определить проекцию реального положения КА-2 на плоскость M' (точку O_2'');

определить положение точки O_3 и величину мгновенного промаха $O_2'O_3$.

Получая (от датчиков случайных чисел ДСЧ) различные значения положений точек O_1', O_2' и O_3 для каждого момента времени, можно определить статистический ряд для оценки характеристик промаха $O_2'O_3$. Обработка статистического ряда позволит определить характеристики промаха и зоны поиска в целом.

Так как промах — вектор, характеризуемый модулем $O_2'O_3$ и положением в плоскости M' , то для определения угла ориентации $\overline{O_2'O_3}$ целесообразно ввести прямоугольную систему координат $O_3y_1y_2$ в плоскости M' (рис. 6.21), оси которой можно направить вдоль векторов $\bar{\theta}^\circ$ и $\bar{\varphi}^\circ$ для осей y_1 и y_2 соответственно. Тогда фаза вектора $\overline{O_2'O_3}$ определится как

$$\psi(\delta) = \text{arctg}(y_2/y_1).$$

Моделирование характеристик ЗН может быть проведено с помощью программы для ЭВМ, структурная схема которой представлена на рис. 6.22. Программа должна решать следующие задачи:

1) производить оценку статистических законов распределения промаха и его параметров;

2) определять влияние на статистическое распределение промаха:

степени учета различных возмущающих факторов, воздействующих на свободное движение КА;

величины навигационных отклонений;

параметров свободного движения КА (высоты орбиты, наклонения);

точности работы системы управления оптической антенны (СУ ОА);

3) определять способ поиска абонента («широким» лучом или сканированием).

Схема моделирования имеет следующий вид. Для двух КА, между которыми должна быть установлена связь, фиксируется момент начала движения (например, от плоскости экватора). Затем выбирается ряд точек на орбите одного из аппаратов, и по времени движения данного КА к этой точке определяется момент начала сеанса связи и производится расчет характеристик ЗН начального положения для каждого КА. Затем с малым шагом по времени выбираются значения t_k и исследуется изменение характеристики ЗН в процессе поиска.

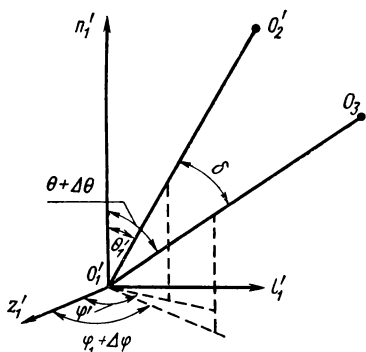


Рис. 6.20. Положения координатных осей определения пространственного промаха

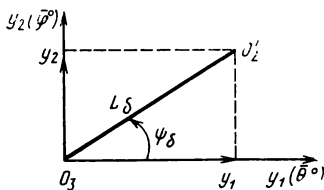


Рис. 6.21. Линейный промах

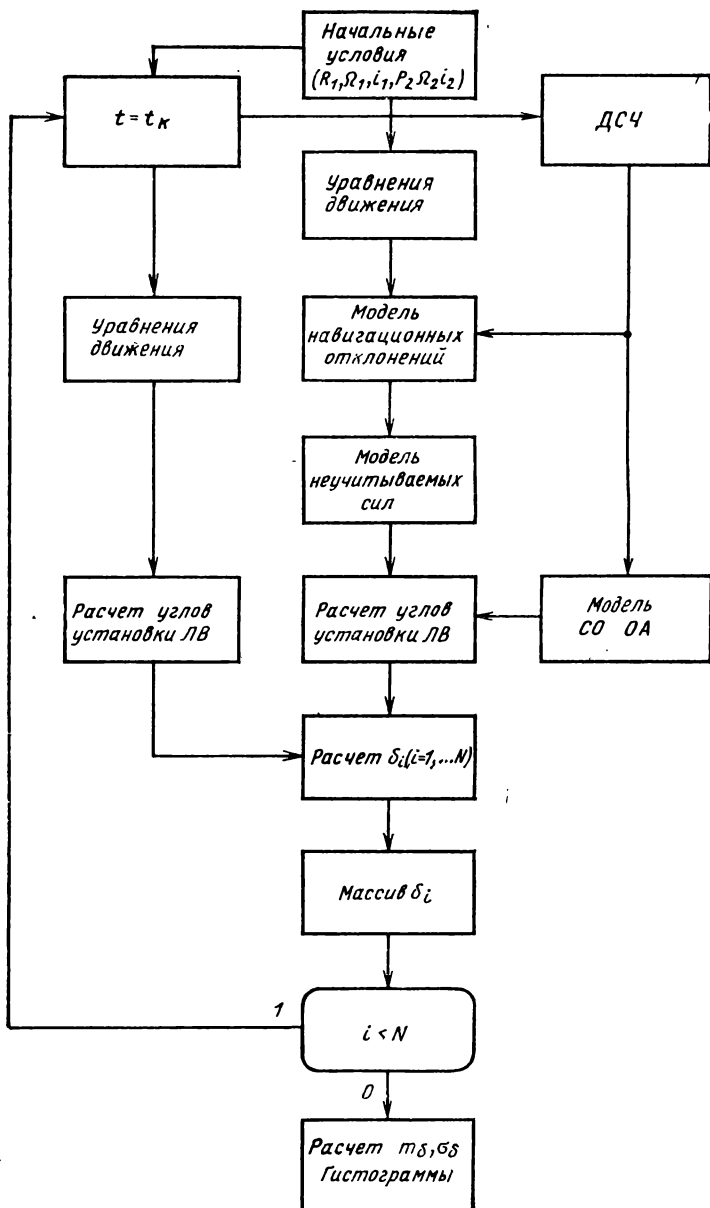


Рис. 6.22. Структурная схема моделирования на ЭВМ образования ЗН начального положения абонентов

Для получения иллюстративного материала на ЭВМ были проведены расчеты с помощью рассмотренной программы по следующим исходным данным: $H_{CP}=40\,000$ км; $i_{CP}=10^{-4}$ рад; $i_{CA}=1,37$ рад; $\Omega_{CA}=\Omega_{CP}=0,707$ рад (см. рис. 6.2). В линии связи «СА—СА₁» параметры орбиты КА-1 были: $H_1=300$ км; $i_1=1$ рад. Навигационные отклонения полагались нормально распределенными случайными величинами с нулевым средним и следующими величинами среднеквадратичных отклонений (СКО): $\sigma_1=\sigma_n=2$ км; $\sigma_2=1$ км; $\sigma_z=0,1$ м/с; $\sigma_i=\sigma_n=0,5$ м/с. Неучитываемые при прогнозировании силы рассчитывались по зависимостям, приведенным в разд. 6.2.

Анализ полученных данных позволяет установить следующий характер зависимости углового промаха от параметров системы управления ЛИС.

1. Величина промаха зависит от параметров СУ ОА, возможностей бортовых ЭВМ по прогнозированию свободного полета КА, типа линии связи и параметров орбит КА. Промах уменьшается с возрастанием точности СУ ОА, высоты полета КА (в результате уменьшения действия сил, возмущающих свободный полет КА), полноты модели свободного движения КА.

2. Для точности СУ ОА, равной $9'$ ($3\sigma_\alpha$), максимальные значения СКО промаха могут составлять в линии «СА—СР» — $0,07^\circ$, ($m_\delta=0,2^\circ$), в линии «СР—СА» — $0,03^\circ$ ($m_\delta=0,04^\circ$), в линии «СА—СА₁» — $0,2^\circ$ ($m_\delta=0,38^\circ$). В табл. 6.11 приведены угловые размеры ЗН, равные $2(m_\delta+3\sigma_\delta)^\circ$ для точности СУ ОА, равной $9'$ при условии учета в системе прогнозирования второго члена потенциала земного притяжения.

3. Влияние ошибок СУ ОА на величину промаха значительно превосходит вклад влияния ошибок от других источников. При учете в системе прогнозирования свободного движения КА аномального притяжения Земли ошибки СУ ОА будут основной причиной возникновения ЗН.

4. Анализ статистического распределения фазы вектора промаха ψ_δ показывает его симметричность относительно среднего значения m_ψ . Вид закона распределения ψ_δ зависит от высоты орбиты КА, точности СУ ОА, модели прогнозирования движения КА, времени поиска и изменяется от равномерного до нормального. При $m_\delta/\sigma_\delta > 3$ гипотеза о нормальном распределении фазы не противоречит опытным данным.

Таблица 6.11

Линия связи	H_{CA} , км		
	200	500	1000
СА—СР	0,5	0,42	0,38
СР—СА	0,27	0,26	0,25
СА—СА ₁	1,86	1,7	1,25

5. Сравнительный анализ гипотез о выравнивании статистического распределения модуля вектора промаха L_δ различными теоретическими распределениями показал, что наименьшее расхождение теоретического и статистического распределений имеет усеченный нормальный закон с плотностью распределения

$$\varphi(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \delta > \delta_{\text{в}}; \\ \frac{1}{\sigma_\delta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\delta - m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}\right] & \text{при } \delta_{\text{н}} \leq \delta \leq \delta_{\text{в}}, \\ \frac{\Phi\left(\frac{\delta_{\text{в}} - m_\delta}{\sigma_\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_{\text{н}} - m_\delta}{\sigma_\delta}\right)}{\delta_{\text{в}} - \delta_{\text{н}}} & \end{cases}$$

где σ_δ , m_δ — СКО и среднее значение δ , полученные при эксперименте; $\delta_{\text{н}}$, $\delta_{\text{в}}$ — нижняя и верхняя границы статистического ряда; $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

Вид распределения не зависит от высоты орбиты КА, точности СУ ОА и практически не изменяется в процессе поиска.

**ПРОСТРАНСТВЕННОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ АБОНЕНТА
В ЛАЗЕРНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

**7.1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ АБОНЕНТА**

В разд. 6.4 было показано, что в процессе сеанса связи КА может перемещаться с угловой скоростью $0,01^\circ/\text{с}$. Поскольку ширина луча связной антенны может составлять всего 35 мкрад [45], то местоположение станции-корреспондента будет изменяться с частотой, достигающей ~ 175 мкрад \cdot с $^{-1}$.

По аналогии с радиотехническими системами для целей слежения в ЛИС можно использовать моноимпульсный метод или метод конического сканирования [16, 45], описанный в работе [36]. Перспективным может быть и метод программного слежения [91].

Метод программного слежения позволяет реализовать преимущества использования как априорной информации о движении объекта и характере возмущающего воздействия на систему, так и текущей информации, содержащейся в измерениях параметров движения КА. Обобщенный вектор состояния системы x учитывает относительное движение КА ($x_{КА}$) и динамику наземной следящей системы (x_A), а общая математическая модель системы включает также условия распространения электромагнитных волн (θ) и воздействие внешних возмущающих моментов (ξ) на антенную систему (A). Уравнения состояния и измерений (z) имеют вид

$$\dot{x} = f(x, u, t) + \xi; \quad z = h(x, t) + \xi.$$

Система слежения представляет сочетание оптимального линейного динамического фильтра Φ (фильтра Калмана) и оптимального управляющего устройства (УУ), формирующего управляющие сигналы u по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (рис. 7.1). Динамический фильтр на основании данных измерительной системы (ИС) о состоянии КА и априорных данных о его расчетной орбите ($x_{пр}$) вырабатывает оценку состояния \hat{x} , являющуюся входным сигналом для УУ.

Проведенное на ЭВМ моделирование работы системы программного слежения за околосемными КА показало, что в условиях реальных помех система может обеспечить обработку угла с точностью до $0,0005^\circ$. Достаточно высокая точность слежения достигается как за счет усложнения системы (наличие измерительного комплекса и вычислительного устройства), так и за счет необхо-

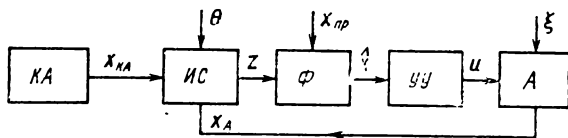


Рис. 7.1. Структурная схема метода программного слежения

димости наличия достоверных сведений об источниках возмущений, действующих на систему.

В гл. 5 указывалось, что особенности оптического диапазона обуславливают построение системы поиска и сопровождения по двухконтурной схеме, где грубый контур, в основном, реализует поиск объекта, а точный — ее сопровождение. Вариант такой системы, когда точный контур построен по схеме с пьезоприводом и обеспечивает сопровождение объекта в режиме конического сканирования, показан на рис. 7.2 [45].

В режиме приема гетеродинный приемопередатчик работает следующим образом. Излучение передающей станции попадает на плоское зеркало грубого контура (ГЗ), установленное в кардановом подвесе перед телескопом (Т) и далее в телескоп, выполняющий функции приемной антенны. Телескоп обычно выполняется по двухзеркальной схеме (Кассегрена или Грегори), что обеспечивает высокие оптические и конструктивные характеристики антенны. Возможное взаимное положение элементов телескопа и ГЗ показано на рис. 7.3, где ГЗ размещается между большими (БЗ) и малым (МЗ) зеркалами телескопа, а диагональное зеркало (ДЗ) передает излучение в основной оптический тракт. Такая антенна при диаметре первичного зеркала 185 мм обеспечивает коэффициент усиления 92 дБ на волне 10,6 мм.

Полное поле зрения рассматриваемой антенны определяется положением ГЗ и размерами полезной площади изображения телескопа и ограничивает телесный угол, в котором должно осуществляться сканирование в процессе поиска и обнаружения сигнала. Мгновенное поле зрения определяет размеры диаграммы направленности антенны и разрешающую способность телескопа.

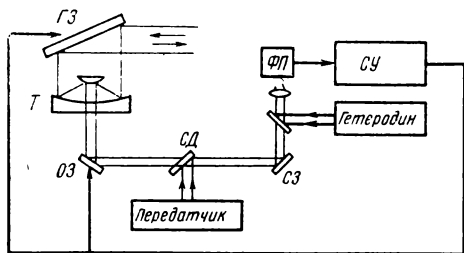


Рис. 7.2. Структурная схема метода конического сканирования

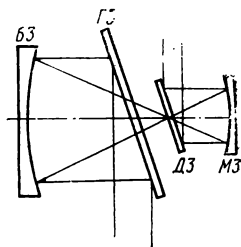


Рис. 7.3. Взаимное положение элементов оптической антенны

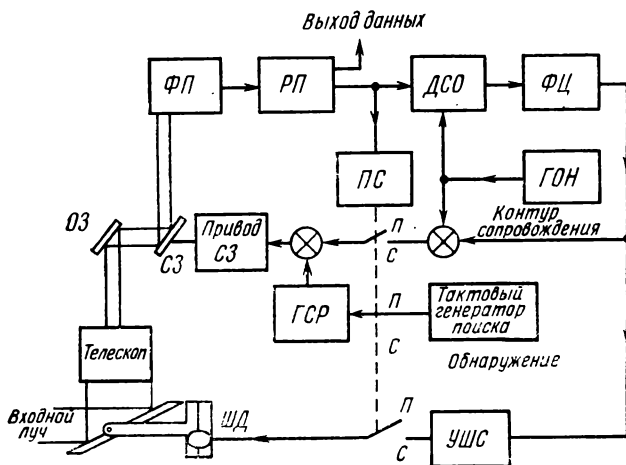


Рис. 7.4. Структурная схема систем поиска и сопровождения

За телескопом в приемном тракте расположен компенсатор движения изображения. Он представляет собой отклоняющее зеркало (ОЗ) с пьезоэлектрическим управлением, которое контролирует положение мгновенного поля зрения в полном поле зрения телескопа. ОЗ осуществляет сканирование мгновенным полем зрения во время начального поиска и вводит поправки в режиме слежения. Когда ОЗ приближается к концу максимального диапазона отклонения (который обычно составляет 1°), вырабатывается сигнал, обеспечивающий перемещение ГЗ до тех пор, пока ОЗ не окажется вновь в центре своего диапазона.

После ОЗ принятый сигнал проходит через диплексер (СД), разделяющий тракты передачи и приема. Следующий оптический элемент, сканирующее зеркало (СЗ), идентично ОЗ. Оно служит для придания принятому сигнальному лучу кругового конического перемещения, благодаря чему вырабатывается сигнал ошибки слежения. После СЗ вводится луч местного гетеродина, который вместе с принятым сигналом направляется на чувствительную поверхность фотоприемника (ФП). Сигнал с выхода ФП обрабатывается системой управления (СУ), которая подает команды управления в грубый (на ГЗ) или точный (на ОЗ) контур поиска и сопровождения.

Рассмотрим взаимодействие грубого и точного контуров в процессе обнаружения и сопровождения сигнала на примере упрощенной структурной схемы системы для азимутального канала (рис. 7.4). Система состоит из трех основных узлов: генератора сканирования по растру (ГСР) для обнаружения и захвата сигнала, системы точного слежения и устройства для выработки команд шагового слежения (УШС).

При отсутствии сигнала пороговая схема (ПС) «обнаружение — слежение» выключает систему точного слежения и устройство для

выработки команд шагового слежения и включает генератор сканирования по растру. После этого включается в режим сканирования ОЗ, образуя растр по направлениям $x-u$ в пределах полного поля зрения телескопа.

При наличии объекта пороговая схема останавливает генератор поиска и включает схему точного слежения. Если цель оказывается вблизи центра поля обзора ОЗ, то система точного слежения продолжает работать в нормальном режиме. Если же объект оказывается вблизи края поля обзора, вырабатывается команда шагового слежения, которая заставляет вращаться шаговый двигатель привода карданного механизма (ЩД) таким образом, чтобы объект оказался в центре поля обзора ОЗ.

Контур точного слежения включает детектор сигнала ошибки (ДСО), формирующую цепь (ФЦ) и генератор опорного напряжения (ГОН), назначение и работа которых идентична соответствующим устройствам схемы сопровождения по методу конического сканирования радиотехнического диапазона. Частота вращения луча при коническом сканировании равна 150 Гц. ОЗ и СЗ представляют собой зеркала, установленные на пьезоэлектрических биморфных пластинках, которые отклоняют луч у выходного зрачка на 1° при подаче напряжения 500 В. Резонансная частота составляет 900 Гц.

При моноимпульсном методе сопровождения для создания сигнала ошибки в двух плоскостях необходимо иметь четыре фотодетектора, причем при реализации метода на борту КА существенное влияние на возможность его применения оказывают жесткие требования, предъявляемые к юстировке луча, а также требования поддержания необходимого режима охлаждения фотоприемников ИК-диапазона. В связи с этим чаще отдается предпочтение сопровождению по методу конического сканирования [45].

Определенным преимуществом метода конического сканирования является и то, что он естественным образом позволяет совместить функции информационного ФП с функциями ФП углового датчика.

7.2. ТРЕБОВАНИЯ К ТОЧНОСТИ УГЛОВОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ

В режиме сопровождения происходит обмен информацией между абонентами, причем емкость канала связи и точность определения параметров движения объекта определяются ошибками сопровождения. С другой стороны, возможность работы при максимальных ошибках слежения создает менее напряженный динамический режим следящей системы. Поэтому рассмотрим связь допустимой точности углового сопровождения с характеристиками ЛИС, определяющими их энергетический и информационный потенциал — качеством оптических антенн и информационной емкостью оптического канала связи.

В идеальной оптической системе приходящий плоский фронт волны создает симметричное дифракционное изображение, распределение освещенности в котором описывается функцией Бесселя 1-го порядка

$$E = E_0 \left[\frac{2J_1(\pi\vartheta/\vartheta_0)}{\pi\vartheta/\vartheta_0} \right]^2, \quad (7.1)$$

где E_0 — максимальная освещенность в центре пятна; ϑ — линейное расстояние от центра; $\vartheta_0 = \lambda/D$; λ — длина волны; D — диаметр апертуры.

Зависимость (7.1) совпадает с распределением интенсивности в фокальной плоскости приемной антенны при фокусном расстоянии $f = 1$ м.

Реальные оптические системы из-за ошибок изготовления, юстировки, условий работы и других причин создают изображение, распределение освещенности в котором может быть описано нормальным законом

$$E = E'_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7.2)$$

где r — радиус-вектор точки пятна; σ — среднеквадратичная ошибка (СКО) распределения.

Чтобы сравнить реальную и идеальную оптические системы, необходимо установить связь между зависимостями (7.1) и (7.2). Для этого воспользуемся известным положением о том, что для идеальной оптической системы внутри первого темного кольца дифракционного изображения радиусом $1,22 \lambda f/D$ содержится 84% мощности излучения. Тогда этой области идеальной системы будет соответствовать область изображения, создаваемого реальной оптической системой, радиус которой определится выражением [117]

$$2,71\sigma = 1,22\lambda/D = \vartheta_0, \quad (7.3)$$

где σ — СКО распределения оптической системы при $f = 1$ м.

Тогда выражение (7.1) можно записать следующим образом:

$$E = E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{2(\vartheta_0/2,71)^2}\right].$$

Поскольку мощность излучения в изображениях обеих систем одинакова, то

$$\int_D 2\pi E_0 \exp\left[-\frac{r^2}{2(\vartheta_0/2,71)^2}\right] r dr = \int_D 2\pi E'_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r dr.$$

откуда

$$E'_0 = 0,136n^2 E_0, \quad (7.4)$$

где $n = \vartheta_0/\sigma$.

Для достижения $E_c = E_0'$ необходимо выполнение условия $\theta_0/\sigma = 2,71$, т. е. в оптической системе при $f=1$ обеспечить $n > 2,71$ невозможно.

Для оптической системы при $f_1 \neq 1$ условие (7.3) запишется в виде $1,22f_1\lambda/D = 2,71\sigma_1$, а зависимость (7.4) — в виде $E_0' = 0,136n^2 f_1^2 E_0$.

Если в системе при $f_1 \neq 1$ необходимо обеспечить условие $n = n_1$, то тогда фокусное расстояние системы в метрах будет

$$f_1 = 2,71/n_1.$$

Таким образом, коэффициент n определяет не только максимальную освещенность в изображении реальной оптической системы, но и ее фокусное расстояние, и может служить характеристикой качества оптической системы.

Зависимость, аналогичная (7.4), может быть установлена между выходными сигналами фотодетектора (ФД) для реальной и идеальной оптических систем. Так как электрический сигнал на выходе ФД пропорционален мощности светового сигнала на его входе, то при совмещении ФД с центром оптического изображения получим

$$I_{c \max}^p = 0,136 n^2 I_{c \max}^n,$$

где $I_{c \max}^p$, $I_{c \max}^n$ — величина тока сигнала на выходе ФД с реальной и идеальными оптическими системами соответственно.

При смещении ФД относительно центра оптического изображения в результате ошибок углового сопровождения γ величина сигнала на выходе ФД определится следующей зависимостью:

$$I_c^p = 0,136 n^2 I_{c \max}^n \exp \left[-\frac{1}{2} (n\gamma/\theta)^2 \right]. \quad (7.5)$$

Для исследования связи информационной емкости с точностью сопровождения воспользуемся выражением для пропускной способности канала после оптического приемника (ОП) [64]:

$$C = \Delta f \log_2(1 + S/N), \quad (7.6)$$

где S/N — отношение сигнал/шум по мощности; ($N = N_\phi + ah\nu\Delta f$, где $N_\phi = h\nu\Delta f / (e^{h\nu/KT} - 1)$ — мощность фонового шума; h — постоянная Планка; ν — частота несущего сигнала; Δf — полоса пропускания электрического выходного фильтра ОП; K — постоянная Больцмана; T — температура сопротивления нагрузки ОП; $a \geq 1$).

Отношение сигнал/шум на выходе ОП определяется выражением [59]

$$\frac{S}{N} = \frac{G^2 I_c^2 R_H}{2q\Delta f G^2 R_H (I_c + I_\phi + I_T) + 4KT\Delta f}$$

(I_c , I_ϕ , I_T — средний ток ФД, обусловленный сигналом, излучением фона и темновым током соответственно; R_H — сопротивление

нагрузки ОП; q — заряд электрона; G — коэффициент усиления ФД по току), которое при ограничении режима работы ОП дробными шумами несущей будет равно

$$\frac{S}{N} \approx \frac{I_c}{2q\Delta f} \quad (7.7)$$

Выражение (7.7) соответствует предельной возможности ОП с прямым детектированием, когда шумы определяются лишь квантовым шумом сигнала.

Поскольку предельное отношение сигнал/шум для других типов ОП отличается от выражения (7.7) только величиной коэффициента α , то данное выражение может быть без потери общности использовано для анализа зависимости (7.6). Эта зависимость с учетом выражений (7.7) и (7.5) преобразуется к виду ($S/N \gg 1$)

$$\begin{aligned} C(n, \gamma) &\approx \Delta f \log_2(I_{c \max}^n / 2q\Delta f) + \Delta f \log_2[0,136 n^2 \exp(-n^2 \gamma^2 / 2\theta^2)] = \\ &= C_n + \Delta C(n, \gamma). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Таким образом, информационная емкость канала определяется суммой двух величин: информационной емкостью канала с идеальной оптической системой C_u и составляющей $\Delta C(n, \gamma)$, зависящей от характеристик реальной оптической системы и точности сопровождения. Из выражения (7.8) также следует, что при увеличении ошибки сопровождения ($n = \text{const}$) общая информационная емкость канала уменьшается.

Если заданное качество работы системы (в том числе и максимальная информационная емкость канала) обеспечивается при $S/N = I_{c \max} / 2q\Delta f$, то условие выбора характеристик n и γ будет иметь следующий вид:

$$C(n_{\text{опт}}, \gamma_{\text{max}}) = C_u; \quad \Delta C(n_{\text{опт}}, \gamma_{\text{max}}) = 0. \quad (7.9)$$

С учетом условия (7.9) из зависимости (7.8) получим выражение для максимальной допустимой ошибки сопровождения:

$$\exp \left[-\frac{1}{2} (n\gamma_{\text{max}}/\theta)^2 \right] = 7,35/n^2. \quad (7.10)$$

Из решения уравнения (7.10), представленного графически на рис. 7.5, следует, что в качестве оптимального значения n целесообразно выбрать $n_{\text{опт}} \approx 4$, так как значительное улучшение качества оптической системы (до $n=5$) приводит к незначительному увеличению допустимой ошибки сопровождения, тогда как небольшое ухудшение качества системы относительно $n=4$ значительно уменьшает величину этой ошибки.

Из зависимости (7.10) также следует, что при $n \approx 2,7$ система должна отслеживать сигнал абонента идеально ($\gamma_{\text{max}} = 0$). Поэтому указанное значение n может быть принято в качестве нижней границы допустимого снижения характеристик реальной оптической системы относительно идеальной.

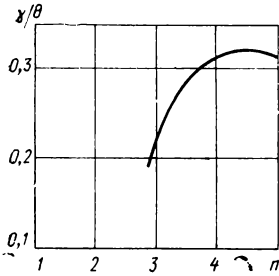


Рис. 7.5. Зависимость точности сопровождения от показателя качества антенны

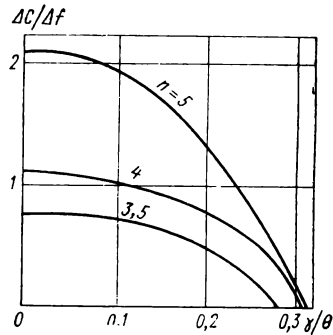


Рис. 7.6. Зависимость информационной емкости от точности сопровождения канала связи

Таким образом, в оптических линиях связи можно считать допустимой ошибку сопровождения $\gamma \approx 0,31$ $\theta \approx 0,38 \lambda/D$, что соответствует приблизительно $1/6$ ширины диаграммы направленности оптической антенны.

Для оценки влияния точности сопровождения луча абонента на информационную емкость канала на рис. 7.6 приведена зависимость $\Delta C(n, \gamma)/\Delta f$ от n , рассчитанная по формуле (7.8). Из рис. 7.6, в частности, следует, что при ошибке сопровождения $\gamma = 0,31\theta$ приращение ΔC с увеличением n от 4 до 5 столь мало, что сохраняется практическая целесообразность обеспечения $n=4$.

7.3. ТОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ УГЛОВОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ

Поскольку системы сопровождения оптического диапазона принципиально не отличаются от радиотехнических систем, их структурная схема может быть представлена в виде, изображенном на рис. 7.7 для сопровождения по одной координате [51].

Дискриминатор системы вырабатывает сигналы, пропорциональные ошибке рассогласования параметров $\theta(t)$ и $\hat{\theta}(t)$. Зависимость, связывающая математическое ожидание напряжения на выходе дискриминатора с рассогласованием $\epsilon(t)$, обозначена $F(\epsilon)$ и называется дискриминационной характеристикой. Флуктуационная составляющая напряжения на выходе дискриминатора в структурной схеме учитывается введением случайного процесса $\xi(t)$.

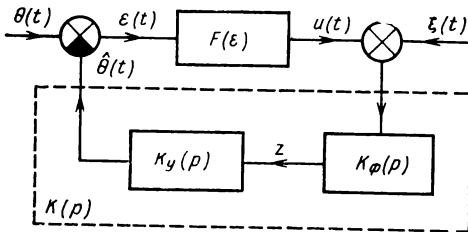


Рис. 7.7. Структурная схема сопровождения по одной координате

Так как выходное напряжение дискриминатора флюктуирует, в систему обычно вводят фильтрующие каскады, представляющие собой фильтры нижних частот. Они, как правило, линейны и их полной характеристикой служит операторный коэффициент передачи $k_{\Phi}(p)$.

Сигнал с выхода фильтра подается на схему управления, основной характеристикой которой служит зависимость $\hat{\theta} = \hat{\theta}(z)$. Если цепь обратной связи системы регулирования состоит только из линейных элементов, то ее удобно характеризовать операторным коэффициентом передачи, включающим в себя коэффициенты передачи фильтра и схемы управления $k(p) = k_{\Phi}(p)k_{\gamma}(p)$.

С помощью структурной схемы можно записать дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы слежения:

$$\varepsilon(p) = \theta(p) - k(p)[F(\varepsilon, p) + \xi(p)]. \quad (7.11)$$

Конкретная форма дифференциального уравнения системы зависит от характера связи напряжения сигнала ошибки с рассогласованием в системе, определяемым типом оптического датчика рассогласования, а также применяемого фильтра.

Точность сопровождения системой с коническим сканированием

Рассмотрим систему сопровождения с коническим сканированием, описанную в разд. 7.1. В данной системе роль схемы управления выполняет пьезозеркало, которое можно рассматривать как инерционное звено с операторным коэффициентом передачи

$$k_{\text{пз}}(p) = \frac{k_2}{1 + pT_2},$$

где k_2 — статический коэффициент передачи пьезозеркала; T_2 — постоянная времени пьезозеркала.

Если в контуре также используется активный интегрирующий фильтр с коэффициентом передачи $k_{\Phi}(p) = \frac{k_1(1 + pT_1)}{p}$, то операторный коэффициент передачи цепи обратной связи контура запишется в виде

$$k(p) = \frac{k(1 + pT_1)}{p(1 + pT_2)}, \quad (7.12)$$

где $k = k_1k_2$.

Структурная схема сопровождения по одной координате показана на рис. 7.8, а текущая ошибка сопровождения задается стохастическим дифференциальным уравнением вида (7.11).

Исследование преобразования случайных процессов, которыми являются как полезные сигналы, так и помехи, следящим контуром ЛИС в общем случае математически представляет собой весьма

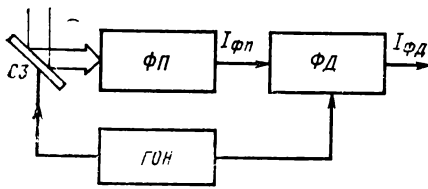


Рис. 7.8. Структурная схема следящей системы с пьезозеркалом

сложную задачу, поскольку уравнение, описывающее эту систему, нелинейно и имеет произвольный порядок. Практически все известные методы исследования основаны на тех или иных частных упрощающих предположениях о характере внешних воздействий или о свойствах самой системы.

Поскольку следящий контур ЛИС является узкополосной системой [45], для его исследования можно применить аппарат марковских процессов, позволяющий сравнительно просто определять стационарные плотности распределения вероятностей координат системы. Чтобы исследовать поведение процесса $\varepsilon(t)$ методами теории марковских процессов, необходимо прежде всего выразить $\varepsilon(t)$ через компоненты соответствующего марковского процесса $x(t)$, в общем случае, многомерного [51, 73]. Для этого необходимо выполнить следующие условия:

- 1) все случайные возмущения, входящие в исходное уравнение (7.11), должны иметь вид белых шумов;
- 2) следует так выбирать координаты фазового пространства, в котором определен вектор $x(t)$, чтобы n -мерное уравнение (7.11) можно было записать в виде системы стохастических уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \xi_j^0(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.13)$$

где a_i, b_{ij} — детерминированные функции, в общем случае нелинейные; $\xi_j^0(t)$ — независимые белые шумы с единичными спектральными плотностями.

В этом случае доказывается, что процесс $x(t)$ является n -мерным марковским.

Первое условие для оптико-электронных следящих систем выполняется, поскольку они в большинстве практических случаев имеют узкую полосу пропускания, в пределах которой помехи можно считать равномерными [45].

Выполнение второго условия обычно требует дополнительных ограничений на вид дифференциального уравнения (7.11).

Многомерные марковские процессы описываются плотностями вероятностей, которые удовлетворяют уравнениям в частных производных — уравнениям Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК). Если n -мерный марковский процесс $x(t)$ описывается системой стохастических уравнений (7.13), то плотность вероятностей $w(x, t)$

непрерывного марковского процесса удовлетворяет уравнению ФПК:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(\mathbf{x}, t) \omega] = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{i, j}(\mathbf{x}, t) \omega]. \quad (7.14)$$

Уравнение (7.14) является линейным уравнением в частных производных с переменными коэффициентами. Тип уравнения определяется матрицей коэффициентов при вторых производных B .

Коэффициенты уравнения (7.14)

$$A_i(\mathbf{x}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{[x_i(t + \tau) - x_i(t)]}{\tau}$$

характеризуют локальную среднюю скорость изменения координаты и обычно называются коэффициентами сноса, а коэффициенты

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{[x_i(t + \tau) - x_i(t)][x_j(t - \tau) + x_j(t)]}{\tau}$$

определяют корреляционную связь компонентов x_i и x_j и называются коэффициентами диффузии.

Доказано [9], что коэффициенты стохастического уравнения (7.13) и уравнения ФПК (7.14) связаны соотношениями

$$A_i(\mathbf{x}, t) = a_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial b_{ik}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} b_{jk}(\mathbf{x}, t);$$

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_{ik}(\mathbf{x}, t) b_{jk}(\mathbf{x}, t). \quad (7.15)$$

На основании структурной схемы системы с коническим сканированием (см. рис. 7.8) составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + T_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} + T_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} - kF(\varepsilon) - kT_1 \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} +$$

$$+ k\xi(t) - kT_1 \frac{d\xi(t)}{dt}. \quad (7.16)$$

Уравнение (7.15) может быть сведено к уравнению, не содержащему производных белого шума [51]. Тогда уравнение (7.16) переписывается в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + T_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} + T_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} - kF(\varepsilon) - kT_1 \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} - k\xi(t). \quad (7.17)$$

При достаточно малой величине $ksTn_0^2 \ll 1$ (s — крутизна дискриминационной характеристики, $n_0 = T_1/T_2$), а также с учетом малости величины углового ускорения линии визирования в ЛИС, уравнение (7.17) можно записать как

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \left(1 + kT_1 \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right) + T_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} - kF(\varepsilon) - k\sqrt{N_0} \xi^0(t), \quad (7.18)$$

где $\frac{d\theta}{dt}$ — скорость движения линии визирования на участке сопровождения; N_0 — спектральная плотность мощности шума; $\xi^c(t)$ — случайный процесс с единичной спектральной плотностью.

При исследовании интенсивности потока срыва слежения в модели управления ЛИС часто используют метод линеаризации исходной системы, при котором нелинейная дискриминационная характеристика $F(\varepsilon)$ заменяется линейной с крутизной $s = F'(\varepsilon_A)$ (где ε_A — точка устойчивого равновесия) и соответствующими границами апертуры. Тогда в пределах эквивалентной апертуры дискриминатора уравнение (7.18) перепишется следующим образом:

$$(1 + kT_1s) \frac{d\varepsilon}{dt} + T_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} - ks\varepsilon - k\sqrt{N_0}\xi^c(t), \quad (7.19)$$

Введем координаты фазового пространства для рассмотренного выше вектора $x(t)$ [90]:

$$\varepsilon = x_1; \quad dx_1/dt = x_2.$$

Тогда уравнение (7.19) можно заменить системой дифференциальных стохастических уравнений:

$$\varepsilon = x_1; \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{T_2} \left[(1 + kT_1s)x_2 + ksx_1 - \frac{d\theta}{dt} + k\sqrt{N_0}\xi^c(t) \right]. \quad (7.20)$$

Уравнение ФПК в этом случае является ультрапараболическим:

$$\frac{\partial \omega(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 \omega) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_2 \omega) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (B_{22} \omega), \quad (7.21)$$

$$\text{где } A_1 = x_2; \quad A_2 = -\frac{(1 + kT_1s)}{T_2} x_2 - \frac{ks}{T_2} x_1 + \frac{1}{T_2} \frac{d\theta}{dt};$$

$$B_{22} = \frac{k^2}{2} \frac{N_0}{T_2^2}; \quad B_{11} = B_{12} = B_{21} = 0.$$

Следовательно, уравнение (7.21) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial \omega(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 \omega) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left[-\frac{(1 + kT_1s)x_2 + ksx_1}{T_2} + \frac{1}{T_2} \frac{d\theta}{dt} \right] \omega \right\} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{k^2 N_0}{2T_2^2} \omega. \quad (7.22)$$

Аналитическое решение уравнения (7.22) может быть получено для стационарного режима, когда $\frac{\partial \omega(x_1, x_2 t)_c}{\partial t} = 0$:

$$\omega(x_1, x_2)_{ct} = C_0 \exp \left[-\frac{2x_2(1 + kT_1s)^2}{k^2N_0} + \frac{4(1 + kT_1s)^2}{k^2N_0} \int_0^\varepsilon f(\varepsilon') d\varepsilon' \right], \quad (7.23)$$

где C_0 — постоянная нормировки;

$$f(\varepsilon') = \frac{d\theta/dt}{1 + kT_1s} - \frac{kse'}{1 + kT_1s}.$$

Интегрируя выражение (7.23) по x_2 , получим плотность вероятности ошибки сопровождения $\varphi(\varepsilon)_{ct} = \omega(x_1)_{ct}$:

$$\varphi(\varepsilon)_{ct} = C \exp \left\{ -\frac{4(T_0 + kT_1s)^2}{k^2N_0} \left[\frac{kse^2}{2} - T_0 \frac{d\theta}{dt} \varepsilon \right] \right\}, \quad (7.24)$$

где C — постоянная нормировки, полученная в результате интегрирования.

Дополнив выражение, стоящее в квадратных скобках показателя экспоненты [см. выражение 7.(24)], до полного квадрата, получим

$$\varphi(\varepsilon)_{ct} = C \exp \left[\frac{\left(\varepsilon - \frac{T_0(d\theta/dt)}{ks} \right)^2}{kN_0/2(T_0 + kT_1s)s} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{2(T_0 + kT_1s)T_0^2(d\theta/dt)^2}{k^3N_0s} \right] \right\}^{-1}. \quad (7.25)$$

Постоянная C в выражении (7.25) определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)_{ct} d\varepsilon = 1.$$

Тогда окончательное выражение для $\varphi(\varepsilon)_{ct}$ примет вид

$$\varphi(\varepsilon)_{ct} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - m_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right], \quad (7.26)$$

$$\text{где } \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{kN_0}{4s(T_0 + kT_1s)}}.$$

Таким образом, ошибка сопровождения в рассмотренной системе в установившемся режиме подчиняется нормальному закону с параметрами

$$m_\varepsilon = \frac{T_0(d\theta/dt)}{ks}; \quad \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{kN_0}{4s(T_0 + kT_1s)}}. \quad (7.27)$$

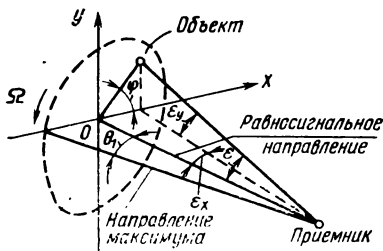


Рис. 7.9. Пространственные характеристики метода конического сканирования

Например, для $d\theta/dt=3,6$ минут/с, $k=0,45$ минут/В, $s=3,6$ В/минут получим $m_e=1,3$ секунд. Подбирая параметры контура слежения k, T_1, s , можно существенно влиять на точностные характеристики сопровождения.

Установим связь между статистическими характеристиками ошибки сопровождения [см. выражение (7.26)], энергическими характеристиками линий связи и параметрами оптической системы с коническим сканированием (см. рис. 7.4).

Дискриминатор системы с коническим сканированием для одного канала сопровождения включает фотоприемник ФП, фазовый детектор ФД, сканирующее зеркало СЗ и генератор опорного напряжения ГОН (см. рис. 7.8). Учитывая неидеальность оптической системы, распределение энергии на выходе оптической антенны можно аппроксимировать нормальным законом (см. разд. 7.2):

$$E(\epsilon) = 0,136 n^2 E_0 \exp\left(-\frac{n^2 \epsilon^2}{2\theta_0^2}\right), \quad (7.28)$$

где E_0 — максимальная интенсивность в центре дифракционной картины для идеальной оптической системы; ϵ — ошибка сопровождения (угол между равносигнальным направлением и направлением на объект); $\theta_0 = 1,22\lambda/D$ (D — диаметр оптической антенны); $n = \theta_0/\sigma$ — параметр, характеризующий качество оптической системы.

После преобразования оптической системой излучение маяка подвергается сканированию с помощью СЗ по чувствительной поверхности ФП, в результате чего происходит модуляция принимаемого оптического сигнала по интенсивности. Если положение объекта в пространстве характеризуется параметрами ϵ и $\varphi = \arcsin(\epsilon_y / \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2})$ (рис. 7.9), то оптический сигнал на выходе СЗ можно записать в виде

$$E(\epsilon, t) = 0,136 n^2 E_0 \exp\left\{-\frac{n^2 [\epsilon^2 - 2\theta_1 \epsilon \cos(\Omega t - \varphi) + \theta_1^2]}{2\theta_0^2}\right\}, \quad (7.29)$$

где θ_1 — отклонение максимума диаграммы направленности антенны от равносигнального направления; Ω — круговая частота сканирования.

Так как ток ФП пропорционален интенсивности света, то изменение тока в зависимости от сигнала ошибки характеризуется следующим соотношением:

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} = 0,136 n^2 I_0 \left\{ -\frac{n^2}{\theta_0^2} [\epsilon - \theta_1 \cos(\Omega t - \varphi)] \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{n^2}{2\theta_0^2} [\varepsilon^2 - 2\theta_1 \varepsilon \cos(\Omega t - \varphi) + \theta_1^2] \right\},$$

где I_0 — средний ток, соответствующий максимуму интенсивности.

Так как в режиме сопровождения стремятся, чтобы рабочая точка находилась на линейном участке дискриминационной характеристики, то будем считать, что

$$F(\varepsilon) = s\varepsilon,$$

где $s = \left. \frac{di}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0}$ — крутизна дискриминационной характеристики.

Следовательно,

$$\left. \frac{di}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0,136 n^2 I_0 \left[\frac{n 2\theta_1 \cos(\Omega t - \varphi)}{\theta_0^2} \right] \exp \left[-\frac{n 2\theta_1^2}{2\theta_0^2} \right]. \quad (7.30)$$

Чтобы исключить из работы нелинейный участок дискриминационной характеристики, необходимо воспользоваться в выражении (7.30) линейной аппроксимацией функции $\exp(-z^2/2)$. Для этого область задания z должна лежать в пределах $0,4 \leq z \leq 1,6$.

Соответственно пределами изменения ошибки сопровождения будут

$$\theta_1 - 1,6 \frac{\theta_0}{n} \leq \varepsilon \leq \theta_1 - 0,4 \frac{\theta_0}{n}; \quad -\theta_1 + 0,4 \frac{\theta_0}{n} \leq \varepsilon \leq -\theta_1 + 1,6 \frac{\theta_0}{n}, \quad (7.31)$$

откуда следует, что $\theta_1 = \theta_0/n$.

Уравнение (7.30) с учетом (7.31) примет вид

$$\left. \frac{di}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0,136 \frac{n^3}{\theta_0} I_0 \cos(\Omega t - \varphi) \exp(-1/2),$$

что позволяет записать следующее выражение для тока фотоприемника:

$$I_{\Phi n} = 0,082 n^3 \frac{I_0}{\theta_0} \cos(\Omega t - \varphi) \varepsilon + I_{cp} = I_{пер} + I_{cp}, \quad (7.32)$$

где I_{cp} — среднее значение полезного тока на выходе ФП; $I_{пер}$ — переменное значение тока, несущее информацию о положении объекта.

Считая фазовый детектор идеальным множителем [56], выражение (7.32) можно преобразовать следующим образом:

$$u_{\Phi n} = 0,041 \alpha n^3 \frac{u_{ГОН} I_0 R_n}{\theta_0} \varepsilon \cos \varphi = 0,041 \alpha n^3 \frac{u_{ГОН}}{\theta_0} I_0 R_n \varepsilon_x,$$

где α — коэффициент передачи фазового детектора; $u_{ГОН}$ — напряжение сигнала с ГОН; R_n — сопротивление нагрузки ФП.

Следовательно, дискриминационные характеристики каналов сопровождения будут определяться следующими зависимостями:

$$F(\varepsilon_x) = 0,041 \alpha n^3 \frac{u_{\Gamma_{OH}} I_0 R_H}{\theta_0} \varepsilon_x;$$

$$F(\varepsilon_y) = 0,041 \alpha n^3 \frac{u_{\Gamma_{OH}} I_0 R_H}{\theta_0} \varepsilon_y.$$

Спектральная плотность мощности шума на выходе фазового детектора определяется в виде

$$N_0 = \alpha^2 u_{\Gamma_{OH}}^2 N_{вх} / 2,$$

где $N_{вх}$ — спектральная плотность мощности шума на входе ФД.

Если в качестве ФП используется ФЭУ, то можно получить:

$$N_{вх} = 2q(I_{\phi} + I_{\tau} + I_{ср}) \mu^2 R_H,$$

где q — заряд электрона; I_{ϕ} , I_{τ} , $I_{ср}$ — фоновый, темновой и средний токи; μ — коэффициент усиления ФЭУ.

Тогда спектральная плотность мощности шума, приведенная к выходу дискриминатора, определится как

$$N_0 = \alpha^2 \mu^2 q u_{\Gamma_{OH}}^2 (I_{\phi} + I_{\tau} + I_{ср}) R_H.$$

С учетом полученных в данном разделе зависимостей статистические характеристики ошибки сопровождения одного канала системы с коническим сканированием [см. выражения (7.27)] можно выразить в виде

$$m_{\varepsilon} = \frac{24,4 \frac{d\varepsilon}{dt} \theta_0}{k \alpha n^3 I_0 R_H u_{\Gamma_{OH}}}; \quad (7.33)$$

$$\sigma_{\varepsilon} = \frac{6,1 \alpha \mu^2 q k (I_{\phi} + I_{\tau} + I_{ср}) \theta_0^2 u_{\Gamma_{OH}} R_H}{n^3 I_0 (\theta_0 + 0,041 k I_1 \alpha n^3 I_0 R_H u_{\Gamma_{OH}})}.$$

В выражениях (7.33) $k = k_{\phi} k_{yс} k_{упр}$, где $k_{yс}$ — коэффициент передачи усилительного звена.

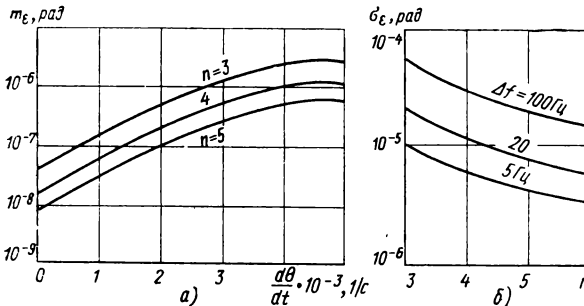


Рис. 7.10. Зависимость m_{ε} (а) и σ_{ε} (б) от параметров оптической системы

На рис. 7.10 приведены рассчитанные по формулам (7.33) зависимости m_e и σ_e от параметров оптической системы и относительного движения абонентов при использовании схемы балансного фазового детектора. Для этой схемы $\alpha = 2k_d n_1 n_2$, где $k_d = (0,7 \dots 0,8)$ — коэффициент, зависящий от параметров детекторов, B^{-1} ; n_1, n_2 — коэффициенты передачи трансформаторов.

При расчете использовались следующие данные: $\lambda = 0,53$ мкм, $D = 0,35$ м, $k = 0,135$, $\alpha = 140$, $P_c = 3 \cdot 10^{-6}$ Вт — мощность сигнала, $P_\phi = 5 \cdot 10^{-7}$ Вт — мощность фона, $\gamma_\lambda = 1,2 \cdot 10^{-2}$ А/Вт — спектральная чувствительность фотокатода (ФЭУ-69), $\mu = 10^6$, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ К, $I_T = 3 \cdot 10^{-19}$ А, $T_1 = 10^{-3}$ с, и зависимости:

$$I_0 = P_c \gamma_\lambda, \quad I_\phi = P_\phi \gamma_\lambda, \quad I_{cp} = 0,082 n^2 \gamma_\lambda P_c.$$

Точность сопровождения моноимпульсной системой

В моноимпульсной системе сопровождения оптическое излучение фокусируется на ФП, состоящий из четырех фотодетекторов (рис. 7.11). Если проходящая плоская волна нормальна приемной апертуре, она фокусируется в центр квадранта, и все детекторы вырабатывают сигнал одинаковой величины. Если углы прихода волны отличны от нормального, то появляется разбаланс в выходных сигналах фотодетекторов. Сигналы ошибки для сопровождения в двух плоскостях вырабатываются по следующей схеме [16]:

$$u_\tau(t) = [x_1(t) + x_2(t)] - [x_3(t) + x_4(t)]; \tag{7.34}$$

$$u_\theta(t) = [x_1(t) + x_4(t)] - [x_2(t) + x_3(t)],$$

где $x_i(t)$ — выходной сигнал i -го фотодетектора ($i = 1, 2, 3, 4$).

Дифференциальные уравнения системы сопровождения можно составить с помощью эквивалентной структурной схемы системы

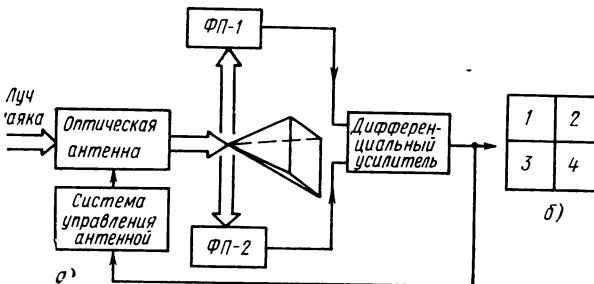


Рис. 7.11. Моноимпульсный метод слежения:

а — структурная схема следящей системы; б — расположение фотодетекторов

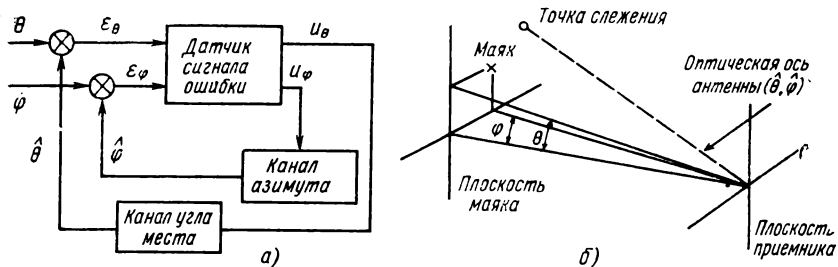


Рис. 7.12. Эквивалентная структурная схема моноимпульсной следящей системы (а) и пространственная картина сопровождения абонента (б)

(рис. 7.12, а) и пространственной картины сопровождения (рис. 7.12, б)

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d}{dt} [\overline{u_\varphi(t)}]; \quad \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d}{dt} [\overline{u_\theta(t)}], \quad (7.35)$$

где $\hat{\varphi} = \overline{u_\varphi(t)}$; $\hat{\theta} = \overline{u_\theta(t)}$, а черта сверху выходных сигналов оптических датчиков рассогласования означает их обработку в контурах слежения по азимуту и углу места соответственно.

Поскольку каналы азимута и угла места можно в первом приближении считать независимыми, то каждое из уравнений ошибок (7.35) можно исследовать раздельно, сделав следующие допущения:

перемещением объекта в процессе сопровождения можно пренебречь;

цепь обратной связи контура сопровождения каждого канала моделируется интегратором;

фоновое воздействие характеризуется средней скоростью поступления фоновых фотоэлектронов n_ϕ , неизменной во времени и пространстве.

Тогда выражение для плотности вероятности ошибки может быть получено решением соответствующего уравнения ФПК [16].

Дифференциальное уравнение системы для одного канала сопровождения [см. формулы (7.35)] с учетом сделанных допущений запишется в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -G u(t, \varepsilon), \quad (7.36)$$

где G — коэффициент усиления интегратора.

Приращение ошибки за временной интервал Δt будет

$$\Delta\varepsilon = -G \int_t^{t+\Delta t} u(\rho, \theta) d\rho = -G_{\phi\lambda} qG [k_{1,2}(t, t+\Delta t) - k_{3,4}(t, t+\Delta t)],$$

где $G_{\phi\lambda}$ — коэффициент усиления фотодетектора; $k_{ij}(t, t+\Delta t)$ — суммарное количество фотоэлектронов на выходе детекторов i и j на интервале $(t, t+\Delta t)$.

Выражение для плотности вероятности ошибки сопровождения $w(\varepsilon)$ в установившемся режиме получается из решения дифференциального уравнения

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[(-1)^j]}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon_j} [C_j(\varepsilon) w(\varepsilon)], \quad (7.37)$$

где коэффициенты $C_j(\varepsilon)$ определяются в виде

$$C_j(\varepsilon) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[(\Delta \varepsilon)^j]}{\Delta t},$$

а символ E характеризует осреднение по множеству.

Для $\varepsilon \ll 1$ можно получить следующую приближенную зависимость [16]:

$$E[u(t)] \approx \alpha G_{\text{фл}} q P_{\text{пр}} \frac{\varepsilon}{\lambda D},$$

тогда

$$E[\Delta \varepsilon] = -G \int_t^{t+\Delta t} (G_{\text{фл}} q n_c D / \lambda) \varepsilon(\rho) d\rho = -(GG_{\text{фл}} q n_c D / \lambda) \varepsilon(t) \Delta t \quad (\text{при } \Delta t \rightarrow 0)$$

и выражение для $C_1(\varepsilon)$ примет вид

$$C_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta \varepsilon]}{\Delta t} = -(GG_{\text{фл}} q n_c D / \lambda) \varepsilon,$$

где n_c — скорость поступления сигнальных фотоэлектронов.

Окончательное выражение для дифференциального уравнения системы можно записать следующим образом:

$$0 = \rho \varepsilon w(\varepsilon) + \frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \sum_{j>3}^{\infty} C_j \frac{d^j}{d\varepsilon^j} [\varepsilon w(\varepsilon)] + \sum_{j>4}^{\infty} C_j \frac{d^j}{d\varepsilon^j} [w(\varepsilon)], \quad (7.38)$$

$$\text{где } \rho = \left(\frac{n_c}{2B_K} \right) \left(\frac{n_c D / \lambda}{n_c + 4n_{\text{ф}}} \right);$$

$B_K = GG_{\text{фл}} q n_c / 4$ — эффективная полоса пропускания контура;

$$C_j = \begin{cases} \left(\frac{2^{j-1}}{j!} \right) \left(\frac{2B_K}{n_c} \right)^{j-2} \left(\frac{n_c D / \lambda}{n_c + 4n_{\text{ф}}} \right), & \text{если } j \text{ — нечетное;} \\ \left(\frac{2^{j-1}}{j!} \right) \left(\frac{2B_K}{n_c} \right)^{j-2}, & \text{если } j \text{ — четное.} \end{cases}$$

Коэффициенты уравнения (7.38) целиком определяются величиной n_c/B_K , которая представляет собой среднее число сигнальных электронов за время $1/B_K$, равное временной постоянной контура сопровождения. Коэффициентами уравнения (7.38) при $j > 3$ можно пренебречь, а при $n_c/B_K \gg 1$ можно получить следующее приближенное выражение для уравнения (7.38):

$$0 = \rho \varepsilon w(\varepsilon) + \frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (7.39)$$

Решением уравнения (7.39) является

$$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi/\rho)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2(1/\rho)}\right] \quad (7.40)$$

при выполнении условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon) d\varepsilon = 1$.

Таким образом, ошибка сопровождается моноимпульсной системой в установившемся режиме описывается нормальным законом с нулевым средним и дисперсией, равной $1/\rho$ и изменяющейся обратно пропорционально количеству сигнальных электронов, полученных системой в течение постоянной времени контура. Очевидно, что аналогичный результат можно получить и для канала сопровождения по азимуту.

7.4. ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЫ НА ТОЧНОСТЬ СОПРОВОЖДЕНИЯ

Свойства канала распространения оптического излучения определяют схемные и конструктивные параметры любой информационной системы, в том числе и системы поиска и сопровождения. Процесс распространения когерентного излучения видимого и ИК-диапазонов, плотность потока мощности которого не превышает 100 Вт/см^2 , через атмосферу сопровождается следующими явлениями [30]:

1) поглощением света молекулами воздуха и аэрозольной фракцией;

2) рассеянием излучения на флуктуациях плотности воздуха (рассеяние Релея) и на аэрозолях (рассеяние Ми);

3) искажением формы луча, вызванным турбулентной атмосферой, приводящим к его расширению и качанию «центра тяжести».

Первые два явления определяют среднее затухание электромагнитного поля при фиксированных атмосферных условиях и сравнительно медленные изменения поля (медленные замирания) при изменении метеорологических условий.

Затухание излучения в атмосфере может быть описано уравнением Бугера, согласно которому уменьшение интенсивности при прохождении атмосферного слоя толщиной L определяется выражением

$$J(\nu) = J_0(\nu) \exp[-\beta(\nu)L], \quad (7.41)$$

где $\beta(\nu)$ — коэффициент ослабления.

Подробное исследование зависимости (7.41) проводится в работах [59, 70].

Третье явление — турбулентность — обуславливает быстрые изменения поля (быстрые замирания), наблюдающиеся при любой погоде.

Турбулентная атмосфера представляет собой среду с нестационарным и неоднородным характером изменения ее параметров.

Поскольку математического аппарата для описания нестационарных случайных процессов пока не создано, для описания свойств реальной атмосферы применяются две достаточно обоснованные модели [42]: модель изотропной турбулентности (модель Гаусса) и модель локально-изотропной турбулентности (модель Колмогорова).

В настоящее время широкое распространение получила модель локально-изотропной турбулентности, развитая в работе [75].

Модель локально-изотропной турбулентности основана на использовании понятия инерционного интервала, ограниченного внутренним и внешним масштабами турбулентности. Интенсивность турбулентности при данной модели описывается структурными функциями, а полученные теоретические зависимости достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Достаточно полные сведения о вариациях спектра флюктуаций температуры и показателя преломления атмосферы, учитывающие ее сложную структуру и особенности, связанные с макромасштабными явлениями, в настоящее время отсутствуют. Поэтому в области волновых чисел, существенных для явлений распространения оптических волн, единственным параметром, характеризующим турбулентные флюктуации показателя преломления, является структурная характеристика C_n^2 .

Модель высотного профиля структурной характеристики показателя преломления атмосферы

Параметр C_n^2 в оптическом диапазоне может быть определен по известной зависимости [16]

$$C_n^2 = \left[\frac{k(\lambda) 10^{-6} P}{T^2} \right]^2 C_T^2,$$

где $k(\lambda)$ — коэффициент пропорциональности (для $\lambda = 0,5$ мкм $k(\lambda) = 77,6$); P — атмосферное давление, Па; T — абсолютная температура, К; C_T^2 — структурная характеристика температурного поля, град²·см^{-2/3}.

Основная трудность при определении C_n^2 заключается в нахождении C_T^2 , так как величины T и P могут быть определены по данным измерений. Для общего случая наклонных трасс необходимо знание высотного профиля $C_T^2(h)$ через всю толщину атмосферы, однако к настоящему времени такие данные имеются лишь для ограниченных значений высот и состояний атмосферы [50, 55, 58, 75]. Зависимость $C_n^2(h)$, полученная на основании анализа усредненных метеорологических данных о скорости диссипации кинетической энергии и градиента средней температуры, приведена в работе [100].

Из работ [39, 55] следует, что основой для классификации высотных профилей C_n^2 могут стать закономерности, описывающие

изменение C_n^2 с высотой при основных типах стратификации (устойчивой, безразличной, неустойчивой). При этом отмечается, что наиболее надежными аппроксимациями $C_n^2(h)$ являются зависимости, применяемые отдельно для приземного, пограничного и более высоких слоев атмосферы, полученные для условий, близких к неустойчивой температуре стратификации. Обобщенную запись этих зависимостей можно представить в виде

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0) (h/h_0)^{-\alpha} \exp(-h/\bar{h})^\beta, \quad (7.42)$$

где $\bar{h} = 3200$ м — эффективная толщина оптически активного турбулентного слоя.

Для приземного слоя h_0 составляет несколько метров, $\alpha = 4/3$, $\beta = 0$; для пограничного слоя $h_0 = 50$ м, $\alpha = 2/3$, $\beta = 0$. Зависимость (7.42) при $\alpha = 2/3$ и $\beta = 1$ рекомендуется для расчета наклонных трасс через всю толщу атмосферы [39].

Опубликованные в последнее время экспериментальные данные [55, 58] позволяют рассмотреть практическое приближение для анализа $C_n^2(h)$ также в условиях устойчивой и безразличной температурных стратификаций. На рис. 7.13 показаны зависимости $C_n^2(h)$ как систематизированные ранее в работах [47] и [78], так и полученные расчетом по значениям $C_T^2(h)$, приведенным в работах [55, 58]. Анализ данных зависимостей позволяет сделать следующие выводы.

1. В приземном слое атмосферы толщиной в несколько десятков метров кривая 4, экспериментальные данные, обобщенные в

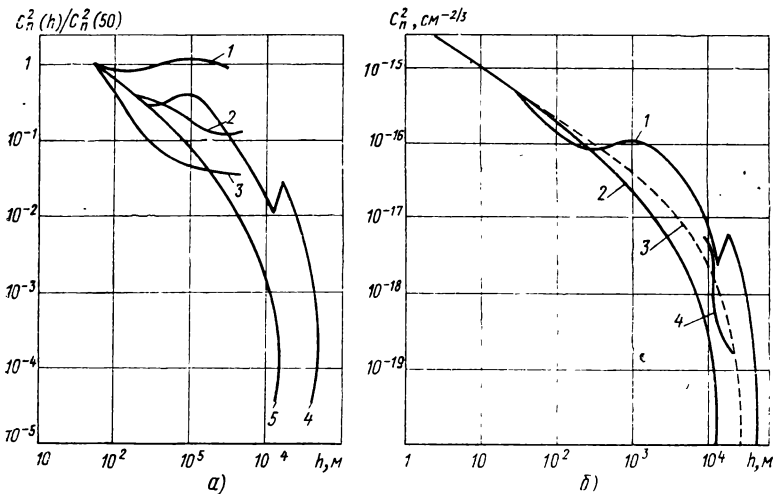


Рис. 7.13. Зависимости структурной характеристики C_n^2 от высоты h :

a — при приведении к $C_n^2(50)$: 1 — при устойчивой стратификации; 2 — при безразличной стратификации; 3 — при неустойчивой стратификации; 4 — по модели согласно [100]; 5 — по зависимости (7.42); *b* — при аппроксимации: 1 — по модели согласно [100]; 2 — по зависимости (7.42); 3 — по зависимости (7.43); 4 — по экспериментальным данным согласно [55]

работе [47] и кривая 5 практически совпадают (см. рис. 7.13, а).

2. В пограничном слое атмосферы (высотой до нескольких километров), для которого в настоящее время имеется наибольшее количество экспериментальных данных, кривая 4 достаточно точно соответствует средним условиям температурной стратификации. Аппроксимация выражения (7.42) является достаточно надежной для неустойчивой стратификации и менее надежной — для безразличной и устойчивой стратификаций.

Экспериментальные данные по зависимости $C_n^2(h)$, полученные различными авторами, хорошо совпадают до высот 2 км для безразличной и неустойчивой стратификаций и менее 300 м — для устойчивой стратификации.

3. К экспериментальным данным по $C_n^2(h)$ в области верхней тропосферы и нижней стратосферы [58] наиболее близка кривая 4.

На рис. 7.13, б показана аппроксимация (пунктир), которая точнее, чем выражение (7.42), отражает высотный профиль C_n^2 , соответствующий как кривой 1 согласно [100], так и экспериментальным данным:

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0) (h/h_0)^{-2/3} \exp(-h/h'), \quad (7.43)$$

где $h' \approx 10\,000$ м и соответствует полной толщине оптически активного слоя атмосферы.

Зависимость (7.43) может быть рекомендована для практических оценок характеристик волны, прошедшей через всю толщу атмосферы, когда исходные метеорологические данные могут быть получены измерением непосредственно у поверхности Земли.

Если при расчетах рассматривается координата x вдоль трассы и требуется знание $C_n^2(x)$, а не $C_n^2(h)$, то необходимо определить высоту $h = h(x)$, соответствующую расстоянию вдоль трассы.

Пренебрегая регулярной рефракцией в атмосфере, в случае передатчика, расположенного вблизи Земли на высоте h_0 (распространение снизу вверх), находим

$$h(x) = h_0 + R \left[\left(\frac{x}{R} \right)^2 + 2 \frac{x}{R} \cos \beta + 1 \right]^{1/2} - R, \quad (7.44)$$

где R — радиус Земли; β — зенитный угол.

Если выполняется условие $h(x)/R \cos \beta \ll 1$, то из формулы (7.44) следует простое приближенное соотношение:

$$h(x) \approx h_0 + x \cos \beta.$$

Если передатчик и приемник меняются местами, то $C_n^2(x)$ по-прежнему определяется этими же зависимостями.

Точностные характеристики систем углового сопровождения в турбулентной атмосфере

Рассмотренные в разд. 7.1 одноканальный (конического сканирования) и многоканальный (моноимпульсный) методы автосопровождения относятся к классу амплитудных методов.

В связи с этим из всех эффектов, сопровождающих излучение лазера в турбулентной атмосфере, при исследовании данных систем необходимо учитывать флуктуации интенсивности, угла прихода лучей и «качание» пучка. Эффект «качания» при условии, что пучок не смещается полностью за пределы приемной апертуры, можно рассматривать как эффект, приводящий к дополнительным флуктуациям интенсивности пятна в фокальной плоскости приемной оптической системы, т. е. при исследовании систем сопровождения можно, в основном, ограничиваться учетом влияния флуктуаций интенсивности и флуктуаций угла прихода.

Рассмотрим соотношения, определяющие точностные характеристики систем сопровождения при флуктуациях интенсивности оптического излучения.

В моноимпульсной системе (см. рис. 7.11, б) приемник представляет собой матрицу, состоящую из четырех элементов. Пршедшее антенну оптическое излучение маяка после светоделительной призмы распределяется по поверхности четырех фотоприемников в двух каналах сопровождения. Будем считать, что распределение интенсивности на выходе реальной антенны определяется выражением (7.28):

$$E(\gamma) = 0,136 n^2 E_0 \exp \left[-\frac{n^2 \gamma^2}{2\theta^2} \right].$$

Координата сопровождаемого объекта будет пропорциональна величине

$$\frac{u_{1+3} - u_{2+4}}{u_{1+3} + u_{2+4}}, \quad (7.45)$$

где u_i — амплитуда электрического сигнала на выходе i -го фотоприемника.

Чтобы перейти от пространственного распределения интенсивности к плоскому, будем полагать, что выражение (7.45) пропорционально следующей зависимости:

$$\frac{u_{1+3} - u_{2+4}}{u_{1+3} + u_{2+4}} \approx \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2},$$

где $u_1 = u_{1+3}$; $u_2 = u_{2+4}$.

Если луч делится призмой пополам, то $E_1(\gamma) = E_2(\gamma) = 0,5 E_{\text{вх}}$. В противном случае при гауссовом характере распределений энергии [117]

$$E_1(\gamma) = 0,136 n^2 \sqrt{2\pi} \frac{\theta}{n} E_0 \left(0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\theta}{n}} \right) \int_0^{\gamma} \exp \left(-\frac{n^2 \gamma'^2}{2\theta^2} \right) d\gamma'; \quad (7.46)$$

$$E_2(\gamma) = 0,136 n^2 \sqrt{2\pi} \frac{\theta}{n} E_0 \left(0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\theta}{n}} \right) \int_0^{\gamma} \exp \left(-\frac{n^2 \gamma'^2}{2\theta^2} \right) d\gamma'.$$

Определим значение $\Delta_E = E_1 - E_2$ и $\Sigma_E = E_1 + E_2$:

$$\Delta_E = 2 \cdot 0,136 n^2 \sqrt{2\pi} \frac{\theta}{n} E_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\theta}{n}} \int_0^{\gamma} \exp\left(-\frac{n^2 \gamma'^2}{2\theta^2}\right) d\gamma'; \quad (7.47)$$

$$\Sigma_E = 0,136 n^2 \sqrt{2\pi} \frac{\theta}{n} E_0.$$

Из выражений (7.47) получим отношение

$$\alpha = \frac{\Delta_E}{\Sigma_E} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{\theta} \int_0^{\gamma} \exp\left(-\frac{n^2 \gamma'^2}{2\theta^2}\right) d\gamma', \quad (7.48)$$

или с учетом малости ошибки сопровождения

$$\alpha = \frac{\Delta_E}{\Sigma_E} \Big|_{\gamma \rightarrow 0} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{\theta} \gamma. \quad (7.49)$$

Поскольку сигнал на выходе фотоприемника пропорционален интенсивности потока оптического излучения, то можно записать, что

$$\frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{\theta} \gamma.$$

Среднеквадратичное значение ошибки, обусловленной флуктуациями напряжений u_1 и u_2 , будет иметь следующий вид:

$$\sigma_{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{n} \sqrt{D\left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right)}, \quad (7.50)$$

где D — дисперсия отношения напряжений.

Сглаживание (усреднение) по времени (черта сверху) суммы в знаменателе (7.50) производится в аппаратуре обработки сигналов [4]. Таким образом, для определения ошибки σ_{γ} , необходимо найти дисперсию величины $\overline{(u_1 - u_2)/(u_1 + u_2)}$. Для этого воспользуемся следующими положениями:

дисперсия произведения независимых центрированных случайных величин равна произведению их дисперсий

$$D[xy] = D[x] D[y];$$

логарифм отношения напряжения на выходе фотоприемника (u) при работе его в условиях турбулентной атмосферы к напряжению на выходе фотоприемника при отсутствии турбулентных флуктуаций (u_0) определяется как [42] $\ln(u/u_0) = 2\psi(t)$, причем $E[e^{2\psi(t)}] = e^{2\chi^2}$, где $\chi = \ln(A/A_0)$ (A_0 — амплитуда поля на оси пучка).

Тогда выражение для дисперсии (7.50) можно записать следующим образом:

$$D \left[\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \right] = a^2 u_0^2 (e^{8\sigma_\chi^2} - e^{-4\sigma_\chi^2}) \left\{ 0,5 + 2 \left[\frac{1}{\frac{\theta}{n} \sqrt{2\pi}} \int_0^\gamma \exp \left(-\frac{n^2 \gamma'^2}{2\theta^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times d\gamma' \right]^2 \right\} - 0,5 a^2 u_0^2 e^{4\sigma_\chi^2} (e^{1+R_\chi} - 1) + 2 \left[\frac{1}{\frac{\theta}{n} \sqrt{2\pi}} \int_0^\gamma \exp \times \right. \\ \left. \times \left(-\frac{n^2 \gamma'^2}{2\theta^2} \right) d\gamma' \right]^2 (e^{1+R_\chi} - 1), \quad (7.51)$$

где $a = 0,136n\theta \sqrt{2\pi}$; R_χ — коэффициент пространственной корреляции.

С помощью выражения (7.51) можно получить зависимости для дисперсии ошибки сопровождения моноимпульсной системой в условиях турбулентной атмосферы:

при $R_\chi = 0$

$$\sigma_{\gamma'}^2 = \frac{\pi\theta^2}{4n^2} (e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \left\{ 1 + \frac{2n^2}{\theta^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \Phi \left(\frac{n}{\theta \sqrt{2}} \gamma \right)^2 \right] \right\}; \quad (7.52)$$

при $R_\chi = 1$

$$\sigma_{\gamma'}^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n}{2\theta} \sqrt{\left[(e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \Phi \left(\frac{n}{\theta \sqrt{2}} \gamma \right) \right]}, \quad (7.53)$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятностей.

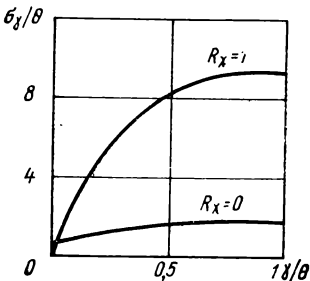


Рис. 7.14. Графики изменения среднеквадратичной ошибки сопровождения моноимпульсной системой в турбулентной атмосфере

Из графиков рис. 7.14, построенных по зависимостям (7.52) и (7.53), следует, что σ_γ зависит как от пространственной корреляции флюктуаций, так и от величины ошибки сопровождения, причем при $\gamma/\theta > 1$ наступает насыщение величины σ_γ .

Для оценки точности сопровождения методом конического сканирования воспользуемся зависимостями, полученными в разд. 7.3, а также общими соотношениями, приведенными в работах [36, 60]. Считая, что система работает на линейном участке пеленгационной характеристики, запишем выражения для напряжения сигнала:

на выходе фотоприемника

$$u_{\text{фн}} = 0,082 n^3 \frac{u_0}{\theta} \cos(\omega_0 t - \varphi) \gamma + 0,082 n^2 u_0;$$

на выходе фазового детектора (канала y)

$$u_{\text{ф.л}} = 0,041 \alpha n^3 \frac{u_0 u_{\text{ГОН}}}{\theta} \gamma_y, \quad (7.54)$$

где ω_0 — частота сканирования; α — коэффициент пропорциональности; $u_{\text{ГОН}}$ — напряжение сигнала генератора опорного напряжения (ГОН).

Остальные обозначения такие же, как и в моноимпульсном методе.

Под действием атмосферных флуктуаций сигнал на выходе фазового детектора [см. выражение (7.54)] будет изменяться по следующей зависимости:

$$u_{\text{ф.л}} = 0,041 \alpha n^3 u_0 u_{\text{ГОН}} e^{2\sigma_\chi^2} \left\{ \frac{\gamma_y}{\theta} \left(1 + \frac{u(t) + u_0 \exp(2\sigma_\chi^2)}{u_0 \exp(2\sigma_\chi^2)} \cos[\omega_{\text{мол}} t - \varphi(t)] \right) + \left(1 + \frac{u(t) - u_0 \exp(2\sigma_\chi^2)}{u_0 \exp(2\sigma_\chi^2)} \cos[\omega_{\text{мол}} t - \varphi(t)] \right) \right\} \cos \omega_0 t, \quad (7.55)$$

где $\omega_{\text{мол}}(t)$, $\varphi(t)$ — частота и фаза паразитного модулирующего сигнала в результате турбулентности атмосферы; ω_0 — частота сигнала ГОН.

Чтобы определить среднеквадратичное значение ошибки за счет флуктуаций амплитуды и фазы сигнала, воспользуемся зависимостью

$$\sigma_{\gamma_y}^2 = \frac{D[u_{\text{ф.л}}]}{\left[\frac{d}{d\gamma} (u_{\text{ф.л}}) \right]^2} = \frac{D[u_{\text{ф.л}}]}{\left(0,041 \alpha n^3 \frac{u_0 u_{\text{ГОН}}}{\theta} \right)^2}. \quad (7.56)$$

Дисперсию напряжения на выходе фазового детектора определим из выражения (7.55) с помощью зависимости $D[u_{\text{ф.л}}] = E[u_{\text{ф.л}}^2] - E^2[u_{\text{ф.л}}]$ и следующих допущений:

флуктуации $\omega_{\text{мол}}(t)$ и $[\omega_{\text{мол}}(t) - \omega_0]$ лежат в области низких частот, а флуктуации фазы $\varphi(t)$ — в области более высоких частот;

$$\begin{aligned} \omega_{\text{мол}}(t) < \omega_0, \\ D[u_{\text{ф.л}}] = u_0^2 u_{\text{ГОН}}^2 e^{4\sigma_\chi^2} (e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \cos^2 \varphi(t) \left(0,0017 \frac{\alpha^2 n^6}{\theta^2} \gamma_y^2 + \right. \\ \left. + 0,00085 \frac{\alpha^2 n^5}{\theta} \gamma_y + 0,00042 \alpha^2 n^4 \right). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Тогда выражение для дисперсии ошибки сопровождения получится подстановкой выражения (7.57) в выражение (7.56):

$$\sigma_{\gamma_y}^2 = e^{4\sigma_\chi^2} (e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \overline{\cos^2 \varphi(t)} \theta^2 \left(0,0017 \frac{\alpha^2 n^6}{\theta^2} \gamma_y^2 + \right. \\ \left. + 0,00085 \frac{\alpha^2 n^5}{\theta} \gamma + 0,00042 \alpha^2 n^4 \right) / 0,0017 \alpha^2 n^6. \quad (7.58)$$

При $\gamma = 0$

$$\sigma_{\gamma_y}^2 = \frac{\exp(4\sigma_\chi^2) (e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \overline{\cos^2 \varphi(t)} \theta^2}{4n^2}. \quad (7.59)$$

Выражение (7.58) получено при выполнении следующих условий:

$$\omega_{\text{мод}}(t) < \omega_0; \quad \omega_{\text{мод}}(t) < \Delta f_{\text{пр}}; \quad \omega_{\text{мод}}(t) - \omega_0 \ll \Delta f_{\text{пр}},$$

где $\Delta f_{\text{пр}}$ — полоса пропускания фазового детектора.

На рис. 7.15 показаны зависимости (7.58) для различных частотных соотношений ($\sigma_{\gamma_y}^{2*} = \sigma_{\gamma_y}^2 / e^{4\sigma_\chi^2} (e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \overline{\cos^2 \varphi(t)}$). Выражению (7.58) соответствует кривая 3, кривая 2 соответствует случаям $\omega_0 \gg \omega_{\text{мод}}(t)$ и $\omega_0 - \omega_{\text{мод}}(t) \gg \Delta f_{\text{пр}}$, т. е. когда $\sigma_{\gamma_y}^2 = e^{4\sigma_\chi^2} (e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \overline{\cos^2 \varphi(t)} \gamma_y^2$; кривая 1 построена для случая $\Delta f_{\text{пр}} < \omega_{\text{мод}}(t)$, $\omega_{\text{мод}}(t) - \omega_0 < \Delta f_{\text{пр}}$, т. е. когда $\sigma_{\gamma_y}^2 = \frac{\theta^2}{4n^2} e^{4\sigma_\chi^2} (e^{4\sigma_\chi^2} - 1) \overline{\cos^2 \varphi(t)}$ что соответствует отсутствию зависимости от γ .

Далее рассмотрим соотношения, определяющие точностные характеристики систем сопровождения при флуктуациях углов прихода оптического излучения.

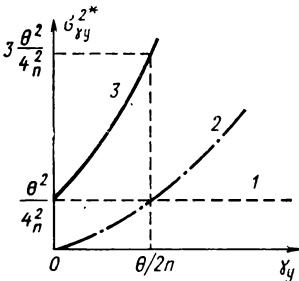


Рис. 7.15. Графики изменения среднеквадратичной ошибки сопровождения в турбулентной атмосфере по методу конического сканирования

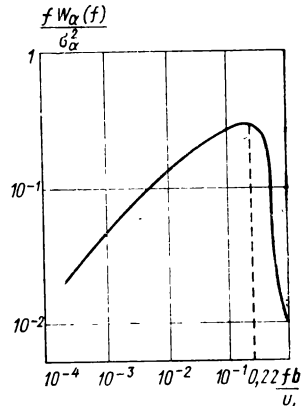


Рис. 7.16. Частотный спектр флуктуаций угла прихода плоской волны

На рис. 7.16 показан теоретический частотный спектр флюктуаций угла прихода плоской волны в фокальной плоскости приемной антенны [75]. Этот спектр хорошо согласуется с экспериментальными данными и описывается следующей зависимостью:

$$\frac{W_{\alpha}(f)}{\sigma_{\alpha}^2} = 0,045 \sin^2 \left(\frac{\pi D f}{v_{\perp}} \right) \left(\frac{D}{v_{\perp}} \right)^{-5/3} f^{-8/3}, \quad (7.60)$$

где σ_{α}^2 — дисперсия флюктуаций угла прихода; D — диаметр приемной антенны; v_{\perp} — составляющая скорости ветра, перпендикулярная направлению распространения волн.

При выводе зависимости (7.60) полагалось, что v_{\perp} и турбулентность неизменны вдоль трассы. Для ориентировочных расчетов можно использовать зависимость (7.60) и для наклонных трасс, если под v_{\perp} понимать ее значение в слое, где турбулентность наибольшая.

Спектр вида (7.60) достаточно хорошо аппроксимируется дробно-рациональной функцией [71]

$$W_{\alpha}(\omega) = \frac{B\omega^2}{c^3 + \omega^2}. \quad (7.61)$$

Необходимость аппроксимации функцией такого вида объясняется тем, что при статистическом подходе к исследованию точности систем автосопровождения метод вычисления среднеквадратичной ошибки основан на предположении, что спектральные плотности сигнала и помехи представляют собой дробно-рациональные функции.

Выражение (7.61) содержит два независимых коэффициента, определяемых из дополнительных условий. Предполагая, что шум из-за флюктуаций направления прихода на входе оптической системы сопровождения есть стационарный случайный процесс, находим

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\alpha}(\omega) d\omega = \frac{B}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{c^2 + \omega^2} d\omega.$$

В результате вычислений первое дополнительное условие получаем в следующем виде [71]:

$$\sigma_{\alpha}^2 = B/4c; \quad B = 4C\sigma_{\alpha}^2.$$

Для среды с плавным изменением C_n^2 вдоль трасс и плоской волны σ_{α}^2 рассчитывается по зависимостям [75]:

$$\sigma_{\alpha}^2 = 2,84 C_n^2 D^{-1/3} L -$$

для горизонтальных трасс и

$$\sigma_{\alpha}^2 = 2,84 D^{-1/3} \sec \theta \int_{h_0}^H C_n^2(h) dh - \quad (7.62)$$

для наклонных трасс,

где θ — зенитный угол источника излучения; h_0, H — высоты расположения приемника и передатчика соответственно.

Поскольку на практике пользуются различными аппроксимациями $C_n^2(h)$, то, подставив аппроксимацию

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0)(h/h_0)^{-2/3} \exp(-h/\bar{h}),$$

где $\bar{h} = 10\,000$ м, в выражение (7.62), получим

$$\sigma_\alpha^2 = 2,84 D^{-1/3} \sec \theta h_0^{2/3} C_n^2(h_0) \int_{h_0}^H h^{-2/3} \exp(-h/\bar{h}) dh. \quad (7.63)$$

Интеграл в выражении (7.63) можно записать через неполную гамма-функцию

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

т. е.

$$\int_{h_0}^H h^{-2/3} \exp(-h/\bar{h}) dh = 10^{-4/3} [\gamma(1/3, 10^{-4} H) - \gamma(1/3, 10^{-4} h_0)],$$

где все высоты выражаются в метрах.

В качестве второго ограничивающего условия можно использовать то обстоятельство, что частотный спектр флуктуаций имеет максимум на частоте, определяемой из равенства $\omega = 2\pi \cdot 0,22v_1/D$ (см. рис. 7.16). Преобразуем выражение (7.61) к виду

$$W_\alpha(\omega) = \frac{B}{c^2 \left(\frac{c}{\omega} + \frac{\omega}{c} \right)^2}. \quad (7.64)$$

Функция (7.64) имеет максимум при $\omega = c$, что можно использовать для нахождения c .

Поскольку частотный спектр флуктуаций углов прихода занимает более широкую полосу по сравнению с полосой пропускания реальных систем автосопровождения [45], можно считать спектральную плотность входного возмущения постоянной в пределах полосы пропускания и равной ее максимальному значению.

Тогда максимальное значение спектральной плотности флуктуаций угла прихода можно определить по формуле

$$W_\alpha(\omega)_{\max} = \frac{\sigma_\alpha^2}{c} = \frac{\sigma_\alpha^2 D}{0,44 \pi v_\perp}. \quad (7.65)$$

Представление спектральной плоскости в виде «белого» шума облегчает анализ точностных характеристик системы сопровождения в условиях атмосферных помех. Чтобы получить выражение для среднеквадратичной ошибки сопровождения, необходимо известными способами теории автоматического управления решить за-

дачу о прохождении «белого» шума [см. выражение (7.65)] через систему сопровождения с заданной передаточной характеристикой. При определении результирующей ошибки сопровождения в результате флуктуаций интенсивности и углов прихода волны необходимо учитывать, что эти составляющие общей ошибки независимы.

7.5. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ УГЛОВОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ

В гл. 5 отмечалось, что задачи установления и поддержания связи в ЛИС могут быть успешно решены при использовании специальных импульсных вызывных маяков. Период дискретности этих маяков определяет практически все основные параметры системы управления ЛИС. К их числу относятся:

- точность слежения;
- устойчивость системы сопровождения;
- особенности системы обнаружения сигнала (способ принятия решения);
- особенности системы поиска (число элементарных ячеек поиска, частота сканирования, инерционность исполнительных устройств и т. д.);

время активного существования маяка (энергетический ресурс);
энергопотребление системы управления.

Поскольку выходная мощность лазера зависит от потребляемой мощности системы накачки, время активного существования маяка будет определяться временем «жизни» лампы накачки. На рис. 7.17, устанавливающем связь выходной мощности лазера $P_{\text{вых}}$ с входной мощностью системы накачки $P_{\text{вх}}$, отмечено время существования криптоновых ламп накачки при различной потребляемой мощности [117]. Активным веществом лазера на АИГ: Nd является кристалл длиной около 7,6 см и диаметром около 0,64 см ($\tau_{\text{и}}=0,1...5$ мс, $F=50$ Гц). Отмечено также, что при $F=20$ Гц и $W=0,2$ Дж время существования ОКГ достигает около $5 \cdot 10^6$ импульсов.

Для установления связи между периодом дискретности маяка и размерами мгновенного поля зрения приемника перепишем формулу (5.5) в виде

$$\theta_{\text{пр}} = \frac{4P_{\text{пер}} D_{\text{пр}}}{\pi F S / N \theta_{\text{пер}}^2 R^2} \left(\frac{\tau_a \tau_{\text{пр}} \eta}{0,8 \tau_{\text{и}} N_{\lambda} \Delta \lambda h \nu} \right)^{1/2}, \quad (7.66)$$

где $P_{\text{пер}}$ — средняя мощность излучаемого сигнала.

Из уравнения (7.66) следует, что для получения максимально-го значения $\theta_{\text{пр}}$ при неизменном отношении сигнал/шум ($S/N = \text{const}$) необходимо минимизировать частоту следования импульсов F .

Динамические характеристики следящей системы ЛИС можно оценить по следующей приближенной зависимости:

$$\varepsilon = V_{\text{л.н.}} / 2F,$$

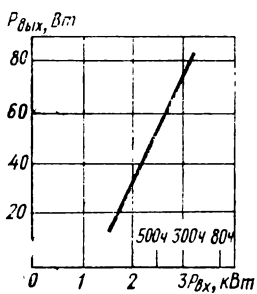


Рис. 7.17. Зависимость выходной мощности лазера от входной мощности системы накачки

где ε — пиковое значение ошибки сопровождения; $V_{л.в}$ — угловая скорость ухода линии визирования.

Следовательно, как для уменьшения ошибки сопровождения, так и для увеличения диапазона относительного перемещения отслеживаемого объекта необходимо увеличивать F .

Таким образом, период дискретности импульсной следящей системы ЛИС оказывает двойное воздействие на параметры системы: для улучшения точности, устойчивости, скорости сканирования необходимо уменьшать период дискретности, в то же время увеличение времени активного существования маяка, мгновенного поля зрения поискового приемника

и уменьшение энергопотребления системы приводит к необходимости уменьшения частоты следования импульсов. Поскольку рассмотренные параметры ЛИС включают многие другие характеристики системы и канала связи (например, показатель качества оптики, информационную емкость канала), то оптимизацию параметров управления ЛИС по критерию максимума периода дискретности с точки зрения ее важности можно отнести к задаче частичного синтеза системы.

Рассмотрим решение задачи синтеза импульсной следящей системы (ИСС), обеспечивающей сохранение заданного показателя колебательности системы и минимальной среднеквадратичной ошибки в результате шумового воздействия при минимальной частоте работы лазера.

К настоящему времени разработан аппарат исследования дискретных систем с помощью D - и Z -преобразований, позволяющий определять все интересующие разработчика характеристики следящих систем. Однако практическое применение данного аппарата бывает затруднительным из-за неизбежных громоздких вычислительных операций. Поэтому в последнее время развиваются методы анализа и синтеза ИСС, позволяющие с помощью аппарата ω -преобразования и понятия псевдочастоты получить соотношения, по форме аналогичные соотношениям для непрерывных систем, и на их основе применить метод логарифмических частотных характеристик и теории линейных импульсных систем. Далее будут использованы понятия и термины данного метода, обобщенные в работе [26].

На рис. 7.18 приведена простейшая структурная схема ИСС, где использованы следующие обозначения: $\beta(t)$ — управляющее воздействие; $\alpha(t)$ — регулируемая координата; $\delta(t)$ — непрерывная ошибка; $\delta[nT]$ — дискретная ошибка; a — простейший импульсный элемент; $\xi(t)$ — помеха со спектральной плотностью $S_{\xi}(\omega)$; ЭНП — экстраполятор нулевого порядка; Φ — фильтр; ИУ — исполнительное устройство.

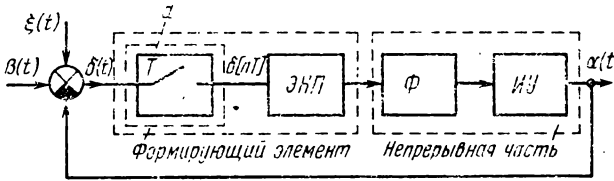


Рис. 7.18. Структурная схема ИСС

Импульсы подаются на ЭНП, который осуществляет запоминание их амплитуды в течение времени, равного периоду следования импульсов.

ω -преобразование вводится через понятие псевдочастоты ν :

$$\omega = j\nu,$$

которая связана с круговой частотой ω следующей зависимостью:

$$\nu = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2},$$

где T — период следования импульсов.

С помощью ω -преобразования передаточную функцию ИСС можно представить следующим образом:

$$W(\omega, \varepsilon) = \frac{\alpha(\omega, \varepsilon)}{\delta(\omega, \varepsilon)}, \quad (7.67)$$

где ε — постоянное число, принадлежащее интервалу $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Передаточная функция $W(\omega, \varepsilon)$ позволяет использовать для анализа и синтеза ИСС логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). При этом ЛЧХ, соответствующие передаточной функции разомкнутой ИСС $W(j\nu, \varepsilon)$, определяются теми же соотношениями, что и для обычных непрерывных систем:

$$L(\nu, \varepsilon) = 20 \lg |W(j\nu, \varepsilon)|; \quad \psi(\nu, \varepsilon) = \arg W(j\nu, \varepsilon).$$

На рис. 7.19 показаны типовые ЛЧХ ИСС с астатизмом 2-го порядка, где A — запас устойчивости по амплитуде; φ — запас устойчивости по фазе.

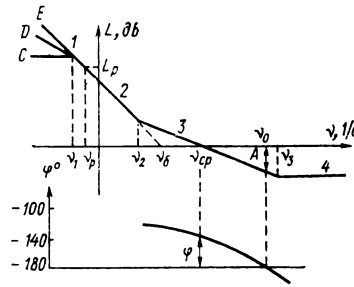


Рис. 7.19. ЛЧХ импульсной следящей системы с астатизмом 2-го порядка:

1 — первая низкочастотная асимптота; 2 — вторая низкочастотная асимптота; 3 — среднечастотная асимптота; 4 — высокочастотная асимптота

В зависимости от наклона второй низкочастотной асимптоты логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) ИСС при $\epsilon=0$ можно разбить на три типа:

- 1) наклон асимптоты — 20 дБ/дек;
- 2) наклон асимптоты — 40 дБ/дек;
- 3) наклон асимптоты — 60 дБ/дек.

В простейшем случае (ЛАЧХ вида *E*) получены следующие зависимости, связывающие точность сопровождения и показатель колебательности ИСС с характеристиками входного воздействия и параметрами передаточной функции:

$$v_p = \frac{\dot{\beta}_{\max}}{\beta_{\max}}; \quad L_p = 20 \lg \frac{\dot{\beta}_{\max}^2}{\beta_{\max}^2 \left(\frac{\delta_{\max}}{\dot{\beta}_{\max}} - \frac{T^2}{8} \right)};$$

$$v_6 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta_{\max}}{\dot{\beta}_{\max}} - \frac{T^2}{8}}}; \quad v_2 = v_6 \sqrt{\frac{M-1}{M}}; \quad v_{cp} = v_6 \sqrt{\frac{M}{M-1}}$$

где T — период следования импульсов; v_6 , v_{cp} — базовая и псевдо-частота среза; M — показатель колебательности; v_p , L_p — координаты рабочей точки.

Определим установившееся значение ошибки ИСС, полагая, что полезный сигнал и помеха приложены в одной и той же точке системы и полезный сигнал и помеха не коррелированы.

Значение среднего квадрата ошибки ИСС можно определить следующим образом:

$$\bar{\delta}^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \{ |1 - \bar{\Phi}(z, 0)|^2 S_m(z, 0) + |\bar{\Phi}(z, 0)|^2 S_n(z, 0) \} \times (7.68)$$

$$\times z^{-1} dz,$$

где $\bar{\Phi}(z, 0)$ — частотная характеристика замкнутой ИСС в z -форме.

Равенство (7.68) позволяет оценить средний квадрат ошибки ИСС, если управляющее воздействие ИСС имеет, как и помеха, случайный характер:

$$\bar{\delta}^2 = \bar{\delta}_d^2 + \bar{\delta}_n^2,$$

где $\bar{\delta}_d^2$ — средний квадрат динамической ошибки; $\bar{\delta}_n^2$ — средний квадрат ошибки, определяемой помехами, приведенными ко входу системы.

Если управляющий сигнал является регулярным, то динамическую ошибку обычно оценивают по ее максимальному значению в полосе рабочих частот, а ошибку $\bar{\delta}_n^2$ представляют в ω -преобразованном виде подстановкой в формулу (7.68) выражения

$$z = \left(1 + \frac{T}{2} \omega \right) / \left(1 - \frac{T}{2} \omega \right).$$

В результате будем иметь

$$\bar{\delta}_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\Phi}(j\nu, 0)|^2 \bar{S}_n(\nu) \frac{T}{1 + \frac{T^2}{4} \nu^2} d\nu. \quad (7.69)$$

По аналогии с непрерывными системами можно ввести понятие дискретного «белого шума», который может быть получен после квантования белого шума со спектральной плотностью $\bar{S}_n(\omega) = c^2$. Спектральная плотность дискретного белого шума имеет вид

$$\bar{S}_n(\nu) = c^2/T. \quad (7.70)$$

Если на вход ИСС поступает помеха в виде непрерывного случайного сигнала, которая после квантования превращается в дискретный белый шум со спектральной плотностью $\bar{S}_n(\nu)$, то значение среднего квадрата ошибки импульсной системы в соответствии с выражением (7.69) можно определить равенством

$$\bar{\delta}_n^2 = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\Phi}(j\nu, 0)|^2 \frac{d\nu}{1 + \frac{T^2}{4} \nu^2}, \quad (7.71)$$

или

$$\bar{\delta}_n^2 = c^2 I, \quad \text{где} \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\Phi}(j\nu, 0)|^2 \frac{d\nu}{1 + \frac{T^2}{4} \nu^2}. \quad (7.72)$$

Исследования ИСС с помощью ЛАЧХ показывают, что псевдочастота ν_1 сопряжения первой и второй низкочастотных асимптот лежит существенно ниже псевдочастоты среза ν_{cp} (см. рис. 7.19) и, следовательно, оказывает незначительное влияние на запасы устойчивости, коэффициент колебательности и значение среднего квадрата ошибки ИСС. Поэтому для облегчения исследований оказывается целесообразным опустить из рассмотрения первую низкочастотную асимптоту [27], т. е. свести ЛАЧХ типа II к виду E. При этом ЛАЧХ будет однозначно определяться тремя параметрами: псевдочастотой, соответствующей полупериоду следования импульсов $\nu_0 = 2/T$, псевдочастотой сопряжения среднечастотной и низкочастотной асимптот ν_2 и псевдочастотой сопряжения среднечастотной и высокочастотной асимптот ν_3 .

Малое число параметров, определяющих вид ЛАЧХ, позволяет сравнительно просто получить графические зависимости этих параметров от показателей качества регулирования, например значения интеграла в выражении (7.72) и показателя колебательности

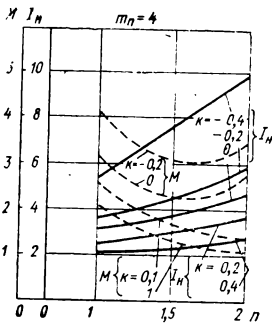


Рис. 7.20. Номограммы для определения показателя колебательности и интеграла точности

в функции параметров ЛАЧХ. Эти зависимости обычно представляются в виде номограмм и позволяют определять параметры желаемых ЛАЧХ в соответствии с требованиями, предъявляемыми к качеству работы ИСС.

Для удобства номографирования показателей качества ИСС производится нормировка ЛАЧХ, например к базовой псевдочастоте ν_6 , что эквивалентно изменению масштаба по оси частот. Тогда может быть получено следующее представление интеграла (7.72) в системе с нормированной частотной характеристикой [26]:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Phi_n \left(j \frac{\nu}{\nu_6}, 0 \right) \right|^2 \frac{1}{1 + \frac{T^2}{4T_6^2} \frac{\nu^2}{\nu_6^2}} d \frac{\nu}{\nu_6}, \quad (7.73)$$

где $T_6 = 1/\nu_6$.

Поэтому выражения (7.71) и (7.72) можно переписать в виде

$$I = I_n \nu_6 \quad (7.74)$$

и

$$\bar{\delta}_n^2 = c^2 \nu_6 I_n. \quad (7.75)$$

Так как c^2 — постоянная величина, а величина ν_6 определяется приложенным к системе регулярным воздействием, то влияние приложенных к системе помех на точность работы ИСС сводится к определению базовой псевдочастоты ν_6 и интеграла I_n в соответствии с формулой (7.73).

Для простоты построения номограмм по нормированным ЛАЧХ вводятся безразмерные параметры, которые для ЛАЧХ типа II имеют следующий вид:

$$\nu_{cp}/\nu_6 = n; \quad \nu_0/\nu_6 = \frac{2T_6}{T} = mn; \quad \nu_3/\nu_6 = mn/k. \quad (7.76)$$

Если воспользоваться этими параметрами, то с помощью простых арифметических операций можно получить зависимость интеграла I_n от параметров нормированных ЛАЧХ — mn , n и k . В функции от этих параметров может быть определен и показатель колебательности M . Это позволяет выразить значение I_n и M графически в виде номограмм.

Каждая номограмма представляет собой семейство кривых, являющихся функциями параметра n при различных значениях k [27]. При этом значение полупериода следования импульсов фиксируется и, например, для ЛАЧХ типа II равно mn (рис. 7.20).

Определение показателя колебательности и интеграла I_n с помощью номограмм является задачей анализа ИСС и может быть рассмотрено на следующем примере. Пусть требуется определить M , $\overline{\delta}_n^2$ и запас устойчивости ИСС с периодом следования импульсов $T_0=0,16$ с, $S_n(\omega)=c^2=2$ минуты²·с/рад и заданной передаточной функцией $W(\omega, 0)$ в ω -преобразованном виде. Построив ЛАЧХ системы и определив ее тип (например, тип II), находят значения базовой псевдочастоты и величины параметров n , mn , k , которые, например, оказались равны:

$$v_6=2,5 \text{ 1/с}; \quad mn=4; \quad k=0,4; \quad n=1,5.$$

Далее по номограмме (см. рис. 7.20) находим: $I_n \approx 2$, $M=1,66$. С помощью равенства (7.75) определяем значение среднеквадратичной ошибки системы $\overline{\delta}_n^2=I_n v_6 c^2=10$ минут². Запас устойчивости системы по фазе $\varphi=41^\circ$, а по амплитуде — $A=16$ дБ (см. рис. 7.19).

Графический метод, основанный на применении номограмм, может быть использован и для синтеза ИСС с оптимизацией ее основных параметров. Однако определение максимального периода дискретности ИСС таким методом предполагает наличие априорных сведений о спектральной плотности помехи, а также исключает возможность исследования периода дискретности в области максимизации его значений.

В работе [46] показано, что избежать этих недостатков можно, если использовать для целей анализа и синтеза ИСС графические зависимости вида

$$F=F(I_n), \quad (7.77)$$

где F — частота следования импульсов; I_n — интеграл в выражении (7.73).

Методика определения зависимостей (7.77) включает следующие этапы:

1) по известной методике максимизации периода дискретности [26] с учетом возможных технических средств коррекции ИСС, передаточной функции ее неизменяемой части и требований, предъявляемых к качеству регулирования, выбирается тип желаемой ЛАЧХ, определяется базовая псевдочастота v_6 и производится нормировка ЛАЧХ относительно v_6 ;

2) по определенной базовой псевдочастоте v_6 и зависимости (7.75) рассчитывается значение интеграла I_n ;

3) задавая ряд табличных значений mn (для ЛАЧХ типа II), по заданному значению показателя колебательности M и вычисленному значению I_n строится семейство кривых $n=n(I_n, mn, k)$ и $n=n(M, mn, k)$, точки пересечения которых при одинаковых значениях k соединяются плавной кривой. Поскольку значение периода дискретности определяется равенством $T=2v_6/mn$, то минимальной частоте будут соответствовать параметры системы, определяемые точкой сопрягающей кривой с минимальным значением параметра mn ;

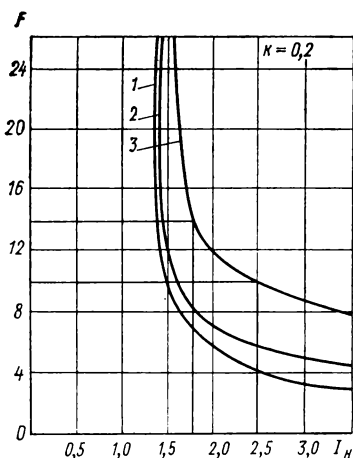


Рис. 7.21. Зависимость частоты следования импульсов от параметров ИИС:

1 — $M=1,6$; $\nu_6=2 \text{ с}^{-1}$; 2 — $M=1,25$; $\nu_6=2 \text{ с}^{-1}$; 3 — $M=1,6$; $\nu_6=5 \text{ с}^{-1}$

4) для ряда значений параметров системы (M, I_H, ν_6, k) определяется набор кривых $n=n(mn)$ и точки сопрягающих кривых, соответствующие минимальному значению mn . По совокупности полученных значений mn рассчитываются значения частоты $F = mn\nu_6/2$, набор которых получается изменением ν_6 при $k=\text{const}$ и использовании I_H в качестве аргумента (рис. 7.21).

Как следует из рис. 7.21, зависимости $F=F(I_H)$ качественно подтверждают основные закономерности, характеризующие систему:

- 1) с увеличением показателя колебательности M при фиксированном F величина интеграла I_H уменьшается, т. е. уменьшается среднеквадратичная ошибка, обусловленная шумами;
- 2) с увеличением базовой частоты ν_6 растет значение частоты следования импульсов, при которой значение интеграла I_H стабилизируется. Необходимо отметить, что при больших частотах величина I_H уменьшается незначительно.

С помощью полученных зависимостей можно учесть информацию о спектральной плотности при оптимизации частоты ИСС. При известной спектральной плотности $S(\omega)$ вопрос о целесообразности выбора меньшего значения I_H решается из соотношения среднеквадратичной и динамической ошибок (δ_H и δ_D). В этом случае минимальное значение F_{\min} будет соответствовать выбранному значению I_H из графика. Если информация о $S(\omega)$ отсутствует, целесообразно выбрать такое значение F , при котором I_H стабилизируется.

Необходимо учитывать, что определенное таким образом значение F_{\min} должно быть не менее некоторого начального значения F_{\min}^0 , что обеспечивает заданную точность внутри интервала дискретности. Величину F_{\min}^0 можно определить по следующей зависимости [26]:

$$F_{\min}^0 \geq \sqrt[m+1]{a_{m+1}/(m+1)! \delta_{\max}}$$

где $m=l+r$ — порядок экстраполяции системы; (l — порядок экстраполятора; r — порядок астатизма исходной системы).

В качестве a_{m+1} выбирается максимальное значение производной $(m+1)$ -го порядка от входной величины.

При построении зависимостей $F=F(I_H)$ существен выбор параметра k , поскольку, как показывает анализ зависимостей $F=F(I_H)$, существует предельное значение k , при котором не может быть

реализовано требуемое значение M при уменьшении параметра m_n (т. е. частота F). Так, ИСС с $M=1,25$ не могут быть реализованы при $k < 0,4$, $m_n < 8$. Так как $k = v_0/v_3$, то в области малых частот с увеличением v_3 , т. е. с уменьшением k , ухудшается устойчивость ИСС.

Применение зависимостей $F = F(I_n)$ рассмотрим на примере синтеза ИСС, воспроизводящей управляющее гармоническое воздействие вида $\beta(t) = 0,59 \sin(0,25t)$ при минимальной частоте работы системы и следующих ограничениях: динамическая ошибка δ_d системы не должна превышать 5 минут; среднеквадратичная ошибка $\delta_{п.}$, обусловленная помехой типа белого шума со спектральной плотностью $c^2 = 0,5$ минут²·с/рад не должна превышать 2,5 минут; показатель колебательности $M = 1,6$.

Выбрав в качестве желаемой ЛАЧХ типа II, воспользуемся решением задачи с аналогичными условиями из работы [26], где были определены следующие характеристики ИСС: $v_6 = 51$ л/с; $I_n = 2,5$; $k = 0,2$. По зависимостям $F = F(I_n)$ (см. рис. 7.21) определяем допустимую область частот, в которой $I_n < 2,5$; $F_{\min} > 10$ Гц. Для ИСС с астатизмом второго порядка и экстраполятором нулевого порядка ($m = 2$) расчетное значение F_{\min}^0 составляет 1 Гц. Как следует из рис. 7.21, увеличивая минимальное значение F до 14 Гц, можно уменьшить I_n до 1,75, т. е. значительно снизить ошибку ИСС. При $F_{\min} \geq 24$ Гц значение I_n стабилизируется.

Таким образом, с помощью графических зависимостей $F = F(I_n)$ решаются задачи анализа и синтеза ИСС, поскольку они наглядно определяют влияние характеристик системы, управляющего воздействия и действующей помехи на частоту работы ИСС.

7.6. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА СИНТЕЗА СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ ЛИС

Рассмотрим функциональные связи параметров следящей системы ЛИС с точки зрения обеспечения основной характеристики системы — требуемой точности сопровождения (рис. 7.22).

Максимально допустимая ошибка сопровождения $\delta_{\max}^{\text{доп}}$ определяется компромиссом между отношением сигнал/шум (S/N), характеризующим требуемой точностью измерения параметров движения объектов или необходимой пропускной способностью канала связи (C_u), и обеспечением нормального динамического режима следящей системы (см. разд. 7.5), что условно на схеме изображено блоком с указанием передаточной функции следящей системы $\Phi(jv)$. В качестве регулирующих параметров $\delta_{\max}^{\text{доп}}$ выступают тип системы управления, определяемый типом ОКГ, способом приема и обработки информации и другими специальными параметрами систем оптического диапазона, и показатель качества оптических антенн n .

Ошибка сопровождения складывается из статической и динамической ошибок. Выбор относительной величины статической и дина-

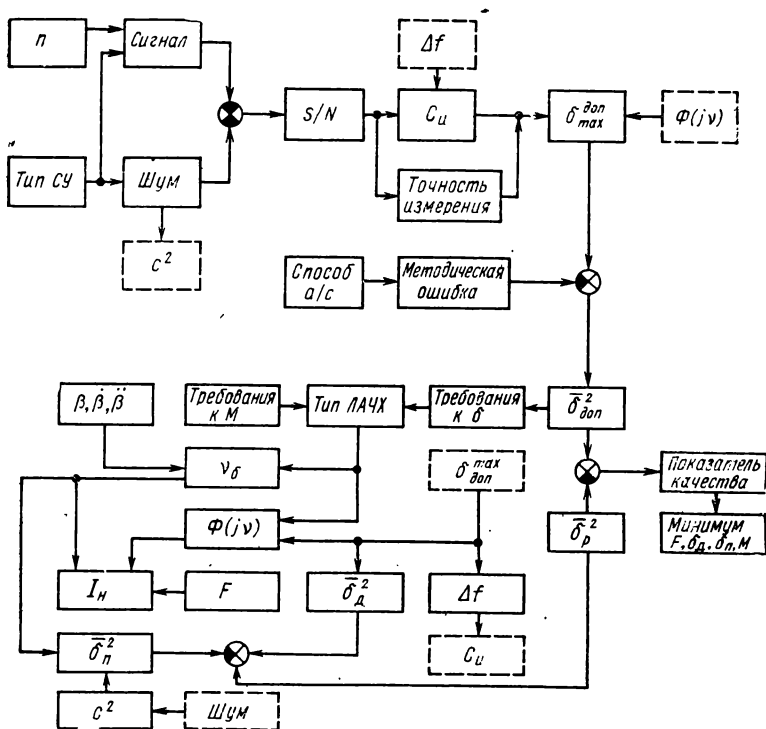


Рис. 7.22. Функциональные связи параметров следящей системы ЛИС

мической ошибок осуществляется на основе статической ошибки, ожидаемой от выявителя сигнала ошибки (дискриминатора), и ошибки, обусловленной нагрузкой. Поскольку ошибка от нагрузки системы обычно невелика, то наибольшую часть статической ошибки создает выявитель сигнала, характеристики которого определяются способом автосопровождения (а/с), а статическая ошибка в данном случае является методической ошибкой. Остающаяся в результате вычитания из $\delta_{\max}^{\text{доп}}$ ошибка за счет способа сопровождения представляет ту ошибку, которая допустима в следящей системе и которая для случайного входного и управляющего сигналов характеризуется своим средним квадратом $\delta_{\text{доп}}^2$.

При проектировании следящих систем необходимо удовлетворить двум противоречивым требованиям: обеспечить минимальную установившуюся ошибку слежения и добиться устойчивости системы. Запас устойчивости может быть выражен максимумом амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы (показателем колебательности M). Следовательно, при использовании ЛАЧХ для исследования следящих систем (см. разд. 7.5), ее тип будет определяться требованиями к точности сопровождения (δ) и показателю колебательности системы M .

В ЛИС большого радиуса действия существенное влияние на работу системы управления оказывает конечное время распространения оптического излучения и относительное движение объектов — эффект СА. Характеристики эффекта АСС (относительное смещение объектов β и его производные $\dot{\beta}$ и $\ddot{\beta}$), а также требования на допустимую ошибку δ определяют рабочую точку ЛАЧХ и соответствующую данному типу ЛАЧХ рабочую псевдочастоту. Зная рассмотренные параметры при известных передаточной функции системы $\Phi(j\nu)$ и характеристиках шумового воздействия (спектральной плотности шумов c^2) можно определить интеграл точности I_n и соответствующую ошибку в результате действия помехи δ_n^2 и уточнить показатель колебательности, что составляет содержание задачи анализа системы управления в режиме сопровождения.

Если учесть параметры, оказывающие влияние на характеристики системы управления в специфических условиях функционирования ЛИС КА, то в качестве параметра, существенно влияющего на показатель качества системы (разность допустимой ($\bar{\delta}_{доп}^2$) и расчетной (δ_p^2) ошибок), следует, в первую очередь, выделить частоту следования импульсов маяка F . Поэтому минимизация F является одним из важнейших направлений синтеза системы управления ЛИС. Принципы возможной оптимизации следящей системы по параметрам, общим для систем управления различного назначения, широко освещены в литературе по системам автоматического управления [26].

Рассмотренная структурная схема взаимного влияния параметров следящей системы ЛИС позволяет проследить процесс образования ошибки сопровождения в системе, роль различных факторов в формировании ограничений на ошибку, а также представить процесс управления показателем качества сопровождения с учетом особенностей ЛИС КА.

7.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ В РЕЖИМЕ ПОДДЕРЖАНИЯ СВЯЗИ

Рассмотренная в гл. 5 методика определения интенсивностей χ_{ij} ($i=1, \dots, 5$; $j=1, \dots, 6$) потока, переводящего систему из состояния i в состояние j , позволяет воспользоваться математической моделью управления ЛИС (см. разд. 5.3) для нахождения статистических характеристик режима установления связи. В данном разделе производится оценка интенсивности λ_{61} потока Π_{61} , определяющего перевод системы из состояния сопровождения b в состояние сканирования l (см. рис. 5.9) и характеризующего известное из теории радиотехнических следящих систем явление срыва слежения [51, 56, 60]. Зная интенсивности λ_{61} , можно с помощью зависимостей (5.33) и (5.34) определить значения предельных вероятностей поддержания связи в ЛИС.

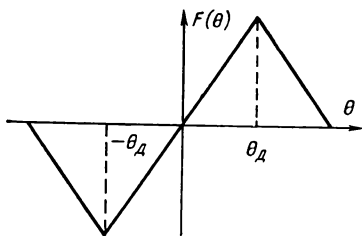


Рис. 7.23. Аппроксимация дискриминационной характеристики

Рассмотрим упрощенную структурную схему следящей системы по угловой координате в одной плоскости управления (см. рис. 7.7). Верхняя часть схемы представляет дискриминатор, рассматриваемый как безынерционный нелинейный элемент с характеристикой $F(\varepsilon)$. Фильтр вместе с приводом объединены в обратный тракт, который считается линейным с операторным коэффициентом передачи $k(p)$. Шум следящей системы $\xi(t)$ пересчитан на выход дискриминатора и считается белым шумом со спектральной плотностью $N(\theta)$.

Сделаем следующие допущения:

для учета относительного движения объектов входное возмущение будем считать линейной функцией времени:

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}t,$$

где $\dot{\theta}$ — угловая скорость перемещения объекта в плоскости управления;

обратный тракт системы рассматривается как идеальный интегратор, т. е. $k(p) = k/p$;

дискриминационная характеристика $F(\theta)$ линейно аппроксимируется в виде (рис. 7.23):

$$F(\theta) = \begin{cases} F'(0)\theta, & -\theta_d \leq \theta \leq \theta_d, \\ F'(0)(2\theta_d - \theta), & \theta_d \leq \theta \leq 2\theta_d, \\ F'(0)(2\theta_d + \theta), & -2\theta_d \leq \theta \leq -\theta_d, \end{cases}$$

где $F'(0)$ — крутизна пеленгационной характеристики; $2\theta_d$ — апертура дискриминатора;

под срывом слежения понимается хотя бы один выброс θ за уровень θ_d .

Так как система проектируется на высокую помехоустойчивость, то вероятность появления n выбросов за время t подчиняется закону Пуассона:

$$P(n) = \frac{n_{cp}^n}{n!} \exp(-n_{cp}),$$

где n_{cp} — среднее число выбросов над уровнем θ_d за время t .

С учетом сделанных допущений выражение для n_{cp} можно записать в виде [60]

$$n_{cp} = Qt \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\theta_d - \frac{\dot{\theta}}{Q}\right)^2\right] / 2\pi,$$

где $Q = kF'(0)$ — добротность системы; σ^2 — дисперсия флюктуационной ошибки слежения.

Поскольку вероятность получения одного и более выбросов

$$P_{>1}(t) = 1 - P_0(t) = 1 - \exp(-n_{cp}) \approx n_{cp},$$

то интенсивность потока Π_{61} , вызывающего срыв слежения, определяется как

$$\lambda_{61}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{n_{cp}}{t} = \frac{Q}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\theta_L - \frac{\dot{\theta}}{Q}\right)^2\right] = \lambda_{61}. \quad (7.78)$$

Приближенность зависимости (7.78) не позволяет учесть специфические особенности функционирования системы управления (СУ) ЛИС. В связи с этим далее рассматривается методика определения интенсивности λ_{61} (частоты срыва слежения), более полно учитывающая конкретные условия работы СУ ЛИС.

Рассматривая срыв слежения как выход ошибки слежения $\varepsilon(t)$ за границы апертур дискриминатора γ_1 или γ_2 для малых вероятностей срыва $P < (0,1 \dots 0,2)$, можно пользоваться следующей зависимостью для средней частоты ν_{cp} выбросов ошибки за уровни γ_1 и γ_2 [51]:

$$\nu_{cp} = \lambda_{61} \cong \nu_1 + \nu_2,$$

где ν_1 и ν_2 — частоты выбросов ошибки $\varepsilon(t)$ за уровни γ_1 и γ_2 .

Доказывается [76], что для стационарного и центрированного нормального процесса $\varepsilon(t)$ с дважды дифференцируемой функцией корреляции $r(\tau) = \sigma_\varepsilon^2 R(\tau)$ частота выбросов за уровень γ в пределах апертур линейного дискриминатора СУ ЛИС определяется по формуле

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R''(0)} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right), \quad (7.79)$$

$$\text{где } R''(0) = \left. \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

Для практических расчетов частоты выбросов параметры, входящие в формулу (7.79), обычно выражают через спектральную плотность процесса $\varepsilon(t)$:

$$\nu = \frac{\omega_{II}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right), \quad (7.80)$$

где ω_{II} — среднеквадратичная частота процесса $\varepsilon(t)$, определяемая выражением

$$\omega_{II} = -\frac{r''(0)}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\int_0^\infty \omega^2 N(\omega) d\omega}{\int_0^\infty N(\omega) d\omega} \quad (7.81)$$

$N(\omega)$ — спектральная плотность процесса $\varepsilon(t)$; σ_ε^2 — дисперсия ошибки слежения:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N(\omega) d\omega.$$

В СУ с нелинейными характеристиками дискриминаторов пользуются одним из известных методов линеаризации исходной системы (например, методом статистической линеаризации). В частности, в системах первого и второго порядков, где срыв слежения слабо зависит от формы дискриминационной характеристики, а определяется в основном площадями, заключенными между точкой устойчивого равновесия и границами апертюры дискриминатора, возможен простой способ линеаризации характеристики дискриминатора, при котором исходная нелинейная характеристика $F(\varepsilon)$ заменяется линейной с крутизной $S = F'(\varepsilon_A)$ и границами апертюры $\gamma_{\varepsilon 1}$ и $\gamma_{\varepsilon 2}$, определяемыми по формулам (при $\Lambda \geq 0$):

$$\gamma_{\varepsilon 1} = - \sqrt{\frac{2}{S} \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_1} [F(\varepsilon) - \Lambda] d\varepsilon}; \quad \gamma_{\varepsilon 2} = \sqrt{\frac{2}{S} \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_1} [F(\varepsilon) - \Lambda] d\varepsilon}, \quad (7.82)$$

где $\Lambda = F(\varepsilon_A)$ — постоянная расстройка в следящей системе, обусловленная действием динамического возмущения $\theta(t)$; ε_A , ε_1 — соответственно точки устойчивого и неустойчивого равновесия, определяемые при $N(\varepsilon) = \text{const}$ из уравнения $F(\varepsilon) - \Lambda = 0$.

Таким образом, замена порога γ на γ_ε позволяет определить по зависимости (7.80) с учетом формул (7.82) частоту срыва в нелинейной следящей системе.

Как следует из формул (7.82), для определения γ_ε необходимо знать:

- 1) дискриминационную характеристику системы $F(\varepsilon)$;
- 2) крутизну дискриминационной характеристики в точке устойчивого равновесия S ;
- 3) постоянную расстройку Λ .

Воспользуемся данной методикой для определения частоты срывов в одноканальной следящей системе с коническим сканированием (см. рис. 7.8).

Распределение энергии на выходе реальной оптической антенны подчиняется нормальному закону (см. разд. 7.2):

$$E(\varepsilon) = 0,136 n^2 E_0 \exp \left[- \frac{\varepsilon^2}{2(\theta_0/n)^2} \right]. \quad (7.83)$$

Для получения сигнала ошибки диаграмма направленности отклоняется на угол θ_1 относительно нормали к поверхности раскрыва и вращается так, что линейный угол между осью и максимумом диаграммы направленности имеет постоянную величину. Ранее

было показано, что для исключения нелинейных искажений необходимо, чтобы $\theta_1 \approx \theta/n$. Тогда, считая ФД идеальным множителем и используя зависимость (7.83), запишем выражения для выходного напряжения ФД в зависимости от ошибки сопровождения в одной плоскости ε_y (дискриминационную характеристику в плоскости «y»):

$$F(\varepsilon_y) = 0,034 \alpha n^2 I_0 R_n U_{\text{ГОН}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \theta_0/n)^2}{2(\theta_0/n)^2} \right] - \exp \left[-\frac{(\varepsilon + \theta_0/n)^2}{2(\theta_0/n)^2} \right] \right\}, \quad (7.84)$$

где α — коэффициент пропорциональности; I_0 — амплитуда сигнала с выхода ФП; R_n — нагрузка ФП; $U_{\text{ГОН}}$ — амплитуда напряжения с ГОН.

Для определения постоянной расстройки Λ воспользуемся стохастическим дифференциальным уравнением системы (7.18), полагая для простоты расчетов $T_0 = 1$:

$$T_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} = T_2^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} - kF(\varepsilon) - kT_1 \frac{dF(\varepsilon)}{dt} - k\xi(t). \quad (7.85)$$

Величина Λ получается из решения уравнения (7.85) при $\varepsilon = \text{const}$ (T_1 — малая величина), отсутствии шумов и $d\theta/dt = \text{const}$ ($d^2\theta/dt^2 = 0$). Тогда

$$\Lambda = \left(\frac{d\theta}{dt} \right) / k.$$

Чтобы найти эквивалентные пороги $\gamma_{\varepsilon 1}$ и $\gamma_{\varepsilon 2}$ по формулам (7.82), необходимо далее определить $S = F'(\varepsilon_A)$ и положение точек устойчивого и неустойчивого равновесия. Поскольку срыв слежения можно отождествлять с переходом частицы с положительной скоростью через потенциальный барьер \bar{P}_M , то точки устойчивого ε_A и неустойчивого ε_1 равновесия на дискриминационной характеристике и потенциальной функции системы будут располагаться так, как показано на рис. 7.24 [51].

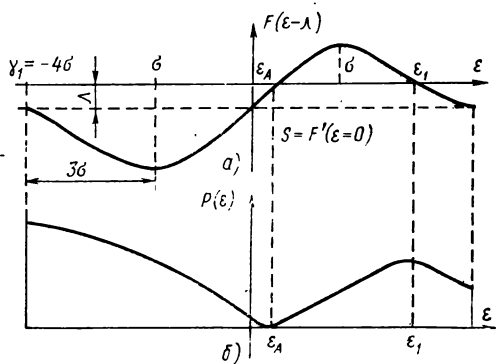


Рис. 7.24. Графики для определения точек равновесия:
а — дискриминационной характеристики; б — потенциальной функции

Из рис. 7.24 следует, что при малых Λ и $\epsilon > 2\theta_0/n$, где $\theta/n = \sigma$, значения ϵ_A и ϵ_1 находятся достаточно просто. Если считать, что

$$F'(\epsilon_A) \approx F'(\epsilon = 0),$$

то

$$\epsilon_A = \frac{\Lambda}{F'(\epsilon = 0)} = \frac{\Lambda}{S}, \quad (7.86)$$

где $S = 0,036an^2 I_0 R_H U_{\text{ГОН}}/\theta$.

Точку неустойчивого равновесия ϵ_1 можно определить из условия, что в области значений $\epsilon > 2\sigma$ дискриминационная характеристика в выражении (7.84) будет иметь экспоненциальный вид:

$$\exp[-(\epsilon - \sigma)^2/2\sigma^2].$$

Следовательно,

$$\exp\left[-\frac{(\epsilon_1 - \sigma)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{\Lambda}{\gamma_0}, \quad (7.87)$$

где $\gamma_0 = 0,034an^2 I_0 R_H U_{\text{ГОН}}$.

Из выражения (7.87) следует уравнение $\ln \frac{\Lambda}{\gamma_0} = \left[-\frac{(\epsilon_1 - \sigma)^2}{2\sigma^2}\right]$, решение которого дает

$$\epsilon_1 = \sigma \left(1 + \sqrt{-2 \ln \frac{\Lambda}{\gamma_0}}\right), \quad (7.88)$$

поскольку $\Lambda/\gamma_0 < 1$.

Окончательно получаем следующие зависимости для эквивалентных порогов $\gamma_{\theta 1}$ и $\gamma_{\theta 2}$:

$$\gamma_{\theta 1} = \sqrt{2/S \left\{ \gamma_0 \sigma \left[\int_{-\frac{(\Lambda/S + \sigma)}{\sigma}}^{\frac{3}{\sigma}} \exp(-y^2/2) dy \int_{-\frac{(\Lambda/S - \sigma)}{\sigma}}^{\frac{5}{\sigma}} \exp(-y^2/2) dy \right] + \Lambda(4\sigma + \Lambda/S) \right\}}, \quad (7.89)$$

$$\gamma_{\theta 2} = \sqrt{2/S \left\{ \gamma_0 \sigma \left[\int_{\frac{(\Lambda/S - \sigma)}{\sigma}}^{\sqrt{-2 \ln(\Lambda/\gamma_0)}} \exp(-y^2/2) dy - \int_{\frac{(\Lambda/S + \sigma)}{\sigma}}^{2 + \sqrt{-2 \ln(\Lambda/\gamma_0)}} \exp(-y^2/2) dy \right] - \Lambda \sigma \left(1 - \sqrt{-2 \ln \frac{\Lambda}{\gamma_0}} - \frac{\Lambda}{S} \right) \right\}}.$$

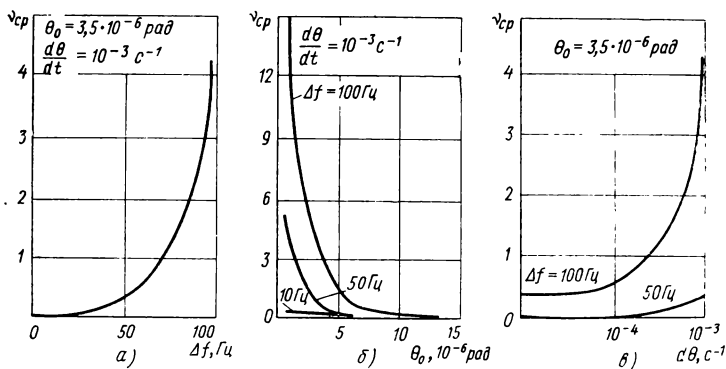


Рис. 7.25. Зависимости частоты сыва слежения следящей системы с коническим сканированием от полосы пропускания (а), ширины диаграммы направленности оптической антенны (б), угловой скорости относительного движения абонентов (в)

Частота выбросов ошибки слежения $\epsilon(t)$ над уровнем γ в системе, фильтр которой имеет операторный коэффициент передачи $K(p) = [K(1 + pT_1)]/[p(1 + pT_2)]$ определяется следующей зависимостью [51]:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{KS}{T_2} \frac{(1 - n_0 K_3) + K_3}{1 + K_3}} \exp \left[-\frac{2\gamma^2 S (1 + KST_2 n_0)}{KN_0 (1 + K_3)} \right], \quad (7.90)$$

где $n_0 = T_1/T_2$; $K_3 = KST_2 n_0^2$.

Следовательно, частоту выбросов за уровни γ_{31} и γ_{32} можно определить в виде

$$\nu_{ср} = \nu_1 + \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{KS}{T_2} \frac{(1 - n_0 K_3)^2 + K_3}{1 + K_3}} \times \exp \left[-\frac{2\gamma_{31}^2 S (1 + KST_2 n_0)}{KN_0 (1 + K_3)} \right] + \exp \left[-\frac{2\gamma_{32}^2 S (1 + KST_2 n_0)}{KN_0 (1 + K_3)} \right]. \quad (7.91)$$

В формуле (7.91) γ_{31} и γ_{32} определяются по формулам (7.89), S — по формуле (7.90) и спектральная плотность мощности шума N_0 , приведенного к выходу дискриминатора, — по формулам разд. 7.3.

Зависимость (7.91) учитывает не только динамику смещения объектов во время сеанса связи ($d\theta/dt$), структуру следящей си-

стемы (тип фильтра), но и энергетические характеристики линии связи, что позволяет производить комплексное исследование режима поддержания связи в ЛИС.

В качестве иллюстрации на рис. 7.25 приведены графики зависимости частоты срыва слежения ($\nu_{\text{ср}} = \lambda_{61}$) в одноканальной следящей системе ЛИС с коническим сканированием, рассчитанные на ЭВМ по зависимости (7.91) для условий примера разд. 7.3. Полученные графические зависимости подтверждают основные закономерности влияния полосы пропускания следящей системы Δf , скорости относительного движения абонентов ($d\theta/dt$) и ширины диаграммы направленности антенных устройств на параметры режима поддержания связи в ЛИС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абчук В. А., Суздаль В. Г. Поиск объектов. М.: Советское радио, 1977. 336 с.
2. Алексеев А. И., Шереметьев А. Г., Тузов Г. И., Глазов Б. И. Теория и применение псевдослучайных сигналов. М.: Наука, 1969. 368 с.
3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965. 780 с.
4. Андреев Г. А., Магид Р. М. Влияние флюктуаций интенсивности на изменение углового положения источника излучения оптико-электронным моноимпульсным методом. — Изв. вузов. Сер. радиофизика, 1972, т. XV, № 1, с. 55—61.
5. Бакут П. А., Логинов В. П., Шумилов Ю. П. Методы определения границ точности в задачах оценивания неизвестных параметров. — Зарубежная радиоэлектроника, 1978, № 5, с. 3—37, № 6, с. 3—28.
6. Бакут П. А., Устинов Н. Д., Троицкий И. Н., Свиридов К. Н. Методы обработки световых полей при наблюдении объектов через турбулентную среду. — Зарубежная радиоэлектроника, 1977, № 3, с. 55—86.
7. Белавин О. В., Зерова М. В. Современные средства радионавигации. М.: Советское радио, 1965, 280 с.
8. Беляев Н. М., Уваров Е. И. Расчет и проектирование реактивных систем управления космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974. 200 с.
9. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко А. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев: Наукова думка, 1976. 270 с.
10. Брукнер Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере и характеристика канала связи. — Зарубежная радиоэлектроника, 1971, т. 10, № 9, с. 17—45.
11. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
12. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964. 576 с.
13. Витерби Э. Д. Принципы когерентной связи. М.: Советское радио, 1970. 260 с.
14. Волохатюк В. А., Кочетков В. М., Красовский Р. Р. Вопросы оптической локации. М.: Советское радио, 1971. 256 с.
15. Вопросы статистической теории радиолокации/П. Бакут, И. Большаков, Б. Герасимов и др. М.: Советское радио, 1973. 424 с.
16. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь. М.: Связь, 1978. 424 с.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
18. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов. — В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966, с. 91—279.
19. Градштейн И. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
20. Грачева М. Е. Исследование статистических свойств сильных флюктуаций интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы. — Изв. вузов. Сер. радиофизика, 1971, т. X, № 6, с. 13—17.
21. Гутер Р. С., Резниковский П. Т. Программирование и вычислительная математика, вып. 2. М.: Наука, 1971. 264 с.
22. Гудман Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 486 с.

23. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.: Советское радио, 1972. 448 с.
24. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. 2-е изд., исправл. М.: Физматгиз, 1963. 660 с.
25. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1971. 288 с.
26. Динамика цифровых следящих систем/Ю. А. Николаев, В. П. Петухов, Г. И. Феклисов, Б. К. Чемоданов. М.: Энергия, 1970. 496 с.
27. Динамика электромашинных следящих систем/Е. С. Блейз, Ю. Н. Семёнов, Б. К. Чемоданов, Н. М. Якименко. М.: Энергия, 1967. 408 с.
28. Здор С. Е., Широков В. Б. Оптический поиск и распознавание. М.: Наука, 1973. 240 с.
29. Зубкович С. Г. Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности. М.: Советское радио, 1968. 223 с.
30. Зувев В. Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М.: Советское радио, 1970. 318 с.
31. Казаков В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Советское радио, 1973. 232 с.
32. Казарян Р. А., Оганесян А. В. Статистика флюктуаций тока фотодетектора при приеме излучения, прошедшего турбулентную атмосферу. — Изв. АН Армянской ССР. Сер. Физика, 1978 г. № 13, с. 491—494.
33. Каррузерс П., Ньето М. Переменные фаза — угол в квантовой механике. — В кн.: Когерентные состояния и квантовая теория. М.: Мир, 1972, с. 71—146.
34. Кытыс Г. П. Автоматический контроль нестационарных параметров и параметрических полей. — М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 472.
35. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 230 с.
36. Космические траекторные измерения/Под ред. П. А. Агаджанова. М.: Советское радио, 1969. 498 с.
37. Криксунов Л. З. Системы информации с ОКГ. Киев: Техника, 1970. 232 с.
38. Курикса А. А. Квантовая оптика и оптическая локация. М.: Советское радио, 1971. 184 с.
39. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере/А. Гуревич, А. Кон, В. Миронов, С. Хмелевцов. М.: Наука, 1976. 264 с.
40. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959. 532 с.
41. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М.: Советское радио, 1966. 728 с.
42. Лобкова Л. М. Статистическая теория антенн сверхвысоких и оптических частот. М.: Связь, 1975. 176 с.
43. Лоуренс Р. С., Стробен Дж. В. Эффекты, существенные для оптической связи, которые возникают при распространении света в нерассеивающей атмосфере. — ТИИЭР, 1970, т. 58, № 10, с. 130—151.
44. Люиссел У. Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1973. 398 с.
45. Макелрой Д. Х. и др. Системы связи для ближнего космоса, использующие лазеры на CO_2 . — ТИИЭР, 1977, т. 5, № 2, с. 54—89.
46. Минаев И. В., Сударев И. В. О применении графоаналитического метода для определения периода дискретности следящей системы. — Изв. вузов. Сер. приборостроение, 1978. № 7, с. 44—47.
47. Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Расширение лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере вдоль наклонных трасс. — Изв. вузов. Сер. радиофизика, 1972, т. 15, № 5, с. 743—750.
48. Мойсеев Н. И., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизаций. М.: Наука, 1978. 352 с.
49. Мойсеев Н. Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.
50. Мониин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
51. Обрезков Г. В., Разевиг В. Д. Методы анализа срыва слежения. М.: Советское радио, 1972. 240 с.

52. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1969. 324 с.
53. Ольховский И. И. Курс технической механики для физиков. М.: Наука, 1978. 574 с.
54. Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В. Голографическая интерферометрия. М.: Наука, 1977. 348 с.
55. О структурной характеристике температурного поля в пограничном слое атмосферы./Я. Войт, Я. Корниенко, Е. Кухарец и др.—Изв. АН СССР. Сер. физика атмосферы и океана, 1973, т. 9, № 5, с. 451—455.
56. Первачев С. В., Валуев А. А., Чиликин В. М. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. М.: Советское радио, 1973. 488 с.
57. Передача и обработка информации голографическими методами/Под ред. С. Б. Гуревича. М.: Советское радио, 1978. 304 с.
58. Пинус Н. З. О микроструктуре полей скорости ветра и температуры в верхней тропосфере и нижней стратосфере.—Изв. АН СССР. Сер. физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 11, с. 1131—1135.
59. Пратт В. К. Лазерные системы связи. М.: Связь, 1972. 232 с.
60. Радиоуправление реактивными снарядами и космическими аппаратами/Под ред. Л. Гуткина. М.: Советское радио, 1968. 680 с.
61. Растринин Л. А. Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968. 376 с.
62. Рейзулин З. И., Кравцов Ю. А. К вопросу о распространении лазерного пучка в турбулентной среде.—Изв. вузов. Сер. радиофизика, 1967, т. 10, № 1, с. 68—73.
63. Ривкин С. С. Статистический синтез гироскопических устройств. Л.: Судостроение, 1970. 422 с.
64. Росс М. Лазерные приемники. М.: Мир, 1969. 520 с.
65. Сафронов Ю. П., Андрианов Ю. Г. Инфракрасная техника и космос. М.: Советское радио, 1978. 248 с.
66. Свешников А. А., Ривкин С. С. Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1974. 536 с.
67. Селезнев В. П. Навигационные устройства. М.: Машиностроение, 1974. 600 с.
68. Солодов А. В. Личейные системы автоматического управления с переменными параметрами. М.: Физматгиз, 1962. 324 с.
69. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
70. Смирнов В. А. Введение в оптическую радиоэлектронику. М.: Советское радио, 1973. 208 с.
71. Спектральная плотность помехи, вызванная турбулентным воздействием атмосферы на входе оптической следящей системы/К. Р. Абрамов и др.—В кн.: Радиоэлектроника летательных аппаратов. Харьков, 1974, вып. 6, с. 116—120.
72. Стирнс Э. Космическая навигация. М.: Воениздат, 1966. 292 с.
73. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961, 556 с.
74. Такахаси. Применение теории информации к квантомеханическим каналам связи.—В кн.: Статистическая теория связи и ее приложения. М.: Мир, 1967, с. 160—257.
75. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967. 548 с.
76. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970. 392 с.
77. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 206 с.
78. Флюктуации амплитуды поля оптического пучка, распространяющегося вдоль наклонных трасс в турбулентной атмосфере/В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, С. И. Тузова.—Изв. вузов. Сер. радиофизика 1974, т. XVII, № 1, с. 94—103.
79. Харди Д. У. Активная оптика. Новая техника управления световым пучком.—ТИИЭР, 1978. 66, № 6, с. 31—83.
80. Хелстром К. В., Лиу В. С., Гордон Дж. П. Квантомеханическая теория связи.—ТИИЭР, 1970, т. 58, № 10, с. 186—207.

81. Ховерстен Е. В., Харджер Р. О., Халме С. Д. Теория связи в турбулентной атмосфере. — ТИИЭР, 1970, Т. 58, № 10, с. 236—262.
82. Чернышев В. Н., Шереметьев А. Г., Кобзев В. В. Лазеры в системах связи. М.: Связь, 1978. 319 с.
83. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 400 с.
84. Шереметьев А. Г. Статистическая теория лазерной связи. М.: Связь, 1971. 264 с.
85. Шереметьев А. Г., Толпарев Р. Г. Лазерная связь. М.: Связь, 1974. 384 с.
86. Шестов Н. С. Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех. М.: Советское радио, 1967. 348 с.
87. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета ИСЗ. М.: Наука, 1965. 494 с.
88. Энергетические характеристики космических радиолиний/Под ред. О. А. Зенкевича. М.: Советское радио, 1972. 436 с.
89. Dain V., Galeotti M., Sette D. Error probability in the atmospheric twin-channel optical link. — IEEE J. Quantum Electronic, March 1973, p. 424—425.
90. Doob J. L. The elementary Gaussian processes. — Ann. math. stat., 1944, N, 15.
91. Dresler R. M., Tabak D. Satellite tracking by combined optimal estimation and control techniques. — IEEE Trans., 1971, AC — 16, N. 6.
92. Dworkin L. V., Shwartz M. The application of information feedback to an amplitude-modulated laser communications system. — IEEE Trans., 1971, COM — 19, N. 5, p. 618—627.
93. Dworkin L. V., Shwartz M. An information — feedback approach applied to polarization — modulated laser communication systems. — IEEE Trans., COM — 20, 1972, N. 3, p. 419—423.
93. Elson E. M. Wideband laser link test planned. — Aviation Week and Space Technology, 1970, N. 1, p. 50—52.
94. Elterman L. E. Atmospheric attenuation model — 1964 in the ultraviolet, visible and infrared regions for altitude to 5 km. — Environmental Research Papers, March 1964, N. 46, AFCRL.
95. Fried D. L. Optical heterodyne detection of an atmospherically distorted signal wave front. — Proc. IEEE, 1967, 55, N. 1.
96. Fried D. L., Cloud J. D. Propagation of an infinite wave in a randomly inhomogeneous medium. — J. Opt. Soc. Am., december 1966, 56.
97. Glauber K. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. — Phys. Rev., Sept. 1963, 131.
98. Goldstein B. S., Dalrymple G. F. Gallium arsenide injection laser radar. — Proc. IEEE, february 1967, 55, N. 2, p. 181—188.
99. Greenberg J. S. On the narrow beam communication system acquisition problem. — IEEE Trans., 1964, MIL — 8, N. 1, p. 28—39.
100. Hafnagel R. E., Stenley N. K. Modulation transfer function associated with image transmission through turbulent media. — JOSA, 1964, 54, N. 1.
101. Helstrom C. W. The minimum variance of estimates in quantum signal detection. — IEEE Trans., March, 1968, IT — 14, p. 234—242.
102. Helstrom C. W. Detection theory and quantum mechanics. — Information and control, 1967, N. 10, p. 254—291, 1968, N. 13, p. 156—171.
103. Helstrom C. W. Fundamental limitations on the detectability of electromagnetic signals. — Int. J. Theor. Phys., May 1968, N. 1, p. 37—50.
104. Helstrom C. W. Quantum detection and estimation theory — J. Statist. Phys., 1969, 1, N. 2.
105. Helstrom C. W. Estimation of objects parameters by a quantum-limited optical system. — J. Opt. Soc. Am., 1970, 60, N. 2.
106. Johnson R., Weiss P. F. Laser tracking system with automatic reacquisition capability. — Applied Optics, 1968, 7, N. 6.
107. Kerr J., Kraemer A., Cooke C. Atmospheric optical communication systems. — Proc. of the IEEE, 1970, 58, N. 10.
108. Koechner W. Optical ranging system employing a high power injection laser diode. — IEEE Trans., 1968, AES — 4, N. 1, p. 81—91.
109. Kraemer A. R. Acquisition and angle tracking of laser communication links. — WESCON Techn. Paper, 1971, 6/2.1—6/2.

110. **Laser applications**/Ed. by M. Ross. — New York, London: Academic Press, 1974, N. 2.
111. **Lozins N. C.** Pointing in space. — Space/aeronautics, aug. 1966.
112. **Moss E. B.** Some aspects of the pointing problem for optical communications in space. — Journ. of Spacecraft and Pockets, 1965, N. 5.
113. **Pearson J. E.** Coherent optical adaptive techniques: design and performance of an 18-element visible multidither COAT system. — Applied Optics, 1976, 15, N. 3, p. 611—621.
114. **Posner E. S.** Optimal search procedures. — IEEE Trans., 1963, IT—9, N. 3.
115. **Raman C. V. Nath.** N. Proc. Indian Acad. Sci., 1935, A2, p. 406—413.
116. **Shapiro J. H.** Reciprocity of the turbulent atmosphere. — JOSA, 1971, 61, N. 2, p. 492—495.
117. **Sharma K. J.** Some aspects of optical communication techniques. — Isr. Journal of Technology, 1971, 9, N. 3.
118. **Ultra-wide** bandwidth laser communications/ R. Whimer et al. — Proc. of the IEEE, 1970, 58, N. 10.
119. **Waksberg A.** A dual acquisition technique for a laser communication system. — IEEE Trans., AES, May 1970.
120. **Ward J. H.** Acquisition and tracking in optical data links. — EASCON, 1975, N. 4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Статистические распределения оптических полей	6
1.1. Представление поля на входе приемного устройства	6
1.2. Матрица плотности состояний оптического поля	12
1.3. Анализ квантовых измерителей	17
1.4. Квантовая статистика оптического поля на входе приемного устройства	21
Глава 2. Помехоустойчивость оптических систем связи с различными видами модуляции	31
2.1. Помехоустойчивость оптической системы связи с некогерентным носителем цифровой информации	31
2.2. Помехоустойчивость бинарных систем связи с амплитудной и фазовой модуляцией	34
2.3. Помехоустойчивость бинарных систем связи с поляризационной и частотной модуляцией	38
2.4. Квантовый синтез бинарных систем связи оптического диапазона	44
Глава 3. Помехоустойчивость атмосферных оптических систем связи и способы ее повышения	53
3.1. Атмосфера как канал оптической связи	53
3.2. Влияние атмосферных флуктуаций на помехоустойчивость лазерных систем связи	60
3.3. Методы ослабления влияния турбулентных флуктуаций	64
3.4. Эффективность оптических информационных систем с обратной связью	69
3.5. Двухканальная оптическая система связи с пространственным разнесением	80
3.6. Экспериментальные лазерные системы связи и локации	84
Глава 4. Оптимальное измерение параметров сигналов и голографическая обработка цифровой информации	92
4.1. Измерение параметров сигнала	92
4.2. Квантовая теория оценки параметров сигнала	93
4.3. Классическая теория оценки параметров оптических сигналов	100
4.4. Голографическая обработка цифровой радиотехнической информации	108
Глава 5. Основы теории управления лазерными информационными системами	136
5.1. Принципы управления ЛИС	136
5.2. Физические основы построения систем управления ЛИС	141
5.3. Математические модели управления	145
5.4. Эффективность управления ЛИС	164

Глава 6. Особенности поиска в лазерных информационных системах космических аппаратов	179
6.1. Неопределенность начального положения абонентов ЛИС	179
6.2. Влияние ошибок прогнозирования движения КА на образование зоны неопределенности	184
6.3. Влияние ошибок построителей систем координат на образование зоны неопределенности	187
6.4. Оценка характеристик неопределенности положения абонентов в плоскости поиска	193
Глава 7. Пространственное сопровождение абонента в лазерных информационных системах космических аппаратов	215
7.1. Принципы построения систем автоматического сопровождения абонента	215
7.2. Требования к точности углового сопровождения	218
7.3. Точностные характеристики систем углового сопровождения	222
7.4. Влияние турбулентной атмосферы на точность сопровождения	234
7.5. Оптимизация параметров систем углового сопровождения	245
7.6. Структурная схема синтеза следящей системы ЛИС	253
7.7. Определение параметров математической модели управления в режиме поддержания связи	255
Список литературы	263

ИБ № 2717

**Игорь Викторович Минаев,
Александр Александрович Мордовин,
Алексей Григорьевич Шереметьев**

**ЛАЗЕРНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Редактор Г. Б. Костина.
Художественный редактор В. В. Лебедев
Технический редактор Т. С. Старых
Корректоры А. П. Озерова и Л. Е. Хохлова
Оформление художника Е. Н. Волкова

Сдано в набор 08.04.81. Подписано в печать 14.09.81. Т-23650.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 17,0. Уч.-изд. л. 18,19. Тираж 1 900 экз.
Зак. 1749. Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Машиностроение», 107076, Москва ГСП-6,
Стромынский пер., 4.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7.

Уважаемые читатели!

Покупайте книги по гарантированным заказам! Заказы оформляются в любом книжном магазине индивидуальными покупателями — на почтовых открытках, а учреждениями, организациями — гарантийными письмами.

Книжные магазины принимают предварительные заказы без ограничения и своевременно извещают покупателей о поступивших книгах.

В 1982 г. издательство «Машиностроение» выпустит в свет по гарантированным заказам следующие книги:

Вагнер Е. Т. Лазеры в самолетостроении. — М.: Машиностроение, 1982 (II кв.). — 60 к.

Обобщены и систематизированы теоретический материал и практические результаты применения лазерной техники, измерительных систем и приборов для проектирования и производства летательных аппаратов. Изложены физические основы и принципы работы лазерных приборов, устройств и оборудования, применяемых при изготовлении и контроле самолетных деталей, узлов и агрегатов.

Для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием и изготовлением летательных аппаратов.

Кузовков Н. Т., Салычев О. С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. — М.: Машиностроение, 1982 (I кв.). — 1 р. 40 к.

Исследуется влияние неточностей структуры и коэффициентов инерциальной навигационной системы (ИНС) на вырабатываемые данные об объекте, движущемся по поверхности Земли. Показывается возможность демпфирования свободных колебаний ИНС внутренними связями без введения скоростной и баллистической ошибки. Сопоставляются по точности платформенная и бесплатформенная ИНС. При использовании внешней информации о скорости объекта разрабатываются адаптивные алгоритмы субоптимальной фильтрации. Анализируются способы включения оптимального фильтра Калмана и субоптимальных фильтров в схему ИНС.

Для инженеров, занимающихся инерциальной навигацией и оптимальной фильтрацией.

Матвеев А. М., Зверев И. И. Проектирование гидравлических систем летательных аппаратов: Учебник для авиационных вузов. — М.: Машиностроение, 1982 (II кв.). — 1 р.

Рассмотрены устройство и действие гидравлических систем летательных аппаратов, их особенности, методы анализа режимов работы, методы общего проектирования гидравлических систем, ко-

торые позволяют синтезировать структуру системы и провести параметрическое исследование.

Селезнев А. В., Добрица Б. Т., Убар Р. Р. Проектирование автоматизированных систем контроля бортового оборудования летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1982 (IV кв.). — 1 р.

Описаны принципы построения и алгоритмы работы автоматических систем контроля (АСК) бортового оборудования современных летательных аппаратов. Рассмотрены методы проектирования и оптимизация АСК, базирующиеся на общей теории анализа и синтеза информационных систем. Большое внимание уделено постановке и методам решения задач контроля технического состояния непрерывных объектов, алгоритмическому обеспечению и практической организации наземных АСК.

Для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием АСК.