Е. Н. АКСЕНОВА,
Н. П. КАЛАШНИКОВ

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие

ЛАНЬ®
• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2019 •

ББК 22.3я73
А 42

Аксенова Е. Н., Калашников Н. П.

А 42 Методы оценки погрешностей при измерениях физических величин: Учебно-методическое пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2019. — 40 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-3559-3

Пособие отражает в предельно краткой форме простейшие методы оценки погрешностей результатов прямых и косвенных физических измерений и их графического представления. Изложенный материал полезен при обработке результатов экспериментальных измерений физических величин. Пособие предназначено для облегчения работы студентов в лабораториях физического практикума. Методические указания составлены в соответствии с требованиями типовой программы по физике для инженерно-технических специальностей вузов (УМКД — Физика).

Адресовано студентам вузов, обучающимся по направлениям подготовки и специальностям, входящим в УГСН: «Электроника, радиотехника и системы связи», «Фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии», «Электро- и теплотехника», «Физико-технические науки и технологии», «Машиностроение», «Технологии материалов», «Авиационная и ракетно-космическая техника» и другим инженерно-техническим направлениям подготовки.

ББК 22.3я73

Рецензент

Б. Л. ПУГАЧЕВ — доктор технических наук, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии проблем безопасности обороны и правопорядка, Международной академии интеграции науки и бизнеса.

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

Если бы Бог держал в своей правой руке всю истину,
а в левой – только вечное стремление её отыскать
с условием, что при этом всегда будут неизбежные ошибки,
и сказал бы: «Выбирай!» – я смиренно указал бы на левую руку
и ответил: «Создатель! отдай мне то, что находится в этой
руке, абсолютная истина существует лишь для одного Тебя».
Г. Лессинг

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРЯМЫЕ И КОСВЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Физическая величина характеризует собой определенное свойство физического объекта (явления), отображая его состояние или происходящий в нем процесс. Физическая величина имеет качественное и количественное содержание.

Основная задача физического эксперимента – измерение физических величин для дальнейшего их анализа и установления взаимосвязей между ними, то есть отыскания физических законов.

Измерение – последовательность экспериментальных и вычислительных операций, осуществляемых для нахождения значения физической величины. Измерения бывают прямые и косвенные.

В прямых измерениях физическая величина измеряется непосредственно (например, измерение длины предмета линейкой, штангенциркулем или микрометром, силы тока – амперметром и т. д.).

При косвенных измерениях искомая величина не измеряется, а вычисляется по результатам прямых измерений других величин (например, измеряя силу тока и напряжение на зажимах электроплитки, можно вычислить ее тепловую мощность и сопротивление).

В физическом эксперименте любое измерение (прямое или косвенное) дает лишь приблизительное значение данной физической величины. Физика – естественная наука, абсолютная точность (истина) никогда не может быть достигнута в физических экспериментах. Абсолютная точность присуща лишь математике, которая является описательным инструментом для трактовки наблюдаемых закономерностей.

При измерении длины полученный результат будет зависеть, по крайней мере, от: 1) точности выбранного прибора (штангенциркуль, например, позволяет измерять с точностью до 0,1 мм, а линейка – до 1 мм); 2) внешних условий: температуры, деформации, влажности и т. д.

Разумеется, результаты косвенных измерений, вычисленные по приближенным результатам, полученным в прямых измерениях, также будут приближенными. Поэтому **вместе с результатом** $\boldsymbol{x}$

всегда необходимо указывать его точность, называемую абсолютной погрешностью результата Δx.

<u>Пример.</u> L = (427,1 ± 0,2) мм.

Учитывая, что в учебных лабораториях кафедры общей физики из-за ограничения по времени число прямых измерений каждой величины не превышает 20, погрешность этих измерений, согласно выводам математической статистики [1], не может быть представлена более, чем одной значащей цифрой. Исключением является случай равенства этой первой значащей цифры абсолютной погрешности 1, при этом отбрасывание остальных цифр погрешности приводит к значительному (до 50 %) ее искажению, поэтому в данном случае рекомендуется оставлять две значащие цифры в записи абсолютной погрешности. Таким образом, **абсолютная погрешность результата Δx должна после округления содержать лишь одну значащую цифру, если эта цифра не 1, если же 1, то следует оставить в погрешности две значащих цифры**.

Значащими цифрами в десятичном изображении числа считаются все цифры, кроме нулей впереди числа [2].

<u>Пример</u>.

Число	Кол-во значащих цифр
7000	4
$700 \cdot 10$	3
$7 \cdot 10^3$	1
$0{,}7 \cdot 10^4$	1
$0{,}07 \cdot 10^5$	1

Хотя с математической точки зрения все записанные числа тождественны, при представлении результатов физического эксперимента это не так. Дело в том, что если значение физической величины записано без абсолютной погрешности (как, например, в условиях задач), то это означает, что данная величина задана с точностью до ± 1 в последнем, то есть самом низшем, разряде.

Если приведенные выше числа представляют собой, например, длину в миллиметрах, то это означает, что длина известна со следующей точностью:

Результат L	Известен с точностью до
7000 мм	1 мм
700·10 мм	10 мм = 1 см
$7\cdot 10^3$ мм	10^3 мм = 1 м
$0{,}7\cdot 10^4$ мм	$0{,}1\cdot 10^4$ мм = 1 м
$0{,}07\cdot 10^5$ мм	$0{,}01\cdot 10^5$ мм = 1 м

То есть в этих случаях измерения проводились с различной точностью.

При записи окончательных результатов измерения физических величин (в частности, в лабораторных работах) недопустима запись результата без указания абсолютной погрешности, округленной, как указано, до одной или двух значащих цифр. **Абсолютная погрешность Δx имеет ту же размерность, что и измеряемая величина x. Результат измерения x округляется таким образом, чтобы его последняя значащая цифра (цифра наименьшего разряда) соответствовала по порядку величины последней значащей цифре погрешности Δx.**

Примеры. $L = 4{,}45 \pm 0{,}4$ (неверно) $\Rightarrow$ $4{,}5 \pm 0{,}4$ (верно),
$L = 5{,}71 \pm 0{,}15$ (верно),
$L = 6{,}8 \pm 0{,}03$ (неверно) $\Rightarrow$ $6{,}80 \pm 0{,}03$ (верно),
$L = 705{,}8 \pm 70$ (неверно) $\Rightarrow (71 \pm 7)\cdot 10$ (верно).

Отношение абсолютной погрешности результата измерений к модулю среднего значения измеренной величины $\left|\langle x\rangle\right|$ называется относительной погрешностью результата:

$$\frac{\Delta x}{\left|\langle x\rangle\right|} = \delta x.$$

Относительная погрешность δx – величина безразмерная. Фактически относительная погрешность показывает относительную степень неточности полученного результата (или «процентное содержание неточности», равное $\delta x \cdot 100\%$).

2. ОЦЕНКА АБСОЛЮТНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Погрешности в прямых измерениях можно классифицировать следующим образом [3]:

Рис. 2.1

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. Обычно систематические погрешности (ошибки) остаются постоянными на протяжении всей серии измерений. Например, при переключении шкалы вольтметра с одного предела на другой меняется его внутреннее сопротивление, что может внести в последующие измерения систематическую погрешность. Систематические погрешности **надо стараться отслеживать и учитывать, корректируя полученные результаты**, то есть исправляя их на необходимую величину. Однако обнаружение систематических погрешностей требует, как правило, дополнительных более точных или альтернативных экспериментов, проведение которых невозможно в рамках лабораторных работ. В этих случаях достаточно указать возможный источник ошибок.

Случайная погрешность – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях одной и той же величины. На величину случайных погрешностей влияют: 1) приборы, с помощью которых проводятся измерения; 2) условия проведения эксперимента, включающие факторы, нерегулярно появляющиеся и неожиданно исчезающие; 3) особенности снятия показаний (в частности, внимательность экспериментатора, его профессионализм и удобство снятия показаний). Вследствие указанных причин результаты повторных измерений одной и той же величины имеют непредсказуемые различия, а присущие им закономерности проявляются лишь при значительном числе измерений.

Промахи – грубые ошибки, обычно связанные с неправильным отсчетом по шкале прибора, нарушением условий эксперимента и т. д. Их надо отбросить. Если выпадение одного измерения из общего ряда результатов замечено в процессе проведения эксперимента, то главное правило определения промаха – проведение не менее трех, лучше шести, повторных измерений данной точки. Результат измерений, который существенно отличается от других измерений, отбрасывается как грубая ошибка. В сомнительных случаях вопрос о том, является ли данный результат промахом, решают с помощью повторного, если возможно, более точного эксперимента, или привлекая математические методы обработки полученных результатов [1], изучение которых лежит за рамками излагаемого элементарного анализа оценки погрешностей.

Приборные погрешности определяются двумя факторами:

1) классом точности прибора, связанным с его устройством – элементной базой – и принципом действия. **Класс точности** указывается на шкале прибора, определяя собой максимальную погрешность показания прибора, выраженную в процентах. **Абсолютная погрешность через класс точности оценивается следующим образом:**

$$(\Delta x)_{к.т.} = (\gamma / 100) \cdot A,$$

где γ – класс точности в %, указанный на панели прибора, $A = A_{max}$ **– предел измерения для стрелочных приборов, либо** A

есть текущее значение для магазинов сопротивления, индуктивности, емкости;

2) погрешностью отсчета, которая обусловлена ценой делений шкалы прибора h и условиями снятия показаний. **Погрешность отсчета – это погрешность (обычно визуального) снятия показаний**, определяемая тремя факторами: ценой деления прибора, методическими условиями снятия показаний и личными качествами экспериментатора. При этом, строго говоря, приборная погрешность, определяемая ценой деления шкалы, является лишь составляющей погрешности отсчета.

Цена деления шкалы прибора *h* – это расстояние между ближайшими штрихами шкалы, выраженное в соответствующих единицах измерения. Обычно при изготовлении приборов цена деления выбирается производителем в соответствие классом точности прибора так, чтобы:

$$(\Delta x)_{к.т.} \geq (\Delta x)_{ц.д.} = h/2\,.$$

В этом случае, если в условиях эксперимента отсутствуют дополнительные факторы, мешающие снимать показания, в качестве приборной погрешности следует брать $(\Delta x)_{к.т.}$.

Однако осложненные условия снятия показаний, связанные, например, с нестационарностью показаний прибора (стрелка прибора может совершать небольшие колебания или показания цифрового прибора могут быть неустойчивы в последних регистрах), с неудобным углом наблюдения, с относительным движением прибора и наблюдателя и, в частности, с пониженным уровнем зрения экспериментатора, могут увеличить погрешность отсчета. В этих случаях надо оценить погрешность отсчета $(\Delta x)_{отсч.}$, не завышая ее реальной точности, и взять в качестве приборной погрешности $(\Delta x)_{приб.} = \max\{(\Delta x)_{к.т.};(\Delta x)_{отсч.}\}$.

Погрешности разброса $(\Delta x)_p$ возникают вследствие различия экспериментальных значений при многократном повторении измерений одной и той же величины x. **Погрешность разброса – это погрешность, рассчитанная по конечному количеству *n* полученных значений $\{x_1,\ldots,x_n\}$ измеряемой величины *x*.** Разбиение случайных погрешностей на погрешности разброса и приборные позволяет выделить основной источник ошибок измерений, заключенный в точности приборов или проявлении неучтенных случайных факторов.

Простейший способ определения $(\Delta x)_p$ дает **метод Корнфельда**, который предписывает следующий образ действий, если физическая величина x измерена n раз:

1) имея $x_1,...,x_n$ значений измеряемой величины x, выбираем из $\{x_1,...,x_n\}$ максимальное $x_{\max}$ и минимальное $x_{\min}$ и находим среднее значение x:

$$\langle x \rangle = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2};$$

2) находим абсолютную погрешность $\Delta x_p = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$;

3) записываем результат в виде $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ с $\alpha = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$,

где α – доверительная вероятность.

Доверительная вероятность определяет собой долю средних значений x, полученных в аналогичных сериях измерений, попадающих на отрезок $[\langle x \rangle - \Delta x; \langle x \rangle + \Delta x]$. Этот отрезок называется доверительным интервалом. Указанное выражение для расчета доверительной вероятности при использовании метода Корнфельда доказывается в теории ошибок [1, 6, 7].

Недостатком метода Корнфельда является то обстоятельство, что доверительная вероятность приводимого результата определяется исключительно количеством n проведенных измерений и не может быть изменена посредством увеличения или уменьшения доверительного интервала $\pm\Delta x$. Такую возможность предусматривает несколько более сложный **метод статистической обработки результатов с помощью коэффициентов Стьюдента** [1, 3, 4]. Он **применим в тех случаях, когда разброс экспериментальных значений измеряемой величины x носит характер нормального распределения около среднего значения** $\langle x \rangle$.

Говорят, что **случайная величина *x* нормально распределена или подчиняется закону распределения Гаусса, если ее функция распределения** $f(x)$ (см. Приложение 1.1) **имеет вид**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\langle x\rangle)^2/(2\sigma^2)}.$$

Здесь σ **– это ширина или стандарт распределения.** σ **представляет собой среднеквадратичное отклонение случайной величины *x* от среднего значения** $\langle x\rangle$ (см. Приложение 1.2).

Вид функции нормального распределения представлен на рис. 2.2. В процентах указана вероятность попадания измеряемой величины *x* в соответствующую окрестность среднего значения $\langle x\rangle$. Как видно из рис. 2.2, **ширина распределения** σ **определяет собой окрестность среднего значения** $\langle x\rangle$**, в которую попадает 68,2% значений измеряемой величины, причем** $\langle x\rangle$ **является наиболее вероятным значением случайной величины *x*.**

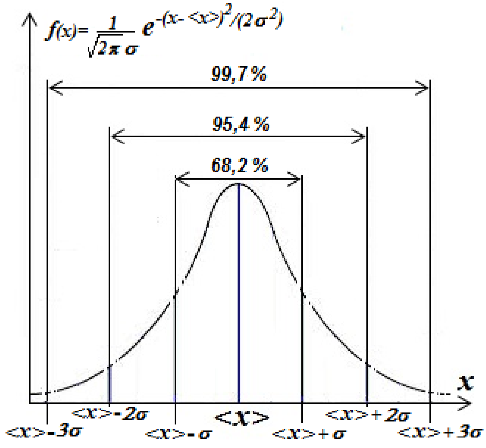

Рис. 2.2

В теории ошибок доказывается [1, 6, 7, 12], что **при наличии множества случайных факторов** не только распределение результатов очень большого (стремящегося к бесконечности) числа ***n*** измерений $x_i \ (i = 1,...,n \to \infty)$ величины x является нормальным, но также **нормальным является и распределение средних значений** $\langle x \rangle$, полученных в аналогичных сериях измерений. При этом функция распределения средних значений $f(\langle x \rangle)$ имеет меньшую ширину $\sigma_{\langle x \rangle}$, чем ширина σ функции распределения результатов отдельной серии измерений $f(x)$.

Именно $f(\langle x \rangle)$ **позволяет определять** наиболее важную для исследователя величину **– погрешность среднего значения** $\Delta\langle x \rangle$, **называемую доверительным интервалом, и его доверительную вероятность** α**.**

Однако **на практике** число измерений ограничено (в частности, в лабораторных работах n не превосходит 20), в этом случае при проведении статистической обработки результатов измерений **распределение Гаусса заменяют** сходным по форме, но более широким для $n \le 100$ **распределением Стьюдента.** При этом **доверительный интервал** $\Delta\langle x \rangle$**, куда с заданной вероятностью** α **попадают средние значения** $\langle x \rangle$ **аналогичных серий измерений, равен произведению** $\sigma_{\langle x \rangle}$ **на коэффициент Стьюдента** $t_{\alpha n}$**, который отражает отличие в распределениях для конечного и бесконечного числа измерений:**

$$\Delta\langle x \rangle = \sigma_{\langle x \rangle} \cdot t_{\alpha n} .$$

Таблица коэффициентов Стьюдента приведена в Приложении 2. На рис. 2.3 представлен пример функции распределения Стьюдента случайной величины x и ее средних значений $\langle x \rangle$ при наличии небольшого числа n измерений в серии. На рис. 2.3 показано, что **функция распределения** $f(\langle x \rangle)$ **имеет меньшую в** $\sqrt{n}$ **раз ширину по сравнению с функцией распределения**

случайной величины $f(x)$. Рисунок иллюстрирует соответствие доверительного интервала $[\langle x\rangle - \sigma_{\langle x\rangle} t_{\alpha n}; \langle x\rangle + \sigma_{\langle x\rangle} t_{\alpha n}]$ и доверительной вероятности α, равной заштрихованной площади под графиком функции $f(\langle x\rangle)$.

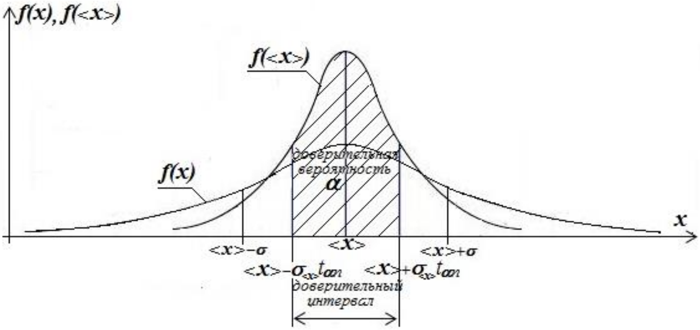

Рис. 2.3

Последовательность расчета погрешностей разброса статистическим методом с использованием коэффициентов Стьюдента такова.

1. Вы измерили и получили несколько $i = 1,...,m$ значений случайной величины x_i. Сначала следует **исключить промахи**, то есть заведомо неверные результаты.

2. По оставшимся ***n*** значениям необходимо **определить среднее арифметическое значение измеренной величины** $\langle x\rangle$**:**

$$\langle x\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}.$$

Физический смысл среднего арифметического значения заключается в том, что оно позволяет свести к минимуму стандартное отклонение серии измерений.

3. **Вычисляется стандартное отклонение результатов** x_i **относительно среднего значения** $\langle x \rangle$ **серии, называемое среднеквадратичной погрешностью:**

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}\ .$$

Следует определить долю x_i, попавших в интервал $[\langle x \rangle - S_x; \langle x \rangle + S_x]$. Строго говоря, она должна быть не менее 68% от общего числа *n* проведенных измерений для того, чтобы правомерно проводить дальнейшую статистическую обработку результатов, подчиняющихся нормальному распределению.

4. **Среднеквадратичная погрешность** $\sigma_{\langle x \rangle}$ **среднего значения** $\langle x \rangle$ **определяет разброс средних значений в последующих аналогичных сериях измерений величины** x**:**

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{(n-1)\cdot n}}\ .$$

5. **Выбирается доверительная вероятность** α, с которой мы хотим знать погрешность $\Delta\langle x \rangle$ полученного среднего значения. Чтобы определить доверительный интервал $\Delta\langle x \rangle$, соответствующий выбранной доверительной вероятности α, **следует определить коэффициент Стьюдента** $t_{\alpha n}$, находящийся на пересечении строки ***n*** и столбца $\boldsymbol{\alpha}$ в таблице коэффициентов Стьюдента (см. Приложение 2).

6. **Определяется погрешность (доверительный интервал)** $\Delta\langle x \rangle$ **среднего значения величины** $\langle x \rangle$**, соответствующая выбранной доверительной вероятности** $\boldsymbol{\alpha}$**:**

$$\Delta\langle x \rangle = t_{\alpha n} \cdot \sigma_{\langle x \rangle}\ .$$

7. **Записывается результат** $x = \langle x \rangle \pm \Delta \langle x \rangle$ **с указанием доверительной вероятности α.** Определенная таким образом погрешность является погрешностью разброса Δx_p.

8. **После нахождения** Δx_p **и** $\Delta x_{приб.}$ **следует выбрать максимальную из них при условии, что они рассчитаны для одной и той же доверительной вероятности** (обычно для $\alpha = 0{,}997$, так как на соответствующую доверительную вероятность воспроизведения результатов рассчитываются приборы, выпускаемые промышленностью [5]), **и принять ее за погрешность результата:**

$$\Delta x = \max\{\Delta x_{приб.}; \Delta x_p\}.$$

Отметим, что если погрешность Δx_p оказалась много меньше $\Delta x_{приб.}$, это, скорее всего, указывает на низкую точность использованных приборов либо на отсутствие как таковой статистики результатов (например, в случае однократного измерения). Если разброс результатов существенно превосходит приборную погрешность, то доверительная вероятность α выбирается исходя из требований, предъявляемых к результатам. В этом случае $\Delta x = \Delta x_p > \Delta x_{приб.}$ с $\alpha < \alpha_{приб} = 0{,}997$.

В научных статьях, представляющих большое количество измерений случайной величины x, обычно приводят **доверительный интервал** $\Delta\langle x \rangle = \sigma_{\langle x \rangle}$, **соответствующий доверительной вероятности α = 0,68**. Такой интервал **называется стандартным, при его использовании значение доверительной вероятности обычно не приводят.**

При условии нормального распределения экспериментальных значений x_i использование метода статистической обработки является необходимым, если требуется знать значение физических параметров с заданной доверительной вероятностью. Для большинства исследований, в которых не выдвигаются жесткие требования к доверительной вероятности полученных результатов, метод Корнфельда также является приемлемым.

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Чтобы понять основной принцип оценки погрешностей косвенных измерений, следует проанализировать источник этих погрешностей.

Пусть физическая величина $Y = f(x)$ есть функция непосредственно измеряемой величины x.

Величина x имеет погрешность Δx. Именно эта погрешность Δx (неточность в определении аргумента x) есть источник погрешности физической величины Y, являющейся функцией $f(x)$.

Приращение Δx аргумента x определяет собой приращение функции $\Delta Y \approx f'\Delta x$. Погрешность аргумента Δx косвенно определяемой физической величины Y определяет погрешность $\Delta Y \approx f'\Delta x$, где Δx – погрешность физической величины, найденной в прямых измерениях.

Если физическая величина является функцией нескольких непосредственно измеряемых величин $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то, проводя аналогичные рассуждения для каждого аргумента x_i, получим

$$\Delta Y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Очевидно, что погрешность, рассчитанная по этой формуле, является максимальной и соответствует ситуации, когда все аргументы изучаемой функции имеют одновременно максимальное отклонение от своих средних значений. На практике такие ситуации маловероятны и реализуются крайне редко. В теории ошибок [1, 6, 7] доказывается, что **погрешность результата косвенных измерений** следует рассчитывать по формуле

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\partial f / \partial x_i\right)^2 \Delta x_i^2}\ ,$$

если все Δx_i случайны, независимы и соответствуют одной доверительной вероятности.

Эту формулу легко проиллюстрировать для двумерного случая следующим образом: если точка A' смещена относительно точки A по оси x на Δx и по оси y на Δy, то расстояние $A'A = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

В реальных измерениях относительная точность различных величин x_i может сильно отличаться. При этом **если для одной из величин x_m выполняется неравенство $\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m > 3\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$, где $i = 1,\ldots,\ m-1,\ m+1,\ldots,\ n$, то можно считать, что погрешность косвенно определенной величины ΔY определяется погрешностью Δx_m:**

$$\Delta Y \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|\Delta x_m,$$

если все Δx_i, $i = 1,\ldots,n,$ соответствуют одной доверительной вероятности.

Пример.

При измерении скорости V полета пули методом вращающихся дисков скорость пули $V = 360 lN/\varphi$ есть результат косвенных измерений, где

l – расстояние между дисками, $\delta l = \frac{\Delta l}{l} \cong 0,5\ \%$;

N – число оборотов в единицу времени, известное с точностью $\delta N = \frac{\Delta N}{N} = 0,7\ \%$,

φ – угол поворота, измеренный в градусах с точностью $\Delta\varphi \approx \pm 1°$, следовательно, для углов поворота $\varphi\ \le\ 50°$ определяющим точность фактором будет погрешность угла поворота дисков:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \varphi}{\varphi}.$$

Итак, **при вычислении погрешности косвенно определяемой физической величины $Y = f(x_1,...,x_n)$ надо прежде всего выявить наименее точно определенную в прямых измерениях величину x_m и, если $\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m >> \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$, считать $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_m}\Delta x_m \approx \Delta Y$, пренебрегая погрешностями остальных x_i, $i \neq m$.**

Рассмотрим наиболее распространенные случаи взаимосвязи физических величин.

1. __**Степенная зависимость**__ $Y = \frac{x_1^{p_1}}{x_2^{p_2}}$, где p_1, p_2 – любые числа.

В данном случае проще сначала вычислить относительную погрешность $\frac{\Delta Y}{Y}$.

1) прологарифмируем $Y = \frac{x_1^{p_1}}{x_2^{p_2}}$, получим $\ln Y = p_1 \ln x_1 - p_2 \ln x_2$;

2) продифференцируем это равенство: $\frac{dY}{Y} = p_1\frac{dx_1}{x_1} - p_2\frac{dx_2}{x_2}$;

3) перейдем от бесконечно малых приращений-дифференциалов к конечным приращениям Δx_1, Δx_2: $\frac{\Delta f}{f} = p_1\frac{\Delta x_1}{x_1} - p_2\frac{\Delta x_2}{x_2}$;

4) учтем, что Δx_1 и Δx_2 – величины алгебраические и могут быть как положительными, так и отрицательными. Так как главной целью является выявление максимально возможной погрешности, нас будет интересовать наихудшая ситуация, которая реализуется при $\Delta x_1 > 0$, а $\Delta x_2 < 0$. Вследствие этого при вычислении погрешности δY все минусы заменяются на плюсы, и мы имеем

$$\delta Y = \frac{\Delta Y}{Y} = p_1\frac{\Delta x_1}{x_1} + p_2\frac{\Delta x_2}{x_2} = p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 .$$

Это выражение, как было показано, дает завышенную погрешность. Более точная формула, полученная в теории ошибок [1, 6, 7], имеет вид

$$\delta Y=\sqrt{p_1^{\,2}\left(\delta x_1\right)^2+p_2^{\,2}\left(\delta x_2\right)^2}\,.$$

5) **если имеется** n **переменных, определяющих собой степенную зависимость косвенного результата** Y **, то**

$$\delta Y=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_i^{\,2}\left(\delta x_i\right)^2}\,.$$

Следует заметить, что **чем больше по модулю показатель степени** p_i**, тем большую погрешность вносит данная переменная** x_i **в погрешность результата**. В данном случае следует сравнить $p_i\dfrac{\Delta x_i}{x_i}$ между собой и найти среди них максимальное значение $p_m\dfrac{\Delta x_m}{x_m}$. **Если** $p_m\dfrac{\Delta x_m}{x_m}>3p_i\dfrac{\Delta x_i}{x_i}$ **для всех остальных** $\boldsymbol{i\neq m}$**, то:**

относительная погрешность $\delta Y=p_m\dfrac{\Delta x_m}{x_m}$ **;**

абсолютная погрешность $\Delta Y=\delta Y\cdot\left\langle Y\right\rangle=p_m\dfrac{\Delta x_m}{x_m}\cdot\left\langle Y\right\rangle$.

2. **<u>Логарифмическая зависимость</u>** $Y=\log_a x$.

$dY=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{dx}{x}$, переходя от дифференциалов к конечным приращениям, имеем $\Delta Y=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{\Delta x}{x}=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\delta x$.

В этом случае абсолютная погрешность ΔY пропорциональна относительной погрешности δx непосредственно измеряемой величины x. Если Δx = const, то с ростом x ΔY будет уменьшаться (вот почему графики логарифмических зависимостей $Y=\log_a x$, как правило, отличаются неравновеликими погрешностями ΔY).

Пример.

При определении тройной точки нафталина требуется построить зависимость натурального логарифма давления ($\ln p$) от обратной температуры, где p – давление в миллиметрах ртутного столба, определенное с точностью до 1 мм рт. ст. Так как в этом случае с ростом температуры давление увеличивается, а его абсолютная погрешность остается неизменной, то погрешности $\Delta(\ln p) = \delta p$ уменьшаются с ростом давления, как показано на рис. 3.1.

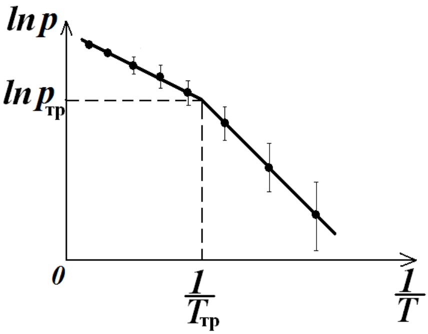

Рис. 3.1

Итак, **для логарифмических функций вида $Y = A \log_a x$ проще сразу вычислять абсолютную погрешность, которая пропорциональна относительной погрешности** δx **переменной** x**:**

$$\Delta Y = \frac{A}{\ln a} \frac{\Delta x}{x} = \frac{A}{\ln a} \cdot \delta x \, .$$

4. ПРАВИЛА ГРАФИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Оформление осей, выбор масштаба и размерности [5, 8, 9 13, 17]. Результаты измерений и вычислений удобно представлять в графическом виде. В практике лабораторных работ **графики строятся на миллиметровой бумаге**; **размеры графика не должны быть меньше 150×150 мм** (половина страницы лабораторного журнала). На лист прежде всего наносятся координатные оси. Результаты прямых измерений, как правило, откладываются на оси абсцисс. На концах осей наносятся обозначения физических величин и их единицы измерения. Затем **на оси наносятся масштабные деления так, чтобы расстояния между делениями составляли 1, 2, (редко 4), 5 единиц или $1 \cdot 10^{\pm n}$, $2 \cdot 10^{\pm n}$, $5 \cdot 10^{\pm n}$, где n – целое число**. Рекомендуется, чтобы количество выбранных масштабных делений оси не превышало 12, но и не было меньше 4.

Точка пересечения осей не обязательно должна соответствовать нулю по одной или более осям. **Начало отсчета по осям и масштаб следует выбирать так, чтобы кривая (прямая) заняла все поле графика.** Это достигается следующим образом: наименьшее (наибольшее) значение откладываемой величины располагается в области пересечения осей, а максимальное (минимальное) – в области, соответствующей самой верхней (нижней) точке оси, если речь идет об оси ординат. Аналогично выбирается масштаб по оси абсцисс.

2. Графическое представление физических величин. После выбора и нанесения на оси масштабов на лист наносятся значения физических величин. Их обозначают маленькими кружочками, треугольниками, квадратами, причем **числовые значения, соответствующие нанесенным точкам, не сносятся на оси**. Затем **от каждой точки вверх и вниз, вправо и влево откладываются в виде отрезков соответствующие погрешности в масштабе графика.**

После нанесения точек строится график, то есть проводится предсказанная теорией плавная кривая или прямая так, чтобы она пересекала все области погрешностей или, если это невозможно, суммы отклонений экспериментальных точек снизу и сверху кривой должны быть близки. **В правом или в левом верхнем углу (иногда посередине) пишется название той зависимости, которая изображается графиком.**

Исключение составляют **градуировочные графики,** на которых точки, нанесенные без погрешностей, соединяются последовательными отрезками прямых. Градуировочные графики, представляющие собой кусочно-линейные интерполяции, служат для отыскания промежуточных значений физических величин. Если в процессе градуировки абсолютная погрешность измерений не менялась, то погрешность градуировки указывается в правом верхнем углу под названием графика. Однако если в процессе градуировки прибора абсолютная погрешность измерений изменялась, то на градуировочном графике наносятся погрешности каждой измеренной точки.

Графики выполняются карандашом и вклеиваются в лабораторный журнал.

3. Гистограммы (от *греч.* histo – столб и gramma – черта, буква) – **это «столбчатые» диаграммы,** определяющие собой распределение переменной величины x в том случае, если имеется информация об отдельных ее значениях x_i, $i = 1,..., N$. Диапазон возможных значений переменной x делится на отрезки, обычно равные по величине, и откладывается на горизонтальной оси гистограммы; по вертикальной оси отмечают частоту или количество попаданий значений x_i в каждый интервал по оси x. **Гистограмма представляет собой совокупность смежных прямоугольников, построенных на одной прямой, площади которых при условии равенства интервалов по горизонтальной оси x пропорциональны количеству результатов x_i, попавших в каждый интервал.** Строго говоря, построение гистограмм следует проводить в каждом случае перед проведением статистической обработки результатов измерений с использованием коэффициентов Стьюдента, чтобы убедиться в правомерности такой обработки, проверив близость распределения результатов измерения к нормальному.

Пример.

После измерения блока из 20 единых по номиналу сопротивлений R_i требуется построить гистограмму R_i, $i = 1,...,20$. Для этого весь диапазон полученных значений R_i разбивают на 5 интервалов и подсчитывают количество сопротивлений, попавших в каждый интервал. Примеры таких гистограмм представлены на рис. 4.1*а* и 4.1*б*.

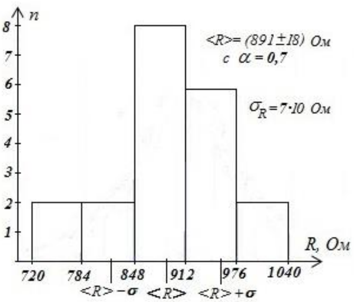

Рис. 4.1*а*

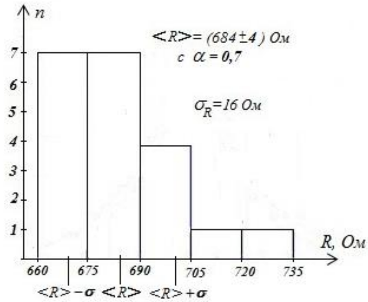

Рис. 4.1*б*

Форма гистограммы на рис. 4.1*а* принципиально соответствует виду гауссовой кривой (см. рис. 2.2), что делает правомерным обработку результатов статистическим методом с использованием коэффициентов Стьюдента. При этом в интервал $[\langle R\rangle - \sigma_R; \langle R\rangle + \sigma_R]$ попали 14 сопротивлений, что составляет 70% от 20 измеренных. Если форма гистограммы, как на рис. 4.1*б*, отличается от вида гауссовой кривой, то для обоснования использования распределения Стьюдента следует выбрать меньший отрезок разбиения полученного диапазона значений измеренной величины. В данном случае замена отрезка размером 15 Ом на отрезок 8 Ом приближает гистограмму исследованного блока к виду нормального распределения, что делает правомерными численные результаты статистической обработки рис. 4.1*б*. При этом в интервал $[\langle R\rangle - \sigma_R; \langle R\rangle + \sigma_R]$ попали 15 из 20 сопротивлений измеренного блока, что составляет 75%.

4. Линейные аппроксимации. В экспериментах часто требуется построить график зависимости полученной в работе физической величины Y от полученной физической величины x, аппроксимируя $Y(x)$ линейной функцией $Y = kx + b$, где k, b – постоянные. Графиком такой зависимости является прямая, а угловой коэффициент k часто является основной целью эксперимента. Естественно, что k в этом случае представляет собой также физический параметр, который должен быть определен с присущей данному эксперименту точностью.

Одним из методов решения данной задачи является **метод парных точек**, подробно описанный в [2, 8]. Его суть заключается в проведении **всех *N*** возможных прямых через пары точек, отстоящих друг от друга не менее чем на половину измерительного интервала. Затем для каждой прямой вычисляется ее коэффициент наклона k_i, а их среднее арифметическое дает угловой коэффициент искомой прямой:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i .$$

Погрешность найденного коэффициента определяют:

методом Корнфельда $\Delta k = \dfrac{k_{i\max} - k_{i\min}}{2}$ или

по среднеквадратичному отклонению $\Delta k = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(k_i - \langle k \rangle)^2}{N(N-1)}}$.

Однако следует иметь в виду, что метод парных точек применим при наличии большого числа точек $n \sim 10$, кроме того, он является достаточно трудоемким, особенно в тех случаях, когда экспериментальные точки имеют значительные погрешности.

Более простым и при аккуратном исполнении не уступающим в точности методу парных точек, является следующий графический метод определения коэффициента наклона прямой ($k \pm \Delta k$) [3,9].

1. По экспериментальным точкам, нанесенным с погрешностями, проводится прямая с использованием **метода наименьших квадратов (МНК).**

Основной идеей аппроксимации по МНК является минимизация суммарного среднеквадратичного отклонения экспериментальных точек от искомой прямой

$$Y = kx + b\,.$$

При этом коэффициенты k, b определяются из условий минимизации [1, 7]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dk}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y\left(x_i\right)-y_i\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d}{db}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y\left(x_i\right)-y_i\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Здесь x_i, y_i – экспериментально измеренные значения, n – число экспериментальных точек.

В результате решения данной системы имеем выражения для расчета коэффициентов k, b по экспериментально измеренным значениям:

$$\begin{cases} k = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \\ b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}. \end{cases}$$

2. **Графический метод определения погрешности коэффициента наклона прямой** заключается в следующем.

1) После вычисления коэффициентов k, b проводится искомая прямая. Затем выбирается экспериментальная точка, имеющая наибольшее с учетом погрешности отклонение от графика в

вертикальном направлении $\Delta Y_{\max}$, как указано на рис. 4.2. Тогда относительная погрешность $\Delta k/k$, обусловленная неточностью значений:

$$\delta k_y = \left(\frac{\Delta k}{k}\right)_y = \frac{\Delta Y_{\max}}{Y_{\max} - Y_{\min}},$$

где $\left(Y_{\max} - Y_{\min}\right)$ – измерительный интервал значений Y от max до min. При этом в обеих частях равенства стоят безразмерные величины, поэтому $\Delta Y_{\max}$ и $\left(Y_{\max} - Y_{\min}\right)$ можно одновременно вычислять в миллиметрах по графику или одновременно брать с учетом размерности Y.

2) Аналогично вычисляется относительная погрешность $(\Delta k/k)_x$, обусловленная погрешностью при определении x:

$$\delta k_x = \left(\frac{\Delta k}{k}\right)_x = \frac{\Delta X_{\max}}{X_{\max} - X_{\min}}.$$

3) $\dfrac{\Delta k}{k} = \sqrt{\delta k_x^2 + \delta k_y^2}$. Если одна из погрешностей, например $\delta k_x^2 << \delta k_y^2$, или величина x имеет очень малые погрешности Δx, незаметные на графике, то можно считать $\delta k = \delta k_y$.

4) Абсолютная погрешность

$$\Delta k = \delta k \cdot k.$$

В результате искомое значение углового коэффициента принадлежит отрезку $\left[k - \delta k \cdot k; k + \delta k \cdot k\right]$.

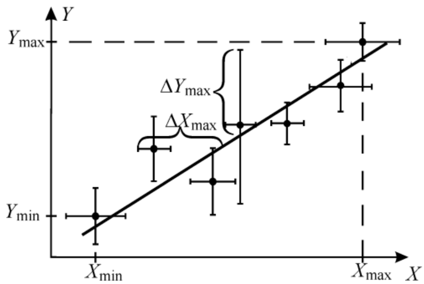

Рис. 4.2

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие цифры в десятичном изображении числа являются значащими?

2. Что такое абсолютная погрешность результата?

3. Как округляются следующие числа, представляющие собой абсолютные погрешности результатов, если число повторных измерений в сериях не превышало 10: 0,551; 84,7; 1,522?

4. Как разделяются погрешности по характеру появления?

5. Какие погрешности называются систематическими?

6. Как разделяются случайные погрешности по причинам, их порождающим?

7. Каким образом округляется результат измерения?

8. Что такое относительная погрешность результата δx?

9. Какой интервал значений измеряемой величины называется доверительным интервалом?

10. Что такое доверительная вероятность α?

11. Как методом Корнфельда определяется: среднее значение $\langle x \rangle$ серии измерений величины x; случайная погрешность среднего значения Δx; доверительная вероятность α?

12. Какое аналитическое и графическое представление имеет функция нормального распределения Гаусса?

13. Когда применим метод Стьюдента статистической обработки результатов измерений?

14. Как вычисляется ширина σ распределения экспериментальных значений?

15. Как методом Стьюдента определяется: среднее значение $\langle x \rangle$ серии измерений величины x; среднеквадратичное отклонение от среднего значения $\langle x \rangle$; доверительная вероятность и соответствующий ей доверительный интервал?

16. Каков физический смысл среднего арифметического значения серии измерений?

17. Как по таблице выбираются коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha n}$?

18. Как, зная класс точности прибора, определить приборную погрешность: стрелочных амперметров и вольтметров; магазинов сопротивлений, емкости, индуктивности?

19. Какое измерение физической величины называется косвенным?

20. Как определяется погрешность косвенных измерений для следующих функций: степенной, логарифмической?

21. Каковы основные правила графического представления результатов измерений (выбор масштаба, оцифровка осей, расположение графика, обозначение экспериментальных точек, наименование)?

22. Как и в каких случаях на градуировочных графиках наносятся погрешности?

23. Какие методы линейной аппроксимации вам известны?

24. Каковы условия применимости метода парных точек?

25. В чем суть метода наименьших квадратов?

26. Как по графику вычисляется погрешность углового коэффициента аппроксимационной прямой?

27. Что такое гистограмма?

28. Как правильно записать окончательный результат серии измерений величины x {4,261; 4,378; 4,125; 4,290} с доверительной вероятностью $\alpha = 68\%$, учитывая погрешность разброса?

29. Каковы правила проведения промежуточных вычислений?

30. Каким образом следует округлять результаты промежуточных вычислений?

Приложение 1

П1.1. Функция распределения случайной величины x **представляет собой плотность вероятности** p **этой величины**

$$f(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{dp}{dx}.$$

Смысл этого соотношения заключается в следующем: $dp(x_0) = f(x_0) \cdot dx$ **– вероятность того, что случайная величина** x **имеет значение в интервале** $(x_0, x_0 + dx)$**.**

Свойства произвольной функции распределения:

1. Неотрицательна $f(x) \geq 0$.
2. Размерность $[f(x)] = \frac{1}{[x]}$.
3. Нормировка $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
4. Основное назначение:

   1) определение вероятности нахождения значения случайной величины x в интервале значений $[x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x]$;

   2) определение средних значений любых функций $\varphi(x)$, зависящих от величины x:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

П1.2. Ширина или стандарт распределения σ **представляет собой среднеквадратичное отклонение случайной величины** x **от среднего значения** $\langle x \rangle$**:**

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}.$$

П1.3. Правила округления десятичных чисел. Округлить число в десятичной записи до определенного разряда – значит заменить его близким по значению числом, отбросив все цифры младших разрядов. Числа округляют, когда более высокая точность не нужна или невозможна.

При округлении десятичных чисел принято оставлять все цифры старших разрядов, включая тот, до которого производится округление, неизменными, если в старшем отброшенном разряде стояла цифра 0, 1, 2, 3 или 4. Если в старшем отброшенном разряде стояла цифра 5, 6, 7, 8 или 9, то число в младшем оставленном разряде увеличивается на 1.

<u>Примеры.</u> 578912 = $579 \cdot 10^3$ после округления до тысяч;

156424 = $1564 \cdot 10^2$ после округления до сотен;

34, 951 = 35,0 после округления до десятых;

82,932 = 82,93 после округления до сотых;

1,23981= 1,240 после округления до тысячных.

Указанные правила всегда действуют при округлении результатов измерений до требуемого разряда.

При округлении погрешностей экспериментальных результатов до требуемого числа значащих цифр можно также пользоваться этими правилами. Однако при публикации серьезных экспериментальных результатов исследователи, как правило, не желая завышать в глазах научной общественности точность методики своего эксперимента, округляют погрешности в большую сторону. Например, погрешность 0,144 округляют вопреки изложенному правилу до 0,15.

Необходимая точность расчетов определяется тем, что расчет не должен вносить дополнительной погрешности в результат измерений. Обычно в промежуточных расчетах сохраняется один лишний (младший) разряд, который при записи окончательного результата отбрасывается при округлении.

П1.4. Приближенные вычисления следует проводить, соблюдая следующие правила.

1. **При сложении и вычитании приближенных чисел результат округляется так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из слагаемых.**

Например, сумму

$$\begin{array}{r} 1{,}23 \\ +\ 4{,}567 \\ \underline{8{,}9012} \\ 14{,}6982 \end{array}$$

следует округлить до сотых 14,70.

2. **При умножении следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал число значащих цифр, равное наименьшему числу значащих цифр у исходных сомножителей. В произведении необходимо оставлять такое же число значащих цифр, как и в сомножителях.** Например, $12{,}34 \cdot 56 \cdot 0{,}7890 = 12 \cdot 56 \cdot 0{,}79 = 530{,}88$.

Если это окончательный результат, то после округления он будет иметь вид $53 \cdot 10$. Если это произведение является промежуточным результатом, то оно должно быть округлено до числа 531. Такое же правило соблюдается и при делении приближенных чисел.

3. **При возведении в целочисленную степень и извлечении корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их содержало основание степени.** Например,

$$1{,}23^2 = 1{,}5129 = 1{,}51; \ \sqrt{1{,}17 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-4}.$$

4. При вычислении сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий:

$$\frac{(3{,}2 + 17{,}062) \cdot \sqrt{3{,}7}}{5{,}1 \cdot 2{,}007 \cdot 10^3} \approx \frac{20{,}3 \cdot 1{,}92}{10{,}3} \cdot 10^{-3} \approx \frac{39{,}0}{10{,}3} \cdot 10^{-3} \approx 3{,}79 \cdot 10^{-3}.$$

После округления конечного результата до двух значащих цифр получаем $3{,}8 \cdot 10^{-3}$.

Приложение 2

Таблица коэффициентов Стьюдента
(с точностью до трех значащих цифр)

n \ α	0,20	0,40	0,60	0,682	0,80	0,90	0,95	0,98	0,997
2	0,325	0,727	1,38	1,83	3,08	6,31	12,7	31,8	212
3	0,289	0,617	1,06	1,32	1,89	2,92	4,30	6,96	18,2
4	0,277	0,584	0,978	1,19	1,64	2,35	3,18	4,54	8,89
5	0,271	0,568	0,940	1,14	1,53	2,13	2,77	3,75	6,43
6	0,267	0,559	0,920	1,11	1,48	2,02	2,57	3,36	5,34
7	0,265	0,553	0,906	1,09	1,44	1,94	2,45	3,14	4,80
8	0,263	0,549	0,896	1,08	1,42	1,90	2,36	3,00	4,44
9	0,262	0,546	0,889	1,06	1,40	1,86	2,31	2,90	4,20
10	0,261	0,543	0,883	1,06	1,38	1,83	2,26	2,82	4,02
11	0,260	0,542	0,879	1,05	1,37	1,81	2,23	2,76	3,89
12	0,260	0,540	0,876	1,05	l,36	1,80	2,20	2,72	3,79
13	0,259	0,539	0,873	1,04	1,36	1,78	2,18	2,68	3,71
14	0,259	0,538	0,870	1,04	1,35	1,77	2,16	2,65	3,64
15	0,258	0,537	0,868	1,04	1,35	1,76	2,14	2,62	3,58
16	0,258	0,536	0,866	1,03	1,34	1,75	2,13	2,60	3,54
17	0,258	0,535	0,865	1,03	1,34	1,75	2,12	2,58	3,49
18	0,257	0,534	0,863	1,03	1.33	1,74	2,11	2,57	3,46
19	0,257	0,534	0,862	1,03	1,33	1,73	2,10	2,55	3,43
20	0,257	0,533	0,861	1,03	1,33	1,73	2,09	2,54	3,40
40	0,255	0,529	0,850	1,01	1,30	1,68	2,02	2,42	3,17
60	0,254	0,527	0,848	1,01	1,30	1,67	2,00	2.66	3,10
100	0,254	0,526	0,845	1,00	1,29	1,66	1,98	2,36	3,04
1 000 000	0,253	0,524	0,842	1,00	1,28	1,64	1,96	2,33	2,97

Приложение 3

Основные физические постоянные

Физическая величина	Символ	Значение
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67259 \bullet 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$
Скорость света	c	$2{,}99792458 \bullet 10^{8}$ м $\cdot$ с$^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1{,}602177\,33 \bullet 10^{-19}$ Кл
Постоянная Планка	h	$6{,}6260755 \bullet 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
Постоянная Планка $h/2\pi$	$\hbar$	$1{,}05457266 \bullet 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с = = $6{,}5821220 \bullet 10^{-16}$ эВ $\cdot$ с
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}854187817 \bullet 10^{-12}$ Кл$^2 \cdot$ Н$^{-1} \cdot$ м$^{-2}$
Магнитная постоянная	μ_0	$12{,}566370614 \bullet 10^{-7}$ Н $\cdot$ А$^{-2}$
Масса электрона	m_e	$9{,}1093897 \bullet 10^{-31}$ кг = = 0,51099906 МэВ/с^2
Масса протона	m_p	$1{,}6726231 \bullet 10^{-27}$ кг = = 938,27231 МэВ/с^2 = = 1,007276470 а.е.м. = = 1836,152701 m_e
Масса нейтрона	m_n	$1{,}6749286 \bullet 10^{-27}$ кг = = 939,56563 МэВ/с^2 = 1,008664904 а.е.м.
Атомная единица массы	а.е.м.	$1{,}660\,540\,2 \cdot 10^{-27}$ кг = =931,49432 МэВ/с^2
Постоянная Больцмана	k	$1{,}380658 \bullet 10^{-23}$ Дж $\cdot$ К$^{-1}$ = = $8{,}617385 \bullet 10^{-5}$ эВ $\cdot$ К$^{-1}$
Число Авогадро	N_A	$6{,}0221367 \bullet 10^{23}$ моль$^{-1}$

Приложение 4

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение
10^{18}	экса	Э
10^{15}	пета	П
10^{12}	тера	Т
10^{9}	гига	Г
10^{6}	мега	М
10^{3}	кило	к
10^{2}	гекто	г
10	дека	да
10^{-1}	деци	д
10^{-2}	санти	с
10^{-3}	милли	м
10^{-6}	микро	мк
10^{-9}	нано	н
10^{-12}	пико	п
10^{-15}	фемто	ф
10^{-18}	атто	а

Приложение 5

Единицы СИ

Физическая величина	Наименование единицы	Обозначение русское	Обозначение международное	Определение
Длина	метр	м	m	**Метр** равен расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299792458 долей секунды
Масса	килограмм	кг	kg	**Килограмм** равен массе международного прототипа килограмма (платино-иридиевого тела)
Время	секунда	с	s	**Секунда** равна продолжительности 9192631770 периодов колебаний световой волны, излученной при переходе между сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия $^{133}_{55}Cs$
Температура	кельвин	К	K	**Кельвин** равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды
Сила электрического тока	ампер	А	A	**Ампер** равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н
Количество вещества	моль	моль	mol	**Моль** равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде $^{12}_{6}C$ массой 0,012 кг.

Приложение 6

Формулы расчета погрешностей при косвенных измерениях в нескольких простейших случаях:

Вид функциональной зависимости	Абсолютная погрешность ΔF	Относительная погрешность $\delta F = \frac{\Delta F}{F}$
$F = A \pm B$	$\sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$	$\sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}/\lvert A \pm B \rvert$
$F = A \cdot B$	$\sqrt{B^2(\Delta A)^2 + A^2(\Delta B)^2}$	$\sqrt{(\frac{\Delta A}{A})^2 + (\frac{\Delta B}{B})^2}$
$F = \frac{A}{B}$	$\sqrt{\frac{(\Delta A)^2}{B^2} + \frac{A^2}{B^4}(\Delta B)^2}$	$\sqrt{(\frac{\Delta A}{A})^2 + (\frac{\Delta B}{B})^2}$
$F = A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdots C^{\tau}$	-	$\sqrt{\alpha^2(\frac{\Delta A}{A})^2 + \beta^2(\frac{\Delta B}{B})^2 + \cdots + \tau^2(\frac{\Delta C}{C})^2}$
$F = \log_{\alpha} x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\frac{\delta x}{\ln a}$	$\frac{\delta x}{\ln x}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1967.
2. Светозаров В. В. Элементарная обработка результатов измерений. М.: МИФИ, 1983.
3. Аксенова Е. Н. Элементарные способы оценки погрешностей результатов прямых и косвенных измерений. М.: МИФИ, 2003.
4. Светозаров В. В. Основы статистической обработки результатов измерений. М.: МИФИ, 2005.
5. Аксенова Е. Н. Методы оценки погрешностей результатов прямых и косвенных измерений в лабораториях физического практикума / Е. Н. Аксенова, Н. К. Гасников, Н. П. Калашников. М.: МИФИ, 2009.
6. Тейлор Дж. З. Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985.
7. Бурдун Г. Д. Основы метрологии/ Г. Д. Бурдун, Б. Н. Марков М.: Изд-во стандартов, 1967.
8. Лабораторный практикум «Электроизмерительные приборы. Электромагнитные колебания и переменный ток»/ под ред. Е. Н. Аксеновой, В. Ф. Федорова. М.: МИФИ, 1999.
9. Лабораторные занятия по физике / под ред. Л.Л. Гольдина. М.: Наука, 1983.
10. Лабораторный практикум по физике/ под ред. К. А. Барсукова, Ю. И. Уланова. М.: Высшая школа, 1988.
11. Тьюки Дж. Анализ результатов измерений. М.: МИР, 1981.
12. Камке Д. Физические основы единиц измерения/ Д. Камке, К. Кремер. М.: МИР, 1980.
13. Физика. Словарь-Справочник/ Е.С. Пластунов [и др.]. СПб.: Изд. СПбГПУ. 2014..
14. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. М.: ГРФМЛ. Наука. 1977.
15. Яворский Б.М. Справочник по физике/ Б. М. Яворский, А. А. Детлаф М.: ГРФМЛ, Наука. 1985.
16. Кабардин О. Ф. Физика. Справочные материалы. М.: Просвещение. 1988.
17. Лабораторные занятия по физике/ Л. Л. Гольдин [и др.]. М.: ГРФМЛ. Наука, 1983.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Елена Николаевна АКСЕНОВА,
Николай Павлович КАЛАШНИКОВ

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ
ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *С. В. Макаров*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А.
Тел.: (812) 412-92-72, 336-25-09.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 06.11.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 2,10. Тираж 100 экз.

Заказ № 019-19.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.