Ю. В. КОЧЕТОВА, Е. Е. ШИРШОВА

АЛГЕБРА. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Курс лекций

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

Москва
2013

Ю. В. Кочетова, Е. Е. Ширшова

АЛГЕБРА. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Курс лекций

Издательство Прометей

Москва

2013

УДК 512
ББК 22.14
К756

Рецензенты:

А. В. Царев, профессор кафедры алгебры МПГУ, доктор физико-математических наук

В. Г. Чирский, профессор кафедры теории чисел МПГУ,
доктор физико-математических наук

К756 **Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е.** Алгебра. Конечномерные пространства. Линейные операторы: Курс лекций. – М.: Прометей, 2013. – 80 с.

Предлагаемое пособие содержит конспективное изложение значительной части лекционного курса алгебры, соответствующего программе по направлению подготовки 010100.62 – математика. В нем отражены темы: системы линейных уравнений, векторные пространства, линейные операторы векторных пространств, Евклидовы пространства, матрицы и определители.

ISBN 978-5-7042-2454-9

Содержание

Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов математических специальностей педагогических университетов. Оно написано на основе курса лекций по линейной алгебре, читаемых авторами в течение многих лет студентам математического факультета МПГУ.

Поскольку изучение свойств абстрактных алгебр вызывает у студентов младших курсов определенные трудности, то, несмотря на достаточное количество учебной литературы по линейной алгебре, сохраняется потребность в небольшом по объему учебнике, в котором материал был бы построен как естественное продолжение школьного курса математики.

В данном пособии используется подход, при котором изложение курса линейной алгебры начинается с рассмотрения систем линейных уравнений. Поскольку в основе такого подхода лежат простые, знакомые из школьного курса математики, понятия — числа, наборы чисел, линейные уравнения —, то данный подход удобен для первоначального знакомства с предметом. Кроме того, доказательства в идейном плане просты и носят, по существу, вычислительный характер.

Затем развивается теория определителей, рассматривается матричная алгебра и геометрия пространства P^n.

После введения определения абстрактного линейного векторного пространства на первый план выходят теоретико–множественные методы, применяемые в современной алгебре и геометрии. Благодаря тому, что для векторных пространств эти методы применяются довольно просто и при этом эффективно, доказательства многих фактов удается сделать более короткими и изящными.

Часть материала пособия оформлена в виде заданий, доказательство которых предлагается провести читателю самостоятельно. При возникновении трудностей читатель может найти необходимые для решения заданий сведения в учебниках, перечисленных в списке литературы.

Содержание пособия включает в себя объем обязательного курса линейной алгебры. Пособие может быть использовано как для чтения лекций и проведения практических занятий, так и для самостоятельной работы студентов. Пособие может быть также полезным читателю, желающему самостоятельно познакомиться с основными понятиями линейной алгебры. При этом от читателя не требуется почти никаких предварительных сведений из высшей математики.

Искренне благодарим своих коллег, которые способствовали написанию данного пособия.

1 Системы линейных уравнений

1.1 Основные понятия и определения

Считаем, что вы знакомы с такими понятиями как целые, рациональные и действительные числа; вы умеете решать уравнения вида $ax = b$, где a и b — действительные числа и системы вида

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ux + vy = r, \end{cases}$$

где a, b, c, u, v, r — действительные числа.

Рассмотрим теперь уравнения и системы уравнений с произвольным конечным числом неизвестных. Очень многие практические нужды зависят от умения решать именно такие системы уравнений.

Определение 1.1.1. *Выражение вида*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — действительные числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные величины, называется линейным уравнением; a_i — коэффициенты уравнения, b — свободный член.

Набор действительных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется решением уравнения (1), если, полагая $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \ldots,$ $x_n = c_n$ можно обратить уравнение (1) в верное числовое равенство. В этом случае говорят, что числа c_i удовлетворяют уравнению (1).

Если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b = 0$, то уравнение (1) называется *тривиальным.*

Если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение (1) называется *противоречивым.*

Предложение 1.1.1. *Тривиальному уравнению удовлетворяет любой набор из n действительных чисел. Противоречивое уравнение решений не имеет.*

Определение 1.1.2. *Выпишем несколько уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

(здесь m и n — целые положительные числа).

(2) называется системой линейных уравнений с действительными коэффициентами.

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система уравнений (2) называется *однородной.*

Определение 1.1.3. *Решением системы (2) называется набор действительных чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, который удовлетворяет всем уравнениям системы (2).*

Если система (2) не имеет ни одного решения, она называется *несовместной.* Если хоть одно решение системы (2) существует, она *совместна.* Если система (2) имеет ровно одно решение, ее называют *определенной*, а если у нее более одного решения — *неопределенной.*

Замечание. *Однородная система уравнений всегда совместна.*

Возникают следующие вопросы:

1. Как узнать, какой является данная система линейных уравнений?

2. Как найти решения данной системы линейных уравнений?

1.2 Элементарные преобразования систем линейных уравнений

Определение 1.2.1. *Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются следующие действия:*

1) перестановка двух уравнений в системе;

2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на действительное число;

3) умножение всех коэффициентов и свободного члена уравнения на действительное число, отличное от нуля.

Определение 1.2.2. *Две системы линейных уравнений называются равносильными (эквивалентными), если они обе несовместны или, если они имеют один и тот же набор решений.*

Теорема 1.2.1. *Если к системе линейных уравнений (2) применить элементарное преобразование типа 1) — 3), то получится система уравнений, равносильная системе (2).*

Доказательство. Для преобразования 1) утверждение очевидно по определению решения системы линейных уравнений.

Для преобразования 2) рассмотрим следующую систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} (a_{11}+ca_{21})x_1+(a_{12}+ca_{22})x_2+\ldots+(a_{1n}+ca_{2n})x_n&=b_1+cb_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

(здесь c — произвольное действительное число).

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — решение системы (2). Тогда имеется следующий набор верных числовых равенств:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}u_1+a_{12}u_2+\ldots+a_{1n}u_n=b_1\\ a_{21}u_1+a_{22}u_2+\ldots+a_{2n}u_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}u_1+a_{m2}u_2+\ldots+a_{mn}u_n=b_m. \end{array}\right. \tag{4}$$

Прибавив к первому равенству набора (4) второе равенство этого набора, умноженное на число c, получим набор верных числовых равенств:

$$\left\{\begin{aligned} (a_{11}+ca_{21})u_1+(a_{12}+ca_{22})u_2+\ldots+(a_{1n}+ca_{2n})u_n&=b_1+cb_2\\ a_{21}u_1+a_{22}u_2+\ldots+a_{2n}u_n&=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}u_1+a_{m2}u_2+\ldots+a_{mn}u_n&=b_m. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Из верности равенств набора (5) следует, что $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — решение системы (3). Итак, каждое решение системы (2) является решением системы (3). Для доказательства обратного утверждения нужно от верных числовых равенств (5) перейти к равенствам (4), прибавив к первому равенству набора (5) второе равенство, умноженное на число $(-c)$. Таким образом, системы уравнений (2) и (3) равносильны.

Для преобразования 3) рассмотрим систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} ca_{11}x_1+ca_{12}x_2+\ldots+ca_{1n}x_n&=cb_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

(здесь $c \neq 0$ — действительное число).

Если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — решение системы (2), то получим набор верных равенств (4). Умножив первое равенство набора (4) на c, получим набор верных числовых равенств

$$\begin{cases} ca_{11}u_1 + ca_{12}u_2 + \ldots + ca_{1n}u_n = cb_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

Верность равенств набора (7) показывает, что числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ образуют решение системы уравнений (6).

Таким образом, доказано, что любое решение системы (2) является решением системы (6). Для доказательства обратного утверждения следует перейти от набора верных числовых равенств (7) к набору (4), умножив первое равенство из набора (7) на число $\frac{1}{c}$. Следовательно, системы уравнений (2) и (6) имеют одни и те же решения. $\square$

Замечание. Положим в системе уравнений (2)

$$y_1 = x_2,\ y_2 = x_1,\ y_3 = x_3,\ \ldots,\ y_n = x_n.$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{12}y_1 + a_{11}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = b_1 \\ a_{22}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}y_1 + a_{m1}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = b_m. \end{cases} \tag{8}$$

Фактически, мы поменяли местами соответствующие коэффициенты у первого и второго неизвестных во всех уравнениях системы.

Если числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ образуют решение системы уравнений (8), то набор чисел $u_2, u_1, u_3, \ldots, u_n$ является решением системы (2). Следовательно, зная решение системы уравнений (8), легко найти решение системы уравнений (2).

Данное замечание позволяет применять при решении систем линейных уравнений перенумерацию переменных (замену мест соответствующих коэффициентов у двух неизвестных во всех уравнениях данной системы).

1.3 Приведение системы линейных уравнений к ступенчатому виду

С помощью указанных выше трех элементарных преобразований и перенумерации переменных можно преобразовывать системы линейных уравнений, упрощая их вид.

Определение 1.3.1. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{array}\right. \tag{9}$$

Если $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0, \ldots,$ $a_{rr} \neq 0$, то система уравнений (9) называется системой уравнений ступенчатого вида (ступенчатой системой уравнений).

Теорема 1.3.1. *Всякая ступенчатая система уравнений совместна.*

Доказательство. I. Начнем с рассмотрения ступенчатой системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Такие системы будем именовать *треугольными*.

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}x_r = b_r. \end{array}\right. \tag{10}$$

Здесь $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ \ldots,\ a_{rr} \neq 0$. Из последнего уравнения находим

$$x_r = \frac{b_r}{a_{rr}} = u_r,$$

затем из предпоследнего уравнения получаем

$$x_{r-1} = \frac{b_{r-1} - a_{r-1,r}u_r}{a_{r-1,r-1}} = u_{r-1}.$$

Через конечное число шагов будет найдено единственное решение системы уравнений (10).

II. Теперь рассмотрим ступенчатую систему вида (9). Перепишем систему, оставив слева от знака равенства только слагаемые, содержащие $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n + b_r. \end{cases} \tag{11}$$

Придадим неизвестным правой части конкретные числовые значения

$$x_{r+1} = u_{r+1},\ x_{r+2} = u_{r+2},\ \ldots,\ x_n = u_n. \tag{12}$$

Подставив эти числа в систему уравнений (11), получим систему уравнений типа (10), которая, по доказанному в пункте I, имеет единственное решение.

Так как существует бесконечно много способов выбора чисел набора (12), то система уравнений (11) имеет бесконечно много решений. □

Теорема 1.3.2. *Всякую совместную систему нетривиальных уравнений можно превратить в равносильную ей ступенчатую систему уравнений (с точностью до порядка следования чисел в решениях).*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (2). Из условия теоремы следует, что хотя бы в одном уравнении системы (2) коэффициент при x_1 отличен от нуля. Пусть это будет $a_{11} \neq 0$. Тогда ко второму уравнению системы (2) прибавим первое уравнение, умноженное на число

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}},$$

к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на

$$-\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

и т.д. Получим систему уравнений типа (13):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим отдельно систему уравнений

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{14}$$

Возможны следующие случаи:

1) Все уравнения системы (14) тривиальны. Тогда, отбросив из системы (13) уравнения системы (14), получим искомую систему из одного уравнения.

2) Система (14) содержит противоречивое уравнение. Тогда система (13) несовместна, что противоречит условию теоремы, так как системы уравнений (2) и (13) равносильны. То есть такой случай невозможен.

3) Слева от знаков равенства в системе (14) имеются ненулевые коэффициенты. Пусть $a'_{22} \neq 0$. Прибавим ко всем уравнениям системы (14), начиная со второго, первое уравнение, умноженное на число

$$-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}, \qquad \text{где} \qquad i = 3, 4, \ldots, m.$$

Продолжая процесс, каждый раз исключая тривиальные уравнения, если они встречаются, через конечное число шагов получим искомую ступенчатую систему. □

1.4 Метод Гаусса исследования и решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений (2).

Шаг I. С помощью элементарных преобразований 1) — 3) и перенумерации переменных попробуем **привести систему уравнений (2) к ступенчатому виду (9).**

Заметим, учитывая теорему 1.2.1 и замечание после теоремы 1.2.1, что все системы уравнений, получающиеся в результате преобразований и перенумерации переменных, будут иметь точно такие же решения как система (2) или решения системы (2) будут легко находится из решений новых систем, системы (9) в том числе.

а) Если в процессе преобразований в одной из новых систем встретится противоречивое уравнение, то система (2) несовместна. На этом процесс решения закончен.

б) Если система (2) является совместной, то по теореме 1.3.2 заключаем, что наша цель будет достигнута через конечное число шагов.

Шаг II. По виду ступенчатой системы уравнений можно заключить, сколько решений у системы (2) (см. теорему 1.3.1).

Если получена треугольная система, то ее решение находим как в доказательстве теоремы 1.3.1.

Если система (2) имеет бесконечное число решений, каждое из которых мы будем называть *частным решением системы (2)*, то все их предъявить нельзя, поэтому поступаем следующим образом: перейдем от полученной системы (9) к системе уравнений (11).

Определение 1.4.1. *Неизвестные, стоящие в левой части уравнений системы (11) назовем главными, а неизвестные из правых частей — свободными.*

Таким образом, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ являются главными неизвестными, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — свободными неизвестными.

Определение 1.4.2. *Совокупность формул, выражающих главные неизвестные через свободные, называется общим решением системы линейных уравнений.*

Цель шага II — нахождение общего решения системы уравнений. Придавая свободным неизвестным конкретные числовые значения и подставляя их в общее решение, можно получить конкретные частные решения системы уравнений.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Положим $y_1 = x_4,\ y_2 = x_1,\ y_3 = x_2,\ y_4 = x_3$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 - 4y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 + 5y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 3 \\ -y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 = 1. \end{cases}$$

Далее, исключим y_1:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 = 1 \\ 7y_2 - 2y_3 + 5y_4 = 4 \\ 7y_2 - 2y_3 + 5y_4 = 4 \\ y_3 - 4y_4 = 0. \end{cases}$$

Теперь положим $z_1 = y_1,\ z_2 = y_3,\ z_3 = y_2,\ z_4 = y_4$. Имеем

$$\begin{cases} -z_1 + z_2 + 2z_3 + 3z_4 = 1 \\ -2z_2 + 7z_3 + 5z_4 = 4 \\ -2z_2 + 7z_3 + 5z_4 = 4 \\ z_2 - 4z_4 = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} -z_1 + z_2 + 2z_3 + 3z_4 = 1 \\ z_2 - 4z_4 = 0 \\ 7z_3 - 3z_4 = 4. \end{cases}$$

Существуют различные схемы решения систем линейных уравнений методом Гаусса. Познакомимся с некоторыми из них.

1.5 Матрицы системы линейных уравнений

Определение 1.5.1. *Прямоугольную таблицу действительных чисел будем называть матрицей.*

С системой линейных уравнений (2) можно связать две матрицы. Одна из них состоит из коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица носит название *основной матрицы системы*. Вторая матрица содержит столбец свободных членов и называется *расширенной матрицей системы*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Для решения системы линейных уравнений методом Гаусса, можно преобразовывать не саму систему уравнений, а ее расширенную матрицу.

Недостаток метода заключается в том, что он не дает возможности сформулировать условия совместности и определенности системы с помощью ее коэффициентов, не дает способа выразить решение через коэффициенты и свободные члены.

2 Векторные пространства

2.1 Основные определения

В геометрии изучаются векторы на плоскости и в пространстве. Их можно складывать и умножать на числа. Рассматривая свойства этих операций, приходят к понятию векторного пространства.

Пусть $V \neq \varnothing$, $V = \{a, b, c, \ldots\}$ и P — поле, где $P = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$. Пусть далее существует функция из $P \times V$ в V. Будем символом αa обозначать образ пары (α, a) при действии этой функции и говорить, что определена операция умножения на элементы поля P.

Определение 2.1.1. *Векторным пространством над полем P называется множество V с операциями сложения и умножения на элементы поля P, удовлетворяющими следующим условиям:*

1. V — аддитивная абелева группа;

2. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ для любого $\alpha \in P$ и любых элементов $a, b \in V$;

3. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ для любых α, β из поля P и любого a из V;

4. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для любых α, β из поля P и любого a из V;

5. $1 \cdot a = a$ для $1 \in P$ и всех элементов $a \in V$.

Элементы векторного пространства V будем называть векторами, а элементы поля P — числами.

Примеры:

1. Множество $P^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in P\}$ является векторным пространством над полем P относительно операций покомпонентного сложения и умножения на элемент поля. (Пространство $\mathbb{R}^3$ над полем $\mathbb{R}$ — частный случай такого пространства.) Будем называть такие пространства *арифметическими n-мерными пространствами.*

2. Множество геометрических векторов на плоскости, складываемых по правилу параллелограмма и умножаемых на действительные числа, является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

3. Множество всех функций на множестве X со значениями в поле $\mathbb{R}$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно обычных операций над функциями:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{и} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

4. Каждое поле является векторным пространством над любым своим подполем (то есть и над собой).

Рассмотрим некоторые **свойства векторных пространств**.

Предложение 2.1.1. *Для любого числа* $\alpha \in P$ *и любых векторов* $a, b \in V$ *имеет место равенство* $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$.

Доказательство. Из свойств аддитивной группы следует, что для любых векторов a и b существует решение $a - b = a + (-b)$ уравнения $x + b = a$. Откуда для $\alpha \in P$ из равенства $\alpha((a - b) + b) = \alpha a$ следует, что $\alpha(a - b) + \alpha b = \alpha a$, то есть $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$. □

Предложение 2.1.2. $\alpha \cdot 0 = 0$ *(здесь* $0 \in V$*).*

Доказательство. Для любого $a \in V$ имеем $0 = a - a$, откуда $\alpha \cdot 0 = \alpha(a - a) = \alpha a - \alpha a = 0$. □

Предложение 2.1.3. $0 \cdot a = 0$. *(Слева* 0 *означает число, справа — вектор.)*

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha \in P$ имеем $0 = \alpha - \alpha$, откуда $0 \cdot a = (\alpha - \alpha)a = \alpha a - \alpha a = 0$. □

Предложение 2.1.4. *Если* $\alpha a = 0$*, то* $\alpha = 0$ *или* $a = 0$.

Предложение 2.1.5. *Имеет место следующее "правило знаков":*

$$(-\alpha)a = \alpha(-a) = -\alpha a \quad \text{и} \quad (-\alpha)(-a) = \alpha a.$$

Предложение 2.1.6. *Вторая и третья аксиомы по индукции распространяются на любое конечное число слагаемых.*

2.2 Подпространства

Пусть V — векторное пространство над полем P.

Определение 2.2.1. *Подмножество* L *векторного пространства* V *над полем* P *называется подпространством пространства* V*, если* L *само является пространством относительно операций, определённых в пространстве* V.

Примеры:

1. В каждом пространстве существуют два тривиальных подпространства: нулевое и само пространство.

2. Прямые и плоскости — примеры подпространств трёхмерного евклидова пространства.

Теорема 2.2.1. *Непустое подмножество L пространства V над полем P является подпространством V в том и только в том случае, когда L удовлетворяет условиям:*

1. *для любых элементов $a, b \in L$ их сумма $a + b \in L$;*
2. *для любого числа $\alpha \in P$ и вектора $a \in L$ их произведение $\alpha a \in L$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Ясно, что сложение в L подчиняется ассоциативному и коммутативному законам, и справедливы четыре аксиомы, связывающие умножение на элемент поля со сложением.

Возьмём $a \in L$ и $0 \in P$. По условию *2* заключаем, что $0 = 0 \cdot a \in L$. Далее для любого элемента $a \in L$ и $-1 \in P$ по условию *2* выполняется $-a = (-1)a \in L$. □

Рассмотрим один важный **пример** подпространства.

Определение 2.2.2. *Линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ называется вектор $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$, где $\alpha_i \in P$. В этом случае говорят, что вектор b линейно выражается через векторы a_i (разложен по векторам a_i).*

Если все коэффициенты α_i равны 0, то линейная комбинация называется тривиальной.

Определение 2.2.3. *Упорядоченная последовательность векторов называется системой векторов.*

Рассмотрим в пространстве V систему векторов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots\}$ конечную или бесконечную.

Определение 2.2.4. *Множество $L(S)$ всевозможных линейных комбинаций векторов системы S называется линейной оболочкой данной системы векторов.*

Предложение 2.2.2. $L = L(S)$ *— подпространство в V.*

Доказательство. Так как $0 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_s \in L$, то множество L не является пустым. Пусть $a, b \in L$, где

$$a = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i \quad \text{и} \quad b = \sum_{i=1}^{s} \beta_i a_i.$$

Тогда
$$a + b = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i a_i = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + \beta_i) a_i \in L.$$
Второе условие подпространства проверяется аналогично. □

Следствие. *Линейная оболочка системы векторов является наименьшим подпространством, содержащим данную систему векторов.*

Определение 2.2.5. *Говорят, что пространство V порождено системой векторов S, если $V = L(S)$. При этом S называют системой порождающих пространства V.*

2.3 Линейная зависимость векторов

Пусть в пространстве V над полем P дана система векторов
$$a_1, a_2, \dots, a_s \tag{1}$$

Определение 2.3.1. *Система (1) называется линейно зависимой, если существует хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация векторов системы (1) равная* 0. *Иначе система (1) линейно независима.*

Заметим, что *понятия линейной зависимости и независимости относятся лишь к конечным системам векторов.*

Рассмотрим **свойства отношения линейной зависимости**.

Предложение 2.3.1. *Система из одного вектора линейно зависима в том и только в том случае, когда этот вектор нулевой.*

Предложение 2.3.2. *Система (1) при $s \geqslant 2$ линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо вектор в ней линейно выражается через остальные векторы этой системы.*

Доказательство. Пусть система (1) линейно зависима. Тогда найдутся (не все равные нулю) элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in P$, для которых $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s = 0$. Пусть для определённости $\alpha_1 \neq 0$. Тогда
$$a_1 = -\alpha_1{}^{-1}\alpha_2 a_2 - \alpha_1{}^{-1}\alpha_3 a_3 - \dots - \alpha_1{}^{-1}\alpha_s a_s.$$

Обратно, если
$$a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \dots + \alpha_s a_s,$$

то

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + (-1) \cdot a_i + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \cdots + \alpha_s a_s = 0,$$

где $-1 \neq 0$. □

Предложение 2.3.3. *Система, содержащая* 0*, всегда линейно зависима.*

Доказательство. Если дана система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, 0$, то $0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_{s-1} + 1 \cdot 0 = 0$. □

Предложение 2.3.4. *Если часть системы векторов зависима, то и вся система зависима.*

Доказательство. Достаточно добавить в набор коэффициентов нетривиальной линейной комбинации недостающее количество нулей. □

Следствие. *Любая часть независимой системы векторов является независимой.*

Предложение 2.3.5. *Если система (1) линейно независима, то система векторов*

$$a_1, a_2, \ldots, a_s, b \tag{2}$$

линейно зависима тогда и только тогда, когда вектор b *линейно выражается через векторы системы (1).*

Доказательство. Если система (2) зависима, то найдутся элементы поля P, не все равные нулю, для которых $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s + \beta b = 0$. Докажем, что $\beta = 0$. Если бы это было не так, то система (1) оказалась бы линейно зависимой, что противоречит условию.

Обратное утверждение следует из второго свойства линейной зависимости. □

Следствие. *Вектор* b *единственным образом разлагается по векторам системы (1) в том и только в том случае, когда система векторов (1) является линейно независимой.*

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = b$$

и

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s = b.$$

Тогда

$$(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2 + \dots + (\alpha_s - \beta_s)a_s = 0.$$

Так как система (1) линейно независима, то коэффициенты первых двух разложений совпадают.

Обратно, пусть существует единственное разложение вектора b по векторам системы (1). Допустим, от противного, что система векторов (1) линейно зависима. Тогда можно найти нетривиальную линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s = 0.$$

С другой стороны

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_s a_s = b.$$

Сложив эти равенства, получим еще один вариант разложения вектора b по векторам системы (1), что противоречит условию. □

Теорема 2.3.6 (основное свойство линейной зависимости)**.** *Если дана система векторов (1) и система векторов*

$$b_1, b_2, \dots, b_s, b_{s+1}, \tag{3}$$

и каждый вектор системы (3) линейно выражается через векторы системы (1), то система векторов (3) является линейно зависимой.

Доказательство. Рассмотрим системы векторов, указанные в условии теоремы. По условию имеют место равенства

$$\begin{aligned}
&b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1s}a_s,\\
&b_2 = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{2s}a_s,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&b_s = \alpha_{s1}a_1 + \alpha_{s2}a_2 + \dots + \alpha_{ss}a_s,\\
&b_{s+1} = \alpha_{s+1,1}a_1 + \alpha_{s+1,2}a_2 + \dots + \alpha_{s+1,s}a_s
\end{aligned}$$

для некоторых $\alpha_{ik} \in P$.

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию векторов системы (3)

$$c = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{s+1} b_{s+1}. \tag{4}$$

Подставив в (4) правые части выписанных выше для векторов системы (3) равенств и произведя перегруппировку, получим

$$c = (\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{21}\beta_2 + \dots + \alpha_{s+1,1}\beta_{s+1})a_1 + (\alpha_{12}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \dots$$
$$+\alpha_{s+1,2}\beta_{s+1})a_2 + \dots + (\alpha_{1s}\beta_1 + \alpha_{2s}\beta_2 + \dots + \alpha_{s+1,s}\beta_{s+1})a_s.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \dots + \alpha_{s+1,1}x_{s+1} = 0 \\ \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{s+1,2}x_{s+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1s}x_1 + \alpha_{2s}x_2 + \dots + \alpha_{s+1,s}x_{s+1} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Так как число уравнений в системе (5) меньше числа неизвестных, то при приведении ее к ступенчатому виду получится трапецевидная система. Таким образом, система (5) является неопределенной, у нее существуют ненулевые решения. Если набор $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s+1}$ — одно из таких решений, то $c = 0$ и равенство (4) указывает на линейную зависимость системы (3). □

Следствие. *Если $m < n$ и в системе из n векторов каждый вектор линейно выражается через векторы системы, состоящей из m векторов, то система из n векторов является линейно зависимой.*

2.4 Базис, ранг, размерность пространства

Пусть V — пространство над полем P.

Определение 2.4.1. *Если существует конечная система векторов, порождающая пространство V, то V называется конечномерным. В противном случае пространство называется бесконечномерным.*

Предложение 2.4.1. *Если пространство порождается системой из n векторов, то любая система с большим числом векторов является линейно зависимой.*

Доказательство. Утверждение следует из основного свойства линейной зависимости. □

Определение 2.4.2. *Базисом пространства V называется всякая линейно независимая система векторов, порождающая пространство V.*

Теорема 2.4.2. *Любые два базиса пространства содержат одинаковое число векторов.*

Доказательство. Пусть система векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_s \tag{1}$$

является базисом пространства V и система векторов

$$b_1, b_2, \ldots, b_t \tag{2}$$

также является базисом пространства V. Пусть $s > t$. Так как все векторы системы (1) линейно выражаются через векторы базиса (2), то из основного свойства линейной зависимости следует линейная зависимость системы (1), что приводит к противоречию с условием.

Аналогично рассуждаем в случае $t > s$.

Следовательно, $s = t$. □

Определение 2.4.3. *Размерностью векторного пространства называется число векторов любого базиса этого пространства, если таковые существуют.*

Размерность пространства V обозначается через $\dim V$.

Примеры.

1. Пространство из нуля по определению считаем нульмерным.
2. Размерность плоскости равна двум.
3. Размерность пространства $V = \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ также равна двум.

Базисы существуют не во всяких векторных пространствах.

Пример. Пусть $V = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ — пространство бесконечных последовательностей над $\mathbb{R}$. Рассмотрим

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ \ldots,\qquad e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots),\ \ldots$$

— систему векторов из V. При любом n система из первых n векторов будет линейно независимой.

Определение 2.4.4. *Система векторов называется базисом пространства V, если каждый вектор пространства единственным образом разлагается по векторам системы.*

Предложение 2.4.3. *Определения базиса эквивалентны.*

Доказательство. Утверждение является следствием определения линейной оболочки векторов и следствия предложения 2.3.5. □

Следствие. *Разложение вектора по базису единственно.*

Определение 2.4.5. *Коэффициенты разложения вектора по базису называются координатами этого вектора.*

Предложение 2.4.4. *При сложении векторов соответствующие координаты складываются. При умножении вектора на число все координаты вектора умножаются на это число.*

Доказательство. При доказательстве пользуемся свойствами векторных пространств. □

Предложение 2.4.5. *Пусть* $L(a_1, a_2, \ldots, a_s) \neq \{0\}$. *Тогда среди образующих векторов можно найти базис данной линейной оболочки.*

Доказательство. Если система порождающих независима, то она и является искомым базисом. Если система порождающих зависима, то найдется вектор, являющийся линейной комбинацией остальных. Удалим его, и т.д. □

Следствие. *Любое конечномерное пространство обладает базисом.*

Теорема 2.4.6. *Любую линейно независимую систему векторов конечномерного пространства можно дополнить до базиса пространства.*

Доказательство. Если число векторов данной системы равно размерности пространства, то она сама является базисом. Если это число меньше размерности, добавим к системе один из векторов пространства, который нельзя выразить через векторы данной системы. По предложению 2.3.5 новая система останется линейно независимой, и т.д. □

Следствие. *Любой ненулевой вектор можно включить в некоторый базис пространства.*

Следствие. *Любое подпространство* U *конечномерного пространства* V *само является конечномерным пространством. При этом* $\dim U \leqslant \dim V$. *Более того, если* $U \neq V$, *то* $\dim U < \dim V$.

Доказательство. Для нулевого подпространства утверждение очевидно. В ненулевом подпространстве можно выбрать базис. Этот базис дополняется до базиса всего пространства. □

Определение 2.4.6. *Рангом системы векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *будем называть размерность линейной оболочки* $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Определение 2.4.7. *Базисом системы векторов назовем тот базис ее линейной оболочки, о котором идет речь в предложении 2.4.5.*

Определим базис системы векторов точнее.

Определение 2.4.8. *Базисом системы векторов называется такая линейно независимая ее подсистема, через которую линейно выражается каждый вектор данной системы.*

Теорема 2.4.7. *В n-мерном векторном пространстве для любого числа k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ существуют k-мерные подпространства.*

Доказательство. Заметим, что нулевому подпространству приписывается размерность 0. Если $k \neq 0$, рассмотрим какой-нибудь базис пространства и линейную оболочку первых k векторов базиса. □

2.5 Изоморфизм векторных пространств

Пусть даны два векторных пространства V_1 и V_2 над полем P.

Определение 2.5.1. *Говорят, что пространства V_1 и V_2 изоморфны и пишут $V_1 \cong V_2$, если существует функция $f : V_1 \to V_2$, которая удовлетворяет условиям:*

1. f — биекция;

2. для любых векторов $a, b \in V_1$ имеет место равенство $(a+b)f = af + bf$ в пространстве V_2;

3. $(\alpha a)f = \alpha(af)$ для всех $\alpha \in P$ и $a \in V_1$.

Пусть $f : V \to U$ — изоморфизм векторных пространств над полем P.

Предложение 2.5.1. $0_V f = 0_U$.

Доказательство. Действительно, $0_V f = (a-a)f = (a+(-1)a)f = af + ((-1)a)f = af + (-1)af = af - af = 0_U$. □

Предложение 2.5.2. *Для любого вектора $a \in V$ имеет место равенство $(-a)f = -(af)$.*

Предложение 2.5.3. *Линейно независимая система векторов отображается при применении изоморфизма в линейно независимую систему векторов.*

Доказательство. Пусть система векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

является линейно независимой системой векторов пространства V.

Рассмотрим линейную комбинацию образов векторов системы (1) равную 0:

$$\alpha_1 a_1 f + \alpha_2 a_2 f + \cdots + \alpha_n a_n f = 0_U.$$

Тогда

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n) f = 0_V f.$$

Из инъективности функции f следует, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0_V.$$

Таким образом, все коэффициенты равны нулю, так как система (1) линейно независима. □

Предложение 2.5.4. *Функция обратная изоморфизму сама является изоморфизмом векторных пространств.*

Доказательство. Так как f — биекция, то существует биективная функция f^{-1}.

Пусть $u, v \in U$ и $af = u, bf = v$ для элементов $a, b \in V$. Тогда $(a+b)f = u+v$, откуда следует, что $uf^{-1}+vf^{-1} = (u+v)f^{-1}$. Аналогично, для $\alpha \in P$ имеем $(\alpha a)f = \alpha u$, то есть $(\alpha u)f^{-1} = \alpha(uf^{-1})$. □

Теорема 2.5.5. *Всякое векторное пространство V над полем P, имеющее базис из n векторов, изоморфно пространству P^n.*

Доказательство. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

— базис пространства V. Определим функцию $f : V \to P^n$ по правилу:

$$af = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

для любого элемента $a \in V$, где

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Биективность функции f следует из однозначности разложения вектора по базису. Сохранение операций проверяется непосредственно. □

Из доказанной теоремы следует, что для изучения свойств конечномерных пространств, их можно отождествлять с арифметическими пространствами, так как, с точностью до изоморфизма, других конечномерных пространств не существует.

Следствие. *Два конечномерных пространства V и U над полем P изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim V = \dim U$.

3 Ранг матрицы

3.1 Элементарные преобразования матриц

Пусть P — произвольное поле. Рассмотрим матрицу A из элементов этого поля.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 3.1.1. *Назовем элементарными преобразованиями строк матрицы следующие:*

1. перестановка двух строк;

2. прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на элемент поля;

3. умножение всех элементов строки на ненулевой элемент поля.

Теорема 3.1.1. *С помощью элементарных преобразований строк любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.*

Доказательство. Если матрица нулевая, то она уже имеет ступенчатый вид.

В матрице отличной от нулевой находим первый по счету ненулевой столбец и, переставляя строки при необходимости, делаем его первый элемент отличным от нуля. С помощью второго преобразования все остальные элементы столбца обращаем в нули и т.д. □

Рассмотрим систему векторов

$$\begin{cases} a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}) \\ a_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m = (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn}). \end{cases} \tag{1}$$

Определение 3.1.2. *Будем называть систему векторов (1) ступенчатой, если матрица, составленная из векторов системы, является ступенчатой.*

Определение 3.1.3. *Назовем элементарными преобразованиями системы векторов следующие:*

1. перестановка двух векторов в системе;

2. прибавление к одному вектору системы другого ее вектора, умноженного на элемент поля;

3. умножение вектора на ненулевой элемент поля.

Теорема 3.1.2. *Всякую систему векторов с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Теорема 3.1.3. *Ступенчатая система ненулевых векторов всегда линейно независима.*

Следствие. *Ранг ступенчатой системы векторов равен числу ненулевых векторов этой системы.*

Пусть даны две системы векторов:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \tag{2}$$

и

$$b_1, b_2, \dots, b_m. \tag{3}$$

Определение 3.1.4. *Системы векторов (3) и (2) называют эквивалентными, если каждый вектор системы (3) является линейной комбинацией векторов системы (2), и каждый вектор системы (2) линейно выражается через векторы системы (3).*

Предложение 3.1.4. *Системы векторов эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$L(a_1, a_2, \dots, a_n) = L(b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Следствие. *Ранги эквивалентных систем векторов равны.*

3.2 Строчный и столбцовый ранги матрицы

С матрицей A мы связали систему векторов (1). Но из столбцов матрицы A также можно образовать систему m-мерных векторов.

$$\begin{cases} b_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}) \\ b_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn}). \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим какую-нибудь линейную комбинацию векторов системы (4). Пусть

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n = 0.$$

Тогда имеют место следующие равенства для координат:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Подвергнем матрицу A двум элементарным преобразованиям, получим матрицу B, где

$$B = \begin{pmatrix} \beta\alpha_{11} + \gamma\alpha_{21} & \beta\alpha_{12} + \gamma\alpha_{22} & \ldots & \beta\alpha_{1n} + \gamma\alpha_{2n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta \neq 0$ и γ — элементы поля. Рассмотрим систему столбцов матрицы B.

$$\begin{cases} c_1 = (\beta\alpha_{11} + \gamma\alpha_{21}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}) \\ c_2 = (\beta\alpha_{12} + \gamma\alpha_{22}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = (\beta\alpha_{1n} + \gamma\alpha_{2n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn}). \end{cases} \tag{6}$$

Умножим первую строку равенств (5) на β и прибавим к полученному равенству вторую строку, умноженную на γ. Получим систему равенств:

$$\begin{cases} (\beta\alpha_{11} + \gamma\alpha_{12})x_1 + (\beta\alpha_{12} + \gamma\alpha_{22})x_2 + \cdots + (\beta\alpha_{1n} + \gamma\alpha_{2n})x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Но равенства (7) являются равенствами координат следующей линейной комбинации векторов

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n = 0.$$

Таким образом, нами доказано предложение

Предложение 3.2.1. *При элементарных преобразованиях строк матрицы отношение зависимости между столбцами сохраняется.*

Теорема 3.2.2. *Ранги систем (1) и (4) для матрицы A равны.*

Доказательство. Если матрица A имеет треугольный вид, то непосредственно проверяется, что система ее столбцов линейно независима, а система строк независима, как ступенчатая.

В общем случае приводим матрицу A к ступенчатому виду. Пусть число ненулевых строк в ступенчатой матрице S равно $r \leqslant m$. Рассмотрим матрицу T из этих строк. Первые r столбцов в матрице T образуют базис в системе ее столбцов. Но тогда и в ступенчатой матрице S первые r столбцов образуют базис системы столбцов. Таким образом, строчный и столбцовый ранги матрицы S равны r. Из сказанного выше следует, что тогда строчный и столбцовый ранги матрицы A равны. $\square$

Определение 3.2.1. *Рангом матрицы назовем ранг системы ее строк (столбцов).*

Рассмотрев системы строк матриц A и B, замечаем, что они являются эквивалентными системами векторов.

Предложение 3.2.3. *При элементарных преобразованиях строк матрицы ее ранг не меняется.*

Из сказанного выше следует способ нахождения ранга матрицы. Следует привести матрицу к ступенчатому виду и сосчитать ненулевые строки ступенчатой матрицы.

3.3 Ранги матриц системы уравнений

Теорема 3.3.1 (Кронекера-Капелли)**.** *Система линейных уравнений является совместной тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц этой системы равны.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

Если существует решение системы уравнений (1), то последний столбец расширенной матрицы можно линейно выразить через столбцы основной матрицы. Следовательно, ранги матриц равны.

Обратно, если ранги равны, то последний столбец расширенной матрицы должен раскладываться по любому базису столбцов основной матрицы. Допустим, что первые r столбцов основной матрицы образуют такой базис. Тогда для некоторых чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ имеют место равенства

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \alpha_{i2}\gamma_2 + \dots + \alpha_{ir}\gamma_r = \beta_i$$

для всех $i = 1, 2, \dots, m$. Дополним суммы слева

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}\gamma_j + \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{ik} \cdot 0 = \beta_i.$$

Последние равенства показывают, что n чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, 0, \dots, 0$ образуют решение системы уравнений (1). □

Следствие. *1. Система уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен числу неизвестных.*

2. Система однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы меньше числа неизвестных.

3.4 Пространство решений однородной системы уравнений

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений над полем P:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 3.4.1. *Множество решений системы (1) есть подпространство пространства P^n.*

Доказательство. Действительно, система (1) совместна. Решением системы (1) является упорядоченный набор n элементов поля P. Свойства подпространства проверяются непосредственно. □

Теорема 3.4.2. *Размерность пространства решений системы уравнений (1) равна $n - r$, где r — ранг основной матрицы системы (1).*

Доказательство. Рассмотрим общее решение системы (1). Так как ранг основной матрицы системы равен r, то в решении r главных неизвестных. Пусть

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_{1,r+1}x_{r+1} + \gamma_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + \gamma_{1n}x_n \\ x_2 = \gamma_{2,r+1}x_{r+1} + \gamma_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + \gamma_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = \gamma_{r,r+1}x_{r+1} + \gamma_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + \gamma_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим далее следующий набор частных решений системы (1):

$$\begin{cases} a_{r+1} = (\gamma_{1,r+1}, \gamma_{2,r+1}, \dots, \gamma_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0) \\ a_{r+2} = (\gamma_{1,r+2}, \gamma_{2,r+2}, \dots, \gamma_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = (\gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \dots, \gamma_{rn}, 0, 0, \dots, 1). \end{cases} \tag{3}$$

Остается показать, что система векторов (3) является базисом пространства решений системы уравнений (1).

Легко заметить, что система векторов (3) является линейно независимой. Рассмотрим произвольное решение системы уравнений (1)

$$b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_n).$$

Далее составим следующую линейную комбинацию векторов системы (3)

$$c = \beta_{r+1}a_{r+1} + \beta_{r+2}a_{r+2} + \dots + \beta_n a_n,$$

где

$$c = ({\beta_1}', {\beta_2}', \dots, {\beta_r}', \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_n).$$

Отсюда разность решений $b - c$ равна вектору

$$(\beta_1 - {\beta_1}', \beta_2 - {\beta_2}', \dots, \beta_r - {\beta_r}', 0, 0, \dots, 0).$$

Но в этом решении все свободные неизвестные принимают нулевое значение, то есть это решение — нулевое. Следовательно, $b = c$, и система векторов (3) порождает пространство решений системы уравнений (1). □

Определение 3.4.1. *Базис пространства решений системы линейных однородных уравнений называется фундаментальной системой решений данной системы уравнений.*

В доказательстве теоремы указан способ нахождения фундаментальной системы решений.

4 Сопутствующие пространства

4.1 Факторпространства

Определение 4.1.1. *Если U — подпространство пространства V над полем P, то множество*

$$a + U = \{x \in V \mid x = a + u, u \in U\}$$

называется линейным многообразием, полученным сдвигом пространства U на вектор $a \in V$.

В геометрии примерами многообразий служат прямые (плоскости) параллельные прямой (плоскости), проходящей через начало координат.

Рассмотрим систему неоднородных уравнений над полем P

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases} \tag{1}$$

и соответствующую ей систему однородных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Предложение 4.1.1. *Решение системы (1) (если она совместна) есть сумма любого ее решения и решения системы (2).*

Следствие. *Множество решений совместной системы линейных неоднородных уравнений образует линейное многообразие в пространстве P^n, полученное сдвигом пространства решений соответствующей однородной системы уравнений.*

Пусть V — векторное пространство над полем P, и M — подпространство пространства V.

Определение 4.1.2. *Векторы $a, b \in V$ называются сравнимыми по модулю M ($a \equiv b \pmod M$), если $a - b \in M$.*

Легко показать, что отношение сравнимости по подпространству является отношением эквивалентности.

Рассмотрим класс разбиения $\overline{a}$, содержащий элемент a. Если $b \in \overline{a}$, то $b - a = m \in M$. То есть $b = a + m$, откуда $b \in a + M$.

Обратно, если $u \in a + M$, то $u - a \in M$, то есть $u \in \overline{a}$.

Следовательно, *класс разбиения является многообразием, полученным сдвигом подпространства на любой представитель класса*, то есть

$$V/M = \{a + M \mid a \in V\}.$$

Рассмотрим на множестве V/M операции

$$(a + M) + (b + M) = a + b + M \qquad \text{и} \qquad \alpha(a + M) = \alpha a + M.$$

Предложение 4.1.2. *Относительно введенных операций множество V/M является векторным пространством над полем P.*

Векторное пространство V/M называется *факторпространством* пространства V по подпространству M.

Выясним величину размерности этого пространства.

Пусть система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ является базисом подпространства M, тогда ее можно дополнить до базиса

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l$$

пространства V. Любой вектор $x \in V$ можно разложить по базису.

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j.$$

Отсюда

$$x + M = \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j + M.$$

Таким образом,

$$V/M = L(b_1 + M, b_2 + M, \ldots, b_l + M).$$

Остается доказать, что система порождающих является линейно независимой. Для этого рассмотрим линейную комбинацию

$$\gamma_1 b_1 + M + \gamma_2 b_2 + M + \cdots + \gamma_l b_l + M = M.$$

Из определения правил действий над классами заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{l} \gamma_j b_j \in M.$$

Разложив последний вектор по базису подпространства M, получим тривиальную линейную комбинацию векторов.

Следовательно, классы $b_j + M$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ составляют базис фактор-пространства. Нами доказано, что

Предложение 4.1.3. *Размерность пространства V/M равна разности размерностей пространств V и M.*

4.2 Взаимное расположение подпространств

Пусть дано пространство V над полем P и подпространства L и M этого пространства.

Определение 4.2.1. *Пересечением подпространств L и M называется их теоретико-множественное пересечение $L \cap M$.*

Теорема 4.2.1. *Пересечение подпространств векторного пространства само является подпространством этого пространства.*

Доказательство. Так как $0 \in L$ и $0 \in M$, то $0 \in L \cap M$. Следовательно, пересечение непусто.

Пусть $x, y \in L \cap M$, тогда $x, y \in L$ и $x, y \in M$. Отсюда $x + y \in L$ и $x + y \in M$, так как L и M являются подпространствами, но тогда $x + y \in L \cap M$.

Справедливость второго условия проверяется аналогично. □

Определение 4.2.2. *Суммой подпространств L и M называется множество*

$$L + M = \{x \in V \mid x = u + v, \text{ где } u \in L \text{ и } v \in M\}.$$

Теорема 4.2.2. *Сумма подпространств сама является подпространством пространства V.*

Доказательство. Так как $0 = 0+0 \in L+M$, то множество $L+M$ непусто.

Пусть $x, y \in L + M$, тогда $x = a + b$ и $y = u + v$, где $a, u \in L$ и $b, v \in M$. Отсюда $x + y = (a + u) + (b + v) \in L + M$.

Второе условие проверяется аналогично. □

Теорема 4.2.3. *Если L и M — подпространства пространства V над полем P, то*

$$\dim(L + M) + \dim L \cap M = \dim L + \dim M.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие системы векторов:

$$a_1, a_2, \dots, a_k; \tag{1}$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k,\ b_1, b_2, \dots, b_l; \tag{2}$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k,\ c_1, c_2, \dots, c_m; \tag{3}$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k,\ b_1, b_2, \dots, b_l,\ c_1, c_2, \dots, c_m, \tag{4}$$

где система (1) является базисом пересечения подпространств, система (2) и система (3) — базисы подпространств L и M соответственно.

Установим линейную независимость системы (4). Рассмотрим линейную комбинацию векторов системы (4)

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j + \sum_{t=1}^{m} \gamma_t c_t = 0,$$

где $\alpha_i, \beta_j, \gamma_t \in P$. Тогда

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j = -\sum_{t=1}^{m} \gamma_t c_t.$$

Откуда заключаем, что вектор s содержится в пересечении подпространств. Тогда он является линейной комбинацией векторов системы $a_1, a_2, \dots, a_k$. Отсюда легко следует равенство нулю всех коэффициентов линейной комбинации системы (4) и ее линейная независимость.

Покажем, что система (4) порождает пространство $L + M$. Пусть $x \in L + M$, тогда $x = u + v$, где $u \in L$ и $v \in M$. Следовательно, они являются линейными комбинациями систем (2) и (3) соответственно, но тогда вектор x является линейной комбинацией векторов системы (4).

Осталось сравнить число векторов в базисах. □

Определение 4.2.3. *Сумма подпространств $L+M$ называется прямой, если любой вектор $x \in L+M$ представляется в виде суммы $x = u + v$ (для $u \in L$ и $v \in M$) однозначно.*

Теорема 4.2.4. *Сумма подпространств $L+M$ является прямой тогда и только тогда, когда $L \cap M = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $x \in L \cap M$. Если $x \neq 0$, то $0 = x + (-x) = 0 + 0$, где $x \in L$ и $-x \in M$. Отсюда получаем $x = 0$, так как сумма подпространств прямая.

Обратно, если $x \in L + M$ и $x = l_1 + m_1 = l_2 + m_2$, где $l_i \in L$ и $m_i \in M$, то $l_1 - l_2 = m_2 - m_1 \in L \cap M$, то есть $l_1 = l_2$ и $m_1 = m_2$. □

Следствие. *Если сумма подпространств $L+M$ является прямой, то*

$$\dim(L+M) = \dim L + \dim M.$$

Если сумма $L+M$ является прямой, то пишут $L \oplus M$.

Определение 4.2.4. *Каждое слагаемое в представлении вектора в прямой сумме называется проекцией этого вектора на соответствующее подпространство.*

Пример. Если e_1, e_2 — базис пространства V над полем P, то $V = L(e_1) \oplus L(e_2)$.

5 Матрицы

5.1 Действия над матрицами

Пусть P — некоторое поле, $A = (\alpha_{ij})_{(m,n)}$ — матрица над этим полем и (m,n) — размеры матрицы A.

Определение 5.1.1. *Суммой матриц $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ одинаковых размеров называется матрица $A + B = (\gamma_{ij})$, где $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$.*

Определение 5.1.2. *Произведением элемента поля $\gamma \in P$ на матрицу A называется матрица $\gamma A = (\gamma a_{ij})$.*

Теорема 5.1.1. *Множество $P^{(m,n)}$ матриц одинаковых размеров (m,n) над полем P является векторным пространством над полем P относительно введенных операций. При этом данное пространство изоморфно пространству строк P^{mn}.*

Доказательство. Так как сложение матриц сводится к сложению элементов поля, то оно ассоциативно и коммутативно. Роль нуля при сложении матриц играет нулевая матрица, а противоположной для матрицы A является матрица $-A = (-\alpha_{ij})$. Остальные аксиомы определения векторного пространства являются следствиями законов умножения в поле P.

Найдем базис пространства матриц $P^{(m,n)}$. Для этого определим матрицы E_{ij}, в которых $\alpha_{ij} = 1$, а на остальных местах стоят нули. Тогда $A = \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} E_{ij}$. То есть множество матриц $\{E_{ij}\}$ порождает пространство матриц $P^{(m,n)}$. Легко проверить, что система матриц $\{E_{ij}\}$ линейно независима. Поэтому размерность матричного пространства $P^{(m,n)}$ равна числу mn. Остается применить первую теорему об изоморфизме конечномерных пространств. $\square$

Матричное пространство имеет свои особенности по сравнению с пространством строк. Эти особенности связаны с умножением матриц.

Лемма 5.1.2 (техническая)**.** *Порядок суммирования элементов поля неважен, то есть*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}.$$

Определение 5.1.3. *Назовем матрицу $A^T = (\alpha_{ij}^T)$ транспонированной по отношению к матрице $A = (\alpha_{ij})$, если $\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji}$.*

Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$.

Определение 5.1.4.

$$AB^T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Определение 5.1.5. *Произведением матрицы $A_{(m,n)}$ на матрицу $B_{(n,t)}$ называется матрица $AB = (\gamma_{ij})_{(m,t)}$, где $\gamma_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$.*

Теорема 5.1.3. *Если определено одно из произведений $A(BC)$ и $(AB)C$, то определено и второе, и они равны.*

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{(m,n)}$, $B = (\beta_{ij})_{(p,s)}$ и $C = (\gamma_{ij})_{(q,t)}$, причем произведение $(AB)C$ определено. Тогда $n = p$, $s = q$, и поэтому произведение $A(BC)$ определено. При этом размеры произведений $A(BC)$ и $(AB)C$ одинаковые.

Пусть далее $AB = (\delta_{ij})_{(m,s)}$, $(AB)C = (\mu_{ij})_{(m,t)}$, $BC = (\eta_{ij})_{(n,t)}$, $A(BC) = (\tau_{ij})_{(m,t)}$. Тогда по определению $\delta_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$ и $\eta_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{s} \beta_{il}\gamma_{lj}$. Отсюда получаем

$$\mu_{ij} = \sum_{l=1}^{s} \delta_{il}\gamma_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kl} \right) \gamma_{lj} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kl}\gamma_{lj}$$

и

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \left(\sum_{l=1}^{s} \beta_{kl}\gamma_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl}\gamma_{lj}.$$

Остается применить техническую лемму. □

Предложение 5.1.4. *Если одно из выражений $C(A+B)$ ($(A+B)C$) или $CA+CB$ ($AC+BC$) определено, то определено и второе, и они равны.*

Доказательство. Пусть определено произведение $C(A+B)$. Тогда матрицы A и B имеют одинаковые размеры (m,n) и матрица C имеет размеры (s,m). Следовательно, матрицы CA и CB существуют и имеют размеры (s,n).

Далее, если δ_{ij} — элемент матрицы $C(A+B)$, то

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik}(\alpha_{kj} + \beta_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik}\alpha_{kj} + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik}\beta_{kj}. \quad \square$$

Теорема 5.1.5. *Множество $P^{(n,n)}$ квадратных матриц порядка n над полем P является ассоциативным кольцом относительно сложения и умножения матриц.*

Определение 5.1.6. *Множество A с определенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля P называется алгеброй над полем P, если:*

1. A — векторное пространство над полем P;

2. A — кольцо;

3. $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ для всех элементов $\alpha \in P$ и $a, b \in A$.

Примеры.

1. Поле над любым своим подполем является алгеброй.

2. Пространство геометрических векторов становится алгеброй, если добавить векторное умножение.

Теорема 5.1.6. *Множество* $M_n(P) = P^{(n,n)}$ *квадратных матриц порядка* n *над полем* P *является ассоциативной алгеброй с единицей над полем* P.

Замечание. *Алгебра* $M_n(P)$ *в общем случае не является коммутативной, и в ней можно найти делители нуля.*

5.2 Алгебра матриц

Определение 5.2.1. *Квадратная матрица*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

называется диагональной.

Если

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_{11} & \alpha_1\beta_{12} & \dots & \alpha_1\beta_{1n} \\ \alpha_2\beta_{21} & \alpha_2\beta_{22} & \dots & \alpha_2\beta_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_n\beta_{n1} & \alpha_n\beta_{n2} & \dots & \alpha_n\beta_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$BA = \begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_1 & \beta_{12}\alpha_2 & \dots & \beta_{1n}\alpha_n \\ \beta_{21}\alpha_1 & \beta_{22}\alpha_2 & \dots & \beta_{2n}\alpha_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \beta_{n1}\alpha_1 & \beta_{n2}\alpha_2 & \dots & \beta_{nn}\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Будем иногда обозначать $A = diag(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Определение 5.2.2. *Единичной будем называть матрицу* $E = diag(1, 1, \dots, 1)$.

Из вышесказанного ясно, что $BE = EB = B$ для любой матрицы $B \in P^{(n,n)}$.

5.3 Транспонированные матрицы. Ранг произведения матриц.

Напомним, что транспонированием матрицы называют замену ее строк соответствующими столбцами. Рассмотрим некоторые свойства транспонированных матриц.

Предложение 5.3.1. *Для матриц A и B и любого числа $\gamma \in P$ имеют место равенства:*

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\gamma A)^T = \gamma A^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательство. Докажем последнее утверждение. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{(m,n)}$ и $B = (\beta_{ij})_{(n,t)}$. Пусть также $B^T A^T = (\gamma_{ij})_{(t,m)}$. Тогда

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta^T_{ik}\alpha^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\beta_{ki} = \delta_{ji}.$$

Но $\delta_{ji} = \delta^T_{ij}$, если δ_{ij} — элемент матрицы AB. □

Теорема 5.3.2. *Ранг матрицы A^T равен рангу матрицы A.*

Теорема 5.3.3. *Ранг произведения матриц не превосходит ранга любого из сомножителей.*

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{(m,n)}$ и $B = (\beta_{ij})_{(n,t)}$. Рассмотрим систему $a_1, a_2, \ldots, a_n$ столбцов матрицы A и произвольный столбец c_j матрицы AB. Из правила умножения матриц следует, что $c_j = \beta_{1j}a_1 + \beta_{2j}a_2 + \cdots + \beta_{nj}a_n$.

Рассмотрим следующие системы векторов:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \tag{5}$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,\ c_1, c_2, \ldots, c_t; \tag{6}$$

$$c_1, c_2, \ldots, c_t. \tag{7}$$

Из доказанного выше следует равенство рангов систем (5) и (6). Так как система (7) является частью системы (6), то ее ранг не больше ранга системы (6). Таким образом, ранг системы (7) не превосходит ранга системы (5).

Чтобы доказать теорему для матрицы B следует рассмотреть транспонированные матрицы и воспользоваться предыдущей теоремой. □

5.4 Матрица перехода от базиса к базису

Пусть V — векторное пространство над полем P и система

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{1}$$

является базисом пространства V. Рассмотрим любую систему

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{2}$$

векторов пространства V. Каждый вектор системы (2) можно единственным образом разложить по базису (1). Получим равенства

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} e_i \alpha_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Составив из координат векторов соответствующие столбцы, получим квадратную матрицу $A = (\alpha_{ij})$ порядка n.

Определение 5.4.1. *Матрицу A, о которой идет речь выше, называют матрицей перехода от базиса (1) к системе (2).*

Предложение 5.4.1. *Система (2) линейно независима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен ее порядку.*

Доказательство. Независимость векторов системы (2) означает независимость системы столбцов матрицы A. □

Наряду с матрицами из элементов поля будем рассматривать матрицы-строки, элементами которых являются вектора пространства.

Тогда набор равенств системы (3) можно заменить верным для матриц равенством $eA = a$, в котором

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Лемма 5.4.2 (техническая)**.** *Для любых квадратных матриц A и B из $M_n(P)$ из равенства $eA = eB$ следует верность равенства $A = B$.*

Доказательство. Пусть $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$. Тогда

$$eA = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \alpha_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \alpha_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \alpha_{in} \end{pmatrix}$$

и

$$eB = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \beta_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \beta_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \beta_{in} \end{pmatrix}.$$

Приравняв соответствующие элементы равных матриц eA и eB, воспользуемся однозначностью разложения вектора по базису. □

Лемма 5.4.3 (техническая). *В условиях предыдущей леммы имеет место равенство $e(AB) = (eA)B$.*

Доказательство. Для произвольного элемента μ_j матрицы $(eA)B$ имеем

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}. \quad \square$$

Пусть даны два базиса пространства V: базис (1) и базис (2). Тогда существует матрица B перехода от базиса (2) к базису (1), причем $aB = e$. Отсюда, используя $eA = a$, получаем $(eA)B = e$. Применяя к данному равенству доказанные технические леммы, имеем $e(AB) = eE$, и значит, $AB = E$.

С другой стороны, $a = (aB)A$, что влечет равенство $E = BA$. Таким образом, матрицы A и B являются взаимно обратными.

Предложение 5.4.4. *Матрица перехода от базиса к базису обратима.*

Пусть матрица

$$\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n\end{pmatrix}$$

составлена из координат вектора $x \in V$ в базисе (1), а матрица

$$\delta = \begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n\end{pmatrix}$$

— из координат вектора x в базисе (2). Тогда верны равенства

$$x = e\gamma^T \qquad \text{и} \qquad x = a\delta^T.$$

Отсюда следует, что $\gamma^T = A\delta^T$ и $\delta^T = B\gamma^T$.

5.5 Обратимость матриц

Решим вопрос об обратимости матриц.

Определение 5.5.1. *Матрица $A \in M_n(P)$ называется невырожденной, если ее ранг равен n.*

Другими словами, *матрица невырождена тогда и только тогда, когда система ее строк (столбцов) линейно независима.*

Предложение 5.5.1. *С помощью элементарных преобразований строк (столбцов) матрицы ее можно превратить в единичную, если матрица невырождена.*

Для решения вопроса об обратимости матриц рассмотрим так называемые элементарные матрицы. Эти матрицы получаются из единичной матрицы с помощью одного из элементарных преобразований строк.

Различают элементарные матрицы трех видов:

$$1)\qquad E + cE_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & & & & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} ;$$

$$2)\qquad P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} ;$$

$$3)\qquad Q_i(c) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} .$$

Для элементарных матриц $i \neq j$ и $c \neq 0$.

Предложение 5.5.2. *Элементарное преобразование строк матрицы равносильно умножению этой матрицы слева на соответствующую элементарную матрицу.*

Следствие. *Умножая невырожденную матрицу слева (справа) на подходящие элементарные матрицы, ее можно обратить в единичную.*

Теорема 5.5.3. *Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.*

Доказательство. Если у матрицы A существует обратная матрица A^{-1}, то ранг произведения AA^{-1} не превосходит ранга матрицы A. Отсюда, учитывая $AA^{-1} = E$, получаем, что ранг A равен n.

Из предыдущего утверждения следует, что если A — невырожденная матрица, то найдутся элементарные матрицы C_i, для которых

$$C_s(C_{s-1}(\dots(C_2(C_1A))\cdots)) = (C_sC_{s-1}\dots C_1)A = E.$$

С другой стороны, существуют элементарные матрицы D_j, для которых

$$((\cdots((AD_1)D_2)\dots)D_t = A(D_1D_2\dots D_t) = E.$$

Если $C = C_sC_{s-1}\dots C_1$ и $D = D_1D_2\dots D_t$, то $CA = AD = E$. Тогда $C = CE = C(AD) = (CA)D = ED = D$. Следовательно, $C = D = A^{-1}$. □

Рассмотрим матричное уравнение $AX = E$ над кольцом $M_n(P)$. Умножая уравнение слева на подходящие элементарные матрицы в случае невырожденности A, получим уравнение $EX = C_k\dots C_2C_1E$, равносильное исходному. Таким образом, если превратить A в E с помощью элементарных преобразований строк и проделать те же самые преобразования в E, то E превратится в A^{-1}.

5.6 Метод Гаусса на языке умножения матриц

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть A — основная матрица системы (1), X — столбец неизвестных, B — столбец свободных членов, $(A|B)$ — расширенная матрица системы. Тогда можно составить матричное уравнение, которое будет эквивалентно системе (1), а именно

$$AX = B. \tag{2}$$

Если U — произвольная матрица порядка m, то умножая уравнение (2) слева на матрицу U, получим уравнение

$$UAX = UB. \tag{3}$$

Всякое решение уравнения (2) является решением уравнения (3). Если при этом матрица U обратима, то всякое решение уравнения (3) является решением уравнения (2), то есть уравнения (2) и (3) эквивалентны. Кроме того, уравнению (3) соответствует система уравнений с основной матрицей UA, столбцом свободных членов UB и ее расширенная матрица равна $U(A|B)$.

Метод Гаусса по отношению к матричному уравнению состоит в умножении слева матричного уравнения на элементарные матрицы с целью превратить матрицу A в ступенчатую.

6 Подстановки и определители

6.1 Группа подстановок

Пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Любое упорядочение этого множества будем называть *перестановкой из n элементов.*

Существует n различных способов выбора первого элемента из данных n элементов. При выбранном первом элементе существует $n-1$ возможность выбрать второй элемент и т.д. Поэтому существует ровно $n!$ различных перестановок из n элементов.

Заметим, что достаточно рассматривать только перестановки индексов элементов.

Определение 6.1.1. *Скажем, что пара чисел (i, j) образует инверсию в перестановке, если $i < j$, но j стоит перед i.*

Например, в перестановке (15234) три инверсии.

Определение 6.1.2. *Подстановкой n-ой степени будем называть любое биективное отображение множества из n элементов на себя.*

Записывать подстановку будем в виде матрицы из двух строк, в которой вторая строка состоит из образов элементов первой строки, причем под каждым элементом стоит его образ. Например, если $\sigma(i_k) = j_k$, то будем писать

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

Определение 6.1.3. *Композицию подстановок будем называть умножением.*

Умножение подстановок обладает следующими **свойствами**:

1. *Умножение подстановок не подчиняется коммутативному закону.*

2. *Умножение ассоциативно* (свойство композиции функций, определенных на одном множестве).

3. *Роль единицы при умножении играет тождественная подстановка.*

4. *Каждая нетождественная подстановка обратима* (свойство биекций).

Предложение 6.1.1. *Подстановки n-ой степени образуют некоммутативную мультипликативную группу S_n, называемую симметрической группой n-ой степени.*

Замечание. *Можно, переставляя столбцы, записывать всегда первую строку подстановки в натуральном порядке.*

Определение 6.1.4. *Подстановка называется чётной, если в нижней ее строке число инверсий чётно.*

Определение 6.1.5. *Если символ отличен от своего образа при выполнении данной подстановки, будем говорить, что подстановка его перемещает.*

Определение 6.1.6. *Транспозицией назовем подстановку, перемещающую только два элемента множества, то есть*

$$(ik) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Лемма 6.1.2. *Транспозиция нечётна.*

Доказательство. Если между элементами i и k в транспозиции (ik) находится s символов, то число инверсий в нижней строке равно: s (для i) плюс s (для k) плюс одна для пары (i, k), то есть $2s + 1$. □

Теорема 6.1.3. *Умножение подстановки на транспозицию меняет чётность подстановки.*

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j_n \end{pmatrix} (ik) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & k & \dots & i & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножение на транспозицию соответствует перестановке двух элементов в нижней строке данной подстановки, значит количество инверсий возрастет на нечётное число или уменьшится на нечётное число. □

Следствие. *Число чётных подстановок равно числу нечётных подстановок.*

Доказательство. Для доказательства возьмем транспозицию (ik). Умножая каждую чётную подстановку на эту транспозицию определим биективную функцию из множества A_n четных подстановок во множество всех нечётных подстановок. □

Определение 6.1.7. *Будем называть циклом подстановку, перемещаемые элементы которой можно расположить в виде цепочки, где за каждым элементом стоит его образ, а образом последнего элемента является первый элемент цепочки.*

Такой цикл будем обозначать

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}.$$

Определение 6.1.8. *Два цикла называются независимыми, если множества перемещаемых ими элементов не пересекаются.*

Теорема 6.1.4. *Всякая нетождественная подстановка либо является циклом, либо разлагается в произведение независимых циклов.*

Доказательство. Выберем любой перемещаемый данной подстановкой элемент i_1, за ним запишем его образ i_2, за последним — его образ i_3 и так далее. Может случиться, что все перемещаемые элементы запишутся друг за другом, где i_k окажется последним в цепочке. Тогда в силу инъективности функции образом i_k может быть только i_1.

Если же остались элементы, не вошедшие в первый цикл, выберем один из них и повторим рассуждения. Так как число перемещаемых элементов конечно, то процесс окончится на конечном шаге.

Из построения ясно, что такое разложение однозначно с точностью до порядка следования. □

Следствие. *Независимые циклы коммутируют.*

Рассмотрев произведение транспозиций

$$(i_1 i_2)(i_1 i_3)\dots(i_1 i_k),$$

получим цикл

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения:

Предложение 6.1.5. *Четность цикла длины k совпадает с четностью числа $k-1$.*

Пусть далее

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_s \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix}.$$

Просуммировав числа $k-1, s-1, \dots, m-1$, определяющие чётность циклов, получим число

$$(k+s+\dots+m)-(1+1+\dots+1),$$

называемое *декрементом подстановки σ.*

Предложение 6.1.6. *Чётность подстановки совпадает с чётностью декремента.*

Определение 6.1.9. *Знак* Sgn *подстановки σ равен*

$$\operatorname{Sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ — чётная подстановка;} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ — нечётная подстановка.} \end{cases}$$

Предложение 6.1.7. *Произведение двух подстановок одинаковой чётности чётно. Чётности взаимно обратных подстановок одинаковы.*

Следствие. *Чётные подстановки образуют мультипликативную группу A_n, которую называют знакопеременной группой.*

6.2 Определители квадратных матриц

Определение 6.2.1. *Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых. Каждое* *слагаемое является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Знак слагаемого определяется знаком соответствующей подстановки индексов.* То есть

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn} \sigma \; \alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\cdots\alpha_{ni_n},$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Перечислим основные **свойства определителей**:

1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю данной матрицы.*

Доказательство. Рассмотрим определитель транспонированной матрицы

$$|A^T| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из соотношения $\alpha^T_{ik} = \alpha_{ki}$ для элементов матриц A и A^T следует, что слагаемому определителя исходной матрицы с подстановкой индексов σ соответствует слагаемое определителя транспонированной матрицы с подстановкой индексов σ^{-1}. □

2. *При перестановке двух строк определитель матрицы меняет знак на противоположный.*

Доказательство. Рассмотрим два определителя

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n-1} & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in-1} & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn-1} & \alpha_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n-1} & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn-1} & \alpha_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in-1} & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выпишем произвольное слагаемое из определителя D_1

$$\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\ldots\alpha_{ij_i}\ldots\alpha_{kj_k}\ldots\alpha_{nj_n}.$$

Ему соответствует подстановка индексов

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & k & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_i & \ldots & j_k & \ldots & j_n \end{pmatrix}.$$

Так как элементы рассматриваемых матриц не отличаются, то данное слагаемое входит в определитель D_2. Но поскольку i-ая и k-ая строки матриц поменяны местами, то соответствующая данному слагаемому в определителе D_2 подстановка имеет вид

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & k & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k & \ldots & j_i & \ldots & j_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\delta = (ik)\sigma$. Следовательно, $\operatorname{Sgn}\delta = -\operatorname{Sgn}\sigma$.

Так как для каждого слагаемого из D_1 существует такое же слагаемое, но с противоположным знаком, в D_2, то $D_1 + D_2 = 0$, то есть $D_2 = -D_1$. □

3. Определитель с двумя равными строками равен 0.

Доказательство. Рассмотрим определитель D_1. Допустим, что в нем $\alpha_{ij} = \alpha_{kj}$ для всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Поменяем местами i-ю и k-ю строки. Из равенства строк заключаем, что $D_2 = D_1$, откуда по предыдущему свойству $D_1 = -D_1$, то есть $D_1 = 0$. □

4. Если все элементы строки матрицы умножить на число, отличное от нуля, то определитель матрицы умножится на это число.

Доказательство. Для определителей

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma\alpha_{i1} & \gamma\alpha_{i2} & \ldots & \gamma\alpha_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

где $\gamma \in P$, имеем

$$D_3 = \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}\sigma\ \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\cdots(\gamma\alpha_{ij_i})\cdots\alpha_{nj_n} =$$

$$= \gamma\sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}\sigma\ \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\cdots\alpha_{ij_i}\ldots\alpha_{nj_n} = \gamma D_1. \quad \square$$

Следствие. *Общий делитель всех элементов строки можно выносить за знак определителя.*

5. *Если в определителе две строки пропорциональны, то он равен нулю.*

Доказательство. Используя свойство *3* и следствие из свойства *4*, имеем

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots. & \dots. & \dots & \dots. \\ \gamma\alpha_{i1} & \gamma\alpha_{i2} & \dots & \gamma\alpha_{in} \\ \dots. & \dots. & \dots & \dots. \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \overset{\textit{св-во 4}}{=} \gamma \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \overset{\textit{св-во 3}}{=} \gamma \cdot 0 = 0. \quad \square$$

6. *Если в i-ой строке определителя каждый элемент есть сумма двух слагаемых, то данный определитель равен сумме двух определителей, отличающихся от данного только i-ой строкой. При этом в i-ой строке первого определителя стоят первые слагаемые, а в i-ой строке второго определителя — вторые слагаемые элементов i-ой строки исходного определителя.*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{i1}+\beta_{i1} & \alpha_{i2}+\beta_{i2} & \dots & \alpha_{in}+\beta_{in} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}\sigma\, \alpha_{1j_1} \cdots (\alpha_{ij_i} + \beta_{ij_i}) \cdots \alpha_{nj_n} =$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}\sigma\ \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{ij_i} \cdots \alpha_{nj_n} + \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}\sigma\ \alpha_{1j_1} \cdots \beta_{ij_i} \cdots \alpha_{nj_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}. \quad \square$$

7. *Если к одной строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на число, то определитель не изменится.*

Доказательство. Определитель, полученный в результате данного преобразования, по свойству *6* равен сумме данного определителя и определителя с пропорциональными строками, то есть

$$\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{i1}+\gamma\alpha_{k1} & \alpha_{i2}+\gamma\alpha_{k2} & \dots & \alpha_{in}+\gamma\alpha_{kn} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{array}\right| \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \overset{\textit{св-во 6}}{=} D_1 + C,$$

$$\text{где} \quad C = \left|\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \gamma\alpha_{k1} & \gamma\alpha_{k2} & \dots & \gamma\alpha_{kn} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{array}\right|\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \overset{\textit{св-во 5}}{=} 0. \quad \square$$

Предложение 6.2.1. *Если матрицу подвергнуть элементарному преобразованию, то ее определитель или не изменится, или умножится на число, отличное от нуля.*

Замечание. *Свойство 1 позволяет считать свойства 2–7 и сформулированное выше предложение верными и для столбцов квадратной матрицы.*

6.3 Алгебраическое дополнение элемента определителя

Рассмотрим определитель, в котором на пересечении i-ой строки и k-ого столбца стоит единица:

$$A_{ik} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{\alpha_{11}} & \phantom{\alpha_{12}} & & k & & \phantom{\alpha_{1n}} \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{array}\right| \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} .$$

Определение 6.3.1. *Определитель A_{ik} называют алгебраическим дополнением элемента a_{ik}.*

Предложение 6.3.1. *Если в какой-либо строке определителя все элементы, кроме одного, равны нулю, то определитель равен произведению этого ненулевого элемента на его алгебраическое дополнение.*

Доказательство. Пусть в i-ой строке определителя все элементы равны нулю кроме $\alpha_{ik} \neq 0$. Используя следствие из свойства *4*, вынесем α_{ik} из i-ой строки за знак определителя. Получим

$$D=\begin{array}{|cccccc|c} \multicolumn{1}{c}{} & & & k & & \multicolumn{1}{c}{} & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1n} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{ik} & \dots & 0 & i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nn} & \end{array} = \alpha_{ik} \begin{array}{|cccccc|c} \multicolumn{1}{c}{} & & & k & & \multicolumn{1}{c}{} & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1n} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nn} & \end{array}.$$

С помощью i-ой строки, используя свойство *7*, обратим все элементы k-ого столбца в 0. Тогда $D = \alpha_{ik}A_{ik}$. □

Теорема 6.3.2. *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой его строки на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Представив каждый элемент i-ой строки в виде суммы n слагаемых $0+0+\dots+\alpha_{ik}+\dots+0$, воспользуемся свойством *6* и предыдущим предложением. Получим

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \underbrace{\alpha_{i1}+0+\dots+0}_{n} & \underbrace{0+\alpha_{i2}+0+\dots+0}_{n} & \dots & \underbrace{0+\dots+0+\alpha_{in}}_{n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{св-во } 6}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \dots + \alpha_{in}A_{in}. \quad \square$$

Следствие. *Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим определитель с равными i-той и k-той строками. Разложим его по элементам k-той строки и воспользуемся свойством *3*. Получим

$$\alpha_{i1}A_{k1} + \alpha_{i2}A_{k2} + \dots + \alpha_{in}A_{kn} = \begin{array}{c c} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \overset{\textit{св-во 3}}{=} 0. \quad \square$$

6.4 Дополнительный минор элемента определителя

Определение 6.4.1. *Если в прямоугольной матрице выбрать произвольные k строк и l столбцов и составить матрицу из элементов, стоящих на их пересечениях, то полученная матрица называется подматрицей первоначальной матрицы.*

Определение 6.4.2. *Минором k-ого порядка матрицы будем называть определитель любой ее подматрицы порядка k.*

Определение 6.4.3. *Дополнительным минором элемента α_{ik} определителя матрицы A порядка n называется минор M_{ik} $(n-1)$-го порядка, который получается при вычеркивании i-ой строки и k-ого столбца матрицы A.*

Теорема 6.4.1. $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Доказательство. I. Рассмотрим алгебраическое дополнение A_{11} элемента α_{11}, для которого по определению определителя имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}\sigma\, \alpha_{11}\alpha_{2i_2}\dots\alpha_{ni_n} =$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{Sgn}\sigma\, \alpha_{2i_2}\dots\alpha_{ni_n}, \quad \text{где} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Для дополнительного минора M_{11} элемента α_{11} верно равенство

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\delta} \operatorname{Sgn} \delta \, \alpha_{2i_2} \dots \alpha_{ni_n}.$$

При этом подстановка δ переводит $i-1$ в $j-1$. Если $k-1$ и $l-1$ составляют инверсию во второй строке подстановки δ, то k и l составляют инверсию во второй строке подстановки σ. Следовательно, знаки данных подстановок одинаковые. Значит

$$A_{11} = M_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}.$$

II. Рассмотрим произвольный случай. Для доказательства утверждения переставим i-ю строку на первое место, сделав $i-1$ перестановок, а затем переставим на первое место k-ый столбец, сделав $k-1$ перестановок. Применяя свойство *2* к числу $t = i-1+k-1$ перестановок строк и столбцов, получим

$$A_{ik} = (-1)^t \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1(k-1)} & \alpha_{1(k+1)} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & \alpha_{(i-1)1} & \alpha_{(i-1)2} & \dots & \alpha_{(i-1)(k-1)} & \alpha_{(i-1)(k+1)} & \dots & \alpha_{(i-1)n} \\ 0 & \alpha_{(i+1)1} & \alpha_{(i+1)2} & \dots & \alpha_{(i+1)(k-1)} & \alpha_{(i+1)(k+1)} & \dots & \alpha_{(i+1)n} \\ 0 & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n(k-1)} & \alpha_{n(k+1)} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^t (-1)^2 M_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \quad \square$$

6.5 Способы вычисления определителей

Предложение 6.5.1. *Определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали.*

Доказательство. Проведем индукцию по порядку определителя.

1. Для определителя второго порядка утверждение верно.

2. Допустим, что утверждение верно для определителей меньшего, чем n порядка.

3. Рассмотрим определитель порядка n, разложим его по элементам первого столбца и применим индуктивное предположение. $\square$

Следствие. *Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.*

Доказательство. Приведем данную матрицу к ступенчатому виду. При этом определитель новой матрицы может отличаться от определителя данной матрицы только знаком.

Если данная матрица является невырожденной, то определитель треугольной матрицы не равен нулю, поэтому отличен от нуля и определитель данной матрицы.

Обратно, от противного считаем, что строки данной матрицы зависимы, тогда на диагонали ступенчатой матрицы имеются нули, то есть определитель не может быть отличным от нуля. □

Рассмотрим матрицу с нулевым углом

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B и C — квадратные подматрицы, а D — некоторая подматрица матрицы A.

Теорема 6.5.2.

$$|A| = |B||C|.$$

Доказательство. 1. Пусть $|B| = 0$. Тогда матрица B не является невырожденной. Столбцы этой матрицы зависимы, поэтому зависимы соответствующие столбцы матрицы A, откуда $|A| = 0$.

2. Если $|C| = 0$, то зависимы строки матрицы A.

3. Пусть $|B| \neq 0$ и $|C| \neq 0$. Приведем матрицу A к треугольному виду, подвергая элементарным преобразованиям матрицы $(B\,D)$ и C, при этом не используя перестановку строк. Остается применить правило вычисления определителя треугольной матрицы. □

Теорема 6.5.3. *Для любых квадратных матриц A и B*

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Доказательство. Для любой матрицы U справедливо равенство

$$(UA)B = U(AB).$$

Если U — элементарная матрица, то преобразованию строк матрицы A соответствует такое же преобразование строк матрицы AB.

Если определитель матрицы A равен нулю, то в A можно получить нулевую строку. Соответствующая строка появится и в матрице AB при тех же элементарных преобразованиях. Значит, $|AB| = 0$.

Пусть определитель матрицы A не равен нулю. Тогда с помощью элементарных преобразований строк ее можно обратить в единичную. То есть существует матрица U, для которой $UA = E$, и значит, $(UA)B = B$. Тогда $|B| = |EB| = |(UA)B|$.

Рассмотрим число

$$\frac{|AB|}{|A|} = \frac{|U(AB)|}{|UA|} = \frac{|(UA)B|}{1} = |B|. \quad \square$$

Определитель Вандермонда.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 & \dots & {\alpha_1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & {\alpha_2}^2 & \dots & {\alpha_2}^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \alpha_n & {\alpha_n}^2 & \dots & {\alpha_n}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$D = \prod_{i>j}(\alpha_i - \alpha_j).$$

Утверждение доказывается методом математической индукции по порядку матрицы.

6.6 Правило Крамера. Способ вычисления обратной матрицы

Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим буквой A основную матрицу системы (1), а буквой A_i — матрицу, получаемую из основной заменой i-го столбца столбцом свободных коэффициентов.

Теорема 6.6.1. *Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Доказательство. Рассмотрим дроби правых частей равенств формулировки теоремы. Для любой элементарной матрицы U имеем

$$\frac{|A_i|}{|A|} = \frac{|UA_i|}{|UA|}.$$

Так как основная матрица системы является невырожденной, то достаточно рассмотреть систему (1) с основной матрицей $A = E$:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = \beta_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_n = \beta_n. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим

$$|A_i| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \beta_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_n & \ldots & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}.$$

Разложив данный определитель по i-ой строке, получим $|A_i| = \beta_i A_{ii}$. При этом $A_{ii} = 1$. Отсюда имеем

$$x_i = \frac{\beta_i}{1} = \frac{|A_i|}{|A|}. \quad \square$$

Следствие. *Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы равен нулю.*

Доказательство. Необходимость, при доказательстве от противного, следует из теоремы Крамера.

Если определитель равен нулю, то основная матрица системы имеет зависимую систему строк. $\square$

Выведем формулу вычисления обратной матрицы с помощью определителей.

Пусть $|A| \neq 0$. Рассмотрим уравнение $AX = E$, где $X = (x_{ij})$. Это уравнение заменим совокупностью уравнений

$$\begin{cases} A(x_{11}\, x_{21} \dots x_{n1})^T = (1\, 0 \dots 0)^T; \\ A(x_{12}\, x_{22} \dots x_{n2})^T = (0\, 1 \dots 0)^T; \\ \qquad\qquad \dots \\ A(x_{1n}\, x_{2n} \dots x_{nn})^T = (0\, 0 \dots 1)^T. \end{cases}$$

Решим j-ое уравнение

$$A(x_{1j}\, x_{2j} \dots x_{nj})^T = (0\, 0 \dots 1 \dots 0)^T.$$

В левой части равенства имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} x_{ij} \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} x_{ij} \dots \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni} x_{ij}\right)^T.$$

Далее получаем систему уравнений и применяем к ней правило Крамера. Тогда

$$x_{ij} = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad \text{где} \quad |A_i| = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \phantom{\alpha_{11}} & \phantom{\alpha_{12}} & & i & & \phantom{\alpha_{1n}} \end{array} & \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & 1 & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

Отсюда, раскладывая определитель по i-му столбцу, заключаем, что $|A_i| = A_{ji}$. То есть $x_{ij} = A_{ji}/|A|$.

6.7 Теорема о ранге матрицы

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 6.7.1. *Наибольшим порядком ненулевых миноров матрицы A называется число k, удовлетворяющее условиям:*

1) у матрицы A найдется ненулевой минор порядка k;

2) все миноры матрицы A, порядки которых больше k (если такие существуют) равны нулю.

Теорема 6.7.1. *Ранг матрицы равен наибольшему порядку ее ненулевых миноров.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен числу r. Покажем, что число r удовлетворяет условиям определения.

У матрицы A существует подматрица B, состоящая из r линейно независимых строк. Так как столбцовый ранг матрицы B равен r, то у матрицы B найдется подматрица C, состоящая из r линейно независимых столбцов. Определитель матрицы C является ненулевым минором матрицы A порядка r.

Строки любой подматрицы матрицы A, в которой больше r строк, составляют линейно зависимую систему (если такая подматрица найдется). Поэтому второе условие определения тоже справедливо для числа r. □

7 Гомоморфизмы векторных пространств

7.1 Простейшие свойства линейных отображений

Изоморфизмы сохраняют все алгебраические свойства пространств, а гомоморфизмы — лишь некоторые их этих свойств.

Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над полем P.

Определение 7.1.1. *Отображение $f : V_1 \to V_2$ называется линейным отображением (гомоморфизмом), если оно удовлетворяет условиям линейности:*

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$ для любых элементов $a, b \in V_1$ и

2. $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ для любых элементов $a \in V_1$ и $\alpha \in P$.

Замечание. *Если отображение f биективно, оно является изоморфизмом векторных пространств.*

Предложение 7.1.1. *Линейные отображения переводят:*

1. нулевой вектор в нулевой,

2. противоположный вектор в противоположный,

3. линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов.

Доказательство. Так как $0 = 0a$ для $a \in V_1$, то $0f = 0af = 0$. Для доказательства условия 2 используем равенство $-a = (-1)a$. Условие 3 доказывается по индукции. □

Примеры:

1. Поворот плоскости на угол α является линейным отображением (даже изоморфизмом).

2. Ортогональное проектирование на плоскость, отображающее векторы трехмерного Евклидова пространства в пространство векторов плоскости — линейное отображение (не изоморфизм).

3. Дифференцирование — линейное отображение пространства непрерывно дифференцируемых функций на заданном промежутке числовой прямой в пространство непрерывных функций на этой прямой.

4. Естественное отображение $\varepsilon : V \to V/M$ является линейным отображением пространства V на свое факторпространство.

Предложение 7.1.2. *Линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ над полем P однозначно определяется заданием образов базисных векторов пространства V_1.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V_1. Тогда для любого элемента $x \in V_1$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

С другой стороны, если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — произвольная система векторов пространства V_2, то легко проверить, что отображение

$$f : V_1 \to V_2, \;\; \text{определённое по правилу} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i,$$

является линейным отображением (в силу однозначности разложения по базису). При этом $f(x_i) = u_i$. □

7.2 Матрицы линейного оператора

Определение 7.2.1. *Линейным оператором называется любое линейное отображение f пространства V над полем P в себя.*

Примеры:

1. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ и f — поворот на угол α.

2. В пространстве $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ зафиксируем $a \in \mathbb{C}$ и положим $f(x) = ax$ для всякого $x \in \mathbb{C}$.

3. В пространстве примера 1 положим $(a, b)f = (a, 0)$.

Существуют различные способы задания линейных операторов. Рассмотрим подробнее один из них.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Рассмотрим

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f(e) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \end{pmatrix}.$$

Обозначим буквой A матрицу перехода от базиса e к системе образов $f(e)$. Тогда имеет место равенство $f(e) = eA$.

Определение 7.2.2. *Матрица A называется матрицей оператора f в базисе e.*

Из свойств линейных отображений следует, что такая матрица определяется заданием базиса однозначно.

Пусть матрица

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

составлена из координат вектора $x \in V$ в базисе e, а матрица

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$$

— из координат вектора $f(x)$ в базисе e. Тогда верно равенство $\delta^T = A\gamma^T$.

7.3 Связь матриц оператора в различных базисах

Пусть

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} -$$

базис пространства V и

$$f(a) = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix} -$$

система его образов, и имеет место равенство $f(a) = aB$ для некоторой матрицы B.

Если матрица $T = (\gamma_{ik})$ является матрицей перехода от базиса e к базису a, то имеют место равенства:

$$a_i = \gamma_{1i}e_1 + \gamma_{2i}e_2 + \cdots + \gamma_{ni}e_n.$$

Отсюда

$$a_i f = \gamma_{1i} e_1 f + \gamma_{2i} e_2 f + \cdots + \gamma_{ni} e_n f.$$

В матричном виде это означает верность равенства $af = ef \cdot T$. Из него выводим равенство $(eA)T = af$, то есть $(eA)T = aB = (eT)B$. Применяя последовательно две технические леммы, заключаем, что $TB = AT$ или $B = T^{-1}AT$.

7.4 Ядро и образ линейного отображения

Пусть $f : V_1 \to V_2$ — линейное отображение векторного пространства V_1 в пространство V_2 над полем P.

Определение 7.4.1. *Образом отображения f называется множество*

$$Imf = \{b \in V_2 \mid af = b \ \text{ для некоторого } \ a \in V_1\}.$$

Определение 7.4.2. *Ядром отображения f называется множество*

$$\ker f = \{a \in V_1 \mid af = 0_{V_2}\}.$$

Пусть f — линейный оператор пространства V над полем P, матрица

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

составлена из координат вектора $a \in V$ в базисе e, а матрица A является матрицей оператора f в базисе e.

Если $a \in \ker f$, то имеет место равенство

$$A \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Следовательно, вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ является решением системы линейных однородных уравнений.

Предложение 7.4.1. *Ядро и образ линейного оператора являются подпространствами пространства V.*

Доказательство. Для ядра утверждение следует из свойств множества решений системы линейных однородных уравнений. Для образа свойства подпространства легко проверить. □

Предложение 7.4.2. *Размерность ядра линейного оператора равна разности $n - r$, где n — размерность пространства, а r — ранг матрицы оператора.*

Следствие. *Оператор инъективен в том и только в том случае, когда ядро нулевое.*

Пусть $b \in Imf$, где

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n \end{pmatrix} -$$

матрица из координат вектора b в базисе e.

Если вектор $a \in V$ является прообразом вектора b, то имеет место равенство

$$A \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}^T.$$

В этом случае вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ является решением некоторой системы линейных уравнений, а множество таких векторов образует многообразие, полученное сдвигом подпространства $\ker f$. Таким образом, вектору b соответствует элемент $a + \ker f$ пространства $V/\ker f$.

Теорема 7.4.3.

$$Imf \cong V/\ker f.$$

Доказательство. Определим функцию $\varphi : V/\ker f \to Imf$ по правилу: $\varphi(a + \ker f) = af$. Проверим корректность задания функции:

$$a + \ker f = b + \ker f \;\Leftrightarrow\; a - b \in \ker f \;\Leftrightarrow\; f(a-b) = 0 \;\Leftrightarrow\; af = bf.$$

Легко проверяется биективность отображения φ. При этом

$$\varphi((a + \ker f) + (b + \ker f)) = \varphi(a + b + \ker f) = f(a+b) = \\ = af + bf = \varphi(a + \ker f) + \varphi(b + \ker f),$$

а также

$$\varphi(\alpha(a + \ker f)) = \varphi(\alpha a + \ker f) = f(\alpha a) = \alpha(af) = \alpha\varphi(a + \ker f). \quad \square$$

Следствие. 1. $\dim Imf = \dim V/\ker f$;
2. $\dim V = \dim \ker f + \dim Imf$.

Следствие. *Размерность образа оператора равна рангу матрицы оператора.*

Определение 7.4.3. *Размерность ядра оператора называют его дефектом, а размерность образа — рангом оператора.*

7.5 Собственные векторы и значения линейного оператора

Учитывая связи между матрицами одного и того же оператора в различных базисах, можно с помощью матриц перехода от базиса к базису пытаться упростить вид матрицы. Подобные преобразования приводят нас к понятию инвариантного подпространства.

Определение 7.5.1. *Подпространство M пространства V называется инвариантным относительно оператора f, если для любого вектора $m \in M$ имеет место соотношение $f(m) \in M$.*

Наибольший интерес представляют одномерные инвариантные подпространства и связанное с ними понятие собственного вектора линейного оператора.

Определение 7.5.2. ***Ненулевой*** *вектор $a \in V$ называется собственным вектором оператора f, если $f(a) = \alpha a$ для некоторого числа $\alpha \in P$.*

Число α называется собственным значением оператора, которому принадлежит вектор a.

Замечание. *Собственный вектор может принадлежать лишь одному собственному значению.*

Теорема 7.5.1. *Собственные векторы, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ принадлежат собственным значениям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ линейного оператора f соответственно, и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Проведем индукцию по числу векторов.

1. Если $s = 1$, то утверждение следует из определения собственного вектора.

2. Считаем, что утверждение верно для всех систем векторов содержащих менее s векторов.

3. Если система содержит s векторов, то рассмотрим их линейную комбинацию

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s = 0. \qquad (1)$$

Применяя к (1) оператор f, получим

$$\beta_1 a_1 f + \beta_2 a_2 f + \cdots + \beta_s a_s f = 0f,$$

откуда

$$\beta_1 \alpha_1 a_1 + \beta_2 \alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_s \alpha_s a_s = 0. \qquad (2)$$

Умножим (1) на α_1 и вычтем полученное выражение из (2):

$$\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1)a_2 + \dots + \beta_s(\alpha_s - \alpha_1)a_s = 0. \tag{3}$$

В линейной комбинации (3) по индуктивному предположению все коэффициенты равны нулю. Но поскольку по условию все скобки отличны от нуля, то

$$\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_s = 0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в линейную комбинацию (1), получаем $\beta_1 a_1 = 0$, откуда $\beta_1 = 0$. $\square$

7.6 Характеристическое уравнение линейного оператора

Пусть A — матрица линейного оператора f в некотором базисе

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix},$$

а t — переменная. Рассмотрим матрицу $A - tE$. Ее определитель $|A - tE|$ называется *характеристическим полиномом* оператора f.

Теорема 7.6.1. *Характеристический полином не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Если B — матрица оператора f в базисе e', то $B = T^{-1}AT$, где T — матрица перехода от базиса e к базису e'. Отсюда

$$|B - tE| = |T^{-1}AT - t(T^{-1}ET)| = |T^{-1}(A - tE)T| = |A - tE|. \quad \square$$

Теорема 7.6.2. *Корни характеристического полинома, принадлежащие полю P, и только они являются собственными значениями линейного оператора $f : V \to V$.*

Доказательство. Пусть A — матрица оператора f в базисе e, тогда имеет место равенство $ef = eA$. Если a — собственный вектор f, то он принадлежит собственному значению $\alpha \in P$, где $af = \alpha a$. Пусть далее $a = e\gamma$ и $af = e\delta$, где γ и δ — соответствующие столбцы координат. Тогда $\delta = A\gamma$. Откуда следует $af = e(A\gamma)$. С другой стороны,

$$af = \alpha a = \alpha e\gamma = e(\alpha\gamma).$$

Используя $af = e(A\gamma)$ и $af = e(\alpha\gamma)$, получаем $e(A\gamma) = e(\alpha\gamma)$ и, следовательно, $A\gamma = \alpha\gamma$. Но $\alpha\gamma = \alpha E\gamma$, поэтому $(A - \alpha E)\gamma = 0$. Рассмотрим матричное уравнение

$$(A - \alpha E)(x_1\, x_2 \dots x_n)^T = (0\, 0 \dots 0)^T. \tag{$*$}$$

Существование ненулевого столбца координат γ, удовлетворяющего условию $(A - \alpha E)\gamma = 0$, означает наличие ненулевого решения у однородной системы уравнений, равносильной матричному уравнению $(*)$. Из теоремы Крамера следует, что определитель матрицы $A - \alpha E$ в этом случае должен быть равен нулю, а это означает, что α является решением уравнения $|A - tE| = 0$. □

Следствие. *Из доказательства теоремы следует, что все ненулевые векторы пространства решений матричного уравнения* $(*)$ *будут собственными векторами, принадлежащими собственному значению* α.

Практический способ нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора:

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|A-tE| = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 2 \\ 5 & -3-t & 3 \\ -1 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t-1 & -1 & 2 \\ -t-1 & -3-t & 3 \\ 1+t & 0 & -2-t \end{vmatrix} = (1+t)^3 = 0.$$

Таким образом, $t_1 = t_2 = t_3 = -1$. Далее решаем уравнение

$$(A+E)(x_1\, x_2 \dots x_n)^T = (0\,0 \dots 0)^T.$$

Достаточно определить базис пространства решений соответствующей однородной системы уравнений, так как любой ненулевой вектор этого пространства будет являться искомым собственным вектором.

7.7 Диагонализируемость матрицы оператора

Теорема 7.7.1. *Матрица оператора имеет диагональный вид в некотором базисе в том и только в том случае, когда этот базис состоит из собственных векторов оператора.*

Доказательство. Если

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

является матрицей оператора f в базисе

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix},$$

то из матричного равенства $ef = eA$ следуют равенства для векторов

$$e_1 f = \alpha_1 e_1, \;\; e_2 f = \alpha_2 e_2, \;\dots\;, \;\; e_n f = \alpha_n e_n.$$

Обратно, из соотношений для образов базисных векторов

$$e_i f = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{i-1} + \alpha_i e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n$$

следует диагональный вид матрицы оператора f в базисе e. □

Определение 7.7.1. *Набор собственных значений оператора называется спектром оператора.*

Если в n-мерном пространстве оператор имеет n различных собственных значений, то его называют оператором с простым спектром.

Следствие. *У оператора с простым спектром существует диагональная матрица.*

8 Евклидовы пространства

8.1 Скалярное умножение

Понятие векторного пространства является обобщением понятия геометрического вектора. Попытаемся обобщить важные понятия длины вектора, угла между векторами и скалярного произведения векторов на случай произвольных конечномерных векторных пространств над полем действительных чисел.

Определение 8.1.1. *Говорят, что в пространстве V над полем $\mathbb{R}$ определено скалярное умножение, если существует функция*

$$f : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad (a, b)f = (a, b),$$

удовлетворяющая условиям:

1. $(a, b) = (b, a)$ *для всех* $a, b \in V$;
2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ *для всех* $a, b, c \in V$;
3. $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$ *для всех* $a, b \in V$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $(a, a) > 0$ *для всех* $a \neq 0$, $a \in V$.

Определение 8.1.2. *Всякое пространство над полем $\mathbb{R}$ со скалярным умножением называется Евклидовым пространством.*

Примеры.

1. Пространство строк $\mathbb{R}^n$, где

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i,$$

если $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $v = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

2. Всякое n-мерное пространство над $\mathbb{R}$ можно превратить в Евклидово, если считать скалярным произведением векторов сумму произведений их соответствующих координат в некотором базисе.

Перечислим основные **свойства скалярного умножения**:

1. $(0, a) = 0$ *для всякого вектора* $a \in V$.

Так как $0 = 0 \cdot b$ для $b \in V$, то $(0, a) = (0 \cdot b, a) = 0(b, a) = 0$.

2. *Аксиомы 2 и 3 определения скалярного умножения справедливы для правого вектора.*

3. *Верно, что*

$$(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (a_i, b_j).$$

Утверждение доказывается методом математической индукции по числу слагаемых первого вектора.

4. $(a, a) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a = 0$.

8.2 Норма вектора

Во всяком Евклидовом пространстве можно ввести понятие длины вектора.

Определение 8.2.1. *Длиной (нормой) вектора a называется число $\|a\|$ равное $\sqrt{(a, a)}$.*

Если $\|a\| = 1$, то говорят, что вектор a нормирован.

Замечание. *Всякий ненулевой вектор a Евклидова пространства можно нормировать,* то есть заменить вектором $b = \frac{1}{\|a\|} a$.

Теорема 8.2.1. *Для любых векторов a и b Евклидова пространства имеет место неравенство Коши-Буняковского:*

$$|(a, b)| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|. \tag{1}$$

Доказательство. Для доказательства справедливости формулы (1) достаточно доказать, что
$$(a,b)^2 \leqslant (a,a)\cdot(b,b).$$

Если какой-либо из векторов равен нулю, то неравенство верно.

Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Из свойств скалярного умножения следует, что для всякого числа $\alpha \in \mathbb{R}$
$$0 \leqslant (\alpha a - b, \alpha a - b),$$
откуда получаем
$$\alpha^2(a,a) - 2\alpha(a,b) + (b,b) \geqslant 0.$$
Рассмотрим функцию
$$(a,a)x^2 - 2(a,b)x + (b,b).$$
Она принимает неотрицательные значения только в том случае, когда ее дискриминант
$$(a,b)^2 - (a,a)\cdot(b,b) \leqslant 0. \quad \square$$

Определение 8.2.2. *Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$ в Евклидовом пространстве, то углом между векторами a и b называют такое неотрицательное действительное число φ, что*
$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что
$$-1 \leqslant \frac{(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|} \leqslant 1.$$

Определение 8.2.3. *Если $\cos\varphi = 0$, то есть, если $(a,b) = 0$, то векторы a и b называют ортогональными.*

8.3 Ортогональные системы векторов

Определение 8.3.1. *Если в системе векторов все векторы попарно ортогональны, то такая система векторов называется ортогональной.*

Теорема 8.3.1. *Ортогональная система ненулевых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ является линейно независимой.*

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0. \tag{1}$$

Умножив скалярно обе части равенства (1) на a_1, получим

$$\alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_1) = (0, a_1) = 0.$$

Из условия теоремы следует, что $(a_i, a_1) = 0$ для любого $i \neq 1$, поэтому $\alpha_1(a_1, a_1) = 0$ для $a_1 \neq 0$. Следовательно, $\alpha_1 = 0$.

Рассуждая аналогично, можно доказать, что все коэффициенты левой части равенства (1) равны нулю. □

Следствие. *Ортогональная система n ненулевых векторов является базисом n-мерного Евклидова пространства.*

Теорема 8.3.2. *Для всякой линейно независимой системы векторов можно найти ортогональную систему с тем же числом векторов.*

Доказательство. Метод доказательства теоремы носит название процесса ортогонализации.

Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_k \quad - \tag{2}$$

линейно независимая система векторов. Докажем, что существует ортогональная система ненулевых векторов

$$e_1, e_2, \dots, e_k, \tag{3}$$

в которой каждый вектор e_i является линейной комбинацией первых i векторов системы (2).

Положим $e_1 = a_1$ и допустим, что уже построена система типа (3) из $s-1$ вектора $e_1, e_2, \dots, e_{s-1}$, где $s \leqslant k$. Рассмотрим вектор

$$e_s = a_s + \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j e_j. \tag{4}$$

Докажем, что $e_s \neq 0$ при любых α_j. Действительно, если $e_s = 0$, то имеем равную нулю линейную комбинацию векторов системы (2), в которой коэффициент при a_s равен 1, чего быть не может, так как система (2) линейно независима.

Потребуем, чтобы $(e_s, e_j) = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, s-1$. Получим равенства

$$(a_s, e_j) + \alpha_j(e_j, e_j) = 0,$$

из которых следует, что

$$\alpha_j = -\frac{(a_s, e_j)}{(e_j, e_j)}.$$

То есть система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_s$ обладает свойствами системы (3). Продолжая процесс, через конечное число шагов получим систему (3). □

Следствие. *Любую ортогональную систему ненулевых векторов можно дополнить до ортогонального базиса.*

Доказательство. Так как система независима, дополним ее до базиса и применим процесс ортогонализации. □

Определение 8.3.2. *Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Евклидова пространства называется ортонормированным, если*

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j; \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{5}$$

Следствие. *Во всяком конечномерном Евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы.*

Теорема 8.3.3. *Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Евклидова пространства является ортонормированным тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов, заданных в этом базисе, равно сумме произведений их соответствующих координат.*

Доказательство. Пусть для базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеют место условия (5). Рассмотрим

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{и} \quad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j.$$

Тогда

$$(a, b) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j).$$

Отсюда по свойствам скалярного умножения получаем равенство

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j),$$

из которого по условию (5) следует

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i (e_i, e_i),$$

и значит,

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \tag{6}$$

Обратно, пусть скалярное произведение вычисляется по правилу (6). Для двух произвольных векторов e_i и e_j базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ рассмотрим их разложение по данному базису:

$$e_i = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \cdots + 0 \cdot e_n,$$
$$e_j = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_{j-1} + 1 \cdot e_j + 0 \cdot e_{j+1} + \cdots + 0 \cdot e_n.$$

Из этих формул легко выводится условие (5) для базиса. □

8.4 Ортогональное дополнение к подпространству

Замечание. *Если* $(a_i, b) = 0$ *для всех индексов* $i \in I$, *то* $(\sum_{i \in I} \alpha_i a_i, b) = 0$ *для любых* $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Определение 8.4.1. *Ортогональным дополнением к подмножеству* K *Евклидова пространства* V *называется множество*

$$K^{\perp} = \{x \in V \mid (x, m) = 0 \quad \text{для всех} \quad m \in K\}.$$

Теорема 8.4.1. *Ортогональное дополнение к подмножеству Евклидова пространства* V *является подпространством в* V.

Доказательство. Нулевой вектор принадлежит ортогональному дополнению любого подмножества пространства V. Остается воспользоваться замечанием и теоремой о подпространстве. □

Теорема 8.4.2. *Евклидово пространство* V *является прямой суммой любого своего подпространства* M *и его ортогонального дополнения* $M^{\perp}$.

Доказательство. Пусть система векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{1}$$

является ортогональным базисом пространства M, а система векторов

$$b_1, b_2, \ldots, b_s \quad - \tag{2}$$

ортогональным базисом пространства $M^\perp$. Тогда система

$$a_1, a_2, \ldots, a_k,\ b_1, b_2, \ldots, b_s \tag{3}$$

является ортогональной системой ненулевых векторов. Поэтому (3) — линейно независимая система. Докажем, что (3) является базисом V.

От противного, допустим $k + s < \dim V$. Тогда к системе (3) можно добавить вектор c так, чтобы система

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s, c \tag{4}$$

оставалась ортогональной. Но тогда по замечанию $c \in M^\perp$, то есть система

$$b_1, b_2, \ldots, b_s, c$$

является ортогональной системой ненулевых векторов в $M^\perp$, чего быть не может. Таким образом, система (3) — базис пространства V.

Рассматривая для каждого вектора $x \in V$ его разложение по базису (3)

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_s b_s,$$

получаем, что вектор x единственным образом представим в виде

$$x = a + b, \quad \text{где} \quad a \in M \ \text{ и } \ b \in M^\perp.$$

Следовательно, $V = M \oplus M^\perp$. □

8.5 Изоморфизм Евклидовых пространств

Определение 8.5.1. *Евклидовы пространства V_1 и V_2 называются изоморфными, если существует изоморфное отображение f пространства V_1 на пространство V_2, которое сохраняет скалярные произведения векторов, то есть $(a, b) = (af, bf)$ для любых $a, b \in V_1$.*

Теорема 8.5.1. *Евклидовы пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$, рассмотрим ортонормированные базисы этих пространств: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в V_1 и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в V_2.

Для произвольных $u, v \in V_1$, где

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{ и } \quad v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i,$$

будем считать, что

$$uf = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \quad \text{и} \quad vf = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i.$$

Вычислим скалярные произведения и сравним их:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = (uf, vf). \quad \square$$

8.6 Действия над линейными отображениями

Пусть $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ — линейные отображения пространств над полем P.

Определение 8.6.1. *Суммой отображений φ и ψ называется отображение $\varphi + \psi$, определенное по правилу: $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$ для любого элемента $a \in V_1$.*

Произведением числа α на отображение φ называется отображение $\alpha\varphi$, заданное по правилу: $(\alpha\varphi)(a) = \alpha\varphi(a)$.

Предложение 8.6.1. *Если $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ — линейные отображения пространств над полем P, то их сумма является линейным отображением из V_1 в V_2, и для всякого $\alpha \in P$ произведение $\alpha\varphi$ также является линейным отображением из V_1 в V_2.*

Теорема 8.6.2. *Множество всех линейных отображений пространства V_1 в пространство V_2 над полем P само является векторным пространством над полем P относительно операций сложения отображений и умножения отображения на элементы поля.*

Определение 8.6.2. *Произведением отображений $\psi : V_1 \to V_2$ и $\varphi : V_2 \to V_3$ назовем их композицию, то есть*

$$a(\psi\varphi) = \varphi \circ \psi(a) = (a\psi)\varphi$$

для всякого $a \in V_1$.

Предложение 8.6.3. *Произведение линейных отображений является линейным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим линейные отображения $\psi : V_1 \to V_2$ и $\varphi : V_2 \to V_3$. Пусть $a, b \in V_1$, тогда

$$(a+b)(\psi\varphi) = ((a+b)\psi)\varphi = (a\psi + b\psi)\varphi = (a\psi)\varphi + (b\psi)\varphi = a\psi\varphi + b\psi\varphi.$$

Второе свойство линейности проверяется аналогично. □

Предложение 8.6.4. *Для всех линейных функций, для которых соответствующие операции определены, имеют место равенства:*

1. $\psi(f+\varphi) = \psi f + \psi\varphi$;
2. $(f+\varphi)\psi = f\psi + \varphi\psi$;
3. $(\alpha\varphi)\psi = \varphi(\alpha\psi) = \alpha(\varphi\psi)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение для $\psi : V_1 \to V_2$, $\varphi : V_2 \to V_3$ и $f : V_2 \to V_3$. Для произвольного $a \in V_1$ имеем

$$a\psi(f+\varphi) = (a\psi)(f+\varphi) = (a\psi)f + (a\psi)\varphi = a\psi f + a\psi\varphi = a(\psi f + \psi\varphi). \quad \square$$

Предложение 8.6.5. *Множество всех линейных операторов пространства V над полем P является алгеброй над полем P.*

Лемма 8.6.6. *Пусть φ и ψ — линейные операторы пространства V над полем P с матрицами A и B в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда оператору $\varphi + \psi$ соответствует матрица $A + B$ в том же базисе, а оператору $\alpha\varphi$ матрица αA для любого $\alpha \in P$.*

Доказательство. Имеют место соотношения $e\varphi = eA$, $e\psi = eB$ и $e(\varphi+\psi) = eC$ для некоторой матрицы $C \in M_n(P)$. С другой стороны, матрица

$$e(\varphi+\psi) = \begin{pmatrix} e_1(\varphi+\psi) & e_2(\varphi+\psi) & \ldots & e_n(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

равна сумме матриц

$$\begin{pmatrix} e_1\varphi & e_2\varphi & \ldots & e_n\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1\psi & e_2\psi & \ldots & e_n\psi \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует верность равенства $eC = eA + eB$. Применяя технические леммы, заключаем, что $C = A + B$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Лемма 8.6.7. *Пусть φ и ψ — линейные операторы пространства V над полем P с матрицами A и B в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда оператору $\psi \circ \varphi$ соответствует матрица BA в том же базисе.*

Доказательство. Имеют место соотношения $e\varphi = eA$, $e\psi = eB$ и $e(\varphi\psi) = eC$ для некоторой матрицы $C \in M_n(P)$. С другой стороны, матрица

$$e(\varphi\psi) = \begin{pmatrix} e_1\varphi\psi & e_2\varphi\psi & \ldots & e_n\varphi\psi \end{pmatrix}$$

равна матрице

$$\begin{pmatrix} (e_1\varphi)\psi & (e_2\varphi)\psi & \ldots & (e_n\varphi)\psi \end{pmatrix} = (eA)\psi = (e\psi)A = (eB)A.$$

Отсюда, используя технические леммы, получаем равенство $eC = e(BA)$, и значит, $C = BA$. □

Теорема 8.6.8. *Операциям над линейными операторами пространства соответствуют аналогичные операции над матрицами этих отображений.*

Следствие. *Алгебра линейных операторов n-мерного пространства над полем P изоморфна алгебре матриц $M_n(P)$.*

Предложение 8.6.9. *Оператор обратим тогда и только тогда, когда его матрица не является вырожденной.*

Доказательство. Пусть оператор f имеет матрицу A в базисе e, и оператор f^{-1} имеет в том же базисе матрицу B. По доказанному выше тождественному оператору $\varepsilon = f^{-1}f = ff^{-1}$ соответствуют матрицы AB и BA в базисе e. Отсюда следует, что $AB = BA = E$.

Обратно, если матрица оператора является невырожденной, то ранг оператора равен размерности пространства. То есть оператор биективен и, значит, обратим. □

Теорема 8.6.10. *Множество обратимых линейных операторов $L_n(P)$ пространства V размерности n над полем P образует мультипликативную группу, которая называется полной линейной группой.*

Список литературы

[1] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979.

[2] Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С. Алгебра. Элементы теории множеств. Линейные уравнения и неравенства. Матрицы и определители. – М.: Просвещение, 1974.

[3] Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С., Стеллецкий И.В. Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения. – М.: Просвещение, 1978.

[4] Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Факториал Пресс, 1999, 2001 и т.д.

[5] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Части I и III. – М.: Физматлит, 2000.

[6] Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986.

[7] Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979.

[8] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.

[9] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.

[10] Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1968.

[11] Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.

[12] Ширшова Е.Е. Алгебра. Группы. Кольца. Курс лекций. – М.: МПГУ, 2005.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

КОЧЕТОВА ЮЛИЯ ВИКТОРОВНА

ШИРШОВА ЕЛЕНА ЕВГЕНЬЕВНА

АЛГЕБРА. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Курс лекций

Издательство «Прометей»

115035, Москва, ул. Садовническая, д.72, стр.1,

Тел/факс: 8 (495) 799-54-29

E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать 29.08.2013.

Формат 60х90/16. Объем 5 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ № 348.

ISBN 978-5-7042-2454-9

9 785704 224549