Н. Винер

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

ФМ

THE FOURIER INTEGRAL AND CERTAIN OF ITS APPLICATIONS

by

NORBERT WIENER

PROFESSOR OF MATHEMATICS AT THE MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

DOVER PUBLICATIONS, INC
NEW YORK

Н. ВИНЕР

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Перевод с английского
Н. Я. ВИЛЕНКИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

АННОТАЦИЯ

Эта книга посвящена теории интеграла Фурье и некоторым приложениям этой теории. В ней рассмотрена теория Планшереля интеграла Фурье в пространстве L_2, теоремы тауберова типа и их приложения к изучению распределения простых чисел, а также понятие спектра функции и применение этого понятия к теории почти-периодических функций. Эти вопросы слабо освещены в имеющейся на русском языке литературе по интегралу Фурье.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области гармонического анализа и теории чисел.

Норберт Винер

Интеграл Фурье и некоторые его приложения

М., Физматгиз, 1963 г., 256 стр. с илл.

Редактор *И. В. Кеппен*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше* Корректор *И. Б. Демьяновская*

Сдано в набор 11/IX 1962 г. Подписано к печати 11/I 1963 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 8. Условн. печ. л. 13,12. Уч.-изд. л. 13. Тираж 16 000 экз.
Цена книги 85 коп. Заказ № 705.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV

Обобщенный гармонический анализ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эта книга возникла в результате обработки курса лекций по теории интеграла Фурье и его приложений, прочитанного мною в Кембриджском университете в весеннем семестре 1932 г. Осенью 1931 г. у меня были обширные планы написания книги по некоторым вопросам гармонического анализа.

Первоначально я хотел написать исчерпывающий трактат, начинающийся с изложения элементов теории интеграла Лебега и содержащий L_2-теорию рядов Фурье, теорему Планшереля, интеграл Фурье, периодограммы и, наконец, теоремы тауберова типа.

Импульсом для написания книги такого типа послужили неудовлетворенность тем, что в существующих учебниках по интегралу Фурье основное внимание уделяется вопросам сходимости, а также необходимость в учебнике, содержащем многие вопросы, разбросанные сейчас по журнальной литературе.

Однако поскольку вопросы, связанные с рядами Фурье, изложены с современной точки зрения в недавно вышедшей книге Титчмарша «Теория функций», я отказался от первоначально задуманного плана создания исчерпывающего трактата и ограничился изложением некоторых вопросов теории интеграла Фурье и связанных с ним проблем. При этом я не стремился к полноте изложения и ограничился лишь некоторыми аспектами теории, лежащими в области моих научных интересов.

Можно указать три основные группы идей, нашедшие отражение в этой книге: группа вопросов, связанных с преобразованием Фурье и теоремой Планшереля; понятие абсолютно сходящихся рядов Фурье и теоремы тауберова типа; понятие спектра.

Основные результаты, изложенные в этой книге, сводятся к следующему:

1. Теория Планшереля преобразования Фурье функций из L_2: существование преобразования Фурье таких функций, равенство Парсеваля и доказательство формулы обращения.

2. Теорема, утверждающая, что если функция $f(x)$ непрерывна, не обращается в нуль на вещественной оси и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье функции $1/f(x)$ абсолютно сходится.

3. Различные формы общих тауберовых теорем.

4. Теоремы Ламберта — Таубера и Валле Пуссена — Адамара о распределении простых чисел.

5. Теорема Икеара — Ландау и ее приложения к распределению простых чисел.

6. Теоремы, связывающие среднее значение квадрата модуля функции с сингулярными квадратичными формами от интеграла преобразования Фурье этих функций.

7. Теорема о положительности спектра функций, имеющих спектр.

8. Группа теорем, касающихся спектра линейных преобразований заданных функций.

9. Теоремы Вейерштрасса и Парсеваля для почти-периодических функций.

Разумеется, многие из этих вопросов рассматривались в различных монографиях как моих, так и других авторов. Эти монографии указаны в библиографии, помещенной в конце книги.

После некоторых колебаний я решил не включать в эту книгу вопросы, связанные с гармоническим анализом в комплексной области, поскольку это потребовало бы изложения слишком обширного вводного материала, не используемого нигде более в этой книге, что привело бы к чрезмерному увеличению объема.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Природа гармонического анализа

В иерархии математических дисциплин существуют области, характеризующиеся разным уровнем абстракции. Низший уровень математической абстракции связан с понятием индивидуального числа, обозначаемого, например, арабскими цифрами. На этом этапе еще не вводятся символы, изображающие произвольные числа. Это этап элементарной арифметики; в алгебре мы применяем буквенные символы, но рассматриваем лишь индивидуальные комбинации этих символов. Далее идет уровень анализа, основным понятием которого является произвольная зависимость одного числа от другого или от нескольких чисел, то есть понятие функции. Значительно сложнее области математики, в которых элементарным понятием является преобразование одной функции в другую, то есть понятие оператора. Только в связи с операторным исчислением может быть понято истинное значение гармонического анализа.

Рассмотрим оператор T, преобразующий функцию $f(x)$, определенную на оси $(-\infty, \infty)$, в функцию $T\{f\}=g(x)$, определенную на той же оси. Если

$$T\{f_1(x)+f_2(x)\}=T\{f_1(x)\}+T\{f_2(x)\};$$
$$T\{af(x)\}=aT\{f(x)\} \quad (a \text{ — постоянное}),$$

то оператор $T\{f\}$ называется *линейным*. Линейные операторы часто встречаются в физике (вероятно, чаще, чем в природе), поскольку их обычно выбирают в качестве аппроксимации нелинейных операторов. Еще чаще встречается тип операторов, который был введен Вольтерра под несколько неудачным названием *операторов замкнутого цикла*. Они характеризуются тем свойством, что если $T\{f\}=g$

и $f(x+h)=f_1(x)$, $g(x+h)=g_1(x)$, то

$$T\{f_1(x)\}=g_1(x).$$

Если аргумент x является временем, то большая часть операторов в физике принадлежит к типу операторов замкнутого цикла. Дело в том, что почти во всех физических процессах изменение начала отсчета времени приводит лишь к соответствующему изменению времени наступления всех дальнейших этапов рассматриваемого процесса.

Функция e^{iux} играет особо важную роль для операторов замкнутого цикла. Это связано с тем, что

$$e^{iu(x+h)}=e^{iuh}e^{iux},$$

или, иными словами, с тем, что временной сдвиг приводит лишь к умножению функции e^{iux} на комплексное число, модуль которого равен 1. Для изучения линейных операторов T замкнутого цикла весьма важно рассмотреть, как действует этот оператор на линейную комбинацию функций вида e^{iux}. Заметим, что

$$T(e^{iu(x+h)})=T(e^{iuh}e^{iux})=e^{iuh}T(e^{iux}).$$

Поэтому если обозначить $T(e^{iux})$ через $\varphi(x)$, то мы получим, что

$$\varphi(x+h)=e^{iuh}\varphi(x)$$

или

$$\varphi(h)=\varphi(0)\,e^{iuh}.$$

Таким образом, применение оператора T к e^{iux} сводится к умножению на постоянную. Отсюда следует, что

$$T\left(\sum_1^N a_n e^{iu_n x}\right)=\sum_1^N a_n b_n e^{iu_n x}, \tag{1.01}$$

где коэффициенты b_n зависят лишь от u_n и T, но не от a_n. Другими словами, если задавать функцию $\sum_1^N a_n e^{iu_n x}=f(x)$ множеством коэффициентов a_n, то действие линейного оператора T замкнутого цикла на $f(x)$ сводится к умножению a_n на множители b_n, определяющие, таким образом, оператор T. Этот факт и его различные обобщения и определяют причину важности методов гармонического анализа.

В главе I нашей главной целью является установление теорем типа (1.01) в случае, когда $\sum\limits_1^N$ заменяется интегралом соответствующего вида. Мы указываем некоторые условия, при которых функция $f(x)$ определяет функцию $g(u)$, задаваемую формально равенством

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iux}\,dx, \tag{1.02}$$

и находим условия, при которых результат, выражаемый равенством вида

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\,e^{iux}\,du \tag{1.03}$$

справедлив. Равенство (1.03) можно рассматривать как обобщение записи $f(x)=\sum\limits_1^N a_n e^{iu_n x}$. Если положить

$$g_1(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,e^{-iux}\,dx, \tag{1.04}$$

то мы получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(u)\,g(u)\,e^{iux}\,du. \tag{1.05}$$

Оператор, преобразующий $f(x)$ в $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi$, формально соответствует, таким образом, применению к g оператора умножения на $\sqrt{2\pi}g_1(u)$.

В главе II мы изучим асимптотическое поведение линейных преобразований замкнутого цикла функции $f(x)$, имеющих вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi. \tag{1.06}$$

Это поведение описывается теоремами тауберова типа—иногда в форме, отличающейся от данной заменой переменной, при которой (1.06) заменяется на

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{\infty} Q(x/\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Не удивительно, в силу сходства (1.06) с левой частью равенства (1.05), что функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,e^{-iux}\,dx$$

играют важную роль в этой теории. Это станет еще более естественно, если принять во внимание, что асимптотические свойства функции не зависят от выбора начала отсчета и, следовательно, инвариантны относительно любого преобразования $x_1 = x + h$, оставляющего инвариантным также и операторы замкнутого цикла.

В главе III мы рассматриваем вновь выражения, подобные (1.03), где, однако, функции $f(x)$ не стремятся к нулю при $x \to \infty$, в то время, как функции, рассмотренные в главе I, в некотором смысле малы на бесконечности. Здесь весьма полезна теория, развитая в главе II. Весьма важным приложением является теория Бора почти-периодических функций. Мы будем называть преобразование, которое переводит $f(x+\lambda)$ в $f(x)$ (λ — вещественное) *сдвигом*. Понятие почти-периодичности, похожее на понятие периодичности, инвариантно относительно сдвига функции, а потому связано с рассмотрением операторов замкнутого цикла и гармоническим анализом — разложением на функции вида e^{iux}.

§ 2. Свойства интеграла Лебега

Хорошо известно, что адекватная теория рядов Фурье может быть построена лишь на основе интеграла Лебега. Выражение коэффициентов Фурье через данную функцию и свойства этих коэффициентов могут быть установлены и с помощью менее общих понятий интеграла, например, на основе интеграла Римана. Но основная теорема о существовании функции, имеющей заданные коэффициенты Фурье, то есть теорема Рисса — Фишера, просто неверна для любого менее широкого определения интеграла, чем интеграл Лебега. В теории рядов Фурье разлагаемая функция и ее коэффициенты Фурье являются объектами разных типов. Функция задана на всей оси, но является периодической, а поэтому ее достаточно знать лишь на одном периоде, в то время как коэффициенты образуют дискретное непериодическое множество чисел. Иначе обстоит дело в случае интеграла Фурье; если разлагаемой функцией является функция $f(x)$ из формулы (1.03), то роль коэффициентов Фурье играет функция $g(u)$. Но полное формальное подобие между формулами (1.02) и (1.03) показывает, что в этом случае невозможно говорить, что одна из функций f или g является функцией, которую мы разлагаем, а другая — множеством коэффициентов. Обе они являются непериодическими функциями, определенными на всей оси. В соответствии с этим невозможно разделить трудности теории интеграла Фурье на две категории. Мы встречаемся в этой теории как с теми трудностями теории рядов Фурье, которые связаны с переходом от функции к ее коэффициентам, так и с трудностями, которые связаны с переходом от коэффициентов к функции, причем теперь эти трудности относятся к обоим аргументам. Совершенно невозможно поэтому установить полную и симметричную теорию интеграла Фурье на другой основе, кроме интеграла Лебега.

Мы не хотим давать здесь полное и систематическое изложение интеграла Лебега. Однако мы сочли полезным дать определение меры Лебега и интеграла Лебега, а также резюме основных теорем о них, которые мы будем постоянно использовать. На выбор этих теорем большое влияние оказал выбор, сделанный Харди в его лекциях по рядам Фурье. Мы хотели сделать книгу понятной для тех, кто хорошо знаком с элементарной нелебеговой теорией функций действительного переменного. Разумеется, никто, кроме лентяев, не ограничится тем, что примет эти фундаментальные теоремы на веру.

Рассмотрим множество S точек, на конечном отрезке $[a, b]$. Пусть множество S покрыто конечным или счетным множеством промежутков, сумма длин которых равна M. Тогда M принимает различные значения в зависимости от выбора множества промежутков, покрывающих S. Назовем точную нижнюю грань возможных значений M *внешней мерой* множества S и будем обозначать ее $\overline{m}(S)$.

Пусть теперь $\overline{S}$ — множество точек отрезка $[a, b]$, не принадлежащих S. Положим

$$\underline{m}(S) = b - a - \overline{m}(\overline{S}).$$

Мы будем называть $\underline{m}(S)$ *внутренней мерой* S. Если

$$\underline{m}(S) = \overline{m}(S),$$

то обозначим через $m(S)$ общее значение этих двух чисел и назовем его *мерой* S. В этом случае множество S называется измеримым. Легко показать, что понятия меры и измеримости множества S не зависят от выбора отрезка $[a, b]$.

Неограниченное множество S называется измеримым, если для любых двух чисел a и b, таких, что $a < b$, порция множества S на отрезке $[a, b]$ измерима. Если обозначить эту порцию S через $S(a, b)$, то

$$m(S) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} m(S(a, b)).$$

Для множеств, лежащих в евклидовом пространстве двух или большего числа измерений, мера определяется точно так же. Различие состоит лишь в том, что мы заменяем промежутки прямоугольниками или прямоугольными параллелепипедами, а длину — площадью или объемом в зависимости от числа измерений. При определении меры неограниченных множеств отрезок $[a, b]$ заменяется его аналогом, размеры которого увеличиваются во всех измерениях. Общность получаемого таким путем определения меры не нарушается, если мы зафиксируем ориентацию наших прямоугольников или прямоугольных параллелепипедов, причем получаемая мера не зависит от выбора ориентации.

Если некоторое утверждение зависит от переменной точки, то мы говорим, что оно выполняется *почти всюду*, если оно не имеет места лишь на множестве меры нуль.

Функция $f(x)$ называется *измеримой* на отрезке $[a, b]$ (a и b конечны), если для любых α и β, $\alpha \leqslant \beta$, множество точек x этого отрезка, для которых $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, измеримо. Пусть функция $f(x)$ принимает значение k в точках измеримого множества S, лежащего на отрезке $[a, b]$, и равна нулю вне этого множества. Определим в этом случае *интеграл Лебега* или, как мы будем просто говорить, *интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ формулой

$$\int_a^b f(x)\,dx = km(S). \tag{2.01}$$

Если $f(x) = \sum_1^n f_k(x)$, причем каждая из функций $f_k(x)$ имеет постоянное значение на некотором измеримом множестве S_k и равна нулю вне этого множества, то мы полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_1^n \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{2.011}$$

Верхним интегралом ограниченной вещественной функции $f(x)$ мы назовем *точную нижнюю грань* чисел

$$\int_a^b g(x)\,dx,$$

где $g(x)$ пробегает такие функции, что интеграл для них задается формулой (2.011), и $g(x) \geqslant f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Верхний интеграл функции $f(x)$ обозначается

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Нижний интеграл вещественной ограниченной функции определяется формулой

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = -\overline{\int_a^b}(-f(x))\,dx.$$

Если верхний интеграл равен нижнему,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

мы обозначим их общее значение через $\int_a^b f(x)\,dx$.

Введем два обозначения, которыми будем часто пользоваться в последующих параграфах. Положим

$$f_{A,B}(x)=\begin{cases} A\,(f(x)<A); \\ f(x)\,(A\leqslant f(x)<B); \\ B\,(B<f(x)); \end{cases}$$

$$f_A(x)=\begin{cases} f(x)\,(|f(x)|<A); \\ Af(x)/|f(x)|\,(|f(x)|>A). \end{cases}$$

Заметим, что $f_A(x)$ совпадает с $f_{-A,A}(x)$, если функция $f(x)$ вещественна. Но $f_A(x)$ имеет смысл и для функций, принимающих комплексные значения. Заметим еще, что всегда выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} |f_{A,B}(x)-f_{A,B}(y)|&\leqslant|f(x)-f(y)|; \\ |f_A(x)-f_A(y)|&\leqslant|f(x)-f(y)|. \end{aligned}\right\} \tag{2.015}$$

Определим теперь интеграл Лебега для вещественных неограниченных функций равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}}\int_a^b f_{A,B}(x)\,dx.$$

Если этот предел существует, функция $f(x)$ называется интегрируемой или принадлежащей классу L_1.

Сформулируем теперь некоторые предложения, касающиеся меры и интегрирования, на которые будем часто ссылаться в дальнейшем. Доказательство этих предложений можно найти в обычных учебниках теории функций вещественного переменного. Мы будем обозначать эти предложения буквами X с различными индексами. Точно так же будут обозначены и некоторые теоремы, которые, хотя и приводятся с доказательствами, но скорее принадлежат к основам теорий, излагаемых в этой книге, чем к самим этим теориям.

X_1. *Если множество S является суммой конечного или счетного множества непересекающихся измеримых множеств $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, то множество S*

измеримо и

$$m(S) = m(S_1) + m(S_2) + \ldots + m(S_n) + \ldots$$

X_2. *Сумма и пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств измеримы.*

X_3. *Если $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ — последовательность измеримых множеств, имеющих пересечение S, причем S_k содержит S_{k+1} для любого k, то*

$$m(S) = \lim_{k \to \infty} m(S_k).$$

X_4. *Если S_1 и S_2 — измеримые множества, причем S_1 содержит S_2, то*

$$m(S_1) \geqslant m(S_2).$$

X_5. *Сумма конечного или счетного множества множеств меры нуль является множеством меры нуль.*

X_6. *Если $f(x)$ — измеримая функция, то и $|f(x)|$ — измеримая функция; если измеримы функции $f(x)$ и $g(x)$, то измеримы и функции $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ и $\alpha f(x) + \beta g(x)$, где α и β — любые вещественные числа при условии, что эти функции определены почти всюду.*

X_7. *Различные определения интеграла Лебега, даваемые для различных классов функций, совместны в том смысле, что если два из них применимы, то они дают одно и то же значение.*

X_8. *Если $f(x)$ — измеримая функция, а $g(x)$ — интегрируемая функция, и если $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ для всех x, то функция $f(x)$ интегрируема. В частности, интегрируемы все ограниченные измеримые функции.*

X_9. *Если α и β — вещественные числа, а $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые функции, то интегрируема и функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$. При этом*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

X_{10}. *Если $f(x)$ — неотрицательная интегрируемая функция, то*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

Как следствие этого свойства, получаем, что для любой интегрируемой функции $f(x)$ имеет место неравенство

$$\int_a^b |f(x)| \geqslant 0,$$

а также, что если $f \geqslant g$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Вообще, имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant |b-a| \limsup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

X_{11}. *Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность интегрируемых функций, и если почти для всех значений x на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство*

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x),$$

причем существует конечный предел

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

то почти всюду существует предел

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

и

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что если $\sum\limits_1^\infty g_n(x)$ — ряд, составленный из положительных интегрируемых функций, то его можно интегрировать почленно. Это значит, что если

$$\sum_1^\infty \int_a^b g_n(x)\,dx$$

сходится, то $\sum\limits_{1}^{\infty} g_n(x)$ сходится почти всюду, причем

$$\int\limits_a^b \left[\sum_1^{\infty} g_n(x)\right] dx = \sum_1^{\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\, dx. \tag{2.02}$$

Это утверждение известно как критерий *монотонной сходимости* для почленного интегрирования рядов.

X_{12}. *Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность интегрируемых функций, причем существует интегрируемая функция $F(x)$, независимая от n, такая, что*

$$|f_n(x)| \leqslant F(x)$$

для всех x на отрезке $[a, b]$, и если почти всюду

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

то функция $f(x)$ интегрируема и

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx.$$

В частности, функция $F(x)$ может быть постоянной. Применяя эту теорему к рядам, мы получаем, что если $\sum\limits_1^{\infty} g_n(x)$ — ряд, составленный из интегрируемых функций, частичные суммы которого равномерно ограничены либо равномерно мажорируются интегрируемой функцией $F(x)$, и если этот ряд почти всюду сходится, то его можно почленно интегрировать. Это значит, что выражения, стоящие в обеих частях равенства (2.02), существуют и имеют одно и то же значение. Это утверждение известно как *критерий мажорируемой сходимости* для почленного интегрирования рядов, или, в случае, когда функция $F(x)$ постоянна, как *критерий ограниченной сходимости.*

X_{13}. *Если функция $f(x)$ интегрируема, то $\int\limits_a^x f(\xi)\, d\xi$ является непрерывной функцией верхнего предела* *интегрирования* x; *при этом почти всюду*

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi)\, d\xi.$$

Это утверждение является основной теоремой теории интеграла Лебега. Его можно сформулировать иначе, а именно:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(\xi)\, d\xi$$

почти всюду равен $f(x)$.

X_{14}. *Если множество* S *на конечном отрезке* $[a, b]$ *измеримо и* ε — *любая положительная величина, то существует множество* S_1, *состоящее из конечного числа отрезков, такое, что мера множества* $S + S_1 - SS_1$ [1]) *меньше чем* ε.

X_{15}. *Если* $f(x)$ — *интегрируемая функция и* ε — *любое положительное число, то существует измеримая функция* $f_1(x)$, *принимающая лишь конечное число значений, и такая, что*

$$\int_a^b |f(x) - f_1(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{2.03}$$

Это вытекает из того, что можно выбрать настолько большое A, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_a^b |f(x) - f_A(x)|\, dx < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{2.04}$$

После этого можно разделить отрезок $[-A, A]$ на столь малые отрезки $[A_n, A_{n+1}]$, что для любого A_n

$$(b - a)(A_{n+1} - A_n) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

---

[1]) Через $A + B$ мы обозначаем сумму двух многочленов, а через AB — их пересечение.

Если положить

$$f_1(x)=\begin{cases} -A & (f(x)<-A);\\ A_n & (A_n\leqslant f(x)<A_{n+1});\\ A & (A\leqslant f(x));\end{cases}$$

то, в силу X_{10}, получаем

$$\int_a^b |f_1(x)-f_A(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Из полученного неравенства и из (2.04) вытекает (2.03).

X_{16}. *Если функция $f(x)$ интегрируема и ε — любое положительное число, то существует такое разбиение отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков и такая функция $f_2(x)$, принимающая постоянное значение на каждом из отрезков разбиения, что*

$$\int_a^b |f(x)-f_2(x)|\,dx<\varepsilon. \tag{2.05}$$

В силу X_{15} мы можем считать, что функция $f(x)$ принимает лишь конечное число различных значений. Такую функцию можно представить в виде

$$\sum_1^N a_k g_k(x),$$

где каждая из функций $g_k(x)$ равна единице на некотором измеримом множестве и нулю вне этого множества. Из утверждения X_{10} вытекает, что интеграл модуля суммы не больше, чем сумма интегралов от модулей слагаемых. Поэтому если мы докажем теорему X_{16} для случая, когда функция $f(x)$ принимает значение 1 на измеримом множестве и равна нулю вне этого множества, то теорема будет установлена для всех $g_k(x)$, следовательно, для всех функций вида $\sum\limits_1^N a_k g_k(x)$; а тогда она будет установлена и для всех интегрируемых функций. Но в случае, когда $f(x)$ принимает значение 1 на измеримом множестве и равна нулю вне этого множества, теорема X_{16} сводится к ранее сформулированной теореме X_{14}.

X_{17}. *Если функция $f(x)$ интегрируема, то*

$$\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} |f(x+\eta)-f(x)|\,dx = 0. \tag{2.06}$$

В самом деле, по утверждению X_{16} на отрезке $[a, b]$ существует ступенчатая функция [1]) $f_2(x)$, для которой выполняется неравенство (2.05). Функция $f_2(x)$ имеет ограниченное полное изменение, скажем, V. Тогда если η достаточно мало, то

$$\int_a^{b-\eta} |f_2(x+\eta)-f_2(x)|\,dx = V\eta.$$

Следовательно,

$$\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} |f_2(x+\eta)-f_2(x)|\,dx = 0. \tag{2.07}$$

Из неравенства (2.05) вытекает

$$\int_a^{b-\eta} |f(x+\eta)-f(x)|\,dx - \int_a^{b-\eta} |f_2(x+\eta)-f_2(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{b-\eta} |f(x+\eta)-f(x)-f_2(x+\eta)+f_2(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{b-\eta} |f(x+\eta)-f_2(x+\eta)|\,dx + \int_a^{b-\eta} |f(x)-f_2(x)|\,dx =$$

$$= \int_{a+\eta}^{b} |f(x)-f_2(x)|\,dx + \int_a^{b-\eta} |f(x)-f_2(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_a^{b} |f(x)-f_2(x)|\,dx = 2\varepsilon.$$

---

[1]) Функция, заданная на отрезке $[a, b]$, называется ступенчатой, если отрезок $[a, b]$ является суммой конечного числа отрезков, на каждом из которых эта функция постоянна.

Таким образом, в силу (2.07) имеем

$$\overline{\lim_{n\to 0}} \int_a^{b-\eta} |f(x+\eta)-f(x)|\,dx \leqslant 2\varepsilon,$$

и так как ε произвольно мало, то равенство (2.06) доказано.

Определим теперь интеграл Лебега функции, заданной на всей оси. Функция $f(x)$ называется интегрируемой или принадлежащей классу L_1 на оси $(-\infty, \infty)$, если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2.08}$$

В этом случае полагают

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.09}$$

Таким образом, интеграл Лебега всегда абсолютно сходится. Независимо от того, существует или нет предел (2.08), равенство (2.09) определяет интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *в смысле Коши*[1]).

Очевидно, что если функция $f(x)$ обращается в нуль вне отрезка $[a, b]$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Утверждения X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13} остаются справедливыми и для функций, заданных на всей оси $(-\infty, \infty)$.

---

[1]) Обычно интеграл в смысле Коши определяют равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

(*Прим. перев.*)

Нетрудно показать, что при этом остаются в силе критерии монотонной и мажорируемой сходимости для почленного интегрирования рядов, а критерий ограниченной сходимости теряет силу, так как положительная постоянная не является суммируемой функцией на оси $(-\infty, \infty)$. Определение и свойства интеграла, у которого лишь один предел бесконечен, не требуют отдельного рассмотрения.

Если $f(x)$ принадлежит классу L_1, то

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=0,\quad \lim_{b\to\infty}\int_{b}^{\infty} f(x)\,dx=0.$$

Принимая во внимание эти равенства, легко показать, что X_{15} остается верным на оси $(-\infty, \infty)$ и, как следствие, остается верным X_{16}. Теперь X_{17} приобретает следующий вид:

X_{18}. *Если функция $f(x)$ интегрируема на* $(-\infty, \infty)$, *то*

$$\lim_{\eta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\eta)-f(x)|\,dx=0.$$

Если $f(x)$ — комплексная функция вещественного аргумента, то ее можно представить в виде $f_1(x)+if_2(x)$, где f_1 и f_2 — вещественные функции. В этом случае интеграл определяется равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx+i\int_a^b f_2(x)\,dx$$

и аналогичным равенством в случае, когда один или оба предела интегрирования бесконечны.

Важная теорема Римана — Лебега формулируется следующим образом:

X_{19}. *Если функция $f(x)$ интегрируема на оси* $(-\infty, \infty)$, *то*

$$\lim_{u\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iux}\,dx=0.$$

Для доказательства этой теоремы заметим, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iux}\,dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[e^{iux} - e^{iu\left(x-\frac{\pi}{u}\right)}\right]dx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{u}\right)\right]e^{iux}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{u}\right) - f(x)\right|dx.$$

Поэтому требуемый результат вытекает из X_{18}.

При доказательстве предложения X_{19} мы неявно использовали специальный случай следующего утверждения:

X_{20}. *Если функция $f(x)$ является интегралом от своей производной, причем эта производная неотрицательна, и если функция $f(x)$ интегрируема, то*

$$\int_a^b F(f(x))\,f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} F(x)\,dx.$$

Эта теорема верна как для конечных, так и для бесконечных пределов интегрирования. Из нее вытекает, в частности, что $F(f(x))\,f'(x)$ — суммируемая функция. Это связано также с утверждением:

X_{21}. *Непрерывная или измеримая по Борелю функция от измеримой функции измерима.* В сочетании с X_6 это утверждение гарантирует, что любая функция, получаемая естественным образом путем операций над измеримыми функциями, измерима. В соответствии с этим мы будем считать все функции, которые нам встретятся в этой книге, измеримыми, за исключением особо оговоренных случаев. Мы будем доказывать измеримость функций, встречающихся в процессе рассуждений, лишь тогда, когда это доказательство наталкивается на реальные трудности.

Другое утверждение, которое сейчас будет установлено, гласит следующее:

X_{22}. *Для непрерывных функций интеграл Лебега совпадает с классическим интегралом Римана. Это остается верным и для кусочно-непрерывных функций.*

Это утверждение позволяет использовать табличные формулы интегрирования. Заметим, что интеграл Римана эквивалентен интегралу Лебега для значительно более широкого класса функций, в частности, для всех функций, интегралы которых абсолютно сходятся. Однако интеграл Римана довольно редко применяется в теории рядов и интегралов, за исключением случая, когда рассматриваемые функции непрерывны или кусочно-непрерывны.

К интегралам Лебега применимо интегрирование по частям:

X_{23}. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются интегралами от своих производных, то*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Рассмотрим теперь интегрирование функций от двух или большего числа переменных. Если $S(x)$ — точечное множество, лежащее, например, на плоскости, то определение и свойства двойного интеграла $\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy$ не отличаются mutatis mutandis от свойств обычного интеграла. Суммируемость определяется аналогичным образом. За исключением утверждения X_{13} и последующих утверждений, формулировка которых требует небольших изменений, все остальные утверждения сохраняют силу независимо от числа измерений.

На самом деле связь между интегрированием функций одного и нескольких переменных является более тесной, чем простая аналогия, и доходит до изоморфизма, а практически до тождества. Рассмотрим следующее отображение квадрата $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$ на отрезок $(0 \leqslant z \leqslant 1)$, если x имеет двоичную запись:

$$0,\ x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots, \tag{2.10}$$

а y — двоичную запись

$$0,\ y_1y_2y_3 \ldots y_n \ldots, \tag{2.11}$$

то z имеет двоичную запись

$$0,\ x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ny_n \ldots, \tag{2.12}$$

получаемую поочередным выписыванием цифр x и y в их естественном порядке. Это отображение взаимно однозначно за исключением случая, когда x или y или z являются двоично-рациональными числами, отличными от 0 или 1. Если одно и только одно из чисел x и y двоично-рационально, то соответствующей точке квадрата соответствуют две различные точки отрезка $0 \leqslant z \leqslant 1$, каждой из которых соответствует только одна точка (x, y) квадрата. Если оба числа x и y двоично-рациональны и отличны от 1 и 0, то (x, y) может быть образом четырех точек отрезка $[0, 1]$, каждой из которых может соответствовать еще одна точка квадрата. Эти исключительные значения x и y образуют множество меры 0 по x и y, а соответствующие им точки квадрата образуют множество плоской меры 0. Точки отрезка $0 \leqslant z \leqslant 1$, соответствующие исключительным значениям x или же исключительным значениям y, также образуют множество нулевой меры. Таким образом, с точностью до множества меры 0 на квадрате и соответствующего множества меры 0 на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ отображение, даваемое равенством (2.12), взаимно однозначно.

Пусть S — любое множество точек квадрата, и Σ — образ этого множества на оси z. Можно показать, что плоская мера множества S равна линейной мере множества Σ. При этом, разумеется, совершенно несущественно, будем ли мы считать каждую точку столько раз, какова ее кратность, или же нет, поскольку точки, кратность которых отлична от 1, образуют множество меры 0, равно как и их образы, и не влияют ни на меру множества S, ни на меру множества Σ.

Отображение, даваемое равенствами (2.10)—(2.12) можно записать в виде

$$x = x(z), \qquad y = y(z). \tag{2.13}$$

Функции $x(z)$ и $y(z)$ не являются, однако, непрерывными, что легко установить, например, рассматривая значение $z = 0{,}1 = 0{,}111\ \ldots$ Здесь $x(z)$ имеет единственное значение $0{,}1 = 0{,}0111\ \ldots$, но $y(z)$ принимает два значения, 0 и $0{,}1111 = 1$. При этом, если z немного меньше чем 0,1, и не является двоично-рациональным числом, то $y(z)$ близко к 1. Если же z немного больше чем 0,1, и не является двоично-рациональным числом, то $y(z)$ близко к 0.

С другой стороны, $x(z)$ и $y(z)$ непрерывны для любого значения z, которое не является двоично-рациональным.

Существуют, однако, пары непрерывных функций $x(z)$ и $y(z)$, порождающие такое же отображение мер, как и функции (2.13). Примеры таких функций были даны Пеано[1]), построившим примеры кривых, проходящих через каждую точку квадрата. Точно так же существуют три непрерывные функции $x(u)$, $y(u)$ и $z(u)$, отображающие сегмент $0 \leqslant u \leqslant 1$ с сохранением меры на куб $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Аналогичное утверждение справедливо для куба любой конечной или даже бесконечной размерности[2]). При таком отображении двойной интеграл или интеграл от функции большего числа переменных является точным «переводом» интеграла от функции одного переменного. В случае двойного интеграла, например, мы имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,\ y)\,dx\,dx = \int_0^1 f(x(z),\ y(z))\,dz$$

в том смысле, что если один из этих интегралов существует как интеграл Лебега, то существует и другой и имеет то же самое значение. Таким образом, *любое свойство интеграла Лебега, в формулировку которого явно не входит число измерений, может быть обобщено на интегралы от функций любого числа переменных*. Это верно также и для бесконечной области интегрирования.

Существуют, однако, свойства, касающиеся интегралов от функций многих переменных, которые являются существенно новыми и касаются соотношений между интегралами функций от различного числа переменных. По-видимому, при доказательстве таких свойств удобно рассматривать все интегралы как интегралы во всем пространстве, заменяя ограничение области интегрирования предположением, что рассматриваемые функции равны нулю вне некоторой конечной области. Напомним, что все рассматриваемые нами интегралы по определению абсолютно сходятся.

---

[1]) Относительно кривых Пеано см., например, Н. Н. Лузин Теория функций действительного переменного, М., 1948.

[2]) Винер [1] (ссылки такого вида относятся к библиографии).

Частной теоремой такого типа является.

X_{24}. *Если функция $f(x, y)$ суммируема на плоскости x, y, то она суммируема по x для почти всех y, и если P означает всю плоскость (x, y), то имеет место равенство*

$$\int\int_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

X_{25}. *Если функция $f(x, y)$ измерима и если $|f(x, y)| \leqslant \leqslant F(x, y)$ для всех значений аргумента, причем хоть один из трех интегралов*

$$\int\int_P F(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dy$$

существует, то существуют и все нижеследующие интегралы, причем они имеют равные значения:

$$\int\int_P f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy.$$

Введем теперь класс функций L_2, состоящий из всех измеримых функций, для которых

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty,$$

Если пределы интегрирования конечны, то класс L_2 содержит класс L_1, поскольку $|f(x)|^2 > |f(x)|$. Но если хотя бы один из пределов интегрирования бесконечен, это утверждение перестает быть справедливым, так как интеграл по неограниченной области может быть большим не только в силу того, что интегрируемая функция принимает большие значения в конечной области, но и из-за медленного убывания этой функции на бесконечности. На промежутке $(-\infty, \infty)$ нет отношений включения между L_1 и L_2. Неверно также, что утверждение «f^2 суммируема», и влечет за собой: «$f \in L_2$», так как из этого утверждения не следует даже измеримость f. Одной из самых важных теорем анализа является неравенство Буняковского — Шварца. Оно утверждает:

X_{26}. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат L_2, то функция $f(x)\,g(x)$ принадлежит L_1 и*

$$\left[\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx. \quad (2.14)$$

Чтобы доказать это утверждение, заметим сначала, что $f(x)\,g(x)$ — измеримая функция, причем

$$2|f(x)\,g(x)| \leqslant |f(x)|^2 + |g(x)|^2.$$

Таким образом, функция $f(x)\,g(x)$ мажорируется по модулю суммируемой функцией, следовательно, суммируема. Отсюда следует, что

$$\{|f(x)| + \lambda|g(x)|\}^2$$

является суммируемой функцией, а потому

$$0 \leqslant \int_a^b \{|f(x)| + \lambda|g(x)|\}^2\,dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2\,dx + 2\lambda \int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx + \lambda^2 \int_b^a |g(x)|^2\,dx.$$

Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, является, таким образом, положительно определенным квадратным многочленом от λ. Следовательно, дискриминант этого многочлена не может быть положительным. Этот дискриминант имеет вид

$$4\left\{\left[\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx\right]^2 - \int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx\right\},$$

откуда вытекает (2.14). При этом область интегрирования может и не быть конечной.

Точно такие же рассуждения показывают, что если ряды $\sum\limits_1^\infty |a_n^2|$ и $\sum\limits_1^\infty |b_n^2|$ сходятся, то сходится и ряд $\sum\limits_1^\infty |a_nb_n|$, причем

$$\left\{\sum_1^\infty |a_nb_n|\right\}^2 \leqslant \sum_1^\infty |a_n^2| \sum_1^\infty |b_n^2|.$$

Неравенство Шварца является частным случаем более общего неравенства Гельдера[1]). Хотя мы не будем применять в этой книге неравенство Гельдера, для полноты приведем его доказательство.

X'_{26}. *Если* $p > 1$ *и* $1/p + 1/q = 1$ и если интегралы $\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx$ и $\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx$ конечны, то существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}. \quad (2.15)$$

Не теряя общности, можно считать, что функции f и g положительны, причем

$$\int_a^b [f(x)]^p\,dx = 1, \qquad \int_a^b [g(x)]^q\,dx = 1. \qquad (2.16)$$

---

[1]) Данное здесь доказательство Харди (Journal London Math. Soc. 4 (67—68), 5 (80)) приписывает Литтльвуду и Ф. Риссу (Bollettino dell' Unione Mat. Italiana, 7 (1928), 77—79).

Нам надо доказать, таким образом, что

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant 1.$$

Для этого мы используем следующую лемму. Если α и β неотрицательны и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta. \tag{2.17}$$

Не теряя общности, можно считать, что $\alpha \geqslant \beta$, и так как случай $\alpha = \beta$ тривиален, то $\alpha > \beta$. Так как равенство (2.17) однородно, можно положить $\beta = 1$. Тогда утверждение (2.17) примет вид

$$\alpha^\lambda \leqslant 1 + \lambda(\alpha - 1). \tag{2.18}$$

Но по теореме Тейлора с остаточным членом имеем

$$\alpha^\lambda = [1 + (\alpha - 1)]^\lambda = 1 + \lambda(\alpha - 1) + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}\theta(\alpha - 1)^2,$$

где θ лежит между 0 и 1. Так как $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то неравенство (2.18) доказано.

Из неравенства (2.17) вытекает

$$f(x)\, g(x) \leqslant \frac{1}{p}[f(x)]^p + \frac{1}{q}[g(x)]^q,$$

следовательно, в силу (2.16)

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тем самым утверждение X'_{26} доказано. Заметим, что область (a, b) может быть как конечной, так и бесконечной.

При $p = q = 2$ неравенство Гельдера сводится к неравенству Буняковского — Шварца.

Другое общее неравенство дано Минковским[1]). Оно гласит:

X_{27}. *Пусть $p > 1$ и пусть функции $|f(x)|^p$ и $|g(x)|^p$ принадлежат L. Тогда функция $|f(x) + g(x)|^p$ принад-*

[1]) Харди (см. выше) указывает, что Ф. Рисс свел неравенство Минковского к неравенству Гельдера.

лежит L *и*

$$\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b |f(x)|^p\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\right\}^{1/p}. \quad (2.19)$$

Знак равенства имеет место лишь в том случае, если найдется такое μ, *что* $f(x)=\mu g(x)$ *почти всюду.*

Мы используем для доказательства этого утверждения следующее неравенство: если $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $\alpha>0$, $p>1$, то

$$\{1+\lambda(\alpha-1)\}^p \leqslant 1+\lambda(\alpha^p-1). \quad (2.20)$$

Для доказательства неравенства (2.20) заметим, что при $\lambda=0$ или $\lambda=1$ обе части неравенства (2.20) совпадают. Рассмотрим первую и вторую производные выражения

$$\Phi(\lambda)=1+\lambda(\alpha^p-1)-\{1+\lambda(\alpha-1)\}^p.$$

Они имеют вид

$$\Phi'(\lambda)=\alpha^p-1-p\{1+\lambda(\alpha-1)\}^{p-1}(\alpha-1)$$

и

$$\Phi''(\lambda)=-p(p-1)(\alpha-1)^2\{1+\lambda(\alpha-1)\}^{p-2}.$$

Мы видим, что $\Phi''(\lambda)$ отрицательна на отрезке $[0, 1]$. Таким образом, функция $\Phi(\lambda)$ выпукла на $[0, 1]$ и обращается в нуль в точках 0 и 1, а потому на этом отрезке $\Phi(\lambda)\geqslant 0$. Но это эквивалентно неравенству (2.20).

Заметим, что, за исключением случая $\alpha=1$, функция $\Phi''(\lambda)$ строго положительна и знак равенства в (2.20) возможен лишь, если $\lambda=0$ или $\lambda=1$.

Из (2.20) вытекает, что если $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $\varphi\geqslant 0$, $\psi\geqslant 0$, $p>1$, то

$$\{\lambda\varphi+(1-\lambda)\psi\}^p \leqslant \lambda\varphi^p+(1-\lambda)\psi^p,$$

причем равенство может иметь место либо когда $\lambda=0$ или 1, либо если $\varphi=\psi$. Таким образом, если на отрезке $[a, b]$ имеем $\varphi(x)\geqslant 0$, $\psi(x)\geqslant 0$, и если $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $p>1$,

$$\int_a^b [\varphi(x)]^p\,dx = \int_a^b [\psi(x)]^p\,dx = 1,$$

то

$$\int_a^b \{\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\psi(x)\}^p\,dx \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$\left\{\int_a^b [\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\psi(x)]^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \lambda+(1-\lambda)=$$

$$=\left\{\int_a^b [\lambda\varphi(x)]^p\,dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_a^b [(1-\lambda)\psi(x)]^p\,dx\right\}^{1/p}. \quad (2.21)$$

Положим теперь

$$\varphi(x)=|f(x)|\Big/\left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p};$$

$$\psi(x)=|g(x)|\Big/\left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p};$$

$$\lambda=\left\{1+\left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\Big/\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}^{-1}.$$

Тогда

$$\lambda\varphi(x)=|f(x)|\Big/\left\{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}+\left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\};$$

$$(1-\lambda)\psi(x)=|g(x)|\Big/\left\{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}.$$

Подставим эти значения в неравенство (2.21) и примем во внимание, что это неравенство однородно относительно f и g. Мы получим тогда неравенство (2.19). Заметим, что знак равенства в соотношении (2.19) возможен либо если $f(x)\equiv 0$ или $g(x)\equiv 0$, либо если $\varphi(x)\equiv\psi(x)$, причем тождества понимаются в смысле тождества почти всюду. В каждом из этих случаев существует такое μ, что $f(x)=\mu(x)g$ почти всюду.

Мы будем использовать в этой книге лишь частный случай неравенства Минковского, когда $p=2$, а именно

X'_{27}. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат L_2, то и функция $f(x)+g(x)$ принадлежит этому классу, причем*

$$\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

Это утверждение можно доказать несколько проще, чем общее утверждение X_{27}. Заметим сначала, что обе части неравенства (2.22) можно возвести в квадрат, не нарушив этого неравенства. Приведя подобные члены в обеих частях (2.22), мы получим соотношение

$$2\,\mathrm{Re}\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx \leqslant 2\left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.23)$$

где черточка над символом означает, как и всюду в этой книге, переход к комплексно сопряженному значению, а через $\mathrm{Re}\,x$ обозначена вещественная часть x. Но мы знаем, что

$$\mathrm{Re}\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx \leqslant \left|\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx,$$

а потому неравенство (2.23) является непосредственным следствием неравенства (2.14). Здесь область $[a, b]$ может быть бесконечной. Справедливо аналогичное соотношение для рядов, а именно, если $\sum_1^\infty |a_n^2|$ и $\sum_1^\infty |b_n^2|$ — сходящиеся ряды, то сходится и ряд $\sum\limits_1^\infty |(a_n+b_n)^2|$, причем

$$\left\{\sum_1^\infty |(a_n+b_n)^2|\right\} \leqslant \left\{\sum_1^\infty |a_n^2|\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_1^\infty |b_n^2|\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если заменить здесь бесконечные ряды конечными суммами и считать a и b вещественными, то это соотношение означает, что сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Утверждение X_{16} означает, что любую функцию из L_1 можно аппроксимировать ступенчатой функцией. Соответствующее предложение справедливо и для функций из L_2. Докажем сначала, что

X_{28}. *Если $f(x)$ принадлежит L_1 на $(-\infty, \infty)$, то*

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x) - f(x)|^2\,dx = 0.$$

Это утверждение вытекает из признака мажорированной сходимости, поскольку $|f_A(x) - f(x)|^2$ стремится к нулю для любого x вне некоторого множества меры 0 и не превосходит $|f(x)|^2$.

Положим

$$_Af(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| < A); \\ 0 & (|x| \geqslant A). \end{cases}$$

Тогда очевидно, что

X_{29}. *Если $f(x)$ принадлежит L_2, то*

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af(x) - f(x)|^2\,dx = 0.$$

Из утверждения X_{28} и неравенства Минковского следует, что

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_A(x) - f(x)|^2\,dx = 0.$$

Но, в силу предложения X_{16}, существует такая ступенчатая функция $f_2(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_A(x)-f_2(x)|\,dx<\varepsilon,$$

причем эту функцию можно выбрать так, чтобы $|f_2(x)|\leqslant A$. Мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_A(x)-f_2(x)|^2\,dx\leqslant 2A\int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_A(x)-f_2(x)|\,dx\leqslant 2A\varepsilon.$$

Поэтому если дано $\eta>0$, то можно сначала найти настолько большое A, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_A(x)-f(x)|^2\,dx<\frac{1}{4}\eta,$$

а потом найти такую ступенчатую функцию $f_2(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_A(x)-f_2(x)|^2\,dx<\frac{1}{4}\eta.$$

Тогда по неравенству Минковского имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-f_2(x)|^2\,dx<\eta. \tag{2.24}$$

Мы доказали, таким образом, следующую теорему:

X_{30}. *Если* $f(x)$ *принадлежит классу* L_2 и $\eta>0$, *то найдется ступенчатая функция* $f_2(x)$, *для которой выполняется неравенство* (2.24).

Мы можем теперь доказать следующее утверждение, аналогичное утверждению, доказанному в X_{17}:

X_{31}. *Если* $f(x)$ *принадлежит классу* L_2, *то*

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\eta)-f(x)|^2\,dx=0.$$

Нам окажется в дальнейшем весьма полезным понятие интеграла Стилтьеса. Нам не понадобится полная теория интеграла Лебега — Стилтьеса и мы ограничимся изложением более элементарной теории интеграла Стилтьеса, аналогичной интегралу Римана. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b), а функция $g(x)$ имеет ограниченное полное изменение, то мы определяем $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ как

$$\lim \sum f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; $x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}$, и предел берется при условии, что максимум значения $x_{k+1} - x_k$ стремится к нулю при последовательных подразделениях (a, b). Это определение приводит к интегралу, независимому от выбора значений x_k и ξ_k, и частному способу перехода к пределу. Приведем без доказательства следующие важные теоремы, которыми будем часто пользоваться:

X_{32}. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ имеет ограниченное полное изменение на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant FV,$$

где F — максимум модуля функции $f(x)$, а V — вариация функции $g(x)$.

X_{33}. *Если функция $g(x)$ имеет ограниченное полное изменение и является интегралом от своей производной, а функция $f(x)$ непрерывна, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}\,dx.$$

X_{34}. *Если $\varphi(x)$ — любая монотонная непрерывная функция, а f и g обладают свойствами, указанными в определении интеграла Стилтьеса, то*

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(\varphi(x))\,dg(\varphi(x)).$$

X_{35}. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ — ступенчатая функция, то*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_1^N f(x_n)[g(x_n+0) - g(x_n-0)],$$

где x_n — это точки разрыва $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $g(a-0) = g(a)$, $g(b+0) = g(b)$.

X_{36}. *Если функция $f(x)$ является интегралом от своей производной, а $g(x)$ имеет ограниченное полное изменение, то*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) f'(x)\,dx.$$

X_{37}. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ а функция $\gamma(x)$ имеет ограниченное полное изменение на $[c, d]$, и если $\alpha(x, s)$ непрерывна по x для всех значений s на отрезке $[a, b]$ и имеет ограниченное полное изменение по s для всех значений x на отрезке $[c, d]$, то интегралы*

$$\int_c^d \left[\int_a^b \varphi(s)\,d_s\alpha(x, s)\right] d\gamma(x), \qquad \int_a^b \varphi(s)\,d_s \int_c^d \alpha(x, s)\,d\gamma(x)$$

существуют и равны[1]).

Определим теперь интеграл Стилтьеса на бесконечном промежутке равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dg(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Примем во внимание, что если $F(x, y)$ является возрастающей функцией от x для любого y и возрастающей функцией от y для любого x, то

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} F(x, y) = \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} F(x, y) = \lim_{x,\, y\to\infty} F(x, y)$$

---

[1]) Относительно X_{37} и ее предшественников см. Брей [1] и Даниэль [1].

в том смысле, что когда один из этих пределов существует, то оба других существуют и принимают то же самое значение. Мы придем тогда к следующему выводу из теоремы X_{37}:

X_{38}. *Пусть предположения теоремы* X_{37} *справедливы для любого конечного отрезка* $[c, d]$. *Пусть* $\alpha(x, s)$ *монотонно возрастает по* s *для любого* x, *а функция* φ *неотрицательна, и пусть* $\gamma(x)$ *монотонно возрастает. Тогда, если один из интегралов*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_a^b \varphi(s)\,d_s\alpha(x, s)\right]d\gamma(x), \qquad \int_a^b \varphi(s)\,d_s\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x, s)\,d\gamma(x)$$

существует и конечен, то и другой интеграл существует и имеет то же самое значение.

Эта теорема аналогична следующей:

X_{39}. *Пусть* $\{f_n(x)\}$ — *монотонно возрастающая последовательность непрерывных функций, а* $g(x)$ — *монотонная функция. Пусть* $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dg(x)$ *существует для любого* n, *и пусть*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dg(x) = I < \infty.$$

Пусть, далее, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *существует для всех* x *и является непрерывной функцией. Тогда* [1])

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dg(x).$$

§ 3. Теорема Рисса — Фишера

Мы переходим теперь к наиболее важной из предварительных теорем в этой книге: к знаменитой теореме Рисса — Фишера [2]). В своей первоначальной форме она гласила, что

[1]) См. Даниэль [1], стр. 289, 7 (6).

[2]) См. Рисс [1], Фишер [1].

если сходится ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$, то существует такая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принадлежащая L_2, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx} \right|^2 dx = 0.$$

Однако на самом деле связь этой теоремы с разложением по специальной системе функций и даже вообще с каким-либо разложением не является существенной. Суть дела лучше всего выясняется, если сформулировать эту теорему так, как это было сделано Г. Вейлем [1]):

X_{40}. *Пусть дана последовательность $\{f_n(x)\}$ функций из L_2 на отрезке $[a, b]$ (или $[-\infty, \infty]$) такая, что*

$$\lim_{m, n \to \infty} \int_{a}^{b} |f_m(x) - f_n(x)|^2 \, dx = 0. \tag{3.01}$$

Тогда существует такая функция $f(x)$, принадлежащая L_2, что [2])

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0. \tag{3.02}$$

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, сделаем несколько замечаний. Заметим сначала, что $\left(\int\limits_{a}^{b} |f(x)|^2 \right)^{1/2}$ является «длиной» функции $f(x)$, аналогичной длине

$$\boldsymbol{xx} = \left(\sum_{1}^{3} x_{(k)}^2 \right)^{1/2}$$

вектора $\boldsymbol{x}$ с компонентами $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $x_{(3)}$. Аналогом соотношения (3.01) в случае последовательности вещественных векторов является

$$\lim_{m, n \to \infty} (\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n)(\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n) = 0.$$

---

[1]) Вейль [1], Планшерель [1], стр. 292.

[2]) Обратный переход от (3.02) к (3.01) непосредственно вытекает из неравенства Минковского.

Из этого соотношения следует, что каждая компонента $x_m - x_n$ стремится к нулю. По критерию сходимости Коши это возможно лишь в случае, когда каждая компонента векторов x_m стремится к некоторому пределу. Пусть эти пределы равны соответственно, $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $x_{(3)}$. Эти числа являются компонентами вектора x и легко видеть, что

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - x)(x_n - x) = 0.$$

Это замечание делает весьма правдоподобной справедливость теоремы Рисса — Фишера, несмотря на то, что функция имеет слишком много компонент (а именно, ее значения в каждой точке), чтобы можно было надеяться доказать теорему Рисса — Фишера непосредственным применением критерия сходимости Коши.

Формула (3.02) выражает ситуацию, которая часто будет встречаться в этой книге для функций, заданных в конечной или бесконечной области. Мы будем говорить в этом случае, что *последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *сходится в среднем к* $f(x)$, или что *функция* $f(x)$ *является пределом в среднем для функции* $f_n(x)$ *на* $[a, b]$. Мы будем записывать это в виде

$$f(x) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x). \tag{3.03}$$

Аналогичная запись будет применяться в случае, когда стремящийся к бесконечности параметр n заменяется переменной, стремящейся (непрерывно или дискретно) к некоторому пределу.

Следует иметь в виду, что из (3.03) не следует сходимость последовательности $f_n(x)$, хотя бы в одной точке, а также, что это соотношение не вытекает из сходимости последовательности $f_n(x)$ в каждой точке. Для доказательства первого утверждения положим $a = 0$, $b = 1$ и $k = [\log_2 n]$. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < (n - 2^k)/2^k), \\ 1 & ((n - 2^k)/2^k \leqslant x \leqslant (n - 2^k)/2^k + 1), \\ 0 & ((n - 2^k)/2^k + 1 < x). \end{cases}$$

Очевидно,

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx = 2^{-k} \leqslant 2/n.$$

Таким образом $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x) = 0$. С другой стороны, какое бы число x на отрезке $[0, 1]$ мы не взяли, найдется по крайней мере одно f_n, где $2^k < n < 2^{k+1}$, для которого $f_n(x) = 1$ и по крайней мере одно $k > 1$, такое, что $f_n(x) = 0$. Таким образом, нет ни одного значения x, для которого $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ существует.

С другой стороны, пусть $f_n(x) = n^{\frac{3}{2}} x e^{-n^2x^2}$ и пусть $a = -1$, $b = 1$. Легко показать, что $f_n(x) \to 0$ для любого x, в то время, как $\int\limits_{-1}^{1} |f_n(x)|^2\,dx$ стремится к $\pi^{1/2}/2$ и потому $f_n(x)$ не сходится в среднем к нулю. Таким образом, сходимость почти всюду не влечет за собой сходимости в среднем. Ниже мы увидим, однако, что если последовательность функций $f_n(x)$ сходится почти всюду на отрезке $[a, b]$ к $f(x)$, и в то же время сходится в среднем к $g(x)$, то почти всюду имеем $f(x) = g(x)$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Рисса — Фишера. Очевидно, что если

$$\int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^2\,dx < \varepsilon^3,$$

то найдется множество S, мера которого не превосходит ε, вне которого выполняется неравенство

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_\nu$ сходится и n_k — настолько большое число, что при $m > n_k$

$$\int_a^b \left|f_{n_k}(x) - f_m(x)\right|^2 dx < \varepsilon_k^3,$$

(существование такого n_k вытекает из (3.01)). Мы можем выбрать числа n_k так, чтобы $n_{k+1} > n_k$. Пусть S_k — множество точек на отрезке $[a, b]$, для которых $\left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| \geqslant \varepsilon_k$. Обозначим через T_k объединение множеств $S_k + S_{k+1} + \ldots + S_{k+n} + \ldots$ Тогда вне множества T_k, мера которого не превосходит $\sum\limits_k^\infty \varepsilon_\nu$, имеет место неравенство

$$\left| f_{n_l}(x) - f_{n_m}(x) \right| < \sum_k^\infty \varepsilon_\nu \tag{3.04}$$

для всех l и m, больших чем k. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \sum_k^\infty \varepsilon_\nu = 0,$$

то по признаку Коши последовательность $f_{n_k}(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на дополнении к каждому из множеств T_k. Отсюда вытекает, что эта последовательность сходится на дополнении к множеству T — пересечению всех множеств T_k. Но, в силу X_3, это множество T имеет меру нуль.

Функция $f_A(x)$ является пределом последовательности ограниченных в совокупности суммируемых функций $\left(f_{n_k}\right)_A(x)$ и, следовательно, суммируема. Кроме того, в силу критерия ограниченной сходимости

$$\int_a^b \left| f_A(x) - \left(f_{n_k}\right)_A(x) \right|^2 dx =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_a^b \left| \left(f_{n_j}\right)_A(x) - \left(f_{n_k}\right)_A(x) \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2A \sum_k^\infty \varepsilon_\nu + (b-a)\left[\sum_k^\infty \varepsilon_\nu\right]^2,$$

поскольку (3.04) выполняется вне T_k и

$$\left| \left(f_{n_j}\right)_A(x) - \left(f_{n_k}\right)_A(x) \right| \leqslant 2A.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b \left| f_A(x) - \left(f_{n_k}\right)_A(x) \right|^2 dx = 0, \tag{3.05}$$

и в силу (2.15) и неравенства Минковского из (3.01) вытекает

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_A(x) - (f_n)_A(x)|^2 dx = 0. \tag{3.06}$$

В самом деле,

$$\lim_{m,\, k \to \infty} \int_a^b \left| f_m(x) - f_{n_k}(x) \right|^2 dx = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{m,\, k \to \infty} \int_a^b \left| (f_m)_A(x) - \left(f_{n_k}\right)_A(x) \right|^2 dx = 0.$$

В силу (3.05) и неравенства Минковского

$$\lim_{n \to \infty} \left[\int_a^b |f_A(x)|^2 dx - \int_a^b |(f_n)_A(x)|^2 dx \right] = 0. \tag{3.07}$$

Следовательно,

$$\int_a^b |f_A(x)|^2 dx \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_a^b |(f_n)_A(x)|^2 dx \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_a^b |f_n(x)|^2 dx.$$

Однако, как в (3.07),

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \left[\int_a^b |f_m(x)|^2 dx - \int_a^b |f_n(x)|^2 dx \right] = 0 \tag{3.071}$$

и по критерию Коши предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = L \tag{3.072}$$

существует и конечен. Таким образом,

$$\int_a^b |f_A(x)|^2 \, dx \leqslant L \tag{3.08}$$

и так как $|f_A(x)|^2$ является возрастающей функцией от A, то предел

$$\lim_{A \to \infty} \int_a^b |f_A(x)|^2 \, dx = I \leqslant L$$

существует. Таким образом, так как $|f_A(x)|^2$ монотонно сходится к $|f(x)|^2$, то в силу X_{11}

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx = I \leqslant L$$

и, следовательно, $f(x)$ принадлежит L_2. Таким образом, интеграл

$$\int_a^b |f(x) - f_A(x)|^2 \, dx$$

существует и, снова применяя X_{11}, получаем

$$\lim_{A \to \infty} \int_a^b |f(x) - f_A(x)|^2 \, dx = 0.$$

Таким образом, в силу (3.06) можно выбрать настолько большое A, что по неравенству Минковского

$$\int_a^b |f(x) - (f_n)_A(x)|^2 \, dx < \varepsilon. \tag{3.09}$$

С другой стороны, пусть m настолько велико, что при $n > m$

$$\int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^2 \, dx < \varepsilon.$$

В силу (2.015) мы получим для любого A

$$\int_a^b |(f_m)_A(x)-(f_n)_A(x)|^2\,dx<\varepsilon.$$

Пусть A настолько велико, что

$$\int_a^b |f_m(x)-(f_m)_A(x)|^2\,dx<\varepsilon.$$

В силу неравенства Минковского, если $n>m$,

$$\int_a^b |f_n(x)-(f_n)_A(x)|^2\,dx<9\varepsilon$$

и в силу (3.09) мы можем выбрать A настолько большим, а потом n настолько большим, что

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\,dx<16\varepsilon. \tag{3.10}$$

В это неравенство A уже не входит. Из соотношения (3.10) непосредственно следует (3.02) и тем самым теорема Рисса — Фишера установлена для случая, когда отрезок $[a, b]$ конечен.

В случае промежутка $(-\infty, \infty)$ проведенные рассуждения устанавливают существование функции $f(x)$, принадлежащей L_2 на любом конечном отрезке, и сходимость в среднем последовательности $f_n(x)$ к $f(x)$ на каждом таком отрезке. Однако рассуждения (3.071), (3.072) сохраняют силу и на всей оси. Таким образом, для любого конечного отрезка

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)|^2\,dx,$$

откуда вытекает, что функция $f(x)$ принадлежит L_2 на $(-\infty, \infty)$. Мы имеем, далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|{}_A\varphi(x)-{}_A\psi(x)|^2\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)-\psi(x)|^2\,dx,$$

где φ и ψ принадлежат L_2 на $(-\infty, \infty)$. Поэтому если заменить в рассуждениях (3.08)—(3.10) f_A и $(f_m)_A$ на ${}_Af$ и ${}_A(f_m)$, то мы получим теорему Рисса — Фишера и в случае бесконечного промежутка. Очевидно, что если φ принадлежит L_2, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x) - \varphi_A(x)|^2\,dx \to 0,$$

так как этот интеграл есть не что иное, как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx - \int_{-A}^{A} |\varphi(x)|^2\,dx,$$

и потому стремится к нулю при возрастании A в силу определения несобственного интеграла. Остальная часть рассуждения остается неизменной.

Мы доказали, таким образом, теорему Рисса — Фишера. Одновременно мы показали, что если $f(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x)$, то $f(x)$ почти всюду является пределом подпоследовательности из $\{f_n(x)\}$. Отсюда вытекает

X_{41}. *Если*

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x) = f(x)$$

и почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x),$$

то $f(x) = g(x)$ *почти всюду.*

Утверждение X_{41} остается справедливым для предела в среднем, когда параметр изменяется непрерывно или имеет другой предел, чем бесконечность. Непосредственным следствием неравенства Буняковского — Шварца является

X_{41a}. *Если на отрезке* $[a; b]$

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x) = f(x)$$

и $g(x)$ *принадлежит на этом отрезке* $[a, b]$ *к классу* L_2, *то*

$$\int_a^b f_n(x)\,g(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

В самом деле,

$$\left[\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx \int_a^b [g(x)]^2\, dx$$

и, следовательно, стремится к нулю.

Другая теорема, вытекающая из доказательства X_{40}, такова:

X_{42}. *Если последовательность $f_n(x)$ состоит из монотонно возрастающих функций и*

$$\text{l.i.m.}\, f_n(x) = f(x),$$

то $f(x)$ почти всюду совпадает с монотонно возрастающей функцией. В самом деле, найдется множество меры нуль, вне которого $f(x)$ является пределом последовательности монотонных функций, и, следовательно, монотонно возрастает. Отсюда следует, что полученные таким образом значения $f(x)$ имеют точную верхнюю грань для значений аргументов, лежащих слева от x, и точную нижнюю грань для значений аргументов, лежащих справа от x. Мы будем обозначать их соответственно $\varphi(x-0)$ и $\varphi(x+0)$ и полагать, что $\varphi(x)$ в любой точке равно $\frac{1}{2}(\varphi(x-0)+ +\varphi(x+0))$; тогда $\varphi(x)$ будет монотонно возрастать и отличаться от $f(x)$ лишь на множестве меры нуль.

§ 4. Разложения по ортогональным системам функций

Множество комплексных функций $\{\varphi_n(x)\}$ вещественного переменного x называется *ортогональным* на отрезке $[a, b]$ (или $(-\infty, \infty)$), если все функции этого множества принадлежат L_2 и

$$\int \varphi_m(x)\overline{\varphi_n(x)}\, dx = 0, \qquad (m \neq n), \tag{4.01}$$

причем интеграл берется по соответствующему отрезку. [В этом параграфе мы не будем указывать отрезок интегрирования, который все время будет одним и тем же, и будем так же писать для простоты такие интегралы как (4.01) в виде $\int \varphi_m \overline{\varphi}_n$.] Функция $\varphi_n(x)$ называется *нормированной*, если $\int |\varphi_n|^2 = 1$. Если все функции ортогонального множества нормированы, мы будем называть это множество ортонормированным. Очевидно, что если $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированное множество, то множество $\{\overline{\varphi_n(x)}\}$ тоже ортонормировано.

Мы показали ранее, что отрезок прямой линии можно отобразить на квадрат или куб или на гиперкуб любого конечного числа измерений таким образом, чтобы мера на прямой отображалась в меру соответствующего числа измерений. Отсюда вытекает, что множество S конечной меры любого числа измерений может быть отображено на отрезок прямой линии с сохранением меры. Если $f(P)$ — функция, определенная на всех точках P множества S, и x — точка сегмента $(0, 1)$, соответствующая точке P при указанном выше отображении, то функции $f(P)$ соответствует такая функция $F(x)$, что $F(x) = f(P)$. Пусть теперь $\{\varphi_n(P)\}$ — нормальное множество функций на S в том смысле, что

$$\int\limits_S\int \varphi_m(P)\overline{\varphi_n(P)}\,dV = \begin{cases} 0 & [m \neq n], \\ 1 & [m = n], \end{cases}$$

где dV — элемент объема в пространстве, размерность которого совпадает с размерностью S. Если $\Phi_n(x)$ соответствует $\varphi_n(P)$, так же как $F(x)$ соответствует $f(P)$, то

$$\int\limits_0^1 \Phi_m(x)\overline{\Phi_n(x)}\,dx = \begin{cases} 0 & [m \neq n], \\ 1 & [m = n]. \end{cases}$$

Таким образом, вся теория ортонормированных множеств функций любого числа переменных является просто переводом теории ортонормированных множеств функций одного переменного, а потому все результаты этого параграфа могут быть непосредственно, без всяких ограничений, применены к случаю любого числа переменных. Легко распространить эту теорию на случай, когда множество S неограничено, но любая его ограниченная порция измерима. Теория ортонормированных множеств функций в таких областях эквивалентна теории ортонормированных множеств функций на оси

$(-\infty, \infty)$, которая не отличается ничем существенным от теории ортонормированных множеств функций на конечном отрезке.

Вернемся к одномерному случаю. Пусть функция $f(x)$ принадлежит L_2, и пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют конечное ортонормированное множество. Тогда имеет место следующее утверждение:

X_{43}. *Квадратичный многочлен*

$$\int \left| f(x) - \sum_{1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx$$

достигает наименьшего значения при

$$a_k = \int f \overline{\varphi}_k. \tag{4.02}$$

В самом деле, заметим, что

$$\int \left| f - \sum a_k \varphi_k \right|^2 = \int \left(f - \sum a_k \varphi_k \right) \left(\overline{f} - \sum \overline{a}_k \overline{\varphi}_k \right) =$$
$$= \int |f|^2 - \sum a_k \int \overline{f} \varphi_k - \sum \overline{a}_k \int f \overline{\varphi}_k + \sum a_k \overline{a}_k =$$
$$= \int |f|^2 - \sum \left| \int f \overline{\varphi}_k \right|^2 + \sum \left| a_k - \int f \overline{\varphi}_k \right|^2. \tag{4.03}$$

В последней строке лишь последний член зависит от a_k, причем этот член неотрицателен. Следовательно, минимум достигается, когда этот член равен нулю, откуда и вытекает утверждение (4.02).

Мы показали одновременно, что

X_{44}.

$$\int |f^2| \geqslant \sum_{1}^{n} \left| \int f \overline{\varphi}_k \right|^2. \tag{4.04}$$

В самом деле, выражение (4.01) положительно и, если имеет место (4.02), совпадает с

$$\int |f|^2 - \sum \left| \int f \overline{\varphi}_k \right|^2.$$

Пусть теперь $f(x)$ принадлежит L_2 и пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — счетное бесконечное ортонормированное множество функций.

Применяя X_{44} к любому конечному подмножеству этого множества, получаем

X_{45}.

$$\int |f|^2 \geqslant \sum_1^\infty \left| \int f\bar{\varphi}_k \right|^2.$$

Это соотношение известно как неравенство Бесселя.

Пусть теперь $\{\varphi_n(x)\}$ — счетное ортонормированное множество функций, и пусть ряд $\sum\limits_1^\infty |a_n|^2$ сходится. Положим

$$f_n(x) = \sum_1^n a_k \varphi_k(x).$$

Если $m > n$, то

$$\int |f_m - f_n|^2 = \sum_{n+1}^m |a_k|^2.$$

Для доказательства достаточно подставить выражения f_n и f_m и выполнить интегрирование, учитывая, что $\int \varphi_j \varphi_k$ равен 1 или 0 в зависимости от того, совпадают или различны j и k. Следовательно,

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \int |f_m - f_n|^2 = 0$$

и в силу X_{40} получаем:

X_{46}. *Существует функция* $f(x)$, *принадлежащая* L_2, *такая, что*

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f|^2 = 0.$$

Пользуясь введенными выше обозначениями, это равенство можно переписать в виде

$$f(x) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_n(x).$$

Мы будем пользоваться также эквивалентным обозначением

$$f(x) \sim \sum_1^\infty a_k \varphi_k(x).$$

Как было указано выше, из этого обозначения еще не вытекает сходимость ряда в обычном смысле.

Мы получили, таким образом,

X_{47}. *Если функция $f(x)$ принадлежит L_2 и $\{\varphi_n\}$ — счетное ортонормированное множество, то существует функция*

$$g(x) \sim f(x) - \sum_1^\infty \varphi_n(x) \int f(x) \overline{\varphi_n(x)}\, dx.$$

Эта функция принадлежит L_2 и такова, что

$$\int g(x) \overline{\varphi_n(x)}\, dx = 0 \tag{4.05}$$

для любого n.

Непосредственным следствием отсюда является

X_{48}. *Если $\{\varphi_n\}$ — счетное ортонормированное множество, то следующие два утверждения эквивалентны:* (1.) *Если $f(x)$ принадлежит L_2, то*

$$f(x) \sim \sum_1^\infty \varphi_n(x) \int f(x) \overline{\varphi_n(x)}\, dx \tag{4.055}$$

и (2) *не существует функции $g(x)$, не равной почти всюду нулю, для которой имеет место* (4.05).

В случае, если любое из этих двух утверждений X_{48} справедливо, множество $\{\varphi_n\}$ называется *замкнутым* или *полным*. Из X_{43} вытекает

X_{49}. *Счетное ортонормированное множество $\{\varphi_n\}$ полно тогда и только тогда, когда для любой функции $f(x)$, принадлежащей L_2, и любого $\varepsilon > 0$ найдутся целое число N и многочлен $\sum_1^N a_k \varphi_k(x)$ такие, что*

$$\int \left| f(x) - \sum_1^N a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx < \varepsilon. \tag{4.06}$$

Для доказательства достаточно лишь вспомнить, что в силу X_{43}

$$\int \left| f(x) - \sum_1^N \varphi_k(x) \int f \bar{\varphi}_k \right|^2 dx < \varepsilon.$$

Несколько менее ограничительным критерием полноты является

X_{50}. *Счетное ортонормированное множество* $\{\varphi_n\}$ *полно тогда и только тогда, когда для любой ступенчатой функции* $f(x)$, *принадлежащей* L_2, *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся число* N *и многочлен* $\sum a_k \varphi_k(x)$, *для которых выполняется* (4.06). Это вытекает из X_{49}, X_{30} и неравенства Минковского.

Из определения замкнутости X_{48} и (4.03) вытекает теорема Гурвица — Парсеваля:

X_{51}. *Если* $\{\varphi_n\}$ — *полное счетное ортонормированное множество и функция* f *принадлежит* L_2, *то*

$$\int |f(x)|^2 dx = \sum_1^\infty \left| \int f\bar{\varphi}_n \right|^2.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат L_2, то

$$\text{(A)} \quad \int |f(x)+g(x)|^2 dx = \sum_1^\infty \left| \int f\bar{\varphi}_n + \int g\bar{\varphi}_n \right|^2;$$

$$\text{(B)} \quad \int |f(x)-g(x)|^2 dx = \sum_1^\infty \left| \int f\bar{\varphi}_n - \int g\bar{\varphi}_n \right|^2;$$

$$\text{(C)} \quad \int |f(x)+ig(x)|^2 dx = \sum_1^\infty \left| \int f\bar{\varphi}_n + i\int g\bar{\varphi}_n \right|^2;$$

$$\text{(D)} \quad \int |f(x)-ig(x)|^2 dx = \sum_1^\infty \left| \int f\bar{\varphi}_n - i\int g\bar{\varphi}_n \right|^2.$$

Образуя линейную комбинацию

$$[(A)-(B)+i(C)-i(D)]/4,$$

находим, что

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_1^\infty \int f\bar{\varphi}_n \int \bar{g}\varphi_n. \qquad (4.07)$$

Теорема Парсеваля утверждает:

X_{52}. *Если* $\{\varphi_n\}$ — *счетное полное ортонормированное множество и* f *и* g *принадлежат* L_2, *то имеет место* (4.07).

Существует любопытный процесс, называемый *ортогонализацией*, с помощью которого можно получить ортонормированное множество функций из любого конечного или счетного множества функций пространства L_2. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ — такое множество функций, определенных в одной и той же конечной или бесконечной области. Рассмотрим функцию $\psi_1(x)$. Если она эквивалентна нулю, отбросим ее; в противном случае положим

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x)\Big/\left(\int |\psi_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.08}$$

Если мы отбросили $\psi_1(x)$, то продолжаем процесс, пока не найдем функцию $\psi_n(x)$, не эквивалентную нулю, и заменим ψ_1 на ψ_n в (4.08). Получив функцию φ_1, будем искать такую первую функцию ψ_k, которая не эквивалентна никакой функции вида $a\varphi_1$. Пусть, например, этой функцией является $\psi_2(x)$; тогда положим

$$\varphi_2(x) = \left(\psi_2(x) - \varphi_1(x)\int \psi_2\bar{\varphi}_1\right)\Big/\left\{\int |\psi_2|^2 - \left|\int \psi_2\bar{\varphi}_1\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

После этого мы исключаем все функции, эквивалентные функциям вида $a\varphi_1 + b\varphi_2$, и пусть, скажем, ψ_3 — первая оставшаяся функция; в этом случае полагаем

$$\varphi_3(x) = \frac{\left(\psi_3(x) - \varphi_1(x)\int \psi_3\bar{\varphi}_1 - \varphi_2(x)\int \psi_3\bar{\varphi}_2\right)}{\int |\psi_3|^2 - \left|\int \psi_3\bar{\varphi}_1\right|^2 - \left|\int \psi_3\bar{\varphi}_2\right|^2}$$

и т. д. Непосредственным интегрированием проверяется, что множество $\{\varphi_n\}$ ортонормировано и что любая функция, которая может быть аппроксимирована в среднем многочленами из функций $\{\psi_n\}$, может быть аппроксимирована многочленами из функций $\{\varphi_n\}$, и обратно. В самом деле, каждый многочлен, составленный из одной системы функций, эквивалентен многочлену, составленному из другой системы функций. Из утверждений X_{47}, X_{48} и X_{49} вытекает

X_{53}. *Если* $\{\psi_n\}$ — *любое счетное множество функций в* L_2, *то следующие два утверждения эквивалентны:*

1) *Не существует функции* $g(x)$ *в* L_2 *такой, что*

$$\int g(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx = 0$$

для любого n. 2) *Если* $f(x)$ *принадлежит* L_2 *и* $\varepsilon > 0$, *то существуют целое число* N *и многочлен*

$$\sum_1^N a_k \psi_k(x)$$

такие, что

$$\int \left| f(x) - \sum_1^N a_k \psi_k(x) \right|^2 dx < \varepsilon.$$

Если одно из этих утверждений справедливо, мы будем называть систему функций $\{\psi_k\}$ ***полной или замкнутой.***

Многие интересные ортонормированные системы функций могут быть получены с помощью применения процесса ортогонализации к последовательности элементарных функций. Такими системами являются, например:

1) $\psi_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Область интегрирования — отрезок $[-1, 1]$. Тогда функции $\varphi_n(x)$ совпадают (с точностью до постоянного множителя) с многочленами Лежандра $P_n(x)$.

2) $\psi_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Область интегрирования — ось $(-\infty, \infty)$. Функции $\varphi_n(x)$ совпадают (с точностью до постоянного множителя) с функциями Эрмита $H_n(x)e^{-x^2/2}$, где функции $H_n(x)$ — многочлены Эрмита.

3) $\psi_n(x) = x^n e^{-x}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Область интегрирования — полуось $(0, \infty)$. В этом случае $\varphi_n(x)$ совпадают (с точностью до постоянного множителя) с функциями Лагерра $L_n(x)e^{-x}$, где функции $L_n(x)$ — многочлены Лагерра.

Для читателя будет полезным упражнением вычислить несколько первых функций каждой из этих ортонормированных систем.

Особенно важной ортонормированной системой является система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \qquad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

где областью интегрирования является отрезок $[-\pi, \pi]$. То обстоятельство, что индекс n меняется от $-\infty$ до ∞ не осложняет дела. Формальным эквивалентом для (4.055) будет теперь соотношение

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy, \tag{4.09}$$

которое означает, что

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \left(f(x) - \sum_{-n}^{n} \frac{1}{2\pi} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) = 0.$$

Мы хотим доказать, что (4.09) справедливо для любой функции из L_2. Ряд в (4.09) называется рядом Фурье функции $f(x)$. Мы хотим, таким образом, доказать, что ряд Фурье любой функции из L_2 не только сходится в среднем, но сходится в среднем к этой самой функции.

С этой целью рассмотрим ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{r^{|n|}}{2\pi} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy. \tag{4.10}$$

Для любого r, такого, что $|r| < 1$, этот ряд сходится абсолютно и равномерно по x. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если $m > n > 0$, то в силу неравенства Буняковского — Шварца

$$\left\{ \left[\sum_{n+1}^{m} + \sum_{-m}^{-1-n} \right] \left| \frac{r^{|k|}}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right| \right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n+1}^{m} \{ [re^{i(x-y)}]^k + [re^{-i(x-y)}]^k \} dy \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^2 dy \right\} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n+1}^{m} [re^{i(x-y)}]^k + [re^{-i(x-y)}]^k \right|^2 dy \right\}.$$

Ряды в последней строке имеют вещественную сумму и поэтому можно пренебречь знаком абсолютного значения, возвести в квадрат и почленно проинтегрировать. Мы получим при этом

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|^2\,dy\right\}\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{n+1}^{m}r^{2k}\right\}=\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|^2\,dy\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{r^{2n+2}-r^{2m+2}}{1-r^2}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{m,\,n\to\infty}}\left\{\sum_{-m}^{m}\left|\frac{r^{|k|}}{2\pi}e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,e^{-iky}\,dy\right|-\right.$$

$$\left.-\sum_{-n}^{n}\left|\frac{r^{|k|}}{2\pi}e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,e^{-iky}dy\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|^2\,dy\lim_{m,\,n\to\infty}\frac{r^{2n+2}-r^{2m+2}}{1-r^2}\right\}^{1/2}=0,$$

чем абсолютная и равномерная сходимость (4.10) доказана.

Формально (4.10) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in(x-y)}dy.$$

Ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in(x-y)}$$

сходится равномерно и абсолютно при $|r|<1$, так как он является в этом случае геометрической прогрессией и сумма его равна

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-y)+r^2}.$$

Мы имеем

$$\left|\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-y)+r^2}\right|\leqslant\frac{1+r}{1-r}.$$

Следовательно, по критерию ограниченной сходимости получаем:

X$_{54}$. *Если функция $f(x)$ принадлежит L_1 (и, следовательно, если она принадлежит L_2),* то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{r^{|n|}}{2\pi} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-y)+r^2} dy. \qquad (4.11)$$

Докажем теперь следующую лемму:

X$_{55}$. *Пусть ядро $K(x, y, r)$ неотрицательно. Пусть*

$$\lim_{r \to 1-0} \int_a^b K(x, y, r)\, dy = 1 \qquad (4.12)$$

равномерно по y при $a < x < b$, и пусть для любого $\varepsilon > 0$ в области $a < x < b$, $a < y < b$, $|y-x| > \varepsilon$ равномерно выполняется соотношение

$$\lim_{r \to 1} K(x, y, r) = 0. \qquad (4.13)$$

Пусть функция $f(x)$ ограничена на (a, b). Тогда в точках промежутка $a < x < b$, в которых функция $f(x)$ непрерывна, имеем

$$\lim_{r \to 1} \int_a^b K(x, y, r) f(y)\, dy = f(x), \qquad (4.14)$$

причем в каждой такой точке x выражение, стоящее под знаком предела, ограничено по r. Это утверждение остается справедливым, если заменить (a, b) промежутком $(-\infty, \infty)$.

В самом деле, пусть $a+\varepsilon < x < b-\varepsilon$. В силу (4.12) выражение

$$\left| f(x) - \int_a^b K(x, y, r) f(y)\, dy \right| \qquad (4.15)$$

асимптотически равно

$$\left|\int_a^b K(x, y, r)(f(x)-f(y))\,dy\right|. \qquad (4.16)$$

Но это выражение не превосходит

$$2\limsup|f(x)|\left[\int_a^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^b\right]K(x, y, r)\,dy+$$

$$+\lim_{|y-x|<\varepsilon}\sup|f(x)-f(y)|\int_a^b K(x, y, r)\,dy. \qquad (4.17)$$

В силу (4.12) в любой точке непрерывности функции $f(x)$ можно выбрать $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы второй член в (4.17) был меньше η. Мы можем также в силу (4.13) выбрать r столь близким к 1, чтобы первый член в (4.17) был меньше η. Отсюда следует, что если r достаточно близко к 1, то (4.15) не превосходит 2η, и, следовательно, это выражение стремится к нулю, когда $r\to 1$. Ограниченность выражения, стоящего под знаком предела в (4.15) вытекает из того, что (4.16) не превосходит

$$2\limsup|f(x)|\int_a^b K(x, y, r)\,dy.$$

Рассуждения, проведенные нами при доказательстве X_{55}, приводят к следующему утверждению:

X_{56}. *В предположениях* X_{55} (4.14) *выполняется равномерно на любом отрезке непрерывности функции* $f(x)$, *концы которого лежат внутри отрезка* $[a, b]$.

Для этого достаточно заметить, что функция равномерно непрерывна на любом замкнутом промежутке непрерывности.

Нам понадобится в дальнейшем также следующее утверждение:

X_{57}. *Если положить*

$$a=-\pi,\quad b=\pi,\quad K(x, y, r)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-y)+r^2},$$

то для ядра K выполняются условия утверждения X_{55}. Здесь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-y)+r^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(x-y)}\right)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy=1.$$

Таким образом, (4.12) выполнено. Далее, если $|x-y|>\varepsilon$, то

$$K(x,\ y,\ r)<\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varepsilon+r^2}<\frac{1-r^2}{2\pi\sin^2\varepsilon},$$

так как минимум функции $1-2r\cos\varepsilon+r^2$ достигается при $r=\cos\varepsilon$ и равен

$$1-2\cos^2\varepsilon+\cos^2\varepsilon=\sin^2\varepsilon.$$

Таким образом, установлена справедливость (4.13). Положительность ядра K очевидна и тем самым утверждение X_{57} доказано.

Пусть теперь $f(x)$—ступенчатая функция. Тогда в силу X_{57}, за исключением быть может конечного числа точек, выражение (4.14) ограниченно стремится к $f(x)$, когда $r\to 1$. Таким образом,

$$\left|f(x)-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{r^{|n|}}{2\pi}\,e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,e^{-iny}dy\right|^2$$

ограниченно стремится к нулю, и в силу X_{12}

$$f(x)=\underset{r\to 1-0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{r^{|n|}}{2\pi}\,e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,e^{-iny}dy.$$

Так как ряд в правой части этого равенства равномерно сходится при любом r, $|r|<1$, то он сходится в среднем. Поэтому в силу неравенства Минковского для любого $\varepsilon>0$ можно найти r столь близкое к 1 и настолько большое N, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{-N}^{N}\frac{r^{|n|}}{2\pi}e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,e^{-iny}dy\right|^2dx<\varepsilon.$$

Таким образом, в силу X_{50} мы доказали

X_{58}. *Множество функций* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ *полно.*

Интеграл (4.11) называется интегралом Пуассона, а теоремы X_{55}, X_{56}, X_{57} являются применением к этому интегралу метода Фейера изучения рядов Фурье. Первоначальный метод Фейера отличается от описанного выше лишь выбором функции $K(x, y, r)$.

Заметим, что с помощью X_{58} мы можем доказать

X_{59}. *Ортонормированное семейство функций не более чем счетно.* Выберем в качестве отрезка интегрирования $[-\pi, \pi]$. Пусть Σ—несчетное ортонормированное семейство функций на этом отрезке. Рассмотрим разложения функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ по функциям множества Σ. В силу X_{44} каждая из функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ ортогональна всем функциям множества Σ, за исключением не более чем счетного множества этих функций. В самом деле, в противном случае для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлось бы бесконечно много величин

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}\varphi_k(x)\,dx,$$

где φ_k принадлежит Σ, превосходящих по модулю ε. Но это противоречит (4.04). Так как объединение счетного множества счетных множеств счетно, то все функции множества Σ, за исключением быть может счетного множества, ортогональны к *каждой* функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, и в силу X_{58} эквивалентны нулю. Но, по определению, никакое ортонормированное семейство не может содержать функций, эквивалентных нулю.

Теперь легко установить для рядов Фурье теоремы Гурвица — Парсеваля и Парсеваля. Они гласят соответственно:

X_{60}. *Если* $f(x)$ *принадлежит* L_2, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right|^2$$

и

X_{61}. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *принадлежат* L_2, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(x) e^{-inx} dx$$

и, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx.$$

В частности, если функция g *имеет период* 2π, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(y-x) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \int_{-\pi}^{\pi} g(y-x) e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-iny} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{inx} dx \quad (4.18)$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) e^{imx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{i(m-n)x} dx. \quad (4.19)$$

Функция $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(y-x)\,dx$ называется *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$, а последовательность $\left\{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n b_{m-n}\right\}$ — сверткой последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Формальная интерпретация равенств (4.18) и (4.19) состоит в том, что коэффициенты Фурье свертки двух функций являются произведениями соответствующих коэффициентов Фурье свертываемых функций и что свертка коэффициентов Фурье двух функций дает коэффициенты Фурье их произведения.

ГЛАВА I
ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ

§ 5. Формальная теория преобразования Фурье

До сих пор мы изучали гармонический анализ для функций $f(x)$, имеющих период 2π, или для последовательностей коэффициентов a_n, определенных лишь для целых значений n. Интересно посмотреть, какой вид принимают формальные ряды Фурье, имеющие отличный от 2π период $2A$. Полная ортонормированная система тригонометрических функций приобретает в этом случае вид

$$\frac{1}{\sqrt{2A}} e^{\frac{n\pi i x}{A}},$$

а формальный ряд Фурье для $f(x)$ записывается так:

$$\frac{1}{2A} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{n\pi i x}{A}} \int_{-A}^{A} f(y) e^{-\frac{n\pi i y}{A}} dy.$$

Этот ряд можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} g\left(\frac{n\pi}{A}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-\frac{n\pi i x}{A}} dx; \\ f(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n\pi}{A}\right) e^{\frac{n\pi i x}{A}} \Delta\left(\frac{n\pi}{A}\right). \end{aligned}\right\} \quad (5.01)$$

Если $A \to \infty$, то пара формул (5.01) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} g(u) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx, \\ f(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux} du. \end{aligned}\right\} \quad (5.02)$$

В первой из формул (5.01) при возрастании A промежуток интегрирования становится все больше, а во второй формуле бесконечный промежуток разбивается на все более мелкие отрезки и сумма переходит в интеграл. В пределе получаются формулы (5.02), имеющие почти полную симметрию относительно разлагаемой функции и коэффициентов ее разложения.

Заметим, что если применить к функции $g(x)$ преобразование, переводящее $f(x)$ в $g(x)$, то получится $f(-x)$. Дальнейшее применение преобразования дает функцию $g(-x)$, а четвертое — $f(x)$. Таким образом, это преобразование имеет период 4.

Эта глава посвящена установлению условий, при которых формулы (5.02) справедливы в некотором обобщенном смысле. Прежде чем перейти к доказательству этих теорем и даже их формулировке, полезно рассмотреть некоторые конкретные пары преобразований, подобные (5.02), или, как мы будем называть их, *преобразований Фурье*. Пусть, например,

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } a<x<b, \\ 0 \text{ при } a>x, \text{ либо } x>b, \end{cases}$$

тогда

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-iux}\,dx=\frac{e^{-iub}-e^{-iua}}{-iu\sqrt{2\pi}}.$$

В этом случае мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,e^{iux}\,dx=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-b)}-e^{iu(x-a)}}{u}\,du=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos u(x-b)-\cos u(x-a)}{u}\,du-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u(x-b)-\sin u(x-a)}{u}\,du. \tag{5.03}$$

В первом интеграле подынтегральная функция нечетна и интеграл равен нулю. Во втором интеграле подынтегральная функция четна, а потому интеграл имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\,(x-a)}{u}\,du - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\,(x-b)}{u}\,du. \tag{5.04}$$

Но[1]) делая подстановку $v = Au$, убеждаемся, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin Au}{u}\,du = \operatorname{sgn} A \int_0^\infty \frac{\sin v}{v}\,dv.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty g(u)\,e^{iux}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du\,[\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)].$$

Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ геометрически изображается в виде суммы площадей сегментов, причем эти площади имеют попеременно разные знаки, убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю. Из теоремы Лейбница следует, что этот интеграл сходится.

Но

$$\sum_{-n}^{n} e^{iku} = e^{-inu}\sum_{0}^{2n} e^{iku} = e^{-inu}\,\frac{e^{(2n+1)\,iu}-1}{e^{iu}-1} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,du = \pi. \tag{5.05}$$

---

[1]) Как обычно,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \dfrac{x}{|x|}, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Так как функция — $\operatorname{cosec} u/2$ ограничена на отрезке $[0, \pi]$, то по теореме Римана — Лебега X_{19} имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \sin\frac{2n+1}{2}u\left(\frac{2}{u}-\operatorname{cosec}\frac{u}{2}\right)du=0. \qquad (5.06)$$

Из формул (5.05) и (5.06) получаем

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{u}\,du=\pi.$$

С помощью замены переменной $\frac{2n+1}{2}u=v$ это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin v}{v}\,dv=\frac{\pi}{2}$$

и, так как рассматриваемый нами интеграл (условно) сходится, то

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл (5.04) равен

$$\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)]=\left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{если}\ x<a; \\ {}^1/_2,\ \text{если}\ x=a; \\ 1,\ \text{если}\ a<x<b; \\ {}^1/_2,\ \text{если}\ x=b; \\ 0,\ \text{если}\ b<x. \end{array}\right\}. \qquad (5.07)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1-\frac{|x|}{a} & \text{при}\quad |x|<a, \\ 0 & \text{при}\quad |x|\geqslant a,\ a>0. \end{cases}$$

Мы имеем

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)e^{-iux}\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\cos ux\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{u}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)d(\sin ux)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{a}\frac{\sin ux}{ua}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos ua}{u^2a}.$$

Но, выделяя нечетное слагаемое в подынтегральной функции, получаем, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos ua}{u^2a}\,e^{iux}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ux\,(1-\cos ua)}{u^2a}\,du.$$

Проинтегрируем этот интеграл по частям. Мы имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ux-\frac{1}{2}\cos u\,(x+a)-\frac{1}{2}\cos u\,(x-a)}{u^2a}\,du=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ux-\frac{1}{2}\cos u\,(x+a)-\frac{1}{2}\cos u\,(x-a)}{a}\,d\left(\frac{1}{u}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{-x\sin ux+\frac{x+a}{2}\sin u\,(x+a)+\frac{x-a}{2}\sin u\,(x-a)}{au}\,du. \qquad (5.08)$$

Применяя формулы (5.07), приходим к равенству

$$f(x)=\frac{1}{a}\left(-x\operatorname{sgn}x+\frac{x+a}{2}\operatorname{sgn}(x+a)+\frac{x-a}{2}\operatorname{sgn}(x-a)\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\left(\left|\frac{x+a}{2}\right|+\left|\frac{x-a}{2}\right|-|x|\right)=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{если } a<|x|,\\ \dfrac{a-|x|}{a}, & \text{если } |x|<a,\\ 0 & \text{если } |x|=a.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь функцию $f(x)=e^{-x^2/2}$. Мы имеем

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-iux}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iu)^2/2}e^{-u^2/2}\,dx. \tag{5.09}$$

Но $e^{-x^2/2}$ является целой функцией, которая при $\mathrm{Re}(x)\to\pm\infty$ быстро стремится к нулю, равномерно в любой конечной области изменения $\mathrm{Im}(x)$. Поэтому можно деформировать путь интегрирования (5.09), в результате чего получаем

$$g(u)=e^{-u^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx. \tag{5.10}$$

Определенный интеграл в (5.10) вычисляется следующим образом:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right]^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr=1.$$

Так как рассматриваемый интеграл положителен, то получаем

$$g(u)=e^{-u^2/2}=f(u).$$

Применяя (5.02), мы получаем точно так же, что

$$e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,e^{iux}\,du.$$

Если мы проинтегрируем первую из формул (5.02) по частям, то получим

$$g(u)\sim\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} f(x)\,d\,\frac{e^{-iux}}{-iu}\sim$$
$$\sim\lim_{A\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{f(x)\,e^{-iux}}{-iu}\right]_{x=-A}^{x=A}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\frac{f'(x)\,e^{-iux}}{iu}\,dx\right\}.$$

Следовательно, если $f(x) \to 0$, когда $x \to \pm\infty$, и если $f(x)$ является интегралом от своей производной, то

$$iug(u) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iux} dx.$$

С другой стороны, если допустить, что во второй формуле (5.02) можно дифференцировать под знаком интеграла, то получим

$$f'(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} iug(u) e^{iux} du.$$

Таким образом, по крайней мере формально, линейный оператор умножения на iu, примененный к $g(u)$, соответствует линейному оператору дифференцирования, примененному к $f(x)$. Точно так же, линейный оператор дифференцирования, примененный к $g(u)$, соответствует оператору умножения на $-ix$, примененному к $f(x)$. Таким образом, применение линейного оператора $\left(\frac{d^2}{du^2} - u^2\right)$ к $g(u)$, соответствует применению линейного оператора $\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)$ к $f(x)$.

§ 6. Многочлены Эрмита и функции Эрмита

В конце предыдущего параграфа было показано, что дифференциальный оператор $\frac{d^2}{dx^2} - x^2$ является своим собственным преобразованием Фурье. Поэтому можно рассчитывать на то, что решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2w}{dx^2} - x^2 w = \lambda w \qquad (6.01)$$

должны играть важную роль в теории преобразования Фурье. Чтобы решить это уравнение, положим $w = e^{-x^2/2} W$. Тогда уравнение (6.01) принимает вид

$$W'' - 2xW' = (\lambda + 1) W. \qquad (6.02)$$

Рассмотрим решения этого уравнения, имеющие вид

$$W = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \qquad (a_n \neq 0). \tag{6.03}$$

Подставляя это выражение в (6.02), получаем равенство

$$\sum_{2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{0}^{n} (2k + \lambda + 1) a_k x^k,$$

из которого видно, что (6.03) является решением тогда и только тогда, когда

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k+\lambda-3} a_k, \qquad (k = 2, 3, \ldots, n);$$

$$a_{n-1}(2n+\lambda-1) = a_n(2n+\lambda+1) = 0.$$

Таким образом, так как $a_n \neq 0$, то

$$\lambda = -(2n+1); \qquad a_{n-1} = 0,$$

и все коэффициенты с индексами, четность которых отлична от четности n, равны нулю. Ни один из коэффициентов с неотрицательным индексом, имеющим ту же самую четность, что и n, и меньшем, чем n, не может обратиться в нуль, так как

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4} a_k.$$

Таким образом, функция W имеет вид

$$a_n \left(x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8} x^{n-4} - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{n-6} + \ldots \right).$$

Эта функция является решением уравнения

$$W'' - 2xW' + 2nW = 0, \tag{6.04}$$

причем не существует иных многочленов, удовлетворяющих этому уравнению. Таким образом, уравнение (6.01) имеет решения вида $P(x) e^{-x^2/2}$ (P — многочлен) тогда и только тогда, когда $\lambda = -(2n+1)$, где n — неотрицательное число; и это решение с точностью до постоянного множителя имеет вид $H_n(x)e^{-x^2/2}$, где

$$H_n(x) = 2^n\left(x^n - \frac{n(n-1)}{4}x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 8}x^{n-4} - \ldots\right). \tag{6.05}$$

Очевидно, что при $x \to \pm\infty$ функции $H_n(x)e^{-x^2/2}$, равно как и их производные, экспоненциально убывают. Покажем, что если положить

$$\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}, \tag{6.06}$$

то при $m \neq n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0. \tag{6.07}$$

В самом деле, в силу (6.01) имеем

$$\left.\begin{aligned} \varphi_m'' - x^2\varphi_m &= -(2m+1)\varphi_m;\\ \varphi_n'' - x^2\varphi_n &= -(2n+1)\varphi_n. \end{aligned}\right\} \tag{6.08}$$

Если умножить первое уравнение (6.08) на φ_n, а второе — на φ_m и вычесть, то получим

$$\varphi_m''\varphi_n - \varphi_n''\varphi_m = 2(n-m)\varphi_m\varphi_n.$$

Интегрируя по частям на промежутке $(-\infty, \infty)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2(n-m)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_m''(x)\varphi_n(x) - \varphi_n''(x)\varphi_m(x)\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2(n-m)}\left\{\left[\varphi_m'(x)\varphi_n(x) - \varphi_n'(x)\varphi_m(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \right.$$
$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_m'(x)\varphi_n'(x) - \varphi_n'(x)\varphi_m'(x)\right]dx\right\} = 0.$$

Таким образом, множество вещественных функций $\{\varphi_n(x)\}$ $[n=0, 1, 2, \ldots]$ ортогонально и, если положить

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) \Big/ \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n(x)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6.09}$$

то множество $\{\psi_n(x)\}$ ортонормировано.

Функции $\{\varphi_n(x)\}$, равно как и $\{\psi_n(x)\}$, являются, с точностью до постоянного множителя, своими собственными преобразованиями Фурье. Это вытекает из того, что

а) уравнение (6.01) инвариантно относительно преобразования Фурье;

б) уравнение (6.01) имеет для любого λ не более одного решения вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x)$ — многочлен;

в) такое решение имеет вид $\sum\limits_1^n a_k x^k e^{-x^2/2}$;

г) преобразованием Фурье $x^k e^{-x^2/2}$ является $\left(i\dfrac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2/2}$;

д) $\left(i\dfrac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2/2}$ имеет вид $P_n(x)e^{-x^2/2}$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n. (Это может быть проверено с помощью математической индукции.)

Таким образом, преобразование Фурье решения $\psi_n(x)$ уравнения (6.01) имеет вид $Q(x)e^{-x^2/2}$, где $Q(x)$ — многочлен, и так как оно удовлетворяет тому же самому уравнению (6.01), то оно имеет вид $c\psi_n(x)$. Постоянная c равна либо ± 1, либо $\pm i$. Это вытекает из того, что преобразование Фурье имеет период 4. Таким образом, $c''\psi_n(x) = \psi_n(x)$. Мы подтвердим этот результат в следующих параграфах, где функции $\psi_n(x)$ будут использованы для нового и более общего определения преобразования Фурье.

В этой связи заметим, что мы установили справедливость (5.02) для $e^{-x^2/2}$ и, следовательно, для произведения этой функции на многочлены любого порядка (это может быть проверено путем последовательного дифференцирования под знаком интеграла).

Очевидно, что функции $\psi_n(x)$, быть может, с точностью до знака, совпадают с функциями, которые получаются ортогонализацией последовательности $x^n e^{-x^2/2}$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Покажем, что многочлены $H_n(x)$ можно задавать и равенством

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}. \tag{6.10}$$

Эти многочлены удовлетворяют уравнению (6.04). В самом деле,

$$\frac{d}{dx}(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = 2x(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} + (-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n+1} e^{-x^2}}{dx^{n+1}},$$

или, подставляя $H_n(x)$ согласно равенству (6.10),

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \tag{6.11}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - H_n'(x); \\ H_{n+1}'(x) &= 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_n''(x); \\ H_{n+1}''(x) &= 4H_n'(x) + 2xH_n''(x) - H_n'''(x). \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &H_{n+1}'' - 2xH_{n+1}' + 2(n+1)H_n = \\ &\quad = -H_n''' + 4xH_n'' + (2 - 4x^2 - 2n)H_n' + 4nxH_n = \\ &= -\frac{d}{dx}\left(H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n\right) + 2x\left(H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n\right). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Кроме того, в силу (6.10)

$$H_0(x) = e^{x^2} e^{-x^2} = 1, \tag{6.14}$$

и потому

$$H_0''(x) - 2xH_0'(x) + 2 \cdot 0 H_0(x) = 0. \tag{6.15}$$

С помощью равенств (6.15) и (6.13) получаем в силу математической индукции

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \tag{6.16}$$

так что $H_n(x)$ может отличаться лишь постоянным множителем от значения, даваемого формулой (6.05). Покажем, что выражения (6.05) и (6.10) полностью совпадают. В самом деле, с помощью математической индукции из (6.12) и (6.14) вытекает, что старшим членом в $H_n(x)$ является $2^n x^n$, а это согласуется с (6.05).

Мы будем называть многочлены $H_n(x)$ *многочленами Эрмита*, а функции $\psi_n(x)$ — *функциями Эрмита*[1]).

§ 7. Производящая функция для функций Эрмита

Из (6.10) вытекает

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}. \tag{7.01}$$

Таким образом, на оси $(-\infty, \infty)$ имеем

$$e^{-x^2/2+2\lambda x-\lambda^2} = e^{x^2/2} e^{-(x-\lambda)^2} =$$

$$= \sum_0^\infty e^{x^2/2} \frac{\lambda^n}{n!} (-1)^n \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = \sum_0^\infty \frac{\lambda^n \varphi_n(x)}{n!}. \tag{7.02}$$

Но интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \right) d\left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) d\left(e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \right) =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} 2x e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \right) dx -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \left(\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} e^{-x^2} \right) dx. \tag{7.03}$$

В силу формул (6.07), (6.10) и (7.01) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \left(\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} e^{-x^2} \right) dx = 0. \tag{7.04}$$

---

[1]) Ш. Эрмит, «Sur un nouveau développement en série des fonctions», C. R., 58, 93—100 и 266—273; Ш. Эрмит, Собрание сочинений, 2, 293—312, Paris, 1908. См. также «Sur quelques développements, en série de fonctions de plusieurs variables», C. R., 60, 370—377, 432—440, 461—466, 512—518; Р. Курант и Д. Гильберт, Methoden der mathematischen Physik, 1, 76—77, Берлин, 1924.

Далее, в силу (6.11)

$$H_n''(x) = 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_{n+1}'(x).$$

Комбинируя это равенство с (6.16), находим

$$H_{n+1}'(x) = (2n+2)\,H_n(x). \tag{7.05}$$

Подставляя $n+1$ вместо n в (6.11), имеем

$$H_{n+1}'(x) = 2xH_{n+1}(x) - H_{n+2}(x).$$

Комбинируя это равенство с (7.05), находим

$$2xH_{n+1}(x) = H_{n+2}(x) + 2(n+1)\,H_n(x),$$

или, в силу (6.10) и (7.01),

$$2x\varphi_{n+1}(x) = \varphi_{n+2}(x) + 2(n+1)\,\varphi_n(x).$$

Если подставить сюда выражение (7.01) и принять во внимание (7.04), то мы получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2xe^{x^2}\left(\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2}\right)\left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\,e^{-x^2}\right)dx = \\ = -2(n+1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2}\right)^2 dx.$$

Если подставить это выражение в (7.03) и учесть соотношение (7.04), то получим рекуррентную формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\,e^{-x^2}\right)^2 dx = 2(n+1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2}\right)^2 dx,$$

или, в силу (7.01),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi_{n+1}(x)]^2\,dx = 2(n+1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n(x)]^2\,dx.$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi_0(x)]^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

то по математической индукции имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n(x)]^2\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

В силу (6.09)

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x)/[2^n n! \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}$$

и по (7.02)

$$e^{-x^2/2+2\lambda x-\lambda^2} = \sum_0^\infty \lambda^n \left[\frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!}\right]^{\frac{1}{2}} \psi_n(x).$$

Но ряд

$$\sum_0^\infty \lambda^{2n} \frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!} < \infty$$

сходится по признаку Даламбера, поэтому в силу теоремы Рисса — Фишера существует предел

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_0^N \lambda^n \left[\frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!}\right]^{\frac{1}{2}} \psi_n(x).$$

Поскольку предел в среднем ряда может отличаться от его суммы лишь на множестве меры нуль, то

$$e^{-x^2/2+2\lambda x-\lambda^2} \sim \sum_0^\infty \lambda^n \left[\frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!}\right]^{\frac{1}{2}} \psi_n(x).$$

Если положить формально

$$K(x, y, t) = \sum_0^\infty t^n \psi_n(x) \psi_n(y), \tag{7.06}$$

то мы должны иметь

$$e^{-y^2/2+2\lambda ty-\lambda^2 t^2} \sim \sum_0^\infty \lambda^n t^n \left[\frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!}\right]^{\frac{1}{2}} \psi_n(y) \sim$$

$$\sim \sum_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t^n \psi_n(y) [\psi_n(x)]^2 dx \lambda^n \left[\frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty K(x, y, t) \sum_0^\infty \lambda^n \left[\frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!}\right]^{\frac{1}{2}} \psi_n(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty K(x, y, t) e^{-x^2/2+2\lambda x-\lambda^2} dx,$$

то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, t) \exp\left\{\frac{y^2-x^2}{2}+2\lambda(x-yt)-\lambda^2(1-t^2)\right\} dx = 1. \tag{7.07}$$

Чтобы решить уравнение (7.07), естественно попытаться искать функцию $K(x, y, t)$ в виде $D\exp(Ax^2+Bxy+Cy^2)$, где A, B, C и D зависят от t. Подберем эти функции так, чтобы выражение

$$-\left(A-\frac{1}{2}\right)x^2-Bxy-\left(C+\frac{1}{2}\right)y^2-2\lambda(x-yt)+\lambda^2(1-t^2)$$

было точным квадратом. Тогда, очевидно, оно примет вид

$$\left(\frac{x-yt}{\sqrt{1-t^2}}-\lambda\sqrt{1-t^2}\right)^2,$$

так что

$$A=\frac{1}{2}-\frac{1}{1-t^2}=-\frac{1+t^2}{2(1-t^2)};$$

$$B=\frac{2t}{1-t^2};$$

$$C=-\frac{1}{2}-\frac{t^2}{1-t^2}=-\frac{1+t^2}{2(1-t^2)}$$

и

$$\exp(Ax^2+Bxy+Cy^2)=\exp\left[\frac{4xyt-(x^2+y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right].$$

Что же касается D, мы имеем

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} D\exp\left\{-\left(\frac{x-yt}{\sqrt{1-t^2}}-\lambda\sqrt{1-t^2}\right)^2\right\}dx=$$

$$=D\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{1-t^2}}dx=D\sqrt{\pi(1-t^2)},$$

так что

$$D=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}$$

и

$$K(x, y, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left[\frac{4xyt-(x^2+y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right].$$

Нам осталось проверить, что эта функция действительно совпадает с функцией $K(x, y, t)$ из (7.06). Для этого заметим, что простой подсчет устанавливает справедливость равенств

$$\frac{\partial K}{\partial x}=\frac{2yt-x(1+t^2)}{1-t^2}K(x, y, t);$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}=\left\{\left[\frac{2yt-x(1+t^2)}{1-t^2}\right]^2-\frac{1+t^2}{1-t^2}\right\}K(x, y, t);$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}-x^2K=$$

$$=\left\{\frac{4y^2t^2-4xyt(1+t^2)+x^2(1+t^2)^2-(1-t^4)-x^2(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}\right\}\times$$

$$\times K(x, y, t)=\left\{\frac{4(x^2+y^2)t^2-4xyt(1+t^2)-(1-t^4)}{(1-t^2)^2}\right\}K(x, y, t).$$

Так как это выражение симметрично по x и y, то

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}-x^2K=\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}-y^2K.$$

Кроме того,

$$-2t\frac{\partial K}{\partial t}-K=$$

$$=K\left\{-2t\left[\frac{t}{1-t^2}+\frac{2xy(1+t^2)}{(1-t^2)^2}-\frac{2t(x^2+y^2)}{(1-t^2)^2}\right]-1\right\}=$$

$$=\left\{\frac{4(x^2+y^2)t^2-4xyt(1+t^2)-(1-t^4)}{(1-t^2)^2}\right\}K(x, y, t)=$$

$$=\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}-x^2K=\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}-y^2K.$$

Функция $K(x, y, t)$ аналитична по t при $|t|<1$ для всех значений x и y. С помощью математической индукции легко проверить, что

$$\frac{\partial^n K}{\partial t^n}=P(x, y, t)K(x, y, t),$$

где $P(x, y, t)$ является многочленом от x и y с коэффициентами, зависящими от t. Таким образом, по теореме Тейлора

$$K(x, y, t)=\sum_0^\infty P_n(x, y)t^nK(x, y, 0)=$$

$$=\sum_0^\infty P_n(x, y)t^ne^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \qquad (7.08)$$

где $P_n(x, y)$ — многочлен от x и y, степень которого, вообще говоря, может быть отлична от n. Следовательно,

$$-2t\frac{\partial K}{\partial t} - K = \sum_0^\infty -(2n+1)P_n(x, y)t^n e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}. \quad (7.09)$$

Разложение функции $K(x, y, t)$ по степеням t мажорируется при $|x| < A$, $|y| < B$ выражением

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left[\frac{4ABt + (A^2+B^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right]. \quad (7.10)$$

Легко проверить, что при $|t| < 1$ (7.10) может быть разложено в сходящийся ряд Тейлора по x и y. Таким образом, если $|t| < 1$, то ряд (7.08) равномерно сходится во всякой конечной комплексной области изменения x и y. Его можно почленно дифференцировать любое число раз[1]) по x и y и потому

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - x^2 K = \sum_0^\infty t^n\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\right)\left(P_n(x, y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - y^2 K = \sum_0^\infty t^n\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2\right)\left(P_n(x, y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right).$$

Таким образом, в силу (7.09)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\right)\left(P_n(x, y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2\right)\left(P_n(x, y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = -(2n+1)P_n(x, y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

В силу эквивалентности (6.01) и (6.02) отсюда следует

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial P_n}{\partial x} + 2nP_n = \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial P_n}{\partial y} + 2nP_n = 0.$$

---

[1]) И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, М., 1954, стр. 191.

Но функции $P_n(x, y)$ являются многочленами от x с коэффициентами, зависящими от y, и в то же время многочленами от y с коэффициентами, зависящими от x. Поэтому из проведенного выше исследования многочленов, удовлетворяющих уравнению (6.04), вытекает, что

$$P_n(x, y) = H_n(x) F(y) = H_n(y) G(x),$$

где $F(y)$ и $G(x)$ являются функциями, подлежащими определению. Но из полученного равенства следует

$$G(x)/H_n(x) = F(y)/H_n(y)$$

и общее значение этих двух выражений не может зависеть ни от x, ни от y, следовательно, является постоянной. Поэтому

$$P_n(x, y) = c_n H_n(x) H_n(y)$$

и

$$K(x, y, t) = \sum_0^\infty d_n t^n \psi_n(x) \psi_n(y). \qquad (7.11)$$

Здесь c_n и d_n зависят лишь от n.

Чтобы найти коэффициенты d_n, заметим, что из (7.11) вытекает

$$K(x, x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} e^{-x^2 \frac{1-t}{1+t}} = \sum_0^\infty d_n t^n [\psi_n(x)]^2, \qquad (7.12)$$

и, в частности,

$$K(0, 0, t) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^3} t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^5} t^6 + \ldots\right) = \\ = \sum_0^\infty d_n t^n [\psi_n(0)]^2. \qquad (7.13)$$

Но мы знаем, что $\psi_n(0)$ не обращается в нуль ни для одного четного n, а первый ряд в (7.13) состоит из положительных членов четной степени. Следовательно, ни одно d_n с четным индексом не является отрицательным.

Кроме того, мы видели, что ряд (7.11) можно почленно дифференцировать, так что

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} K(x,\ y,\ t) = \sum_0^\infty d_n t^n \psi_n'(x)\, \psi_n'(y) =$$

$$= \left\{ \left(\frac{2yt - x(1+t^2)}{1-t^2} \right) \left(\frac{2xt - y(1+t^2)}{1-t^2} \right) + \frac{2t}{1-t^2} \right\} K(x,\ y,\ t).$$

Таким образом,

$$\sum_0^\infty d_n t^n [\psi_n'(0)]^2 = K(0,\ 0,\ t)[2t + 2t^3 + 2t^5 + \ \ldots]$$

и, являясь произведением двух рядов с неотрицательными коэффициентами, не содержит ни одной степени t с отрицательным коэффициентом. Следовательно, $\psi_n'(0)$ не обращается в нуль ни при одном нечетном n, и d_n ни при одном нечетном n не является отрицательным. Таким образом, ни одно d_n не является отрицательным и ряд (7.12) содержит при $0 \leqslant t < 1$ лишь неотрицательные члены. Но тогда ряд (7.12) можно почленно интегрировать в силу признака монотонной сходимости и, так как последовательность $\{\psi_n\}$ ортонормирована, то

$$\sum_0^\infty d_n t^n = \sum_0^\infty d_n t^n \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_n(x)]^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 \frac{1-t}{1+t}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{1-t} \sqrt{\frac{1-t}{\pi(1+t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 \frac{1-t}{1+t}}\, dx = \frac{1}{1-t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy =$$

$$= \frac{1}{1-t} = \sum_0^\infty t^n.$$

Таким образом, каждое d_n равно 1 и мы доказали, что

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left[\frac{4xyt - (x^2+y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right] = \\ = \sum_0^\infty t^n \psi_n(x)\psi_n(y). \qquad (7.14)$$

Мы видели выше, что теория ортонормированных систем функций двух переменных не отличается, по сути дела, от теории ортонормированных систем функций одного переменного. Функции $\psi_m(x)\psi_n(x)$ от двойного индекса (m, n) образуют нормированную систему на плоскости, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(y)\psi_\mu(x)\psi_\nu(y)\,dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_\mu(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y)\psi_\nu(y)\,dy = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } m=\mu,\ n=\nu; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $|t|<1$. Так как ряд $\sum\limits_0^\infty |t^{2n}|$ сходится, то по теореме Рисса — Фишера ряд (7.14) сходится в среднем на плоскости (x, y), следовательно, в силу X_{41} он сходится в среднем к $K(x, y, t)$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left| K(x, y, t) - \sum_0^n t^k \psi_k(x)\psi_k(y)\right|^2 = 0.$$

Пусть теперь $\sum\limits_0^\infty \varepsilon_\nu$ — сходящийся ряд, и пусть n_ν — настолько большое число, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left| K(x, y, t) - \sum_0^{n_\nu} t^k \psi_k(x)\psi_k(y)\right|^2 < \varepsilon_\nu^2.$$

В силу X_{25} найдется множество S_ν значений x, мера которого не превосходит ε_ν, такое, что для x, не принадлежащих S_ν, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| K(x, y, t) - \sum_0^{n_\nu} t^k \psi_k(x) \psi_k(y) \right|^2 dy < \varepsilon_\nu.$$

Отсюда следует, что вне множества $S_\nu + S_{\nu+1} + \ldots = T_\nu$, мера которого не превосходит $\sum_\nu^\infty \varepsilon_\mu$, имеем

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| K(x, y, t) - \sum_\nu^{n_\mu} t^k \psi_k(x) \psi_k(y) \right|^2 dy = 0, \quad (7.15)$$

и так как

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_\nu^\infty \varepsilon_\mu = 0,$$

то (7.15) выполняется всюду, кроме множества меры нуль, — пересечения всех T_ν. Если мы будем рассматривать $K(x, y, t)$ как функцию только от y и применим неравенство Бесселя к (7.15), то получим

$$\sum_0^\infty t^n [\psi_n(x)]^2 < \infty$$

для почти всех x. Таким образом, ряд (7.14) сходится в среднем по y для почти всех x. По предложению X_{41}, если ряд сходится к некоторой функции и сходится в среднем к другой функции, то эти две функции могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль. Отсюда следует, что почти для всех x функция $K(x, y, t)$, рассматриваемая как функция от y, задается формулой

$$K(x, y, t) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_0^n t^k \psi_k(x) \psi_k(y).$$

Таким образом, в силу X_{47} и теоремы Парсеваля X_{52}, если $f(x)$ принадлежит L_2, то почти для всех x

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t)\, dy = \sum_0^\infty t^n \psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi_n(y)\, dy. \quad (7.16)$$

По неравенству Бесселя

$$\sum_0^\infty \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy \right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_0^\infty \left| t^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy \right|^2 < \infty$$

и по теореме Рисса — Фишера X_{46} существует такая функция $F(x, t)$ из L_2, что

$$F(x, t) \sim \sum_0^\infty t^n \psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy. \tag{7.17}$$

Применяя снова X_{41} к (7.16) и (7.17), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)K(x, y, t)\,dy \sim \sum_0^\infty t^n \psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy. \tag{7.18}$$

§ 8. Полнота семейства функций Эрмита

Мы хотим доказать, основываясь на (7.18), что если $f(x)$ принадлежит L_2, то

$$f(x) \sim \sum_0^\infty \psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy,$$

или, иными словами, доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Функции Эрмита образуют полную ортонормированную систему.*

По X_{50}, нам для этого достаточно установить, что при любом $\varepsilon > 0$ для любой ступенчатой функции f, принадлежащей L_2, можно найти такие N и t, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \sum_0^N t^n \psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy \right|^2 dx < \varepsilon.$$

Соотношение (7.18) и неравенство Минковского показывают, что это возможно, если

$$\lim_{t\to 1-0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-\int_{-\infty}^{\infty}f(y)K(x,\ y,\ t)\,dy\right|^2 dx=0. \qquad (8.01)$$

Мы докажем равенство (8.01) для любой ступенчатой функции $f(x)$, принадлежащей L_2, и тем самым завершим доказательство теоремы 1.

На любом отрезке $[a,\ b]$, для которого x является внутренней точкой, имеем

$$\lim_{t\to 1-0}\int_a^b K(x,\ y,\ t)\,dy=\lim_{t\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\times$$

$$\times\int_a^b \exp\left[\frac{-\left(y\sqrt{1+t^2}-2x\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{2(1-t^2)}-\frac{x^2(1-t^2)}{2(1+t^2)}\right]dy=$$

$$=\lim_{t\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}}\int_{a-x}^{b-x}e^{-\frac{y^2}{2(1-t)}}\,dy=1. \qquad (8.012)$$

Ядро $K(x,\ y,\ t)$ очевидно неотрицательно. При этом, если положить

$$x+y=\xi,\quad x-y=\eta,$$

то

$$K(x,\ y,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left[\frac{(\xi^2-\eta^2)\,t-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left[-\frac{\xi^2(1-t)}{4(1+t)}-\frac{\eta^2(1+t)}{4(1-t)}\right]. \qquad (8.013)$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 1-0}K(x,\ y,\ t)=0$$

равномерно для всех x и y в $[a,\ b]$, для которых $|y-x|>\varepsilon$. Мы можем, таким образом, применить предложение X_{55}, из которого следует, что

$$f(x)=\lim_{t\to 1-0}\int_a^b f(y)K(x,\ y,\ t)\,dy,$$

причем для любой внутренней точки x отрезка $[a, b]$, в которой функция $f(x)$ непрерывна, выражение под знаком предела ограничено. Так как $f(x)$ является ступенчатой функцией, принадлежащей L_2, то она обращается в нуль для достаточно больших значений аргумента, следовательно, имеет лишь конечное число точек разрыва. Таким образом,

$$f(x)=\lim_{t\to 1-0}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t)\, dy$$

в каждой точке непрерывности, поскольку a и $-b$ можно выбрать настолько большими, чтобы функция $f(x)$ обращалась в нуль вне отрезка $[a, b]$. Выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t)\, dy$$

ограничено в любой области вида $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где α и β конечны. Таким образом, в любой конечной области изменения

$$f(x)=\lim_{t\to 1-0}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t)\, dy. \tag{8.02}$$

Мы покажем теперь, что если функция $f(x)$ отлична от нуля лишь при $|x| < A$, то равенство (8.02) выполняется на промежутках $(-\infty, -2A)$ и $(2A, \infty)$. В этих промежутках доказываемое соотношение (8.02) принимает вид

$$\lim_{t\to 1-0}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t)\, dy = 0. \tag{8.025}$$

Но на указанных промежутках в силу (8.013) имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t)\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\, dy \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left[\frac{(x/2)^2(1-t)}{4(1+t)} - \frac{A^2(1+t)}{4(1-t)}\right]. \tag{8.03}$$

так как если $f(y) \neq 0$, то

$$|\xi| = |x+y| \geqslant |x| - A \geqslant |x| - |x|/2 = |x|/2;$$
$$|\eta| = |x-y| \geqslant A.$$

Правая часть выражения (8.03) имеет вид

$$\psi(t)\,\varphi(t)\,e^{-x^2[\varphi(t)]^2},$$

где $[\psi(t)]^2\varphi(t)$ стремится к нулю, когда $t \to 1-0$. Таким образом,

$$\left[\int_{-\infty}^{-2A} + \int_{2A}^{\infty}\right]\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,K(x,\ y,\ t)\,dy\right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant [\psi(t)]^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t)]^2\,e^{-x^2[\varphi(t)]^2}\,dx \leqslant \mathrm{const}\,[\psi(t)]^2\,\varphi(t).$$

Отсюда вытекает (8.025). Таким образом, (8.02) выполняется на промежутках $(-\infty,\ -2A)$, $(-2A,\ 2A)$ и $(2A,\ \infty)$, или, что то же самое, на всей оси $(-\infty,\ \infty)$. Но это, очевидно, эквивалентно (8.01), что, как мы видели выше, эквивалентно подлежащей доказательству теореме 1.

Если $f(x)$ принадлежит L_2, то из (7.14) следует

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp\left[\frac{-4ixyt-(x^2+y^2)(1-t^2)}{2(1+t^2)}\right]dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,K(x,\ y,\ -it)\,dy =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{0}^{N} (-it)^n\,\psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\psi_n(y)\,dy. \qquad (8.04)$$

В силу неравенства Бесселя

$$\infty > \sum_{0}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\psi_n(y)\,dy\right|^2 = \sum_{0}^{\infty}\left|(-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\psi_n(y)\,dy\right|^2.$$

Таким образом, по теореме Рисса — Фишера существует такая функция $g(x)$, принадлежащая L_2, что

$$g(x) \sim \sum_0^\infty (-i)^n \psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy.$$

Так как множество $\{\psi_n\}$ полно или замкнуто, мы имеем

$$f(x) \sim \sum_0^\infty \psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy.$$

Применяя дважды теорему Гурвица — Парсеваля, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx = \sum_0^\infty \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx. \tag{8.05}$$

Эта теорема показывает, что при $0 \leqslant t < 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left[\frac{-4ixyt - (x^2+y^2)(1-t^2)}{2(1+t^2)}\right] dy \right|^2 dx =$$
$$= \sum_0^\infty (1-t^n) \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_n(y)\,dy \right|^2.$$

Отсюда и из (8.05) получаем

$$\overline{\lim_{t\to 1-0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[\frac{-4ixyt - (x^2+y^2)(1-t^2)}{2(1+t^2)}\right] dy \right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{t\to 1-0}} \sum_0^N (1-t^n) \left| \int f\psi_n \right|^2 + \sum_N^\infty \left| \int f\psi_n \right|^2 \leqslant \sum_N^\infty \left| \int f\psi_n \right|^2.$$

Так как ряд (8.05) сходится, то отсюда следует

$$g(x) = \underset{t\to 1-0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left[\frac{-4ixyt-(x^2+y^2)(1-t^2)}{2(1+t^2)}\right] dy. \quad (8.06)$$

§ 9. Преобразование Фурье

Мы хотим теперь упростить определение функции, задаваемое равенством (8.06). Если $f(x) = {}_Af(x)$ и функция $f(x)$ финитна, то есть обращается в 0 при больших значениях аргумента, то интеграл (8.06) берется по конечному промежутку. Когда $t \to 1$, подынтегральная функция мажорируется выражением вида $c|f(y)|$ и почти всюду стремится к $f(y)e^{-ixy}$. Таким образом, для таких функций

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy. \quad (9.01)$$

Пусть теперь $f(x)$ — *любая* функция из L_2. Применим к $f(x) - {}_Af(x)$ линейное преобразование, даваемое (8.06). В силу (9.01) в результате этого получим функцию

$$g(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy} dy,$$

и в силу (8.05) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy} dy \right|^2 dx =$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{\infty}\right] |f(x)|^2 dx.$$

Так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ сходится, то

$$\lim_{A \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy} dy \right|^2 dx = 0 \quad (9.02)$$

или

$$g(x) = \underset{A \to \infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy} dy \sim$$

$$\sim \sum_{0}^{\infty} (-i)^n \psi_n(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi_n(y) dy. \quad (9.03)$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) \psi_n(x) dx = (-i)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi_n(y) dy$$

и

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} i^n \psi_n(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \psi_n(y) dy.$$

Если в (8.04) заменить $f(x)$ на $g(x)$ и i на $-i$, то получим

$$\sum_{0}^{\infty} (it)^n \psi_n(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \psi_n(y) dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp\left[\frac{4ixyt - (x^2+y^2)(1-t^2)}{2(1+t^2)}\right] dy$$

и рассуждения, в точности совпадающие с проведенными выше для вывода (8.06), показывают, что

$$f(x) = \underset{t \to 1-0}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{4ixyt - (x^2+y^2)(1-t^2)}{2(1+t^2)}\right] dy. \quad (9.04)$$

Подобно тому как (9.03) вытекает из (8.06), из (9.04) вытекает, что

$$f(x) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(y) e^{ixy}\, dy. \tag{9.05}$$

Комбинируя (9.03), (8.05) и (9.05), получаем следующее утверждение:

Теорема 2 (*теорема Планшереля*). *Если функция $f(x)$ принадлежит L_2 на промежутке* $(-\infty, \infty)$, *то функция*

$$g(x) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy}\, dy \tag{9.06}$$

называется преобразованием Фурье функции $f(x)$, существует и принадлежит L_2. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \tag{8.05}$$

и

$$f(x) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(y) e^{ixy}\, dy.$$

По неравенству Шварца из (9.02) вытекает

$$\lim_{A\to\infty} \left| \int_0^x g(x)\, dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x dx \int_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy}\, dy \right| = 0.$$

Следовательно, в силу X_{24}

$$\int_0^x g(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \int_0^x e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1 - e^{-ixy}}{iy}\, dy,$$

и, по X_{13}, почти всюду имеем

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1-e^{-ixy}}{iy}\,dy. \tag{9.07}$$

Точно так же почти всюду

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{e^{ixy}-1}{iy}\,dy. \tag{9.08}$$

Если функция $f(x)$ четная, то (9.07) и (9.08) сводятся к

$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{\infty} f(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy$$

и

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{\infty} g(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy.$$

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то их надо заменить равенствами

$$ig(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{\infty} f(y)\frac{1-\cos xy}{y}\,dy$$

и

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{\infty} ig(y)\frac{1-\cos xy}{y}\,dy.$$

Мы получили формулы, впервые доказанные Планшерелем. В четном случае $g(x)$ и $f(x)$ называются косинус-преобразованиями друг друга, а в нечетном случае — $ig(x)$ и $f(x)$ называются синус-преобразованиями друг друга.

Метод доказательства теоремы Планшереля, приведенный в этой главе, существенно отличается от первоначально примененного Планшерелем [1]. Другое доказательство дано Титчмаршем [2], Риссом [3] и автором [4]. Метод, использован-

---

[1] Планшерель [1].
[2] Титчмарш [1].
[3] Ф. Рисс [2].
[4] Винер [1].

ный здесь, основан на предложении Кемпбелла [1]) и содержит рассуждение, касающееся абелевского суммирования разложений по многочленам Эрмита, тесно связанное с исследованиями Мюнтца [2]). В некотором отношении подобное изучение разложений по многочленам Эрмита можно найти в более ранней работе автора [3]).

Метод, в точности сходный с использованным для вывода X_{52} из X_{51}, позволяет получить из теоремы 2 следующий результат:

Теорема 3 (*теорема Парсеваля для интеграла Фурье*). *Если $g_1(x)$ является преобразованием Фурье $f_1(x)$ и $g_2(x)$ — преобразованием Фурье $f_2(x)$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\overline{g_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx.$$

Следовательно, как в X_{61},

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(-x)\,dx;$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y-x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x)e^{-iyx}\,dx,\\ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(x)e^{iyx}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(y-x)\,dx.\end{aligned}\right\} \qquad (9.09)$$

В силу (9.09) преобразование Фурье произведения двух функций f_1 и f_2 равно свертке

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y-x)\,dx$$

---

[1]) Кемпбелл и Фостер [1].

[2]) См. Мюнтц «Über die Potenzsummation der Entwickelung nach Hermiteschen Polynomen», 31 (1930), 350. Выражение K в формуле (7.06) встречалось уже в работе Мелера, Journ. für Math., 66 (1866), 174.

[3]) Винер [3].

их преобразований Фурье, умноженной на $1/\sqrt{2\pi}$. Из X_{41} вытекает, что если $f_1(x) f_2(x)$ принадлежит L_2, то это утверждение справедливо не только формально, но и фактически. В самом деле, в силу X_{41} равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) e^{-iyx} dx = \underset{A \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-A}^{A} f_1(x) f_2(x) e^{-iyx} dx$$

справедливо почти всюду, если интеграл в левой части этого равенства сходится для почти всех y и существует предел в правой части, а это имеет место, поскольку $f_1(x) f_2(x)$ принадлежит L_2.

ГЛАВА II

ОБЩАЯ ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА

§ 10. Формулировка общей тауберовой теоремы

В главе I мы изучили функции на оси $(-\infty, \infty)$, принадлежащие пространству L_2. В этой главе мы будем в основном изучать функции $f(x)$ на оси $(-\infty, \infty)$, принадлежащие пространству L_1. Если $f(x)$ — такая функция, то

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux}\, dx$$

существует при любом u. Функция $g(u)$ ограничена, так как

$$|g(u)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Покажем, что эта функция равномерно непрерывна. В самом деле,

$$|g(u+\varepsilon) - g(u)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux} \left(e^{-ix\varepsilon} - 1\right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, 2 \left| \sin \frac{x\varepsilon}{2} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{\infty} \right] 2|f(x)|\, dx + \frac{\varepsilon A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} |f(x)|\, dx.$$

Выберем A настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-A}+\int_{A}^{\infty}\right]2|f(x)|\,dx<\eta/2.$$

Выберем, далее, настолько малое $\varepsilon>0$, чтобы

$$\frac{\varepsilon A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}|f(x)|\,dx<\eta/2.$$

Тогда

$$|g(u+\varepsilon)-g(u)|<\eta.$$

Мы будем называть $g(u)$ *преобразованием Фурье* $f(x)$. Преобразование Фурье функции из пространства L_1 определено для *любого* вещественного значения аргумента, а не только почти для всех вещественных значений аргумента, как для функций из L_2.

Рассмотрим подпространство M_1 в L_1, состоящее из всех непрерывных функций $f(x)$, для которых при некотором положительном a и вещественном b имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\max_{na+b\leqslant x\leqslant(n+1)a+b}|f(x)|<\infty. \tag{10.01}$$

Очевидно, что если (10.01) справедливо для некоторого положительного числа a и вещественного числа b, то оно справедливо для любого другого положительного a_1 и вещественного b_1. Это вытекает из того, что если $[a_1/a]=\nu$, то ни один из отрезков вида

$$(na_1+b_1,\ (n+1)a_1+b_1)$$

не пересекается более чем с $\nu+2$ отрезками вида

$$(ma+b,\ (m+1)a+b).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\max_{na_1+b_1\leqslant x\leqslant(n+1)a_1+b_1}|f(x)|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\nu+2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\max_{na+b\leqslant x\leqslant(n+1)a+b}|f(x)|. \tag{10.02}$$

Точно так же, если $[a/a_1]=\mu$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{na+b\leqslant x\leqslant (n+1)a+b} |f(x)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu+2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{na_1+b_1\leqslant x\leqslant (n+1)a_1+b_1} |f(x)|.$$

Итак, не ограничивая общности, можно положить в определении класса M_1 $a=1$, $b=0$ и заменить (10.01) неравенством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{n\leqslant x\leqslant n+1} |f(x)| < \infty.$$

Каждая из функций класса M_1 принадлежит L_1 и, следовательно, имеет ограниченное равномерно непрерывное преобразование Фурье.

Мы посвятим эту главу доказательству следующих двух теорем, или, точнее, вариантов одной теоремы, которую будем называть общей тауберовой теоремой.

Теорема 4. *Пусть K_1 — функция из пространства L_1, преобразование Фурье которой не обращается в нуль ни в одной точке оси $(-\infty, \infty)$. Пусть $K_2(x)$ принадлежит L_1, а функция $f(x)$ ограничена на промежутке $(-\infty, \infty)$. Если*

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y) f(y)\, dy = A \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\, dx, \tag{10.03}$$

то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) f(y)\, dy = A \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x)\, dx. \tag{10.04}$$

С другой стороны, пусть $K_1(x)$ — функция из L_1, преобразование Фурье которой имеет вещественный нуль. Тогда найдется ограниченная функция $f(x)$ и функция $K_2(x)$, принадлежащая L_1, такие, что (10.03) *выполняется, а* (10.04) *не имеет места.*

Теорема 5. *Пусть $K_1(x)$ — функция из пространства M_1, преобразование Фурье которой не обращается в нуль ни в одной точке оси $(-\infty, \infty)$. Пусть $K_2(x)$ принадлежит M_1. Если функция $g(x)$ имеет ограниченное* *полное изменение на каждом конечном промежутке и если*

$$\int_{n}^{n+1} |dg(x)| \tag{10.05}$$

ограничено на $-\infty < n < \infty$, *то из*

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y)\,dg(y) = A \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\,dx \tag{10.06}$$

вытекает

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y)\,dg(y) = A \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x)\,dx. \tag{10.07}$$

С другой стороны, пусть $K_1(x)$ — *функция из* M_1, *преобразование Фурье которой имеет вещественный нуль. Тогда найдется функция* $g(x)$, *имеющая ограниченное полное изменение на каждом конечном промежутке, для которой* (10.05) *ограничено, и функция* $K_2(x)$, *принадлежащая* M_1, *такие, что* (10.06) *имеет место, а* (10.07) *не выполняется.*

Вторые утверждения в теоремах 4 и 5 почти тривиальны. Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\,e^{-iu_0x}\,dx = 0.$$

Тогда нетрудно найти функцию K_2, принадлежащую M_1, а следовательно, и L_1, для которой

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x)\,e^{-iu_0x}\,dx = l \neq 0.$$

В качестве такой функции можно выбрать, например, $e^{-x^2/2}$. Если положить

$$f(x) = e^{iu_0x}, \quad g(x) = e^{iu_0x}/iu_0,$$

то (10.03) и (10.06) выполняются при $A = 0$, в то время как

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y)\,f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y)\,dg(y) = e^{iu_0x}\,l\,\sqrt{2\pi},$$

следовательно, не имеет никакого конечного предела. Функция $f(x)$ очевидно ограничена, так как

$$\int_{n}^{n+1} |dg(x)| = \int_{n}^{n+1} |e^{iu_0 x}| dx = 1.$$

Для того чтобы доказать первые утверждения теорем 4 и 5, введем понятие *расширения* класса Σ в L_1 или M_1.

Пусть Σ — класс функций в L_1. Назовем L_1-расширением класса Σ класс $\varepsilon(\Sigma)$ всех функций $K_2(x)$, принадлежащих L_1, таких, что если (10.03) *выполняется для некоторой ограниченной функции $f(x)$ и для всех функций $K_1(x)$, принадлежащих Σ, то выполняется и* (10.04). *Аналогично для M_1, $\varepsilon'(\Sigma)$-расширением множества Σ называется класс всех функций $K_2(x)$, принадлежащих M_1, таких, что если* (10.06) *выполняется для некоторой функции $g(x)$, имеющей ограниченное полное изменение на каждом конечном промежутке, и такой, что* (10.05) *ограничено, и для любой функции $K_1(x)$, принадлежащей Σ, то выполняется* (10.07). Первые утверждения теорем 4 и 5 являются частными случаями более обоих теорем:

Теорема 6. *Если Σ — класс функций из L_1, такой, что при любом вещественном значении аргумента преобразование Фурье хотя бы одной из функций множества Σ отлично от нуля, то*

$$\varepsilon(\Sigma) \equiv L_1.$$

Теорема 7. *Если Σ — класс функций из M_1, такой, что при любом вещественном значении аргумента преобразование Фурье хотя бы одной функции из Σ отлично от нуля, то*

$$\varepsilon'(\Sigma) \equiv M_1.$$

Для доказательства этих теорем нам понадобятся несколько лемм. Следующие леммы почти очевидны и мы не даем их доказательства. *В формулировках этих лемм, за исключением особо оговоренных случаев, предполагается, что если лемма касается ε, то рассматриваемые функции принадлежат классу L_1, а если лемма касается ε', то функции принадлежат M_1.*

Лемма 6_1. $\varepsilon(\varepsilon(\Sigma)) \equiv \varepsilon(\Sigma)$.

Лемма 7_1. $\varepsilon'(\varepsilon'(\Sigma)) \equiv \varepsilon'(\Sigma)$.

Лемма 6_2. *Если* $K(x)$ *и* $Q(x)$ *принадлежат* Σ, *то* $K(x)+Q(x)$ *принадлежит* $\varepsilon(\Sigma)$.

Лемма 7_2. *Если* $K(x)$ *и* $Q(x)$ *принадлежат* Σ, *то* $K(x)+Q(x)$ *принадлежит* $\varepsilon'(\Sigma)$.

Лемма 6_3. *Если* A — *постоянная и* $K(x)$ *принадлежит* Σ, *то* $AK(x)$ *принадлежит* $\varepsilon(\Sigma)$.

Лемма 7_3. *Если* A — *постоянная и* $K(x)$ *принадлежит* Σ, *то* $AK(x)$ *принадлежит* $\varepsilon'(\Sigma)$.

Лемма 6_4. *Если* a — *вещественное постоянное и* $K(x)$ *принадлежит* Σ, *то* $K(x+a)$ *принадлежит* $\varepsilon(\Sigma)$.

Лемма 7_4. *Если* a — *вещественное постоянное и* $K(x)$ *принадлежит* Σ, *то* $K(x+a)$ *принадлежит* $\varepsilon'(\Sigma)$.

Лемма 6_5. *Если* $K(x)$ *принадлежит* Σ *и* $Q(x)$ *принадлежит* L_1, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\,Q(\xi)\,d\xi \tag{10.08}$$

принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$.

Чтобы доказать эту лемму, заметим сначала, что функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\,Q(\xi)\,d\xi$$

принадлежит L_1, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\,Q(\xi)\,d\xi\right| dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|K(x)|\,dx \int_{-\infty}^{\infty}|Q(\xi)|\,d\xi. \tag{10.09}$$

Далее, из (10.03) вытекает

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi)\,d\xi \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi-y)\,f(y)\,dy &= \\ = A\int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\,dx &= \\ = A\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\,Q(\xi)\,d\xi, &\end{aligned} \tag{10.10}$$

причем эти интегралы абсолютно сходятся. Кроме того, так как функция f ограничена и K принадлежит L_1, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi-y)\, f(y)\, dy \tag{10.11}$$

ограничен. Следовательно, в силу признака мажорированной сходимости и абсолютной сходимости интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi)\, d\xi \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi-y)\, f(y)\, dy =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi-y)\, f(y)\, dy =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi-y)\, Q(\xi)\, d\xi. \tag{10.12}$$

Комбинируя (10.10) и (10.12), убеждаемся в том, что для функции

$$K_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, Q(\xi)\, d\xi$$

выполняется соотношение (10.04).

Лемма 7_5. *Пусть Σ является подмножеством M_1 и $K(x)$ принадлежит Σ. Если $Q(x)$ принадлежит пространству L_1 (но не обязательно M_1), то* (10.08) *принадлежит* $\varepsilon'(\Sigma)$.

Для доказательства заметим, что (10.08) принадлежит M_1, поскольку в силу X_{18} эта функция непрерывна и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \max_{n\leqslant x\leqslant n+1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, Q(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi)|\, d\xi \sum_{-\infty}^{\infty} \max_{n\leqslant x\leqslant n+1} |K(x-\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi)|\, d\xi \sum_{-\infty}^{\infty} \max_{n\leqslant x\leqslant n+1} |K(x)|, \tag{10.13}$$

как в (10.12). Формула (10.10) остается справедливой с соответствующими изменениями и вместо (10.11) мы имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi-y)\,dg(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty}\int_{n}^{n+1} |K_1(x-\xi-y)|\,d\int_0^y |dg(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{-\infty<n<\infty}\int_n^{n+1}|dg(y)|\sum_{-\infty}^{\infty}\max_{n\leqslant y\leqslant n+1}|K_1(x-\xi-y)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\limsup_{-\infty<n<\infty}\int_n^{n+1}|dg(y)|\sum_{-\infty}^{\infty}\max_{n\leqslant x\leqslant n+1}|K_1(x)|. \qquad (10.14)$$

Следовательно, в силу признака мажорированной сходимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi)\,d\xi \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi-y)\,dg(y) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi-y)\,dg(y). \qquad (10.15)$$

Этот интеграл абсолютно сходится и из (10.15) вытекает (см. X_{38}), что

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dg(y)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi-y)\,Q(\xi)\,d\xi =$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\,Q(\xi)\,d\xi. \qquad (10.16)$$

Комбинируя это равенство с формулой (10.10), в которой $f(y)\,dy$ заменено $dg(y)$, и обозначая выражение (10.08) через $K_2(x)$, получаем (10.07).

Лемма 6_6. *Если $K_2(x)$ принадлежит L_1, а $\{K_1^{(n)}(x)\}$ — последовательность таких функций из Σ, что*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K_2(x)-K_1^{(n)}(x)\right|dx = 0,$$

то $K_2(x)$ принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$.

Для доказательства заметим сначала, что если функция $f(x)$ ограничена, то равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_2(x-y)-K_1^{(n)}(x-y)\right]f(y)\,dy=0, \tag{10.17}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K_2(x)-K_1^{(n)}(x)\right|dx=0. \tag{10.18}$$

Из (10.17) вытекает, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x-y)f(y)\,dy=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{x\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}K_1^{(n)}(x-y)f(y)\,dy=$$

$$=\lim_{n\to\infty}A\int_{-\infty}^{\infty}K_1^{(n)}(x)\,dx=A\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x)\,dx. \tag{10.19}$$

Аналогично доказывается, что

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x-y)f(y)\,dy=A\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x)\,dx. \tag{10.20}$$

Но равенства (10.19) и (10.20) в совокупности эквивалентны (10.04), а потому лемма 6_6 доказана. Точно так же имеем:

Лемма 7_6. *Если $K_2(x)$ принадлежит M_1, а $\{K_1^{(n)}(x)\}$ — последовательность таких функций из Σ, что*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\max_{k\leqslant x\leqslant k+1}\left|K_2(x)-K_1^{(n)}(x)\right|=0, \tag{10.21}$$

то $K_2(x)$ принадлежит $\varepsilon'(\Sigma)$.

Оценка, аналогичная проведенной в (10.14), показывает, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}K_1^{(n)}(x-y)\,dg(y)-\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x-y)\,dg(y)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\limsup\int_{n}^{n+1}|dg(y)|\sum_{-\infty}^{\infty}\max_{n<x<n+1}\left|K_1^{(n)}(x)-K_2(x)\right|.$$

В силу (10.21), если интеграл $\int\limits_{n}^{n+1} |dg(y)|$ ограничен, то равномерно по x

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y)\,dg(y) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1^{(n)}(x-y)\,dg(y).$$

Формула (10.18) доказывается так же, как и ранее, и рассуждения, подобные приведшим нас к (10.19), показывают, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y)\,dg(y) = \lim_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y)\,dg(y) =$$

$$= A \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(x)\,dx.$$

Здесь при $n\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1^{(n)}(x-y)\,dg(y) \to \lim_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y)\,dg(y), \tag{10.22}$$

и из (10.18) вытекает, что

$$A \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1^{(n)}(x)\,dx \to A \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(x)\,dx. \tag{10.23}$$

Комбинируя (10.22) и (10.23), мы получаем требуемый результат.

§ 11. Леммы о функциях с финитными преобразованиями Фурье

Лемма 6_7. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на оси $(-\infty, \infty)$ и обращающаяся в нуль на промежутках $(-\infty, -\pi+\varepsilon)$ и $(\pi-\varepsilon, \infty)$. Пусть*

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iux}\,dx. \tag{11.01}$$

Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |g(n)| < \infty;$

2) $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \max\limits_{n \leqslant u \leqslant n+1} |g(u)| < \infty;$

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\,du < \infty.$

Очевидно, что из 2) вытекает 1) и 3). Нам надо доказать, что из 1) вытекает 2) и из 3) вытекает 2). Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqslant \pi - \varepsilon); \\ \dfrac{\pi - |x|}{\varepsilon} & (\pi - \varepsilon \leqslant |x| \leqslant \pi); \\ 0 & (\pi \leqslant |x|). \end{cases} \tag{11.015}$$

Преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ равно

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \varphi(x) \cos ux\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \varphi(x)\, \frac{d \sin ux}{u} =$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ux}{u} \varphi'(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin ux}{u\varepsilon}\, dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos(\pi - \varepsilon)\, u - \cos \pi u}{u^2 \varepsilon}.$$

Таким образом, преобразованием Фурье $\varphi(x)\, e^{-ivx}$ является

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i(u+v)x}\, dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos(\pi - \varepsilon)(u+v) - \cos \pi (u+v)}{(u+v)^2\, \varepsilon}. \tag{11.02}$$

Для нас существенно лишь то обстоятельство, что выражение (11.02) мажорируется выражением

$$\frac{A}{B + (u+v)^2}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)e^{-ivx}$ на отрезке $(-\pi, \pi)$ мажорируются выражением

$$\frac{A}{B+(u+n)^2},$$

где A и B — положительные числа. Так как в силу (11.015) и обращения $f(x)$ в нуль вне $(-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)e^{-iux}\,dx,$$

то из (11.01) вытекает, что найдутся положительные числа A и B, для которых

$$g(u) \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A\,|g(n)|}{B+(u+n)^2}.$$

Отсюда следует существование таких положительных чисел A и B, что

$$\max_{m\leqslant u\leqslant m+1} |g(u)| \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A\,|g(n)|}{B+(m+n)^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \max_{n\leqslant u\leqslant n+1} |g(u)| \leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\,|g(n)|}{B+(m+n)^2} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \frac{A}{B+m_1^2} = \text{const} \sum_{-\infty}^{\infty} |g(n)| \qquad (11.03)$$

$$(m_1 = m+n).$$

Но

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)e^{-iux}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi-\varepsilon)(u+v)-\cos\pi(u+v)}{(u+v)^2\,\varepsilon}\,e^{ivx}\,dv$$

и потому

$$g(u) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{B+(u-v)^2}\,|g(v)|\,dv.$$

Таким образом, существуют такие положительные числа A и B, что

$$\max_{m \leqslant u \leqslant m+1} |g(u)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{B+(m-v)^2} |g(v)| dv,$$

и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \max_{m \leqslant u \leqslant m+1} |g(u)| \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{B+(m-v)^2} |g(v)| dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)| dv \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{B+(m-v)^2} \leqslant \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} |g(v)| dv. \tag{11.04}$$

Из формул (11.03) и (11.04) вытекает лемма 6_7.

Лемма 6_8. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу L_1 и ее преобразованием Фурье является $g(u)$, то функция*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2} d\xi \tag{11.05}$$

принадлежит L_1 и ее преобразование Фурье имеет вид

$$\left(1 - \frac{|u|}{a}\right) g(u), \text{ если } |u| \leqslant a; \quad 0, \text{ если } |u| > a. \tag{11.06}$$

Доказательство того, что (11.05) принадлежит L_1, проводится так же, как для (10.09). Кроме того, меняя порядок интегрирования в абсолютно сходящемся интеграле, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} dx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2} e^{-iux\xi} d\xi.$$

Поэтому в силу (5.08) преобразование Фурье для $f(x)$ задается формулой (11.06). Заменяя (10.09) на (10.13), получаем следующее утверждение:

Лемма 7_8. *Если* $f(x)$ *принадлежит* M_1, *то* (11.05) *принадлежит* M_1.

Докажем теперь следующее предложение:

Лемма 6_9. *Если* $f(x)$ *принадлежит* L_1, *то*

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\right|dx=0. \quad (11.07)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда функция $f(x)$ равна 1 на промежутке (α, β) и нулю вне его. Здесь

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{x-\alpha}^{x-\beta}\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{a(x-\alpha)}^{a(x-\beta)}\frac{1-\cos y}{y^2}\,dy.$$

Если $a\to\infty$, то этот интеграл стремится к $\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-\beta)-$ $-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-\alpha)$, причем значения этого интеграла ограничены в совокупности в любой области вида $1\leqslant a<\infty$, $x_1\leqslant$ $\leqslant x\leqslant x_2$, где x_1 и x_2 — конечны. Следовательно, если $A>|\alpha|$, $A>|\beta|$, то

$$\left[\int_{2A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-2A}\right]\frac{dx}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\right|=$$
$$=\left[\int_{2A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-2A}\right]\frac{dx}{\pi}\left|\int_{a(x-\alpha)}^{a(x-\beta)}\frac{1-\cos y}{y^2}\,dy\right|<$$
$$<\int_{A}^{\infty}\frac{2aA}{a^2(y-A)^2}\,dy\leqslant\frac{2}{a}.$$

Отсюда следует, что (11.07) выполняется для функций $f(x)$ рассматриваемого вида, а следовательно, и для всех ступенчатых функций. В силу X_{16}, если $f(x)$ принадлежит L_1 и

$\varepsilon > 0$, то существует такая ступенчатая функция $f_1(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_1(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{11.073}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\, d\xi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi) \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\, d\xi \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_1(x)|\, dx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\, d\xi < \varepsilon. \tag{11.077}$$

Таким образом, так как (11.07) справедливо для всех ступенчатых функций f_1, то в силу (11.073) и (11.077)

$$\overline{\lim_{a\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\, d\xi \right| dx < 2\varepsilon,$$

что возможно лишь в том случае, когда (11.07) справедливо для всех функций $f(x)$.

Другой леммой того же самого типа является

Лемма 7_9. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу M_1, то*

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{n \leqslant x \leqslant n+1} \left| f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\, d\xi \right| = 0. \tag{11.08}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $f(x) = {}_A f(x)$. Положим в X_{55} отрезок $[a, b]$ равным $[-2A, 2A]$. Пусть

$$K(x, y, r) = \frac{1-r}{\pi} \frac{1-\cos \frac{x-y}{1-r}}{(x-y)^2}.$$

Для внутренних точек x отрезка $[-2A, 2A]$ выполнено соотношение (4.12), так как

$$\lim_{r\to 1}\frac{1-r}{\pi}\int_{-2A}^{2A}\frac{1-\cos\dfrac{x-y}{1-r}}{(x-y)^2}\,dy=$$

$$=\lim_{r\to 1}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{2A-x}{1-r}}^{\frac{2A-x}{1-r}}\frac{1-\cos u}{u^2}\,du=1.$$

Кроме того, K — неотрицательная функция, равномерно стремящаяся к нулю при $r\to 1$ в области $|x-y|\geqslant\varepsilon$. Таким образом, поскольку функция $f(x)$ по предположению непрерывна, в силу X_{56} имеем:

$$f(x)=\lim_{r\to 1}\frac{1-r}{\pi}\int_{-2A}^{2A}f(\xi)\frac{1-\cos\dfrac{x-\xi}{1-r}}{(x-\xi)^2}\,d\xi=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\,\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi \qquad (4.085)$$

равномерно на любом отрезке, концы которого лежат на промежутке $(-2A, 2A)$. Кроме того, если x лежит вне отрезка $\left[-\frac{3A}{2}, \frac{3A}{2}\right]$, а ξ лежит на отрезке $[-A, A]$, то

$$\frac{1-\cos a(x-\xi)}{a(x-\xi)^2}\leqslant\frac{2}{a(|x|-A)^2}\leqslant\frac{8}{aA^2}.$$

Поэтому если $|x|>\frac{3A}{2}$ и $f(x)={}_Af(x)$, то

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\,\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\right|\leqslant\frac{2}{\pi}\,\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|\,d\xi}{a(|x|-A)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{a\to\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{-\left[\frac{3A}{2}+1\right]}+\sum_{n=\left[\frac{3A}{2}+1\right]}^{\infty}\right\}\times$$

$$\times\max_{n\leqslant x\leqslant n+1}\left|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\right|=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{-\left[\frac{3A}{2}+1\right]}+\sum_{n=\left[\frac{3A}{2}+1\right]}^{\infty}\right\}\times$$

$$\times\max_{n\leqslant x\leqslant n+1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|\,d\xi\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left\{\sum_{n=-\infty}^{-\left[\frac{3A}{2}+1\right]}+\sum_{n=\left[\frac{3A}{2}+1\right]}^{\infty}\right\}\frac{1}{(|x|-A)^2}=$$

$$=\text{const}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}=0. \qquad (11.09)$$

С другой стороны, из (11.085) вытекает

$$\lim_{a\to\infty}\sum_{n=-\left[\frac{3A}{2}\right]}^{\left[\frac{3A}{2}\right]}\max_{n\leqslant x\leqslant n+1}\left|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\right|=0. \qquad (11.10)$$

Комбинируя (11.09) и (11.10), мы получаем (11.08).

Пусть теперь $f(x)$ — *любая* функция, принадлежащая M_1. Тогда, как и в (10.13), получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\max_{n\leqslant x\leqslant n+1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi\sum_{-\infty}^{\infty}\max_{n\leqslant x\leqslant n+1}|f(x)|. \qquad (11.11)$$

Таким образом, если $f(x)$ принадлежит M_1 и $g(x, A)$ определяется формулой

$$g(x, A) = \begin{cases} f(x)\left(1 - \frac{|x|}{A}\right), & \text{если} \quad |x| < A; \\ 0 & \text{если} \quad |x| > A; \end{cases}$$

то очевидно, что

$$\lim_{A \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{n \leqslant x \leqslant n+1} |f(x) - g(x, A)| = 0. \qquad (11.12)$$

Применяя (11.11), получаем, что

$$\lim_{A \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{n \leqslant x \leqslant n+1} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) \frac{1 - \cos a\xi}{a\xi^2} d\xi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi, A) \frac{1 - \cos a\xi}{a\xi^2} d\xi \right| = 0 \qquad (11.13)$$

равномерно для всех достаточно больших a. Так как $g(x, A)$ принадлежит классу функций, для которых уже доказано равенство (11.08), то из (11.12) и (11.13) вытекает, что наше утверждение справедливо для любой функции $f(x)$, принадлежащей M_1.

§ 12. Леммы об абсолютно сходящихся рядах Фурье

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, 2\pi]$ и

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (12.01)$$

— разложение этой функции в ряд Фурье. Пусть

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| = C < \infty.$$

Мы будем говорить в этом случае, что функция $f(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Обозначим через A класс всех функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье и положим

$$C = A\{f\}.$$

Очевидно, что справедливо следующее утверждение:

Лемма 6_{10}. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу A, то этому классу принадлежат и функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)g(x)$, причем*

$$\begin{aligned} A\{f+g\} &\leqslant A\{f\}+A\{g\}, \\ A\{fg\} &\leqslant A\{f\}A\{g\}. \end{aligned} \tag{12.02}$$

Для доказательства (12.02) заметим, что если ряд (12.01) абсолютно сходится и если ряд

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} \tag{12.03}$$

также абсолютно сходится, то двойной ряд, получаемый перемножением (12.01) и (12.03), абсолютно сходится и можно изменить порядок его членов. Таким образом,

$$f(x)g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m d_n e^{i(m+n)x} = \sum_{-\infty}^{\infty} e_n e^{inx},$$

где

$$e_n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m d_{n-m}.$$

Но тогда

$$A\{fg\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{n-m} \right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m d_{n-m}| =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} |c_m| \sum_{-\infty}^{\infty} |d_n| = A\{f\}A\{g\}.$$

Рассмотрим теперь функции с абсолютно сходящимися рядами Фурье, для которых член c_0 больше, чем сумма модулей всех остальных членов. Такие функции могут быть получены из любой функции с абсолютно сходящимся рядом Фурье прибавлением достаточно большой постоянной. Очевидно, что такая функция не может иметь нулей, поскольку постоянный член больше по модулю, чем сумма остальных членов. Из леммы 6_{10} вытекает:

Лемма 6_{11}. *Если $f(x)$ принадлежит классу A и*

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| > \pi A\{f\}, \tag{12.04}$$

то $1/f(x)$ принадлежит классу A.

В самом деле, запишем ряд Фурье функции $f(x)$ в виде (12.01). Тогда

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c_0}\left(\frac{1}{1+\left[\sum\limits_{1}^{\infty}+\sum\limits_{-\infty}^{-1}\right]\frac{c_n}{c_0}e^{inx}}\right) =$$

$$= \frac{1}{c_0}\left\{1-\left[\sum_{1}^{\infty}+\sum_{-\infty}^{-1}\right]\frac{c_n}{c_0}e^{inx} + \right.$$

$$\left. + \left\{\left[\sum_{1}^{\infty}+\sum_{-\infty}^{-1}\right]\frac{c_n}{c_0}e^{inx}\right\}^2 - \ldots\right\},$$

а потому в силу леммы 6_{10}

$$A\left\{\frac{1}{f}\right\} \leqslant \frac{1}{|c_0|}\left\{1+\left[\sum_{1}^{\infty}+\sum_{-\infty}^{-1}\right]\frac{|c_n|}{|c_0|} + \right.$$

$$\left. + \left\{\left[\sum_{1}^{\infty}+\sum_{-\infty}^{-1}\right]\frac{|c_n|}{|c_0|}\right\}^2 + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{1}{|c_0|}\,\frac{1}{1-\left[\sum\limits_{1}^{\infty}+\sum\limits_{-\infty}^{-1}\right]\frac{|c_n|}{|c_0|}} = \frac{1}{|c_0|-\left[\sum\limits_{1}^{\infty}+\sum\limits_{-\infty}^{-1}\right]|c_n|} =$$

$$= \frac{1}{2|c_0|-A\{f\}} = \frac{\pi}{\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| - \pi A\{f\}}.$$

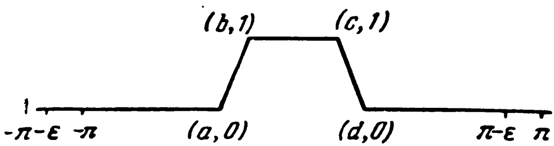
Здесь все ряды сходятся, поскольку они мажорируются убывающими геометрическими прогрессиями.

Лемма 6_{12}. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу A, а функция $g_{abcd}(x)$ определяется формулой*

$$g_{abcd}(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad -\pi-\varepsilon\leqslant x\leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad a\leqslant x\leqslant b; \\ 1, & \text{если} \quad b\leqslant x\leqslant c; \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & \text{если} \quad c\leqslant x\leqslant d; \\ 0, & \text{если} \quad d\leqslant x\leqslant \pi-\varepsilon, \end{cases}$$

где $a<b<c<d$, то функция $f(x)\,g_{abcd}(x)$ принадлежит классу A.

График функции $g_{abcd}(x)$ состоит из прямолинейных отрезков и имеет следующий вид:



Лемма 6_{12} вытекает из 6_{10} и из того, что n-й коэффициент Фурье функции $f(x)$ имеет порядок n^{-2}.

Лемма 6_{13}. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу A, $\eta>0$ и $f(x_0)=0$, то мы можем выбрать настолько малое ε, что*

$$A\left\{f(x)\,g_{x_0-2\varepsilon,\ x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon,\ x_0+2\varepsilon}(x)\right\}<\eta.$$

Не ограничивая общности, можно положить $x_0=0$. В силу (12.01)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n=0. \tag{12.05}$$

Пусть

$$g_{-2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon}(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}.$$

Продолжим функцию $g_{-2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon}(x)$ на всю ось, положив, что она равна нулю вне отрезка $[-\pi, \pi]$. Тогда преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos u\varepsilon-\cos 2u\varepsilon}{u^2\varepsilon}. \tag{12.055}$$

Точно так же преобразованием Фурье функции

$$g_{-2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon}(x)\,(e^{imx}-1)$$

является

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\cos(u-m)\,\varepsilon-\cos 2\,(u-m)\,\varepsilon}{(u-m)^2\,\varepsilon}-\frac{\cos u\varepsilon-\cos 2u\varepsilon}{u^2\varepsilon}\right\}. \tag{12.06}$$

Очевидно, что функция (12.055) абсолютно интегрируема на всей оси $(-\infty, \infty)$, откуда в силу X_{18} вытекает, что интеграл от модуля (12.06) на $(-\infty, \infty)$ стремится к нулю, когда $\varepsilon\to 0$, ибо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\frac{\cos(u-m)\,\varepsilon-\cos 2\,(u-m)\,\varepsilon}{(u-m)^2\,\varepsilon}-\frac{\cos u\varepsilon-\cos 2u\varepsilon}{u^2\varepsilon}\right|du=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\frac{\cos(v-m\varepsilon)-\cos 2\,(v-m\varepsilon)}{(v-m\varepsilon)^2}-\frac{\cos v-\cos 2v}{v^2}\right|dv.$$

Из соотношения (11.03) (см. доказательство леммы 6_7) вытекает, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|d_n|<\mathrm{const},$$

где постоянная не зависит от ε, и что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{-\infty}^{\infty}|d_{n-m}-d_n|=0.$$

Положим

$$f(x)\,g_{-2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon}(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n e^{inx}.$$

Пусть N настолько велико, что

$$\sum_{N}^{\infty}|c_n|+\sum_{-\infty}^{-N}|c_n|<\eta,$$

и ε настолько мало, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |d_{n-m} - d_n| < \eta$$

при $n \leqslant N$. Тогда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{n-m} c_m \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\,\eta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-N}^{N} d_{n-m} c_m \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\,\eta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| d_n \sum_{m=-N}^{N} c_m \right| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-N}^{N} |d_{n-m} - d_n| c_m \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\,\eta + \text{const}\,\eta + \text{const}\,\eta = \text{const}\,\eta.$$

При проведении оценки мы использовали то, что в силу (12.05)

$$\left| \sum_{m=-N}^{N} c_m \right| = \left| \sum_{-\infty}^{\infty} c_m - \sum_{-\infty}^{-N-1} c_m - \sum_{N+1}^{\infty} c_m \right| \leqslant |0 + \eta| = \eta.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| = 0.$$

Лемма 6_{14}. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу A и $f(x_0) \neq 0$, то существует функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, принадлежащая классу A, и такая, что $1/g(x)$ также принадлежит классу A.*

Не теряя общности можно считать, что $x_0 = 0$. Определим функцию $g_{abcd}(x)$, как в лемме 6_{12}, и положим

$$g(x) = f(0) + g_{-2\varepsilon,\, -\varepsilon,\, \varepsilon,\, 2\varepsilon}(x)\,(f(x) - f(0)). \tag{12.07}$$

В лемме 6_{13} было показано, что мы можем сделать величину

$$A\,\{g_{-2\varepsilon,\, -\varepsilon,\, \varepsilon,\, 2\varepsilon}(x)\,(f(x) - f(0))\}$$

меньшей, чем η, выбирая достаточно малое ε. Но если для некоторой функции f_1 имеем $A\{f_1\} < \eta$, то то же самое верно для модуля каждого коэффициента Фурье этой функции.

Таким образом, в силу (12.07)

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \right| > 2\pi f(0) - 2\pi\eta,$$

откуда, вновь применяя лемму 6_{13}, получаем

$$\pi A\{g\} < \pi f(0) + \pi\eta.$$

Таким образом, в случае, когда $\eta < f(0)/3$, выполняется (12.04), и мы можем применить лемму 6_{11}, чем и доказана лемма 6_{14}.

Лемма 6_{15}. *Если функция $f(x)$ обладает тем свойством, что для любого x_0, лежащего на отрезке $[-\pi, \pi]$, включая конечные точки, найдется промежуток*

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon), \qquad (\varepsilon > 0),$$

и функция $g(x)$, принадлежащая A, такие, что на $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$

$$g(x) = f(x),$$

то $f(x)$ принадлежит A.

По теореме Гейне — Бореля можно покрыть отрезок $[-\pi, \pi]$ конечным числом промежутков $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$. Пусть этими промежутками являются $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ и пусть

$$a_1 < b_N - 2\pi < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4 < b_3 < \ldots <$$
$$< a_{N-1} < b_{N-2} < a_N < b_{N-1} < a_1 + 2\pi.$$

Обозначим через $g_k(x)$ функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на промежутке (a_k, b_k). Тогда

$$f(x) = \sum_1^N f(x)\, g_{a_k,\, b_{k-1},\, a_{k+1},\, b_k}(x) =$$
$$= \sum_1^N g_k(x)\, g_{a_k,\, b_{k-1},\, a_{k+1},\, b_k}(x).$$

Здесь мы положили

$$2\pi + a_0 = a_N, \qquad 2\pi + b_0 = b_N,$$
$$a_{N+1} = 2\pi + a_1, \qquad b_{N+1} = 2\pi + b_1$$

и предположили, что все функции имеют период 2π. Наша лемма вытекает теперь из лемм 6_{10} и 6_{12}.

Лемма 6_{16}. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу A и не обращается в нуль нигде на отрезке $[-\pi, \pi]$, то $1/f(x)$ принадлежит A.*

Это вытекает непосредственно из лемм 6_{14} и 6_{15}.

Лемма 6_{17}. *Если функция $f(x)$ принадлежит классу A и не обращается в нуль в окрестностях точек a и b, то существует функция $g(x)$, не обращающаяся в нуль вне отрезка $[a, b]$, совпадающая с $f(x)$ на этом отрезке и принадлежащая классу A.*

Не теряя общности, мы можем предположить, что

$$-\pi < a < b < \pi.$$

Пусть δ настолько мало, что для x, лежащего в $(a-\delta, a)$,

$$|f(x)-f(a)| < \frac{1}{2}|f(a)|, \tag{12.08}$$

а для x, лежащих в $(b, b+\delta)$,

$$|f(x)-f(b)| < \frac{1}{2}|f(b)|. \tag{12.085}$$

Такое δ можно выбрать, так как функция $f(x)$ не обращается в нуль в окрестностях точек a и b. Пусть

$$g(x)=\begin{cases} \exp\left\{i+\dfrac{x+\pi}{a+\pi-\delta}\left\{\ln\left\{\dfrac{|f(a)|}{f(a)}\right\}-i\right\}\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если} \quad -\pi < x \leqslant a-\delta; \\ f(x)\dfrac{x-a+\delta}{\delta}+\dfrac{f(a)}{|f(a)|}\dfrac{a-x}{\delta}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если} \quad a-\delta < x \leqslant a; \\ f(x), \quad \text{если} \quad a < x \leqslant b; \\ f(x)\dfrac{b-x+\delta}{\delta}+\dfrac{f(b)}{|f(b)|}\dfrac{x-b}{\delta}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если} \quad b < x \leqslant b+\delta; \\ \exp\left\{\ln\left\{\dfrac{|f(b)|}{f(b)}\right\}+\dfrac{x-b-\delta}{\pi-b-\delta}\left\{i-\ln\left\{\dfrac{|f(b)|}{f(b)}\right\}\right\}\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если} \quad b+\delta < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $g(x)$ не может обращаться в нуль на промежутках

$$(-\pi < x \leqslant a-\delta) \quad \text{или} \quad (b < x \leqslant b+\delta).$$

Если бы функция $g(x)$ обратилась в нуль в некоторой точке x_0 на $(a-\delta, a)$, то аргументы комплексных чисел $f(x_0)$ и $f(a)$ отличались бы на π. Но это противоречит (12.08). Точно так же в силу (12.085) $g(x)$ не может обращаться в нуль на $(b, b+\delta)$.

Функция $g(x)$ является суммой функции, удовлетворяющей условию Липшица и, следовательно, имеющей абсолютно сходящийся ряд Фурье и функций

$$f(x)\,g_{a-\delta,\ a,\ b,\ b+\delta}(x),$$

принадлежащих классу A по леммам 6_{12} и 6_{10}. Следовательно, по лемме 6_{10} $g(x)$ принадлежит A.

Лемма 6_{18}. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу A и все нули функции $g(x)$ лежат на конечном числе промежутков, на которых функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то $f(x)/g(x)$ принадлежит классу A. Здесь мы полагаем $f(x)/g(x)=0$, если $f(x)=0$.*

В силу леммы 6_{17} функцию $f(x)/g(x)$ можно представить в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{h(x)}, \tag{12.09}$$

где $h(x)$ не имеет нулей на отрезке $[-\pi, \pi]$. Именно, $h(x)$ получается из $g(x)$ путем изменения этой функции на конечном числе промежутков, на которых $f(x)\equiv 0$, так, чтобы на этих промежутках $h(x)$ было отлично от нуля, а вне этих промежутков совпадало с $g(x)$. В силу леммы 6_{16} $1/h(x)$ принадлежит A и, таким образом, в силу (12.09) и 6_{10}, $f(x)/g(x)$ принадлежит A.

Скажем несколько слов об определении класса A в случае, когда ряд Фурье записан в вещественной форме. Если

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ одновременно абсолютно сходится или расходится во всех точках x. Поэтому можно определить класс функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье как класс функций, для которых сходится ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|c_n|$. Если же записать ряд Фурье в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

то для суммы абсолютных значений членов этого ряда имеет место неравенство

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{1}^{\infty}|a_n\cos nx+b_n\sin nx|=$$
$$=c_0+\sum_{1}^{\infty}|c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}|\leqslant\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|. \quad (12.10)$$

Таким образом, ряд из этих абсолютных значений может сходиться даже, если ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ расходится, что имеет место, например, если $x_0=0$, $c_n=-c_{-n}$.

Однако имеет место неравенство

$$|c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}|=|c_{-n}+c_ne^{2inx}|\geqslant|c_n||\sin 2nx|\geqslant$$
$$\geqslant|c_n|\sin^2 2nx,$$

а также

$$|c_ne^{inx}-c_{-n}e^{-inx}|\geqslant|c_{-n}|\sin^2 2nx.$$

Следовательно,

$$|c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}|\geqslant\frac{|c_n|+|c_{-n}|}{2}\sin^2 2nx=$$
$$=\frac{|c_n|+|c_{-n}|}{4}(1-\cos 4nx).$$

Пусть теперь ряд (12.10) сходится к пределу, который меньше L на множестве точек S не нулевой меры. Обозначим через $S(x)$ характеристическую функцию множества S (равную 1 на S и 0 вне S). По критерию ограниченной сходимости мы можем почленно проинтегрировать ряд

$$S(x)\left\{\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{1}^{\infty}|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\right\}$$

по конечному отрезку и, следовательно, можем почленно проинтегрировать ряд

$$\Sigma S(x) \frac{|c_n|+|c_{-n}|}{4}(1-\cos 4nx)$$

по конечному отрезку. Таким образом, ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|c_n|+|c_{-n}|}{4}\left\{m(S)-\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos 4nx\,dx\right\}$$

сходится. Но тогда по теореме Римана — Лебега сходится ряд

$$|c_0|+\sum_{1}^{\infty}\{|c_n|+|c_{-n}|\}\{1+O(1)\}$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n| \tag{12.11}$$

сходится. Таким образом, если ряд (12.10) сходится на множестве положительной меры, то сходится ряд (12.11). В частности, если абсолютная сходимость ряда Фурье понимается в смысле абсолютной сходимости почти всюду, она эквивалентна сходимости ряда (12.11)[1]).

§ 13. Доказательство общей тауберовой теоремы

Вернемся к рассмотрению классов $\varepsilon(\Sigma)$ и $\varepsilon'(\Sigma)$. Имеет место следующее утверждение:

Лемма 6_{19}. *Функция $K(x)$ класса L_1 принадлежит классу $\varepsilon(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi \tag{13.01}$$

принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$ для всех a.

Пусть K принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$. Тогда по лемме 6_5 выражение (13.01) принадлежит $\varepsilon(\varepsilon(\Sigma))$ и, следовательно, по лемме 6_1 $\varepsilon(\Sigma)$. Обратно, пусть (13.01) принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$ для

[1]) Лемма 6_{18} принадлежит А. Данжуа, Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques, C. R., 155 (1912), 135—136; Н. Лузин, Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques, там же, 580—582.

всех a. Тогда по леммам 6_9 и 6_6 $K(x)$ принадлежит $\varepsilon(\varepsilon(\Sigma))$ и, следовательно, $\varepsilon(\Sigma)$. Аналогичные рассуждения, использующие леммы 7_1, 7_5, 7_6 и 7_9, приводят к следующим предложениям:

Лемма 7_{19}. *Функция $K(x)$ из M_1 принадлежит классу $\varepsilon'(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда выражение* (13.01) *принадлежит $\varepsilon'(\Sigma)$ для всех a.*

Лемма 6_{20} (7_{20}). *Пусть $K_2(x)$ — функция из пространства L_1 (и, следовательно, по лемме 6_7 из M_1), преобразование Фурье которой обращается в нуль вне отрезка $[\alpha, \beta]$. Если существует функция $K(x)$ из множества Σ, преобразование Фурье $k(u)$ которой не обращается в нуль на этом отрезке, то $K_2(x)$ принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$ (или $\varepsilon'(\Sigma)$).*

В самом деле, пусть преобразование Фурье функции $K_2(x)$ равно $k_2(u)$. Тогда из лемм 6_7, 6_8 (7_8) и 6_{18} вытекает, что функция

$$k_3(u)=\begin{cases} \dfrac{k_2(u)\left(1-\dfrac{|u|}{a}\right)}{k(u)}, & \text{если } |u|<a; \\ 0, & \text{если } |u|\geqslant a, \end{cases} \tag{13.02}$$

при достаточно большом a принадлежит классу A. Здесь через A обозначен класс функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье и периодом $2B$ $(B>a)$ вместо 2π. Из 6_7 вытекает, что преобразование Фурье функции $k_3(u)$ принадлежит L_1. Кроме того, $k_3(u)$ является функцией класса L_2 поскольку эта функция ограничена и финитна. Следовательно, ее преобразование Фурье принадлежит как L_2, так и L_1. Обозначим преобразование Фурье функции $k_3(u)$ через $K_3(-x)$. Тогда по теореме Планшереля

$$k_3(u)=\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}K_3(x)\,e^{-iux}\,dx.$$

Кроме того, так как $K_3(x)$ принадлежит L_1, то интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}K_3(x)\,e^{-iux}dx \tag{13.03}$$

существует для любого u и в силу X_{41} почти всюду совпадает с $k_3(u)$. Таким образом, $k_3(u)$ является преобразованием Фурье функции $K_3(x)$, принадлежащей L_1.

Функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,K_3(y)\,dy \tag{13.04}$$

принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$ ($\varepsilon'(\Sigma)$) по лемме 6_5 (7_5). Ее преобразованием Фурье является

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,K_3(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_3(y)\,e^{-iuy}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,e^{-iu(x-y)}\,dx =$$

$$= k_3(u)\,k(u).$$

Таким образом, в силу (13.02) функция $k_4(u)$, определяемая равенствами

$$k_4(u) = \begin{cases} k_2(u)\left(1-\dfrac{|u|}{a}\right), & \text{если } |u| < a; \\ 0 & \text{если } |u| \geqslant a, \end{cases}$$

имеет своим преобразованием Фурье функцию (13.04). Следовательно, по лемме 6_8 имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-\xi)\,\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,K_3(y)\,dy,$$

где $K_3(u)$ принадлежит L_1. Из этого равенства и лемм 6_{19} (или 7_{19}) и 6_5 (или 7_5) и вытекает доказываемое утверждение.

Мы можем теперь доказать теоремы 6 и 7. Поскольку доказательства в обоих случаях совершенно одинаковы, мы ограничимся рассмотрением теоремы 6. Если $a < \infty$, то по теореме Гейне — Бореля можно покрыть отрезок $[-2a, 2a]$ конечным числом промежутков I_n, в каждом из которых преобразование Фурье какой-либо функции $K_1(x)$ из множества Σ не обращается в нуль. Таким образом, по лемме 6_{20} *любая* функция из L_1, преобразование Фурье которой отлично от нуля лишь на отрезке, лежащем внутри одного из промежутков I_n, принадлежит $\varepsilon(\Sigma.)$ Пусть теперь $K_2(x)$ — любая функция класса L_1. Обозначим ее преобразование Фурье через $k_2(u)$. Как и в лемме 6_{15}, мы можем написать

$$k_2(u)\left(1-\frac{|u|}{a}\right)=\sum_{1}^{N} k_2(u)\left(1-\frac{|u|}{a}\right) g_{a_k,\, b_{k-1},\, a_{k+1},\, b_k}(x)$$

на отрезке $[-a, a]$, причем каждое слагаемое отлично от нуля лишь на некотором отрезке, лежащем внутри одного из промежутков I_n. Кроме того, каждое слагаемое является функцией с абсолютно сходящимся рядом Фурье в силу лемм 6_{10} и 6_{12}. Следовательно, по лемме 6_7 преобразование Фурье каждого слагаемого принадлежит L_1. Но тогда из (13.03) и (13.04) следует, что эти слагаемые являются преобразованиями Фурье функций из класса L_1, а преобразование Фурье $k_2(u)\left(1-\frac{|u|}{a}\right)$ является суммой этих преобразований. Таким образом,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-\xi)\,\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2}\,d\xi \tag{13.05}$$

является суммой конечного числа функций, принадлежащих $\varepsilon(\Sigma)$, и, следовательно, принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$. Здесь мы вновь использовали рассуждения из (13.03) и (13.04). Тогда по лемме 6_{19} $K_2(x)$ принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$, чем и завершается доказательство.

§ 14. Замыкание множества сдвигов функции из L_1

Мы доказали одновременно следующее утверждение:
Теорема 8. *Если $K_1(x)$ принадлежит L_1 причем*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\,e^{iux}\,dx\neq 0 \tag{14.01}$$

для всех вещественных значений u, и если $K_2(x)$ принадлежит L_1, а $\varepsilon>0$, то найдется такая финитная функция $K_3(x)$ из пространства L_1, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|K_2(x)-\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x-\xi)\,K_3(\xi)\,d\xi\right|dx<\varepsilon. \tag{14.02}$$

В самом деле, в приведенном выше доказательстве теоремы 6 было показано, что функция $K_2(x)$ может быть аппроксимирована в смысле (14.02) функцией (13.05), причем эта функция может быть представлена в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi) K_3(\xi)\, d\xi,$$

где K_3 — финитная функция из L_1. Мы хотим теперь доказать, что если $K_1(x)$ и $K_3(x)$ принадлежат пространству L_1, то

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{-\infty}^{\infty} K_1(x-n\eta) \int_{n\eta}^{(n+1)\eta} K_3(\xi)\, d\xi - \right.$$
$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi) K_3(\xi)\, d\xi \right| dx = 0. \qquad (14.03)$$

Выражение, стоящее под знаком предела в (14.03), не превосходит

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{n\eta}^{(n+1)\eta} K_3(\xi) [K_1(x-n\eta) - K_1(x-\xi)]\, d\xi \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{n\eta}^{(n+1)\eta} |K_3(\xi)|\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} |K_1(x-n\eta) - K_1(x-\xi)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |K_3(\xi)|\, d\xi \max_{\xi \leqslant \eta} \int_{-\infty}^{\infty} |K_1(x+\xi) - K_1(x)|\, dx.$$

Но тогда (14.03) вытекает из X_{18}.

Мы доказали, таким образом, первое из утверждений следующей теоремы:

Теорема 9. *Если функция $K_1(x)$ принадлежит L_1 и для всех вещественных значений u*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\, e^{iux}\, dx \neq 0, \qquad (14.01)$$

а $K_2(x)$ принадлежит L_1, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое значение N, а также вещественные числа Λ_n

и комплексные числа $A_n (n=1, 2, \ldots, N)$ *такие, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| K_2(x) - \sum_{1}^{N} A_n K_1(x - \Lambda_n) \right| dx < \varepsilon. \tag{14.04}$$

Обратно, пусть K_1 *принадлежит* L_1 *и пусть для любого* K_2, *принадлежащего* L_1 *и* $\varepsilon > 0$ *можно найти величины* N, A_n *и* Λ_n, *обладающие указанными выше свойствами, для которых выполняется* (14.04). *Тогда имеет место* (14.01).

Докажем второе утверждение этой теоремы. Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x) e^{iu_0 x} dx = 0 \tag{14.05}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x) e^{iu_0 x} dx \neq 0.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| K_2(x) - \sum_{1}^{N} A_n K_1(x - \Lambda_n) \right| dx \geqslant$$
$$\geqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_2(x) - \sum_{1}^{N} A_n K_1(x - \Lambda_n) \right] e^{iu_0 x} dx \right| =$$
$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x) e^{iu_0 x} dx \right|,$$

а потому (14.04) невозможно для сколь угодно малого значения ε.

Точно так же можно установить следующую более общую теорему:

Теорема 10. *Пусть* Σ — *класс функций, принадлежащих пространству* L_1. *Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1) *Не существует вещественного числа* u_0, *для которого равенство* (14.05) *выполняется для всех функций* $K_1(x)$, *принадлежащих* Σ.

2) *Если* $K_2(x)$ *принадлежит* L_1 *и* $\varepsilon > 0$, *то найдутся целые числа* $N_1, \ldots, N_k$, *функции* $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$, *принадлежащие* Σ, *вещественные числа* $\Lambda_{n,j}$, *где* $j \leqslant k$, $n \leqslant N_j$ *и комплексные числа* $A_{n,j}$, *где* n *и* j *принимают те же самые значения, такие, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| K_2(x) - \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{N_k} A_{n,j} Q_j(x - \Lambda_{n,j}) \right| dx < \varepsilon. \tag{14.06}$$

Мы не будем приводить здесь полностью доказательство этой теоремы. Оно основано на локально-конечном[1]) покрытии оси $(-\infty, \infty)$ счетным множеством промежутков I, на каждом из которых преобразование Фурье одной из функций семейства Σ не обращается в нуль. После этого так же как и в теореме 9 доказывается, что если $K_2(x)$ — функция из L_1, преобразование Фурье которой обращается в нуль вне некоторого отрезка, лежащего внутри одного из промежутков I, а $K_1(x)$ — функция из Σ, преобразование Фурье которой не обращается в нуль на I, то можно найти целое число N, вещественные числа Λ_n и комплексные числа A_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ так, что выполняется (14.04). Доказательство протекает в основном так же, как и в случае теоремы 9.

Но каждый конечный отрезок покрывается суммой конечного числа промежутков семейства I. Поэтому из справедливости (14.04) для функций $K_2(x)$, преобразование Фурье которых обращается в нуль вне промежутков семейства I, вытекает, что (14.06) справедливо для функций $K_2(x)$, преобразование Фурье которых обращается в нуль вне некоторого конечного отрезка. С помощью теоремы 8 нетрудно закончить доказательство первого утверждения теоремы 10. Доказательство второго утверждения протекает точно так же, как в теореме 9.

Полное формальное доказательство явится хорошим упражнением для читателя.

---

[1]) Покрытие называется локально-конечным, если каждый отрезок $[-A, A]$ пересекается лишь с конечным числом промежутков покрытия.

§ 15. Замыкание множества сдвигов функций из пространства L_2

Теорема 11. *Пусть функция $K_1(x)$ принадлежит L_2 и почти всюду на оси $-\infty < u < \infty$ имеем*

$$\underset{A \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} K_1(x) e^{iux}\,dx \neq 0. \tag{15.01}$$

Тогда для любой функции $K_2(x)$ из L_2 и любого $\varepsilon > 0$ найдутся целое число N, вещественные числа Λ_n и комплексные числа A_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| K_2(x) - \sum_{1}^{N} A_n K_1(x - \Lambda_n) \right|^2 dx < \varepsilon. \tag{15.02}$$

Обратно, пусть K_1 принадлежит L_2 и пусть можно для любой функции K_2, принадлежащей L_2, и любого $\varepsilon > 0$ найти числа N, A_n и Λ_n, для которых выполняется соотношение (15.02). *Тогда* (15.01) *справедливо почти всюду.*

Слово «почти» отличает эту теорему от теоремы 9. Это различие между L_2-теоремой и соответствующей L_1-теоремой весьма естественно, так как преобразование Фурье функции из L_1 определено всюду, в то время как преобразование Фурье функции из L_2 определено лишь «почти всюду».

При доказательстве теоремы 11 мы имеем то преимущество, что теория преобразования Фурье вполне симметрична в L_2, что не имеет места для любого другого лебеговского класса. Классом преобразований Фурье функций из L_2 является само L_2, что позволяет сформулировать теорему 11 следующим образом:

Теорема 12. *Если $k_1(u)$ принадлежит L_2 и обращается в нуль лишь на множестве меры нуль и если $k_2(u)$ принадлежит L_2, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся целое число N, вещественные числа Λ_n и комплексные* *числа* A_n $(n=1, 2, \ldots, N)$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|k_2(u)-k_1(u)\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n u}\right|^2 du < \varepsilon. \tag{15.03}$$

Обратно, пусть k_1 ***принадлежит*** L_2 ***и пусть можно для любой функции*** k_2, ***принадлежащей*** L_2 ***и*** $\varepsilon > 0$, ***найти числа*** N, A_n ***и*** Λ_n ***с указанными выше свойствами, для которых выполняется*** (15.03). *Тогда функция* $k_1(u)$ ***обращается в нуль на множестве нулевой меры***. Эквивалентность теорем 11 и 12 легко следует из того, что интеграл квадрата модуля функции равен интегралу квадрата модуля ее преобразования Фурье.

Перейдем к доказательству теоремы: пусть $\eta > 0$ и пусть A — настолько большое число, что

$$\left[\int_{-\infty}^{-A}+\int_{A}^{\infty}\right]|k_2(u)|^2 du < \eta. \tag{15.035}$$

Положим

$$f(u)=k_2(u)/k_1(u)$$

и пусть B настолько большое число, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_B(u)k_1(u)-k_2(u)|^2 du < \eta. \tag{15.04}$$

Такое значение B можно найти, так как $|f_B(u)k_1(u)-k_2(u)|^2$ является всюду убывающей последовательностью, которая почти всюду стремится к нулю, а потому в силу критерия монотонной сходимости

$$\lim_{B\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_B(u)k_1(u)-k_2(u)|^2 du = 0.$$

Мы использовали здесь, что $k_1(u)$ обращается в нуль лишь на множестве нулевой меры.

Из (15.035) и определения $f_B(u)$ вытекает

$$\left[\int_{-\infty}^{-A}+\int_{A}^{\infty}\right]|f_B(u)k_1(u)|^2 du < \eta. \tag{15.05}$$

Комбинируя (15.05) и (15.04), получаем в силу неравенства Минковского

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k_2(u) - {}_Af_B(u)\, k_1(u)|^2\, du < 4\eta. \tag{15.06}$$

Пусть $g(u, C)$ — функция с периодом $2C$, $C > A$, равная ${}_Af_B(u)$ на отрезке $[-C, C]$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_B(u)\, k_1(u) - g(u, C)\, k_1(u)|^2\, du =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \left\{ \int_{-C}^{C} |{}_Af_B(u)\, k_1(u + 2nC)|^2\, du + \right.$$

$$\left. + \int_{-C}^{C} |{}_Af_B(u)\, k_1(u - 2nC)|^2\, du \right\} \leqslant$$

$$\leqslant B^2 \int_{C}^{\infty} |k_1(u)|^2\, du + B^2 \int_{-\infty}^{-C} |k_1(u)|^2\, du.$$

Пусть C — настолько большое число, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |{}_Af_B(u)\, k_1(u) - g(u, C)\, k_1(u)|^2\, du < \eta$$

(очевидно, такое C можно найти). Тогда в силу (15.06) и неравенства Минковского

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k_2(u) - g(u, C)\, k_1(u)|^2\, du < 9\eta. \tag{15.07}$$

Пусть

$$g(u, C) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{\pi i n u}{C}}.$$

Очевидно, что

$$a_n = \frac{1}{2C} \int_{-C}^{C} g(u, C)\, e^{-\frac{\pi i n u}{C}}\, du.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)a_n e^{\frac{\pi i n u}{C}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2C}\int_{-C}^{C} g(v, C)\,dv \sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{\frac{\pi i n (v-u)}{C}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant B\int_{-C}^{C}\left|\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{\frac{\pi i n (v-u)}{C}}\right| dv.$$

Но легко проверить, например, с помощью математической индукции, что

$$\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{inx} = \frac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)a_n e^{\frac{\pi i n u}{C}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant B\int_{-C}^{C}\left[\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{\frac{\pi i n (v-u)}{C}}\right] dv = 2BC. \tag{15.08}$$

Далее,

$$\int_{-C}^{C}\left|g(u, C)-\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)a_n e^{\frac{\pi i n u}{C}}\right|^2 du =$$

$$= 2C\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2 - \sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{n^2}{N^2}\right)|a_n|^2\right\},$$

где правая часть стремится к нулю с возрастанием N. Таким образом, можно найти последовательность N_k такую, что

$$\left|g(u, C)-\sum_{-N_k}^{N_k}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)a_n e^{\frac{\pi i n u}{C}}\right| \to 0$$

для почти всех значений u. Из критерия мажорированной сходимости вытекает в силу (15.08), что найдется значение N_k, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(u, C)\,k_1(u)-\sum_{-N_k}^{N_k}\left(1-\frac{|n|}{N_k}\right)a_n e^{\frac{\pi i n u}{C}}k_1(u)\right|^2 du<\eta.$$

Следовательно, в силу неравенства Минковского получаем из (15.07), что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|k_2(u)-\sum_{-N_k}^{N_k}\left(1-\frac{|n|}{N_k}\right)a_n e^{\frac{\pi i n u}{C}}k_1(u)\right|^2 du<25\eta.$$

Таким образом, выбирая $\eta=\varepsilon/25$, мы убеждаемся в справедливости неравенства вида (15.03). Это завершает доказательство первого утверждения теоремы 12, а тем самым и теоремы 11.

Что же касается второго утверждения этой теоремы, то если $k_1(u)$ обращается в нуль на множестве положительной меры, то положим $k_2(u)=1$ на части этого множества, имеющей положительную меру, и нулю вне этого множества. Тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|k_2(u)-k_1(u)\sum_{1}^{N}A_n e^{i\Lambda_n u}\right|^2 du$$

не может быть меньше меры множества, на котором $k_2(u)=1$ и $k_1(u)=0$. Таким образом, (15.03) невозможно.

ГЛАВА III

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ

§ 16. Теорема Абеля — Таубера

Первая теорема типа, известного под названием тауберовых теорем, была доказана в 1897 г. А. Таубером[1]). Она утверждает, что если ряд $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ сходится при $0 \leqslant x < 1$, если $a_n = o(1/n)$ и если $f(x)$ стремится к s, когда $x \to 1-0$, то $\sum_{0}^{\infty} a_n = s$. Таким образом, эта теорема утверждает, что при некоторых дополнительных условиях справедлива теорема, обратная теореме Абеля, согласно которой, если $\sum_{0}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_n.$$

Заметим, что теорема, обратная теореме Абеля, неверна без дополнительных условий. Например, ряд $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n$ расходится, но

$$\sum_{0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

при $|x| < 1$, а эта функция стремится к $1/2$, когда $x \to 1$. Однако утверждение теоремы Таубера остается справедливым и при менее ограничительных условиях на a_n, чем те, кото-

[1]) А. Таубер, «Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen». Monatshefte f. Math. 8 (1897), 273—277.

рые были даны Таубером. Основная теорема принадлежит здесь Литтльвуду[1]). Она гласит:

Теорема 13. *Пусть* $\sum_0^\infty a_n x^n$ *сходится к* $f(x)$ *при* $|x|<1$. *Пусть*

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = s, \tag{16.01}$$

когда x *стремится слева к* 1. *Пусть* $n|a_n| < K < \infty$. *Тогда*

$$\sum_0^\infty a_n = s. \tag{16.02}$$

В самом деле, положим

$$s(x) = \sum_0^{[x]} a_n.$$

Мы имеем

$$\left| s(x) - f\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)\right| = \left| \sum_0^{[x]} a_n \left(1 - e^{-\frac{n}{x}}\right) - \sum_{[x]+1}^\infty a_n e^{-\frac{n}{x}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{[x]} \frac{K}{n}\frac{n}{x} + \sum_{[x]+1}^\infty \frac{K}{n} e^{-\frac{n}{x}} \leqslant 2K + K\int_{[x]}^\infty e^{-\frac{u}{x}}\frac{du}{u} \leqslant$$

$$\leqslant 3K + K\int_1^\infty e^{-u}\frac{du}{u} = \text{const.} \tag{16.03}$$

Но функция $f\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$ ограничена при $0 \leqslant x < \infty$. Следовательно, и функция $s(x)$ ограничена.

Но в силу X_{36}

$$f(e^{-x}) = \sum_0^\infty a_n e^{-nx} = \int_{-0}^\infty e^{-ux}\, ds(u) = \int_0^\infty x e^{-ux} s(u)\, du.$$

Следовательно,

$$s = \lim_{x\to 0} \int_0^\infty x e^{-ux} s(u)\, du = \lim_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{-\xi} e^{-e^{\eta-\xi}} s(e^\eta) e^\eta\, d\eta. \tag{16.04}$$

---

[1]) Литтльвуд, «On the converse of Abel's theorem on power series», Proc. Lond. Math. Soc. (2), 9 (1910), 434—444.

Положим $K_1(\xi) = e^{-\xi}e^{-e^{-\xi}}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi}e^{-e^{-\xi}}\,d\xi = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Формула (16.04) может быть записана в виде

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta)\,s(e^{\eta})\,d\eta = s\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\,d\xi,$$

где $s(e^{-\eta})$ — ограниченная функция. Кроме того,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^{iu}e^{-x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1+iu) \neq 0.$$

Таким образом, условия теоремы 4 выполнены и если положить

$$K_2(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < 0; \\ e^{-\xi}, & \text{если } \xi > 0; \end{cases} \tag{16.045}$$

то в силу (10.04) имеем

$$s = s\int_{0}^{\infty} e^{-\xi}\,d\xi = s\int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi)\,d\xi = \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi-\eta)\,s(e^{\eta})\,d\eta =$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\xi} e^{\eta-\xi}s(e^{\eta})\,d\eta = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x} s(y)\,dy. \tag{16.05}$$

Отсюда вытекает, что если $\lambda > 0$, то

$$s = \frac{(1+\lambda)\,s - s}{\lambda} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda x}\left[\int_{0}^{(1+\lambda)x} s(y)\,dy - \int_{0}^{x} s(y)\,dy\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda x}\int_{x}^{(1+\lambda)x} s(y)\,dy = \lim_{x\to\infty}\left\{s(x) + \frac{1}{\lambda x}\int_{x}^{(1+\lambda)x}\{s(y)-s(x)\}\,dy\right\}. \tag{16.06}$$

Но для достаточно больших значений x

$$\left|\frac{1}{\lambda x}\int\limits_{x}^{(1+\lambda)x}\{s(y)-s(x)\}\,dy\right| \leqslant \frac{1}{\lambda x}\int\limits_{x}^{(1+\lambda)x} dy \sum_{[x]+1}^{[y]} \frac{K}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{[x]+1}^{[(1+\lambda)x]} \frac{K}{[x]} \leqslant \frac{[\lambda x]\,K}{[x]} < 2\lambda K.$$

Следовательно, в силу (16.06)

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|s(x)-s| < 2\lambda K,$$

и так как λ — любое положительное число, то

$$\lim_{x\to\infty}|s(x)-s| = 0. \qquad (16.07)$$

Но полученное равенство является лишь иной формой равенства (16.02). Тем самым доказательство теоремы 13 завершено [1]).

Особенно простое доказательство этой теоремы было дано Карамата [2]). Оно протекает следующим образом: если выполнено (16.04) и $K_3(\xi)$ — любая функция из L_1, для которой при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такой многочлен

$$P_n(\xi) = \sum_{1}^{n} a_k e^{\ln k-\xi} e^{-e^{\ln k-\xi}}, \qquad (16.08)$$

что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_3(x) - P_n(\xi)|\,d\xi < \varepsilon,$$

то по лемме 6_6 имеем

$$\lim_{\xi\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_3(\xi-\eta)\,s\left(e^{\eta}\right)d\eta = s\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_3(\xi)\,d\xi. \qquad (16.09)$$

Но из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами следует, что если $f(x)/x$ — любая непрерывная функция от x на отрезке [0, 1], то функцию $f(x)$

---

[1]) См. Шмидт [1]; Винер [2].
[2]) Карамата [1].

можно равномерно аппроксимировать на этом отрезке многочленами вида

$$\sum_1^n k a_k x^{k-1}.$$

Таким образом, если $P_n(x)$ определено так, как в (16.08), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\xi} f\left(e^{-e^{-\xi}}\right) - P_n(\xi) \right| d\xi = \int_0^{\infty} \left| f(e^{-x}) - \sum_1^n k a_k e^{-kx} \right| dx =$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{f(y)}{y} - \sum_1^n k a_k y^{k-1} \right| dy \leqslant \max_{0 < y \leqslant 1} \left| \frac{f(y)}{y} - \sum_1^n k a_k y^{k-1} \right|.$$

Отсюда вытекает, что если

$$K_3(\xi) = e^{-\xi} f\left(e^{-e^{-\xi}}\right), \tag{16.095}$$

где $f(x)/x$ — непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$, то выполнено (16.09). Положим теперь

$$K_3(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \xi < -\varepsilon; \\ \dfrac{\xi + \varepsilon}{\varepsilon}, & \text{если} \quad -\varepsilon \leqslant \xi < 0; \\ e^{-\xi}, & \text{если} \quad \xi > 0. \end{cases}$$

Если определить $f(x)$ равенством (16.095), то очевидно, что функция $f(x)/x$ непрерывна в любой внутренней точке отрезка $[0, 1]$. Но на отрезке $\left[0, e^{-e^{\varepsilon}}\right]$ $\dfrac{f(x)}{x} \equiv 0$, а в окрестности точки $x = 1$ функция $f(x)/x \equiv 1/x$. Отсюда и вытекает (16.09).

Кроме того, если выбрать в качестве $K_2(\xi)$ функцию, определенную равенствами (16.045), то очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |K_3(\xi) - K_2(\xi)| \, d\xi = 0.$$

Таким образом, вновь применяя лемму 6_6, мы приходим к соотношению (16.05), после чего доказательство теоремы 13 заканчивается точно так же, как и выше.

Заметим, что в доказательстве Карамата не используется преобразование Фурье функции $K_2(\xi)$, так как частный вид

$K_2(x)$ позволяет применить теорему Вейерштрасса. Однако мы видели в теоремах 11 и 12, что в общем случае нельзя изучать проблемы замкнутости или полноты, аналогичные теореме Вейерштрасса, без того, чтобы войти в область, где даются необходимые и достаточные условия, зависящие от распределения нулей преобразований Фурье некоторых ядер. Таким образом, методы Карамата более простые в тех случаях, где их естественно применять, не могут дать той широты кругозора, которую имеют методы предыдущей главы.

В предположениях теоремы 13 можно заменить [1]) условие ограниченности na_n более слабым условием

$$na_n > -K. \tag{16.10}$$

В самом деле, так как функция $e^{-x} - e^{-2x}$ имеет максимум в точке $x = \ln 2$ и убывает на промежутке (1, 2), то

$$\begin{aligned} f\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) - f\left(e^{-\frac{2}{x}}\right) &= \sum_0^\infty a_n \left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-\frac{2n}{x}}\right) = \\ &= \sum_0^{[x]} a_n \left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-\frac{2n}{x}}\right) + \sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n \left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-\frac{2n}{x}}\right) + \\ &+ \sum_{[2x]+1}^{\infty} a_n \left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-\frac{2n}{x}}\right) \geqslant -\sum_0^{[x]} \frac{K}{n}\frac{n}{x} + \\ &+ \sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n (e^{-2} - e^{-4}) - \sum_{[x]+1}^{[2x]} \frac{K}{n} (e^{-1} - 2e^{-2} + e^{-4}) - \\ &- \sum_{[2x]+1}^{\infty} \frac{K}{n} \left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-\frac{2n}{x}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (16.01) вытекает

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n \leqslant \frac{1}{e^{-2} - e^{-4}} \left\{ K + 2K(e^{-1} - 2e^{-2} + e^{-4}) + \right. \\ \left. + K \int_2^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du \right\}.$$

---

[1]) Ландау [1].

Здесь последний интеграл имеет тот же вид, что и в (16.03). Комбинируя полученное соотношение с (16.10), мы убеждаемся в существовании такого числа Q, не зависящего от N, что

$$\left|\sum_{N+1}^{2N} a_n\right| < Q.$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{[x]+1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{x}} = \sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n e^{-\frac{n}{x}} + \sum_{[2x]+1}^{[4x]} a_n e^{-\frac{n}{x}} + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant Q\,(e^{-1}+e^{-2}+e^{-4}+\ldots) + \sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n\left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-1}\right) +$$

$$+ \sum_{[2x]+1}^{[4x]}\left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-2}\right) + \ldots \leqslant \frac{Q}{1+e} + e^{-1}\sum_{[x]+1}^{[2x]} \frac{K}{n}\left(\frac{n}{x} - 1\right) +$$

$$+ e^{-2}\sum_{[2x]+1}^{[4x]} \frac{K}{n}\left(\frac{n}{2} - 2\right) + \ldots \leqslant \frac{Q}{1+e} +$$

$$+ K\left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{2^2}{e^4} + \frac{2^3}{e^8} + \ldots\right) < \text{const.} \quad (16.11)$$

Точно так же

$$\sum_{[x]+1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{x}} \geqslant -Q\,(e^{-2}+e^{-4}+\ldots) +$$

$$+ \sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n\left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-2}\right) + \sum_{[2x]+1}^{[4x]}\left(e^{-\frac{n}{x}} - e^{-4}\right) + \ldots > \text{const.}$$

$$(16.12)$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{[x]+1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{x}}\right| < \text{const.}$$

Так как функция $f(x)$ ограничена, то

$$\left|\sum_{0}^{[x]} a_n e^{-\frac{n}{x}}\right| < \text{const.} \quad (16.13)$$

Следовательно, если $\xi = 2x$,

$$\left|\sum_0^{[x]} a_n e^{-\frac{n}{2x}}\right| = \left|\sum_0^{[\xi/2]} a_n e^{-\frac{n}{\xi}}\right| =$$

$$= \left|\sum_0^{[\xi]} a_n e^{-\frac{n}{\xi}} - \sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n e^{-\frac{n}{2x}}\right| \leqslant \text{const} + \left|\sum_{[x]+1}^{[2x]} a_n e^{-\frac{n}{2x}}\right|,$$

и потому в силу рассуждений, аналогичных примененным в (16.11) и (16.12),

$$\left|\sum_0^{[x]} a_n e^{-\frac{n}{2x}}\right| < \text{const}.$$

Отсюда следует

$$\left|\sum_0^{[x]} a_n \left(3e^{-\frac{n}{2x}} - 2e^{-\frac{n}{x}}\right)\right| < \text{const}. \tag{16.14}$$

Заметим, что на отрезке $[0, [x]]$

$$1 + \frac{n}{2x} \geqslant 3e^{-\frac{n}{2x}} - 2e^{-\frac{n}{x}} \geqslant 1.$$

Из (16.10) и (16.13) вытекает

$$\sum_0^{[x]} a_n = \sum_0^{[x]} a_n e^{-\frac{n}{x}} + \sum_0^{[x]} a_n \left(1 - e^{-\frac{n}{x}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \text{const} - \frac{K}{x} \sum_0^{[x]} \frac{1}{n} \frac{n}{x} \geqslant \text{const}.$$

Точно так же из (16.10) и (16.14) вытекает

$$\sum_0^{[x]} a_n = \sum_0^{[x]} a_n \left(3e^{-\frac{n}{2x}} - 2e^{-\frac{n}{x}}\right) + \sum_0^{[x]} a_n \left(1 + 2e^{-\frac{n}{x}} - 3e^{-\frac{n}{2x}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} + \frac{K}{2x} \sum_0^{[x]} \frac{1}{n} \frac{n}{x} \leqslant \text{const}.$$

Таким образом, функция $s(x)$ ограничена и мы можем так же, как и выше, воспользоваться равенствами (16.05) и

(16.06). Таким образом,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, s(x) \leqslant s - \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} \{s(y) - s(x)\}\, dy \leqslant$$
$$\leqslant s + \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} dy \sum_{[x]+1}^{[y]} \frac{K}{n} < s + 2\lambda K,$$

и так как λ произвольно, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, s(x) \leqslant s. \tag{16.15}$$

Но в силу (16.06)

$$s = \lim_{x\to\infty} \left\{ s(x(1+\lambda)) + \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} \{s(y) - s(x(1+\lambda))\}\, dy \right\},$$

а потому

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, s(x) \geqslant s + \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} \{s(x(1+\lambda)) - s(y)\}\, dy \geqslant$$
$$\geqslant s - \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} dy \sum_{[y]+1}^{[(1+\lambda)x]} \frac{K}{n} > s - 2\lambda K,$$

и так как λ произвольно, то

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, s(x) \geqslant s. \tag{16.16}$$

Комбинируя (16.15) и (16.16), мы получаем (16.07) или (16.02). Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 14. *Пусть ряд* $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ *сходится к* $f(x)$ *при* $|x| < 1$. *Пусть*

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = s \tag{16.01}$$

и

$$na_n > -K. \tag{16.10}$$

Тогда

$$\sum_0^\infty a_n = s. \tag{16.02}$$

§ 17. Теоремы о простых числах как теоремы тауберова типа

В этом и следующих трех параграфах будут указаны приложения теорем тауберова типа к задачам распределения простых чисел. Теорема, которую мы докажем, является знаменитой теоремой Адамара и Валле Пуссена и гласит следующее [1]):

Теорема 15. *Если $\pi(u)$ — число простых чисел, не превосходящих u, то*

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}. \tag{17.01}$$

Здесь символ $A(n) \sim B(n)$ означает, что при $n \to \infty$

$$\frac{A(n)}{B(n)} \to 1.$$

Первым шагом в доказательстве теоремы 15 является следующее утверждение:

Лемма 15_1.

$$\pi(n) = o(n).$$

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — (конечная или бесконечная) последовательность простых чисел. Рассмотрим любые $p_1 p_2 \ldots p_n$ последовательных натуральных чисел. Тогда

$$\prod_1^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) p_1 p_2 \ldots p_n \tag{17.02}$$

из них не делится ни на одно p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. В самом деле, вычтем из $p_1 p_2 \ldots p_k$ число целых чисел нашей последовательности, делящихся на одно из p_k, прибавим потом число чисел, делящихся на два различных p_k, которые были вычтены дважды, вычтем число чисел, делящихся на три различных p_k и так далее. Мы получим выражение

$$p_1 p_2 \ldots p_n \left(1 - \sum \frac{1}{p_k} + \sum \frac{1}{p_j p_k} - \sum \frac{1}{p_j p_k p_l} + \ldots\right),$$

[1]) Ландау [2]; Ингам А. Е., Распределение простых чисел, М. — Л., 1936.

где каждая сумма распространена на все комбинации различных индексов. Но это выражение очевидно идентично (17.02). Таким образом, окончательно

$$\frac{\pi(n)}{n} \leqslant \prod_{1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Тем самым лемма 15_1 доказана, если бесконечное произведение $\prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ расходится к нулю.

С другой стороны, если бы это бесконечное произведение сходилось, то мы имели бы

$$\sum \frac{1}{p_k} < \infty. \tag{17.03}$$

Но это невозможно, если $\pi(n)/n$ не стремится к нулю. В самом деле, пусть $\pi(n) \geqslant An$ для бесконечной последовательности значений n. Тогда для бесконечной последовательности значений n

$$p_n \leqslant \frac{n}{A}$$

и

$$\sum_{[n/2]}^{n} 1/p_k \geqslant \frac{A}{2},$$

что противоречит (17.03), если $A > 0$. Тем самым лемма 15_1 полностью доказана.

Введем теперь теоретико-числовые функции

$$\omega(u) = \pi(u) + \frac{1}{2}\pi\left(u^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(u^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots, \tag{17.04}$$

и $\Lambda(n)$, определяемую равенством

$$\begin{aligned} &\Lambda(p^k) = \ln p, && \text{если } p \text{ — простое и } k \text{ — натуральное;} \\ &\Lambda(n) = 0, && \text{если } n \text{ не имеет вида } p^k. \end{aligned}$$

Эти функции более регулярны, чем $\pi(n)$, а поэтому целесообразно записать соотношение (17.01) в форме, связанной с этими функциями.

Очевидно, что $\pi(u) = 0$, если $u < 2$, так что (17.04) является, на самом деле, конечной суммой, где последний не равный нулю член зависит от значения наибольшего корня из u с целым показателем, который равен или превосходит 2. Таким образом, мы имеем

$$|\omega(u)-\pi(u)| =$$
$$=\left|\frac{1}{2}\pi\left(u^{\frac{1}{2}}\right)+\ldots+\frac{\pi\left(\exp\frac{\ln u}{[\ln u/\ln 2+1]}\right)}{[\ln u/\ln 2]+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant u^{\frac{1}{2}}[\ln u/\ln 2]=O\left(u^{\frac{1}{2}}\ln u\right). \quad (17.05)$$

Из (17.05) и леммы 15_1 вытекает

$$\omega(u)=o(u). \quad (17.06)$$

Так как $n^{\frac{1}{2}}\ln n$ имеет меньший порядок, чем $n/\ln n$, то результат, который мы хотим доказать в теореме 15, означает, что

$$\omega(n)\sim\frac{n}{\ln n}. \quad (17.07)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\omega(N)\ln N}{N}=1. \quad (17.08)$$

Но в силу (17.06)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N\frac{\omega(u)\,du}{u}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N o(1)\,du=o(1).$$

Таким образом, мы можем записать (17.08) в виде

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\omega(N)\ln N}{N}-\frac{1}{N}\int_0^N\frac{\omega(u)\,du}{u}\right\}=1,$$

или, интегрируя по частям,

$$1=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N\ln u\,d\omega(u)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln n\,(\omega(n+0)-\omega(n-0)).$$

Но функция $\omega(u)$ кусочно-постоянна и имеет разрывы лишь в точках вида p^ν, где p — простое, причем скачок в этих точках равен $1/\nu$. Поэтому

$$\Lambda(n) = \ln n\,(\omega(n+0) - \omega(n-0)).$$

Следовательно, теорема 15 будет доказана, если мы установим, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Lambda(n) = 1. \tag{17.085}$$

Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}. \tag{17.09}$$

Эти ряды называются рядами Ламберта, который открыл их в XVIII веке[1]). Формально эти ряды эквивалентны рядам

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{m/n} a_m, \tag{17.10}$$

коэффициенты которых являются суммами всех коэффициентов a_m, индексы m которых являются делителями n. Это вытекает из того, что

$$\frac{x^m}{1-x^m} = x^m + x^{2m} + x^{3m} + \ldots \tag{17.11}$$

Если коэффициенты a_n таковы, что ряд

$$\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $|x| < 1$, то легко видеть, что при $|x| < 1$ ряд (17.09) абсолютно сходится, а потому перестановка членов, приводящая к (17.10) справедлива при $|x| < 1$. В частности,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{1}^{\infty} x^n \sum_{m/n} \Lambda(m).$$

Пусть теперь

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_\nu^{k_\nu},$$

[1]) К. Кнопп, Unendliche Reihen, § 58 C.

где $p_1, \ldots, p_\nu$ — простые числа, $k_1, \ldots, k_\nu$ — натуральные числа. Множители числа n, для которых функция Λ принимает ненулевое значение, имеют вид

$$p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{k_1}; \quad p_2, p_2^2, \ldots, p_2^{k_2}; \ldots; \quad p_\nu, p_\nu^2, \ldots, p_\nu^{k_\nu}.$$

Значениями функции Λ для этих множителей являются

$$\ln p_1, \ln p_1, \ldots, \ln p_1; \quad \ln p_2, \ln p_2, \ldots, \ln p_2; \ldots; \quad \ln p_\nu, \ln p_\nu, \ldots, \ln p_\nu.$$

Таким образом,

$$\sum_{m/n} \Lambda(m) = k_1 \ln p_1 + k_2 \ln p_2 + \ldots + k_\nu \ln p_\nu = \ln n.$$

Следовательно,

$$\sum_1^\infty \Lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_1^\infty x^m \ln m.$$

В силу леммы Абеля о рядах

$$\sum_1^\infty x^m \ln m = \sum_1^\infty \ln m \frac{x^m - x^{m+1}}{1-x} =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{x^{m+1}}{1-x} [\ln(m+1) - \ln m] = \frac{x}{1-x} \sum_1^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) x^m =$$

$$= \frac{x}{1-x} \sum_1^\infty \left[\frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right] x^m =$$

$$= \frac{x}{1-x}\left[\ln \frac{x}{1-x} + \sum_1^\infty O\left(\frac{1}{m^2}\right) x^m\right].$$

Положим теперь $x = e^{-\xi}$ и умножим полученное равенство на $-\xi$. Мы получим

$$\sum_1^\infty \Lambda(n) \frac{\xi e^{-n\xi}}{e^{-n\xi} - 1} = \frac{\xi e^{-\xi}}{1 - e^{-\xi}} \left[\ln(1 - e^{-\xi}) - \sum_1^\infty O\left(\frac{1}{m^2}\right) e^{-m\xi}\right]. \tag{17.12}$$

Формальное дифференцирование рядов в обеих частях этого равенства дает соответственно

$$\sum_1^\infty \Lambda(n) \frac{d}{dn\xi}\left(\frac{n\xi e^{-n\xi}}{e^{-n\xi}-1}\right) =$$
$$= \sum_1^\infty \Lambda(n) \frac{(1-n\xi)e^{-n\xi}(e^{-n\xi}-1)+n\xi e^{-2n\xi}}{(e^{-n\xi}-1)^2} =$$
$$= \sum_1^\infty \Lambda(n) \frac{e^{-2n\xi}-e^{-n\xi}+n\xi e^{-n\xi}}{(e^{-n\xi}-1)^2} \tag{17.13}$$

и

$$\frac{e^{-\xi}-e^{-2\xi}-\xi e^{-\xi}}{(1-e^{-\xi})^2}\left[\ln(1-e^{-\xi}) - \sum_1^\infty O\left(\frac{1}{m^2}\right)e^{-m\xi}\right] +$$
$$+ \frac{\xi e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}}\left[\frac{e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}} - \sum_1^\infty O\left(\frac{1}{m}\right)e^{-m\xi}\right]. \tag{17.14}$$

При $\xi > 0$ ряд (17.13) мажорируется выражением вида

$$\text{const}\sum_1^\infty \Lambda(n)\, n\xi e^{-n\xi}$$

и, следовательно, равномерно сходится при $\xi > \varepsilon$. Таким образом, ряд (17.13) можно почленно проинтегрировать, или, что то же самое, ряд, стоящий в левой части (17.12), можно почленно продифференцировать. То же самое справедливо и для ряда, стоящего в правой части равенства, поскольку ряд (17.14) равномерно сходится при $\xi > \varepsilon$. Следовательно, при $\xi \to 0$ имеем

$$\sum_1^\infty \Lambda(n) \frac{d}{dn\xi}\frac{n\xi e^{-n\xi}}{e^{-n\xi}-1} = \sum_1^\infty \Lambda(n) \frac{e^{-2n\xi}-e^{-n\xi}+n\xi e^{-n\xi}}{(e^{-n\xi}-1)^2} =$$
$$= \frac{e^{-\xi}-e^{-2\xi}-\xi e^{-\xi}}{(1-e^{-\xi})^2}\left[\ln(1-e^{-\xi}) + \sum_1^\infty O\left(\frac{1}{m^2}\right)e^{-m\xi}\right] +$$
$$+ \frac{\xi e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}}\left[\frac{e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}} + \sum_1^\infty O\left(\frac{1}{m}\right)e^{-m\xi}\right] =$$

$$= O(1)\,[O(\ln\xi) + O(1)] + [1 + O(\xi)]\left[\frac{1}{\xi} + O(1) + O(\ln\xi)\right] = \\ = 1/\xi + O(\ln\xi).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\xi\to 0}\xi\sum_{1}^{\infty}\Lambda(n)\frac{e^{-2n\xi} - e^{-n\xi} + n\xi e^{-n\xi}}{(e^{-n\xi}-1)^2} = 1. \qquad (17.15)$$

Положим

$$g(y) = \sum_{n=1}^{[e^y]}\frac{\Lambda(n)}{n}.$$

Тогда (17.15) принимает вид

$$1 = \lim_{\xi\to 0}\int_0^{\infty}\eta\xi\,\frac{e^{-2\eta\xi} - e^{-\eta\xi} + \eta\xi e^{-\eta\xi}}{(e^{-\eta\xi}-1)^2}\,dg(\ln\eta) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{y-x}\left(e^{-2e^{y-x}} - e^{-e^{y-x}} + e^{y-x}e^{-e^{y-x}}\right)}{\left(e^{-e^{y-x}}-1\right)^2}\,dg(y).$$

Полученное равенство является частным случаем равенства (10.06), если положить в (10.06) $A = 1$ и

$$K_1(x) = \frac{e^{-x}\left(e^{-2e^{-x}} - e^{-e^{-x}} + e^{-x}e^{-e^{-x}}\right)}{\left(e^{-e^{-x}}-1\right)^2}$$

и вспомнить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{e^{-2\xi} - e^{-\xi} + \xi e^{-\xi}}{(e^{-\xi}-1)^2}\,d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi e^{-\xi}}{e^{-\xi}-1}\right) = \lim_{\xi\to 0}\frac{\xi e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}} = 1.$$

Функция $K_1(x)$ принадлежит M_1 и, кроме того, положительна. Для доказательства этого достаточно доказать, что при $\xi > 0$

$$e^{-2\xi} - e^{-\xi} + \xi e^{-\xi} \geqslant 0$$

или же, что

$$e^{-\xi} > 1 - \xi,$$

а это неравенство хорошо известно. Далее, функция $g(y)$ монотонно возрастает. Таким образом,

$$1 = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y)\, dg(y) \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{x \to \infty}} \int_{x}^{x+1} K(x-y)\, dg(y) \geqslant \overline{\lim_{x \to \infty}} \min_{-1 \leqslant u \leqslant 0} |K(u)| \int_{x}^{x+1} dg(y). \tag{17.16}$$

Отсюда легко вытекает существование такого K, что для любого вещественного x

$$\int_{x}^{x+1} dg(y) < K. \tag{17.17}$$

Для этого достаточно лишь вспомнить, что данный интеграл по определению ограничен на любом конечном отрезке изменения x и обращается в нуль при $x < -1$. Комбинируя этот факт с (17.16), мы получаем требуемый результат.

Так как функция g монотонно возрастает, то отсюда вытекает ограниченность выражения (10.05). Следовательно, если не существует такого вещественного числа u, для которого

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x)\, e^{-iux}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi e^{-\xi}}{e^{-\xi} - 1} \right) \xi^{iu}\, d\xi, \tag{17.18}$$

то (10.07) имеет место для любого $K_2(x)$, принадлежащего M_1. В частности, пусть

$$K_{21}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < x < -\varepsilon; \\ \dfrac{x+\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{если } -\varepsilon \leqslant x < 0; \\ e^{-x}, & \text{если } 0 \leqslant x. \end{cases}$$

$$K_{22}(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad -\infty < x < 0; \\ \frac{x}{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < \varepsilon; \\ e^{-x}, & \text{если} \quad \varepsilon \leqslant x. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(x)\, dx = 1+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(x)\, dx = e^{-\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Таким образом, (10.15) дает

$$1+\frac{\varepsilon}{2}=\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(x-y)\, dg(y)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{y-x}\, dg(y)+\int_{x}^{x+\varepsilon}\frac{\varepsilon-y+x}{\varepsilon}\, dg(y)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{x\to\infty}}\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}\, dg(y)=\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\int_{0}^{N}\eta\, dg(\ln\eta)=$$

$$=\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Lambda(n)$$

и

$$e^{-\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(x-y)\, dg(y)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{y-x}\, dg(y)+\int_{x-\varepsilon}^{x}\frac{x-y}{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon}\, dg(y)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}\, dg(y)-\int_{x-\varepsilon}^{x}\left(e^{y-x}-\frac{x-y}{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon}\right) dg(y)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim_{x\to\infty}}\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}\, dg(y)=\underline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Lambda(n).$$

Так как ε произвольно мало и так как, при $\varepsilon \to 0$,

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} \to 1, \quad e^{-\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 1,$$

то

$$1 \geqslant \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n);$$

$$1 \leqslant \underline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n),$$

но это возможно лишь только тогда, когда

$$1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Lambda(n), \tag{17.19}$$

что, как мы видели, эквивалентно теореме 15.

§ 18. Теорема Ламберта — Таубера

Единственным пропуском, оставшимся в нашем доказательстве теоремы о распределении простых чисел, является доказательство того факта, что функция в (17.18) не имеет вещественных нулей. Эта функция может быть записана в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi e^{-\xi}}{e^{-\xi}-1}\right) \xi^{iu}\, d\xi =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi e^{-\xi}}{e^{-\xi}-1}\right) \xi^{iu+\lambda}\, d\xi = \lim_{\lambda\to 0} \frac{iu+\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi^{iu+\lambda} e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}}\, d\xi =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{iu+\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi^{iu+\lambda}(e^{-\xi} + e^{-2\xi} + e^{-3\xi} + \ldots)\, d\xi =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{iu+\lambda}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^\infty \xi^{iu+\lambda} e^{-\xi}\, d\xi + \right.$$

$$+\frac{1}{2^{iu+\lambda+1}}\int_0^\infty \xi^{iu+\lambda}e^{-\xi}\,d\xi+\frac{1}{3^{iu+\lambda+1}}\int_0^\infty \xi^{iu+\lambda}e^{-\xi}\,d\xi+\ldots\Bigg]=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{iu+\lambda}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(iu+\lambda+1)\sum_1^\infty n^{-iu-\lambda-1}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{iu+\lambda}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(iu+\lambda+1)\zeta(iu+\lambda+1), \tag{18.01}$$

где $\zeta(u)$ — риманова ζ-функция, определенная равенством

$$\zeta(w)=\sum_1^\infty n^{-w} \qquad (R(w)>1). \tag{18.02}$$

Заметим, что интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi e^{-\xi}}{e^{-\xi}-1}\right)\xi^w\,d\xi \tag{18.03}$$

сходится и определяет аналитическую функцию от w при $R(w)>0$. Мы предположим известным, что $1/\Gamma(u)$ — целая функция и что $\Gamma(u)$ имеет простые полюсы при $u=0$, -1, -2, ... и не имеет других особенностей. Тогда из (18.01), (18.02) и (18.03) следует, что $(w-1)\zeta(w)$ является аналитической функцией, не имеющей особенностей в полуплоскости $R(w)>0$, и, следовательно, что $\zeta(w)$ можно аналитически продолжить в эту полуплоскость. Единственной особенностью $\zeta(w)$ в этой полуплоскости является полюс первого порядка при $w=1$. Этот полюс на самом деле существует, так как в противном случае мы имели бы

$$\infty>\lim_{w\to 1+0}\sum_1^\infty n^{-w}=\sum_1^\infty n^{-1}$$

что, как известно, неверно. Таким образом, в силу (18.01) необращение в нуль интеграла (17.08) эквивалентно тому, что $\zeta(w)$ не обращается в нуль на прямой $R(w)=1$. Это утверждение нам и осталось доказать, чтобы закончить доказательство теоремы Адамара — Валле Пуссена о простых числах (теорема 15).

Заметим, что если $\mathrm{Re}(w) > 1$, то

$$\zeta(w) = \sum_1^\infty n^{-w} = 1 + \sum p_1^{-k_1 w} p_2^{-k_2 w} \ldots p_\nu^{-k_\nu w} =$$
$$= (1 + 2^{-w} + 2^{-2w} + \ldots + 2^{-k_1 w} + \ldots) \times$$
$$\times (1 + 3^{-w} + 3^{-2w} + \ldots)(1 + 5^{-w} + 5^{-2w} + \ldots) \ldots =$$
$$= \frac{1}{(1-2^{-w})(1-3^{-w})(1-5^{-w})\ldots(1-p^{-w})\ldots} =$$
$$= \prod_p (1-p^{-w})^{-1},$$

где произведение распространено на все простые числа. Таким образом,

$$\ln \zeta(w) = -\sum_p \ln(1-p^{-w}) =$$
$$= \sum_p \left(p^{-w} + \frac{p^{-2w}}{2} + \frac{p^{-3w}}{3} + \ldots\right) = \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-w}. \quad (18.04)$$

Докажем теперь следующее утверждение:

Лемма 15_2. *Пусть* $\gamma(x)$ — *монотонно возрастающая функция и пусть интеграл*

$$\int_{1+0}^\infty x^{-w}\, d\gamma(x) = \varphi(w)$$

сходится при $\mathrm{Re}(w) > 1$. *Пусть функция*

$$F(w) = e^{\varphi(w)}(w-1)^A \qquad \left[0 < A < 2^{\frac{1}{2}}\right],$$

будучи аналитически продолжена, регулярна на прямой $\mathrm{Re}(w) = 1$, *и не обращается в нуль при* $w = 1$. *Тогда* $F(w)$ *не имеет нулей при* $\mathrm{Re}(w) = 1$.

Эта лемма доказана в основном Адамаром[1]). Если по-

---

[1]) Ландау [2], стр. 166.

ложить в этой лемме

$$\gamma(x)=\sum_{1}^{[x]}\frac{\Lambda(n)}{\ln n};$$
$$\varphi(w)=\ln\zeta(w);$$
$$F(w)=\zeta(w)(w-1);$$
$$A=1,$$

то мы получим, что $\zeta(w)$ не может обращаться в нуль при $\operatorname{Re}(w)=1$, чем и заканчивается доказательство теоремы 15.

Перейдем к доказательству леммы. Заметим, что

$$0\leqslant(1+\sqrt{2}\cos\varphi)^2=1+2\sqrt{2}\cos\varphi+2\cos^2\varphi=$$
$$=2+2\sqrt{2}\cos\varphi+\cos 2\varphi. \quad (18.05)$$

Но из регулярности $F(w)$ вытекает, что функция

$$\varphi(w)+A\ln(w-1) \quad (18.06)$$

регулярна при $\operatorname{Re}(w)=1$, за исключением логарифмических особенностей, где вещественная часть (18.06) стремится к $-\infty$. Такие особенности мы будем называть *отрицательными* логарифмическими особенностями. Точка $w=1$ является регулярной для функции (18.06).

Но

$$\operatorname{Re}(\varphi(w))=\int_{1+0}^{\infty}x^{-\operatorname{Re}(w)}\cos(\operatorname{Im}(w)\ln x)\,d\gamma(x),$$

так что если v вещественно, то

$$\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+iv))=\int_{1+0}^{\infty}x^{-(1+\varepsilon)}\cos(v\ln x)\,d\gamma(x);$$

$$\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+2iv))=\int_{1+0}^{\infty}x^{-(1+\varepsilon)}\cos(2v\ln x)\,d\gamma(x),$$

и

$$\varphi(1+\varepsilon)=\int_{1+0}^{\infty}x^{-(1+\varepsilon)}\,d\gamma(x).$$

Таким образом, в силу (18.05)

$$2\varphi(1+\varepsilon)+2\sqrt{2}\,R(\varphi(1+\varepsilon+iv))+\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+2iv))=$$
$$=\int\limits_{1+0}^{\infty} x^{-(1+\varepsilon)}\left(2+2\sqrt{2}\cos(v\ln x)+\cos(2v\ln x)\right)d\gamma(x)\geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+iv))\geqslant -2^{-\frac{1}{2}}\varphi(1+\varepsilon)-2^{-\frac{3}{2}}\operatorname{Re}\varphi(1+\varepsilon+2iv),$$

и, если $\varepsilon<1$, то

$$\frac{\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+iv))}{\ln\varepsilon}\leqslant -2^{-\frac{1}{2}}\frac{\varphi(1+\varepsilon)}{\ln\varepsilon}-2^{-\frac{3}{2}}\frac{\operatorname{Re}\varphi(1+\varepsilon+2iv)}{\ln\varepsilon}.$$

Когда $\varepsilon\to+0$, то $\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+2iv))/\ln\varepsilon$ остается положительным и потому

$$\frac{\varphi(1+\varepsilon)}{\ln\varepsilon}\to -A.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{\varepsilon\to-0}\frac{\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+iv))}{\ln\varepsilon}\leqslant 2^{-\frac{1}{2}}A<1. \qquad (18.065)$$

С другой стороны, функция $F(w)$ аналитична при $w=1+iv$. Поэтому найдется неотрицательное целое число n такое, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{F(1+\varepsilon+iv)}{\varepsilon^n}=B, \qquad (18.07)$$

где B — конечное число, не равное нулю. Следовательно, если $v\neq 0$, то

$$\ln B=\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln F(1+\varepsilon+iv)-n\ln\varepsilon)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi(1+\varepsilon+iv)+A\ln(\varepsilon+iv)-n\ln\varepsilon)=$$
$$=A\ln iv+\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi(1+\varepsilon+iv)-n\ln\varepsilon).$$

Если разделить обе части этого равенства на $\ln\varepsilon$ и перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$, то мы получим, что

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(1+\varepsilon+iv)-n\ln\varepsilon}{\ln\varepsilon}\right)$$

или

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\operatorname{Re}(\varphi(1+\varepsilon+iv))}{\ln\varepsilon}=\operatorname{Re}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(1+\varepsilon+iv)}{\ln\varepsilon}=n.$$

Так как n — целое число, то из полученного равенства и соотношения (18.065) вытекает, что $n=0$, а потому из (18.07) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}F(1+\varepsilon+iv)=B.$$

Таким образом, $1+iv$ не является нулем $F(w)$, следовательно, $F(w)$ не может иметь нулей на прямой $\operatorname{Re}(w)=1$, Тем самым доказана лемма 15_2 и закончено доказательство теоремы 15.

История применения рядов Ламберта к изучению распределения простых чисел довольно интересна. Частным случаем такого ряда, изученным самим Ламбертом, является ряд

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+\ldots, \tag{18.08}$$

где коэффициент при x^m в эквивалентном степенном ряде равен числу различных делителей m, включая 1 и само m. Коэффициент ряда Ламберта равен двум тогда и только тогда, когда m — простое число. Поэтому многие надеялись одно время, что этот ряд является ключом для изучения распределения простых чисел. Эта надежда была охарактеризована Кноппом [1]) как «recht verführerisch» (совершенно уводящая в сторону), следует сказать, что строгое доказательство равенства (18.08) было проведено лишь с помощью результатов теории простых чисел. Это остается верным и до сегодняшнего дня по отношению к рядам Ламберта общего вида. В 1921 г. Харди и Литтльвуд [2]) доказали первый положительный результат, касающийся связи теории распределения простых чисел и теории рядов Ламберта. Они установили, что теорема Адамара—Валле Пуссена (теорема 15) может быть выведена из следующей тауберовой теоремы, касающейся рядов Ламберта.

---

[1]) Кнопп [1].

[2]) Харди и Литтльвуд [1].

Если $na_n > -K$ *и*

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_0^\infty \frac{na_n x^n (1-x)}{1-x^n} = A,$$

то $\sum a_n = A$.

Однако сама эта теорема не была ими установлена автономно, но была выведена как следствие из теоремы, доказанной Ландау с помощью метода, который более труден и сложен, чем используемый для доказательства теоремы Адамара—Валле Пуссена.

Метод, использованный в этой главе и в более ранних работах автора [1]), может быть охарактеризован как сведение тауберовой теоремы для рядов Ламберта к известным теоремам теории простых чисел, в данном случае—к лемме 15_2, которая утверждает, что функция $\zeta(w)$ не имеет нулей на линии $\operatorname{Re}(w) = 1$. Легко видеть, что эта лемма была решающим шагом в доказательстве теоремы 15, хотя можно доказать эту теорему и с помощью более слабых утверждений, например, касающихся поведения римановой ζ-функции на бесконечности. Мы увидим это в следующем пункте. Существуют, однако, и другие доказательства теоремы 15, в которых используется единственное неэлементарное свойство римановой ζ-функции, а именно то, что она не обращается в нуль на прямой $\operatorname{Re} w = 1$ [2]). Поэтому логика данного здесь доказательства не отличается сильно от логики доказательства, данного в работе Харди — Литтльвуда. Оправданием использования методов этой главы может быть разве лишь то, что они дают независимый способ сведения теоремы 15 к лемме вида 15_2.

§ 19. Теорема Икеара

Один из наиболее простых методов доказательства теоремы о простых числах связан с леммой, доказанной Ландау [3]). Она формулируется следующим образом:

---

[1]) Винер [2], [4].

[2]) См. обсуждение вопроса в книге А. Е. Ингама «Распределение простых чисел», М. — Л., 1936.

[3]) Ландау [3].

Лемма Ландау. *Пусть*

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}, \quad \operatorname{Re}(x)>1, \tag{19.01}$$

где

$$a_n \geqslant 0, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{19.02}$$

Пусть функцию $F(x)$ можно аналитически продолжить на прямую $\operatorname{Re}(x)=1$, причем она не имеет особенностей, за исключением полюса первого порядка в точке $x=1$ с главной частью $A/(x-1)$. Если для некоторого α в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(x)\geqslant 1$ имеет место равенство

$$F(x)=O(|x|^{\alpha}), \tag{19.03}$$

то

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} a_k. \tag{19.04}$$

Чтобы применить эту лемму к доказательству теоремы о простых числах, продифференцируем почленно равенство (18.04). Это дифференцирование законно в полуплоскости $\operatorname{Re}(w)>1$, поскольку равномерно сходящиеся ряды аналитических функций можно почленно дифференцировать в любой внутренней точке области равномерной сходимости. Умножив обе части равенства на -1, получим

$$-\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}=\sum_{1}^{\infty}\Lambda(n)\,n^{-w}.$$

Кроме того, было доказано существование такой постоянной B (фактически равной 1), что функция

$$\zeta(w)-\frac{B}{w-1}$$

аналитична в точке $w=1$. Это же самое верно и для

$$\zeta'(w)+B/(w-1)^2.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что функция

$$-\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}-\frac{1}{w-1}$$

аналитична в точке $w=1$. Поэтому функция $\frac{-\zeta'(w)}{\zeta(w)}$ имеет при $w=1$ полюс первого порядка с главной частью $1/(w-1)$.

Мы не будем здесь доказывать того, что функция

$$F(x)=-\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}$$

удовлетворяет условию (19.03), так как мы увидим далее, что без этого условия можно обойтись. На самом деле известно значительно больше и было доказано, что [1]) если $\mathrm{Re}(s)\geqslant 1$ и $|s|$ достаточно велико, то

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|<c\ln^9 t.$$

Доказательство же того, что $F(x)$ удовлетворяет столь слабому условию, как (19.03), проводится весьма просто. Условие (19.02) очевидным образом выполнено.

Предположим теперь, что лемма Ландау доказана и что уже доказано выполнение для функции $\zeta'(x)/\zeta(x)$ указанных выше условий. Тогда из (19.04) вытекает

$$1=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Lambda(n). \qquad (17.085)$$

Мы установили выше эквивалентность этого равенства и теоремы Адамара — Валле Пуссена. Таким образом, мы получили новое доказательство теоремы 15.

Мы увидим далее, что условие (19.03), накладывающее весьма слабые ограничения на функцию $F(x)$, не является существенным в рассматриваемом вопросе. Поэтому лемма Ландау не может удовлетворить нас, если не удастся доказать, что (19.03) является самым слабым ограничением на порядок $F(x)$, гарантирующим справедливость этой леммы, или если не будут найдены истинные условия, при которых лемма верна. В этом смысле следующая теорема Харди и Литтльвуда [2]) может рассматриваться как дальнейшее продвижение вперед:

---

[1]) Ландау [2], т. 1, стр. 179.
[2]) Харди и Литтльвуд [2].

Теорема Харди—Литтльвуда. *Пусть* λ_n — *возрастающая последовательность действительных чисел. Пусть*

I) *ряд* $\sum a_n \lambda_n^{-s}$ *равномерно сходится при* $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0 > 0$;

II) *функция* $F(s)$, *определенная этим рядом, регулярна при* $\operatorname{Re}(s) > c$, *где* $0 < c \leqslant \sigma_0$ *и непрерывна во всех точках прямой* $\operatorname{Re}(s) = c$, *за исключением точки* $s = c$, *где она имеет полюс первого порядка с вычетом* g;

III) *для некоторого конечного* C, *равномерно при* $\sigma \geqslant c$ *имеем*

$$F(s) = O(e^{C|t|}); \tag{19.05}$$

IV) $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \to 1$;

V) *числа* a_n *вещественны и удовлетворяют неравенствам*

$$a_n > -K\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}); \quad a_n < K\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}),$$

или комплексны, и имеют вид

$$O\left\{\lambda_n^{c-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\right\}.$$

Тогда

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \sim g\lambda_n^c/c. \tag{19.06}$$

Здесь мы положили

$$s = \sigma + it.$$

Полагая в этой теореме $c = \sigma_0 = 1$, $\lambda_n = n$, $K = 0$, $g = A$, получаем следующее утверждение:

Пусть выполняются равенства (19.01) *и* (19.02). *Пусть функция* $F(x)$ *регулярна во всех точках прямой* $\operatorname{Re}(x) = 1$, *за исключением точки* $x = 1$, *где она имеет полюс порядка* 1 *с главной частью* $A/(x-1)$. *Пусть для некоторого* C *равномерно при* $\sigma \geqslant 1$ *выполняется* (19.05). *Тогда имеет место равенство* (19.04).

Мы видим, что условие (19.03) может быть заменено более слабым условием (19.05). Однако на самом деле утверждение остается справедливым даже без этой более слабой гипотезы, касающейся порядка роста $F(s)$, утверждение верно без каких-либо ограничений на рост этой функции. Окончательный результат получен Икеара [1]) и формулируется следующим образом в терминах интеграла Стилтьеса:

Теорема 16. *Пусть $\alpha(x)$ — монотонно возрастающая функция такая, что интеграл*

$$\int_{1+0}^{\infty} x^{-u}\, d\alpha(x) = f(u)$$

сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$. *Пусть функция*

$$f(u) - \frac{A}{u-1} = g(u) \tag{19.065}$$

равномерно на любом отрезке прямой $\operatorname{Re}(u) = 1$ *стремится к конечному пределу, когда* $\operatorname{Re}(u) \to 1+0$. *Тогда*

$$\alpha(N) \sim NA$$

при $N \to \infty$.

В самом деле, положим

$$\beta(\xi) = \alpha(e^{\xi})\, e^{-\xi} + \int_0^{\xi} e^{-\xi}\, \alpha(e^{\xi})\, d\xi - A\xi$$

при $\xi > 0$. Тогда

$$d\beta(\xi) = e^{-\xi}\, d\alpha(e^{\xi}) - A\, d\xi. \tag{19.07}$$

Не теряя общности, можно считать, что

$$\beta(x) = \beta(+0) \qquad (-\infty \leqslant x \leqslant 0). \tag{19.08}$$

Тогда функция $g(u)$ из (19.065) принимает вид

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1-u)\xi}\, d\beta(\xi) \qquad [\operatorname{Re}(u) > 1].$$

Доказываемое утверждение можно записать в следующей форме:

$$\lim_{\eta \to \infty} \int_{-\infty}^{\eta} e^{\xi-\eta}\, d\beta(\xi) = 0. \tag{19.085}$$

---

[1]) Икеара [1].

Если $\varepsilon > 0$ и η — вещественно, то

$$\int_{-B}^{B}\left(1-\frac{|u|}{B}\right)g(iu+\varepsilon+1)\,\varepsilon^{iu\eta}\,du=$$

$$=\int_{-B}^{B}\left(1-\frac{|u|}{B}\right)du\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu(\eta-\xi)}\,e^{-\varepsilon\xi}\,d\beta(\xi). \quad (19.09)$$

Так как этот двойной интеграл абсолютно сходится, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon\xi}\,d\beta(\xi)\int_{-B}^{B}\left(1-\frac{|u|}{B}\right)e^{iu(\eta-\xi)}\,du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\,e^{-\varepsilon\xi}\,d\beta(\xi). \quad (19.10)$$

Но

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-B}^{B}\left(1-\frac{|u|}{B}\right)g(iu+\varepsilon+1)\,e^{iu\eta}\,du=$$

$$=\int_{-B}^{B}\left(1-\frac{|u|}{B}\right)g(iu+1)\,e^{iu\eta}\,du. \quad (19.11)$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\,e^{-\varepsilon\xi}\,d\beta(\xi).$$

Кроме того, в силу критерия ограниченной сходимости

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty}\frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\,e^{-\varepsilon\xi}A\,d\xi=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\,A\,d\xi. \quad (19.12)$$

Но тогда в силу (19.07) существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty}\frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\,\varepsilon^{-(\varepsilon+1)\xi}\,d\alpha(e^{\xi}).$$

Примем во внимание, что выражение $e^{-\xi}\,d\alpha(\xi)$ неотрицательно и что при $\varepsilon \to 0$ и любом положительном ξ функция $e^{-\varepsilon\xi}$, монотонно возрастая, стремится к 1. Кроме того, учтем, что

$$\frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2} \geqslant 0.$$

Поэтому мы можем применить X_{39} и получить

$$\int_0^\infty \frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\, e^{-\xi}\, d\alpha(e^{\xi}) = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty \frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\, e^{-(\varepsilon+1)\xi}\, d\alpha(e^{\xi}). \qquad (19.13)$$

Комбинируя (19.12) и (19.13), получаем в силу (19.07) и (19.08)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty \frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\, e^{-\varepsilon\xi} d\beta(\xi) = \\ = \int_{-\infty}^\infty \frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\, d\beta(\xi).$$

Таким образом, в силу (19.09), (19.10) и (19.11) имеем

$$\int_{-B}^{B} \left(1-\frac{|u|}{B}\right) g(iu+1)\, e^{iu\eta}\, du = \\ = \int_{-\infty}^\infty \frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\, d\beta(\xi). \quad (19.14)$$

Поэтому в силу (19.07)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\, e^{-\xi}\, d\alpha(\xi) = \\ = 2\pi A + \int_{-\beta}^{B} \left(1-\frac{|u|}{B}\right) g(iu+1)\, e^{iu\eta} du.$$

Поскольку $e^{-\xi}\,d\alpha(\xi)$ неотрицательно, то при $B<\pi$

$$\int\limits_{\eta}^{\eta+1} e^{-\xi}\,d\alpha(e^{\xi})<\frac{\pi^2}{4B}\left\{2\pi A+\int\limits_{-B}^{B}\left(1-\frac{|u|}{B}\right)|g(iu+1)|\,du\right\}<\infty,$$

а так как функция α монотонна, то из (19.07) вытекает

$$\int\limits_{\eta}^{\eta+1}|d\beta(\xi)|<A+\frac{\pi^3 A}{2B}+\frac{\pi^2}{4B}\int\limits_{-B}^{B}\left(1-\frac{|u|}{B}\right)|g(iu+1)|\,du<\infty.$$

По теореме Римана — Лебега и из (19.14) имеем

$$\lim_{\eta\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos B(\eta-\xi))}{B(\eta-\xi)^2}\,d\beta(\xi)=0.$$

Кроме того, преобразованием Фурье функции

$$\frac{2(1-\cos B\xi)}{B\xi^2}$$

является

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos B\xi)}{B\xi^2}\,e^{-iu\xi}\,d\xi=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2\pi}\left(1-\dfrac{|u|}{B}\right), & \text{если}\quad |u|<B,\\ 0\qquad, & \text{если}\quad |u|>B.\end{cases}$$

Ни для одного вещественного значения u это выражение не обращается в нуль при всех B. Поэтому можно применить теорему 7. Из этой теоремы вытекает, что если $K_2(\xi)$ принадлежит M_1, то

$$\lim_{\eta\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_2(\eta-\xi)\,d\beta(\xi)=0. \tag{19.15}$$

Утверждение (19.085) является частным случаем этого утверждения, где

$$K_2(\xi)=\begin{cases}e^{-\xi}, & \text{если}\quad \xi>0;\\ 0\ , & \text{если}\quad \xi<0.\end{cases} \tag{19.16}$$

Таким образом, теорема 16 доказана.

Обобщенная форма теоремы Ландау, соответствующая теореме 16, получается, если взять в качестве $\alpha(x)$ ступенчатую функцию с разрывами лишь в целых точках. Она гласит:

Теорема 17. *Пусть выполнены условия* (19.01) *и* (19.02). *Пусть* $F(x)$ *может быть аналитически продолжена на прямую* $\operatorname{Re}(x)=1$ *и не имеет особенностей в точках этой прямой, за исключением точки* $x=1$, *где она имеет полюс первого порядка с главной частью* $A/(x-1)$. *Тогда имеет место равенство* (19.04).

При обобщении теоремы Харди — Литтльвуда я не могу, к сожалению, исключить условие III), не усилив одновременно условие IV) условием IV'): $\lambda_n-\lambda_{n-1}$ ограничено. При этом имеет место следующая теорема:

Теорема 18. *В теореме Харди — Литтльвуда условия* I), II), IV') и V) *достаточны для выполнения* (19.06).

Менее ограничительной заменой для IV) является

IV'') $\quad \sum(\lambda_n-\lambda_{n-1})^2\lambda_{n-1}^{-2}<\infty.$

Эта теорема не столь очевидна, как соответствующая теорема Ландау. Не ограничивая существенно общность, мы можем считать, что все λ_n больше, чем 1. Положим

$$\alpha(x)=\sum_{\lambda_n\leqslant x}a_n\lambda_n^{1-c}; \tag{19.165}$$

$$u=s+1-c;$$

$$\sigma_1=\sigma_0+1-c.$$

Тогда из I) следует, что интеграл

$$\int_{1+0}^{\infty}x^{-u}\,d\alpha(x)=f(u)=F(u+c-1) \tag{19.17}$$

абсолютно сходится в области $\operatorname{Re}(u)>\sigma_1$. Из утверждения II) следует, что если аналитически продолжить функцию $f(u)$, то она не имеет особенностей при $\operatorname{Re}(u)>1$ и непрерывна во всех точках прямой $\operatorname{Re}(u)=1$, за исключением точки $u=1$, где она имеет простой полюс с вычетом g. Предположение V) влечет за собой, что либо $\alpha(x)$ вещественно и удовлетворяет одному из условий

$$\int_n^{n+1} |d\alpha(x)| - \alpha(n+1) + \alpha(n) < 2K \tag{19.18}$$

или

$$\int_n^{n+1} |d\alpha(x)| + \alpha(n+1) - \alpha(n) < 2K, \tag{19.19}$$

либо комплексна и удовлетворяет условию

$$\int_n^{n+1} |d\alpha(x)| < K \tag{19.20}$$

для некоторого постоянного K. Если в случае (19.20) $\operatorname{Re}(u) > 1 + \varepsilon$, то

$$\int_n^{n+1} |x^{-u}\, d\alpha(x)| < Kn^{-1-\varepsilon}$$

и (19.17) абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$, в чем мы можем убедиться, сравнив этот интеграл с рядом

$$\sum_1^{\infty} \int_n^{n+1} |x^{-u}\, d\alpha(x)| < K \sum_1^{\infty} n^{-1-\varepsilon}.$$

В случае (19.18) мы можем положить

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x),$$

где

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2}\left(\alpha(x) + \int_{1+0}^{x} |d\alpha(\xi)|\right);$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{2}\left(\alpha(x) - \int_{1+0}^{x} |d\alpha(\xi)|\right).$$

Тогда функция $\alpha_1(x)$ монотонно возрастает и

$$\int_n^{n+1} |d\alpha_2(x)| = \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \left| d\left\{\int_{1+0}^{x} |d\alpha(\xi)| - \alpha(x)\right\}\right|. \tag{19.201}$$

Так как выражение под знаком внешнего дифференциала в правой части (19.201) монотонно возрастает, то отсюда вытекает, что

$$\int_{n}^{n+1} |d\alpha_2(x)| = \frac{1}{2}\int_{n}^{n+1} d\left\{\int_{1+0}^{x} |d\alpha(\xi)| - \alpha(x)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{n}^{n+1} |d\alpha(x)| - \alpha(n+1) + \alpha(n)\right\}.$$

Таким образом, как для $\alpha(x)$ в случае (19.20), интеграл

$$\int_{1+0}^{\infty} x^{-u}\, d\alpha_2(x) \tag{19.202}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$. Так как функция $\alpha_1(x)$ возрастает, то интеграл

$$\int_{1+0}^{\infty} x^{-u}\, d\alpha_1(x) \tag{19.203}$$

является убывающей функцией от u. Мы знаем, что интеграл (19.203) сходится при $\operatorname{Re}(u) > \sigma_1$. Пусть σ_1 — наименьшее значение $\operatorname{Re}(u)$, для которого это справедливо. Тогда

$$\lim_{u \to \sigma_1 + 0} \int_{1+0}^{\infty} x^{-u}\, d\alpha_1(x) = \infty.$$

В самом деле, если u — вещественное число, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nu} \int_{2^n}^{2^n+1} d\alpha_1(x) \tag{19.21}$$

сходится или расходится одновременно с интегралом (19.203), причем отношение значений ряда и интеграла лежит между 1 и 2^u. Но (19.21) является степенным рядом с аргументом 2^{-u} и неотрицательными коэффициентами. Известно, что для таких рядов на границе круга сходимости есть точка, в которой изображаемая ими функция обращается в бесконечность[1]). Таким образом, функция, изображаемая интегралом (19.203), имеет полюс в некоторой точке, абсцисса которой равна абсциссе сходимости, а потому имеет особенность в вещественной точке с той же абсциссой.

Но абсцисса самой правой особой точки на вещественной оси не превосходит 1. Таким образом, абсцисса сходимости $\leqslant 1$ и $\sigma_1 = 1$. Здесь в силу абсолютной сходимости (19.202) при $\operatorname{Re}(u) > 1$ можно не различать $\alpha(x)$ и $\alpha_1(x)$.

Мы доказали, таким образом, в случаях (19.18) и (19.20), что интеграл (19.17) абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$. Случай (19.19) подобен (19.18). Начиная отсюда, мы сосредоточим внимание на случае (19.18). Положим[2])

$$\alpha_3(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} \left\{a_n \lambda_n^{1-c} + K(\lambda_n - \lambda_{n-1})\right\}.$$

$\alpha_2(x)$ является ступенчатой функцией, имеющей в точках вида $x = \lambda_n$ разрывы величины $a_n \lambda_n^{1-c} + K(\lambda_n - \lambda_{n-1})$. Покажем, что интеграл

$$\int\limits_{1+0}^{\infty} x^{-u}\, d\alpha_3(x) \tag{19.22}$$

также абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$. Для этого достаточно показать, что ряд

$$\sum \lambda_n^{-u} \left\{a_n \lambda_n^{1-c} + K(\lambda_n - \lambda_{n-1})\right\}$$

сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$. Но в силу (19.165) и условия I) это сводится к доказательству того, что ряд

$$\sum \lambda_n^{-u} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \psi(u) \tag{19.23}$$

сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$. А это непосредственно вытекает из того, что ряд (19.23) мажорируется интегралом

$$\int\limits_1^{\infty} \lambda^{-u}\, d\lambda = \frac{1}{u-1},$$

который сходится при $\operatorname{Re}(u) > 1$.

---

[1]) Ландау, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie (2-е изд.).
[2]) Мы положили здесь $\lambda_0 = 0$.

Мы имеем

$$\psi(u)-\frac{1}{u-1}=e(u)+\sum_{2}^{\infty}\left\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})\lambda_n^{-u}-\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}\lambda^{-u}\,du\right\}, \tag{19.24}$$

где $e(u)$ — целая функция. В силу теоремы о среднем выражение, стоящее под знаком суммы, не превосходит по модулю выражения вида

$$(\lambda_n-\lambda_{n-1})\left(\lambda_{n-1}^{-u}-\lambda_n^{-u}\right)\leqslant u(\lambda_n-\lambda_{n-1})^2\lambda_{n-1}^{-u-1}.$$

Но по условию IV′) это выражение мажорируется

$$\operatorname{const} u(\lambda_n-\lambda_{n-1})\lambda_{n-1}^{-u-1},$$

а потому (19.24) сходится к функции, аналитичной в области $\mathrm{Re}(u)>1$. Таким образом, (19.22) сходится при $\mathrm{Re}(u)>1$ к функции, аналитическое продолжение которой непрерывно во всех точках прямой $\mathrm{Re}(u)=1$, за исключением точки $u=1$. В этой точке выражение

$$\int_{1+0}^{\infty}x^{-u}\,d\alpha_3(x)-K\psi(u)$$

имеет простой полюс с вычетом g, и в силу (19.24) функция (19.22) имеет простой полюс с вычетом $g+K$. Функция $\alpha_3(x)$ монотонна и мы можем применить методы доказательства теоремы 16, заменяя $\alpha_3(x)$ на $\alpha(x)$.

При доказательстве теоремы 16 было показано, что если K_2 принадлежит M_1, то сделанные предположения достаточны для выполнения (19.15). Заменим теперь функцию K_2 из (19.16) функцией

$$K_2(\xi)=\begin{cases} e^{-c\xi}, & \text{если } \xi>0;\\ 0, & \text{если } \xi<0.\end{cases}$$

Соответствующая функция $\beta(\xi)$ имеет вид

$$\alpha_3(e^{\xi})e^{-\xi}+\int_0^{\xi}e^{-\xi}\alpha_3(e^{\xi})\,d\xi-(g+K)\xi$$

при $\xi > 0$ и мы продолжим ее на всю ось, положив $\beta(\xi) = \beta(+0)$ при $\xi < 0$. Мы доказали, что

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\eta\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\eta-\xi)\, d\beta(\xi) = \\
&= \lim_{\eta\to\infty} \int_{+0}^{\eta} e^{c(\xi-\eta)} \{e^{-\xi}\, d\alpha_3(e^{\xi}) - (g+K)\, d\xi\} = \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \nu^{-c} \left\{ \int_{1+0}^{\nu} x^{c-1}\, d\alpha_3(x) - \frac{(g+K)(\nu^c-1)}{c} \right\} = \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \left\{ \nu^{-c} \sum_{\lambda_n \leqslant \nu} [a_n\lambda_n^{1-c} + K(\lambda_n - \lambda_{n-1})]\lambda_n^{c-1} - \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{g+K}{c}(1-\nu^{-c}) \right\} = \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\{ \lambda_N^{-c} \sum_1^N a_n + K\lambda_N^{-c} \sum_1^N (\lambda_n - \lambda_{n-1})\lambda_n^{c-1} - \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{g+K}{c}(1-\lambda_N^{-c}) \right\}.
\end{aligned}
\tag{19.25}
$$

Но это равенство справедливо для *всех* достаточно больших значений K. Рассматривая линейную комбинацию двух равенств (19.25) при различных значениях K, получаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \lambda_N^{-c} \sum_1^N (\lambda_n - \lambda_{n-1})\lambda_n^{c-1} - \frac{1}{c}(1-\lambda_N^{-c}) \right\} = 0$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \lambda_N^{-c} \sum_1^N a_n - \frac{g}{c}(1-\lambda_N^{-c}) \right\} = 0.$$

Так как $g \neq 0$, $c \neq 0$, то отсюда вытекает

$$\lambda_N^{-c} \sum_1^N a_n \sim \frac{g}{c}(1-\lambda_N^{-c}) \sim \frac{g}{c},$$

и, следовательно,

$$\sum_{1}^{N} a_n \sim \frac{g}{c} \lambda_N^{-c}.$$

Но это равенство совпадает с (19.06). Таким образом, мы доказали теорему 18 в случае (19.18). Случай (19.19) непосредственно вытекает с помощью замены a_n на $-a_n$, а случай (19.20) сводится к рассмотренным выше случаям путем раздельного рассмотрения вещественной и мнимой частей.

Из леммы 15_2 и теоремы 16 вытекает следующая интересная теорема:

Теорема 19. *Пусть $\gamma(x)$ — монотонно возрастающая функция, и пусть интеграл*

$$\int_{1+0}^{\infty} x^{-w}\, d\gamma(x) = \varphi(w)$$

сходится при $\operatorname{Re}(w) > 1$. *Пусть аналитическое продолжение функции*

$$F(w) = e^{\varphi(w)} (w-1)^A, \qquad 0 < A < 2^{\frac{1}{2}},$$

регулярно при $\operatorname{Re}(w) = 1$ *и не обращается в нуль при* $w = 1$. *Тогда*

$$A = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_{1+0}^{N} \ln x\, d\gamma(x).$$

В самом деле, пусть

$$\int_{1+0}^{x} \ln \xi\, d\gamma(\xi) = \alpha(x); \qquad -\varphi'(u) = f(u).$$

Тогда, если $\operatorname{Re}(u) > 1$, то

$$\int_{1+0}^{\infty} x^{-u}\, d\alpha(x) = \int_{1+0}^{\infty} x^{-u} \ln x\, d\gamma(x) =$$
$$= -\frac{d}{du} \int_{1+0}^{\infty} x^{-u}\, d\gamma(x) = -\varphi'(u) = f(u).$$

Но

$$\ln F(u) = \varphi(u) + A \ln(u-1),$$

и потому

$$\frac{-F'(u)}{F(u)} = f(u) - \frac{A}{u-1}.$$

Эта функция аналитична при $\operatorname{Re}(u) = 1$ в силу леммы 15_2, а потому при $\operatorname{Re}(u) \to 1$ она равномерно сходится к конечному пределу на каждом отрезке прямой $\operatorname{Re}(u) = 1$. Таким образом, выполнены условия теоремы 16 и потому

$$A = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_{1+0}^{N} \ln x \, d\gamma(x),$$

что и является требуемым результатом.

Если положить

$$\gamma(x) = \omega(x),$$

то

$$e^{\varphi(u)} = \zeta(u)$$

и предположения теоремы 17 очевидным образом выполнены. Поэтому

$$1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_{1}^{N} \ln x \, d\omega(x),$$

что, как мы видели, эквивалентно теореме о простых числах.

Мы показали, таким образом, двумя различными путями, что теорема о простых числах Адамара и Валле Пуссена может быть сведена к тауберовой форме и доказана этим путем. Это приводит к предположению, что и более тонкие теоремы о распределении простых чисел также могут быть сведены к тауберовой форме, в частности, теоремы, опирающиеся на гипотезу Римана. Автор не надеется, что тауберовы методы дадут много в этой более широкой области. В теоремах 4 и 5 было отмечено, что для того, чтобы доказать, что некоторое выражение стремится к пределу, мы делаем предположения, которые тривиальным образом достаточны для достижения ограниченности. Таким образом, тонкости тауберова метода служат для того, чтобы заменить

O на *o*. В случае теоремы 15 это дает все, что нам требуется, поскольку элементарными, но далеко не тривиальными методами[1]) можно доказать равенство

$$\pi(n) - \frac{n}{\ln n} = O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

или, что то же самое, равенство

$$\pi(n) = O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

а теорема 15 утверждает, что

$$\pi(n) - \frac{n}{\ln n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

В случае более утонченных теорем, опирающихся на гипотезу Римана, например, таких, как

$$\pi(n) - \frac{n}{\ln n} = o(n^{\alpha}), \qquad \frac{1}{2} < \alpha < 1, \tag{19.26}$$

O-предположение практически так же трудно установить, как и *o*-утверждение. В случае (19.26) оно имеет вид

$$\pi(n) - \frac{n}{\ln n} = O(n^{\alpha})$$

и доказать его означало бы доказать больше, чем доказать

$$\pi(n) - \frac{n}{\ln n} = o(n^{\beta}), \qquad \alpha < \beta < 1.$$

Но доказать это утверждение для любого α, лежащего в промежутке $^1/_2$ и 1, и для любого β, лежащего между α и 1, это то же самое, что доказать (19.26) для любого α, лежащего между $^1/_2$ и 1, а потому ждать здесь помощи от теорем тауберова типа бесполезно.

Другой путь выяснения существа дела состоит в том, что теоремы тауберова типа связаны с преобразованием Фурье, которое является главой теории функций вещественного переменного. Мы вынуждены поэтому действовать на одной вертикальной прямой в плоскости римановой ζ-функции. Более мощные методы теории функций комплексного

---

[1]) Ландау [2], т. 1, стр. 71—97.

переменного позволяют нам работать с целой полосой комплексной области — критической полосой римановой ζ-функции. Это и позволяет получить доказательство таких утверждений, как (19.26).

§ 20. Среднее значение квадрата модуля функции

Теорема 20. *Пусть $f(x)$ — измеримая функция, для которой интеграл*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx \tag{20.01}$$

ограничен по T. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(x)|^2}{1+x^2}\,dx<\infty. \tag{20.02}$$

В самом деле, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-A}^{A}\frac{|f(x)|^2}{1+x^2}\,dx=\int_{-A}^{A}\frac{dx}{1+x^2}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}|f(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{1+A^2}\int_{0}^{A}|f(\xi)|^2\,d\xi-\frac{1}{1+A^2}\int_{0}^{-A}|f(\xi)|^2\,d\xi-$$

$$-\int_{-A}^{A}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left[\int_{0}^{x}|f(\xi)|^2\,d\xi\right]dx=$$

$$=\frac{2A}{1+A^2}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}|f(\xi)|^2\,d\xi+\int_{0}^{A}\frac{4x^2\,dx}{(1+x^2)^2}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(\xi)|^2\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2A}{1+A^2}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}|f(\xi)|^2\,d\xi+4\int_{0}^{A}\frac{dx}{1+x^2}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(\xi)|^2\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{2A}{1+A^2}+4\operatorname{arctg}A\right\}\limsup\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(1+2\pi)\limsup\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx. \tag{20.03}$$

Таким образом, если функция (20.01) ограничена, то функция, совпадающая с $f(x)/x$ при $|x|>1$ и равная нулю при $|x|\leqslant 1$, принадлежит L_2 и, следовательно, в силу теоремы Планшереля существует

$$s_1(u)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_1^A+\int_{-A}^{-1}\right]\frac{f(x)\,e^{-iux}}{-ix}\,dx. \tag{20.04}$$

Кроме того, функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[-1, 1]$, а интеграл

$$s_2(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}f(x)\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx \tag{20.05}$$

существует для любого u. Поэтому функция

$$s(u)=s_1(u)+s_2(u) \tag{20.06}$$

существует почти для всех u.

Мы имеем

$$\begin{aligned} s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)&= \\ &=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x)\frac{e^{ix\varepsilon}-e^{-ix\varepsilon}}{ix}\,e^{-iux}dx= \\ &=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x)\frac{2\sin\varepsilon x}{x}\,e^{-iux}dx. \end{aligned} \tag{20.07}$$

Таким образом, $s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)$ является преобразованием Фурье функции

$$f(x)\frac{2\sin\varepsilon x}{x}$$

и в силу теоремы Планшереля

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,dx=\frac{1}{\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\frac{\sin^2\varepsilon x}{x^2}\,dx. \tag{20.08}$$

Правая часть этого выражения может рассматриваться как взвешенное среднее функции $|f(x)|^2$, поскольку

$$\frac{1}{\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 \varepsilon x}{x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=1.$$

Если $\varepsilon\to 0$, то вес все более равномерно распределяется на оси $(-\infty, \infty)$. Поэтому естественно установить связь между

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx \tag{20.09}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\frac{\sin^2 \varepsilon x}{x^2}\,dx. \tag{20.10}$$

Мы хотим доказать следующую тауберову теорему:

Теорема 21. *Если $\varphi(x)\geqslant 0$ при $0\leqslant x<\infty$ и один из пределов*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\varphi(x)\,dx \tag{20.11}$$

или

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi\varepsilon}\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,\frac{\sin^2 \varepsilon x}{x^2}\,dx \tag{20.12}$$

существует, то существует и второй предел, причем он имеет то же самое значение.

Таким образом, пределы (20.09) и (20.10) полностью эквивалентны и в силу (20.08) мы получаем такое следствие:

Теорема 22. *Пусть функция $f(x)$ такова, что* (20.01) *ограничено по T. Пусть $s_1(u)$ определено равенством* (20.04), *$s_2(u)$ — равенством* (20.05) *и $s(u)$ — равенством* (20.06). *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx \tag{20.13}$$

в том смысле, что если существует одна из частей равенства (20.13), *то и вторая часть существует и принимает то же самое значение.*

Дадим теперь доказательство теоремы 21. Очевидно, что без ограничения общности можно положить $\varphi(u)=0$ при $x<1$. В самом деле, в этой области функции $\varphi(x)/T$ и $2\varphi(x)\sin^2\varepsilon x/(\pi\varepsilon x^2)$ монотонно стремятся к нулю, когда ε стремится к нулю (второе — при достаточно малых значениях ε), а потому в силу признака монотонной сходимости

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^1\varphi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi\varepsilon}\int_0^1\varphi(x)\frac{\sin^2\varepsilon x}{x^2}\,dx=0.$$

Итак, можно считать, что $\varphi(x)$ обращается в нуль на отрезке $[0,\ 1]$.

Положим

$$x=e^{\xi};\quad T=e^{\eta}=\varepsilon^{-1};\quad \varphi(x)=\psi(\xi).$$

Тогда выражение (20.11) принимает вид

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{-\infty}^{\eta}e^{\xi-\eta}\psi(\xi)\,d\xi, \tag{20.14}$$

а (20.12) — вид

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2 e^{\xi-\eta}}{e^{\xi-\eta}}\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{20.15}$$

Если один из пределов (20.14) или (20.15) конечен, то рассуждая так же как и в (17.16), получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_n^{n+1}\psi(\xi)\,d\xi<\infty.$$

Функция $\psi(\xi)$ суммируема на любом отрезке и обращается в нуль при отрицательных значениях аргумента. Поэтому так же как в (17.17) доказываем, что выражение

$$\int_{n}^{n+1} \psi(\xi)\, d\xi$$

ограничено. Следовательно, если мы положим

$$g(\xi) = \int_{0}^{\xi} \psi(\eta)\, d\eta,$$

то в силу неотрицательности ψ получим

$$\int_{n}^{n+1} |dg(\xi)| = g(n+1) - g(n) = \int_{n}^{n+1} \psi(\xi)\, d\xi < \text{const.}$$

Мы хотим доказать эквивалентность утверждений

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi - \eta)\, dg(\eta) = A \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\, d\xi \tag{20.16}$$

и

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi - \eta)\, dg(\eta) = A \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi)\, d\xi, \tag{20.17}$$

где

$$K_1(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < \xi < 0; \\ e^{-\xi}, & \text{если } \quad 0 < \xi < \infty, \end{cases}$$

и

$$K_2(\xi) = \frac{2}{\pi} e^{\xi} \sin^2 e^{-\xi}.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\, d\xi = \int_{0}^{\infty} e^{-\xi} d\xi = 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi)\, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi} \sin^2 e^{-\xi}\, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = 1.$$

Поэтому эквивалентность (20.16) и (20.17) равносильна эквивалентности

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta)\,dg(\eta)=A \tag{20.18}$$

и

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi-\eta)\,dg(\eta)=A, \tag{20.19}$$

а тем самым и теореме 21.

Чтобы доказать эквивалентность (20.18) и (20.19), воспользуемся теоремой 5. Очевидно, что ядро K_2 принадлежит M_1, а преобразование Фурье этого ядра лишь постоянным множителем отличается от

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi(1-iu)}\sin^2 e^{-\xi}\,d\xi=\int_0^{\infty} x^{iu-2}\sin^2 x\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty} x^{iu-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{2ix}}{4}-\frac{e^{-2ix}}{4}\right)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{iu-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{2ix}}{4}-\frac{e^{-2ix}}{4}\right)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{iu-2}\frac{1-e^{2ix}}{4}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{iu-2}\frac{1-e^{-2ix}}{4}\,dx\right].$$

В первом интеграле можно деформировать путь интегрирования, превратив его в вертикальный луч, идущий от ε до $\varepsilon+i\infty$, а во втором — в луч, идущий от ε до $\varepsilon-i\infty$. Подынтегральная функция в обоих случаях имеет на бесконечности порядок x^{-2}, так что интеграл вдоль четверти окружности, отсекаемой полуосями $\arg x=0$ и $\arg x=\frac{\pi}{2}$, стремится к нулю, когда радиус стремится к бесконечности.

Поэтому деформация пути законна. Мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\xi(1-iu)} \sin^2 e^{-\xi}\, d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[i\int\limits_0^{\infty} (\varepsilon + iy)^{iu-2} \frac{1-e^{2(i\varepsilon-y)}}{4}\, dy -\right.$$

$$\left. - i\int\limits_0^{\infty} (\varepsilon - iy)^{iu-2} \frac{1-e^{2(-i\varepsilon-y)}}{4}\, dy\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\infty} \left[i(\varepsilon + iy)^{iu-2} \frac{1-e^{2(i\varepsilon-y)}}{4} -\right.$$

$$\left. - i(\varepsilon - iy)^{iu-2} \frac{1-e^{2(-i\varepsilon-y)}}{4}\right] dy.$$

Интегрируя по частям, получаем, что это выражение равно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int\limits_0^{\infty} \left[-\frac{(\varepsilon+iy)^{iu-1}}{iu-1}\frac{e^{2(i\varepsilon-y)}}{2} - \frac{(\varepsilon-iy)^{iu-1}}{iu-1}\frac{e^{2(-i\varepsilon-y)}}{2}\right] dy -\right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^{iu-1}}{iu-1}\sin^2\varepsilon \right\}, \tag{20.20}$$

а это равно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int\limits_0^{\infty} \left[\frac{(\varepsilon+iy)^{iu}}{u(iu-1)} e^{2(i\varepsilon-y)} - \frac{(\varepsilon-iy)^{iu}}{u(iu-1)} e^{2(-i\varepsilon-y)}\right] dy +\right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^{iu}}{iu(iu-1)}\sin 2\varepsilon - \frac{\varepsilon^{iu-1}}{iu-1}\sin^2\varepsilon \right\}.$$

Мы можем теперь перейти к пределу в силу критерия мажорированной сходимости, а потому (20.20) имеет вид

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{y^{iu}}{u(iu-1)} (i^{iu} - (-i)^{iu})\, e^{-2y}\, dy =$$

$$= \frac{\Gamma(iu+1)}{u(iu-1)}\left(e^{-\frac{\pi u}{2}} - e^{\frac{\pi u}{2}}\right) 2^{-iu-1}.$$

Но эта функция не обращается в нуль ни при каком вещественном значении u.

Функция K_1 разрывна и, следовательно, не принадлежит классу M_1. Но функции

$$K_1(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon} K_1(\eta)\,d\eta = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < -\varepsilon, \\ \dfrac{1-e^{-\xi-\varepsilon}}{\varepsilon}, & \text{если } -\varepsilon \leqslant \xi < 0, \\ e^{-\xi}\,\dfrac{1-e^{-\varepsilon}}{\varepsilon}, & \text{если } 0 \leqslant \xi, \end{cases} \tag{20.21}$$

принадлежат классу M_1. Их преобразования Фурье имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\xi}\,\frac{d\xi}{\varepsilon}\int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon} K_1(\eta)\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\xi}\,\frac{d\xi}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{\varepsilon} K_1(\xi+\eta)\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon} d\eta \int\limits_{-\eta}^{\infty} e^{-\xi(1+iu)-\eta}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{e^{iu\eta}}{1+iu}\,d\eta = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{iu\varepsilon}-1}{iu(1+iu)}.$$

Это выражение обращается в нуль при $u = 2\pi n/\varepsilon$ и, следовательно, множество преобразований Фурье функций $K_1(\xi, \varepsilon)$ не имеет ни одного общего вещественного нуля. Таким образом, по теореме 7 (20.19) эквивалентно тому, что для любого ε

$$\lim_{\xi\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta, \varepsilon)\,dg(\eta) = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi, \varepsilon)\,d\xi =$$

$$= \frac{A}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon} K_1(\eta)\,d\eta = \frac{A}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{0}^{\varepsilon} K_1(\xi+\eta)\,d\eta =$$

$$= \frac{A}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{\varepsilon} d\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\,d\xi. \tag{20.22}$$

В лемме 7_5 несущественно предположение о непрерывности $K(x)$. Таким образом, мы можем тем же самым путем установить, что если выполняется (20.18), то (20.22) справедливо для любого ε. Таким образом, из (20.18) вытекает (20.19). Если мы покажем теперь, что из справедливости (20.22) для любого ε вытекает (20.18), то будет доказана теорема 21, а тем самым и теорема 22.

С этой целью заметим, что в силу (20.21)

$$\frac{1-e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} K_1(\xi) \leqslant K_1(\xi, \varepsilon) \leqslant \frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} K_1(\xi+\varepsilon).$$

Таким образом, поскольку $g(\eta)$ монотонно возрастает,

$$\frac{1-e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \varlimsup_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta)\, dg(\eta) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta, \varepsilon)\, dg(\eta) = A \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} \varliminf_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta+\varepsilon)\, dg(\eta) =$$

$$= \frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} \varliminf_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta)\, dg(\eta).$$

Так как ε достаточно мало, то мы можем выбрать $(1-e^{-\varepsilon})/\varepsilon$ и $(e^{\varepsilon}-1)/\varepsilon$ сколь угодно близкими к 1 и получить

$$\varlimsup_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta)\, dg(\eta) \leqslant A \leqslant \varliminf_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta)\, dg(\eta),$$

что эквивалентно (20.18). Этим заканчивается доказательство теоремы 21.

Тесно связанной с рассмотренным выше является

Теорема 23. *Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная функция и пусть существует один из пределов*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx \tag{20.23}$$

или

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2}{\pi T}\int_0^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin^2 Tx}{x^2}\,dx. \tag{20.24}$$

Тогда и второй предел существует и имеет то же самое значение.

В этой теореме роль 0 и ∞ изменилась по сравнению с теоремой 21. Положим

$$x=e^{-\xi};\quad T=e^{\eta}=\varepsilon^{-1};\quad \varphi(x)=\psi(\xi).$$

Тогда выражение (20.23) примет вид

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{\eta}^{\infty}e^{\eta-\xi}\psi(\xi)\,d\xi, \tag{20.25}$$

а выражение (20.24) примет вид

$$\lim_{\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 e^{\eta-\xi}}{e^{\eta-\xi}}\psi(\xi)\,d\xi. \tag{20.26}$$

Так как мы предположили, что функция ψ ограничена, то можем применить теорему 4 для установления полной эквивалентности между (20.25) и (20.26). Мы должны лишь доказать, что ни функция

$$\int_{-\infty}^{0}e^{\xi(1-iu)}\,d\xi,$$

ни функция

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi(1+iu)}\sin^2 e^{\xi}\,d\xi$$

не обращаются в нуль ни для одного вещественного u. Первое из этих выражений равно $1/(1-iu)$, следовательно, не обращается в нуль, в то время как второе равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi(1+iu)} \sin^2 e^{-\xi}\, d\xi$$

и, следовательно, по (20.19) — (20.20) может быть записано в виде

$$\frac{\Gamma(1-iu)\left(e^{\pi u/2}-e^{-\pi u/2}\right) 2^{iu-1}}{u(iu+1)}.$$

А эта функция также не обращается в нуль ни при каком вещественном u. Таким образом, теорема 23 доказана.

Следствием из теоремы 22 является

Теорема 24. *Пусть функция* $f(x)$ *такова, что* (20.01) *ограничено по* T. *Пусть* $s_1(u)$ *определяется равенством* (20.04), $s_2(u)$ — *равенством* (20.05) *и* $s(u)$ — *равенством* (20.06). *Пусть* $s(u)$ *имеет ограниченное полное изменение на оси* $(-\infty, \infty)$. *Тогда интеграл*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx \tag{20.261}$$

существует и равен сумме квадратов скачков $s(u)$ *во всех точках разрыва, умноженной на* $1/2\pi$. *В частности, если функция* $s(u)$ *непрерывна, то выражение* (20.261) *равно нулю.*

Мы можем представить $s(u)$ в виде

$$s(u) = s_\eta(u) + t_\eta(u),$$

где $t_\eta(u)$ — ступенчатая функция, непрерывная во всех точках, за исключением тех точек разрыва $s(u)$, в которых скачок превосходит η, а в этих точках имеющая те же скачки, что и $s(u)$. Функция $s_\eta(u)$ не имеет, таким образом, скачков, превосходящих по величине η. Кроме того, обе функции $s_\eta(u)$ и $t_\eta(u)$ имеют ограниченное полное изменение, не превосходящее V — полного изменения $s(u)$.

В силу неравенства Минковского имеем

$$\left|\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du\right\}^{1/2}-\right.$$
$$\left.-\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|t_\eta(u+\varepsilon)-t_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du\right\}^{1/2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du\right\}^{1/2}.$$

Поэтому если ε достаточно мало, то

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|t_\eta(u+\varepsilon)-t_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du$$

является суммой квадратов всех скачков $s(u)$, которые больше чем η. Это следует из того, что функция

$$|t_\eta(u+\varepsilon)-t_\eta(u-\varepsilon)|$$

обращается в нуль всюду, кроме 2ε-окрестностей каждой из точек скачка, а на них она равна абсолютному значению скачка.

Выражение $|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|$ может быть сделано меньше чем 2η, если выбрать ε достаточно малым. При этом для каждого конечного отрезка оси u можно выбрать ε одним и тем же для всех точек отрезка. Используем для доказательства теорему Гейне — Бореля. У каждой точки u есть окрестность, в которой колебание функции $s_\eta(u)$ меньше, чем 2η. Следовательно, можно покрыть любой отрезок на оси u конечным числом промежутков, в каждом из которых колебания $s_\eta(u)$ меньше чем 2ε. Если выбрать ε меньше. чем половина длины пересечения любых двух соседних промежутков, то функция

$$|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|$$

будет меньше 2η для любого u из данного отрезка.

Мы покажем сейчас, что при достаточно малом ε имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du<3\eta V. \quad (20.265)$$

В самом деле,

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du=$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{-A}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{A}^{\infty}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du.$$

Обозначим через S верхнюю грань функции $|s_\eta|$. Тогда

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{A}^{\infty}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant 2S\frac{1}{2\varepsilon}\int_{A}^{\infty}|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|\,du=$$

$$=2S\frac{1}{2\varepsilon}\left[\int_{A}^{A+2\varepsilon}+\int_{A+2\varepsilon}^{A+4\varepsilon}+\ldots\right]|s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|\,du=$$

$$=2S\frac{1}{2\varepsilon}\int_{0}^{2\varepsilon}\{|s_\eta(u+A+\varepsilon)-s_\eta(u+A-\varepsilon)|+$$

$$+|s_\eta(u+A+3\varepsilon)-s_\eta(u+A+\varepsilon)|+|s_\eta(u+A+5\varepsilon)-$$

$$-s_\eta(u+A+3\varepsilon)|+\ldots\}.$$

Но это выражение не может превзойти произведения $2S$ на полное изменение функции s от $A-\varepsilon$ до ∞ и, следовательно, является равномерно малым по ε и η, если выбрать достаточно большое A. То же самое применимо к интегралу от $-\infty$ до $-A$. Следовательно, мы можем сделать оба эти интеграла меньшими чем ηV. Нам осталось оценить интеграл от $-A$ до A. Но этот интеграл не превосходит

$$\max_{-A<u<A} |s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)| \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-A}^{A} |s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|\,du$$

и можно выбрать настолько малое ε, что это выражение будет меньше чем

$$2\eta \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s_\eta(u+\varepsilon)-s_\eta(u-\varepsilon)|\,du =$$

$$= 2\eta \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_\eta(u+(2n+1)\varepsilon)-s_\eta(u+(2n-1)\varepsilon)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant 2\eta \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V\,du \leqslant 2\eta V.$$

Тем самым доказано (20.265).

Из (20.265) вытекает, что при достаточно малом ε выражение

$$\left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du \right\}^{1/2}$$

отличается меньше чем на $(3\eta V)^{1/2}$ от квадратного корня из суммы квадратов скачков $s(u)$, которые превосходят η. Если мы обозначим эту сумму через $\sum_\eta$, то получим

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du \right\}^{1/2} < \left\{ \sum\nolimits_\eta \right\}^{1/2} + (3\eta V)^{1/2},$$

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du \right\}^{1/2} > \left\{ \sum\nolimits_\eta \right\}^{1/2} - (3\eta V)^{1/2}.$$

Отсюда следует

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du \right\}^{1/2} - \\ - \varliminf_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du \right\}^{1/2} < 2(3\eta V)^{1/2},$$

и так как η сколь угодно мало, то предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du \right\}^{1/2}$$

существует и отличается от $\left\{\sum_\eta\right\}^{1/2}$ меньше чем на $(3\eta V)^{1/2}$. Следовательно,

$$\lim_{\eta \to 0} \left\{ \sum_\eta \right\}^{1/2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du \right\}^{1/2}$$

и

$$\lim_{\eta \to 0} \sum_\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du. \tag{20.27}$$

Левая часть равенства (20.27) является суммой квадратов *всех* скачков функции $s(u)$. Из теоремы 22 вытекает справедливость теоремы 24. Конечно, если $s(u)$ имеет ограниченное полное изменение и не имеет скачков, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx = 0.$$

ГЛАВА IV
ОБОБЩЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 21. Спектр функции

Пусть $f(x)=\sum\limits_{1}^{n} A_j e^{i\Lambda_j x}$ — заданный тригонометрический многочлен. Тогда

$$f(x+\xi)\bar{f}(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_j \bar{A}_k e^{i\Lambda_j x} e^{i(\Lambda_j-\Lambda_k)\xi}. \qquad (21.01)$$

Но если $\mu \neq 0$, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\mu\xi}\,d\xi=\lim_{T\to\infty}\frac{\sin\mu T}{\mu T}=0. \qquad (21.02)$$

С другой стороны,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i0\xi}\,d\xi=1. \qquad (21.03)$$

Таким образом,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi=\sum_{1}^{n} A_j\bar{A}_j e^{i\Lambda_j x}=\sum_{1}^{n}|A_j|^2 e^{i\Lambda_j x}.$$

Иными словами, если положить

$$\varphi(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi, \qquad (21.04)$$

то функция $\varphi(x)$ существует для всех x, непрерывна и состоит из членов, имеющих те же самые частоты, что и $f(x)$, с амплитудами, равными квадратам амплитуд соответствующих членов $f(x)$, причем фазы всех членов этой функции вещественны при $x=0$.

Рассмотрим теперь более общий класс функций $f(x)$, чем рассмотренные выше тригонометрические многочлены. Если функция f измерима на оси $(-\infty, \infty)$, а функция $\varphi(x)$, определенная равенством (21.04), существует при всех x, мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу S. В случае, если $f(x)$ принадлежит классу S и $\varphi(x)$ непрерывна, мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу S'. Таким образом, любой тригонометрический многочлен принадлежит классу S'. Дадим несколько примеров функций $f(x)$, принадлежащих S' или S.

I) $f(x)$ принадлежит L_2. Тогда $\varphi(x)\equiv 0$ и, следовательно, $f(x)$ принадлежит S'.

II) $f(x)=e^{i|x|^{\frac{1}{2}}}$. Тогда

$$\varphi(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp i\left(|x+\xi|^{\frac{1}{2}}-|\xi|^{\frac{1}{2}}\right)d\xi=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp i\,\frac{|x+\xi|-|\xi|}{|x+\xi|^{\frac{1}{2}}+|\xi|^{\frac{1}{2}}}\,d\xi=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(1+0\left(|\xi|^{-\frac{1}{2}}\right)\right)d\xi=1.$$

Таким образом, $f(x)$ принадлежит S'.

III) $f(x)=e^{ix^2}$. Тогда

$$\varphi(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp i\left((x+\xi)^2-\xi^2\right)d\xi=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{ix^2}}{2T}\int_{-T}^{T}e^{2ix\xi}\,d\xi=\begin{cases}1, & \text{если}\quad x=0;\\ 0, & \text{если}\quad x\neq 0,\end{cases}$$

в соответствии с (21.03) и (21.02). Таким образом, $f(x)$ принадлежит S, но не принадлежит S'.

IV) λ — число отрезка $[0, 1]$, имеющее в двоичной системе счисления запись

$$0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots$$

Функция $f(x)$ определяется как $2\alpha_{2n+1}-1$ при $n < x \leqslant n+1$, если n — положительное число или 0, и как $2\alpha_{2n}-1$, если $-n < x \leqslant 1-n$. Мы покажем, что *почти для всех* значений λ

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{если } |x| \leqslant 1; \\ 0\quad, & \text{если } x > 1. \end{cases} \tag{21.05}$$

Отсюда будет следовать, что для этих значений λ $f(x)$ принадлежит S'.

Утверждение, которое мы хотим доказать, можно сформулировать следующим образом: если функция $f(x)$ принимает на каждом отрезке $[n, n+1]$, $-\infty < n < \infty$, либо значение $+1$, либо значение -1, и если выбор этого значения независим от выбора значений на остальных отрезках, то вероятность того, что $\varphi(x)$ не имеет вида, даваемого равенством (21.05), равна нулю. Необходимое сведение вероятности к лебеговой мере было дано Борелем[1]) и Штейнгаузом[2]).

Перейдем к доказательству этого утверждения. Если $0 \leqslant n \leqslant |x| \leqslant n+1$, то

$$\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} f(x+\xi)\,\overline{f}(\xi)\,d\xi =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} \int_{m}^{m+1} f(x+\xi)\,f(m+1)\,d\xi =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} \left\{ \int_{m}^{m+n+1-x} f(m+n+1)\,f(m+1)\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{m+n+1-x}^{m+1} f(m+n+2)\,f(m+1)\,d\xi \right\} =$$

---

[1]) Э. Борель, «Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques», Rend. di Palermo, 27 (1909), 247—271.

[2]) Г. Штейнгауз, «Les probabilités dénombrables et leurs rapport à la théorie de la mesure», Fund. Math. 4 (1923), 286—318.

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N} \{(n+1-x) f(m+n+1) f(m+1) +$$
$$+ (x-n) f(m+n+2) f(m+1)\} =$$
$$= (n+1-x)\varphi(n) + (x-n)\varphi(n+1). \quad (21.06)$$

Формула (21.06) понимается в том смысле, что если последний член равенства (21.06) существует, то существует и $\varphi(x)$ и имеет то же самое значение. Замена произвольного переменного T в (21.04) целочисленным переменным N в первой строке (21.06) не ограничивает, очевидно, общности рассуждений.

В силу (21.06) для того, чтобы установить (21.05), достаточно показать, что почти для всех значений λ $\varphi(0)=1$ и $\varphi(n)=0$, если n — любое целое число, отличное от нуля. Равенство $\varphi(0)=1$ непосредственно вытекает из того, что $|f(x)|=1$. Мы покажем теперь, что для любого отличного от нуля значения n равенство $\varphi(n)=0$ выполняется почти для всех значений λ. Отсюда будет следовать равенство (21.05) в силу того, что сумма счетного множества множеств меры нуль является множеством меры нуль.

Рассмотрим выражение $f(m+n) f(m)$ при фиксированном n и переменном m (n и m — целые числа). Так как функция $f(x)$ определяется заданием числа λ из отрезка $[0, 1]$, то $f(m+n) f(m)$ представляет последовательность чисел $+1$ и -1, сопоставленную этому числу. Если зафиксировать некоторый конечный отрезок чисел m, то все соответствующие ему наборы знаков равновероятны — мера множества точек λ, для которых на этих местах реализуется данный набор знаков, имеет ту же лебегову меру, что и для любого другого набора знаков.

Возьмем $2N$ идущих друг за другом значений $f(m+n) f(m)$. В силу элементарных теорем теории вероятностей мера множества точек λ, для которых сумма этих значений превосходит по модулю $N\varepsilon$ не больше чем

$$2^{2N+1} \sum_{k=\left[\frac{N\varepsilon}{2}\right]}^{N} \frac{(2N)!}{(N-k)!\,(N+k)!}.$$

По формуле Стирлинга мы имеем асимптотическое равенство

$$2\sum_{k=\left[\frac{N\varepsilon}{2}\right]}^{N}\frac{1}{\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-k}\left(1+\frac{k}{N}\right)^{N+k}}\left(\frac{N}{\pi(N^2-k^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\sim$$

$$\sim\sum_{k=\left[\frac{N\varepsilon}{2}\right]}^{N}2e^{\frac{k}{N}(N-k-N-k)}\left(\frac{N}{\pi(N^2-k^2)}\right)^{\frac{1}{2}}=O\left(N^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{N\varepsilon^2}{2}}\right).$$

Так как ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty}N^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{N\varepsilon^2}{2}}$$

сходится, то почти для всех значений λ найдется целое значение N, начиная с которого выполняется неравенство

$$\sum_{m=-N}^{N}f(m+n)f(m)\leqslant N\varepsilon.$$

Таким образом, за исключением множества значений λ меры нуль, имеем

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N}f(n+\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

и так как ε произвольно, а сумма счетного множества множеств меры нуль является множеством меры нуль, то почти для всех λ

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N}f(n+\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi=0.$$

Переход от целых значений N к произвольным не составляет трудности и мы получаем

$$\varphi(n)=0,$$

чем и закончено доказательство (21.05).

Теорема 25. *Если функция $f(x)$ принадлежит S и y — любое вещественное число, то*

$$|\varphi(y)| \leqslant \varphi(0). \tag{21.07}$$

В самом деле, в силу неравенства Буняковского—Шварца

$$|\varphi(y)| = \left| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(y+\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi \right| =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(y+\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^{T} |f(y+\xi)|^2\,d\xi \int_{-T}^{T} |f(\xi)|^2\,d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T+y}^{T+y} |f(\xi)|^2\,d\xi \; \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\xi)|^2\,d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T-|y|}^{T+|y|} |f(\xi)|^2\,d\xi \; \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\xi)|^2\,d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{T+|y|}{T} \; \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2(T+|y|)} \int_{-T-|y|}^{T+|y|} |f(\xi)|^2\,d\xi \times \right.$$

$$\left. \times \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\xi)|^2\,d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} = \{1 \cdot \varphi(0) \cdot \varphi(0)\}^{\frac{1}{2}} = \varphi(0).$$

Таким образом, каждая функция $\varphi(x)$, соответствующая функции $f(x)$ из пространства S, ограничена.

Далее, справедлива следующая

Теорема 26. *Если функция $f(x)$ принадлежит S, а функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x=0$, то эта функция непрерывна для всех вещественных значений аргумента, следовательно, $f(x)$ принадлежит S'.*

В самом деле, применяя вновь неравенство Буняковского — Шварца, получаем

$$|\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)| =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{f(x+\xi+\varepsilon)-f(x+\xi)\} \overline{f}(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^{T} |f(x+\xi+\varepsilon)-f(x+\xi)|^2 d\xi \int_{-T}^{T} |f(\xi)|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{21.08}$$

Чтобы закончить доказательство, нам понадобится следующая лемма:

Лемма 26_1. *Если $\psi(x)$ — положительная функция и a — любая вещественная постоянная и если*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi(x)\, dx = A,$$

то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+a}^{T+a} \psi(x)\, dx = A.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что при $T > |a|$ имеем

$$\left(1-\frac{|a|}{T}\right) \frac{1}{2(T-|a|)} \int_{-T+|a|}^{T-|a|} \psi(x)\, dx \leqslant \frac{1}{2T} \int_{-T+a}^{T+a} \psi(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{|a|}{T}\right) \frac{1}{2(T+|a|)} \int_{-T+|a|}^{T+|a|} \psi(x)\, dx,$$

и что как первый, так и последний член этого неравенства стремится к A при возрастании T.

В частности, если существует $\varphi(0)$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\xi+a)|^2 d\xi = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+a}^{T+a} |f(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\xi)|^2 d\xi = \varphi(0).$$

Но если $f(x)$ принадлежит S, то

$$\varphi(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\xi+y)\bar{f}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\{|f(\xi+y)+f(\xi)|^2-|f(\xi+y)-f(\xi)|^2+$$

$$+i\,|f(\xi+y)+if(\xi)|^2-i\,|f(\xi+y)-if(\xi)|^2\}\,d\xi. \qquad (21.09)$$

Последний предел может быть представлен в виде линейной комбинации четырех средних от положительных величин, каждое из которых существует. Таким образом, в силу леммы 26_1 имеем

$$\varphi(y)=\frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a}\{|f(\xi+y)+f(\xi)|^2-$$

$$-|f(\xi+y)-f(\xi)|^2+i\,|f(\xi+y)+if(\xi)|^2-$$

$$-i|f(\xi+y)-if(\xi)|^2\}\,d\xi=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a} f(\xi+y)\bar{f}(\xi)\,d\xi.$$

Но тогда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x+\xi+\varepsilon)-f(x+\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x+\xi+\varepsilon)|^2\,d\xi+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x+\xi)|^2\,d\xi-$$

$$-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+\xi+\varepsilon)\bar{f}(x+\xi)\,d\xi-$$

$$-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+\xi)\bar{f}(x+\xi+\varepsilon)\,d\xi=2\varphi(0)-\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon).$$

Поэтому из (21.08) следует

$$|\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)|\leqslant\{\varphi(0)\,[2\varphi(0)-\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)]\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда непосредственно вытекает теорема 26.

Вернемся теперь к (21.09). Если мы определим $s(u)$ как в (20.04) — (20.06), то функция, связанная с $f(\xi+y)$ так же, как $s(u)$ с $f(\xi)$, имеет вид

$$s_y(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\left[\int_1^A+\int_{-A}^{-1}\right]\frac{f(\xi+y)e^{-iu\xi}}{-i\xi}d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_{-1}^{1}f(\xi+y)\frac{e^{-iu\xi}-1}{-i\xi}d\xi\right\}.$$

Мы имеем

$$s_y(u+\varepsilon)-s_y(u-\varepsilon)-e^{iuy}(s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon))=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}f(\xi+y)\frac{2\sin\xi\varepsilon}{\xi}e^{-iu\xi}d\xi-\right.$$
$$\left.-\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}f(\xi)\frac{2\sin\xi\varepsilon}{\xi}e^{-iu(\xi-y)}d\xi\right\}. \qquad (21.10)$$

Заметим, что по определению преобразования Фурье мы можем без ограничения общности заменить символ $\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}$ на $\underset{A,\,B\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-A}^{B}$ (см. (9.02)). Поэтому (21.10) означает

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(\xi)\left[\frac{2\sin(\xi-y)\varepsilon}{\xi-y}-\frac{2\sin\xi\varepsilon}{\xi}\right]e^{-iu(\xi-y)}d\xi.$$

Таким образом, по теореме Планшереля имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|s_y(u+\varepsilon)-s_y(u-\varepsilon)-e^{iuy}(s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon))|^2du=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|^2\left[\frac{2\sin(\xi-y)\varepsilon}{\xi-y}-\frac{2\sin\xi\varepsilon}{\xi}\right]^2d\xi. \qquad (21.11)$$

Но

$$\left|\frac{2\sin(\xi-y)\varepsilon}{\xi-y}-\frac{2\sin\xi\varepsilon}{\xi}\right|=\left|2\int\limits_{\xi-y}^{\xi}\frac{d}{dw}\left(\frac{\sin\varepsilon w}{w}\right)dw\right|=$$

$$=2\left|\int\limits_{\xi-y}^{\xi}\frac{\varepsilon w\cos\varepsilon w-\sin\varepsilon w}{w^2}dw\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2|y|\max_{\xi-y\leqslant w\leqslant\xi}\left|\frac{\cos\varepsilon w}{\varepsilon w}-\frac{\sin\varepsilon w}{\varepsilon^2w^2}\right|\leqslant 4\varepsilon^2|y|\max\frac{1}{|\varepsilon w|}. \tag{21.12}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{2\sin(\xi-y)\varepsilon}{\xi-y}-\frac{2\sin\xi\varepsilon}{\xi}\right|\leqslant 4\varepsilon. \tag{21.13}$$

Положим

$$\left|\frac{2\sin(\xi-y)\varepsilon}{\xi-y}-\frac{2\sin\xi\varepsilon}{\xi}\right|=T \tag{21.14}$$

и рассмотрим различные возможные значения ξ, y и $\xi-y$. В случае $0\leqslant\xi/2\leqslant\xi-y\leqslant\xi$ мы имеем в силу (21.12)

$$T\leqslant\frac{8\varepsilon|y|}{|\xi|}\leqslant\frac{16\varepsilon|y|}{|y|+|\xi|}.$$

В случае $0\leqslant\xi-y\leqslant\xi/2\leqslant\xi$ мы имеем в силу (21.13)

$$T\leqslant 4\varepsilon\leqslant\frac{16\varepsilon|y|}{|y|+|\xi|}.$$

В случае $0\leqslant\xi\leqslant\xi-y<\frac{3\xi}{2}$ мы имеем в силу (21.12)

$$T\leqslant\frac{4\varepsilon|y|}{|\xi|}\leqslant\frac{16\varepsilon|y|}{|y|+|\xi|}.$$

В случае $0\leqslant\xi$, $3\xi/2\leqslant\xi-y$ мы имеем в силу (21.13)

$$T\leqslant 4\varepsilon\leqslant\frac{16\varepsilon|y|}{|\xi|+|y|}.$$

Таким образом, если ξ и $\xi-y$ неотрицательны, то $T\leqslant 16\varepsilon|y|/(|\xi|+|y|)$. Этот же результат верен и в случае, когда ξ и $\xi-y$ меньше нуля. В случае, если они лежат по разные стороны от нуля, имеем $|\xi| < |y|$ и

$$T \leqslant 4\varepsilon \leqslant \frac{16\varepsilon\,|y|}{|\xi|+|y|}.$$

Таким образом, во всех случаях

$$T \leqslant \frac{16\varepsilon\,|y|}{|\xi|+|y|} \tag{21.15}$$

и по теореме 20 и (21.11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s_y(u+\varepsilon) - s_y(u-\varepsilon) - \\ - e^{iuy}(s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon))|^2\,du = O(\varepsilon^2).$$

Следовательно, по теореме 22 и по неравенству Минковского, если $|w| = 1$, то

$$\left\{\lim_{B\to\infty} \frac{1}{2B} \int_{-B}^{B} |f(\xi+y) + wf(\xi)|^2\,d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} = \\
= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s_y(u+\varepsilon) - s_y(u-\varepsilon) + \\
+ w(s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon))|^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}} = \\
= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) + \left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iuy} + w|^2 \times \\
\times |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}\right\} = \\
= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} (2 + we^{-iuy} + \\
+ \overline{w}e^{iuy})|s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}|f(\xi+y)+wf(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}(2+we^{-iuy}+\overline{w}e^{iuy})|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du. \tag{21.16}$$

Если мы положим w последовательно равным ± 1, $\pm i$, и возьмем комбинацию четырех выражений вида (21.09), то получим утверждение

Теорема 27. *Если* $f(x)$ *принадлежит* S, *то*

$$\varphi(y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du. \tag{21.17}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi_\varepsilon(y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du. \tag{21.175}$$

Из ее определения вытекает, что

$$|\varphi_\varepsilon(y)|\leqslant\varphi_\varepsilon(0).$$

Так как $\varphi_\varepsilon(0)$ стремится к $\varphi(0)$, когда $\varepsilon\to 0$, то $\varphi_\varepsilon(y)$ ограничено при всех значениях y и достаточно малых значениях ε. Таким образом, эта функция *ограниченно* стремится к $\varphi(y)$, когда $\varepsilon\to 0$, если $f(x)$ принадлежит S. Поэтому в силу критерия ограниченной сходимости

$$\frac{1}{2\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(y)\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi_\varepsilon(y)\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\eta}\int_{-\eta}^{\eta}dy\,\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du.$$

Так как повторный интеграл абсолютно сходится, то мы можем изменить порядок интегрирования и получить

$$\frac{1}{2\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(y)\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du\,\frac{1}{2\eta}\int_{-\eta}^{\eta}e^{iuy}\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u\eta}{u\eta}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du.$$

Точно так же

$$\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\left(1-\frac{|y|}{\eta}\right)\varphi(y)\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\left(1-\frac{|y|}{\eta}\right)\varphi_\varepsilon(y)\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\left(1-\frac{|y|}{\eta}\right)dy\,\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuy}|s(u+\varepsilon)-$$

$$-s(u-\varepsilon)|^2\,du=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(u+\varepsilon)-$$

$$-s(u-\varepsilon)|^2\,du\,\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\left(1-\frac{|y|}{\eta}\right)e^{-iuy}\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2\frac{u\eta}{2}}{u^2\eta^2}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2du.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ принадлежит пространству S', то

$$\varphi(0)=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\left(1-\frac{|y|}{\eta}\right)\varphi(y)\,dy$$

и

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-\frac{4\sin^2\frac{u\eta}{2}}{u^2\eta^2}\right]|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du=0. \tag{21.18}$$

Так как при $|u\eta| > \pi$

$$1 - \frac{4\sin^2\frac{u\eta}{2}}{u^2\eta^2} > 1 - \frac{4}{\pi^2},$$

то из положительности подынтегральной функции в (21.18) вытекает

$$\lim_{\eta\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int\limits_{\pi/\eta}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{-\pi/\eta}\right]|s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\,du = 0,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{A\to\infty}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int\limits_{A}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{-A}\right]|s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\,du = 0. \tag{21.19}$$

Пусть теперь $f(x)$ принадлежит S и пусть выполняется (21.19). Тогда в силу (21.17)

$$|\varphi(y) - \varphi(0)| \leqslant 2\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left[\int\limits_{A}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{-A}\right]|s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\,du + \\ + \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{-A}^{A}(e^{iuy} - 1)|s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\,du. \tag{21.20}$$

Выберем A настолько большим, чтобы первое слагаемое в правой части неравенства (21.20) не превосходило $\delta/2$ (это возможно в силу (21.19)). Далее, выберем настолько малое $|y|$, чтобы на отрезке $[-A, A]$ выполнялось неравенство

$$|e^{-iuy} - 1| \leqslant \delta/(2\varphi(0)).$$

Тогда получим

$$|\varphi(y) - \varphi(0)| \leqslant \delta.$$

Мы доказали, таким образом, следующее утверждение:

Теорема 28. *Если $f(x)$ принадлежит пространству S, то эта функция принадлежит S' тогда и только тогда, когда выполняется* (21.19).

Введем теперь два новых обозначения

$$\sigma(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left[\int_1^A+\int_{-A}^{-1}\right]\frac{\varphi(\xi)\,e^{-iu\xi}}{-i\xi}\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,\frac{e^{-iu\xi}-1}{-i\xi}\,d\xi\right\} \qquad (21.21)$$

и

$$\sigma_\varepsilon(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left[\int_1^A+\int_{-A}^{-1}\right]\frac{\varphi_\varepsilon(\xi)\,e^{-iu\xi}}{-i\xi}\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_{-1}^{1}\varphi_\varepsilon(\xi)\,\frac{e^{-iu\xi}-1}{-i\xi}\,d\xi\right\}. \qquad (21.22)$$

Оба эти выражения существуют, так как $\varphi(\xi)$ и $\varphi_\varepsilon(\xi)$ ограничены. Кроме того, в силу (21.175) и теоремы Планшереля

$$\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\varphi_\varepsilon(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi=\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2 \qquad (21.23)$$

(правая часть этого равенства принадлежит L_2, поскольку она является квадратом ограниченной функции, принадлежащей L_2, и, таким образом, мажорируется постоянным числом, умноженным на эту функцию). Проинтегрируем обе части выведенного равенства, принимая во внимание X_{41a}. Мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon(\xi)\,\frac{e^{-iu\xi}-1}{-i\xi}\,d\xi=$$
$$=\int_0^u\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du. \qquad (21.24)$$

Но в X_{41} было показано, что если функция стремится к одному пределу в обычном смысле, и к другому пределу в среднем, то эти пределы почти всюду совпадают. Поэтому из (21.22) и (21.24) вытекает

$$\sigma_\varepsilon(u) = \text{const} + \int_0^u \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du. \quad (21.25)$$

Так как $\varphi_\varepsilon(\xi)$ ограниченно сходится к $\varphi(\xi)$, когда $\varepsilon \to 0$, то $\varphi_\varepsilon(\xi)/(-i\xi)$ сходится в среднем к $\varphi(\xi)/(-i\xi)$ в любой области, не содержащей нулевой точки. Отсюда следует, что на любом конечном отрезке оси u

$$\sigma(u) = \underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \sigma_\varepsilon(u). \quad (21.255)$$

Нетрудно непосредственно вывести из критерия ограниченной сходимости, что при $\varepsilon \to 0$ второй интеграл в (21.22) равномерно по u сходится ко второму интегралу в (21.21); что же касается первых интегралов в этих формулах, то наше утверждение вытекает из того, что сходимость в среднем инвариантна относительно преобразования Фурье.

Отсюда имеем

$$\sigma(u) = \text{const} + \underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^u |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du. \quad (21.257)$$

Легко проверить, что постоянная в этой формуле равна

$$-\left[\int_1^A + \int_{-A}^{-1}\right] \frac{\varphi(\xi)}{i\xi} d\xi.$$

Из (21.257) следует, что

$$\sigma(u) - \sigma(-u) =$$
$$= \underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 du. \quad (21.26)$$

В случае, если $f(x)$ имеет вид $\sum_1^n A_j e^{i\Lambda_j x}$, мы имеем

$$\sigma(u) = \sum_1^n |A_j|^2 \tau_j(u),$$

где

$$\tau_j(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\left[\int_1^A + \int_{-A}^{-1}\right]\frac{e^{i(\Lambda_j-u)\xi}}{-i\xi}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1}\frac{e^{i(\Lambda_j-u)\xi}-e^{i\Lambda_j\xi}}{-i\xi}\,d\xi\right\} = \mathrm{const} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\Lambda_j-u)\xi}-e^{i\Lambda_j\xi}}{-i\xi}\,d\xi.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iv\xi}-1}{i\xi}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin v\xi}{\xi}\,d\xi = \pi\,\mathrm{sgn}\,v.$$

Следовательно,

$$\tau_j(u) = \mathrm{const} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\mathrm{sgn}\,\Lambda_j - \mathrm{sgn}\,(\Lambda_j - u)).$$

Таким образом, $\tau_j(u)$ — ступенчатая функция, имеющая единственную точку разрыва $u=\Lambda_j$ со скачком $\sqrt{2\pi}$ в точке $u=\Lambda_j$. Но тогда $\sigma(u)$ является ступенчатой функцией со скачками $\sqrt{2\pi}\,|A_j|^2$, в точках разрыва $u=\Lambda_j$. Полное приращение $\sigma(u)$ на любом отрезке равняется сумме квадратов амплитуд тригонометрических членов $f(x)$, частоты которых лежат на этом отрезке, умноженной на $\sqrt{2\pi}$. Говоря языком физиков, это приращение равно полной энергии той части колебания $x=f(t)$, которая лежит на рассматриваемом отрезке, где x рассматривается как сдвиг, а t как время. Таким образом, $\sigma(u)$ определяет распределение энергии в спектре функции $f(x)$ и мы можем называть $\sigma(u)$ просто «спектром» $f(t)$.

Автор не видит существенных доводов против использования физической терминологии в чистой математике, если математическое понятие в точности совпадает с понятием, уже знакомым физикам. В случаях, когда новый термин вводится для того, чтобы описать идею, новую для чистых математиков, но уже известную в физике, во всех отношениях лучше избегать ненужных недоразумений и выбрать уже применяющееся обозначение. «Спектр» в этой книге в точности совпадает с понятием, хорошо известным физикам, а потому может быть назван тем же самым именем.

В различных примерах функций f и φ, которые мы изучали в этой главе, функцию $\sigma(u)$ легко определить. В случае I) $\sigma(u)$ постоянна. В случае II) $\sigma(u)$ имеет скачок $\sqrt{2\pi}$ в нуле и постоянна в остальных точках. В случае III) $\sigma(u)$ постоянна. В случае IV) преобразование Фурье $\varphi(x)$ есть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1-|x|)\, e^{iux}\, dx = \frac{2(1-\cos u)}{u^2}$$

и рассуждая так же, как в (21.23), (21.24) и (21.257), мы имеем

$$\sigma(u) = \text{const} + \int_{0}^{u} \frac{2(1-\cos v)}{v^2}\, dv.$$

В этом случае $\sigma(u)$ является дифференцируемой монотонной функцией. Это означает на языке физиков, что спектр $f(t)$ непрерывен и имеет спектральную плотность.

Пример функции с непрерывным спектром, но не имеющей спектральной плотности ни в одной точке, был дан Малером [1]). Неизвестно, имеет ли этот тип спектров какое-либо значение для физики.

§ 22. Спектр некоторых линейных преобразований функций

Мы переходим к новой группе лемм и теорем, касающейся спектров функций вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

[1]) Малер [1].

где

$$\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}|f(x)|^2\,dx \tag{22.01}$$

равномерно ограничено по B. Первая лемма гласит:

Лемма 29_1. *Пусть для любых x и λ $f(x, u, \lambda)$ принадлежит L_2 как функция от u и пусть она измерима по x и u. Пусть интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x, u, \lambda)|^2\,du \tag{22.02}$$

ограничен по x и λ и пусть при $\lambda\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x, u, \lambda)-f(x, u)|^2\,du\to 0 \tag{22.03}$$

равномерно в любой конечной области изменения x. Пусть $K(x)$ принадлежит L_1 и

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,f(x, u, \lambda)\,dx$$

существует при всех u и λ. Тогда при $\lambda\to\infty$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,f(x, u, \lambda)\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,f(x, u)\,dx\right|^2du\to 0. \tag{22.04}$$

Заметим сначала, что $f(x, u)$ принадлежит L_2, и что в силу (22.03) при всех x

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x, u)|^2\,du\leqslant\limsup\int_{-\infty}^{\infty}|f(x, u, \lambda)|^2\,du. \tag{22.05}$$

Но по неравенству Буняковского — Шварца имеем

$$\left[\int_A^B |K(x)|\,dx\right]^2 \limsup \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, u, \lambda) - f(x, u)|^2\,du \geqslant$$
$$\geqslant \int_A^B |K(x)|\,dx \int_A^B |K(y)|\,dy \int_{-\infty}^{\infty} du\,|f(x, u, \lambda) -$$
$$- f(x, u)|\,|f(y, u, \lambda) - f(y, u)| =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_A^B |K(x)|dx \int_A^B |K(y)|dy\,|f(x, u, \lambda) -$$
$$- f(x, u)|\,|f(y, u, \lambda) - f(y, u)| =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} du \left[\int_A^B |K(x)|\,|f(x, u, \lambda) - f(x, u)|\,dx\right]^2 \geqslant$$
$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} du \left|\int_A^B K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx\right|^2. \quad (22.06)$$

Эта формула означает, что если выполнены условия леммы 29_1, то существуют обе части этой формулы, причем они удовлетворяют указанным неравенствам.

Так как функция (22.02) ограничена по x и λ и имеет место (22.05), то функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, u, \lambda) - f(x, u)|^2\,du$$

ограничена по x и λ. Таким образом, в силу (22.06)

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \left|\int_A^B K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx\right|^2 <$$
$$< \mathrm{const}\left[\int_A^B |K(x)|\,dx\right]^2.$$

Заметим, что B может принимать значение $+\infty$, а A — значение $-\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{A}^{\infty} K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx \right|^2 = 0$$

равномерно по λ, а также, что

$$\lim_{B\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{-\infty}^{B} K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx \right|^2 = 0$$

равномерно по λ.

Но из (22.06) и (22.03) вытекает, что для фиксированных конечных A и B

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{B}^{A} K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx \right|^2 = 0.$$

Пусть A и $-B$ настолько велики, что для любого λ

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{A}^{\infty} K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx \right|^2 < \frac{\varepsilon}{9};\\ &\int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{-\infty}^{B} K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx \right|^2 < \frac{\varepsilon}{9}. \end{aligned}\right\} \tag{22.07}$$

Возьмем настолько большое λ, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{B}^{A} K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx \right|^2 < \frac{\varepsilon}{9}. \tag{22.08}$$

Тогда в силу неравенства Минковского и (22.07) — (22.08)

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,[f(x, u, \lambda) - f(x, u)]\,dx \right|^2 < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает (22.04) и лемма 29_1 тем самым доказана.

Лемма 29_2. *Пусть $f(x)$ — измеримая функция, для которой*

$$\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}|f(x)|^2\,dx \tag{22.01}$$

равномерно ограничено по B. Пусть $s(u)$ определено, как в (20.04) — (20.06). *Пусть $K(x)$ — ограниченная измеримая функция, для которой*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(x)|^2(1+x^2)\,dx<\infty. \tag{22.09}$$

Тогда существуют

$$t_1(u)=\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{1}^{A}+\int_{-A}^{-1}\right]\frac{e^{-iux}}{-ix}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi \tag{22.10}$$

и

$$t_2(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{22.11}$$

Пусть

$$t(u)=t_1(u)+t_2(u). \tag{22.12}$$

Тогда

$$t(u+\varepsilon)-t(u-\varepsilon)-\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi=$$
$$=\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,d\xi\int_{-A}^{A}2f(x-\xi)\left[\frac{\sin\varepsilon x}{x}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\right]e^{-iux}\,dx. \tag{22.13}$$

В самом деле, в силу (20.07)

$$\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\,\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x)\frac{2\sin\varepsilon x}{x}\,e^{-iux}\,dx.$$

Но легко показать, что преобразованием Фурье функции $f(x-\xi)$ является преобразование Фурье $f(x)$, умноженное на $e^{iu\xi}$. Таким образом,

$$\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,d\xi\,\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x-\xi)\,\frac{2\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\,e^{-iux}\,dx. \qquad (22.14)$$

Для любых ξ и A функция

$$F(\xi,\ u,\ A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(x-\xi)\,\frac{2\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\,e^{-iux}\,dx \qquad (22.15)$$

принадлежит L_2 по u и, таким образом, измерима. Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi,\ u,\ A)|^2\,du\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\frac{4\sin^2\varepsilon x}{x^2}\,dx<\infty$$

и $\underset{A\uparrow\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,F(\xi,\ u,\ A)=F(\xi,\ u)$ существует для каждого ξ. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi,\ u,\ A)-F(\xi,\ u)|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_{A-\xi}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A-\xi}\right]|f(\xi)|^2\,\frac{4\sin^2\varepsilon x}{x^2}\,dx,$$

а это выражение равномерно стремится к нулю при $A\to\infty$ в каждой конечной области изменения ξ. Функции $K(\xi)$ и $F(\xi,\ u,\ A)$ принадлежат L_2 и в силу неравенства Буняковского — Шварца интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,F(\xi,\ u,\ A)\,d\xi$$

существует для любых u и A. Применяя неравенство Буняковского — Шварца к (22.09), мы убеждаемся, что $K(\xi)$ принадлежит L_1. Таким образом, в силу леммы 29_1

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} F(\xi,\, u,\, A) = \\ = \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, F(\xi,\, u,\, A)\, d\xi.$$

Комбинируя это с (22.14) и (22.15), мы получаем

$$\{s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)\} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi = \\ = \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x-\xi)\, \frac{2\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\, e^{-iux}\, dx. \tag{22.16}$$

По неравенству Буняковского — Шварца

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |K(x-\xi)\, f(\xi)|\, d\xi\right]^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^2\, d\xi}{1+(x-\xi)^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} |K(x-\xi)|^2\, [1+(x-\xi)]^2\, d\xi. \tag{22.17}$$

В силу (22.09) это выражение не превосходит выражения вида

$$\text{const} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^2}{1+(x-\xi)^2}\, d\xi = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\xi^2}{1+(x-\xi)^2}\, \frac{|f(\xi)|^2}{1+\xi^2}\, d\xi. \tag{22.18}$$

Простой подсчет показывает, что для любого вещественного ξ

$$\frac{1+\xi^2}{1+(x-\xi)^2} \leqslant \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}-x} = \left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right)^2.$$

Таким образом, в силу (22.17) и (20.03)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x-\xi) f(\xi)| \, d\xi \leqslant \text{const}\, x + \text{const}.$$

Отсюда следует, что двойной интеграл

$$\int_{-A}^{A} \frac{2 \sin \varepsilon x}{x} e^{-iux} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) f(x-\xi)\, d\xi \tag{22.19}$$

абсолютно сходится и мы можем поэтому изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) d\xi \int_{-A}^{A} f(x-\xi) \frac{2 \sin \varepsilon x}{x} e^{-iux} dx. \tag{22.20}$$

Но по (22.18)

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) f(\xi)\, d\xi \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{2T} \int_{-T}^{T} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^2}{1+(x-\xi)^2} d\xi =$$

$$= \frac{\text{const}}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2 d\xi \int_{-T}^{T} \frac{dx}{1+(x-\xi)^2} =$$

$$= \frac{\text{const}}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2 [\operatorname{arctg}(T+\xi) - \operatorname{arctg}(\xi - T)]\, d\xi =$$

$$= \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2 \frac{1}{2T} \operatorname{arctg} \frac{2T}{1-T^2+\xi^2}\, d\xi,$$

где для $\operatorname{arctg} x$ берется главное значение (между 0 и π). Если ξ пробегает отрезок $[-2T, 2T]$, то

$$\frac{1}{2T} \operatorname{arctg} \frac{2T}{1-T^2+\xi^2} \leqslant \frac{\pi}{2T},$$

а вне этого отрезка

$$\frac{1}{2T}\operatorname{arctg}\frac{2T}{1-T^2+\xi^2} \leqslant \frac{1}{2T}\operatorname{arctg}\frac{8T}{1+3\xi^2} \leqslant \frac{4}{1+3\xi^2} \leqslant \frac{4}{1+\xi^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(y-\xi) f(\xi)\, d\xi \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\left\{ \frac{\pi}{2T}\int_{-2T}^{2T} |f(\xi)|^2\, d\xi + 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^2}{1+\xi^2}\, d\xi \right\}.$$

Применяя (20.03) ко второму члену в правой части, получаем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dy \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) f(\xi)\, d\xi \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\,\limsup \frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} |f(\xi)|^2 d\xi. \qquad (22.21)$$

Следовательно, к функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) f(\xi)\, d\xi$ можно применить те же рассмотрения, которые были применены к $f(x)$ в § 20. При этом функции, определяемые равенствами (22.10)—(22.12), аналогичны функциям, определяемым равенствами (20.04)—(20.06) и, следовательно, существуют.

Как и в (20.07), имеем

$$t(u+\varepsilon) - t(u-\varepsilon) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \frac{2\sin\varepsilon x}{x} e^{-iux}\, dx \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) f(x-\xi)\, d\xi,$$

и поскольку (22.19) и (22.20) эквивалентны, то

$$t(u+\varepsilon) - t(u-\varepsilon) =$$
$$= \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi \int_{-A}^{A} f(x-\xi) \frac{2\sin\varepsilon x}{x} e^{-iux} dx.$$

Комбинируя это с (22.16), получаем (22.13). Мы доказали, таким образом, лемму 29_2.

Лемма 29_3. *Пусть при предположениях леммы* 29_2 *функция* $\xi K(\xi)$ *принадлежит* L_1. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|t(u+\varepsilon)-t(u-\varepsilon)-\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\times \times\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\Big|^2 du=0. \tag{22.22}$$

В самом деле, в силу (21.14) и (21.15)

$$\left[\int_A^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]\left|2f(x-\xi)\left[\frac{\sin\varepsilon x}{x}-\frac{\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\right]\right|^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int_A^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]\left|\frac{16\varepsilon\xi}{|x|+|\xi|}f(x-\xi)\right|^2dx=$$
$$=\left[\int_{A-\xi}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A-\xi}\right]\left|\frac{16\varepsilon\xi}{|x+\xi|+|\xi|}f(x)\right|^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int_{A-|\xi|}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A+|\xi|}\right]256\varepsilon^2\xi^2\frac{|f(x)|^2}{x^2}\,dx. \tag{22.23}$$

Делая преобразование Фурье и вспоминая, что это преобразование сохраняет инвариантным интеграл от квадрата модуля функции, убеждаемся, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg|\frac{1}{\varepsilon\xi\sqrt{2\pi}}\,\underset{B\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-B}^{B}2f(x-\xi)\left[\frac{\sin\varepsilon x}{x}-\frac{\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\right]e^{-iux}dx-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon\xi\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}2f(x-\xi)\left[\frac{\sin\varepsilon x}{x}-\frac{\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\right]e^{-iux}dx\Bigg|^2du\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int_{A-|\xi|}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A+|\xi|}\right]\frac{256\,|f(x)|^2}{x^2}\,dx. \tag{22.24}$$

Но если $A \to \infty$, то это выражение стремится к нулю равномерно в любой конечной области изменения ξ (см. (20.03)).

Положим теперь в лемме 29_1 x, u и λ равными ξ, u и A, а также положим

$$f(\xi, u, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\left[\frac{\sin \varepsilon x}{x} - \frac{\sin \varepsilon (x-\xi)}{x-\xi}\right] e^{-iux}\, dx$$

и

$$f(\xi, u) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, f(\xi, u, A).$$

Тогда все условия леммы 29_1 выполнены — мы уже установили (22.03) — и поэтому имеет место и утверждение этой леммы, а именно, справедливо равенство

$$\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi \int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\left[\frac{\sin \varepsilon x}{x} - \frac{\sin \varepsilon (x-\xi)}{x-\xi}\right] e^{-iux}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi\, \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\left[\frac{\sin \varepsilon x}{x} - \frac{\sin \varepsilon (x-\xi)}{x-\xi}\right] e^{-iux}\, dx.$$

Таким образом, в силу (22.13)

$$t(u+\varepsilon) - t(u-\varepsilon) - \{s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)\} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi \times$$

$$\times \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\left[\frac{\sin \varepsilon x}{x} - \frac{\sin \varepsilon (x-\xi)}{x-\xi}\right] e^{-iux}\, dx. \quad (22.25)$$

Из (21.14) и (21.15) вытекает, что

$$\frac{1}{\varepsilon\xi\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\left[\frac{\sin \varepsilon x}{x} - \frac{\sin \varepsilon (x-\xi)}{x-\xi}\right] e^{-iux}\, dx \quad (22.26)$$

является преобразованием Фурье функции из L_2 и, следовательно, принадлежит L_2. В силу (22.24) это же самое верно для

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\varepsilon\xi\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\left[\frac{\sin\varepsilon x}{x}-\frac{\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\right]e^{-iux}\,dx. \tag{22.27}$$

Используя (22.23), легко доказать, что в любой конечной области изменения ξ интеграл по u от квадрата модуля (22.26) равномерно ограничен по ε и ξ. В силу (22.24) то же самое верно и для (22.26).

Таким образом,

$$\underset{\varepsilon\to0}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi}\ \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\times$$
$$\times\left[\frac{\sin\varepsilon x}{x}-\frac{\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\right]e^{-iux}\,dx=0, \tag{22.26}$$

причем это равенство выполняется равномерно в любой конечной области изменения ξ. Применяя далее лемму 29_1, в которой мы заменим λ на ε и $K(\xi)$ на $\xi K(\xi)$ получаем

$$\underset{\varepsilon\to0}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\,d\xi\ \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} 2f(x-\xi)\times$$
$$\times\left[\frac{\sin\varepsilon x}{x}-\frac{\sin\varepsilon(x-\xi)}{x-\xi}\right]e^{-iux}\,dx=0, \tag{22.28}$$

и в силу (22.25)

$$\underset{\varepsilon\to0}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\Big\{t(u+\varepsilon)-t(u-\varepsilon)-\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\Big\}=0.$$

Это может быть записано в виде

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left| t(u+\varepsilon) - t(u-\varepsilon) - \{s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)\} \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) e^{-iu\xi} d\xi \right|^2 du = 0. \quad (22.22)$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Лемма 29_4. *Пусть $f(x)$ — измеримая функция, для которой*

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^{B} |f(x)|^2 dx \quad (22.01)$$

равномерно ограничено по B. Пусть функция $s(u)$ определена как в (20.04) — (20.06). *Пусть $xK(x)$ принадлежит L_1 и $(1+|x|)K(x)$ принадлежит L_2. Пусть*

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) f(\xi) d\xi \right|^2 = 0. \quad (22.29)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 \times$$
$$\times \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) e^{-iu\xi} d\xi \right|^2 du = 0. \quad (22.30)$$

Это утверждение вытекает из неравенства Минковского, примененного к (22.22), и формулы

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |t(u+\varepsilon) - t(u-\varepsilon)|^2 du = 0.$$

Чтобы доказать эту формулу, достаточно заменить в теореме 22 функцию $s(u)$ на $t(u)$ и применить (22.29).

Лемма 29_5. *Пусть выполнены условия леммы 29_4 и, кроме того, не существует вещественного u, для которого*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi = 0. \tag{22.31}$$

Тогда для любого конечного C

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-C}^{C} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\, du = 0. \tag{22.32}$$

В самом деле, в любой конечной области изменения u интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi$ непрерывно зависит от u и превосходит по модулю некоторую постоянную величину Q. Таким образом, в силу (22.30)

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{Q^2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2\, du \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi \right|^2 du = 0.$$

Лемма 29. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит S. Пусть $xK(x)$ принадлежит L_1 и $(1+|x|)K(x)$ принадлежит L_2. Пусть*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, f(\xi)\, d\xi.$$

Тогда $g(x)$ принадлежит S'.

Пусть $s(u)$ определяется равенствами (20.04)—(20.06), а $t(u)$ — равенствами (22.10)—(22.12). Положим

$$K_3(x) = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} K(x+\xi)\, d\xi.$$

В силу условий леммы 29_6 $xK_3(x)$ принадлежит L_1 и $(1+|x|)K_3(x)$ принадлежит L_2, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\eta}\, dx \left| \int_0^{\eta} K(x+\xi)\, d\xi \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\eta}\, dx \int_0^{\eta} |K(x+\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\eta} \int_0^{\eta} (|x+\xi|+\eta)|K(x+\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|K(x)|\, dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|x|)^2}{\eta^2}\, dx \left| \int_0^{\eta} K(x+\xi)\, d\xi \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\eta} d\xi_1 \int_0^{\eta} d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|x|)^2}{\eta^2} |K(x+\xi_1)|\,|K(x+\xi_2)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0<\lambda<\eta} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^2 |K(x+\lambda)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (1+\eta+|x|)^2 |K(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant (1+\eta)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^2 |K(x)|^2\, dx.$$

Если $\mu(u)$ связано с K_3 точно так же, как $t(u)$ связано с K, то в силу леммы 29_3

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \Bigl| \mu(u+\varepsilon) - \mu(u-\varepsilon) -$$

$$- \{s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)\} \int_{-\infty}^{\infty} K_3(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi \Bigr|^2 du = 0 \quad (22.33)$$

и, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_3(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi = \frac{1}{\eta}\int_0^{\eta} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu(\xi-x)}\, d\xi =$$

$$= \frac{e^{iu\eta}-1}{iu\eta}\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi,$$

то из (22.33) вытекает

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\mu(u+\varepsilon)-\mu(u-\varepsilon)-$$

$$-\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\frac{e^{iu\eta}-1}{iu\eta}\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\Big|^2 du = 0. \quad (22.34)$$

С другой стороны, в силу леммы 29_3

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\tau(u+\varepsilon)-\tau(u-\varepsilon)-$$

$$-\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi\Big|^2 du = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{e^{iu\eta}-1}{iu\eta}\{\tau(u+\varepsilon)-\tau(u-\varepsilon)\}-$$

$$-\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\frac{e^{iu\eta}-1}{iu\eta}\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi\Big|^2 du = 0.$$

Комбинируя это с (21.34), получаем с помощью неравенства Минковского

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{e^{iu\eta}-1}{iu\eta}\{\tau(u+\varepsilon)-\tau(u-\varepsilon)\}-$$

$$-\mu(u+\varepsilon)+\mu(u-\varepsilon)\Big|^2 du = 0. \quad (22.35)$$

Далее, в силу (20.03), (22.17), (22.21) и рассуждений на стр. 215—217 имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} [K(x-\xi) - K_3(x-\xi)] f(\xi)\, d\xi \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \limsup \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} | f(\xi)|^2 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} | K(x-\xi) -$$

$$- K_3(x-\xi)|^2 [1+(x-\xi)^2]\, d\xi =$$

$$= \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} \left| K(x) - \frac{1}{\eta}\int_{0}^{\eta} K(x+\xi)\, d\xi \right|^2 (1+x^2)\, dx =$$

$$= \frac{\text{const}}{\eta^2} \int_{0}^{\eta} d\xi_1 \int_{0}^{\eta} d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} | K(x) - K(x+\xi_1)|\,|K(x) -$$

$$- K(x+\xi_2)|\,(1+x^2)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \limsup_{0<\xi<\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |K(x) - K(x+\xi)|^2 (1+x^2)\, dx \;^{1)} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \limsup_{0<\xi<\eta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)(1+|x|) - \right.$$

$$- K(x+\xi)(1+|x+\xi|)|^2 dx +$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} |K(x+\xi)(|x+\xi| - |x|)|^2 dx \right\}. \quad (22.36)$$

Первый член последней формулы в (22.36) обращается в нуль, когда $\eta \to 0$ в силу X_{31}, а второй член мажорируется

[1]) Мы использовали здесь неравенство Буняковского — Шварца.

выражением $\xi^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(x)|^2 dx$ и также стремится к нулю. Таким образом,

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} dx \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} [K(x-\xi) - K_3(x-\xi)] f(\xi) d\xi \right|^2 = 0$$

или в силу теоремы 22

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tau(u+\varepsilon) - \tau(u-\varepsilon) - \mu(u+\varepsilon) + \\ + \mu(u-\varepsilon)|^2 du = 0.$$

Комбинируя это с (22.35) и снова используя неравенство Минковского, получаем

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - \frac{e^{iu\eta} - 1}{iu\eta} \right|^2 |\tau(u+\varepsilon) - \tau(u-\varepsilon)|^2 du = 0.$$

Но если $|u\eta| > 4$, то

$$\left| 1 - \frac{e^{iu\eta} - 1}{iu\eta} \right| \geqslant 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\eta \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{2\varepsilon} \left[\int\limits_{4/\eta}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{-4/\eta} \right] |\tau(u+\varepsilon) - \tau(u-\varepsilon)|^2 du = 0. \tag{22.37}$$

В силу теоремы 28 при выполнении этого условия из принадлежности функции $g(x)$ пространству S вытекает, что она принадлежит S'.

Нам осталось доказать, что $g(x)$ принадлежит S, то есть в силу определения этой функции, что

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(x+\lambda-\xi) f(\xi) d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{K}_1(x-\xi) \overline{f}(\xi) d\xi$$

существует при всех вещественных λ. Но

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dx \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x+\lambda-\xi) f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K}_1(x-\xi)\overline{f}(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K}_1(\eta)\, d\eta \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+\lambda-\xi)\overline{f}(x-\eta)\, dx. \tag{22.38}$$

Выражение

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+\lambda-\xi)\overline{f}(x-\eta)\, dx \tag{22.39}$$

сходится к $\varphi(x+\eta-\xi)$ (см. лемму 26_1) и мажорируется выражением

$$\frac{1}{2T}\sqrt{\int_{-T-|\lambda-\xi|}^{T+|\lambda-\xi|} |f(x)|^2\, dx \int_{-T-|\eta|}^{T+|\eta|} |f(x)|^2\, dx},$$

что можно видеть, применяя неравенство Буняковского — Шварца. Но в силу ограниченности $\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} |f(x)|^2\, dx$ последнее выражение меньше чем

$$\text{const}\sqrt{\left(1+\frac{|\lambda-\xi|}{T}\right)\left(1+\frac{|\eta|}{T}\right)}.$$

Таким образом, при достаточно больших значениях T (22.39) мажорируется выражением

$$\text{const}\sqrt{(1+|\xi|)(1+|\eta|)},$$

а тем самым и выражением

$$\text{const}(1+|\xi|)(1+|\eta|).$$

Так как $K(x)(1+|x|)$ принадлежит L_1, то подынтегральная функция в (22.38) при достаточно больших значениях T мажорируется абсолютно интегрируемой функцией и, таким образом, в силу критерия мажорированной сходимости

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dx\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x+\lambda-\xi)f(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K}_1(x-\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}K_1(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}K_1(\eta)\varphi(\lambda+\eta-\xi)\,d\xi.$$

Теорема 29. *Пусть $f(x)$ — измеримая функция, для которой выражение*

$$\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}|f(x)|^2\,dx \tag{22.01}$$

равномерно ограничено по B. Пусть $xK_1(x)$ и $xK_2(x)$ принадлежат L_1 и пусть $(1+|x|)K_1(x)$ и $(1+|x|)K_2(x)$ принадлежат L_2. Пусть не существует вещественного значения u, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi=0. \tag{22.31}$$

Пусть

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\left|\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\right|^2=0. \tag{22.40}$$

Тогда

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\left|\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\right|^2=0. \tag{22.41}$$

Это утверждение является теоремой тауберова типа в обобщенном смысле. Формулы (22.40) — (22.41) означают, что выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_{1,2}(x-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

асимптотически малы *в среднем*. Формула (22.01) означает, что функция $f(x)$ ограничена в среднем. Таким образом, если функция ограничена в среднем и скользящее взвешенное среднее этой функции асимптотически мало в среднем, причем преобразование Фурье ядра скользящего среднего не обращается в нуль, то все скользящие средние с ядрами весьма общего типа асимптотически малы в среднем.

Определим $s(u)$ как в (20.04)—(20.06) и положим

$$\tau_1(u) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_1^A + \int_{-A}^{-1}\right] \frac{e^{-iux}}{-ix}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-\xi) f(\xi)\, d\xi;$$

$$\tau_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-iux}-1}{-ix}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-\xi) f(\xi)\, d\xi;$$

$$\tau(u) = \tau_1(u) + \tau_2(u).$$

В силу (22.32) для любого положительного C имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-C}^{C} |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi) e^{-iu\xi} \right|^2 du = 0.$$

Таким образом, в силу леммы 29_3 и неравенства Минковского мы имеем соответственно

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-C}^{C} \Big| \tau(u+\varepsilon) - \tau(u-\varepsilon) - \\ - \{s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)\} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi) e^{-iu\xi}\, d\xi \Big|^2 du = 0$$

и

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-C}^{C} |\tau(u+\varepsilon) - \tau(u-\varepsilon)|^2\, du = 0. \qquad (22.42)$$

Условия, при которых мы установили (22.37), выполнены. Поэтому, применяя это соотношение, имеем

$$\lim_{C\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_C^{\infty} + \int_{-\infty}^{-C}\right] |\tau(u+\varepsilon) - \tau(u-\varepsilon)|^2\, du = 0.$$

Из этого равенства и равенства (22.42) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|\tau(u+\varepsilon)-\tau(u-\varepsilon)|^2\,du=0$$

и, следовательно, по теореме 22

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\left|\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\right|^2=0.$$

Мы доказали, таким образом, теорему 29.

С этой теоремой тесно связана следующая:

Теорема 30. *Пусть $f(x)$ принадлежит S и пусть $xK(x)$ принадлежит L_1, а $(1+|x|)K(x)$ принадлежит L_2. Пусть*

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Пусть функция $\sigma(u)$ определена формулой (21.21), *а $\sigma_\varepsilon(u)$ — формулой* (21.22). *Пусть $\psi(u)$ связано с g точно так же, как $\sigma(u)$ связано с f, а $\psi_3(u)$ связано с g точно так же, как $\sigma_\varepsilon(u)$ связано с f. Тогда*

$$\psi_\varepsilon(u)=\text{const}+\int_0^u\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2 d\sigma_\varepsilon(u);\qquad(22.43)$$

$$\psi(u)=\text{const}+\int_0^u\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2 d\sigma(u).\qquad(22.44)$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма, которая является основной для теорем следующего пункта:

Лемма 30_a. *Если функция $f(x)$ принадлежит S, то ее спектральная функция $\sigma(u)$ вещественна и может быть определена так, чтобы она монотонно возрастала.* Заметим, что поскольку функция $\sigma(u)$ определена лишь с точностью до множества меры нуль, нельзя говорить, что она монотонна, но лишь, что ее можно определить так, чтобы она стала монотонной.

Для доказательства леммы заметим, что в силу (21.25) функция $\sigma'_\varepsilon(u)$ вещественна и положительна или равна нулю, а потому функция $\sigma_\varepsilon(u)$ монотонно возрастает. Поэтому лемма вытекает из (21.255) и X_{42}.

Пусть $s(u)$ определено равенствами (20.04) — (20.06), а $t(u)$ — равенствами (22.11) — (22.13). В силу (21.25) имеем

$$\psi_\varepsilon(u) = \text{const} + \int_0^u \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \, |t(u+\varepsilon) - t(u-\varepsilon)|^2 \, du.$$

Комбинируя эту формулу с равенством (22.22), которое имеет место в силу леммы 29_3, и используя неравенство Минковского, получаем

$$\psi_\varepsilon(u) = \text{const} +$$
$$+ \int_0^u \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \left| \{s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)\} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) e^{-iu\xi} \right|^2 du. \quad (22.45)$$

Применяя вновь (21.25), получаем

$$d\sigma_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \, |s(u+\varepsilon) - s(u-\varepsilon)|^2 \, du,$$

что вместе с (22.45) приводит к (22.43).

Очевидно, что так как $xK(x)$ принадлежит L_1, то

$$\int_0^u du \int_{-\infty}^{\infty} xK(x) e^{-iux} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x) \, dx \int_0^u e^{-iux} \, du =$$
$$= i \int_{-\infty}^{\infty} xK(x) (e^{-iux} - 1) \, dx.$$

Отсюда легко следует, что $\int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-iux} \, dx$ является функцией, удовлетворяющей в любой конечной области изменения u условию Липшица, и, следовательно, что то же самое, справедливо для $\left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-iux} \, dx \right|^2$. Тем более эти функции имеют ограниченное полное изменение.

Мы можем, следовательно, записать равенство (22.43) в виде

$$\psi_\varepsilon(u)=\text{const}+\sigma_\varepsilon(u)\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2-$$
$$-\int_0^u \sigma_\varepsilon(u)\frac{d}{du}\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2\right\}du.$$

В силу (21.255) на любом отрезке оси u имеем

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \sigma_\varepsilon(u)\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2=\sigma(u)\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2.$$

Вторично применяя (21.255) и утверждение X_{26}, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^u \sigma_\varepsilon(u)\frac{d}{du}\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\right|^2\right\}du=$$
$$=\int_0^u \sigma(u)\frac{d}{du}\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2\right\}du$$

равномерно на любом отрезке оси u. В силу (21.255) имеем

$$\psi(u)=\underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \psi_\varepsilon(u).$$

Комбинируя это с доказанным выше, получаем, что почти всюду

$$\psi(u+\alpha)-\psi(u)=\sigma(u)\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2\Bigg|_u^{u+\alpha}-$$
$$-\int_u^{u+1}\sigma(u)\frac{d}{du}\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)\,e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2\right\}du.$$

В силу леммы 30_a мы можем проинтегрировать по частям и получить

$$\psi(u+\alpha)-\psi(u)=\int\limits_u^{u+\alpha}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\xi)e^{-iu\xi}d\xi\right|^2 d\sigma(u),$$

что эквивалентно (22.44).

§ 23. Монотонность спектра

Перейдем к группе теорем, связанных с леммой 30_a и относящихся к функции $\sigma(u)$.

Теорема 31. *Если функция $f(x)$ принадлежит S, а $\sigma(u)$ определено как в лемме 30_a, то*

$$\sigma(\infty)-\sigma(-\infty)\leqslant\sqrt{2\pi}\,\varphi(0). \tag{23.01}$$

Равенство

$$\sigma(\infty)-\sigma(-\infty)=\sqrt{2\pi}\,\varphi(0) \tag{23.02}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $f(x)$ принадлежит S'.

В самом деле, в силу (21.26) и доказательства утверждения X_{40} найдется сходящаяся к нулю последовательность значений ε такая, что если ε пробегает эту последовательность, то почти для всех значений u

$$\sigma(u)-\sigma(-u)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-u}^{u}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du \tag{23.03}$$

и, следовательно,

$$\sigma(u)-\sigma(-u)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du=\sqrt{2\pi}\,\varphi(0).$$

Таким образом, в силу монотонности $\sigma(u)$

$$\sigma(u)-\sigma(-u)\leqslant\sqrt{2\pi}\,\varphi(0)$$

для *всех* u, откуда и вытекает (23.01).

Если выполняется (23.02), то

$$\lim_{u\to 0}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_u^{\infty}+\int_{-\infty}^{-u}\right]|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du=0, \tag{23.04}$$

когда ε пробегает выбранную последовательность. В доказательстве соответствующей части теоремы 28 ничего не изменится, если мы ограничимся значениями ε, принадлежащими этой последовательности. Таким образом, $f(x)$ принадлежит S'. С другой стороны, если $f(x)$ принадлежит S', то по второму утверждению теоремы 28 (23.04) имеет место, когда ε *любым образом* стремится к нулю и в силу (23.03) и (21.17) мы получаем (23.02).

Теорема 32. *Если $f(x)$ принадлежит S и если $\sigma(u)$ определено как в лемме 30_a, а $\{u_n\}$ — точки разрыва функции $\sigma(u)$, то*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\sum[\sigma(u_n+0)-\sigma(u_n-0)]^2.$$

В частности, если функция $\sigma(u)$ непрерывна, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(x)|^2\,dx=0.$$

Это утверждение вытекает из леммы 30_a и теоремы 24 и из того, что σ связано с φ точно так же как s связано с f.

Теорема 33. *Пусть выполнены предположения теоремы 32 и пусть*

$$\psi(x)=\varphi(x)-\sum\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}e^{iu_nx}[\sigma(u_n+0)-\sigma(u_n-0)]. \tag{23.05}$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi(x)|^2\,dx=0. \tag{23.06}$$

Ряды в (23.06) абсолютно сходятся в силу (23.01) и монотонности $\sigma(u)$.

Мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\left[\int_{1}^{A}+\int_{-A}^{-1}\right]\frac{\psi(\xi)\,e^{-iu\xi}}{-i\xi}\,d\xi+\int_{-1}^{1}\psi(\xi)\frac{e^{-iux}-1}{-i\xi}\,d\xi\right\}=$$

$$=\sigma(u)+\mathrm{const}-\frac{1}{2}\sum\left[\sigma(u_n+0)-\right.$$

$$\left.-\sigma(u_n-0)\right]\left[\operatorname{sgn}u_n-\operatorname{sgn}(u_n-u)\right]$$

и это выражение является непрерывной монотонной функцией. Поэтому (23.06) вытекает из теоремы 24.

Теорема 34.* *Если функция $f(x)$ принадлежит S, то почти всюду*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\,d\sigma(u). \tag{23.07}$$

В самом деле, в силу (23.01) и монотонности $\sigma(u)$ интеграл в (23.07) существует и является ограниченной функцией от x на вещественной оси. Эта функция непрерывна, так как

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iu(x+\delta)}-e^{iux}\right)d\sigma(u)\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sin\frac{\delta u}{2}\right|d\sigma(u)\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-\delta-\frac{1}{2}}\right]d\sigma(u)+\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(u)\right\},$$

а это выражение сколь угодно мало при достаточно малом δ.

Положим

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\,d\sigma(u).$$

Тогда

$$\varphi_1(x)\frac{\sin\lambda x}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\,d\sigma(u)\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ivx}\,dv=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(u)\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i(u+v)x}\,dv=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwx}\,dw\,\frac{1}{2}\int_{w-\lambda}^{w+\lambda}d\sigma(u)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwx}\,dw\,\frac{1}{2}\left[\sigma(w+\lambda)-\sigma(w-\lambda)\right].$$

Здесь все перемены порядка интегрирования справедливы в силу абсолютной сходимости интеграла. Далее, в силу (21.21) имеем

$$\frac{1}{2}\left[\sigma(w+\lambda)-\sigma(w-\lambda)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}e^{-iwx}\varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx.$$

Так как функция φ ограничена, то $\varphi(x)\sin\lambda x/\lambda$ принадлежит L_2 и по теореме Планшереля

$$\varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-A}^{A}e^{iwx}\,dw\,\frac{1}{2}\left[\sigma(w+\lambda)-\sigma(w-\lambda)\right].$$

В силу X_{41} отсюда вытекает, что почти всюду

$$\varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}=\varphi_1(x)\frac{\sin\lambda x}{x}$$

или же, что $\varphi(x)=\varphi_1(x)$ почти всюду. Этим заканчивается доказательство теоремы 34. Мы доказали одновременно следующее утверждение:

Теорема 35. *Если функция $f(x)$ принадлежит S, то $\varphi(x)$ может отличаться от непрерывной функции лишь на множестве меры нуль.*

Теорема 36. *Если $f(x)$ принадлежит S, то функция*

$$S(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx$$

существует для всех u. При этом почти всюду

$$\bar{S}(u)-\sigma(u)=\text{const}.$$

Выберем функцию $\sigma(u)$ так, чтобы она была монотонной, и положим, что она равна $\frac{\sigma(u+0)-\sigma(u-0)}{2}$ в точках разрыва. Мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\varphi(x)\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwx}\,d\sigma(w)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(w)\int_{-A}^{A}\frac{e^{i(w-u)x}-e^{iwx}}{-ix}\,dx.$$

Интегрируя по частям, мы получим, что непроинтегрированные члены стремятся к нулю в силу теоремы Римана — Лебега, а потому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\varphi(x)\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx=$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(w)\,dw\int_{-A}^{A}\frac{d}{dw}\left(\frac{e^{i(w-u)x}-e^{iwx}}{-ix}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(w)\,dw\int_{-A}^{A}\left(e^{i(w-u)x}-e^{iwx}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(w)\left[\frac{\sin(w-u)A}{w-u}-\frac{\sin wA}{w}\right]dw=\sigma(u)-\sigma(0)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sigma(u+w)-\sigma(w)+\sigma(u-w)-\sigma(-w)-2\sigma(u)+2\sigma(0)}{2}\right]\frac{\sin wA}{w}\,dw.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\varphi(x)\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx-\sigma(u)+\sigma(0)\right|=$$
$$=\left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(w)\frac{\sin wA}{w}\,dw\right|, \quad (23.08)$$

где $F(w)$ — функция, непрерывная при $w=0$, такая что $F(0)=0$, и имеющая ограниченное полное изменение V на полуоси $(0, \infty)$. Поэтому

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(w)\frac{\sin wA}{w}\,dw\right|=\left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F\left(\frac{w}{A}\right)\frac{\sin w}{w}\,dw\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2n\limsup_{0<u\leqslant\frac{n\pi}{A}}|F(u)|+\left|\frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{\infty}F\left(\frac{w}{A}\right)\frac{\sin w}{w}\,dw\right|. \quad (23.09)$$

Далее,

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{\infty}F\left(\frac{w}{A}\right)\frac{\sin w}{w}\,dw\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{\infty}\left[\int_{n\pi}^{w}\frac{\sin v}{v}\,dv\right]dF\left(\frac{w}{A}\right)\right|+$$
$$+\frac{2}{\pi}\limsup\left|F\left(\frac{w}{A}\right)\right|\left|\int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin v}{v}\,dv\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4V}{\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}\,dv\leqslant 4V/n\pi. \quad (23.10)$$

Мы использовали здесь то обстоятельство, что функция F ограничена, а функция $\frac{\sin w}{w}$ обращается в нуль в точках $n\pi$ и на бесконечности. Пусть теперь n настолько велико, что

$$4V/n\pi<\varepsilon/2$$

и пусть, далее, A настолько велико, что

$$2n \limsup_{0<u<\frac{n\pi}{A}} |F(u)| < \varepsilon/2.$$

Из (23.08) — (23.10) вытекает тогда, что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \varphi(x) \frac{e^{-iux}-1}{-ix} dx - \sigma(u) + \sigma(0) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{e^{-iux}-1}{-ix} dx = \sigma(u) - \sigma(0),$$

что эквивалентно заключению теоремы 35.

§ 24. Элементарные свойства почти-периодических функций

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция вещественного аргумента x, заданная на всей оси $(-\infty, \infty)$ и принимающая вещественные или комплексные значения. Следуя Г. Бору [1]), мы будем называть число $\tau(\varepsilon)$ *ε-периодом функции* $f(x)$, если для всех x

$$|f(x+\tau(\varepsilon)) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{24.01}$$

Мы будем говорить, что функция $f(x)$ *равномерно почти-периодична*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $L(\varepsilon)$, что на любом отрезке $[A, A+L(\varepsilon)]$ лежит хотя бы один ε-период функции $f(x)$. В литературе [2]) известны более общие классы почти-периодических функций, чем равномерно почти-периодические функции, но мы в этой книге будем рассматривать лишь равномерно почти-периодические функции и называть их попросту «почти-периодическими». Основные теоремы Бора о равномерно почти-периодических функциях таковы:

Теорема 37. *Класс почти-периодических функций совпадает с классом функций $f(x)$, таких, что для*

---

[1]) Бор [1].
[2]) Безикович [1].

любого $\varepsilon > 0$ *найдутся комплексные числа* A_k *и вещественные числа* Λ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, *такие, что для всех* x

$$\left| f(x) - \sum_1^n A_k e^{i\Lambda_k x} \right| \leqslant \varepsilon. \tag{24.02}$$

Теорема 38. *Если функция* $f(x)$ *почти-периодична, то предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\Lambda x} \, dx \tag{24.03}$$

существует для всех вещественных Λ. *Этот предел отличен от нуля не более чем для счетного множества значений* Λ. *Обозначим эти значения* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ *Если положить*

$$A_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\Lambda_n x} \, dx,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| f(x) - \sum_1^n A_k e^{i\Lambda_k x} \right|^2 dx = 0.$$

Эти теоремы известны соответственно как теоремы Вейерштрасса и Парсеваля для почти-периодических функций; первая — по аналогии с обычной теоремой Вейерштрасса о приближении функций многочленами, а вторая — по аналогии с X_{51}. Мы посвятим конец нашей книги доказательству этих теорем. При этом мы будем опираться на ряд лемм.

Заметим, что если $f(x)$ — обыкновенная периодическая функция, то ее периоды являются ε-периодами для любого ε и поэтому любой отрезок длины $L(\varepsilon)$, где $L(\varepsilon)$ больше чем наименьший положительный период, содержит некоторый период. Мы получили, таким образом, следующую лемму:

Лемма 37_1. *Каждая непрерывная периодическая функция почти-периодична.*

Это оправдывает название «почти-периодические».

Если функция $f(x)$ почти-периодична, то она непрерывна и, следовательно, на конечном отрезке $[0, L(\varepsilon)]$ ограничена по модулю некоторым числом N. Для любого вещественного числа x найдется ε-период $\tau(\varepsilon)$ функции $f(x)$, лежащий на отрезке $[x-L(\varepsilon), x]$. Но тогда $x-\tau(\varepsilon)$ лежит на отрезке $[0, L(\varepsilon)]$ и в силу (24.01)

$$|f(x)| \leqslant |f(x-\tau(\varepsilon))| + \varepsilon \leqslant N + \varepsilon.$$

Следовательно, нами доказана

Лемма 37_2. *Каждая почти-периодическая функция ограничена.*

Точно так же доказывается следующее утверждение:

Лемма 37_3. *Каждая почти-периодическая функция равномерно непрерывна.*

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Выберем δ настолько малым, что на отрезке

$$[-\delta, L(\varepsilon/3)+\delta]$$

имеем

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/3$$

для любых двух точек x и y, таких, что $|x-y| \leqslant \delta$. Пусть ξ и η — любые два вещественных числа, разность которых по модулю меньше δ. Тогда найдется число $\tau(\varepsilon/3)$, такое, что $\xi-\tau(\varepsilon/3)$ и $\eta-\tau(\varepsilon/3)$ лежат на отрезке $[-\delta, L(\varepsilon/3)+\delta]$. Но тогда

$$|f(\xi)-f(\eta)| \leqslant |f(\xi)-f(\xi-\tau(\varepsilon/3))| +$$
$$+|f(\eta)-f(\eta-\tau(\varepsilon/3))| + |f(\xi-\tau(\varepsilon/3))-f(\eta-\tau(\varepsilon/3))| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Весьма важной является следующая лемма:

Лемма 37_4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ почти-периодичны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M(\varepsilon)$, что каждый отрезок $[A, A+M(\varepsilon)]$ содержит по крайней мере одно число $\psi(\varepsilon)$, являющееся ε-периодом как для $f(x)$, так и для $g(x)$.*

В самом деле, пусть $L_1(\varepsilon)$ является таким числом, что каждый отрезок $[A, A+L_1(\varepsilon)]$ содержит по крайней мере один ε-период функции $f(x)$, и пусть $L_2(\varepsilon)$ — аналогичное число для $g(x)$. Пусть δ_1 настолько мало, что при $|x-y| \leqslant \delta_1$ имеем

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \tag{24.04}$$

и пусть δ_2 аналогичное число для $g(x)$. Разделим отрезок $[0, L_1(\varepsilon)]$ на m отрезков I_k, длина каждого из которых не превосходит δ_1, а отрезок $[0, L_2(\varepsilon)]$ — на n отрезков J_k, длина которых не превосходит δ_2. Для любого вещественного числа x найдется ε-период $\tau_1(\varepsilon)$ функции $f(x)$, лежащий между $x - L_1(\varepsilon)$ и x. Обозначим через ξ наименьшее неотрицательное число, такое, что разность $\tau_1(\varepsilon) - \xi$ является целым кратным $L_1(\varepsilon)$. Пусть ξ принадлежит I_μ. Аналогично, пусть $\tau_2(\varepsilon)$ является ε-периодом функции $g(x)$, лежащим между $x - L_2(\xi)$ и x, и пусть η связано с $g(x)$ так же, как ξ связано с $f(x)$. Пусть η лежит в J_ν. Назовем пару чисел (μ, ν) *индексом* числа x. Тогда мы имеем не более чем mn возможных значений индексов.

Найдется конечный отрезок, скажем $[-X, X]$, на котором встречаются все возможные значения индексов. Таким образом, если x — любое число на вещественной оси, имеющее индекс $(\mu, 0)$, то найдется число y на отрезке $[-X, X]$, имеющее тот же самый индекс. Отсюда следует, что на отрезке I_μ есть два числа, например, a и b, такие, что разности $x - a$ и $y - b$ являются ε-периодами для $f(x)$. Тогда если λ — любое число, то

$$|f(a+\lambda) - f(x+\lambda)| \leqslant \varepsilon; \quad |f(b+\lambda) - f(y+\lambda)| \leqslant \varepsilon. \tag{24.05}$$

Но

$$|(a+\lambda) - (b+\lambda)| \leqslant \delta_1,$$

так как a и b лежат на одном и том же отрезке I_μ. Таким образом, в силу (24.04)

$$|f(a+\lambda) - f(b+\lambda)| \leqslant \varepsilon.$$

Но тогда по (24.05)

$$|f(x+\lambda) - f(y+\lambda)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Точно так же доказывается, что

$$|g(x+\lambda) - g(y+\lambda)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Таким образом, $x - y$ является 3ε-периодом как для $f(x)$, так и для $g(x)$. Поскольку для любого x число y лежит на отрезке $[-X, X]$, то отсюда вытекает, что любой отрезок длины $2X$ содержит по крайней мере один общий 3ε-период для $f(x)$ и $g(x)$. Так как 3ε — любое положительное число, то лемма 37_4 тем самым доказана.

Непосредственным следствием этой леммы является:

Лемма 37_5. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ — почти-периодичны, то и функции $f(x) \pm g(x)$ и $f(x)g(x)$ почти-периодичны.*

В самом деле, любое число, являющееся ε-периодом как для $f(x)$, так и для $g(x)$, является 2ε-периодом для $f(x) \pm \pm g(x)$, а также ε_1-периодом для $f(x)g(x)$, где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \left\{\limsup |f(x)| + \limsup |g(x)|\right\}.$$

В частности, если $f(x)$ — почти-периодическая функция, то и $f(x)e^{i\lambda x}$ почти-периодична.

Весьма важной леммой того же самого типа является

Лемма 37_6. *Если $f(x)$ — почти-периодическая функция и $F(u)$ — непрерывная функция от u, заданная на замкнутом отрезке, содержащем область значений $f(x)$, то $F(f(x))$ — почти-периодическая функция.*

В самом деле, если

$$|F(u_2) - F(u_1)| < \varepsilon,$$

когда $|u_1 - u_2| \leqslant \delta$, то любой δ-период функции $F(x)$ является ε-периодом функции $F(f(x))$.

Тривиально доказывается, что функция $\bar{f}(x)$ почти-периодична, если $f(x)$ почти-периодична. Поскольку очевидно, что $f(x+\lambda)$ — почти-периодическая функция, то из леммы 37_5 вытекает, что $f(x+\lambda)\bar{f}(x)$ почти-периодическая функция от x. Наконец, $|f(x)|$ — почти-периодическая функция, если $f(x)$ почти-периодична.

Лемма 37_7. *Если $f(x)$ — почти-периодическая функция, то найдется такое конечное число A, что*

$$A = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{y}^{y+T} f(x)\,dx \tag{24.055}$$

равномерно по y.

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть U — ε-период функции $f(x)$, который больше чем $L(\varepsilon)$. Тогда найдется ε-период V, лежащий между nU и $(n+1)U$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{U}\int\limits_{nU}^{(n+1)U} f(x)\,dx-\frac{1}{U}\int\limits_{0}^{U} f(x)\,dx\right|=\frac{1}{U}\left|\int\limits_{nU}^{V} f(x)\,dx-\right.$$
$$-\int\limits_{nU-V}^{0} f(x)\,dx+\int\limits_{nU-V}^{0} f(x)\,dx-\int\limits_{(n+1)U-V}^{U} f(x)\,dx+$$
$$\left.+\int\limits_{V}^{(n+1)U} f(x)\,dx-\int\limits_{0}^{(n+1)U-V} f(x)\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{U}[2V-2nU+(n+1)U-V]=\frac{\varepsilon}{U}(V-nU+U)\leqslant 2\varepsilon.$$

Поэтому если μ и ν — целые числа, то

$$\left|\frac{1}{(\mu-\nu)U}\int\limits_{\nu U}^{\mu U} f(x)\,dx-\frac{1}{U}\int\limits_{0}^{U} f(x)\,dx\right|\leqslant 2\varepsilon. \tag{24.06}$$

Но если $\nu U\leqslant y\leqslant(\nu+1)U$ и $\mu U\leqslant y+T\leqslant(\mu+1)U$, то

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_{y}^{y+T} f(x)\,dx-\frac{1}{(\mu-\nu)U}\int\limits_{\nu U}^{\mu U} f(x)\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{T}\int\limits_{y}^{\nu U} f(x)\,dx\right|+\left|\frac{1}{T}\int\limits_{\mu U}^{y+T} f(x)\,dx\right|+$$
$$+\left|\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{(\mu-\nu)U}\right)\int\limits_{\nu U}^{\mu U} f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{2U}{T}\limsup|f(x)|+$$
$$+\left|(\mu-\nu)U\left[\frac{1}{(\mu-\nu)U}-\frac{1}{T}\right]\right|\left[2\varepsilon+\left|\frac{1}{U}\int\limits_{0}^{U} f(x)\,dx\right|\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{3U}{T}\limsup|f(x)|+\frac{2\varepsilon U}{T}. \tag{24.07}$$

Мы использовали здесь (24.06) для оценки выражения

$$\frac{1}{(\mu-\nu)U}\int\limits_{\nu U}^{\mu U} f(x)\,dx.$$

Из (24.07) вытекает, что можно найти настолько большое T, независимое от y, что при некоторых μ и ν

$$\left| \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx - \frac{1}{(\mu-\nu)U} \int_{\nu U}^{\mu U} f(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, в силу (24.06) для всех y

$$\left| \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx - \frac{1}{U} \int_{0}^{U} f(x)\, dx \right| \leqslant 3\varepsilon. \qquad (24.08)$$

Следовательно, если функция $f(x)$ вещественна, то

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx - \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx \leqslant 6\varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx = \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx.$$

Доказательство существования этого предела, который мы обозначаем через A, проводится точно так же и в комплексном случае, путем отдельного рассмотрения вещественной и мнимой частей. Так как A не зависит от y, то соотношение (24.055) имеет место, когда y пробегает любое множество на вещественной оси, а T стремится к бесконечности. Этим закончено доказательство леммы 37_7.

Как следствие мы получаем, что если положить[1])

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{y}^{y+T} f(x)\, dx = M\{f(x)\} = M_x\{f\},$$

[1]) Мы применяем обозначение M_x в случае, где может быть недоразумение относительно того, по какой переменной берется среднее.

то для почти-периодической функции $f(x)$ равномерно по y существуют

$$M\{f(x)e^{i\lambda x}\} \quad \text{для всех вещественных } \lambda;$$
$$M_\xi\{f(x+\xi)\bar{f}(\xi)\};$$
$$M\{|f(x)|^2\}.$$

Лемма 37_8. *Если функция $f(x)$ почти-периодична, то и функция $\varphi(x)=M_\xi\{f(x+\xi)\bar{f}(\xi)\}$ почти-периодична.*

Очевидно, что

$$|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|=|M_\xi\{[f(x+\xi+\tau)-f(x+\xi)]\bar{f}(x)\}|\leqslant$$
$$\leqslant \limsup|f(\xi)|\limsup|f(\xi+\tau)-f(\xi)|.$$

Таким образом, любой ε-период функции $f(x)$ является ε_1-периодом функции $\varphi(x)$, где $\varepsilon_1=\varepsilon\limsup|f(\xi)|$. Лемма 37_8 доказана.

Лемма 37_9. *Если $f(x)$ — неотрицательная почти-периодическая функция и*

$$M\{f(x)\}=0, \tag{24.09}$$

то $f(x)$ тождественно равна нулю.

В самом деле, в противном случае нашлась бы такая точка x, что $f(x)>0$. Пусть $f(x)=2\eta$. В силу непрерывности $f(x)$ нашлась бы окрестность (a, b) точки x, в которой $f(x)\geqslant\eta$. Пусть $L(\eta/2)$ — такое число, что любой отрезок длины $L(\eta/2)$ содержит по крайней мере один $\eta/2$ период функции f. Тогда каждый отрезок длины $L(\eta/2)$ содержит отрезок длины $b-a$, получаемый сдвигом отрезка $[a, b]$ на $\eta/2$-период, причем на этом отрезке $f(x)\geqslant\eta/2$. Но тогда, если $nL(\xi/2)\leqslant T\leqslant(n+1)L(\eta/2)$, то

$$\frac{1}{T}\int\limits_y^{y+T} f(x)\,dx\geqslant\frac{n-1}{n+1}\,\frac{(b-a)\eta}{2L(\eta/2)},$$

а потому

$$\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_y^{y+T} f(x)\,dx\geqslant\frac{(b-a)\eta}{2L(\eta/2)}>0.$$

Но это противоречит предположению (24.09). Поэтому не существует точки x, в которой $f(x)>0$, и, следовательно, $f(x)$ тождественно равно нулю.

Лемма 37_{10}. *Если $f(x)$ — почти-периодическая функция, то функция*

$$g(x)=\limsup_{-\infty<y<\infty}|f(x+y)-f(y)| \tag{24.10}$$

почти-периодична[1]).

В самом деле,

$$|g(x+\tau)-g(x)|=|\limsup_{-\infty<y<\infty}|f(x+\tau+y)-f(y+\tau)|-$$
$$-\limsup_{-\infty<y<\infty}|f(x+y)-f(y)||\leqslant$$
$$\leqslant\limsup_{-\infty<y<\infty}||f(x+\tau+y)-f(y+\tau)|-|f(x+y)-f(y)||\leqslant$$
$$\leqslant\limsup_{-\infty<y<\infty}|f(x+\tau+y)-f(x+y)-f(y+\tau)+f(y)|\leqslant$$
$$\leqslant\limsup_{-\infty<y<\infty}\{|f(x+\tau+y)-f(x+y)|+|f(y+\tau)-f(y)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\limsup_{-\infty<y<\infty}|f(y+\tau)-f(y)|.$$

Таким образом, каждый ε-период функции $f(x)$ является 2ε-периодом функции $g(x)$. Тем самым лемма 37_{10} доказана.

Лемма 37_{11}. *Пусть $f(x)$ — почти-периодическая функция. Пусть функция $g(x)$ определена формулой* (24.10), *а $G_\varepsilon(x)$ определена формулой*

$$G_\varepsilon(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{\varepsilon}, & \textit{если } 0<x\leqslant\varepsilon;\\ \quad 0, & \textit{если } \varepsilon\leqslant x.\end{cases}$$

Тогда $G_\varepsilon(g(x))$ является неотрицательной почти-периодической функцией, не равной тождественно нулю. Если $G_\varepsilon(g(\tau))\neq 0$, то τ является ε-периодом $f(x)$. Функция $\psi_\varepsilon(x)$, определяемая формулой

$$\psi_\varepsilon(x)=G_\varepsilon(g(x))/M\{G_\varepsilon(g(y))\}, \tag{24.11}$$

существует при всех x.

Почти-периодичность $G_\varepsilon(g(x))$ вытекает из лемм 37_6 и 37_{10}. Неотрицательность следует из определения. Наконец, $G_\varepsilon(g(x))$ не обращается в нуль при $x=0$. Если $G_\varepsilon(g(x))\neq 0$,

---

[1]) Бохнер [1].

то $g(x) < \varepsilon$ и, следовательно, в силу (24.10) для всех y имеем $|f(\tau + y) - f(y)| < \varepsilon$. Таким образом, τ является ε-периодом функции $f(x)$. В силу леммы 37_9 $M\{O_\varepsilon(g(y))\} \neq 0$, а потому формула (24.11) определяет функцию $\psi_\varepsilon(x)$.

Лемма 37_{12}. *Если функция $f(x)$ почти-периодична, а функция $\psi_\varepsilon(x)$ определена формулой* (24.11), *то функция*

$$f_\varepsilon(x) = M_y\{\psi_\varepsilon(x - y) f(y)\} \tag{24.12}$$

существует и почти-периодична, причем

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon \tag{24.13}$$

для всех x. Далее, функция

$${}_\varepsilon f(x) = M_z\{\psi_\varepsilon(x - z) f_\varepsilon(z)\} \tag{24.14}$$

существует и почти-периодична, причем

$$|{}_\varepsilon f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon \tag{24.15}$$

для всех значений x, а потому

$$|{}_\varepsilon f(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon. \tag{24.16}$$

Мы имеем

$${}_\varepsilon f(x) = M_y\{f(y) M_z\{\psi_\varepsilon(z + x - y)\psi_\varepsilon(z)\}\}. \tag{24.17}$$

В самом деле, в силу определения $\psi_\varepsilon(x)$ и того, что $\psi(x)$ отлично от нуля лишь для значений аргумента, являющихся ε-периодами функции $f(x)$, $f_\varepsilon(x)$ является взвешенным средним величин вида $f(x + \tau(\varepsilon))$, которые отличаются от $f(x)$ не более чем на ε. Отсюда вытекает (24.13). Кроме того, в силу лемм 37_7 и 37_5 $f_\varepsilon(x) = M_y\{f(x + y)\psi_\varepsilon(x)\}$ и так как, в силу (24.11) $M\{\psi_\varepsilon(x)\} = 1$, то легко видеть, что

$$\limsup_{-\infty < x < \infty} |f_\varepsilon(x + \tau) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \limsup_{-\infty < x < \infty} |f(x + \tau) - f(x)|,$$

и что $f_\varepsilon(x)$ имеет те же самые δ-периоды, что и $f(x)$. Таким образом, функция $f_\varepsilon(x)$ почти-периодична, (24.14) существует и является почти-периодической функцией по тем же самым причинам, что и функция, определяемая формулой (24.12). Следовательно, (24.15) справедливо по тем же самым причинам, что и (24.13). Если мы примем во внимание (24.13) и (24.15), то получим (24.16).

Что касается (24.17), то в силу (24.14) и (24.12) имеем

$$
\begin{aligned}
{}_\varepsilon f(x) &= M_z\{\psi_\varepsilon(x-z)\, M_y\{\psi_\varepsilon(z-y) f(y)\}\} = \\
&= \lim_{T_1\to\infty} \frac{1}{T_1}\int\limits_\alpha^{\alpha+T_1} \psi_\varepsilon(x-z)\,dz \lim_{T_2\to\infty}\frac{1}{T_2}\int\limits_\beta^{\beta+T_2} \psi_\varepsilon(z-y) f(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

Так как функции ψ_ε и f почти-периодичны и, следовательно, ограничены, то выражение, стоящее под знаком второго предела, ограниченно сходится. Поэтому в силу критерия ограниченной сходимости

$$
\begin{aligned}
{}_\varepsilon f(x) &= \\
&= \lim_{T_1\to\infty}\lim_{T_2\to\infty}\frac{1}{T_1T_2}\int\limits_\alpha^{\alpha+T_1}\psi_\varepsilon(x-z)\,dz\int\limits_\beta^{\beta+T_2}\psi_\varepsilon(z-y) f(y)\,dx = \\
&= \lim_{T_1\to\infty}\lim_{T_2\to\infty}\frac{1}{T_2}\int\limits_\beta^{\beta+T_2} f(y)\,dy\,\frac{1}{T_1}\int\limits_\alpha^{\alpha+T_1}\psi_\varepsilon(x-z)\,\psi_\varepsilon(z-y)\,dz.
\end{aligned}
$$

Но так как функция $\psi_\varepsilon(x)$ четная, то

$$
\begin{aligned}
{}_\varepsilon f(x) = \lim_{T_1\to\infty}\lim_{T_2\to\infty}\frac{1}{T_2}\int\limits_\beta^{\beta+T_2} f(y)\,dy \times \\
\times\frac{1}{T_1}\int\limits_\alpha^{\alpha+T_1}\psi_\varepsilon(z-y)\,\psi_\varepsilon(z-x)\,dz = \\
= \lim_{T_1\to\infty}\lim_{T_2\to\infty}\frac{1}{T_2}\int\limits_\beta^{\beta+T_2} f(y)\,dy \times \\
\times\frac{1}{T_1}\int\limits_{\alpha-x}^{\alpha-x+T_1}\psi_\varepsilon(z+x-y)\,\psi_\varepsilon(z)\,dz = \\
= \lim_{T_1\to\infty} M_y\left\{ f(y)\frac{1}{T_1}\int\limits_{\alpha-x}^{\alpha-x+T_1}\psi_\varepsilon(z+x-y)\,\psi_\varepsilon(z)\,dz\right\}. \quad (24.18)
\end{aligned}
$$

Если бы мы доказали, что

$$\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{T_1}\int_{\gamma}^{\gamma+T_1}\psi_\varepsilon(z+u)\,\psi_\varepsilon(z)\,dz=M_z\{\psi_\varepsilon(z+u)\,\psi_\varepsilon(z)\}\qquad(24.19)$$

равномерно по u и γ, то (24.17) было бы непосредственным следствием (24.18). Но когда в доказательстве леммы 37_7 было доказано, что (24.055) существует равномерно по y, то оценка равномерности стремления к пределу зависела лишь от:

I) множества ε-периодов функции $f(x)$ для всевозможных значений ε;

II) точной верхней грани $|f(x)|$.

Но общей верхней гранью модулей функций $\psi_\varepsilon(z+u)\,\psi_\varepsilon(z)$ является квадрат верхней грани модуля $\psi_\varepsilon(z)$. Далее, любой δ-период функции $\psi_\varepsilon(z)$ является для *любого* u ε_1-периодом функции $\psi_\varepsilon(z+u)\,\psi_\varepsilon(z)$, где $\varepsilon_1=2\delta\limsup\limits_{-\infty<z<\infty}|\psi_\varepsilon(z)|$.

Рассуждая далее так же, как при доказательстве леммы 37_7, мы приходим к следующему утверждению:

Лемма 37_{13}. *Если $f(x)$ — почти-периодическая функция, то* (24.19) *имеет место ревномерно по γ и u.*

Тем самым закончено доказательство леммы 37_{12}.

Лемма 37_{14}. *Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность почти-периодических функций, равномерно стремящихся к пределу $f(x)$, то функция $f(x)$ почти-периодична. В частности, если $\sum|B_n|<\infty$ и $\{\Lambda_n\}$ — множество вещественных чисел, то функция*

$$\sum B_n e^{i\Lambda_n x}\qquad(24.20)$$

почти-периодична.

В самом деле, пусть $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon/3$ для всех x и пусть $\tau(\varepsilon)$ есть $\varepsilon/3$-период функции $f_n(x)$. Тогда $\tau(\varepsilon)$ является ε-периодом функции $f(x)$. Таким образом, существует число $L(\varepsilon)$, такое, что каждый отрезок $[A, A+L(\varepsilon)]$ содержит по крайней мере одно $\tau(\varepsilon)$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, то лемма 37_{14} доказана. Из лемм 37_1 и 37_5 вытекает, что функции $\sum\limits_1^N B_n e^{i\Lambda_n x}$ почти-периодичны, откуда следует почти-периодичность функции (24.20).

§ 25. Теоремы Вейерштрасса и Парсеваля для почти-периодических функций

Лемма 37_{15}. *Если $f(x)$ — почти-периодическая функция, то существуют конечная или счетная последовательность положительных чисел B_n и соответствующих им вещественных чисел Λ_n, таких, что*

$$\sum B_n < \infty \tag{25.01}$$

и

$$\varphi(x) = M_\xi \{f(x+\xi)\overline{f}(\xi)\} = \sum B_n e^{i\Lambda_n x}. \tag{25.02}$$

Для доказательства этой леммы используем теорему 32. Если $f(x)$ — почти-периодическая функция, то в силу леммы 37_8 функция $\varphi(x)$ почти-периодична. По лемме 37_{14} из ограниченности и монотонности $\sigma(u)$ вытекает, что

$$\sum \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{iu_n x} [\sigma(u_n+0) - \sigma(u_n-0)]$$

является почти-периодической функцией. Таким образом, в силу леммы 37_5 функция $\psi(x)$ почти-периодична. В силу (23.06) и леммы 37_9 имеем $\psi(x) \equiv 0$ и

$$\varphi(x) = \sum \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{iu_n x} [\sigma(u_n+0) - \sigma(u_n-0)].$$

Но это выражение имеет вид (25.02), чем и завершается доказательство леммы 37_{15}.

Мы можем теперь закончить доказательство теоремы 37. В силу леммы 37_{15} и равенств (24.16) и (24.17), если $f(x)$ — почти-периодическая функция и $\varepsilon > 0$, то найдутся абсолютно сходящийся ряд $\sum B_n$ и последовательность $\{\Lambda_n\}$ вещественных показателей, такие, что

$$\left| f(x) - M_y \left\{ f(y) \sum B_n e^{i\Lambda_n (x-y)} \right\} \right| \leqslant 2\varepsilon. \tag{25.03}$$

Из того, что функция $f(y)e^{-i\Lambda_n y}$ равномерно ограничена, следует, что либо сумма

$$\sum B_n e^{i\Lambda_n (x-y)}$$

содержит лишь конечное число слагаемых, либо можно найти настолько большое N, что

$$\left| M_y \left\{ f(y) \sum_1^N B_n e^{i\Lambda_n(x-y)} \right\} - \right.$$

$$\left. - M_y \left\{ f(y) \sum_1^\infty B_n e^{i\Lambda_n(x-y)} \right\} \right| < \varepsilon. \quad (25.04)$$

Комбинируя (25.03) и (25.04), получаем

$$\left| f(x) - M_y \left\{ f(y) \sum_1^N B_n e^{i\Lambda_n(x-y)} \right\} \right| < 3\varepsilon.$$

Если положить $A_n = B_n M_y \{f(y) e^{-i\Lambda_n y}\}$, то отсюда следует,

$$\left| f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x} \right| < 3\varepsilon. \quad (25.05)$$

Таким образом, для любого ε можно найти комплексные коэффициенты A_k и вещественные показатели Λ_k, для которых выполняется (24.02). Тем самым мы доказали теорему 37.

Докажем теперь теорему 38. Пусть заданы $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$. Будем искать такие числа $A'_1, \ldots, A'_N$, чтобы выражение

$$M \left\{ \left| f(x) - \sum_1^N A'_n e^{i\Lambda_n x} \right|^2 \right\},$$

которое существует как среднее почти-периодической функции, приняло минимальное значение. Мы имеем

$$M \left\{ \left| f(x) - \sum_1^N A'_n e^{i\Lambda_n x} \right|^2 \right\} =$$

$$= M \{ |f(x)|^2 \} - \sum_1^N A'_n M \{ \overline{f(x)} e^{i\Lambda_n x} \} -$$

$$- \sum_1^N \bar{A}'_n M \{ f(x) e^{-i\Lambda_n x} \} + \sum_1^N |A'_n|^2 =$$

$$= M \{ |f(x)|^2 \} - \sum_1^N | M \{ f(x) e^{-i\Lambda_n x} \} |^2 +$$

$$+ \sum_1^N | A'_n - M \{ f(x) e^{-i\Lambda_n x} \} |^2. \quad (25.06)$$

Это выражение принимает минимальное значение тогда и только тогда, когда

$$A'_n = M\{f(x)\,e^{-i\Lambda_n x}\}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{25.07}$$

Отсюда следует, что

$$M\{|f(x)|^2\} \geqslant \sum_1^N |M\{f(x)\,e^{-i\Lambda_n x}\}|^2. \tag{25.08}$$

Поэтому множество вещественных чисел Λ_n, для которых $|M\{f(x)e^{-i\Lambda_n x}\}| > a > 0$ конечно, а множество чисел Λ_n, для которых $M\{f(x)\,e^{-i\Lambda_n x}\} \neq 0$, не более чем счетно. Обозначим множество этих значений через $\{\lambda_n\}$ и положим $a_n = M\{f(x)\,e^{-i\lambda_n x}\}$. Тогда в силу (25.08)

$$\sum |a_n|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\}. \tag{25.09}$$

С другой стороны, в силу (25.05), если числа A'_n определены равенством (25.07), то

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A'_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} \leqslant M\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} \leqslant 9\varepsilon^2.$$

В силу (25.06)

$$M\{|f(x)|^2\} - \sum_1^N |A'_n|^2 \leqslant 9\varepsilon^2$$

и так как отличные от нуля числа A'_n являются подмножеством множества чисел a_n, а ε произвольно, то

$$M\{|f(x)|^2\} \geqslant \sum |a_n|^2.$$

Таким образом, в силу (25.09)

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum |a_n|^2.$$

Иными словами, в силу (25.06)

$$\lim_{n\to\infty} M\left\{\left|f(x) - \sum_1^n a_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\} = 0, \tag{25.10}$$

чем и доказана теорема 38.

Сделаем некоторые исторические замечания, касающиеся теорем 37 и 38. Первое доказательство этих теорем принадлежит самому Бору[1]) и было технически элементарно.

[1]) Бор [1].

но далеко не просто. Автор книги[1]) дал другое доказательство, связанное, как и приведенное здесь, с теорией интеграла Фурье, но значительно более сложное. Следующее доказательство[2]) было дано Вейлем. В нем впервые была явно введена функция $\varphi(x)$, использованная ранее в модифицированной форме в работах автора. Доказательство Вейля связано с идеями и техникой теории интегральных уравнений, но не основывалось на ранее доказанных теоремах в этой области. Оно кажется мне самым простым и прямым путем для доказательства теорем 37 и 38, если рассматривать эти теоремы изолированно. Но доказательство Вейля не связано с более общими теориями гармонического анализа. Введение функции $\psi_{\varepsilon}(x)$ в рассуждениях этого параграфа является применением идей Вейля.

Следующим было доказательство, данное автором книги[3]), по существу совпадающее с приведенным здесь. Примерно в то же самое время Валле Пуссен[4]) дал доказательство, основанное на тех же идеях, что и первоначальное доказательство Бора, но использующее функцию $\varphi(x)$. Это доказательство приведено в книгах Бора и Безиковича, но автору книги нравится больше доказательство, которое дано у Вейля. Эти доказательства не приспособлены для обобщения на более общие теории гармонического анализа.

Основной идеей в доказательствах Бора и Валле Пуссена является расположение членов $a_n e^{i\lambda_n x}$ ряда (25.10) в порядке, зависящем от арифметических свойств λ_n. Основная идея доказательства Вейля связана с перестановкой членов в порядке убывания величин коэффициентов $|a_n|$. Данное здесь доказательство связано с расположением членов в порядке значений λ_n. Этот порядок является единственным, который совместим с единой трактовкой почти-периодических функций и функций с непрерывным спектром.

---

1) Винер [5].
2) Вейль [2].
3) Винер [1], [6].
4) Валле Пуссен [1].

БИБЛИОГРАФИЯ

A. S. Besicovitch. 1. «Almost Periodic Functions». *Cambridge Univ. Press*, 1932, pp. XIII + 180.

S. Bochner. 1. «Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen». *Math. Ann.*, 96 (1926), 119—147.

H. Bohr. 1. «Zur Theorie der fastperiodeschen Funktionen». *Acta Math.*, 45 (1924), 29—127.

H. E. Bray. 1. «Elementary Properties of the Stieltjes Integral». *Annals of Mathematics*, 20 (1919), 176—186.

G. A. Campbell and R. M. Foster. 1. «Fourier Integrals for Practical Applications». *Bell telephone syst. techn. publ., Math.-phys. Monogr.* B 584.

P. J. Daniell. 1. «General Form of Integral». *Annals of Mathematics*, 19 (1917), 279—294.

E. Fischer. 1. *Comptes Rendus*, 144 (1907), 1022—1024.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood. 1. «On a Tauberian Theorem for Lambert's Series, and Some Fundamental Theorems in the Analytic Theory of Numbers». *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 19 (1921), 21—29.

2. «The Riemann Zeta Function and the Theory of the Distribution of the Primes». *Acta Math.*, 41 (1918), 119—196.

S. Ikehara. 1. «An extension of Landau's Theorem in the Analytic Theory of Numbers». *Journ. Math. Phys. M. I. T.* 10 (1931), 1—12.

J. Karamata. 1. «Über die Hardy—Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes». *Math. Zeitschr.*, 32 (1930), 319—320.

K. Knopp. 1. «Über Lambertsche Reihen». *Journ. f. d. reine u. angew. Mathem.*, 142 (1913), 283—315.

E. Landau. 1. «Über einen Satz des Herrn Littlewood». *Rendiconti di Palermo*, 35 (1913), 265—276.

2. «Handbuch der Verteilung der Primzahlen». *Leipzig*, 1909, 2 vols.

3. «Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes». *Monatsh. f. Math. und Phys.*, 18 (1907). 8—28.

K. Mahler. 1. «On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions». *Journ. Math. Phys. M. I. T.* 6 (1927), 158—164.

M. Plancherel. 1. «Contribution à l'ètude de la représentation d'une fonction arbitraire par des integrales definies». *Rendiconti di Palermo*, 30 (1910), 289—335.

F. Riesz. 1. *Comptes Rendus,* 144 (1907), 615—619 and 734—736.
2. «Sur la formule d'inversion de Fourier». *Acta Szeged,* 3 (1927), 235—241.
R. Schmidt. 1. «Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen». *Math. Zeitschr.*, 22 (1925), 89—152.
E. C. Titchmarsh. 1. «A Contribution to the Theory of Fourier Transfoms». *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 23 (1924), 279—289.
C.—J. de la Vallée Poussin 1. «Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr». *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,* A47 (1927), 141.
H. Weyl. 1. «Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten». *Math. Ann.*, 67 (1909), 225—245.
2. «Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen». *Math. Ann.*, 97 (1926), 338—356.
N. Wiener. 1. «Generalized Harmonic Analysis». *Acta Math.*, 55 (1930), 117—258.
2. «Tauberian Theorems». *Annals of Mathematics,* 33 (1932), 1—100.
3. «Hermitian Polynomials and Fourier Analysis». *Journ. Math. Phys. M. I. T.* 8 (1929), 70—73.
4. «A New Method in Tauberian Theorems». *Journ. Math. Phys. M. I. T.* 7 (1928), 161—184.
5. «On the Representation of Functions by Trigonometrical Integrals». *Math. Zeitschr.*, 24 (1929), 575—617.
6. «The Spectrum of an Arbitrary Function». *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 27 (1928), 487—496.