Высшее профессиональное образование

Учебное пособие

Т. И. Трофимова
А. В. Фирсов

КУРС ФИЗИКИ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

4-е издание

БАКАЛАВРИАТ

ACADEMA

Высшее профессиональное образование
БАКАЛАВРИАТ

Т. И. ТРОФИМОВА, А. В. ФИРСОВ

КУРС ФИЗИКИ
ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

*Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по техническим направлениям подготовки
и специальностям*

4-е издание, исправленное

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2011

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
Т 761

Рецензенты:

зав. кафедрой физики Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса, д-р техн. наук, проф. *С.В.Кирсанов*;
д-р физ.-мат. наук, проф. *П.А.Эминов*

Трофимова Т. И.

Т 761 Курс физики. Задачи и решения : учеб. пособие для учреждений высш. проф. образования / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. — 4-е изд., испр. — М. : Издательский центр «Академия», 2011. — 592 с. — (Сер. Бакалавриат)

ISBN 978-5-7695-8486-2

Учебное пособие создано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по техническим направлениям подготовки (квалификация «бакалавр»).

Данное учебное пособие совместно с учебными пособиями Т.И.Трофимовой «Физика по техническим направлениям подготовки» (квалификация «бакалавр»), «Курс физики», «Физика в таблицах и формулах» и «Курс физики. Колебания и волны» Т.И.Трофимовой и А.В.Фирсова составляет единый учебно-методический комплект по физике для студентов втузов. Около половины задач приведены с подробными решениями и объяснениями, остальные предусмотрены для самостоятельного решения. Это дает возможность использовать данное пособие в качестве задачника для вузов. Пособие состоит из семи глав, охватывающих все разделы курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Для студентов высших технических учебных заведений. Может быть использовано преподавателями для составления опорных конспектов к семинарам. Наличие подробных решений большого количества задач, в том числе и не требующих знания высшей математики, позволяет использовать это пособие при подготовке в вузы абитуриентами и на подготовительных курсах.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-7695-8486-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для глубокого усвоения курса физики важно не только знание теории («впитывание» информации), но и умение активно применять изученное на практике, самостоятельно работая над решением задач. Формирование навыков грамотного решения задач является основной целью этой книги.

Учебное пособие состоит из семи глав, охватывающих все разделы курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений: физические основы классической механики с элементами специальной теории относительности, молекулярная физика и термодинамика, электричество и электромагнетизм, колебания и волны, квантовая природа излучения, элементы квантовой физики, элементы физики атомного ядра и элементарных частиц. Главы разделены на подразделы, каждый из которых содержит основные формулы, большое количество задач с подробными решениями и задач для самостоятельного решения.

В решениях задач используются как традиционные методики, выработанные российской высшей школой и успешно прошедшие проверку временем, так и собственные разработки авторов, основанные на многолетнем преподавании в вузе. При этом выдержаны единообразие в подаче материала, строгая логичность изложения и дозированное, обусловленное необходимостью применение математики. Повышенное внимание уделено вопросам современной физики, к примеру, квантовой механике, включая операторы и некоторые важные конкретные задачи.

Все решения содержат краткую запись условия, перевод данных из внесистемных единиц в СИ, лаконично сформулированные физические законы, лежащие в основе рассматриваемых явлений, необходимые уравнения, их решения в общем виде, численный ответ. Задачи для самостоятельного решения также снабжены ответами в общем виде и результатами вычислений. Условия и ответы даны с точностью до трех значащих цифр, стоящие в конце чисел нули опускаются для упрощения записи.

Данное учебное пособие совместно с учебными пособиями Т.И.Трофимовой «Физика по техническим направлениям подготовки» (квалификация «бакалавр»), «Курс физики», «Физика в таблицах и формулах» и «Курс физики. Колебания и волны» Т. И. Трофимовой и А. В. Фирсова составляет единый учебно-методический комплект по физике для обучающихся в учреждениях высшего профессионального образования.

Замечание и предложения будут с благодарностью приняты авторами по адресу trofimova@sumail.ru и firsovav@mail.ru.

ГЛАВА 1
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

Основные законы и формулы

• Средняя и мгновенная скорости материальной точки

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

• Модули средней и мгновенной скоростей

$$\langle v \rangle = \left|\langle \vec{v} \rangle\right| = \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \;\; \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$v = |\vec{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \;\; v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

[$\Delta \vec{r}$ — элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки; Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt].

• Среднее и мгновенное ускорения материальной точки

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

• Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

[r — радиус кривизны траектории в данной точке].

• Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

• Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 \pm at$$

[v_0 — начальная скорость].

• Длина пути, пройденного материальной точкой за промежуток времени от t_1 до t_2,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

• Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

[$d\vec{\varphi}$ — элементарный угол поворота].

• Угловая скорость равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

[φ — угол поворота произвольного радиуса от начального положения; t — промежуток времени, за который произошел данный поворот; T — период вращения; n — частота вращения].

• Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

• Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

[ω_0 — начальная угловая скорость].

• Связь между линейными (длина пути s, пройденного точкой по дуге окружности радиусом R, линейная скорость v, тангенциальная составляющая ускорения a_τ, нормальная составляющая ускорения a_n) и угловыми (φ — угол поворота, ω — угловая скорость, ε — угловое ускорение) величинами:

$$s = R\varphi,\ v = R\omega,\ a_\tau = R\varepsilon,\ a_n = \omega^2 R.$$

Примеры решения задач

1.1. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}2$ м/с^2, $D = 0{,}1$ м/с^3. Определите: 1) через какой промежуток времени t после начала движения ускорение тела $a = 1$ м/с^2; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ за этот промежуток времени.

Дано: $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$; $C = 0{,}2$ м/с^2; $D = 0{,}1$ м/с^3; $a = 1$ м/с^2.

Найти: t; $\langle a \rangle$.

Решение. Мгновенное ускорение материальной точки

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

Мгновенная скорость $v = \dfrac{ds}{dt}$ или, учитывая условие задачи $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, найдем

$$v = -B + 2Ct + 3Dt^2. \tag{2}$$

Тогда ускорение, согласно (1),

$$a = 2C + 6Dt,$$

откуда искомый промежуток времени

$$t = \frac{a - 2C}{6D}.$$

Среднее ускорение материальной точки

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_0}{t - t_0},$$

где начальный момент времени $t_0 = 0$. Тогда искомое среднее ускорение с учетом формулы (2)

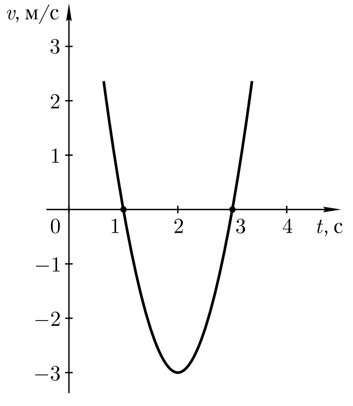
$$\langle a \rangle = \frac{-B + 2Ct + 3Dt^2 + B}{t} = 2C + 3Dt.$$

Ответ: $t = 1$ с; $\langle a \rangle = 0{,}7$ м/с^2.

1.2. Кинематическое уравнение движения материальной точки вдоль прямой (ось x) задается уравнением $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 9$ м/с; $C = -6$ м/с^2; $D = 1$ м/с^3. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ и среднее ускорение $\langle a \rangle$ материальной точки за промежуток времени, в течение которого точка движется в направлении, противоположном первоначальному.

Дано: $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$; $B = 9$ м/с; $C = -6$ м/с^2; $D = 1$ м/с^3.

Найти: $\langle v \rangle$; $\langle a \rangle$.



Решение. Мгновенная скорость материальной точки

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct + 3Dt^2. \qquad (1)$$

График зависимости скорости (1) точки от времени — парабола с ветвями, направленными вверх, вершиной с координатами $t = -\dfrac{C}{3D} = 2$ с; $v = B - \dfrac{C^2}{3D} = -3$ м/с (см. рисунок) и точками пересечения с осью: $t_1 = 1$ с; $t_2 = 3$ с (получается из условия $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$). В начальный момент времени $t = 0$ скорость точки согласно (1) равна 9 м/с, далее она убывает и при $t_1 = 1$ с меняет знак, т.е. точка начинает двигаться в противоположном направлении. В момент времени $t_2 = 3$ с снова происходит смена знака скорости и, соответственно, направления движения на первоначальное.

Искомые средняя скорость и среднее ускорение за промежуток времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1};$$

$$\langle a \rangle = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Определив из заданного уравнения для x, уравнения (1) и из графика соответствующие значения координат и скоростей, находим $\langle v \rangle = 2$ м/с; $\langle a \rangle = 0$.

Ответ: $\langle v \rangle = 2$ м/с; $\langle a \rangle = 0$.

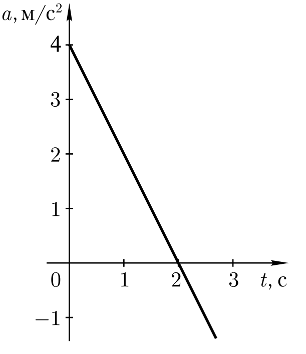
1.3. На рисунке представлена зависимость ускорения a от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно. Определите скорость v и координату x точки через $t = 3$ с после начала движения. В какой момент времени t_1 точка изменит направление движения?

Дано: $t = 3$ с.

Найти: v; x; t_1.

Решение. Из графика следует, что зависимость ускорения от времени можно представить в виде

$$a(t) = A - Bt, \tag{1}$$



где $A = 4$ м/с^2; $B = 2$ м/с^3.

В случае прямолинейного движения скорость материальной точки при $v_0 = 0$ (условие задачи):

$$v = \int_0^t a\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) выражение (1) и проинтегрировав, получим искомую скорость

$$v = At - \frac{Bt^2}{2}.$$

Искомая координата

$$x = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \left(At - \frac{Bt^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6}.$$

Точка изменяет направление движения в момент, когда скорость $v = 0$, т. е.

$$At - \frac{Bt^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t = \frac{2A}{B}.$$

Ответ: $v = 3$ м/с; $x = 9$ м; $t_1 = 4$ с.

1.4. Ускорение движущейся прямолинейно материальной точки изменяется по закону $a = A + Bt$, где $A = 9$ м/с^2; $B = -6$ м/с^3. Определите скорость v точки через $t_1 = 4$ с после начала движения, а также координату x и путь s, пройденный точкой за этот промежуток времени.

Дано: $a = A + Bt$; $A = 9$ м/с^2; $B = -6$ м/с^3; $t_1 = 4$ с.

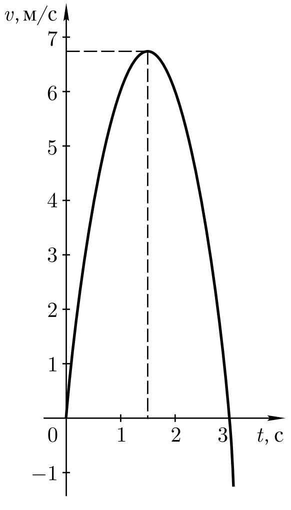
Найти: $v(t_1)$; $x(t_1)$; $s(t_1)$.

Решение. Учитывая, что мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t},$$

можем записать

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\,\mathrm{d}t.$$



Проинтегрировав это выражение, получаем

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\mathrm{d}t = \int_0^t \vec{a}\mathrm{d}t \qquad (1)$$

(учли, что начальная скорость точки $v_0 = 0$).

Подставив в выражение (1) заданное условием уравнение $a = A + Bt$ и проинтегрировав, получаем

$$v = \int_0^t (A + Bt)\mathrm{d}t = At + \frac{Bt^2}{2}. \qquad (2)$$

График зависимости скорости (2) точки от времени — парабола с ветвями, направленными вниз, и с вершиной в точке с координатами $t = -\dfrac{A}{B} = 1{,}5$ с; $v = -\dfrac{A^2}{2B} =$ $= 6{,}75$ м/с. Точка пересечения графика с осью абсцисс $t = 3$ с, в этой точке скорость меняет знак, а материальная точка — направление движения. Для момента времени $t = 4$ с скорость $v = -12$ м/с, т. е. точка движется в направлении, противоположном первоначальному (см. рисунок).

Координата материальной точки

$$x = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = \int_0^t \left(At + \frac{Bt^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{At^2}{2} + \frac{Bt^3}{6} \qquad (3)$$

(учли, что в начальный момент времени $x_0 = 0$), откуда при $t_1 = 4$ с координата $x(t_1) = 8$ м.

В момент времени $t = 3$ с точка начинает двигаться в обратную сторону, т. е. ее координата убывает, а длина пути продолжает возрастать по тому же закону, по которому убывает координата. До поворота путь s_1 равен координате x_1 в момент времени $t = 3$ с: согласно (3), $s_1 = 13{,}5$ м. За промежуток времени от $t = 3$ с (координата $x_1(t) = 13{,}5$ м) до $t_1 = 4$ с (координата $x(t_1) = 8$ м) точка прошла в обратном направлении расстояние

$$s_2 = x_1(t) - x(t_1).$$

Весь путь за время $t_1 = 4$ с равен сумме расстояний s_1 (первые три секунды) и s_2 (последняя секунда)

$$s = x_1(t) + x_1(t) - x(t_1).$$

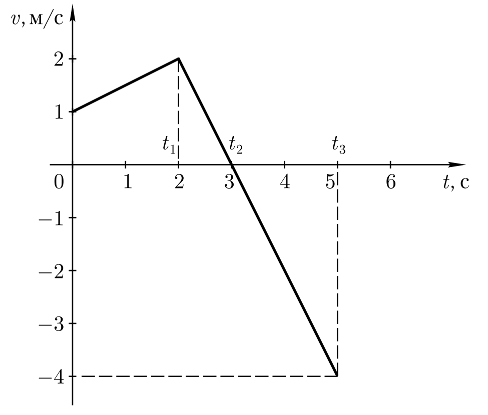
Ответ: $v = -12$ м/с; $x = 8$ м; $s = 19$ м.

1.5. На рисунке представлен график зависимости скорости от времени $v(t)$ для прямолинейно движущейся материальной точки в течение пяти секунд. Нарисуйте графики зависимостей координаты x и ускорения a точки от времени. Определите среднюю скорость точки; $\langle v_1 \rangle$ за первые три секунды движения; $\langle v_2 \rangle$ за первые пять секунд движения.

Дано: $v(t)$; $t = 5$ с.

Найти: $\langle v_1 \rangle$; $\langle v_2 \rangle$.

Решение. Согласно заданному рисунку, движение можно разбить на два этапа: первый — в течение первых двух секунд и второй — начиная с момента времени $t_1 = 2$ с.



а

П е р в ы й э т а п (координата x_1, скорость v_1, ускорение a_1). Скорость растет линейно, движение происходит с постоянным положительным ускорением.

Скорость

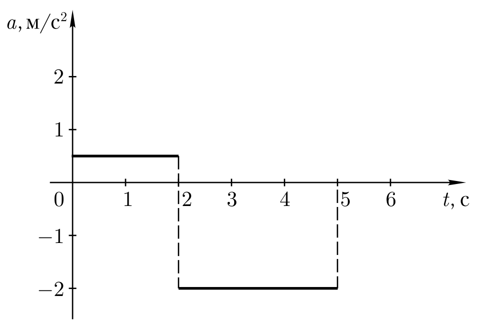
$$v_1 = v_{01} + a_1 t \qquad (1)$$

(начальная скорость $v_{01} = 1$ м/с, рис. *а*).

Ускорение

$$a_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = 0{,}5 \text{ м/с}^2 \qquad (2)$$

(учли, что $t_1 = 2$ с; $t_0 = 0$).



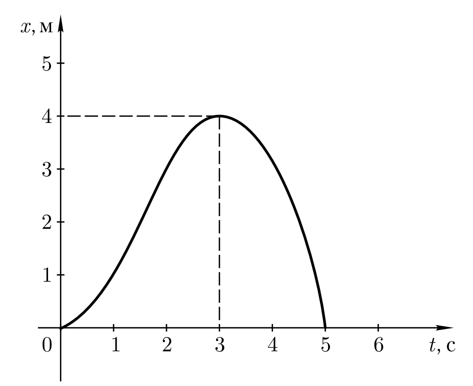
б

Координата

$$x_1 = v_{01} t + \frac{a_1 t^2}{2} \qquad (3)$$

(учли, что $x_{01} = 0$), т.е. график зависимости $x_1(t)$ — парабола, ветви которой направлены вверх ($a_1 > 0$) (координаты вершины $t = -2$ с; $x = -1$ м). По соотношениям (2) и (3) строим участки графиков $a(t)$ и $x(t)$ от $t = 0$ с до $t = 2$ с (рис. *б* и *в*).

В т о р о й э т а п (координата x_2, скорость v_2, ускорение a_2). Скорость убывает линейно, движение происходит с постоянным отрицательным ускорением, противоположным начальной скорости.



в

Ускорение

$$a_2 = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = -2 \text{ м/с}^2 \qquad (4)$$

(учли, что $t_2 = 3$ с; $t_1 = 2$ с).

Скорость

$$v_2 = v_{02} + a_2(t - t_1)$$

[в данном случае момент времени t_1 можно принять за начальный; при $t_1 = 2$ с $v_{02} = 2$ м/с, см. рис. *а*, формулу (1)].

Координата

$$x_2 = x_{02} + v_{02}(t - t_1) - \frac{a_2(t - t_1)^2}{2} \tag{5}$$

[t_1 — начальный момент времени; $v_{02} = 2$ м/с; $x_{02} = 3$ м, см. рис. *а*, а также формулу (3)]. График зависимости $x_2(t)$ — парабола, ветви которой направлены вниз ($a_2 < 0$) (координаты вершины $t = 3$ с; $x = 4$ м). Точка пересечения графика с осью абсцисс $t_3 = 5$ с. По соотношениям (4) и (5) строим участки графиков $a(t)$ и $x(t)$ для $t > t_1$ ($t_1 = 2$ с) (см. рис. *б* и *в*).

Искомая средняя скорость для первых трех секунд движения

$$\langle v_1 \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_0)}{t_2 - t_0} = 1{,}33 \text{ м/с}$$

($t_0 = 0$ с; $t_2 = 3$ с; $x(t_0) = 0$; $x(t_2) = 4$ м).

Искомая средняя скорость для первых пяти секунд движения

$$\langle v_2 \rangle = \frac{x(t_3) - x(t_0)}{t_3 - t_0} = 0$$

($t_0 = 0$ с; $t_3 = 5$ с; $x(t_0) = 0$; $x(t_3) = 0$).

Ответ: $\langle v_1 \rangle = 1{,}33$ м/с; $\langle v_2 \rangle = 0$.

1.6. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки возрастает по закону $a = kt$ (k — постоянная) и через промежуток времени $t_1 = 8$ с достигает значения $a_1 = 6$ м/с^2. Определите для момента времени $t_2 = 5$ с: 1) скорость v_2 точки; 2) пройденный точкой путь s_2.

Дано: $a = kt$; $t_1 = 8$ с; $a_1 = 6$ м/с^2; $t_2 = 5$ с.

Найти: 1) v_2; 2) s_2.

Решение. Скорость материальной точки

$$v = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = \int_0^t kt\mathrm{d}t = \frac{kt^2}{2} \tag{1}$$

(учли, что $a = kt$).

Согласно условию задачи

$$k = \frac{a}{t} = \frac{a_1}{t_1}. \tag{2}$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), искомая скорость для момента времени t_2:

$$v_2 = \frac{a_1 t_2^2}{2t_1}.$$

Путь, пройденный материальной точкой,

$$s = \int\limits_0^t v(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^t \frac{kt^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{kt^3}{6}$$

[учли формулу (1)]. Для момента времени t_2 с учетом соотношения (2) получаем

$$s_2 = \frac{a_1 t_2^3}{6t_1}.$$

Ответ: 1) $v_2 = 9{,}38$ м/с^2; 2) $s_2 = 15{,}6$ м.

1.7. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3, $C = 9$ м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение в момент времени $t_2 = 1$ с.

Дано: $r = 4$ м; $a_n = A + Bt + Ct^2$; $A = 1$ м/с^2; $B = 6$ м/с^3; $C = 9$ м/с^4; $t_1 = 5$ с; $t_2 = 1$ с.

Найти: 1) a_τ; 2) s_1; 3) a_2.

Решение. Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{r}$. Согласно условию задачи $a_n = A + Bt + Ct^2$, получим

$$v = \sqrt{r(A + Bt + Ct^2)} = \sqrt{4(1 + 6t + 9t^2)} = 2(1 + 3t) = 2 + 6t \tag{2}$$

(учли числовые значения коэффициентов).

Из выражений (1) и (2) искомое тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2 + 6t) = 6 \text{ м/с}^2. \tag{3}$$

Искомый путь за время t_1:

$$s_1 = \int\limits_0^{t_1} v\mathrm{d}t = \int\limits_0^{t_1} (2 + 6t)\mathrm{d}t = 2t_1 + 3t_1^2.$$

Полное ускорение точки в момент времени t_2:

$$a_2 = \sqrt{a_{\tau_2}^2 + a_{n_2}^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \frac{(2 + 6t_2)^4}{r^2}}$$

[учли, что $a_\tau = \mathrm{const}$ (см. формулу (3))].

Ответ: 1) $a_\tau = 6$ м/с^2; 2) $s_1 = 85$ м; 3) $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.

1.8. Движение материальной точки в плоскости xOy описывается законом $x = At$, $y = A(1 + Bt)t$, где A и B — положительные постоянные, t — время. Определите уравнение траектории материальной точки; радиус-вектор точки в зависимости от времени; модули скорости и ускорения в зависимости от времени.

Дано: $x = At$; $y = A(1 + Bt)t$; $A = \text{const}$; $B = \text{const}$.

Найти: $y(x)$; $\vec{r}(t)$; $v(t)$; $a(t)$.

Решение. Для нахождения уравнения траектории материальной точки из заданных в задаче уравнений следует исключить время. Из первого уравнения найдем $t = \dfrac{x}{A}$. Подставив это выражение во второе уравнение, можем записать

$$y = A(1+Bt)t = A\left(1+B\frac{x}{A}\right)\frac{x}{A} = x + \frac{B}{A}x^2,$$

т. е. искомое уравнение траектории материальной точки

$$y = x + \frac{B}{A}x^2.$$

Радиус-вектор материальной точки

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = At\vec{i} + A(1 + Bt)t\vec{j}, \tag{1}$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — орты координатных осей x и y.

Векторы скорости и ускорения с учетом формулы (1)

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = A\vec{i} + A(1+2Bt)\vec{j}. \tag{2}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2AB. \tag{3}$$

Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где v_x и v_y — соответственно проекции вектора $\vec{v}$ на координатные оси x и y. Из выражения (2) следует, что $v_x = A$ и $v_y = A(1 + 2Bt)$. Тогда искомый модуль скорости

$$v = A\sqrt{1+(1+2Bt)^2}.$$

Из выражения (3) искомый модуль ускорения

$$a = 2AB = \text{const}.$$

Ответ: $y(x) = x + \dfrac{B}{A}x^2$; $\vec{r}(t) = At\vec{i} + A(1 + Bt)t\vec{j}$; $v(t) = A\sqrt{1+(1+2Bt)^2}$; $a(t) = 2AB = \text{const}$.

1.9. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$, где $A = 0{,}4$ м/с^2, $B = 0{,}1$ м/с; $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — орты координатных осей x и y. Определите выражения для $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$; модули скорости и ускорения, тангенциальную и нормальную составляющие ускорения в момент времени $t = 2$ с.

Дано: $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$; $A = 0{,}4$ м/с^2; $B = 0{,}1$ м/с; $t = 2$ с.

Найти: $\vec{v}(t)$; $\vec{a}(t)$; v; a; a_τ; a_n.

Решение. Учитывая заданное в условии уравнение $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$, искомые выражения для векторов мгновенной скорости и ускорения:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2At\vec{i} + B\vec{j}; \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2A\vec{i}. \qquad (2)$$

Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где v_x и v_y — соответственно проекции вектора $\vec{v}$ на координатные оси x и y. Из выражения (1) следует, что $v_x = 2At$; $v_y = B$. Тогда искомый модуль скорости

$$v = \sqrt{4A^2t^2 + B^2}. \qquad (3)$$

Модуль ускорения, согласно формуле (2),

$$a = 2A = \mathrm{const}. \qquad (4)$$

Тангенциальная составляющая ускорения с учетом формулы (3)

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{4A^2t^2 + B^2} = \frac{4A^2t}{\sqrt{4A^2t^2 + B^2}}.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4A^2 - a_\tau^2}$$

[учли формулу (4)].

Ответ: $\vec{v}(t) = 2At\vec{i} + B\vec{j}$; $\vec{a}(t) = 2A\vec{i}$; $v = 1{,}6$ м/с; $a = 0{,}8$ м/с^2; $a_\tau = 0{,}798$ м/с^2; $a_n = 0{,}775$ м/с^2.

1.10. Одно из тел бросили с высоты $h_1 = 18$ м вертикально вверх, другое в тот же момент с высоты $h_2 = 32$ м бросили горизонтально. Определите начальную скорость v_{01} первого тела, если оба тела на Землю упали одновременно.

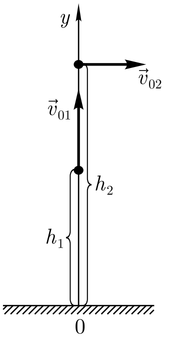
Дано: $h_1 = 18$ м; $h_2 = 32$ м; $t_1 = t_2 = t$.

Найти: v_{01}.

Решение. Кинематическое уравнение движения тела в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор, определяющий начальное положение тела в выбранной системе координат; $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения.



Направив ось y вертикально вверх (начало отсчета на уровне Земли, см. рисунок), уравнения движения первого и второго тел в проекции на эту ось для момента падения

$$0 = h_1 + v_{01}t - \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

$$0 = h_2 - \frac{gt^2}{2}; \qquad (2)$$

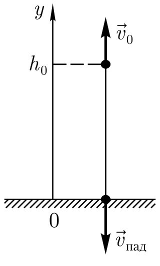
(учли, что $t_1 = t_2 = t$).

Из уравнений (1) и (2) искомая начальная скорость первого тела

$$v_{01} = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{\dfrac{2h_2}{g}}}.$$

Ответ: $v_{01} = 5{,}48$ м/с.

1.11. Воздушный шар поднимается с Земли вертикально вверх с ускорением $a = 0{,}9$ м/с^2. Через $t_1 = 12$ с после начала его движения пассажир уронил гайку. Определите время $t_{\text{пад}}$ падения гайки на Землю; ее скорость $v_{\text{пад}}$ в момент удара о Землю.



Дано: $a = 0{,}9$ м/с^2; $t_1 = 12$ с.

Найти: $t_{\text{пад}}$; $v_{\text{пад}}$.

Решение. Направив ось y вертикально вверх (начало отсчета на поверхности Земли, см. рисунок), запишем кинематическое уравнение движения в проекции на эту ось

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

где $h_0 = \dfrac{at_1^2}{2}$ — высота, на которой выпала гайка; $v_0 = at_1$ — начальная скорость гайки, направленная вертикально вверх. Учитывая эти соотношения и принимая, что в момент падения гайки $h = 0$; $t = t_{\text{пад}}$, выражение (1) запишется в виде:

$$0 = \frac{at_1^2}{2} + at_1 t_{\text{пад}} - \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2}.$$

Решив это квадратное уравнение, получим искомое время падения

$$t_{\text{пад}} = \frac{a + \sqrt{a(a+g)}}{g}\, t_1$$

(учли, что физический смысл имеет только положительный корень).

Кинематическое уравнение для скорости в проекции на выбранную ось y:

$$v = v_0 - gt,$$

которое для момента падения запишется в виде

$$v_{\text{пад}} = at_1 - gt_{\text{пад}}$$

(учли, что $v_0 = at_1$).

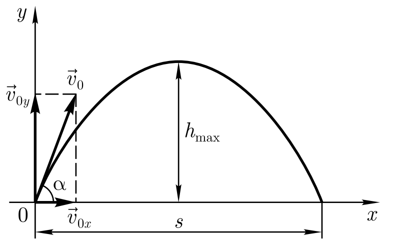
Вычисляя, получаем $t_{\text{пад}} = 4{,}9$ с; $v_{\text{пад}} = -37{,}3$ м/с (знак «$-$» показывает, что скорость направлена вниз).

Ответ: $t_{\text{пад}} = 4{,}9$ с; $v_{\text{пад}} = -37{,}3$ м/с.

1.12. Тело брошено под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите этот угол, если максимальная высота подъема $h_{\max}$ меньше дальности полета s в $n = 2{,}4$ раза.

Дано: $h_{\max} = \frac{s}{n}$; $n = 2{,}4$.

Найти: α.



Решение. Кинематические уравнения движения тела в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2};$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t;$$
$$\vec{a} = \vec{g},$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор, определяющий начальное положение тела в выбранной системе отсчета; $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения.

Направив оси координат (см. рисунок) из точки начала движения ($\vec{r}_0 = 0$), получим уравнения движения в проекциях на оси x и y:

$$x = v_{0x}t; \quad v_x = v_{0x}; \quad a_x = 0. \tag{1}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}; \quad v_y = v_{0y} - gt; \quad a_y = g. \tag{2}$$

Из рисунка следует, что

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha. \tag{3}$$

Поскольку при $y = h_{\max}$ (в высшей точке траектории) $v_y = 0$, из второго соотношения (2) время подъема

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g}. \tag{4}$$

Подставив формулу (4) в первое соотношение (2), найдем максимальную высоту подъема

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}. \tag{5}$$

В момент падения тела $y(t) = 0$, поэтому общее время движения из первого соотношения (2)

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

Из первого соотношения (1), используя формулу (4), дальность полета

$$s = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g}. \tag{6}$$

Разделив (5) на (6) и учитывая (3), найдем

$$\frac{h_{\max}}{s} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}. \tag{7}$$

Согласно условию задачи $h_{\max} = \frac{s}{n}$, поэтому из выражения (7)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{n},$$

откуда искомый угол

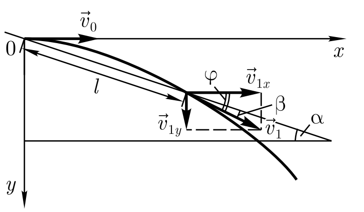
$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{n}.$$

Ответ: $\alpha = 59°$.

1.13. С вершины наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 37°$, горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 8$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите расстояние l до точки падения камня на наклонную плоскость и угол β между вектором скорости $\vec{v}_1$ камня в момент его падения и наклонной плоскостью.

Дано: $\alpha = 37°$; $v_0 = 8$ м/с.

Найти: l; β.



Решение. Кинематические уравнения движения тела в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2};$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t;$$

$$\vec{a} = \vec{g},$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор, определяющий начальное положение тела в выбранной системе координат; $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения.

Направив оси координат из точки начала движения (см. рисунок), получим уравнения движения на оси x и y:

$$x = v_{0x}t; \quad y = \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

$$v_x = v_0; \quad v_y = gt. \tag{2}$$

Обозначив координаты точки наклонной плоскости, в которую упадет камень, через x_1 и y_1, время падения через t_1, можем записать

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_1}{y_1}, \tag{3}$$

причем, согласно (1), $x_1 = v_0 t_1$ и $y_1 = \frac{gt_1^2}{2}$. Подставив эти выражения в формулу (3), найдем

$$t_1 = \frac{2v_0}{g\operatorname{tg}\alpha}. \tag{4}$$

Искомое выражение для l (расстояния до точки падения камня на наклонную плоскость):

$$l=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+\frac{x_1^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}=v_0t_1\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2v_0^2}{g\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

[учли соотношения (3), (1) и (4)].

Если φ — угол между вектором скорости $\vec{v}_1$ и горизонтом в момент падения, то искомый угол между вектором скорости камня в момент падения и наклонной плоскостью

$$\beta=\varphi-\alpha.$$

Из рисунка очевидно, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{v_{1y}}{v_{1x}},$$

или, учитывая (2) и (4),

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{gt_1}{v_0}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Тогда

$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}-\alpha.$$

Ответ: $l=28{,}5$ м; $\beta=32^\circ 21'$.

1.14. Радиус-вектор материальной точки, движущейся в поле тяготения Земли, описывается уравнением $\vec{r}=v_0t\vec{i}-\frac{gt^2}{2}\vec{j}$, где $v_0=76$ м/с, g — ускорение свободного падения; $\vec{i},\vec{j}$ — орты координатных осей x и y. Определите момент времени t_1 после начала движения, когда вектор скорости $\vec{v}$ точки направлен под углом $\alpha=35^\circ$ к горизонту. Чему равна скорость v в этот момент времени?

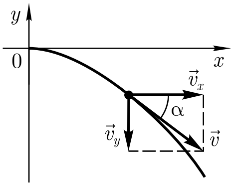
Дано: $\vec{r}=v_0t\vec{i}-\frac{gt^2}{2}\vec{j}$; $v_0=76$ м/с; $\alpha=35^\circ$.
Найти: t_1; v.
Решение. Согласно условию задачи,

$$\vec{r}=v_0t\vec{i}-\frac{gt^2}{2}\vec{j}, \tag{1}$$

откуда следует, что в начальный момент времени радиус-вектор $\vec{r}_0=0$.

Записав, согласно уравнению (1), координаты точки (проекции радиуса-вектора)

$$r_x=v_0t;\quad r_y=-\frac{gt^2}{2},$$



можно заключить из второй формулы, что ось y направлена вертикально вверх.

Учитывая, что $v_x=\frac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t}$; $v_y=\frac{\mathrm{d}r_y}{\mathrm{d}t}$, получаем

$$v_x = v_0; \quad v_y = -gt, \tag{2}$$

откуда следует, что имеем дело с движением тела, брошенного горизонтально (см. рисунок).

Из рисунка следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|v_y|}{|v_x|}$. Учитывая формулы (2), $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{gt_1}{v_0}$, откуда искомый момент времени

$$t_1 = \frac{v_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}.$$

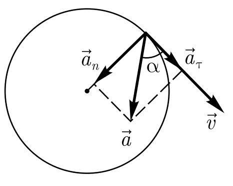
Искомая скорость

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{v_0}{\cos\alpha}$$

[учли выражение (2)].

Ответ: $t_1 = 5{,}42$ с; $v = 92{,}8$ м/с.

1.15. Материальная точка начинает вращаться с постоянным угловым ускорением. Определите угловое ускорение ε точки, если через промежуток времени $t = 5$ с угол α между векторами полного ускорения $\vec{a}$ и скорости $\vec{v}$ составляет 51°.



Дано: $\varepsilon = \text{const}$; $t = 5$ с; $\alpha = 51°$.

Найти: ε.

Решение. При равноускоренном вращательном движении угловая скорость ω связана со временем соотношением $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. По условию задачи $\omega_0 = 0$, тогда

$$\omega = \varepsilon t. \tag{1}$$

Связь тангенциальной составляющей ускорения a_τ, направленной вдоль вектора скорости (см. рисунок), с угловым ускорением

$$a_\tau = \varepsilon R, \tag{2}$$

где R — радиус окружности, по которой движется материальная точка.

Нормальная составляющая ускорения (направлена к центру окружности)

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{3}$$

Из рисунка следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau}$. Подставив выражения (1), (2) и (3) и учитывая соотношение $v = \omega R$, можем записать, что $\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon t^2$, откуда искомое угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{t^2}.$$

Ответ: $\varepsilon = 0{,}049$ рад/с^2.

1.16. Диск радиусом $R = 5$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$

($A = 2$ рад/с^2, $B = 1$ рад/с^5). Определите для точек на ободе диска к концу первой секунды после начала движения: 1) полное ускорение; 2) число оборотов, сделанных диском.

Дано: $R = 5$ см (0,05 м); $\omega = 2At + 5Bt^4$; $A = 2$ рад/с^2; $B = 1$ рад/с^5; $t = 1$ с.

Найти: 1) a; 2) N.

Решение. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \tag{1}$$

где тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = \varepsilon R$ ($\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение); $a_n = \omega^2 R$ — нормальная составляющая ускорения.

По условию задачи $\omega = 2At + 5Bt^4$; следовательно,

$$a_\tau = \varepsilon R = R\frac{d\omega}{dt} = R(2A + 20Bt^3),$$

$$a_n = \omega^2 R = R(2At + 5Bt^4)^2,$$

откуда искомое полное ускорение, согласно (1),

$$a = R\sqrt{(2A + 20Bt^3)^2 + (2At + 5Bt^4)^4}.$$

Число оборотов, совершенных диском,

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}, \tag{2}$$

где угол поворота диска

$$\varphi = \int_0^t \omega\, dt = \int_0^t (2At + 5Bt^4)\, dt = At^2 + Bt^5 \tag{3}$$

(учли, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$).

Подставив выражение (3) в формулу (2), найдем искомое число оборотов, сделанных диском,

$$N = \frac{At^2 + Bt^5}{2\pi}.$$

Ответ: 1) $a = 4{,}22$ м/с^2; 2) $N = 0{,}478$.

1.17. Скорость автомобиля (радиус колес $R = 35$ см), движущегося равнозамедленно, за время $\Delta t = 2$ с уменьшилась с $v_1 = 65$ км/ч до $v_2 = 46$ км/ч. Определите угловое ускорение ε и число полных оборотов N колес за это время.

Дано: $R = 35$ см (0,35 м); $\Delta t = 2$ с; $v_1 = 65$ км/ч (18,1 м/с); $v_2 = 46$ км/ч (12,8 м/с).

Найти: ε; N.

Решение. Поскольку $v_1 = \omega_1 R$, $v_2 = \omega_2 R$ (ω_1, ω_2 — угловые скорости в моменты времени t_1 и t_2), угловое ускорение при торможении за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{R\Delta t} < 0. \tag{1}$$

Знак «−» показывает, что движение автомобиля равнозамедленное.

Угол поворота в случае равнозамедленного вращательного движения с учетом знака ε

$$\varphi = \omega_1 \Delta t - \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2},$$

или, учитывая (1),

$$\varphi = \frac{v_1 + v_2}{2R} \Delta t.$$

Искомое число оборотов при торможении

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{v_1 + v_2}{4\pi R} \Delta t.$$

Ответ: $\varepsilon = -7{,}57$ рад/с^2; $N = 14{,}1$.

1.18. Вентилятор после выключения за время $t = 5{,}5$ с, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 22$ оборота. Определите угловую скорость ω_0 и частоту вращения n вентилятора в рабочем режиме, а также угловое ускорение вентилятора ε.

Дано: $t = 5{,}5$ с; $N = 22$; $\omega(t) = 0$.

Найти: ω_0; n; ε.

Решение. Угол поворота φ и угловая скорость ω в случае равнозамедленного движения

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Учитывая, что $\varphi = 2\pi N$, а $\omega = 0$ (по условию задачи), эти выражения можно записать в виде

$$2\pi N = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad (1)$$

$$0 = \omega_0 - \varepsilon t. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим искомые угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega_0 = \frac{4\pi N}{t}; \;\; \varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2}.$$

Частота вращения

$$n = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2N}{t}.$$

Ответ: $\omega_0 = 50{,}2$ рад/с; $n = 8$ с$^{-1}$; $\varepsilon = 9{,}13$ рад/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

1.19. Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид: $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $B_1 = 2$ м/с^2, $C_1 = -1{,}5$ м/с^3, $B_2 = -1$ м/с^2; $C_2 = 0{,}5$ м/с^3. Определите, в какой момент времени ускорения этих точек одинаковы. [$t = \dfrac{B_1 - B_2}{3(C_2 - C_1)} = 0{,}5$ с]

1.20. Четверть пути автомобиль проехал со скоростью $v_1 = 50$ км/ч, оставшуюся часть — со скоростью $v_2 = 70$ км/ч. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ автомобиля на всем пути, если он стоял столько же времени, сколько находился в движении. [$\langle v \rangle = \dfrac{2v_1v_2}{3v_1 + v_2} = 31{,}9$ км/ч]

1.21. Зависимость координат материальной точки от времени задается уравнениями $x = A\cos\omega t$ и $y = A\sin\omega t$, где A и ω — положительные постоянные. Определите радиус-вектор $\vec{r}$, скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ материальной точки, а также их модули. [$\vec{r} = A(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$; $\vec{v} = A\omega(-\vec{i}\sin\omega t + \vec{j}\cos\omega t)$; $\vec{a} = -A\omega^2(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$; $r = A$; $v = A\omega$; $a = A\omega^2$]

1.22. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = (At^3 + Bt)\vec{i} + (Ct^2 + D)\vec{j} + Et\vec{k}$, где $A = 0{,}3$ м/с^3; $B = E = 1$ м/с; $C = 2$ м/с^2; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координат осей x, y, z. Определите: выражения для $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$; модули скорости и ускорения в момент времени $t = 1$ с. [$\vec{v} = (3At^2 + B)\vec{i} + 2Ct\vec{j} + E\vec{k}$; $\vec{a} = 6At\vec{i} + 2C\vec{j}$; $v = 4{,}54$ м/с; $a = 4{,}39$ м/с^2]

1.23. Скорость камня, брошенного вертикально вверх, через промежуток времени $t = 2{,}2$ с уменьшилась в $n = 3{,}5$ раза. Определите начальную скорость v_0 камня и высоту h его подъема. [$v_0 = \dfrac{n}{n-1}gt = 30{,}2$ м/с; $h = \dfrac{n^2}{(n-1)^2}\dfrac{gt^2}{2} = 46{,}5$ м]

1.24. Подброшенный вертикально вверх камень находился на одной и той же высоте в моменты времени $t_1 = 2{,}1$ с и $t_2 = 3{,}7$ с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите скорость v_0, с которой был брошен камень. [$v_0 = g\dfrac{t_1 + t_2}{2} = 28{,}4$ м/с]

1.25. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой начальной скоростью v_0 с интервалом времени $\Delta t = 1{,}8$ с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите эту начальную скорость, если оба тела через промежуток времени $t = 5{,}5$ с после броска первого тела оказались на одной высоте h. Определите также эту высоту. [$v_0 = \left(t - \dfrac{\Delta t}{2}\right)g = 45{,}1$ м/с; $h = \dfrac{gt(t - \Delta t)}{2} = 99{,}8$ м]

1.26. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 42°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите расстояние l от места броска до точки, в которой тело окажется через первую половину времени своего движения. [$l = \dfrac{v_0^2\sin\alpha}{2g}\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = 12{,}5$ м]

1.27. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 23$ м/с под углом $\alpha = 40°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите для момента времени $t = 1{,}1$ с после начала движения: 1) скорость v тела; 2) угол β между вектором скорости $\vec{v}$ тела и горизонтом; 3) высоту h подъема тела. [1) $v = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2} = 18{,}1$ м/с; 2) $\beta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}\right) = 12°\,47'$; 3) $h = v_0t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} = 10{,}3$ м]

1.28. Тело брошено под углом $\alpha = 40°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите начальную скорость v_0 тела, если в момент времени $t = 1{,}1$ с вектор скорости $\vec{v}$ тела составляет с горизонтом угол $\beta = 28°$. [$v_0 = \dfrac{gt}{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\beta} =$ $= 45{,}9$ м/с]

1.29. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 28$ м/с под углом $\alpha = 42°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите для момента времени $t = 1{,}2$ с после начала движения тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения. [$a_\tau = g\sin\beta = 3{,}12$ м/с^2; $a_n = g\cos\beta = 9{,}3$ м/с^2; где $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}$]

1.30. Определите начальную скорость v_0 горизонтально брошенного тела, если через промежуток времени $t = 3{,}2$ с вектор $\vec{v}$ скорости тела составляет с горизонтом угол $\alpha = 63°$. [$v_0 = \dfrac{gt}{\operatorname{tg}\alpha} = 16$ м/с]

1.31. С башни в горизонтальном направлении с интервалом $\Delta t = 2{,}2$ с брошены два камня с одинаковой начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с. Определите расстояние между камнями через промежуток времени $t = 1{,}3$ с после начала движения второго камня. [$l = \sqrt{v_0^2(\Delta t)^2 + \dfrac{g^2(2t\Delta t + (\Delta t)^2)^2}{4}} = 62{,}6$ м]

1.32. Диск радиусом $R = 0{,}6$ м, вращаясь равноускоренно, за время $t = 2$ с приобрел угловую скорость $\omega = 3{,}3$ рад/с. Определите для этого момента времени тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения. [$a_\tau = \dfrac{\omega R}{t} =$ $= 0{,}99$ м/с^2; $a_n = \omega^2 R = 6{,}53$ м/с^2]

1.33. Колесо механизма вращается с постоянной частотой $n = 45$ мин$^{-1}$. При переходе на меньшую мощность частота вращения за время $t = 2{,}4$ с уменьшилась в $k = 1{,}5$ раза. Считая движение равнозамедленным, определите угловое ускорение ε и число оборотов N за время торможения. [$\varepsilon = \dfrac{2(k-1)\pi n}{kt} = 0{,}654$ рад/с^2; $N = \dfrac{(k+1)nt}{2k} = 1{,}5$]

1.34. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени задается уравнением $v =$ $= A + Bt$, где $A = 0{,}6$ м/с; $B = 0{,}9$ м/с^2. Определите радиус R колеса, если угол α между векторами полного ускорения и линейной скорости через промежуток времени $t = 3$ с от начала движения равен $80°$. [$R = \dfrac{(A+Bt)^2}{B\operatorname{tg}\alpha} = 2{,}13$ м]

1.35. Диск радиусом $R = 0{,}6$ м вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость его углового ускорения от времени задается уравнением $\varepsilon = At$, где $A = 3$ рад/с^3. Определите угол φ поворота диска за время $t = 2{,}2$ с после начала движения, линейную скорость точки v на ободе диска и ее нормальное ускорение a_n для этого же момента времени. [$\varphi = \dfrac{At^3}{6} = 5{,}32$ рад; $v = \dfrac{At^2}{2}R = 4{,}36$ м/с; $a_n =$ $= \dfrac{A^2t^4}{4}R = 31{,}6$ м/с^2]

1.36. Колесо радиусом $R = 42$ см вращается так, что зависимость угла поворота колеса от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $B = -1{,}6$ рад/с;

$C = 0{,}8$ рад/с^2. Определите: момент времени t_1, когда полное ускорение $\vec{a}$ будет направлено под углом $\alpha = 75°$ к скорости $\vec{v}$; момент времени t_2, при котором нормальная составляющая $\vec{a}_n$ ускорения точки на ободе совпадает по величине с тангенциальной составляющей $\vec{a}_\tau$. $\left[t_1 = \dfrac{\sqrt{2C \operatorname{tg} \alpha} - B}{2C} = 2{,}52 \text{ с}; \; t_2 = \dfrac{\sqrt{2C} - B}{2C} = 1{,}79 \text{ с}\right]$

1.2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные законы и формулы

• Импульс (количество движения) материальной точки

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

[m — масса материальной точки; $\vec{v}$ — ее скорость].

• Второй закон Ньютона (основной закон динамики материальной точки)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

• Ускорение, приобретаемое материальной точкой под действием сил,

$$\vec{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m}$$

[m — масса материальной точки; $\vec{F}_i$ — сила, действующая на тело (точку) со стороны i-го тела].

• Третий закон Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

[$\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой].

• Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fN$$

[f — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления].

• Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

[n — число материальных точек (или тел), входящих в систему; m_i — масса i-й материальной точки (тела); $\vec{v}_i$ — скорость i-й точки (тела)].

• Радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

[m_i и $\vec{r}_i$ — соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n — число материальных точек в системе; $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ — масса системы].

• Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

[m_i — масса i-й материальной точки; x_i, y_i, z_i — координаты точки].

• Закон движения центра масс

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

• Уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты (уравнение Мещерского)

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} - \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \text{ или } m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{р}}$$

[m и $\vec{v}$ — соответственно масса и скорость ракеты в момент времени t; $\vec{F}_{\text{р}} = -\vec{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ — реактивная сила. Если скорость истечения газов $\vec{u}$ относительно ракеты противоположна $\vec{v}$ по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с $\vec{v}$, то ракета тормозится].

• Формула Циолковского для определения скорости ракеты

$$v = u\ln\frac{m_0}{m}$$

[u — скорость истечения газов; m_0 — стартовая масса ракеты, m — конечная масса ракеты].

Примеры решения задач

1.37. Тело массой $m = 4$ кг движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом расстояния s от времени t описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3. Определите силу F, действующую на тело в конце первой секунды.

Дано: $m = 4$ кг; $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$; $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3; $t = 1$ с.

Найти: F.

Решение. Согласно второму закону Ньютона,

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

где F — сила, действующая на тело; a — ускорение, приобретаемое телом.

Скорость точки $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct + 3Dt^2$, а ее ускорение

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2C + 6Dt \qquad (2)$$

(учли уравнение движения).

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомую силу

$$F = 2m(C + 3Dt).$$

Ответ: $F = 3{,}2$ Н.

1.38. Движение материальной точки массой $m = 0{,}25$ кг описывается уравнением $\vec{r} = A\sin\omega t\,\vec{i} + A\cos\omega t\,\vec{j}$, где $A = 2$ м; $\omega = 0{,}7$ рад/с; $\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты координатных осей x и y. Определите путь s, пройденный точкой за время $t_1 = 8$ с, и силу F, действующую на точку в конце указанного промежутка времени.

Дано: $m = 0{,}25$ кг; $\vec{r} = A\sin\omega t\,\vec{i} + A\cos\omega t\,\vec{j}$; $A = 2$ м; $\omega = 0{,}7$ рад/с; $t_1 = 8$ с.

Найти: s; F.

Решение. Выбрав прямоугольную систему координат с началом в точке при $t = 0$ и учитывая условие задачи, можем записать:

$$x = A\sin\omega t; \quad y = A\cos\omega t.$$

Согласно этим уравнениям траекторией тела является окружность радиусом A с центром в начале координат.

Учитывая, что линейная скорость тела $v = \omega A$ (A — радиус окружности), искомый путь (длина дуги), пройденный телом за время t_1:

$$s = vt_1 = \omega A t_1.$$

Скорость и ускорение материальной точки:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos\omega t\,\vec{i} - A\omega\sin\omega t\,\vec{j},$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\sin\omega t\,\vec{i} - A\omega^2\cos\omega t\,\vec{j}. \qquad (1)$$

Поскольку $\vec{F} = m\vec{a}$, с учетом выражения (1) получаем

$$\vec{F} = -mA\omega^2(\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}),$$

откуда модуль силы

$$F = mA\omega^2$$

(не зависящая от времени постоянная величина).

Ответ: $s = 11{,}2$ м; $F = 0{,}245$ Н.

1.39. На неподвижное тело массой $m = 0{,}5$ кг начинает действовать сила, изменяющаяся по закону $\vec{F} = A\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 2$ Н, $B = 3$ Н/с, $C = 0{,}5$ Н, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты координатных осей x, y и z. Определите: скорость $\vec{v}$ тела; модуль скорости v в момент времени $t = 2$ с после начала движения.

Дано: $m = 0{,}5$ кг; $\vec{F} = A\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$; $A = 2$ Н; $B = 3$ Н/с; $C = 0{,}5$ Н; $t = 2$ с.

Найти: $\vec{v}$; v.

Решение. Согласно второму закону Ньютона и условию задачи,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}(A\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}),$$

проекции ускорения на оси x, y, z равны

$$a_x = \frac{A}{m};\quad a_y = \frac{Bt}{m};\quad a_z = \frac{C}{m}. \tag{1}$$

Из формулы для ускорения $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ можем записать

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\,\mathrm{d}t,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

(учли, что в момент времени $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 0$).

Искомый вектор скорости, согласно выражениям (2) и (1),

$$\vec{v} = \frac{At}{m}\vec{i} + \frac{Bt^2}{2m}\vec{j} + \frac{Ct}{m}\vec{k}.$$

Модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{t}{m}\sqrt{A^2 + \frac{B^2t^2}{4} + C^2}.$$

Ответ: $\vec{v} = \dfrac{At}{m}\vec{i} + \dfrac{Bt^2}{2m}\vec{j} + \dfrac{Ct}{m}\vec{k}$; $v = 14{,}6$ м/с.

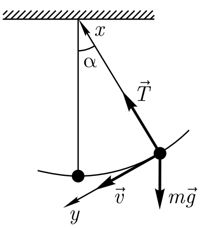
1.40. Шарик массой $m = 200$ г, подвешенный на нити длиной $l = 56$ см, совершает колебания в вертикальной плоскости. Сила натяжения нити T, когда нить составляет угол $\alpha = 50^\circ$ с вертикалью, равна 4,5 Н. Определите скорость v шарика в этот момент времени.

Дано: $m = 200$ г (0,2 кг); $l = 56$ см (0,56 м); $\alpha = 50^\circ$; $T = 4{,}5$ Н.

Найти: v.

Решение. При движении шарика на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (см. рисунок). Второй закон Ньютона для шарика в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \tag{1}$$



Уравнение (1) в проекции на выбранные оси (см. рисунок) запишется в виде

$$ma_n = T - mg\cos\alpha, \tag{2}$$

где a_n — нормальная составляющая ускорения (направлена перпендикулярно скорости движения).

Из выражения (2) найдем

$$a_n = \frac{T - mg\cos\alpha}{m}. \qquad (3)$$

Подставив в выражение (3) $a_n = \frac{v^2}{l}$, искомая скорость

$$v = \sqrt{\left(\frac{T}{m} - g\cos\alpha\right)l}.$$

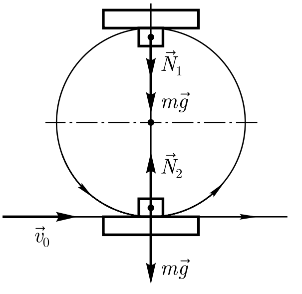
Ответ: $v = 3{,}01$ м/с.

1.41. Летчик совершил на самолете «мертвую петлю» радиусом $R = 240$ м. Определите силу давления летчика на сиденье в верхней и нижней точках, если его масса $m = 75$ кг, а скорость самолета $v = 210$ км/ч. Какую скорость v_0 должен иметь самолет при том же радиусе петли, чтобы сила давления летчика на сиденье в верхней точке оказалась равной нулю?

Дано: $R = 240$ м; $m = 75$ кг; $v = 210$ км/ч (58,3 м/с).

Найти: N_1; N_2; v_0.

Решение. Для любой точки траектории выберем направление оси x к центру окружности («мертвой петли»). Уравнение второго закона Ньютона в проекции на эту ось (см. рисунок):



для верхней точки $\qquad \frac{mv^2}{R} = mg + N_1; \qquad (1)$

для нижней точки $\qquad \frac{mv^2}{R} = N_2 - mg \qquad (2)$

(учли, что нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$).

Из уравнений (1) и (2) искомые силы давления

$$N_1 = \frac{mv^2}{R} - mg; \quad N_2 = \frac{mv^2}{R} + mg.$$

Если $N_1 = 0$, то уравнение (1) запишется в виде $\frac{mv_0^2}{R} = mg$, откуда искомая скорость

$$v_0 = \sqrt{Rg}.$$

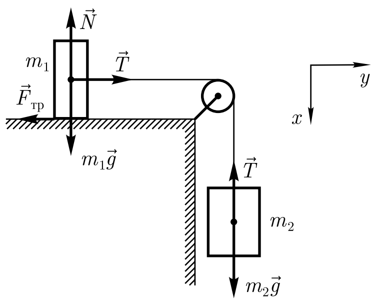
Ответ: $N_1 = 327$ Н; $N_2 = 1{,}8$ кН; $v_0 = 175$ км/ч.

1.42. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы, один из которых ($m_1 = 400$ г) движется по поверхности стола, а другой ($m_2 = 600$ г) — вдоль вертикали вниз. Коэффициент трения f груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определите: 1) ускорение a, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения T нити.

Дано: $m_1 = 400$ г (0,4 кг); $m_2 = 600$ г (0,6 кг); $f = 0{,}1$.

Найти: 1) a; 2) T.

Решение. На оба бруска действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, а на брусок массой m_1 еще сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.



Второй закон Ньютона для каждого из тел в векторной форме (см. рисунок):

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{тр}, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \qquad (2)$$

(силы натяжения $\vec{T}$ по обе стороны блока равны, так как нить и блок невесомы).

Уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранные оси (см. рисунок) запишутся в виде:

$$m_1 a = T - F_{тр},$$

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Учитывая, что $F_{тр} = f m_1 g$, получим

$$m_1 a = T - f m_1 g,$$

$$m_2 a = m_2 g - T, \qquad (3)$$

откуда искомое ускорение

$$a = \frac{(m_2 - f m_1)g}{m_1 + m_2}.$$

Силу натяжения нити найдем из уравнения (3)

$$T = m_2(g - a).$$

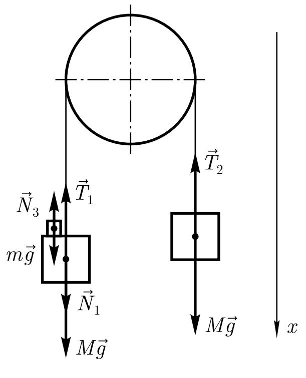
Ответ: 1) $a = 5{,}49$ м/с^2; 2) $T = 2{,}59$ Н.

1.43. Через невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая нить с грузами одинаковой массы $M = 1{,}4$ кг (см. рисунок). На один из грузов положен перегрузок массой $m = 0{,}2$ кг. Считая, что грузы первоначально находились на одном уровне и пренебрегая трением, определите разность высот Δh, на которых будут находиться грузы через промежуток времени $t = 1$ с.

Дано: $M = 1{,}4$ кг; $m = 0{,}2$ кг; $t = 1$ с.

Найти: Δh.

Решение. На каждый из грузов действуют: сила тяжести $M\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (вследствие невесомости нити силы натяжения одинаковы), на второй груз действует также сила давления со стороны перегрузка $\vec{N}_1$. На перегрузок действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления $\vec{N}_3$ со стороны груза ($|\vec{N}_3| = |\vec{N}_1|$ по третьему закону Ньютона). Поскольку нить нерастяжима, ускорения обоих тел (и перегрузка) одинаковы.



Второй закон Ньютона для каждого из тел в векторной форме:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1,$$

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T}_2,$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_3.$$

Эти уравнения в проекции на выбранную ось (см. рисунок) запишутся в виде:

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - T, \\ -Ma = Mg - T, \\ ma = mg - N \end{cases}$$

(учли, что $T_1 = T_2 = T$ и $N_1 = N_3 = N$), откуда найдем ускорение

$$a = \frac{m}{2M + m} g. \quad (1)$$

За время t каждый из грузов пройдет расстояние $h = \frac{at^2}{2}$, поэтому, учитывая выражение (1), искомая разность высот

$$\Delta h = 2h = \frac{m}{2M + m} gt^2.$$

Ответ: $\Delta h = 65{,}4$ см.

1.44. Определите ускорения a_1 и a_2 тел и натяжение нитей T и T_1 в системе, представленной на рисунке. Масса одного тела $m_1 = 0{,}6$ кг, масса другого $m_2 = 0{,}4$ кг. Нити невесомы и нерастяжимы, массой блока и силами трения пренебречь.

Дано: $m_1 = 0{,}6$ кг; $m_2 = 0{,}4$ кг.

Найти: a_1; a_2; T; T_1.

Решение. На каждый из грузов действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (см. рисунок). Поскольку нить невесома, силы натяжений нити одинаковы и равны T, а блок невесом, поэтому $T_1 = 2T$ (см. рисунок).

Второй закон Ньютона для обоих тел в векторной форме:

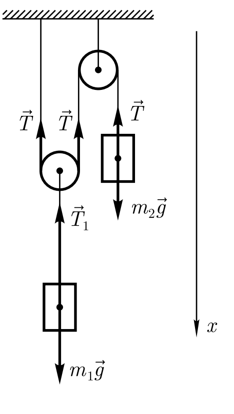
$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1; \quad (1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}. \quad (2)$$

Предположим, что груз m_1 движется вниз, а груз m_2 — вверх, тогда уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранную ось (см. рисунок) запишутся в виде:

$$m_1a_1 = m_1g - 2T; \quad (3)$$

$$-m_2a_2 = m_2g - T. \quad (4)$$



Если второе тело поднимется на высоту h_2, то первое тело за это же время опустится на расстояние $\frac{h_2}{2}$. Поскольку $h = \frac{at^2}{2}$, $a_1 = \frac{a_2}{2}$, и уравнения (3) и (4) запишутся в виде:

$$m_1a_1 = m_1g - 2T;$$

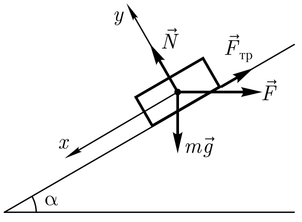
$$-2m_2a_1 = m_2g - T.$$

Из этих уравнений находим искомые

$$a_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2} g; \quad T = \frac{3m_1m_2}{m_1 + 4m_2} g; \quad a_2 = 2a_1; \quad T_1 = 2T.$$

Ответ: $a_1 = 1{,}78$ м/с^2; $a_2 = 3{,}56$ м/с^2; $T = 3{,}21$ Н; $T_1 = 6{,}42$ Н.

1.45. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 33°$ к горизонту находится брусок массой $m = 2{,}3$ кг, на который действует горизонтальная прижимающая сила F (см. рисунок). Определите коэффициент трения f между бруском и наклонной плоскостью, если брусок начинает скользить, когда сила $F = 7{,}5$ Н.



Дано: $\alpha = 33°$; $m = 2{,}3$ кг; $F = 7{,}5$ Н.

Найти: f.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}, \qquad (1)$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести; $\vec{N}$ — сила реакции опоры; $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения; $\vec{F}$ — прижимающая сила.

При начале скольжения ($\vec{a} = 0$) уравнение (1), в проекциях на выбранные оси (см. рисунок), запишется в виде:

$$0 = mg\sin\alpha - fN - F\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$0 = -mg\cos\alpha + N - F\sin\alpha \qquad (3)$$

(учли, что $F_{\text{тр}} = fN$).

Из уравнения (3) находим

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha. \qquad (4)$$

Уравнение (2) с учетом выражения (4) запишется в виде

$$mg\sin\alpha - f(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) - F\cos\alpha = 0,$$

откуда искомый коэффициент трения

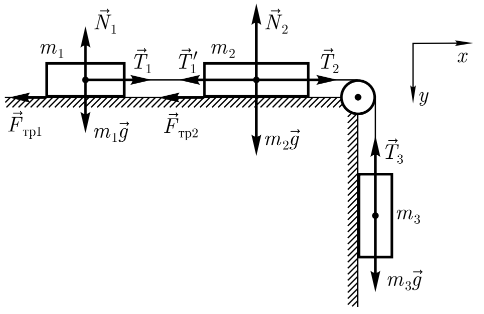
$$f = \frac{mg\sin\alpha - F\cos\alpha}{mg\cos\alpha + F\sin\alpha} = \frac{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha - F}{mg + F\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Ответ: $f = 0{,}26$.

1.46. Три бруска массами $m_1 = 0{,}16$ кг, $m_2 = 0{,}29$ кг и $m_3 = 0{,}21$ кг соединены перекинутой через блок нерастяжимой и невесомой нитью (см. рисунок). Определите, при каких значениях коэффициента трения f между брусками и поверхностью возможно скольжение тел.

Дано: $m_1 = 0{,}16$ кг; $m_2 = 0{,}29$ кг; $m_3 = 0{,}21$ кг.

Найти: f.



Решение. На каждый из брусков действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, а на бруски с массами m_1 и m_2 — еще сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Второй закон Ньютона для каждого из брусков в векторной форме (см. рисунок):

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр1}}, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{T}_1' + \vec{F}_{\text{тр2}}, \qquad (2)$$

$$m_3\vec{a} = m_3\vec{g} + \vec{T}_3 \qquad (3)$$

(учли, что вследствие нерастяжимости нити все тела движутся с одинаковым ускорением).

Уравнения (1) — (3) в проекциях на выбранные оси координат x и y (см. рисунок) запишутся в виде:

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - f m_1 g, \\ m_2 a = T_2 - f m_2 g - T_1, \\ m_3 a = m_3 g - T_2 \end{cases}$$

(учли, что $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_3$).

Решая эту систему уравнений, найдем выражение для ускорения

$$a = g\frac{m_3 - f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (4)$$

При движении грузов $a \geqslant 0$, т. е., согласно выражению (4), можем записать

$$f \leqslant \frac{m_3}{m_1 + m_2}.$$

Ответ: $f \leqslant 0{,}467$.

1.47. Определите, за какое время t тело, соскальзывая вдоль наклонной плоскости длиной $l = 3{,}1$ м, пройдет вторую половину пути, если угол наклона α плоскости к горизонту равен 32°, коэффициент трения тела о плоскость $f = 0{,}4$.

Дано: $l = 3{,}1$ м; $\alpha = 32°$; $f = 0{,}4$.

Найти: t.

Решение. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Второй закон Ньютона для тела в векторной форме (см. рисунок):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) в проекциях на выбранные оси x и y:

$$ma = mg\sin\alpha - fN, \qquad (2)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \qquad (3)$$

(учли, что $F_{тр} = fN$).

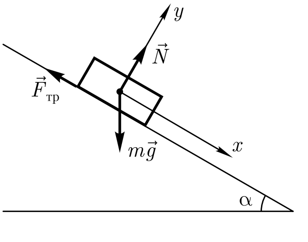
Из уравнений (2) и (3) ускорение тела, соскальзывающего вдоль наклонной плоскости,

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Время, затраченное телом для прохождения всей наклонной плоскости,

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}} \qquad (4)$$

(учли, что $v_{0x} = 0$, $l = \dfrac{at^2}{2}$).



Время, затраченное для прохождения первой половины пути,

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}\,. \qquad (5)$$

Искомое время t определится из выражений (4) и (5)

$$t = t_0 - t_1 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}\,.$$

Ответ: $t = 0{,}533$ с.

1.48. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$, укреплен невесомый блок (см. рисунок). Бруски массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициенты трения брусков о плоскости одинаковы и равны $f = 0{,}08$. Пренебрегая трением в оси блока, определите: 1) ускорения a брусков; 2) натяжение T нити; 3) силу давления F на блок.

Дано: $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $f = 0{,}08$.

Найти: a; T; F.

Решение. На каждый из брусков действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и натяжения $\vec{T}$ нитей. Ввиду того, что нить невесома и нерастяжима, силы натяжения нитей одинаковы по величине, и бруски будут двигаться с одинаковым ускорением $\vec{a}$.

Второй закон Ньютона для каждого из брусков в векторной форме с учетом перечисленного (см. рисунок):

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1}, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2}. \qquad (2)$$

Предположим, что груз m_1 движется вверх, а груз m_2 — вниз. Выбрав оси так, чтобы они совпадали с выбранным направлением ускорения, уравнения (1) и (2) в проекциях на эти оси запишутся в виде:

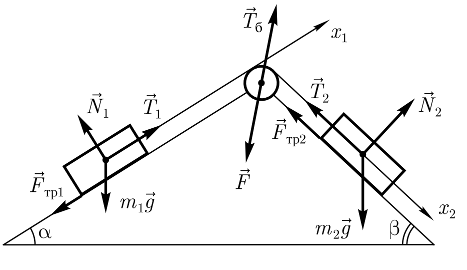
$$m_1 a = T - m_1 g\sin\alpha - f m_1 g\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$m_2 a = m_2 g\sin\beta - T - f m_2 g\cos\beta \qquad (4)$$

(учли, что $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$, $F_{\text{тр}1} = fN_1 = fm_1 g\cos\alpha$ и $F_{\text{тр}2} = fN_2 = fm_2 g\cos\beta$).

Из уравнений (3) и (4) найдем искомое ускорение брусков

$$a = \frac{m_2(\sin\beta - f\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\,g \qquad (5)$$



(знак ускорения при подстановке числовых данных покажет правильность выбора направления движения тел) и силу натяжения нитей

$$T = \frac{[\sin\beta + \sin\alpha - f(\cos\beta - \cos\alpha)]\, m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Векторное уравнение для блока

$$\vec{T}_б + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \text{ или } \vec{T}_б + \vec{F} = 0,$$

где $\vec{T}_б$ — сила реакции опоры; $\vec{F}$ — сила давления на блок. Тогда, поскольку по модулю все силы натяжения равны T, сила давления на блок со стороны нити (см. рисунок)

$$F = \sqrt{T^2 + T^2 - 2T^2\cos(\alpha+\beta)} = T\sqrt{2\big(1-\cos(\alpha+\beta)\big)} = 2T\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ответ: $a = 2{,}38$ м/с^2; $T = 7{,}98$ Н; $F = 15{,}4$ Н.

1.49. Брусок массой $m = 1{,}1$ кг лежит на горизонтальной доске массой $M = 3{,}2$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $f = 0{,}4$, между доской и горизонтальной поверхностью трение отсутствует. Определите, при какой минимальной силе $F_{\min}$, приложенной к доске (см. рисунок), брусок начнет скользить по доске.

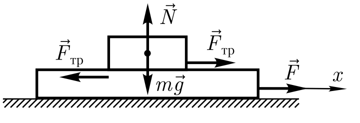
Дано: $m = 1{,}1$ кг; $M = 3{,}2$ кг; $f = 0{,}4$.

Найти: $F_{\min}$.

Решение. До тех пор, пока не достигнуто предельное значение силы

$$F_{тр} = fmg, \tag{1}$$

оба тела (доска и брусок) будут двигаться с одинаковым ускорением.



При скольжении на брусок действует максимальная сила трения (1); на доску, согласно третьему закону Ньютона, действует такая же сила в противоположном направлении (см. рисунок).

Выбрав ось x, совпадающую по направлению с силой $\vec{F}$, уравнения второго закона Ньютона в проекции на эту ось запишутся в виде:

$$ma_1 = fmg, \tag{2}$$

$$Ma_2 = F - fmg. \tag{3}$$

При проскальзывании бруска по доске $a_2 \geqslant a_1$. Из выражений (2) и (3) получаем, что

$$a_2 - a_1 = \frac{F}{M} - fg\left(\frac{m}{M} + 1\right) \geqslant 0. \tag{4}$$

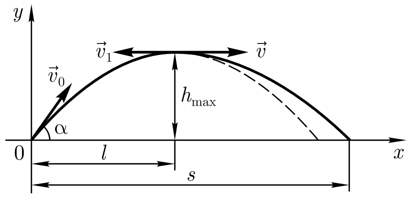
Согласно выражению (4), брусок будет скользить по доске, если

$$\frac{F}{M} \geqslant fg\left(\frac{m}{M} + 1\right),$$

откуда искомая минимальная сила

$$F_{\min} = fg(m + M).$$

Ответ: $F_{\min} = 16{,}9$ Н.



1.50. Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту со скоростью v_0, в верхней точке траектории разрывается на два осколка, причем масса первого m_1 в $n = 1{,}4$ раза меньше массы второго m_2. Меньший из осколков полетел горизонтально в обратном направлении со скоростью v_1, равной скорости v снаряда перед разрывом (см. рисунок). Определите, на каком расстоянии s от орудия упадет больший осколок, если место разрыва отстоит от места выстрела на расстояние $l = 2{,}1$ км (по горизонтали). Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано: $m_2 = nm_1$; $n = 1{,}4$; $v_1 = v$; $l = 2{,}1$ км ($2{,}1 \cdot 10^3$ м); $l = \dfrac{x_{max}}{2}$.

Найти: s.

Решение. Из кинематических уравнений (см. задачу 1.12) следует, что максимальная высота подъема

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad (1)$$

дальность полета

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (2)$$

Согласно закону сохранения импульса (при разрыве снаряда импульс системы сохраняется)

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \qquad (3)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — соответственно скорости первого и второго осколков.

Уравнение (3) в проекции на выбранную ось x запишется в виде

$$(n+1)m_1 v = -m_1 v_1 + nm_1 v_2$$

(учли, что $v_1 = -v$ и $m_2 = nm_1$), откуда

$$v_2 = \frac{n+2}{n} v = \frac{n+2}{n} v_0 \cos\alpha. \qquad (4)$$

Поскольку импульс — величина векторная, по закону его сохранения больший осколок будет двигаться в горизонтальном направлении.

Для большего осколка кинематические уравнения запишутся в виде:

$$x = x_0 + v_2 t, \qquad (5)$$

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}, \qquad (6)$$

где, согласно условию задачи, $x_0 = l$; $y_0 = h_{max}$. В момент падения $y = 0$, поэтому из уравнения (6) время падения большего осколка

$$t = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}}.$$

Подставив это выражение в формулу (5) при учете соотношения (1) и $l = \frac{x_{\max}}{2}$ (условие разрыва в верхней точке), получим искомую дальность полета

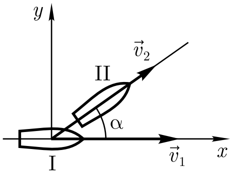
$$s = \frac{2l(n+1)}{n}.$$

Ответ: $s = 7{,}2$ км.

1.51. Две лодки (масса каждой вместе с рыбаком равна m) движутся со скоростями $v_1 = 2{,}2$ м/с и $v_2 = 1{,}9$ м/с, причем скорость второй лодки направлена под углом $\alpha = 35°$ к первой (см. рисунок). При сближении лодок рыбаки обменялись мешками (масса обоих мешков одинакова и в $n = 5$ раз меньше массы m). Определите скорости лодок v_1' и v_2' после обмена мешками.

Дано: $v_1 = 2{,}2$ м/с; $v_2 = 1{,}9$ м/с; $\alpha = 35°$; $n = 5$.

Найти: v_1'; v_2'.



Решение. В соответствии с условием задачи масса мешка равна $\frac{m}{n}$, тогда масса лодки с рыбаком без мешка равна $m - \frac{m}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)m$. После обмена мешками импульсы первой и второй лодок

$$m\vec{v}_1' = \frac{m}{n}\vec{v}_2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)m\vec{v}_1, \qquad (1)$$

$$m\vec{v}_2' = \frac{m}{n}\vec{v}_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)m\vec{v}_2. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранные оси x и y (см. рисунок) запишутся в виде:

$$\begin{cases} mv_{1x}' = \frac{m}{n}v_2\cos\alpha + \left(1 - \frac{1}{n}\right)mv_1, \\ mv_{2x}' = \frac{m}{n}v_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)mv_2\cos\alpha, \\ mv_{1y}' = \frac{m}{n}v_2\sin\alpha, \\ mv_{2y}' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)mv_2\sin\alpha. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем проекции скоростей лодок после обмена мешками:

$$v_{1x}' = \frac{v_2\cos\alpha + (n-1)v_1}{n}, \quad v_{1y}' = \frac{v_2\sin\alpha}{n}, \qquad (3)$$

$$v_{2x}' = \frac{v_1 + (n-1)v_2\cos\alpha}{n}, \quad v_{2y}' = \frac{(n-1)v_2\sin\alpha}{n}. \qquad (4)$$

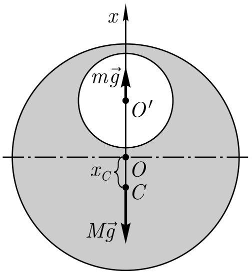
Учитывая, что $v_1' = \sqrt{\left(v_{1x}'\right)^2 + \left(v_{1y}'\right)^2}$ и $v_2' = \sqrt{\left(v_{2x}'\right)^2 + \left(v_{2y}'\right)^2}$, согласно уравнениям (3) и (4), получаем $v_1' = 2{,}08$ м/с; $v_2' = 1{,}9$ м/с.

Ответ: $v_1' = 2{,}08$ м/с; $v_2' = 1{,}9$ м/с.

1.52. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга (радиус $R = 60$ см), в котором вырезано круглое отверстие (радиус $r = 25$ см), с центром, лежащим на середине вертикального радиуса пластинки (см. рисунок). Определите положение центра масс этой фигуры.

Дано: $R = 60$ см (0,6 м); $r = 25$ см (0,25 м); $OO' = \dfrac{R}{2}$.

Найти: x_C.



Решение. Представим, что круглое отверстие заполнено тем же материалом, из которого сделана круглая пластинка. Тогда центр масс, к которому приложена сила тяжести $M\vec{g}$, будет находиться в центре круга (точка O на рисунке). Чтобы скомпенсировать эффект заполнения отверстия, представим, что в центре круглого отверстия приложена сила $m\vec{g}$, направленная вертикально вверх.

Из соображений симметрии очевидно, что центр масс фигуры находится на вертикальной оси, проходящей через точки O и O'. Помещая начало вертикальной оси x в точку O, запишем выражение для центра масс

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

где m_i — масса i-го тела; x_i — координата центра масс i-го тела.

Учитывая условие задачи и вышеприведенные рассуждения, можем записать

$$x_C = -\frac{m\dfrac{R}{2}}{M - m}. \tag{1}$$

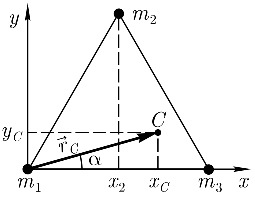
Если плотность пластинки ρ, толщина — h, то $M = \rho\pi R^2 h$, $m = \rho\pi r^2 h$. Подставляя эти формулы в выражение (1), найдем искомое положение центра масс

$$x_C = -\frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}$$

(знак «–» означает, что центр масс находится ниже центра пластинки O).

Ответ: $x_C = 6{,}3$ см.

1.53. Определите положение центра масс (радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C$ и его модуль r_C) системы, состоящей из трех материальных точек массами $m_1 = 1{,}4$ кг, $m_2 = 1{,}2$ кг и $m_3 = 1{,}8$ кг, находящихся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 0{,}6$ м. Определите также угол α (см. рисунок).



Дано: $m_1 = 1{,}4$ кг; $m_2 = 1{,}2$ кг; $m_3 = 1{,}8$ кг; $a = 0{,}6$ м.

Найти: $\vec{r}_C$; r_C, α.

Решение. Начало координат поместим в точку расположения массы m_1, а ось x направим вдоль прямой, соединяющей материальные точки массами m_1 и m_3 (см. рисунок). Тогда координаты соответствующих материальных точек массами m_1, m_2 и m_3:

$$x_1 = 0;\ y_1 = 0;$$

$$x_2 = a\sin\frac{\pi}{6};\ \ y_2 = a\cos\frac{\pi}{6};$$

$$x_3 = a;\ y_3 = 0.$$

Учитывая выражение для координат центра масс системы материальных точек

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},$$

где x_i, y_i — координаты i-й точки; m_i — масса i-й точки; n — число материальных точек системы, можем записать

$$x_C = \frac{m_2 a\sin\dfrac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_C = \frac{m_2 a\cos\dfrac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{1}$$

Искомый радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} = \frac{m_2 a\sin\dfrac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{i} + \frac{m_2 a\cos\dfrac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{j}.$$

Модуль радиус-вектора центра масс системы материальных точек

$$r_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \frac{a\sqrt{\left(m_2\sin\dfrac{\pi}{6} + m_3\right)^2 + \left(m_2\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Искомый угол (см. рисунок)

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_2\cos\dfrac{\pi}{6}}{m_2\sin\dfrac{\pi}{6} + m_3}.$$

Ответ: $\vec{r}_C = (32{,}7\vec{i} + 14\vec{j})$ см; $r_C = 35{,}7$ см; $\alpha = 23°25'$.

1.54. Ракета начальной массой $m_0 = 500$ г выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно нее скоростью $u = 400$ м/с. Расход газа $\mu = 150$ г/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определите, какую скорость относительно Земли приобретет ракета через время $t = 2$ с после начала движения, если ее начальная скорость равна нулю.

Дано: $m_0 = 500$ г (0,5 кг); $u = 400$ м/с; $\mu = 150$ г/с (0,15 кг/с); $t = 2$ с; $v_0 = 0$.

Найти: v.

Решение. Из условия задачи следует, что внешние силы отсутствуют, поэтому импульс системы тел ракета — выбрасываемый газ остается постоянным.

Поскольку система замкнута,

$$\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}\vec{p}_1 + \mathrm{d}\vec{p}_2 = 0, \tag{1}$$

где $\mathrm{d}\vec{p}_1$ и $\mathrm{d}\vec{p}_2$ — соответственно изменения импульса ракеты и выбрасываемой порции газа за время $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}\vec{p}_1 = (m_0 - \mu t)d\vec{v}, \tag{2}$$

где $(m_0 - \mu t)$ — масса ракеты в момент времени t, когда скорость ракеты $\vec{v}$; $d\vec{v}$ — изменение скорости за время $\mathrm{d}t$ (за счет реактивного действия выбрасываемой струи газа)

$$\mathrm{d}\vec{p}_2 = \mu\vec{u}\mathrm{d}t, \tag{3}$$

где $\mu\mathrm{d}t$ — масса выбрасываемой порции газа.

Подставив формулы (2) и (3) в выражение (1), получим

$$(m_0 - \mu t)d\vec{v} + \mu\vec{u}\mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

Выбрав ось x по направлению скорости ракеты $\vec{v}$, в проекции на эту ось уравнение (4) запишется в виде

$$(m_0 - \mu t)dv - \mu u\mathrm{d}t = 0$$

(учли, что $u_x = -u$). Тогда

$$\mathrm{d}v = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Скорость v как функцию времени найдем, интегрируя выражение (5) в пределах от 0 до t. При $t = 0$ $v = 0$, следовательно,

$$v = u\int_0^t \frac{\mu\mathrm{d}t}{m_0 - \mu t},$$

откуда

$$v = u\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}.$$

Ответ: $v = 366$ м/с.

1.55. Ракета начальной массой m_0 поднимается вертикально вверх с нулевой начальной скоростью. Скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая поле тяготения однородным, запишите зависимость скорости ракеты v от массы m и времени t подъема ракеты.

Дано: m_0; $v_0 = 0$; u; $\vec{g} = \mathrm{const}$.

Найти: $v(m, t)$.

Решение. Уравнение движения тела переменной массы m:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_\text{р},$$

где ускорение $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{F} = m\vec{g}$ и $\vec{F}_\text{р} = -\vec{u}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ [$\vec{F}_\text{р}$ — реактивная сила; $\vec{u}$ — скорость истечения газов относительно ракеты (если $\vec{u}$ противоположен $\vec{v}$ по направлению, то ракета ускоряется)]. Учитывая эти формулы, можем записать:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - \vec{u}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

Выбрав ось x, направленную вертикально вверх, уравнение (1) в проекции на эту ось запишется в виде

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + u\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},$$

откуда

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v+gt) = u\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

или

$$\mathrm{d}(v+gt) = \frac{u}{m}\,\mathrm{d}m; \qquad v+gt = u\int\limits_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m},$$

откуда искомая зависимость скорости от массы и времени, учитывая, что масса убывает со временем,

$$v = u\ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

Ответ: $v = u\ln\dfrac{m_0}{m} - gt.$

Задачи для самостоятельного решения

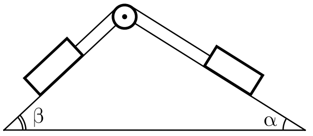
1.56. Под действием постоянной силы $F = 10$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом расстояния s от времени t описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$. Определите массу m тела, если $C = 2$ м/с^2. [$m = 2{,}5$ кг]

1.57. Определите допустимую массу m автомобиля для проезда по вогнутому мосту с радиусом кривизны $R = 18$ м, если скорость автомобиля ограничена дорожным знаком $v = 40$ км/ч, а предельная сила давления в нижней точке моста $N = 56$ кН. [$m \leqslant \dfrac{N}{g + \dfrac{v^2}{R}} = 3{,}35$ т]

1.58. По выпуклому мосту радиусом $R = 72$ м движется автомобиль. Определите скорость v автомобиля, если в верхней точке траектории сила его давления на мост в $n = 1{,}6$ раза меньше, чем при движении по горизонтальному участку пути. [$v = \sqrt{gR(1 - \dfrac{1}{n})} = 16{,}3$ м/с]

1.59. Через невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два груза одинаковой массы $M = 800$ г, на один из которых положен перегрузок массой $m = 60$ г. Определите силу давления N перегрузка на груз и силу натяжения T нити. [$N = \dfrac{2mM}{m+2M}\,g = 0{,}567$ Н; $T = M\left(1 + \dfrac{m}{m+2M}\right)g = 8{,}13$ Н]

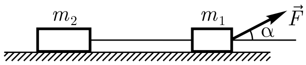
1.60. На нерастяжимой и невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок, на высоте $h = 1{,}1$ м закреплены два тела одинаковой массы $M = 600$ г. Определите, какую массу m должен иметь перегрузок, положенный на одно из тел, чтобы оно достигло поверхности Земли за время $t = 2{,}4$ с. [$m = \dfrac{4Mh}{gt^2 - 2h} = 48{,}6$ г]



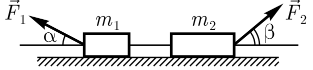
1.61. Через блок, укрепленный на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 28°$ и $\beta = 40°$, перекинута нить, к которой прикреплены грузы с одинаковыми массами (см. рисунок). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением, определите ускорение a грузов. [$a = g\left(\dfrac{\sin\beta - \sin\alpha}{2}\right) = 0{,}849$ м/с^2]

1.62. Тело массой $m = 100$ кг равноускоренно поднимают на тросе вверх в течение $t = 3$ с на высоту $h = 10$ м. Определите коэффициент упругости k троса, если его удлинение $\Delta x = 0{,}3$ м. [$k = \dfrac{m}{\Delta x}\left(g + \dfrac{2h}{t^2}\right) = 4$ кН/м]

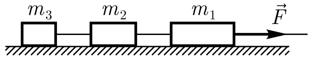
1.63. Два бруска массами $m_1 = 150$ г и $m_2 = 220$ г связаны нерастяжимой и невесомой нитью. К первому бруску приложена сила $F = 2{,}4$ Н, составляющая с горизонтом угол $\alpha = 39°$ (см. рисунок). Определите коэффициент трения f брусков о поверхность, считая его одинаковым, если тела движутся с ускорением $a = 1{,}8$ м/с^2. [$f = \dfrac{F\cos\alpha - (m_1 + m_2)a}{m_1 g + m_2 g - F\sin\alpha} = 0{,}565$]



1.64. К брускам массами $m_1 = 1{,}2$ кг и $m_2 = 1{,}8$ кг, лежащим на горизонтальной поверхности, приложены равные по величине силы $F = 35$ Н, составляющие с горизонтом соответственно углы $\alpha = 28°$ и $\beta = 40°$ (см. рисунок). Коэффициенты трения обоих брусков о поверхность $f = 0{,}3$. Определите ускорение a тел, если нить, связывающая тела, является нерастяжимой и невесомой. [$a = F\dfrac{(\cos\alpha + f\sin\alpha) - (\cos\beta - f\sin\beta)}{m_1 + m_2} - fg = 2{,}32$ м/с^2]



1.65. Три связанных нерастяжимой и невесомой нитью тела (см. рисунок) массами $m_1 = 1{,}8$ кг, $m_2 = 1{,}2$ кг и $m_3 = 1{,}1$ кг движутся по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы $F = 15$ Н. Определите ускорение a тел, если коэффициент трения f тел о поверхность равен 0,3. [$a = \dfrac{F - fg(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}716$ м/с^2]



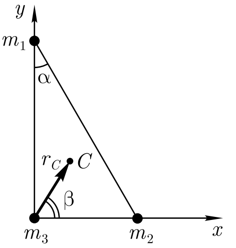
1.66. Шарик массой $m = 250$ г, летящий со скоростью $v = 3{,}4$ м/с под углом $\alpha = 25°$ к горизонту, упруго ударяется о гладкую стену. Определите импульс p, полученный стеной в результате удара. [$p = 1{,}54$ кг $\cdot$ м/с]

1.67. Тело массой $m = 1{,}2$ кг брошено с начальной скоростью $v_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 36°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите изменение импульса Δp тела за время его движения. [$\Delta p = -16{,}9$ кг $\cdot$ м/с]

1.68. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v под углом α к горизонту и разрывается на два осколка с одинаковыми массами. Один из осколков падает вертикально, а другой начинает двигаться под углом β к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите скорость v_2 второго осколка. [$v_2 = \dfrac{2v\cos\alpha}{\cos\beta}$]

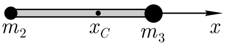
1.69. Тело находится в равновесии на наклонной плоскости длиной $l = 16$ м с углом $\alpha = 26°$ к горизонту. Определите время, за которое тело соскользнет с плоскости, если угол наклона увеличить до $\beta = 40°$. [$t = \sqrt{\dfrac{2l}{g(\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha)}} = 3{,}48$ с]

1.70. В вершинах прямоугольного треугольника с гипотенузой $l = 2$ м и углом $\alpha = 30°$ находятся шары массами $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 4$ кг (см. рисунок). Определите модуль радиуса-вектора $\vec{r}_C$ центра масс системы материальных точек, приняв за начало координат вершину прямого угла. Определите также угол β между радиусом-вектором и осью x.

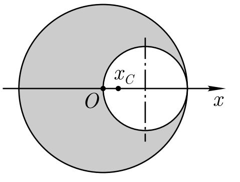


$\left[r_C = \dfrac{\sqrt{m_1^2\cos^2\alpha + m_2^2\sin^2\alpha}}{m_1+m_2+m_3}\,l = 0{,}5\text{ м};\ \beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{m_1}{m_2}\operatorname{ctg}\alpha\right) = 60°\right]$

1.71. На концах стержня массой $m_1 = 5$ кг и длиной $l = 0{,}8$ м находятся шары массами $m_2 = 1$ кг и $m_3 = 4$ кг. Определите положение центра масс системы. $\left[x_C = \dfrac{(m_1 + 2m_3)l}{2(m_1 + m_2 + m_3)} = 0{,}52\text{ м}\right]$



1.72. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга (радиус $R = 0{,}3$ м), в котором вырезано круглое отверстие (радиус $r = \dfrac{R}{2}$), центр которого лежит на середине горизонтального радиуса пластинки (см. рисунок). Определите положение центра масс этой фигуры. $\left[x_C = \dfrac{R}{6} = 5\text{ см}\right]$



1.73. Ракета, масса M которой в начальный момент времени равна 3 кг, запущена вертикально вверх. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая поле силы тяжести однородным, определите расход горючего μ, если относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 200$ м/с и ускорение a ракеты через $t = 4$ с составляет 13,2 м/с^2. $\left[\mu = \dfrac{M(a+g)}{u + gt + at} = 0{,}237\text{ кг/с}\right]$

1.74. Ракета начальной массой $m_0 = 3$ кг, начиная движение из состояния покоя вертикально вверх, выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно ракеты скоростью $u = 500$ м/с. Расход газа $\mu = 0{,}4$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите скорость ракеты через время $t = 2$ с после начала движения: 1) при отсутствии внешних сил; 2) в однородном поле силы тяжести. $\left[1)\ v = u\ln\dfrac{m_0}{m_0 - \mu t} = 155\text{ м/с};\ 2)\ v = u\ln\dfrac{m_0}{m_0-\mu t} - gt = 135\text{ м/с}\right]$

1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Основные законы и формулы

• Элементарная работа постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = F_s\mathrm{d}s$$

[α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\mathrm{d}\vec{r}$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$ — элементарный путь; F_s — проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $\mathrm{d}\vec{r}$].

• Работа, совершаемая переменной силой на пути s,

$$A = \int_s F_s\mathrm{d}s = \int_s F\cos\alpha\,\mathrm{d}s.$$

• Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

• Мощность (мгновенная мощность)

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}; \qquad N = \vec{F}\vec{v} = F_s v = Fv\cos\alpha$$

[$\vec{v}$ — вектор скорости, с которой движется точка приложения силы $\vec{F}$; α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$].

• Кинетическая энергия движущегося тела

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

[m — масса тела; v — его скорость].

• Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией частицы

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,\Pi, \text{ или } \vec{F} = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

[$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы координатных осей].

• Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h,

$$\Pi = mgh$$

[g — ускорение свободного падения].

• Сила упругости

$$F = -kx$$

[x — деформация; k — жесткость].

• Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

[x — деформация; k — коэффициент упругости (в случае пружины — жесткость)].

• Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \mathrm{const},$$

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{2} + mgh = \mathrm{const}, \\[2mm] \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = \mathrm{const}. \end{cases}$$

• Скорость двух тел массами m_1 и m_2 после прямого *абсолютно упругого центрального удара*

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \qquad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

[предполагается, что при прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$) и после ($\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$) удара лежат на прямой, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту прямую равны модулям скоростей].

• Скорость движения тел *после абсолютно неупругого центрального удара*

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

• Изменение кинетической энергии тел *при абсолютно неупругом центральном ударе* (разность кинетической энергии тел до и после удара)

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

Примеры решения задач

1.75. Тело массой $m = 4$ кг под действием некоторой силы движется прямолинейно согласно уравнению $s = Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 0{,}5$ м/с, $C = 3$ м/с^2, $D = 2$ м/с^3. Определите работу A силы в течение первых двух с половиной секунд.

Дано: $m = 4$ кг; $s = Bt + Ct^2 + Dt^3$; $B = 0{,}5$ м/с; $C = 3$ м/с^2, $D = 2$ м/с^3; $t = 2{,}5$ с.

Найти: A.

Решение. Элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$

$$\mathrm{d}A = F_s \mathrm{d}s,$$

где F_s — проекция вектора силы на направление перемещения; $\mathrm{d}s$ — элементарный путь.

Работа за конечный промежуток времени

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F_s \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} F \mathrm{d}s$$

(поскольку движение прямолинейное, $F_s = F$).

Учитывая, что $F = ma$; $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$, получаем

$$A = \int_{t_1}^{t_2} mav\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Скорость и ускорение тела, согласно заданному уравнению,

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct + 3Dt^2,$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2C + 6Dt.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), найдем искомую работу

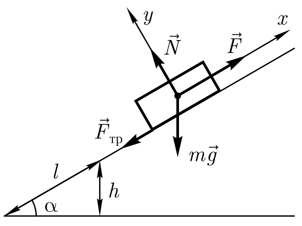
$$A = \int_0^t m(2C + 6Dt)(B + 2Ct + 3Dt^2)\mathrm{d}t = 2m\left(BCt + C^2t^2 + \frac{3}{2}BDt^2 + 3CDt^3 + \frac{9}{4}D^2t^4\right).$$

Ответ: $A = 5{,}62$ кДж.

1.76. Автомобиль, мощность двигателя которого P постоянна и равна 50 кВт, поднимается в гору с уклоном $\dfrac{h}{l} = 0{,}15$ с постоянной скоростью $v = 54$ км/ч. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, он движется равномерно с той же скоростью. Определите массу m автомобиля.

Дано: $P = 50$ кВт ($50 \cdot 10^3$ Вт); $\dfrac{h}{l} = 0{,}15$; $v = 54$ км/ч (15 м/с).

Найти: m.



Решение. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения автомобиля по наклонной плоскости

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}, \qquad (1)$$

где $\vec{N}$ — сила реакции опоры; $\vec{F}_{\text{тр}} = f\vec{N}$ — сила трения (f — коэффициент трения); $\vec{F}$ — сила тяги.

Уравнение (1) в проекциях на выбранные оси x и y (см. рисунок) при условии равномерности движения запишется

в случае подъема: $$0 = -mg\sin\alpha - fN + F; \qquad (2)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha; \qquad (3)$$

в случае спуска: $$0 = -mg\sin\alpha + fN; \qquad (4)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha \qquad (5)$$

(учли, что $F_{\text{тр}} = fN$, при спуске $F = 0$).

Из уравнений (2) и (3), (4) и (5)

$$F = mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha, \qquad (6)$$

$$f = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (7)$$

Подставив (7) в выражение (6), получаем

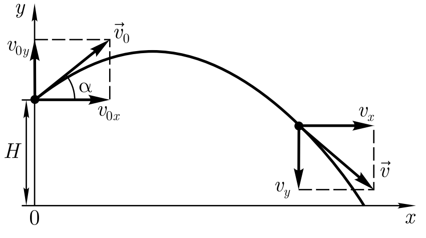
$$F = 2mg\sin\alpha. \qquad (8)$$

Подставив выражение (8) в формулу для мощности $P = Fv$ и учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$ (см. рисунок), получаем искомую массу:

$$m = \frac{Pl}{2gvh}.$$

Ответ: $m = 1{,}13$ т.

1.77. С башни высотой $H = 15$ м под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 12$ м/с брошено тело массой $m = 1$ кг. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите для момента времени $t = 1{,}5$ с кинетическую T и потенциальную П энергии тела.



Дано: $H = 15$ м; $\alpha = 30°$; $v_0 = 12$ м/с; $m = 1$ кг; $t = 1{,}5$ с.

Найти: T; П.

Решение. Кинетическая энергия тела

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{1}$$

Кинематические уравнения для скорости в проекциях на выбранные оси x и y (см. рисунок) с учетом $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \tag{2}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{3}$$

Скорость в любой точке траектории

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в формулу (1) и учитывая формулы (2) и (3), после элементарных преобразований найдем искомую кинетическую энергию:

$$T = \frac{m}{2}(v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2t^2).$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mgh, \tag{5}$$

где h — высота тела над поверхностью Земли (принята за нулевой уровень потенциальной энергии).

В соответствии с выбранными направлением осей и началом отсчета

$$h = H + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = H + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \tag{6}$$

(учли, что $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$). Подставив выражение (6) в формулу (5), найдем искомую потенциальную энергию

$$\Pi = mg\left(H + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right).$$

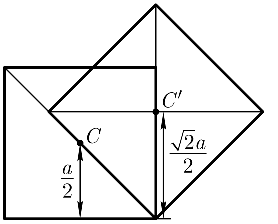
Ответ: $T = 92$ Дж; $\Pi = 127$ Дж.

1.78. Медную игральную кость с ребром $a = 2$ см перекатывают таким образом, чтобы она, сделав один оборот, вернулась в исходное положение. Определите затраченную работу A. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3.

Дано: $a = 2$ см ($2 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 8{,}93$ г/см^3 ($8{,}93 \cdot 10^3$ кг/м^3).

Найти: A.

Решение. При перекатывании кубика на соседнюю грань его центр масс (см. рисунок) необходимо поднять на высоту $\Delta h = h_1 - h = = \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2}$, где h — первоначальная высота центра масс C; h_1 — наивысшее положение центра масс C'. Работа при этом идет на увеличение потенциальной энергии кубика



$$A_1 = mg\Delta h, \tag{1}$$

где m — масса кубика.

Подставив значение Δh в формулу (1) и учитывая, что $m = \rho a^3$, получим

$$A_1 = \frac{(\sqrt{2}-1)\rho g a^4}{2}.$$

При полном обороте кость перекатывают на соседнюю грань четыре раза. Таким образом, искомая работа

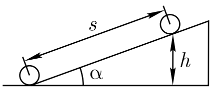
$$A = 4A_1 = 2(\sqrt{2}\ -1)\rho g a^4.$$

Ответ: $A = 11{,}6$ мДж.

1.79. Конькобежец, разогнавшись до скорости $v = 21$ км/ч, въезжает на горку с уклоном $\alpha = 20°$ на высоту $h = 1{,}6$ м. Определите коэффициент трения f коньков о лед.

Дано: $v = 21$ км/ч (5,83 м/с); $\alpha = 20°$; $h = 1{,}6$ м.

Найти: f.



Решение. Согласно закону сохранения энергии, изменение механической энергии конькобежца равно работе силы трения

$$mgh - \frac{mv^2}{2} = A_{\text{тр}}, \tag{1}$$

где m — масса конькобежца; h — высота, на которую въезжает конькобежец.

Работа силы трения

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}s = -sfmg\cos\alpha, \tag{2}$$

где s — пройденный путь; f — коэффициент трения; g — ускорение свободного падения; α — угол наклона плоскости к горизонту; $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos\alpha$.

Приравняв правые части (1) и (2) и учитывая, что $s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ (см. рисунок), можем записать:

$$mgh - \frac{mv^2}{2} = -fmg\frac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha,$$

откуда искомый коэффициент трения

$$f = \frac{v^2 - 2gh}{2gh\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Ответ: $f = 0{,}03$.

1.80. Материальная точка массой $m = 1$ кг двигалась под действием некоторой силы, направленной вдоль оси x, согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Определите мощность N, затрачиваемую на движение точки, за время $t = 2$ с.

Дано: $m = 1$ кг; $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3; $t = 2$ с.

Найти: N.

Решение. Мощность характеризует скорость совершения работы

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Работа $\mathrm{d}A$ силы на пути, который точка прошла за время возрастания скорости от 0 до v, идет на увеличение кинетической энергии $\mathrm{d}T$ точки. Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$N = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mva. \qquad (2)$$

Скорость и ускорение материальной точки с учетом уравнения движения

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct + 3Dt^2; \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2C + 6Dt.$$

Подставив эти выражения в формулу (2), найдем искомую мощность

$$N = m(B + 2Ct + 3Dt^2)(2C + 6Dt).$$

Ответ: $N = 0{,}16$ Вт.

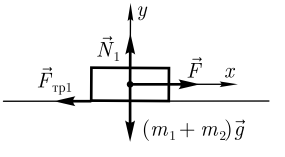
1.81. Автомобиль массой $m_1 = 1{,}1$ т с прицепом движется с некоторой скоростью по горизонтальной поверхности. Отцепив прицеп, автомобиль с той же скоростью поднимается в гору с уклоном $\alpha = 11°$. Считая мощность двигателя постоянной, определите массу m_2 прицепа, если коэффициент трения колес о дорогу $f = 0{,}07$.

Дано: $m_1 = 1{,}1$ т $(1{,}1 \cdot 10^3$ кг); $\alpha = 11°$; $f = 0{,}07$; $v = \mathrm{const}$; $P = \mathrm{const}$.

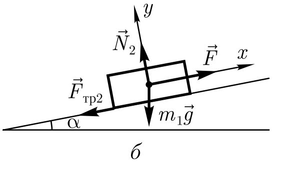
Найти: m_2.

Решение. Мощность, развиваемая двигателем,

$$P = Fv, \qquad (1)$$



а



б

где F — сила тяги мотора; v — скорость. Из выражения (1) следует, что при одинаковых значениях мощности и скорости сила тяги одинакова при движении по горизонтальному участку пути (рис. *а*) и при подъеме (рис. *б*), т. е.

$$F_1 = F_2 = F.$$

В случае равномерного движения по горизонтальной поверхности уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси x и y примет вид:

$$0 = F - fN_1, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - (m_1 + m_2)g \qquad (3)$$

(учли, что $F_{\text{тр}1} = fN_1$). Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$F = f(m_1 + m_2)g. \qquad (4)$$

В случае равномерного движения в гору уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси x и y примет вид:

$$0 = F - fm_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha, \qquad (5)$$

$$0 = N_2 - m_1 g\cos\alpha \qquad (6)$$

(учли, что $F_{\text{тр}2} = fN_2 = fm_1 g\cos\alpha$).

Из уравнений (5) и (6) следует, что

$$F = m_1 g \sin\alpha + f m_1 g \cos\alpha. \qquad (7)$$

Приравняв правые части выражений (4) и (7), получаем

$$m_1 g \sin\alpha + f m_1 g \cos\alpha = f(m_1 + m_2)g,$$

откуда искомая масса прицепа

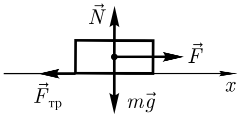
$$m_2 = m_1\left(\frac{\sin\alpha}{f} + \cos\alpha - 1\right).$$

Ответ: $m_2 = 2{,}98$ т.

1.82. Мощность P двигателей самолета массой $m = 5{,}2$ т при отрыве от Земли равна 820 кВт. Разгоняясь равноускоренно, самолет достигает скорости $v = 32$ м/с. Принимая, что коэффициент сопротивления $f = 0{,}04$ не зависит от скорости, определите длину пробега s самолета перед взлетом.

Дано: $P = 820$ кВт ($8{,}2 \cdot 10^5$ Вт); $m = 5{,}2$ т ($5{,}2 \cdot 10^3$ кг); $v = 32$ м/с; $f = 0{,}04$.

Найти: s.



Решение. Выбрав ось x в направлении разгона самолета, запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на эту ось (см. рисунок):

$$ma = F - fN, \qquad (1)$$

где a — ускорение самолета; F — сила тяги двигателей; N — сила реакции опоры.

Учитывая, что при движении по горизонтальному участку $N = mg$, уравнение (1) примет вид

$$ma = F - fmg,$$

откуда

$$F = ma + fmg. \qquad (2)$$

Мощность, развиваемая двигателями, $P = Fv$, где v — скорость движения самолета. Тогда

$$F = \frac{P}{v}. \qquad (3)$$

Приравняв правые части выражений (2) и (3), запишем

$$\frac{P}{v} = ma + fmg = \frac{mv^2}{2s} + fmg \qquad (4)$$

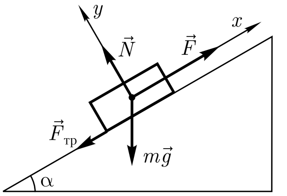
(учли, что $a = \dfrac{v^2}{2s}$).

Искомая длина пробега самолета, согласно (4),

$$s = \frac{mv^2}{2\left(\dfrac{P}{v} - fmg\right)}.$$

Ответ: $s = 113$ м.

1.83. Груз массой $m = 80$ кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением $a = 1$ м/с^2. Длина наклонной плоскости $l = 3$ м, угол α ее наклона к горизонту равен 30°, а коэффициент трения $f = 0{,}15$. Определите: 1) работу, совершаемую подъемным устройством; 2) его среднюю мощность; 3) его максимальную мощность. Начальная скорость груза равна нулю.



Дано: $m = 80$ кг; $a = 1$ м/с^2; $l = 3$ м; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}15$; $v_0 = 0$.

Найти: 1) A; 2) $\langle P\rangle$; 3) $P_{\max}$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения груза по наклонной плоскости в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F},$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести; $\vec{N}$ — сила реакции опоры; $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения; $\vec{F}$ — сила тяги.

В проекциях на оси x и y (см. рисунок) это уравнение примет вид

$$ma = F - mg\sin\alpha - fN,$$

$$0 = N - mg\cos\alpha$$

(учли, что $F_{\text{тр}} = fN$, где f — коэффициент трения).

Решая систему уравнений относительно F, получаем

$$F = m(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Работа, совершаемая подъемным устройством,

$$A = Fl = ml(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Средняя мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$\langle P\rangle = \frac{A}{t},$$

где $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}}$ — время подъема груза. Следовательно,

$$\langle P\rangle = A\sqrt{\frac{a}{2l}}.$$

Максимальная мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$P_{\max} = Fv_{\max} = Fat.$$

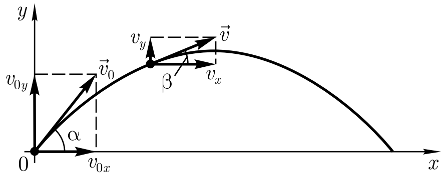
Подставляя значения, получим

$$P_{\max} = m\sqrt{2al}(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Ответ: 1) $A = 1{,}72$ кДж; 2) $\langle P\rangle = 702$ Вт; 3) $P_{\max} = 1{,}41$ кВт.

1.84. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите отношение кинетической T и потенциальной энергии П шарика, брошенного под углом $\alpha = 40°$ к горизонту, в момент времени, когда его скорость будет составлять угол 1) $\beta_1 = 20°$, 2) $\beta_2 = 0°$ с горизонталью.

Дано: $\alpha = 40°$; $\beta_1 = 20°$; $\beta_2 = 0°$.



Найти: $\dfrac{T}{\Pi}$.

Решение. Согласно закону сохранения энергии для любой точки траектории,

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}, \tag{1}$$

где $\dfrac{mv_0^2}{2}$ — кинетическая энергия в начальной точке; mgh и $\dfrac{mv^2}{2}$ — соответственно потенциальная и кинетическая энергия в произвольной точке.

Скорость в любой точке траектории $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $v_y = \dfrac{v_x}{\operatorname{tg}\beta}$ (см. рисунок), откуда получим

$$v^2 = v_0^2(1 + \operatorname{tg}^2\beta)\cos^2\alpha.$$

Тогда закон сохранения энергии (1) запишется в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv_0^2\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)}{2}. \tag{2}$$

Искомое отношение, учитывая выражения (1) и (2),

$$\frac{T}{\Pi} = \frac{T}{E-T} = \frac{\dfrac{mv^2}{2}}{\dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{mv^2}{2}} = \frac{\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)}.$$

В верхней точке траектории $\beta_2 = 0$, и отношение $\dfrac{T}{\Pi} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Ответ: 1) 1,98; 2) 1,42.

1.85. Зависимость потенциальной энергии П тела в центральном силовом поле от расстояния r задается функцией $\Pi(r) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$, где A и B — положительные постоянные. Определите значение r, при котором сила, действующая на тело, максимальна.

Дано: $\Pi(r) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$; $A = \text{const}$; $B = \text{const}$; $F = F_{\max}$.

Найти: r.

Решение. Значение r, при котором сила, действующая на тело, максимальна, определяется из условия

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = 0. \tag{1}$$

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией тела

$$F = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}r}.$$

Для заданной в условии функции

$$F = \frac{2A}{r^3} - \frac{B}{r^2}. \qquad (2)$$

Продифференцируем выражение (2) по r и результат, согласно (1), приравняем нулю:

$$\frac{dF}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{2A}{r^3} - \frac{B}{r^2}\right) = -\frac{6A}{r^4} + \frac{2B}{r^3} = \frac{2}{r^4}(Br - 3A) = 0,$$

откуда искомое $r = \frac{3A}{B}$.

Ответ: $r = \frac{3A}{B}$.

1.86. Энергозатраты на откачку воды из подвала глубиной $h = 2$ м, длиной $a = 10$ м и шириной $b = 6$ м составили $E = 2$ МДж. Определите коэффициент полезного действия η насоса, если уровень воды составлял $H = 0{,}8$ м от дна подвала. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Дано: $h = 2$ м; $a = 10$ м; $b = 6$ м; $E = 400$ кДж ($4 \cdot 10^5$ Дж); $H = 0{,}8$ м; $\rho = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3).

Найти: η.

Решение. Коэффициент полезного действия насоса равен отношению полезной работы A к затраченной энергии E

$$\eta = \frac{A}{E}. \qquad (1)$$

Полезная работа равна изменению потенциальной энергии воды при ее подъеме до уровня Земли.

Поскольку центр масс воды находился на расстоянии $\frac{H}{2}$ от дна подвала, необходимо поднять ее центр масс на расстояние $l = h - \frac{H}{2}$. Учитывая, что масса воды $m = \rho abH$, получаем

$$A = mg\left(h - \frac{H}{2}\right) = \rho gabH\left(h - \frac{H}{2}\right). \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем искомый КПД:

$$\eta = \frac{\rho gabH\left(h - \frac{H}{2}\right)}{E}.$$

Ответ: $\eta = 37{,}7$ %.

1.87. Подъемный кран поднимает груз массой $m = 3$ т с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2. Определите среднюю мощность $\langle N \rangle$ крана за время от $t_1 = 4$ с до $t_2 = 8$ с, если коэффициент полезного действия крана $\eta = 40$ %.

Дано: $m = 3$ т ($3 \cdot 10^3$ кг); $a = 0{,}5$ м/с^2; $t_1 = 4$ с; $t_2 = 8$ с; $\eta = 40$ % (0,4).

Найти: $\langle N \rangle$.

Решение. КПД крана

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{затр}}},$$

где A — полезная работа; $A_{\text{затр}}$ — затраченная работа.

$$A_{\text{затр}} = \langle N\rangle(t_2 - t_1),$$

откуда средняя мощность

$$\langle N\rangle = \frac{A}{\eta(t_2 - t_1)}. \qquad (1)$$

Полезная работа равна изменению энергии груза за промежуток времени $t_2 - t_1$

$$A = E_2 - E_1 = \left(\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2\right) - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1\right), \qquad (2)$$

где v_1 и v_2 — соответственно скорости груза в моменты времени t_1 и t_2; h_1 и h_2 — высота положения груза в моменты времени t_1 и t_2. Из выражения (2) находим

$$A = \frac{ma(g+a)}{2}(t_2^2 - t_1^2) \qquad (3)$$

(учли, что $h = \dfrac{at^2}{2}$ и $v = at$).

Подставив выражение (3) в формулу (1), найдем искомую среднюю мощность крана

$$\langle N\rangle = \frac{ma(g+a)(t_2 + t_1)}{2\eta}.$$

Ответ: $\langle N\rangle = 2{,}32$ кВт.

1.88. Шар, положенный на верхний конец спиральной пружины, сжимает пружину на $x_0 = 2$ мм. Определите, насколько сожмет пружину этот же шар, брошенный вертикально вниз с высоты $h = 15$ см со скоростью $v_0 = 1{,}5$ м/с. Удар шара о пружину считать абсолютно упругим.

Дано: $x_0 = 2$ мм ($2 \cdot 10^{-3}$ м); $h = 15$ см (0,15 м); $v_0 = 1{,}5$ м/с.

Найти: x.

Решение. За нулевой уровень потенциальной энергии выберем нижнее положение шара после броска, соответствующее сжатой пружине.

Сразу после броска энергия системы складывается из потенциальной и кинетической энергии шара:

$$E_1 = mg(h+x) + \frac{mv_0^2}{2}, \qquad (1)$$

где m — масса шара; g — ускорение свободного падения; h — высота шара над недеформированной пружиной; x — величина деформации пружины; v_0 — скорость бросания шара.

При нижнем положении пружины (и шара) энергия системы равна энергии упругой деформации

$$E_2 = \frac{kx^2}{2}, \qquad (2)$$

где k — коэффициент упругости пружины найдем из закона Гука

$$kx_0 = mg$$

(x_0 — сжатие пружины), откуда

$$k = \frac{mg}{x_0}. \tag{3}$$

Согласно закону сохранения энергии $E_1 = E_2$, и приравняв правые части выражений (1) и (2), с учетом (3), получаем

$$mg(h + x) + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mg}{2x_0}x^2,$$

или

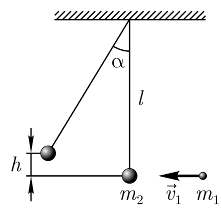
$$gx^2 - 2gx_0x - (2gx_0h + v_0^2x_0) = 0. \tag{4}$$

Выбирая в качестве решения положительный корень уравнения (4), найдем искомое растяжение пружины

$$x = x_0 + \sqrt{x_0\left(x_0 + 2h + \frac{v_0^2}{g}\right)}.$$

Ответ: $x = 3{,}46$ см.

1.89. Шарик массой $m_1 = 16$ г, движущийся горизонтально, столкнулся с шаром массой $m_2 = 0{,}8$ кг, висящим на прямом недеформируемом и невесомом стержне длиной $l = 1{,}7$ м. Считая удар упругим, определите скорость шарика v_1, если угол отклонения стержня после удара $\alpha = 20°$.



Дано: $m_1 = 16$ г ($16 \cdot 10^{-3}$ кг); $m_2 = 0{,}8$ кг; $l = 1{,}7$ м; $\alpha = 20°$.

Найти: v_1.

Решение. Для абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$mv_1 = m_2v_2' + m_1v_1', \tag{1}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_2(v_2')^2}{2} + \frac{m_1(v_1')^2}{2}, \tag{2}$$

где v_1' и v_2' — скорости первого и второго шаров после удара. Из уравнений (1) и (2) найдем

$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Согласно закону сохранения энергии, для большого шара после удара

$$m_2gh = \frac{m_2(v_2')^2}{2}, \tag{4}$$

где h — высота, на которую поднялся большой шар.

Подставив формулу (3) в выражение (4), можем записать

$$m_2gh = \frac{2m_2m_1^2v_1^2}{(m_1+m_2)^2},$$

откуда

$$v_1 = \frac{m_1+m_2}{\sqrt{2}m_1}\sqrt{gh}. \qquad (5)$$

Поскольку $h = l(1-\cos\alpha)$ (см. рисунок), подставив это значение h в формулу (5), найдем искомую скорость шарика

$$v_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{\frac{gl(1-\cos\alpha)}{2}} = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $v_1 = 36{,}2$ м/с.

1.90. Стальной шарик массой $m = 20$ г положен на пружинные весы массой $M = 40$ г. При этом чашка весов отклонилась на $x_0 = 3$ см. Определите максимальное показание x весов, если шарик бросить на весы без начальной скорости с высоты $h = 40$ см, и после удара он подпрыгнул на высоту $h_1 = 17$ см. Удар считать абсолютно упругим.

Дано: $m = 20$ г (0,02 кг); М = 40 г (0,04 кг); $x_0 = 3$ см (0,03 м); $h = 40$ см (0,4 м); $h_1 = 17$ см (0,17 м).

Найти: x.

Решение. Когда шарик положен на весы, согласно закону Гука,

$$kx_0 = mg,$$

откуда коэффициент жесткости пружины

$$k = \frac{mg}{x_0}. \qquad (1)$$

При падении шарика выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

где скорость шарика перед ударом о чашку

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

При ударе выполняется закон сохранения импульса

$$mv = -mv' + Mu,$$

где v' и u — соответственно скорости шарика и чашки после удара. Тогда

$$u = \frac{mv + mv'}{M}. \qquad (3)$$

При движении шарика вверх, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{m(v')^2}{2} = mgh_1,$$

откуда скорость шарика после удара

$$v' = \sqrt{2gh_1}. \tag{4}$$

Подставляя (2) и (4) в выражение (3), находим

$$u = \frac{m\left(\sqrt{2gh} + \sqrt{2gh_1}\right)}{M}.$$

При движении чашки выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{kx^2}{2},$$

тогда, с учетом (1), искомое максимальное показание весов

$$x = \sqrt{\frac{M}{k}}u = \sqrt{\frac{2x_0m}{M}}\left(\sqrt{h} + \sqrt{h_1}\right).$$

Ответ: $x = 18$ см.

1.91. На край тележки массой $M = 6$ кг, движущейся горизонтально без трения с постоянной скоростью $v = 2$ м/с, опускают с небольшой высоты короткий брусок массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между бруском и тележкой $f = 0{,}4$. Определите, на какое расстояние s переместится брусок по тележке; какое количество теплоты Q при этом выделится?

Дано: $M = 6$ кг; $v = 2$ м/с; $m = 1$ кг; $f = 0{,}4$.

Найти: s; Q.

Решение. Поскольку в горизонтальном направлении внешние силы не действуют, в проекции на горизонтальную ось закон сохранения импульса можно записать в виде

$$Mv = (M + m)u, \tag{1}$$

где v — скорость тележки; u — скорость тележки с бруском.

Согласно закону сохранения энергии, изменение кинетической энергии системы «тележка—брусок» равно работе сил трения скольжения

$$\frac{(M+m)u^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = -fmgs, \tag{2}$$

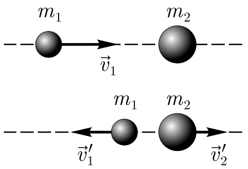
где s — расстояние, пройденное бруском по тележке. Из уравнений (1) и (2) найдем искомое расстояние

$$s = \frac{Mv^2}{2f(M+m)g}.$$

Количество теплоты, выделившееся при движении бруска по тележке, определяется работой сил трения скольжения [см. (2)]:

$$Q = fmgs.$$

Ответ: $s = 43{,}7$ см; $Q = 1{,}71$ Дж.



1.92. Шар, движущийся со скоростью v_1, налетает на покоящийся шар, масса которого в $n = 1{,}5$ раза больше первого. Определите отношение скорости v_1' первого шара и скорости v_2' второго шара после удара. Удар считать упругим, центральным и прямым.

Дано: $m_2 = nm_1$; $n = 1{,}5$; $v_2 = 0$.

Найти: $\dfrac{v_1'}{v_2'}$.

Решение. При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2', \tag{1}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1(v_1')^2}{2} + \frac{m_2(v_2')^2}{2}. \tag{2}$$

В случае прямого центрального удара векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой, соединяющей их центры. Предположив, что первый шар после удара отскакивает назад, уравнения (1) и (2) в проекции на ось x, направленную вдоль $\vec{v}_1'$, можно записать в виде

$$m_1v_1 = -m_1v_1' + nm_1v_2', \tag{3}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1(v_1')^2}{2} + \frac{nm_1(v_2')^2}{2} \tag{4}$$

(учли, что $m_2 = nm_1$; $v_2 = 0$).

Из уравнений (3) и (4) находим

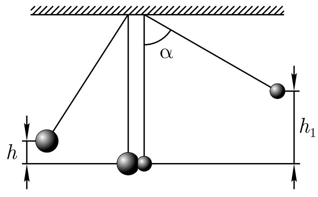
$$v_1' = \frac{n-1}{n+1}v_1, \qquad v_2' = \frac{2}{n+1}v_1.$$

Тогда искомое отношение

$$\frac{v_1'}{v_2'} = \frac{n-1}{2}.$$

Ответ: 0,25.

1.93. Два свинцовых шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены на нитях длиной $l = 70$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпустили (см. рисунок). Считая удар центральным и неупругим, определите: 1) высоту h, на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе.



Дано: $m_1 = 2$ кг; $m_2 = 3$ кг; $l = 70$ см (0,7 м); $\alpha = 60^\circ$.

Найти: 1) h; 2) ΔT.

Решение. Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью v, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v, \tag{1}$$

где v_1 и v_2 — скорости шаров до удара. Скорость v_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

(учли, что $h_1 = l(1-\cos\alpha)$).

Из выражений (1) и (2) при условии, что $v_2 = 0$, получим

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Из закона сохранения механической энергии имеем

$$(m_1 + m_2)\frac{v^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$

откуда искомая высота

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2m_1^2\, l \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{(m_1 + m_2)^2}$$

[учли формулу (3)].

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2}v^2, \tag{4}$$

или, подставив (2) в (4), получим

$$\Delta T = 2gl\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: 1) $h = 5{,}6$ см; 2) $\Delta T = 4{,}12$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

1.94. Автомобиль массой $m = 2{,}1$ т останавливается за время $t = 3{,}2$ с, пройдя расстояние $s = 28$ м. Определите среднюю силу $\langle F\rangle$ торможения автомобиля. [$\langle F\rangle = \dfrac{2ms}{t^2} = 11{,}5$ кН]

1.95. Тело массой $m = 2{,}7$ кг движется под действием некоторой силы согласно уравнению $s = Bt^3$, где $B = 1{,}2$ м/с^2. Определите работу силы: 1) за время $t = 2{,}5$ с после начала движения; 2) на отрезке пути $s_1 = 40$ м. [1) $A = 4{,}5mB^2t^4 = 683$ Дж; 2) $A = 4{,}5mB^2\left(\dfrac{s_1}{B}\right)^{4/3} = 1{,}88$ кДж]

1.96. Определите работу, совершаемую при подъеме груза массой $m = 100$ кг по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту на расстояние $s = 4$ м, если время подъема $t = 2$ с, а коэффициент трения груза о плоскость $f = 0{,}06$. [$A = ms[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + \dfrac{2s}{t^2}] = 2{,}96$ кДж]

1.97. Автомобиль массой $m = 1{,}5$ т спускается при выключенном двигателе с постоянной скоростью $v = 36$ км/ч по уклону горы (угол к горизонту $\alpha = 15°$). Определите, какой должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он смог преодолеть такой же подъем с той же скоростью. [$N = 2mgv\sin\alpha = 76{,}2$ кВт]

1.98. Санки скользят с наклонной плоскости (угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$) и далее движутся по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным f, определите высоту h наклонной плоскости, если санки проходят по горизонтальному участку до полной остановки расстояние s. [$h = \dfrac{fs}{1 - f\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$]

1.99. Сравните работу двигателя автомобиля при разгоне с места от $v_1 = 0$ до $v_2 = 20$ км/ч и от $v_1' = 20$ км/ч до $v_2' = 40$ км/ч, если время разгона и сила сопротивления в обоих случаях одинаковы. [$\dfrac{A'}{A} = \dfrac{v_2' + v_1'}{v_2 + v_1} = 3$]

1.100. Определите работу A, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой $m = 46$ кг вдоль наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 33°$ на высоту $h = 3{,}5$ м, если время подъема $t = 5{,}2$ с, коэффициент трения $f = 0{,}4$. [$A = \dfrac{mh}{\sin\alpha}\left(\dfrac{2h}{t^2\sin\alpha} + g\sin\alpha + fg\cos\alpha\right) = 2{,}7$ кДж]

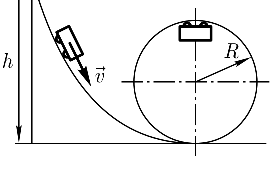
1.101. Тело, падая с некоторой высоты, в момент соприкосновения с Землей обладало импульсом $p = 60$ кг · м/с и кинетической энергией $T = 300$ Дж. Определите: 1) с какой высоты h падало тело; 2) массу m тела. [1) $h = \dfrac{2T^2}{gp^2} = 5{,}1$ м; 2) $m = \dfrac{p^2}{2T} = 6$ кг]

1.102. Определите работу сил сопротивления $A_{\text{сопр}}$, если тело, брошенное вертикально вверх с высоты $h = 9{,}1$ м со скоростью $v_1 = 9$ м/с, упало на Землю со скоростью $v_2 = 14$ м/с. Масса тела $m = 1{,}3$ кг, сопротивление воздуха не учитывать. [$A_{\text{сопр}} = \dfrac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} - mgh = -41{,}3$ Дж]

1.103. С наклонной плоскости высотой $h = 6$ м и длиной $s = 11$ м скользит груз. Определите расстояние l по горизонтали, которое груз пройдет до остановки, если коэффициент трения $f = 0{,}4$. [$l = \dfrac{h}{f} - s\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{s^2}} = 5{,}78$ м]

1.104. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v = 42$ м/с. Определите высоту h, на которой потенциальная энергия тела в $n = 1{,}5$ раза больше кинетической энергии. [$h = \dfrac{nv^2}{2(n+1)g} = 53{,}9$ м]

1.105. С башни высотой $H = 62$ м горизонтально со скоростью $v_0 = 12$ м/с бросили камень массой $m = 120$ г. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите кинетическую T и потенциальную Π энергии камня через время $t = 3$ с после броска. [$T = \dfrac{m}{2}(v_0^2 + g^2t^2) = 60{,}6$ Дж; $\Pi = mg\left(H - \dfrac{gt^2}{2}\right) = 21$ Дж]



1.106. Тележка соскальзывает вниз без трения с высоты h по желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом $R = 4$ м (см. рисунок). Определите наименьшую высоту $h_{\min}$ ската, при которой тележка не оторвется от петли в верхней точке траектории. [$h_{\min} = 10$ м]

1.107. С вершины идеально гладкой сферы радиусом $R = 90$ см соскальзывает небольшое тело. Определите расстояние h по вертикали от вершины сферы до точки, в которой тело оторвется от сферы. [$h = \dfrac{R}{3} = 30$ см]

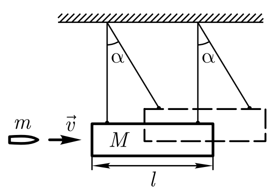
1.108. Определите работу A, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на $x = 15$ см, если известно, что сила пропорциональна деформации и под действием силы $F = 50$ Н пружина сжимается на $x_0 = 2{,}25$ см. [$A = \dfrac{Fx^2}{2x_0} = 25$ Дж]

1.109. Зависимость потенциальной энергии П тела в центральном силовом поле от расстояния r до центра поля задается функцией $\Pi(r) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$, где A и B — положительные постоянные. Определите расстояние r_0, соответствующее равновесному положению тела. [$r_0 = \dfrac{2A}{B}$]

1.110. Шар массой $m_1 = 2$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 4$ м/с, ударяется о неподвижный шар массой $m_2 = 3$ кг. Определите скорости шаров v_1' и v_2' после удара. Удар считать центральным, абсолютно упругим. [$v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -0{,}8$ м/с; $v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 3{,}2$ м/с]

1.111. Пуля массой $m = 15$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 164$ м/с, попадает в брусок массой $M = 1{,}5$ кг, висящий на нити длиной $l = 1$ м, и застревает в нем. Определите: 1) угол отклонения нити α; 2) количество теплоты Q, выделившейся при ударе. [1) $\alpha = \arccos\left(1 - \dfrac{m^2v^2}{2gl(m + M)^2}\right) = 30°$; 2) $Q = \dfrac{mv^2}{2} - (M + m)(1 - \cos\alpha)gl = 200$ Дж]

1.112. Пуля массой $m = 9$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 600$ м/с, пробивает висящий на нити брусок массой $M = 140$ г, вследствие чего скорость пули уменьшается в $n = 1{,}5$ раза. Определите количество теплоты Q, выделившееся при ударе. [$Q = \dfrac{mv^2}{2n^2M}[(n^2 - 1)M - m(n - 1)^2] = 888$ Дж]



1.113. Пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально, попадает в баллистический маятник длиной $l = 1$ м и массой $M = 1$ кг и застревает в нем (см. рисунок). Определите скорость пули, если маятник отклоняется на угол $\alpha = 30°$. [$v = \dfrac{m + M}{m}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 164$ м]

1.4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные законы и формулы

• Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2$$

[m — масса точки; r — ее расстояние до оси вращения].

• Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2; \qquad J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

[r_i — расстояние i-й материальной точки массой m_i до оси вращения].

Моменты инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными; m — масса тела)

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12} ml^2$
	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5} mR^2$

• Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2$$

[J_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J — момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m — масса тела].

• Кинетическая энергия вращения тела

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

[J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость].

• Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

[m — масса тела; v_C — скорость центра масс тела; J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела].

• Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

[$\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$].

• Модуль вектора момента силы

$$M = Fl$$

[l — плечо силы].

• Момент силы относительно неподвижной оси

$$\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z.$$

• Работа при вращении тела

$$\mathrm{d}A = M_z \mathrm{d}\varphi$$

[$\mathrm{d}\varphi$ — угол поворота тела; M_z — момент силы относительно неподвижной оси z].

• Момент импульса материальной точки A относительно неподвижной точки O

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

[$\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс материальной точки; $\vec{L}$ — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$].

• Модуль вектора момента импульса

$$L = rp\sin\alpha = mvr\sin\alpha = pl$$

[α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$; l — плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O].

• Момент импульса твердого тела относительно оси вращения

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = J_z \omega$$

[r_i — расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i v_i$ — импульс этой частицы; J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость].

• Основное уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}, \quad M_z = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z \varepsilon$$

[ε — угловое ускорение; J_z — момент инерции тела относительно оси z].

• Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы

$$\vec{L} = \text{const}, \ J_z\omega = \text{const}$$

[J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость].

• Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

[F — растягивающая (сжимающая) сила; S — площадь поперечного сечения].

• Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

[Δl — изменение длины тела при растяжении (сжатии); l — длина тела до деформации].

• Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

[Δd — изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d — диаметр стержня].

• Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon$$

[μ — коэффициент Пуассона].

• Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E\varepsilon$$

[E — модуль Юнга].

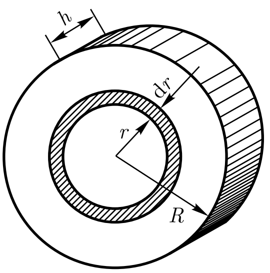
• Потенциальная энергия упругорастянутого (упругосжатого) стержня

$$\Pi = \frac{E\varepsilon^2}{2}V = \frac{\sigma\varepsilon}{2}V$$

[E — модуль Юнга; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ — относительное продольное растяжение (сжатие); V — объем тела].

Примеры решения задач

1.114. Определите момент инерции однородного сплошного цилиндра массой m и радиусом R относительно его геометрической оси.



Дано: m; R.

Найти: J.

Решение. Разобьем цилиндр высотой h на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины $\mathrm{d}r$ с внутренним радиусом r и внешним $r + \mathrm{d}r$ (см. рисунок).

Момент инерции каждого полого цилиндра

$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m \qquad (1)$$

($dr \ll r$, поэтому считаем, что расстояние всех точек цилиндра от геометрической оси равно r), масса элементарного цилиндра

$$\mathrm{d}m = 2\pi rh\rho\mathrm{d}r \qquad (2)$$

($2\pi rh\mathrm{d}r$ — объем элементарного цилиндра; ρ — плотность материала цилиндра).

После подстановки (2) в (1) найдем

$$\mathrm{d}J = 2\pi h\rho r^3\mathrm{d}r.$$

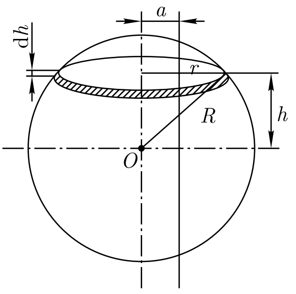
Тогда искомый момент инерции сплошного цилиндра

$$J = \int \mathrm{d}J = 2\pi h\rho\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi hR^4\rho = \frac{1}{2}mR^2$$

(учли, что πR^2h — объем цилиндра, а его масса $m = \pi R^2h\rho$).

Ответ: $J = \dfrac{1}{2}mR^2$.

1.115. Определите момент инерции J сплошного шара радиусом R и массой m относительно оси, отстоящей от центра шара на расстоянии $a = \dfrac{R}{3}$ и параллельной оси, проходящей через центр шара.



Дано: R; m; $a = \dfrac{R}{3}$.

Найти: J.

Решение. Момент инерции относительно рассматриваемой оси

$$J = J_C + ma^2, \qquad (1)$$

где J_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (центр шара); m — масса шара; a — расстояние между параллельными осями.

Выделим сплошной диск толщиной $\mathrm{d}h$ (см. рисунок), параллельный плоскости сечения. Момент инерции этого диска относительно оси, проходящей через центр масс,

$$\mathrm{d}J = \frac{r^2 \mathrm{d}m}{2},$$

где r — радиус диска; $\mathrm{d}m = \rho\pi r^2 \mathrm{d}h$ (ρ — плотность материала диска). Тогда

$$\mathrm{d}J = \frac{\rho\pi r^4}{2}\mathrm{d}h = \frac{\rho\pi(R^2 - h^2)^2}{2}\mathrm{d}h$$

[учли, что $r^2 = R^2 - h^2$ (см. рисунок)].

Момент инерции сплошного шара относительно оси, проходящей через центр масс,

$$J_C = 2\int \mathrm{d}J = 2\int_0^R \frac{\rho\pi(R^2 - h^2)^2}{2}\mathrm{d}h = \frac{8}{15}\rho\pi R^5. \qquad (2)$$

Учитывая, что плотность шара $\rho = \dfrac{m}{V}$, а объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, формула (2) запишется в виде

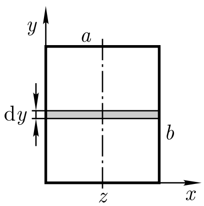
$$J_C = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (3)$$

Подставив формулу (3) в выражение (1) и учитывая, что $a = \dfrac{R}{3}$, найдем момент инерции шара относительно рассматриваемой оси:

$$J = \frac{2}{5}mR^2 + \frac{mR^2}{9} = \frac{23}{45}mR^2.$$

Ответ: $J = \dfrac{23}{45}mR^2$.

1.116. Определите момент инерции J однородной прямоугольной пластинки массой 500 г со сторонами $a = 20$ см и $b = 30$ см относительно оси, проходящей через геометрический центр пластинки и параллельно большей его стороне.



Дано: $a = 20$ см (0,2 м); $b = 30$ см (0,3 м); $m = 500$ г (0,5 кг).

Найти: J.

Решение. Согласно условию задачи, ось y проходит параллельно стороне b (см. рисунок). Мысленно выделим тонкую полоску шириной $\mathrm{d}y$. Эту полоску можно считать тонким стержнем длиной a. Тогда ее момент инерции

$$\mathrm{d}J = \frac{a^2}{12}\,\mathrm{d}m = \frac{\rho h a^3}{12}\,\mathrm{d}y$$

(учли, что масса полоски $\mathrm{d}m = \rho a h\,\mathrm{d}y$, где ρ — плотность пластинки; h — толщина пластинки).

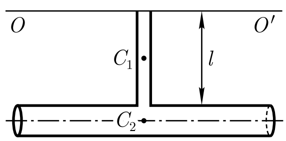
Искомый момент инерции пластинки

$$J = \int \mathrm{d}J = \int_0^b \frac{\rho\pi a^3}{12}\,\mathrm{d}y = \frac{\rho\pi a^3 b}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

(учли массу всей пластинки $m = \rho abh$).

Ответ: $J = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ кг $\cdot$ м^2.

1.117. К стержню длиной $l = 0{,}5$ м и массой $m = 0{,}3$ кг приварен цилиндр массой $M = 1{,}2$ кг и радиусом $R = 0{,}25$ м (см. рисунок). Определите момент инерции J системы относительно оси OO', проходящей через незакрепленный конец стержня параллельно образующей цилиндра.



Дано: $l = 0{,}5$ м; $m = 0{,}3$ кг; $M = 1{,}2$ кг; $R = 0{,}25$ м.

Найти: J.

Решение. Общий момент инерции J рассматриваемой системы относительно оси OO' равен сумме моментов инерции стержня J_1 и цилиндра J_2:

$$J = J_1 + J_2. \tag{1}$$

Для определения J_1 и J_2 следует воспользоваться теоремой Штейнера

$$J = J_C + ma^2, \tag{2}$$

где J_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J — момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m — масса тела.

Моменты инерции стержня и цилиндра, согласно формуле (2),

$$J_1 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}, \tag{3}$$

$$J_2 = \frac{MR^2}{2} + M(R+l)^2. \tag{4}$$

Подставив выражения (3) и (4) в формулу (1), найдем искомый момент инерции

$$J = \frac{ml^2}{3} + \frac{MR^2}{2} + M(R+l)^2.$$

Ответ: $J = 0{,}738$ кг $\cdot$ м^2.

1.118. Сравните кинетические энергии двух шаров с одинаковыми плотностями, катящихся по плоскости с одинаковой скоростью, если радиус второго шара в $n = 3$ раза меньше радиуса первого.

Дано: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $v_1 = v_2 = v$; $R_2 = \dfrac{R_1}{3}$.

Найти: $\dfrac{T_2}{T_1}$.

Решение. Кинетическая энергия шара, катящегося по плоскости без скольжения, складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

где m — масса шара; v — скорость шара, $v = \omega R$ (ω — угловая скорость шара относительно оси, проходящей через его центр масс; R — радиус шара); $J = \dfrac{2}{5}mR^2$ — момент инерции относительно той же оси.

Подставив эти формулы в выражение (1), получаем

$$T = \frac{7}{10}mv^2.$$

Учитывая, что масса шара $m = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$, искомое отношение

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3.$$

Ответ: $\dfrac{T_2}{T_1} = 0{,}037$.

1.119. Шар и сплошной цилиндр, изготовленные из одного и того же материала, одинаковой массы и одинакового радиуса, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определите, во сколько раз отличаются их кинетические энергии.

Дано: $m_1 = m_2 = m$; $R_1 = R_2 = R$; $v_1 = v_2 = v$.

Найти: $\dfrac{T_1}{T_2}$.

Решение. Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения, складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

где m — масса тела; v — скорость центра масс тела; J — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела.

Момент инерции шара $J_1 = \dfrac{2}{5}mR^2$; момент инерции сплошного цилиндра $J_2 = \dfrac{1}{2}mR^2$; линейная скорость связана с угловой соотношением $v = \omega R$ (учли, что $m_1 = m_2 = m$; $R_1 = R_2 = R$).

Выражение (1) с учетом записанных формул

для шара: $$T_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2\,\frac{v^2}{2R^2} = \frac{7}{10}mv^2; \qquad (2)$$

для цилиндра: $$T_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{2R^2} = \frac{3}{4}mv^2. \qquad (3)$$

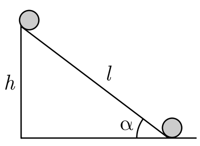
Поделив (2) на (3), найдем искомое отношение

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{14}{15},$$

т. е. кинетическая энергия шара меньше.

Ответ: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{14}{15}$.

1.120. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 37°$ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной диск. Пренебрегая трением, определите скорость v диска через $t = 4$ с после начала движения.



Дано: $\alpha = 37°$; $t = 4$ с.

Найти: v.

Решение. Согласно закону сохранения механической энергии, при скатывании диска его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

где m — масса диска; J — момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс; v — скорость центра масс диска; ω — угловая скорость относительно оси, проходящей через центр масс.

Учитывая, что $h = l\sin\alpha$ (см. рисунок); $v = \omega R$; момент инерции сплошного диска $J = \frac{mR^2}{2}$ (R — радиус диска), выражение (1) запишется в виде

$$mgl\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4}mv^2. \qquad (2)$$

Поскольку $l = \frac{at^2}{2}$ и $a = \frac{v}{t}$ ($v_0 = 0$), из выражения (2) найдем искомую скорость

$$v = \frac{2}{3}gt\sin\alpha.$$

Ответ: $v = 15{,}7$ м/с.

1.121. Колесо массой $m = 2{,}8$ кг раскручивается постоянной касательной силой $F = 15$ Н. Пренебрегая трением, определите момент времени t, когда кинетическая энергия вращающегося колеса $T_{\text{вр}} = 3$ кДж.

Дано: $m = 2{,}8$ кг; $F = 15$ Н; $T_{\text{вр}} = 3$ кДж ($3 \cdot 10^3$ Дж).

Найти: t.

Решение. Кинетическая энергия вращающегося колеса

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

где J — момент инерции колеса относительно оси; ω — угловая скорость.

Момент инерции колеса найдем из выражения для основного закона динамики вращательного движения

$$J\varepsilon = FR,$$

где ε — угловое ускорение; R — радиус колеса (в нашем случае — плечо силы), откуда

$$J = \frac{FR}{\varepsilon}. \qquad (2)$$

Учитывая формулу (2), соотношения $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ и $J = mR^2$, выражение (1) запишется в виде

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2} = \frac{F^2 t^2}{2m},$$

откуда искомое значение времени

$$t = \frac{\sqrt{2mT_{\text{вр}}}}{F}.$$

Ответ: $t = 8{,}64$ с.

1.122. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 20$ см намотана невесомая нить, к концу которой подвешен груз массой $m = 2$ кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 1$ м/с^2. Определите: 1) момент инерции J вала; 2) массу m_1 вала.

Дано: $R = 20$ см (0,2 м); $m = 2$ кг; $a = 1$ м/с^2.

Найти: 1) J; 2) m_1.

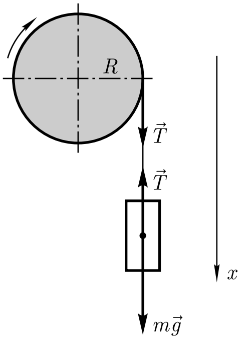
Решение. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения, вращающий момент, приложенный к валу,

$$M = J\varepsilon, \qquad (1)$$

где J — момент инерции вала относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа; $\varepsilon = \frac{a}{R}$ — угловое ускорение.

С другой стороны, вращающий момент, действующий на вал, равен произведению силы натяжения T нити на радиус R вала:

$$M = TR. \qquad (2)$$



Приравняв выражения (1) и (2) и учитывая формулу для ε, найдем

$$J = \frac{TR^2}{a}. \qquad (3)$$

Направив ось x вертикально вниз (см. рисунок), запишем уравнение движения (второй закон Ньютона) на эту ось:

$$ma = mg - T, \qquad (4)$$

где T — сила натяжения нити.

Из уравнения (4) сила натяжения нити

$$T = m(g - a).$$

Подставив это выражение в формулу (3), найдем искомый момент инерции вала:

$$J = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right).$$

Учитывая, что момент инерции сплошного цилиндрического вала $J = \frac{m_1R^2}{2}$, искомая масса вала

$$m_1 = \frac{2J}{R^2}.$$

Ответ: $J = 0{,}7$ кг $\cdot$ м^2; $m_1 = 35$ кг.

1.123. Кинетическая энергия вращающегося с частотой $n_1 = 3$ с$^{-1}$ маховика равна 8,4 кДж. Во сколько раз увеличится частота вращения маховика за время $t = 5$ с, если на маховик начинает действовать ускоряющий момент силы $M = 100$ Н $\cdot$ м?

Дано: $T_{\text{вр}} = 8{,}4$ кДж ($8{,}4 \cdot 10^3$ Дж); $n_1 = 3$ с$^{-1}$; $M = 100$ Н $\cdot$ м; $t = 5$ с.

Найти: $\frac{n_2}{n_1}$.

Решение. Кинематическое уравнение для угловой скорости вращательного движения имеет вид

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t,$$

или

$$2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \varepsilon t, \qquad (1)$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости, $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_2 = 2\pi n_2$; ε — угловое ускорение.

Угловое ускорение, согласно основному уравнению динамики вращательного движения,

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \qquad (2)$$

где M — момент силы относительно оси; J — момент инерции маховика относительно той же оси.

Кинетическая энергия вращающегося маховика до начала действия ускоряющего момента силы $T_{\text{вр}} = \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 n_1^2 J$ (учли, что $\omega_1 = 2\pi n_1$), откуда момент инерции

$$J = \frac{T_{\text{вр}}}{2\pi^2 n_1^2}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), найдем

$$\varepsilon = \frac{2\pi^2 n_1^2 M}{T_{\text{вр}}}. \qquad (4)$$

Запишем формулу (1) с учетом (4)

$$2\pi n_2 = 2\pi n_1 + \frac{2\pi^2 n_1^2 M t}{T_{\text{вр}}},$$

откуда искомое отношение частот

$$\frac{n_2}{n_1} = 1 + \frac{\pi n_1 M t}{T_{\text{вр}}}.$$

Ответ: $\dfrac{n_2}{n_1} = 1{,}56.$

1.124. Через неподвижный блок, укрепленный на краю стола, перекинута нить, к которой привязаны три груза массами $m_1 = 800$ г, $m_2 = 700$ г, $m_3 = 200$ г. Масса блока $M = 500$ г, радиус $R = 0{,}38$ м. Считая нить невесомой и пренебрегая трением, определите ускорение грузов a, а также расстояние s, которое груз m_3 пройдет от начала движения до того момента, когда кинетическая энергия вращения блока будет $T_{\text{вр}} = 1{,}1$ Дж.

Дано: $m_1 = 800$ г (0,8 кг); $m_2 = 700$ г (0,7 кг); $m_3 = 200$ г (0,2 кг); $M = 500$ г (0,5 кг); $R = 0{,}38$ м; $T_{\text{вр}} = 1{,}1$ Дж.

Найти: a; s.

Решение. Выбрав направления осей x и y (см. рисунок), запишем уравнения движения (второй закон Ньютона) для грузов в проекциях на эти оси:

$$m_1 a = T_1, \tag{1}$$

$$m_2 a = T_2 - T_1', \tag{2}$$

$$m_3 a = m_3 g - T_3, \tag{3}$$

где T_1, T_2, T_1', T_3 — соответствующие силы натяжения нити (см. рисунок).

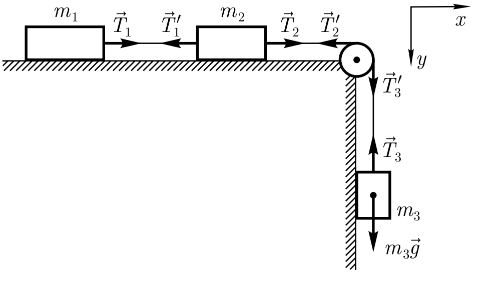
Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент, приложенный к блоку,

$$M_z = J\varepsilon, \tag{4}$$

где J — момент инерции блока относительно оси z, перпендикулярной плоскости чертежа; ε — угловое ускорение. С другой стороны,

$$M_z = (T_3' - T_2')R, \tag{5}$$

где T_3' и T_2' — силы, приложенные к ободу блока; R — плечо силы, равное радиусу блока. Приравняв выражения (4) и (5), получаем



$$J\varepsilon = (T_3' - T_2')R. \tag{6}$$

Учитывая, что $J = \dfrac{MR^2}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, уравнение (6) запишется в виде

$$\frac{Ma}{2} = T_3' - T_2'. \tag{7}$$

По третьему закону Ньютона и поскольку нити невесомы, $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$, $T_3' = T_3$. Учитывая эти равенства, из уравнений (1—3) и (7) искомое ускорение

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3 + \dfrac{M}{2}}.$$

Кинетическая энергия вращающегося блока

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где ω — угловая скорость.

Учитывая, что $\omega = \varepsilon t$, $J = \dfrac{MR^2}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, получаем

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2} = \frac{Ma^2 t^2}{4},$$

откуда время движения

$$t = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{T_{\text{вр}}}{M}}.$$

Пройденное за это время искомое расстояние

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{2T_{\text{вр}}}{Ma}.$$

Ответ: $a = 1{,}01$ м/с^2; $s = 4{,}36$ м.

1.125. Маховик в виде однородного сплошного диска радиусом $R = 35$ см и массой $m = 2{,}1$ кг вращается с частотой $n = 360$ мин$^{-1}$. После приложения к диску постоянной касательной силы торможения он останавливается за время $t = 2$ мин. Определите работу A силы торможения; силу торможения F.

Дано: $R = 35$ см (0,35 м); $m = 2{,}1$ кг; $n = 360$ мин$^{-1}$ (6 с$^{-1}$); $t = 2$ мин (120 с).

Найти: A; F.

Решение. В результате торможения диск останавливается, поэтому работа силы торможения

$$A = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где $J = \dfrac{mR^2}{2}$ — момент инерции диска относительно оси вращения; $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость. Подставив эти выражения в формулу (1), найдем работу силы торможения

$$A = \pi^2 n^2 m r^2.$$

Момент силы торможения

$$M = FR, \tag{2}$$

где R — радиус диска (в нашем случае плечо силы). С другой стороны, согласно основному закону динамики вращательного движения,

$$M = J\varepsilon, \tag{3}$$

где угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi n}{t}$.

Приравняв выражения (2) и (3), найдем искомую силу

$$F = \frac{\pi m n R}{t}.$$

Ответ: $A = 91{,}3$ Дж; $F = 0{,}115$ Н.

1.126. Стержень длиной $l = 0{,}7$ м и массой $m = 1{,}8$ кг вращается вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов, при этом угловая скорость ω стержня изменяется по закону $\omega = At^2 + Bt$ ($A = 2$ рад/с^3, $B = 3$ рад/с^2). Определите работу вращения A, произведенную над стержнем в течение времени $t = 5$ с, а также момент сил M, действующий в конце пятой секунды.

Дано: $l = 0{,}7$ м; $m = 1{,}8$ кг; $\omega = At^2 + Bt$; $A = 2$ рад/с^3; $B = 3$ рад/с^2; $t = 5$ с.

Найти: A; M.

Решение. Работа сил, действующих на стержень, расходуется на сообщение стержню кинетической энергии

$$A = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где $J = \dfrac{ml^2}{3}$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов. Учитывая условие $\omega = At^2 + Bt$, формула (1) запишется в виде

$$A = \frac{ml^2 t^2 (At + B)^2}{6}.$$

Согласно основному закону вращательного движения твердого тела,

$$M = J\varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение. Поскольку $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2At + B$, искомый момент сил

$$M = \frac{ml^2(2At + B)}{3}.$$

Ответ: $A = 621$ Дж; $M = 6{,}76$ Н · м.

1.127. Вентилятор вращается с частотой $n = 420$ мин$^{-1}$. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и остановился, сделав $N = 100$ оборотов. Определите работу сил торможения A; момент сил торможения M. Момент инерции вентилятора $J = 0{,}4$ кг · м^2.

Дано: $n = 420$ мин$^{-1}$ (7 с$^{-1}$); $N = 100$; $J = 0{,}4$ кг · м^2.

Найти: A; M.

Решение. Работа сил торможения равна изменению кинетической энергии вентилятора

$$A = T_{\text{вр}2} - T_{\text{вр}1} = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где J — момент инерции вентилятора относительно оси; ω — его начальная угловая скорость (учли, что вентилятор остановился). Угловая скорость

$$\omega = 2\pi n, \tag{2}$$

где n — частота вращения вентилятора.

Подставив формулу (2) в выражение (1), получаем искомую работу сил торможения:

$$A = 2\pi^2 n^2 J.$$

Момент M сил торможения определим из соотношения

$$A = M\varphi$$

($\varphi = 2\pi N$ — угол поворота до остановки вентилятора), откуда искомый момент сил

$$M = \frac{A}{2\pi N}.$$

Ответ: $A = 386$ Дж; $M = 0{,}615$ Н · м.

1.128. При раскручивании диска массой $m = 20$ кг и радиусом $R = 0{,}6$ м электродвигателем, обладающим КПД $\eta = 0{,}4$, была затрачена энергия $E = 10$ кДж. Определите момент импульса L диска.

Дано: $m = 20$ кг; $R = 0{,}6$ м; $\eta = 0{,}4$; $E = 10$ кДж (10^4 Дж).

Найти: L.

Решение. Согласно определению, момент импульса диска

$$L = J\omega, \tag{1}$$

где J — момент инерции диска относительно оси z; ω — его угловая скорость. Из условия задачи следует, что ось z совпадает с осью симметрии диска, проходящей через его центр.

Полезная работа по раскручиванию диска

$$A = \eta E$$

расходуется на сообщение диску кинетической энергии

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Тогда можно записать

$$\eta E = \frac{J\omega^2}{2},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{2\eta E}{J}}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), искомый момент импульса диска

$$L = R\sqrt{\eta m E}$$

(учли, что $J = \dfrac{mR^2}{2}$).

Ответ: $L = 170$ кг · м^2/с.

1.129. На пружинных весах лежит гиря массой $m = 1{,}2$ кг, которая сжимает пружину на $x_1 = 3$ см. Определите, на какую величину Δx уменьшится длина пружины, если совершить дополнительную работу по ее сжатию $A = 1{,}4$ Дж.

Дано: $m = 1{,}2$ кг; $x_1 = 3$ см (0,03 м); $A = 1{,}4$ Дж.

Найти: Δx.

Решение. Гиря с пружиной покоятся, поэтому второй закон Ньютона в проекции на ось x, направленную вертикально вниз, запишется в виде

$$F_x + mg = 0, \tag{1}$$

где сила упругости $F_x = -k\Delta l$ (k — жесткость пружины); mg — сила тяжести. Подставив эти соотношения в (1), получим, что жесткость пружины

$$k = \frac{mg}{\Delta l}. \tag{2}$$

Работа по дополнительному сжатию пружины определяется как разность потенциальных энергий пружины в конечном и начальном положениях:

$$A = \Pi_2 - \Pi_1 = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}, \tag{3}$$

где x_1 — первоначальное сжатие пружины; x_2 — конечное сжатие пружины.

Из выражения (3)

$$x_2^2 = \frac{2A + kx_1^2}{k}. \tag{4}$$

Учитывая формулу (2) и то, что $x_2 = x_1 + \Delta x$, получаем

$$(x_1 + \Delta x)^2 = \frac{(2A + mgx_1)x_1}{mg},$$

откуда искомое

$$\Delta x = -x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + \frac{2A}{mg}x_1}$$

(физический смысл имеют только положительные корни).

Ответ: $\Delta x = 5{,}96$ см.

1.130. Человек сидит в центре скамьи Жуковского, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 30$ мин$^{-1}$. В вытянутых в стороны руках он держит по гире массой $m = 5$ кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения $l_1 = 60$ см. Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения $J_0 = 2$ кг$\cdot$м^2. Определите: 1) частоту n_2 вращения скамьи с человеком; 2) какую работу A совершит человек, если он прижмет гантели к себе так, что расстояние от каждой гири до оси станет равным $l_2 = 20$ см.

Дано: $n_1 = 30$ мин$^{-1}$ (0,5 с$^{-1}$); $m = 5$ кг; $l_1 = 60$ см (0,6 м); $J_0 = 2$ кг$\cdot$м^2; $l_2 =$ $= 20$ см (0,2 м).

Найти: 1) n_2; 2) A.

Решение. По условию задачи момент внешних сил относительно вертикальной оси равен нулю, поэтому момент импульса этой системы сохраняется, т. е.

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \tag{1}$$

где $J_1 = J_0 + 2ml_1^2$ и $J_2 = J_0 + 2ml_2^2$ — соответственно момент инерции всей системы до и после сближения; m — масса каждой гири. Угловая скорость $\omega = 2\pi n$. Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим искомую частоту вращения:

$$n_2 = \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2}\,n_1.$$

Работа, совершенная человеком, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Выразив из уравнения (1) $\omega_2 = \dfrac{J_1\omega_1}{J_2}$, получим

$$A = \frac{J_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) = \frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}(J_1 - J_2) = \frac{2J_1\pi^2 n_1^2}{J_2}(J_1 - J_2).$$

Ответ: 1) $n_2 = 70$ мин$^{-1}$; 2) $A = 36{,}8$ Дж.

1.131. Человек массой $m = 60$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой $M = 120$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 12$ мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определите, с какой частотой n_2 будет тогда вращаться платформа.

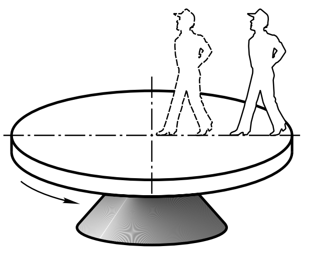
Дано: $m = 60$ кг; $M = 120$ кг; $n_1 = 12$ мин$^{-1}$ (0,2 с$^{-1}$).

Найти: n_2.

Решение. Согласно условию задачи, платформа с человеком вращается по инерции, т. е. результирующий момент всех внешних сил, приложенных к вращающейся системе, равен нулю. Поэтому для системы «платформа—человек» выполняется закон сохранения момента импульса

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \tag{1}$$

где $J_1 = \dfrac{MR^2}{2} + mR^2$ — момент инерции системы, когда человек стоит на краю платформы (учли, что момент инерции платформы равен $\dfrac{MR^2}{2}$ (R — радиус платформы), момент инерции человека на краю платформы равен mR^2); $J_2 = \dfrac{MR^2}{2}$ — момент инерции системы, когда человек стоит в центре платформы (учли, что момент инерции человека, стоящего в центре платформы, равен нулю). Угловая скорость $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_2 = 2\pi n_2$.



Подставив записанные выражения в формулу (1), получаем

$$2\pi n_1\left(\frac{MR^2}{2}+mR^2\right)=2\pi n_2\,\frac{MR^2}{2},$$

откуда искомая частота вращения

$$n_2=\frac{M+2m}{M}\,n_1.$$

Ответ: $n_2 = 24$ мин$^{-1}$.

1.132. Медная проволока длиной $l = 80$ см и сечением $S = 8$ мм^2 закреплена одним концом в подвесном устройстве, а к ее другому концу прикреплен груз массой $m = 400$ г. Вытянутую проволоку с грузом, отклонив до высоты подвеса, отпускают. Считая проволоку невесомой, определить ее удлинение в нижней точке траектории движения груза. Модуль Юнга для меди $E = 118$ ГПа.

Дано: $l = 80$ см (0,8 м); $S = 8$ мм^2 ($8\cdot10^{-6}$ м^2); $m = 400$ г (0,4 кг); $E = 118$ ГПа ($1{,}18\cdot10^{11}$ Па).

Найти: Δl.

Решение. Из закона Гука для продольного растяжения $\sigma = E\varepsilon$, где $\sigma = \dfrac{F}{S}$ — напряжение при упругой деформации; E — модуль Юнга; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ — относительное продольное растяжение, получаем

$$\Delta l=\frac{Fl}{ES},\tag{1}$$

где F — сила, растягивающая проволоку в нижней точке траектории груза. Она численно равна сумме силы тяжести груза и центростремительной силы, действующей на груз:

$$F=mg+\frac{mv^2}{l+\Delta l},\tag{2}$$

где v — скорость груза.

Согласно закону сохранения механической энергии,

$$\frac{mv^2}{2}=mg(l+\Delta l).$$

Подставив найденное отсюда выражение mv^2 в формулу (2), получим, что $F = 3mg$. Тогда из выражения (1) следует, что искомое удлинение проволоки

$$\Delta l=\frac{3mgl}{ES}.$$

Ответ: $\Delta l = 9{,}98$ мкм.

1.133. Максимальный груз, который выдерживает алюминиевая проволока диаметром $d = 2$ мм, равен 8 кг. Определите: 1) предел упругости $\sigma_{\text{пр}}$ этой проволоки; 2) относительное удлинение ε; 3) относительное поперечное сжатие ε'. Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}34$, модуль Юнга $E = 69\cdot10^9$ Па.

Дано: $d = 2$ мм ($2\cdot10^{-3}$ м); $m = 8$ кг; $\mu = 0{,}34$; $E = 69\cdot10^9$ Па.

Найти: 1) $\sigma_{\text{пр}}$; 2) ε; 3) ε'.

Решение. Предельное напряжение при упругой деформации

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{S}, \tag{1}$$

где $F_{\text{пр}} = mg$ — предельная сила, при которой еще действует закон Гука; $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения проволоки. Подставив эти значения в формулу (1), найдем искомый предел упругости

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

Согласно закону Гука, относительное удлинение и напряжение пропорциональны друг другу, поэтому

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{E},$$

где E — модуль Юнга.

Относительное поперечное сжатие

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Ответ: $\sigma_{\text{пр}} = 25$ МПа; $\varepsilon = 3{,}62 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon' = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.134. Выведите выражение для момента инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку, отстоящую от конца стержня на одну четверть его длины. [$J = \dfrac{7ml^2}{48}$]

1.135. Определите момент инерции J шара массой $m = 400$ г и радиусом $R = 7$ см относительно оси, являющейся касательной к его поверхности. [$J = \dfrac{7}{5}mR^2 = 2{,}74 \cdot 10^{-3}$ кг $\cdot$ м^2]

1.136. Определите момент инерции системы, состоящей из тонкого однородного стержня массой $m = 100$ г и длиной $l = 80$ см и двух шаров массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 300$ г, если первый шар закреплен на середине стержня, а второй — на его конце. Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его свободный конец. Шары считать материальными точками. [$J = \left(\dfrac{m}{3} + \dfrac{m_1}{4} + m_2\right)l^2 = 0{,}277$ кг $\cdot$ м^2]

1.137. Кинетическая энергия вращательного движения $T_{\text{вр}}$ шара, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 20 Дж. Определите кинетическую энергию $T_{\text{п}}$ поступательного движения шара и его полную кинетическую энергию T. [$T_{\text{п}} = 2{,}5\,T_{\text{вр}} = 50$ Дж; $T = 3{,}5\,T_{\text{вр}} = 70$ Дж]

1.138. Стержень длиной $l = 1{,}2$ м с закрепленным на конце шаром радиусом $R = 11$ см совершает вращательное движение с частотой $n = 120$ мин$^{-1}$ вокруг перпендикулярной стержню оси, проходящей через его свободный конец. Определите кинетическую энергию вращательного движения $T_{вр}$ шара, если его масса $m = 0{,}5$ кг. [$T_{вр} = 2\pi^2 mn^2\left(\frac{7}{5}R^2 + 2lR + l^2\right) = 67{,}9$ Дж]

1.139. Биллиардный шар массой $m = 250$ г, катящийся без скольжения, ударяется о борт и отскакивает от него. Скорость шара до удара $v = 0{,}8$ м/с, после удара $v' = 0{,}3$ м/с. Определите количество теплоты Q, выделившееся при ударе. [$Q = \frac{7}{10}m(v^2 - (v')^2) = 96{,}3$ мДж]

1.140. Вентилятор, момент инерции J которого равен 8 кг · м^2, вращается с частотой $n = 300$ мин$^{-1}$. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 30$ оборотов, остановился. Определите: 1) время t, за которое вентилятор остановился; 2) момент M сил торможения; 3) работу A сил торможения. [1) $t = \frac{2N}{n} = 12$ с; 2) $M = \frac{J\pi n^2}{N} = 20{,}9$ Н · м; 3) $A = 2\pi^2 Jn^2 = 3{,}94$ кДж]

1.141. Сплошной однородный цилиндр скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определите линейное ускорение a диска. [$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$]

1.142. Определите, за какое время t скатится шар без скольжения с наклонной плоскости длиной $l = 8{,}1$ м и углом наклона к горизонту $\alpha = 7°$. Начальную скорость шара принять равной нулю. [$t = \sqrt{\frac{14l}{5g\sin\alpha}} = 4{,}36$ с]

1.143. На колесо радиусом $R = 0{,}4$ м действует вращающий момент $M = 0{,}7$ Н · м. Чтобы колесо не вращалось, на каждую из двух тормозных колодок должна действовать сила $F = 3$ Н. Определите коэффициент трения f колодок о колесо. [$f = 0{,}292$]

1.144. На обод массой $M = 2{,}1$ кг намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 0{,}3$ кг. Груз, разматывая нить, опускается на расстояние $h = 3$ м. Определите: 1) ускорение a груза; 2) время t его движения; 3) кинетическую энергию $T_{вр}$ вала в конце движения. [1) $a = \frac{m}{m+M}g = 1{,}23$ м/с^2; 2) $t = \sqrt{\frac{2(m+M)h}{mg}} = 2{,}21$ с; 3) $T_{вр} = \frac{mMgh}{m+M} = 7{,}73$ Дж]

1.145. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и держит в руках стержень массой $m = 9$ кг за середину в горизонтальном положении. После поворота стержня в вертикальное положение скамья изменяет частоту вращения с $n_1 = 40$ мин$^{-1}$ до $n_2 = 50$ мин$^{-1}$. Определите длину l стержня, если суммарный момент инерции человека и скамьи $J = 10$ кг · м^2. [$l = 2\sqrt{\frac{3(n_2 - n_1)J}{n_1 m}} = 1{,}83$ м]

1.146. Круглая платформа в виде однородного сплошного диска, в центре которой стоит человек массой $m = 72$ кг, вращается по инерции с частотой $n_1 = 25$ мин$^{-1}$. При переходе человека на край платформы частота ее вращения стала равной $n_2 = 10$ мин$^{-1}$. Определите массу M платформы. [$M = 2m\frac{n_2}{n_1 - n_2} = 96$ кг]

1.147. Проволоку длиной $l = 3{,}2$ м и площадью поперечного сечения $S = 1$ см^2 растянули на $\Delta l = 6{,}4$ мм, вследствие чего потенциальная энергия упругой деформации проволоки $\Pi = 84$ Дж. Определите модуль Юнга E для материала проволоки. [$E = \dfrac{2l\Pi}{(\Delta l)^2 S} = 1{,}31 \cdot 10^{11}$ Па]

1.148. Определите суммарный коэффициент жесткости двух одинаковых пружин, соединенных параллельно, если под действием силы $F = 3$ кН пружины приобретают потенциальную энергию $\Pi = 600$ Дж. [$k_1 + k_2 = \dfrac{F^2}{2\Pi} = 7{,}5$ кН/м]

1.149. Под действием груза медная проволока длиной $l = 0{,}6$ м и сечением $S = 1{,}8$ мм^2 удлинилась на $\Delta l = 1$ мм. Определите: 1) массу груза m; 2) потенциальную энергию растяжения Π; 3) нормальное напряжение σ при упругой деформации. Модуль Юнга для меди $E = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ Па. [1) $m = \dfrac{ES}{g}\dfrac{\Delta l}{l} = 39{,}8$ кг; 2) $\Pi = \dfrac{ES(\Delta l)^2}{2l} = 0{,}195$ Дж; 3) $\sigma = E\dfrac{\Delta l}{l} = 2{,}17 \cdot 10^8$ Па]

1.5. ТЯГОТЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Основные законы и формулы

• Закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

[F — сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух материальных точек массами m_1 и m_2; r — расстояние между точками; G — гравитационная постоянная].

• Сила тяжести

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

[m — масса тела; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения].

• Напряженность поля тяготения

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

[$\vec{F}$ — сила тяготения, действующая на материальную точку массой m, помещенную в данную точку поля].

• Работа в поле тяготения по перемещению тела

$$A = m\left(\frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1}\right)$$

[m — масса тела; G — гравитационная постоянная; M — масса Земли (планеты); R_1 и R_2 — расстояния от центра Земли, определяющие начальное и конечное положения тел].

• Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

[G — гравитационная постоянная].

• Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{\Pi}{m}$$

[Π — потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля].

• Потенциал поля тяготения, создаваемый телом массой M,

$$\varphi = -\frac{GM}{R}$$

[R — расстояние от центра тела до рассматриваемой точки].

• Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

$$\vec{g} = -\operatorname{grad}\varphi \text{ или } \operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

[$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$ — градиент скаляра φ. Знак «$-$» в формуле показывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала].

• Первая космическая скорость

$$v_1 = \sqrt{gR_0} = 7{,}9 \text{ км/с}$$

[g — ускорение свободного падения; R_0 — радиус Земли].

• Вторая космическая скорость

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11{,}2 \text{ км/с}$$

[g — ускорение свободного падения; R_0 — радиус Земли].

• Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}},$$

[где $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ — соответственно ускорение тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета; $\vec{F}_{\text{ин}}$ — силы инерции].

• Силы инерции

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{и}} + \vec{F}_{\text{ц}} + \vec{F}_{\text{К}}$$

[$\vec{F}_{\text{и}}$ — силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением a_0: $F_{\text{и}} = -ma_0$; $\vec{F}_{\text{ц}}$ — центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R): $F_{\text{ц}} = -m\omega^2 R$; $\vec{F}_{\text{К}}$ — сила Кориолиса (силы инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью v' во вращающейся системе отсчета): $\vec{F}_{\text{К}} = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}\,]$].

Примеры решения задач

1.150. Принимая, что масса Земли неизвестна, определите высоту h, на которой ускорение свободного падения g_1 будет в $n = 3$ раза меньше, чем ускорение свободного падения у поверхности Земли g. Радиус Земли $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Дано: $g_1 = \dfrac{g}{n}$; $n = 3$; $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Найти: h.

Решение. Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного взаимодействия равны

$$mg_1 = \frac{GmM}{(R_0 + h)^2}, \qquad (1)$$

где M — масса Земли; m — масса тела; R_0 — радиус Земли; h — высота орбиты над поверхностью Земли; G — гравитационная постоянная.

Учитывая условие задачи, выражение (1) запишется в виде $\dfrac{g}{n} = \dfrac{GM}{(R_0 + h)^2}$, откуда

$$h = \sqrt{\frac{nGM}{g}} - R_0. \qquad (2)$$

Для тела, находящегося у поверхности Земли, $mg = G\dfrac{mM}{R_0^2}$, откуда $GM = gR_0^2$. Подставив это значение в формулу (2), найдем искомую высоту

$$h = R_0(\sqrt{n} - 1).$$

Ответ: $h = 4{,}66$ Мм.

1.151. Определите среднюю плотность $\langle\rho\rangle$ грунта Луны, если известно, что ускорение свободного падения у поверхности Луны $g = 1{,}7$ м/с^2, а ее радиус $R = 1{,}74$ Мм.

Дано: $g = 1{,}7$ м/с^2; $R = 1{,}74$ Мм ($1{,}74 \cdot 10^6$ м).

Найти: $\langle\rho\rangle$.

Решение. Средняя плотность грунта Луны

$$\langle\rho\rangle = \frac{M}{V}, \qquad (1)$$

где M — масса Луны; V — ее объем.

Для тела, находящегося у поверхности Луны, $mg = G\dfrac{mM}{R^2}$ (g — ускорение свободного падения на Луне), откуда масса Луны

$$M = \frac{gR^2}{G}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, найдем искомую среднюю плотность Луны

$$\langle\rho\rangle = \frac{3g}{4\pi GR}.$$

Ответ: $\langle\rho\rangle = 3{,}5$ г/см^3.

1.152. Радиус некоторой планеты R' в $n = 3$ раза больше радиуса Земли R_0. Определите продолжительность суток T' на планете, если тела на ее экваторе невесомы. Ускорение свободного падения g у поверхности планеты в $k = 1{,}2$ раза больше ускорения свободного падения у поверхности Земли. Период суточного вращения Земли $T = 24$ ч.

Дано: $R' = nR_0$; $P_э = 0$; $g' = kg$; $n = 3$; $k = 1{,}2$; $T = 24$ ч.

Найти: T'.

Решение. Период суточного вращения планеты

$$T' = \frac{2\pi R'}{v}, \tag{1}$$

где v — скорость вращения тела на экваторе планеты.

Второй закон Ньютона для тела массой m на экваторе планеты в проекции на ось, направленную к центру планеты,

$$\frac{mv^2}{R'} = mg' - P_э,$$

где $P_э$ — вес тела на экваторе планеты. Учитывая условие задачи $P_э = 0$, можем записать

$$\frac{mv^2}{R'} = mg',$$

откуда $v = \sqrt{g'R'}$. Подставив это значение в формулу (1), найдем

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{R'}{g'}}. \tag{2}$$

Аналогично для периода суточного вращения Земли

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g}}. \tag{3}$$

Учитывая данные задачи, из уравнений (2) и (3) найдем искомую продолжительность суток на планете:

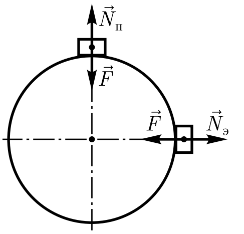
$$T' = \sqrt{\frac{n}{k}}\,T.$$

Ответ: $T' = 37{,}9$ ч.

1.153. Радиус некоторой планеты $R = 3800$ км, продолжительность суток $T = 40$ ч. Определите массу M этой планеты, если на полюсе тела весят в $n = 1{,}2$ раза больше, чем на экваторе.

Дано: $R = 3800$ км $(3{,}8 \cdot 10^6$ м$)$; $T = 40$ ч $(1{,}44 \cdot 10^5$ с$)$; $P_п = nP_э$; $n = 1{,}2$.

Найти: M.



Решение. На тело массой m со стороны планеты действуют сила притяжения $\vec{F}$, направленная к центру планеты, и сила реакции опоры $\vec{N}$ (см. рисунок). Уравнения второго закона Ньютона для тела в проекции на оси, направленные к центру планеты, будут иметь вид

$$\text{на полюсе} \quad F - N_{\text{п}} = 0;$$

$$\text{на экваторе} \quad F - N_{\text{э}} = \frac{mv^2}{R},$$

где v — скорость точки поверхности при суточном вращении планеты.

Согласно третьему закону Ньютона, вес тела P равен силе реакции опоры, поэтому из записанных выражений:

$$P_{\text{п}} = F, \tag{1}$$

$$P_{\text{э}} = F - \frac{mv^2}{R}. \tag{2}$$

Учитывая, что $F = G\dfrac{mM}{R^2}$; $v = \dfrac{2\pi R}{T}$, и по условию задачи $P_{\text{п}} = nP_{\text{э}}$, согласно выражениям (1) и (2), можем записать

$$n\left[G\frac{mM}{R^2} - \frac{m(2\pi R)^2}{T^2 R}\right] = G\frac{mM}{R^2},$$

откуда искомая масса планеты

$$M = \frac{4n\pi^2 R^3}{(n-1)GT^2}.$$

Ответ: $M = 9{,}39 \cdot 10^{21}$ кг.

1.154. Искусственный спутник вращается вокруг Земли по окружности на высоте $h = 2$ Мм. Считая массу Земли неизвестной, определите период T обращения спутника, если радиус Земли $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Дано: $h = 2$ Мм ($2 \cdot 10^6$ м); $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Найти: T.

Решение. Период обращения спутника

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \tag{1}$$

где r — радиус орбиты; v — скорость спутника на орбите.

На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом r, действует сила тяготения Земли, сообщая ему нормальное ускорение $\dfrac{v^2}{r}$. По второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}, \tag{2}$$

где G — гравитационная постоянная; m — масса спутника; M — масса Земли; $r = R_0 + h$ — радиус орбиты спутника. Из выражения (2) $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$. Подставив эту формулу в выражение (1), получаем

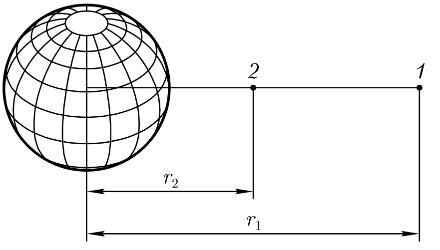
$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \tag{3}$$

Для тела, находящегося у поверхности Земли, $mg = G\dfrac{mM}{R_0^2}$ (g — ускорение свободного падения), откуда $GM = gR^2$. Подставив это значение в формулу (2) и учитывая, что $r = R_0 + h$, искомый период

$$T = \frac{2\pi(R_0 + h)^{3/2}}{R_0\sqrt{g}}.$$

Ответ: $T = 2{,}12$ ч.

1.155. Определите работу сил поля тяготения при перемещении тела массой $m = 12$ кг из точки *1*, находящейся от центра Земли на расстоянии $r_1 = 4R_0$, в точку *2*, находящуюся от ее центра на расстоянии $r_2 = 2R_0$, где R_0 — радиус Земли.



Дано: $m = 12$ кг; $r_1 = 4R_0$; $r_2 = 2R_0$; $R_0 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Найти: A_{12}.

Решение. Поскольку силы тяготения консервативны, работа этих сил равна изменению потенциальной энергии системы «тело — Земля», взятому с обратным знаком:

$$A_{12} = -\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2, \qquad (1)$$

где Π_1 и Π_2 — соответственно потенциальные энергии системы «тело — Земля» в точках *1* и *2*.

Так как $\Pi = -G\dfrac{mM}{r}$ (M — масса Земли), имеем

$$\Pi_1 = -\frac{GmM}{4R_0} \text{ и } \Pi_2 = -\frac{GmM}{2R_0}.$$

Подставив эти выражения в (1), получим

$$A_{12} = \frac{GmM}{4R_0}.$$

Учитывая, что $g = \dfrac{GM}{R_0^2}$, придем к выражению для искомой работы

$$A_{12} = \frac{mgR_0}{4}.$$

Ответ: $A_{12} = 187$ МДж.

1.156. Определите высоту h, на которую можно поднять с Луны ракету массой $m = 2$ т, если при этом совершается работа $A = 1$ ГДж. Какую энергию T надо затратить, чтобы запустить ракету по круговой орбите с данной высоты? Масса Луны $M = 7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ м.

Дано: $m = 2$ т ($2 \cdot 10^3$ кг); $A = 1$ ГДж (10^9 Дж); $M = 7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг; $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ м.

Найти: h; T.

Решение. Гравитационные силы являются консервативными, работа по их преодолению

$$A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1 = -G\frac{mM}{R+h} - \left(-G\frac{mM}{R}\right) = G\frac{mMh}{R(R+h)}, \qquad (1)$$

где Π_1, Π_2 — соответственно потенциальная энергия тела в положении *1* и *2*; M — масса Луны; R — радиус Луны. Искомая высота, согласно формуле (1),

$$h = \frac{AR^2}{GmM - AR}.$$

Для запуска ракеты по круговой орбите ей необходимо сообщить скорость v, которая определяется по второму закону Ньютона $\frac{mv^2}{R+h} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$. Искомая кинетическая энергия с учетом этого выражения

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{2(R+h)}.$$

Ответ: $h = 376$ км; $T = 2{,}31$ ГДж.

1.157. Определите, во сколько раз изменится потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух соприкасающихся из одинакового материала однородных шаров одинаковых радиуса и массы, если у одного из них увеличить массу в $n = 8$ раз.

Дано: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $m_1 = m_2 = m$; $r_1 = r_2 = r$; $m' = nm$; $n = 8$.

Найти: $\frac{\Pi'}{\Pi}$.

Решение. Потенциальная энергия взаимодействия двух соприкасающихся шаров массами m_1 и m_2 и радиусами r_1 и r_2

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r_1 + r_2}, \qquad (1)$$

где G — гравитационная постоянная.

Учитывая условие задачи ($r_1 = r_2 = r$ и $m_1 = m_2 = m$), выражение (1) запишется в виде

$$\Pi = -G\frac{m^2}{2r}.$$

После увеличения массы одного из шаров потенциальная энергия становится равной

$$\Pi' = -G\frac{m'm}{r' + r}, \qquad (2)$$

где r' — радиус шара с измененной массой.

Учитывая, что масса шаров $m = \frac{4}{3}\pi(r')^3\rho$ (ρ — плотность материала шаров), найдем

$$r' = \sqrt[3]{n}\,r. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), получаем

$$\Pi' = -G\frac{nm^2}{r(\sqrt[3]{n}+1)} = \frac{2n\Pi}{\sqrt[3]{n}+1},$$

откуда искомое отношение

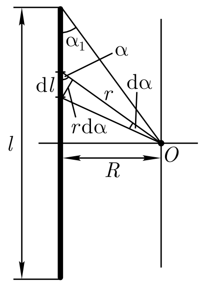
$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{2n}{\sqrt[3]{n}+1}.$$

Ответ: $\dfrac{\Pi'}{\Pi} = 5{,}33.$

1.158. Определите потенциал φ поля тяготения, создаваемого однородным стержнем длиной $l = 2$ м и линейной плотностью $\tau = 100$ кг/м в точке O, находящейся на оси, проходящей через его середину и лежащей на расстоянии $R = 1$ м от стержня.

Дано: $l = 2$ м; $\tau = 100$ кг/м; $R = 1$ м.

Найти: φ.



Решение. Потенциал dφ гравитационного поля, создаваемого в точке O отрезком стержня малой длины dl,

$$\mathrm{d}\varphi = -G\frac{\mathrm{d}m}{r}, \qquad (1)$$

где G — гравитационная постоянная; $\mathrm{d}m = \tau\mathrm{d}l$ — масса отрезка dl; r — расстояние от отрезка dl до точки O. Из рисунка следует, что $\mathrm{d}l\sin\alpha = r\,\mathrm{d}\alpha$ и $r = \dfrac{R}{\sin\alpha}$. Тогда $dm = \dfrac{\tau R}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$. Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{G\tau}{\sin\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

Потенциал в точке O, создаваемый половиной стержня,

$$\varphi_1 = \int \mathrm{d}\varphi = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{G\tau}{\sin\alpha}\mathrm{d}\alpha, \qquad (2)$$

где, согласно рисунку, $\alpha_1 = \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2R}{l} = \dfrac{\pi}{4}$ — пределы изменения угла α.

Точка O лежит на оси, проходящей через середину стержня, поэтому искомый потенциал, создаваемый однородным стержнем,

$$\varphi = -2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{G\tau}{\sin\alpha}\mathrm{d}\alpha = -2G\tau\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}.$$

Ответ: $\varphi = -11{,}8$ нДж/кг.

1.159. Определите числовое значение первой космической скорости v_1 для Луны, если ускорение свободного падения у поверхности Луны $g = 1{,}7$ м/с^2, а радиус Луны $R = 1{,}74\cdot10^6$ м.

Дано: $g = 1{,}7$ м/с^2; $R = 1{,}74\cdot10^6$ м.

Найти: v_1.

Решение. Искомая первая космическая скорость — горизонтально направленная минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Луны по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Луны. На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом r, действует сила тяготения Луны, сообщающая ему нормальное ускорение $\frac{v_1^2}{r}$. По второму закону Ньютона

$$\frac{mv_1^2}{r} = G\frac{mM}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная; m — масса спутника; M — масса Луны. Если спутник движется вблизи поверхности Луны, то $r \approx R$ (R — радиус Луны). Тогда из этого выражения получаем

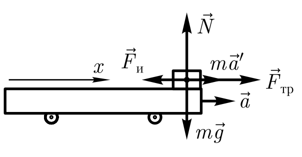
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \tag{1}$$

Для тела, находящегося у поверхности Луны, $mg = G\frac{mM}{R^2}$, откуда $GM = gR^2$. Подставив это значение в формулу (1), искомая первая космическая скорость для Луны

$$v_1 = \sqrt{gR}.$$

Ответ: $v_1 = 1{,}72$ км/с.

1.160. На край тележки длиной $l = 1{,}8$ м, движущейся горизонтально с ускорением $a = 2{,}1$ м/с^2, положили брусок. Определите, за какое время t брусок соскользнет с доски, если коэффициент трения между бруском и тележкой $f = 0{,}4$.



Дано: $l = 1{,}8$ м; $a = 2{,}1$ м/с^2; $f = 0{,}4$.
Найти: t.

Решение. Движение рассмотрим в системе отсчета, связанной с тележкой. Эта система является неинерциальной (движется с ускорением относительно Земли). В этой системе отсчета на брусок, кроме силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$, препятствующей относительному проскальзыванию тел, действует также сила инерции $\vec{F}_{и} = -m\vec{a}$, где $\vec{a}$ — ускорение тележки. Уравнение второго закона Ньютона для бруска с учетом силы инерции можно записать в виде:

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{и}, \tag{1}$$

где $\vec{a}'$ — ускорение бруска относительно тележки.

Направив ось x горизонтально, уравнение (1) в проекции на эту ось (см. рисунок):

$$ma' = F_{тр} - ma. \tag{2}$$

Учитывая, что при проскальзывании бруска $F_{тр} = fN$, из уравнения (2) следует, что

$$a' = fg - a. \tag{3}$$

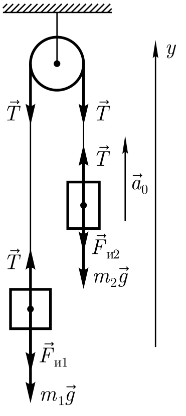
В системе отсчета, связанной с тележкой, брусок должен пройти путь $l = \dfrac{a' t^2}{2}$. Подставив сюда выражение (3), найдем искомый промежуток времени

$$t = \sqrt{\frac{2l}{fg - a}}.$$

Ответ: $t = 1{,}4$ с.

1.161. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг. Вся система находится в лифте, поднимающемся с ускорением $a_0 = 2{,}1$ м/с^2, направленным вверх.

Считая нить и блок невесомыми, определите силу давления блока на ось.



Дано: $m_1 = 2$ кг; $m_2 = 0{,}5$ кг; $a_0 = 2{,}1$ м/с^2.
Найти: F.

Решение. Движения грузов рассмотрим в системе отсчета, связанной с лифтом. Эта система является неинерциальной (движется с ускорением относительно Земли). Уравнения движения для грузов в неинерциальной системе отсчета

$$m_1\vec{a}' = m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{и}1}, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a}' = m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{и}2}, \qquad (2)$$

где $\vec{a}'$ — ускорение тел в неинерциальной системе отсчета (вследствие нерастяжимости нити по модулю одинаковы для обоих тел); $\vec{T}$ — сила натяжения нитей (одинакова для обоих тел вследствие невесомости блока и нити); $\vec{F}_{\text{и}1} = -m_1\vec{a}_0$ и $\vec{F}_{\text{и}2} = -m_2\vec{a}_0$ — силы инерции.

Направив ось y вверх, запишем уравнения (1) и (2) в проекциях на эту ось:

$$-m_1 a' = -m_1 g + T - m_1 a_0,$$

$$m_2 a' = -m_2 g + T - m_2 a_0.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a' = \frac{(m_1 - m_2)(g + a_0)}{m_1 + m_2};$$

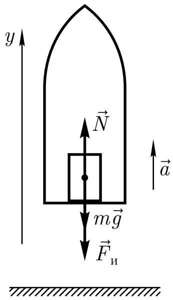
$$T = m_1(g + a_0) - m_1 a' = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0).$$

Сила давления блока на ось

$$F = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0).$$

Ответ: $F = 19$ Н.

1.162. При вертикальной посадке на Луну ракета последние 120 м пути, двигаясь равнозамедленно, прошла за время $t = 6{,}5$ с. Определите вес P космонавта



перед посадкой, если его масса $m = 70$ кг. Радиус Луны $R = 1740$ км, масса Луны $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг.

Дано: $s = 120$ м; $t = 6{,}5$ с; $m = 70$ кг; $R = 1740$ км ($1{,}74 \cdot 10^6$ м); $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг.

Найти: P.

Решение. Рассмотрим неинерциальную систему отсчета, связанную с ракетой. В этой системе отсчета на тело массой m, кроме силы тяжести $m\vec{g}$ (g — ускорение свободного падения у поверхности Луны) со стороны Луны, действуют сила реакции опоры $\vec{N}$, по модулю равная весу $\vec{P}$ тела, и сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}$, где $\vec{a}$ — ускорение ракеты (см. рисунок). Уравнение второго закона с учетом силы инерции можно записать в виде

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_и = 0. \qquad (1)$$

Направив ось y вверх, уравнение (1) в проекции на эту ось (см. рисунок):

$$-mg + N - ma = 0,$$

откуда

$$N = mg + ma. \qquad (2)$$

Учитывая, что сила реакции опоры по модулю равна весу тела, ускорение ракеты $a = \dfrac{2s}{t^2}$, выражение (2) запишем в виде

$$P = m\left(g + \frac{2s}{t^2}\right). \qquad (3)$$

Для тела, находящегося у поверхности Луны, $mg = G\dfrac{mM}{R}$ (G — гравитационная постоянная), откуда ускорение свободного падения у поверхности Луны $g = G\dfrac{M}{R}$. Подставив это выражение в формулу (3), искомый вес космонавта

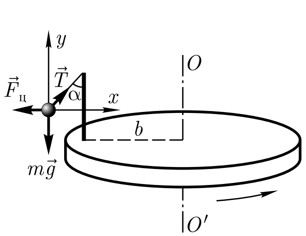
$$P = m\left(G\frac{M}{R^2} + \frac{2s}{t^2}\right).$$

Ответ: $P = 511$ Н.

1.163. Вертикальный стержень укреплен на горизонтальном диске, вращающемся с частотой $n = 0{,}8$ с$^{-1}$. К вершине стержня привязан шарик на нити длиной $l = 0{,}12$ м (см. рисунок). Определите расстояние b от стержня до оси вращения, если угол α нити с вертикалью равен 37°.

Дано: $n = 0{,}8$ с$^{-1}$; $l = 0{,}12$ м; $\alpha = 37°$.

Найти: b.



Решение. Движение шарика рассмотрим в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся диском. В этой системе отсчета на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и центробежная сила инерции $\vec{F}_ц$, направленная по горизонтали от оси вращения диска.

Относительно системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится ($\vec{a}' = 0$), и второй закон Ньютона с учетом центробежной силы инерции:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_ц = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) в проекции на выбранные оси x и y (см. рисунок) запишется в виде

$$T\sin\alpha - \frac{mv^2}{R} = 0;$$
$$T\cos\alpha - mg = 0,$$

где $R = l\sin\alpha + b$; $-\frac{mv^2}{R} = F_ц$ — центробежная сила инерции. Из уравнения $g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{R}$, учитывая, что $v = 2\pi nR$ и $R = l\sin\alpha + b$, запишем

$$g\,\mathrm{tg}\,\alpha = 4\pi^2 n^2(l\sin\alpha + b),$$

откуда искомое расстояние от стержня до оси вращения

$$b = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\pi^2 n^2} - l\sin\alpha.$$

Ответ: $b = 0{,}22$ м.

1.164. Электровоз массой $m = 142$ т движется со скоростью $v = 79$ км/ч на широте $\varphi = 62°$ вдоль меридиана. Определите, чему равна горизонтальная составляющая силы давления на рельсы F.

Дано: $m = 142$ т ($142 \cdot 10^3$ кг); $v = 79$ км/ч (21,9 м/с); $\varphi = 62°$.

Найти: F.

Решение. Ввиду вращения Земли вокруг своей оси система отсчета, связанная с Землей, является неинерциальной. В этой системе отсчета на тело действуют центробежная сила инерции $\vec{F}_ц$ и сила Кориолиса $\vec{F}_К$.

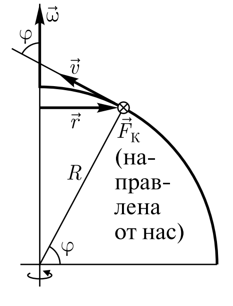
Центробежная сила инерции

$$\vec{F}_ц = m\omega^2\vec{r},$$

где ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси; $\vec{r}$ — радиус вращения точки Земли, в которой находится тело (см. рисунок). Центробежная сила направлена вдоль $\vec{r}$ и не оказывает бокового (горизонтального) давления на рельсы.

Сила Кориолиса

$$\vec{F}_К = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}], \qquad (1)$$



где $\vec{v}$ — вектор скорости тела относительно Земли; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. Как следует из рисунка и анализа формулы (1), сила Кориолиса направлена по горизонтали (по касательной к поверхности Земли) перпендикулярно $\vec{v}$ (перпендикулярно плоскости чертежа от нас) и оказывает таким образом боковое давление на правый рельс по движению поезда.

Модуль силы Кориолиса

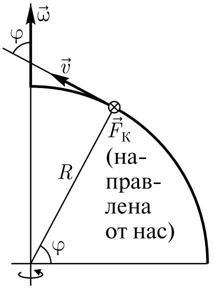
$$F_К = 2mv\omega\sin\varphi,$$

где φ — угол (см. рисунок) между $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ (равен широте φ). Учитывая, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ($T = 24$ ч — период суточного обращения Земли), найдем искомую силу давления на рельсы, которая, как следует из рассмотренного, обусловлена только силой Кориолиса,

$$F = \frac{4\pi m v \sin\varphi}{T}.$$

Ответ: $F = 399$ Н.

1.165. Определите скорость v пули, если отклонение от мишени при стрельбе вдоль меридиана составляет 6,2 см вправо от центра. Расстояние до мишени $s = 900$ м, стрельба производится на широте $\varphi = 54°$. Скорость пули считать постоянной.



Дано: $l = 6{,}2$ см $(6{,}2 \cdot 10^{-2}$ м); $s = 900$ м; $\varphi = 54°$; $v = \text{const}$.
Найти: v.

Решение. На пулю, движущуюся во вращающейся системе отсчета (Земля вращается вокруг своей оси), действует сила Кориолиса

$$\vec{F}_{\text{К}} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}],$$

где m — масса пули; $\vec{v}$ — вектор скорости пули относительно Земли; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. Направление силы Кориолиса определяется правилом правого винта. В нашем случае (см. рисунок) $\vec{F}_{\text{К}}$ направлена перпендикулярно плоскости чертежа (т.е. параллельно поверхности Земли) и от нас.

Модуль силы Кориолиса

$$F_{\text{К}} = 2mv\omega\sin\varphi,$$

где φ — угол (см. рисунок) между $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ (равен широте φ).

Ускорение, сообщаемое пуле силой Кориолиса,

$$a_{\text{К}} = \frac{F_{\text{К}}}{m} = 2v\omega\sin\varphi.$$

Время движения пули $t = \dfrac{s}{v}$ (по условию задачи $v = \text{const}$). За время t пуля отклонится на расстояние $l = \dfrac{a_{\text{К}} t^2}{2} = \dfrac{\omega s^2 \sin\varphi}{v}$ (учли записанные выше формулы). Поскольку $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ($T = 24$ ч — период суточного обращения Земли), искомая скорость

$$v = \frac{2\pi s^2 \sin\varphi}{lT}.$$

Ответ: $v = 768$ м/с.

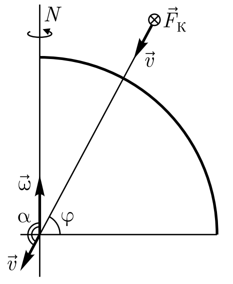
1.166. Тело брошено вниз в безветренную погоду с высоты h с нулевой начальной скоростью и попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi = 50°$

Северного полушария. Определите эту высоту h, если отклонение l тела от вертикали при его падении составляет 9 см.

Дано: $\varphi = 50°$; $v_0 = 0$; $l = 9$ см ($9 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: h.

Решение. Тело отклоняется от вертикали вследствие действия на него силы Кориолиса (см. рисунок)



$$\vec{F}_К = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}], \qquad (1)$$

где m — масса тела; $\vec{v}$ — вектор скорости тела относительно Земли; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости суточного вращения Земли. Эта сила возникает вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси, т.е. неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей. Как следует из рисунка и анализа формулы (1), сила Кориолиса $\vec{F}_К$ направлена перпендикулярно плоскости чертежа от нас, т.е. к востоку. В этом же направлении и будет происходить отклонение тела.

Модуль силы Кориолиса

$$F_К = 2mv\omega \sin\alpha, \qquad (2)$$

где α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$. Из рисунка следует, что $\alpha = 90° + \varphi$, откуда $\sin\alpha = \cos\varphi$.

Скорость падающего тела направлена вдоль радиуса; $v = gt$ (t — время падения). Тогда сила Кориолиса (1) запишется в виде

$$F_К = 2m\omega gt \cos\varphi.$$

Ускорение, сообщаемое телу силой Кориолиса и совпадающее с ней по направлению,

$$a_К = \frac{F_К}{m} = 2\omega gt \cos\varphi.$$

Скорость тела, обусловленная действием силы Кориолиса,

$$v_К = \int_0^t a_К \mathrm{d}t = \int_0^t 2\omega gt \cos\varphi \mathrm{d}t = \omega gt^2 \cos\varphi.$$

Отклонение тела от вертикали

$$l = \int_0^t v_К \mathrm{d}t = \int_0^t \omega gt^2 \cos\varphi \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos\varphi,$$

откуда время падения

$$t = \sqrt[3]{\frac{3l}{\omega g \cos\varphi}}. \qquad (3)$$

Время падения t связано с высотой h соотношением $h = \dfrac{gt^2}{2}$. Учитывая формулу (3) и $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ($T = 24$ ч — период суточного обращения Земли), найдем искомую высоту

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9l^2gT^2}{4\pi^2\cos^2\varphi}}.$$

Ответ: $h = 345$ м.

Задачи для самостоятельного решения

1.167. Определите силу притяжения двух стальных шаров массой $m = 16$ кг каждый, находящихся на расстоянии $l = 20$ см друг от друга. Плотность стали $\rho = 7{,}8$ г/см^3. [$F = G\dfrac{m^2}{\left(2\sqrt[3]{\dfrac{3m}{4\pi\rho}} + l\right)^2} = 0{,}134$ мкН]

1.168. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определите, как изменится сила притяжения, если радиус одного из шаров увеличить в $n = 2$ раза. [Увеличится в $\dfrac{4n^3}{(n+1)^2}$ раз; 3,56]

1.169. Во сколько раз изменилась потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух одинаковых соприкасающихся однородных шаров, если радиус одного из них: 1) уменьшили в $n = 1{,}5$ раза; 2) увеличили в $n = 1{,}5$ раза? [1) $\dfrac{\Pi'}{\Pi} = \dfrac{2}{n^2(n+1)} = 0{,}356$; 2) $\dfrac{\Pi'}{\Pi} = \dfrac{2n^3}{n+1} = 2{,}7$]

1.170. Определите, чему равна напряженность g_h поля тяготения Земли на высоте $h = 4\cdot 10^3$ км и потенциал φ поля на этой же высоте. Радиус Земли $R_0 = 6{,}37$ Мм. [$g_h = \dfrac{gR_0^2}{(R_0+h)^2} = 3{,}7$ м/с^2; $\varphi = -\dfrac{gR_0^2}{R_0+h} = -38{,}4$ Дж/кг]

1.171. Определите работу, которую необходимо совершить для перевода спутника Земли между круговыми орбитами на высотах $h_1 = 4\cdot 10^3$ км и $h_2 = 6\cdot 10^3$ км, если масса спутника $m = 900$ кг, а радиус Земли $R_0 = 6{,}37$ Мм. [$A = mgR_0^2\dfrac{h_2 - h_1}{(R_0+h_1)(R_0+h_2)} = 5{,}59\cdot 10^9$ Дж]

1.172. Определите высоту h над поверхностью Земли, на которой ускорение свободного падения уменьшится на $k = 0{,}3$ от ускорения у поверхности Земли. [$h = R_0\sqrt{\dfrac{1}{1-k}} - 1 = 1{,}24\cdot 10^6$ м]

1.173. Сравните ускорения свободного падения тел на Земле g и на Марсе $g_{\text{М}}$. Радиус Марса $R_{\text{М}}$ составляет 0,53 радиуса Земли R_0, масса Марса $M_{\text{М}}$ составляет 0,107 от массы Земли M. [$g_{\text{М}} = 0{,}381g$]

1.174. Спутник вращается вокруг Земли в плоскости экватора. Определите высоту орбиты h, если за сутки спутник совершает $n = 14$ оборотов вокруг Земли. Радиус Земли $R_0 = 6{,}37$ Мм. [$h = \sqrt[3]{\dfrac{R_0^2 g}{4\pi^2 n^2}} - R_0 = 900$ км]

1.175. Определите высоту круговой орбиты h спутника Земли, если его период обращения $T = 1{,}8$ ч. Радиус Земли $R_0 = 6{,}37\cdot 10^6$ м. [$h = R_0\left(\sqrt[3]{\dfrac{g}{R_0}\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2} - 1\right) = 1{,}14$ Мм]

1.176. Определите числовое значение первой и второй космических скоростей вблизи поверхности Марса. Масса Марса $M_{\text{М}} = 6{,}38 \cdot 10^{23}$ кг, радиус Марса $R_{\text{М}} = 3{,}4$ Мм. [$v_1 = \sqrt{\dfrac{GM_{\text{М}}}{R_{\text{М}}}} = 3{,}55$ км/с; $v_2 = \sqrt{2}v_1 = 5{,}02$ км/с]

1.177. При взлете с Земли вес космонавта вследствие перегрузки увеличился в $n = 5$ раз. Сколько времени продлится взлет, если ракета, двигаясь равноускоренно, поднимается на высоту $h = 15$ км? Указание: задачу решить в неинерциальной системе отсчета, связанной с ракетой. [$t = \sqrt{\dfrac{2h}{(n-1)g}} = 27{,}7$ с]

1.178. При вращении горизонтального диска лежащий на расстоянии $R = 10$ см от центра грузик слетает при частоте вращения $n = 1$ с$^{-1}$. Определите предельный коэффициент трения f_0, при котором начнется проскальзывание. Указание: задачу решить в неинерциальной системе отсчета, связанной с диском. [$f_0 = \dfrac{4\pi^2 n^2 R}{g} = 0{,}402$]

1.179. В центре горизонтальной платформы укреплен вертикальный стержень, к вершине которого с помощью нити длиной $l = 15$ см привязан шарик. Определите частоту вращения n платформы, если угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 45°$. [$n = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2 l \cos\alpha}} = 1{,}53$ с$^{-1}$]

1.180. На край тележки, движущейся с ускорением $a = 3{,}4$ м/с^2, положили брусок. Определите длину тележки l, если брусок соскальзывает с нее за время $t = 1{,}5$ с. Коэффициент трения между бруском и тележкой $f = 0{,}3$. Указание: задачу решить в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой. [$l = \dfrac{(a - fg)t^2}{2} = 51{,}4$ см]

1.181. Определите, с какой высоты h тело следует отпустить над экватором, чтобы оно при падении на Землю отклонилось на $l = 0{,}5$ м от вертикали. Период суточного вращения Земли $T = 24$ ч. [$h = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{9l^2 g T^2}{4\pi^2}} = 805$ м]

1.182. Определите расстояние s до мишени, если при стрельбе вдоль меридиана пуля отклоняется на $l = 5{,}2$ см от центра мишени вправо. Скорость пули $v = 850$ м/с. Стрельба производится на широте $\varphi = 40°$. Период суточного вращения Земли $T = 24$ ч. [$s = \sqrt{\dfrac{vlT}{2\pi \sin\varphi}} = 972$ м]

1.183. На экваторе некоторой планеты тело весит в $n = 1{,}5$ раза меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность $\langle\rho\rangle$ вещества планеты, если период T ее обращения вокруг оси равен 16 ч. [$\langle\rho\rangle = \dfrac{3\pi n}{(n-1)GT^2} = 128$ кг/м^3]

1.184. Поезд идет из Москвы (широта $\varphi = 56°$) строго на запад со скоростью $v = 65$ км/ч. Определите массу m поезда, если сила горизонтального давления на рельсы $F = 4$ кН. Период T суточного вращения Земли вокруг своей оси равен 24 ч. [$m = \dfrac{FT}{4\pi v \sin\varphi} = 1840$ т]

1.6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

Основные законы и формулы

• Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h$$

[ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения].

• Закон Архимеда

$$F_{\text{А}} = \rho g V$$

[$F_{\text{А}}$ — выталкивающая сила; V — объем жидкости, вытесненной телом].

• Уравнение неразрывности

$$Sv = \text{const}$$

[S — площадь поперечного сечения трубки тока; v — скорость жидкости].

• Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости — выражение закона сохранения механической энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

[p — статическое давление жидкости для определенного сечения трубки тока; v — скорость жидкости для этого же сечения; $\dfrac{\rho v^2}{2}$ — динамическое давление жидкости для этого же сечения; h — высота, на которой расположено сечение; $\rho g h$ — гидростатическое давление].

• Для трубки тока, расположенной горизонтально, полное давление

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}.$$

• Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде:

$$v = \sqrt{2gh}$$

[h — глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде].

• Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S$$

[η — динамическая вязкость жидкости; $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ — градиент скорости; S — площадь соприкасающихся слоев].

• Постоянная (число) Рейнольдса, определяющая характер движения жидкости,

$$\text{Re} = \rho \langle v \rangle \frac{d}{\eta}$$

[ρ — плотность жидкости; ‹v› — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — характерный линейный размер, например, диаметр трубы; η — динамическая вязкость].

• Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик:

$$F = 6\pi\eta r v$$

[r — радиус шарика; v — его скорость; η — динамическая вязкость].

• Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8Vl}$$

[R — радиус трубки; Δp — разность давлений на концах трубки; V — объем вытекающей жидкости].

Примеры решения задач

1.185. Полый шар плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей (см. рисунок) так, что соотношение частей шара во второй и первой жидкости равно $\frac{V_2}{V_1} = n = 2$. Плотности жидкостей и тела соответственно равны $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3, $\rho_2 = 1$ г/см^3 и $\rho = 2{,}7$ г/см^3. Определите объем шара V, если размер его внутренней полости $V_0 = 20$ см^3.

Дано: $\frac{V_2}{V_1} = n = 2$; $V_0 = 20$ см^3 $(2 \cdot 10^{-5}$ м$^3)$; $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3 $(8 \cdot 10^2$ кг/м$^3)$; $\rho_2 = 1$ г/см^3 $(1 \cdot 10^3$ кг/м$^3)$; $\rho = 2{,}7$ г/см^3 $(2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м$^3)$.

Найти: V.

Решение. Поскольку шар находится в равновесии, сила тяжести P, действующая на тело, уравновешивается силой Архимеда $F_А$:

$$P = F_А.$$

Учитывая, что

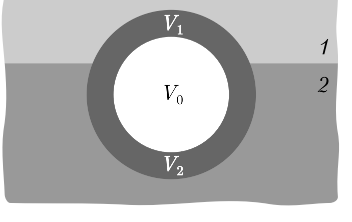
$$P = \rho(V - V_0)g$$

и

$$F_А = m_1 g + m_2 g$$

(ρ — плотность материала шара; V — его объем; V_0 — объем внутренней полости шара; g — ускорение свободного падения; m_1 и m_2 — соответственно масса жидкостей в объемах V_1 и V_2), можно записать

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 = \rho(V_1 + V_2 - V_0)g. \qquad (1)$$



Из выражения (1), учитывая, что $V_2 = nV_1$ (условие задачи), найдем

$$V_1 = \frac{\rho V_0}{(n+1)\rho - \rho_2 n - \rho_1}.$$

Искомый объем шара

$$V = V_1 + nV_2 = \frac{(n+1)\rho V_0}{(n+1)\rho - \rho_2 n - \rho_1}.$$

Ответ: $V = 30{,}1$ см^3.

1.186. В стакан с водой, уравновешенный на рычажных весах, опустили подвешенный на нити латунный шарик массой $M = 400$ г так, чтобы он не касался дна. Определите массу m гирьки, с помощью которой можно уравновесить весы. Плотность материала шарика $\rho = 8{,}55$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

Дано: $M = 400$ г (0,4 кг); $\rho = 8{,}55$ г/см^3 ($8{,}55 \cdot 10^3$ кг/м^3); $\rho_1 = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3).

Найти: m.

Решение. На шарик со стороны жидкости действует выталкивающая сила $F_{\text{А}}$ (сила Архимеда), направленная вертикально вверх. Согласно третьему закону Ньютона, со стороны шарика на воду (и, в соответствии с законом Паскаля, на дно стакана) действует такая же по величине сила, но направленная вертикально вниз. Эта сила возникает вследствие увеличения давления жидкости за счет повышения ее уровня в стакане. Таким образом, чашка весов со стаканом опустится, и на другую чашку весов нужно поставить гирьку массой m, определяемой из условия

$$mg = F_{\text{А}} \text{ или } mg = \rho_1 g V,$$

где V — объем шарика. Поскольку $V = \dfrac{M}{\rho}$, искомая масса гирьки

$$m = \frac{\rho_1 M}{\rho}.$$

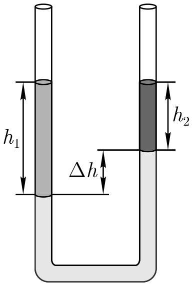
Ответ: $m = 47$ г.

1.187. В сообщающиеся трубки с водой площадью сечения $S = 0{,}5$ см^2 долили в левую масло объемом $V_1 = 40$ мл, в правую керосин объемом $V_2 = 30$ мл. Определите разность Δh установившихся уровней воды в трубках, если плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, плотность масла $\rho_1 = 0{,}9$ г/см^3, плотность керосина $\rho_2 = 0{,}8$ г/см^3.

Дано: $S = 0{,}5$ см^2 ($0{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2); $V_1 = 40$ мл ($4 \cdot 10^{-5}$ м^3); $V_2 = 30$ мл ($3 \cdot 10^{-5}$ м^3); $\rho = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3); $\rho_1 = 0{,}9$ г/см^3 ($0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3); $\rho_2 = 0{,}8$ г/см^3 ($0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3).

Найти: Δh.

Решение. Предположим, что уровень воды в левом сосуде понизится (см. рисунок). Для уровня поверхности воды в левом сосуде давление равно давлению столба масла



$$p = \rho_1 g h_1 = \rho_1 g \frac{V_1}{S}, \tag{1}$$

где h_1 — высота столба масла; V_1 — объем масла; S — площадь сечения трубки. Для правого сосуда давление на той же горизонтали будет равно сумме давлений столба керосина и избыточного столба воды высотой Δh

$$p = \rho_2 g h_2 + \rho g \Delta h = \rho_2 g \frac{V_2}{S} + \rho g \Delta h, \tag{2}$$

где h_2 — высота столба керосина.

Поскольку давление на одной горизонтали одинаково, приравняв выражения (1) и (2), найдем

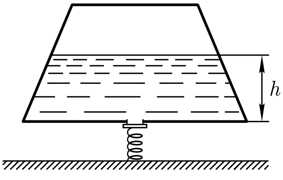
$$\rho_1 g\frac{V_1}{S} = \rho_2 g\frac{V_2}{S} + \rho g\Delta h,$$

откуда искомая разность уровней

$$\Delta h = \frac{\rho_1 V_1 - \rho_2 V_2}{\rho S}.$$

Ответ: $\Delta h = 24$ см.

1.188. В некоторых устройствах используется прибор, основанный на следующем принципе: когда жидкость доходит до уровня контрольной отметки на некоторой высоте, клапан открывается, и жидкость начинает выливаться (см. рисунок). Площадь клапана $S = 9$ см^2, его масса $m = 300$ г, пружина сжата от положения равновесия на $\Delta x = 1$ см. Определите коэффициент жесткости пружины k, если высота контрольной отметки $h = 23{,}2$ см, а в качестве жидкости используется вода ($\rho = 1$ г/см^3).



Дано: $S = 9$ см^2 ($9 \cdot 10^{-4}$ м^2); $m = 300$ г (0,3 кг); $\Delta x = 1$ см (10^{-2} м); $h = 23{,}2$ см ($23{,}2 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3).

Найти: k.

Решение. На клапан действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила давления $\vec{F}$ со стороны жидкости и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Сила давления

$$F = \rho g h S,$$

сила упругости пружины

$$F_{\text{упр}} = k\Delta x.$$

Клапан открывается, если сила давления жидкости достигнет критического уровня, определяемого контрольной высотой. Тогда можем записать

$$\rho g h S + mg = k\Delta x,$$

откуда искомый коэффициент жесткости пружины

$$k = \frac{\rho g h S + mg}{\Delta x}.$$

Ответ: $k = 500$ Н/м.

1.189. Два мальчика массами $m_1 = 20$ кг и $m_2 = 25$ кг катаются на льдинах. Определите минимальную площадь $S_{\min}$ льдины, способной удержать их обоих, если толщина льда $h = 0{,}4$ м. Плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

Дано: $m_1 = 20$ кг; $m_2 = 25$ кг; $h = 0{,}4$ м; $\rho = 0{,}9$ г/см^3 (900 кг/м^3); $\rho_1 = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3).

Найти: $S_{\min}$.

Решение. На льдину с мальчиками действуют сила тяжести

$$F = \rho Shg + (m_1 + m_2)g \tag{1}$$

(S — площадь льдины; g — ускорение свободного падения) и выталкивающая сила (определяется законом Архимеда)

$$F_{\text{А}} = \rho_1 Sh_1 g, \tag{2}$$

где h_1 — толщина погрузившейся под воду части льдины. Льдина плавает, если силы (1) и (2) равны:

$$\rho Shg + (m_1 + m_2)g = \rho_1 Sh_1 g,$$

откуда площадь льдины

$$S = \frac{m_1 + m_2}{h_1\rho_1 - h\rho}.$$

Из записанной формулы следует, что $S = S_{\min}$, когда $h_1 = h$. Следовательно, искомая минимальная площадь льдины

$$S_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{h(\rho_1 - \rho)}.$$

Ответ: $S_{\min} = 1{,}13$ м^2.

1.190. Определите силу F, с которой надо давить на поршень горизонтального цилиндра площадью основания $S = 8$ см^2, чтобы за время $t = 2{,}5$ с выдавить из него через круглое отверстие площадью $S_0 = 4$ мм^2 слой жидкости толщиной $l = 5$ см. Плотность жидкости $\rho = 1$ г/см^3. Вязкость жидкости не учитывать.

Дано: $S = 8$ см^2 ($8 \cdot 10^{-4}$ м^2); $t = 2{,}5$ с; $S_0 = 4$ мм^2 ($4 \cdot 10^{-6}$ м^2); $l = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 1$ г/см^3 (10^3 кг/м^3).

Найти: F.

Решение. Работа A, совершаемая постоянной силой F на пути l, равна Fl и расходуется на сообщение жидкости кинетической энергии $T = \frac{mv^2}{2}$, где v — скорость вытекания жидкости. Поскольку $m = \rho V$ (ρ и V — соответственно плотность и объем жидкости), имеем $T = \frac{\rho V}{2} v^2$.

Согласно приведенным рассуждениям, можно записать

$$Fl = \frac{\rho V}{2} v^2,$$

откуда

$$F = \frac{\rho V}{2l} v^2. \tag{1}$$

За время t вытечет объем жидкости $V = vS_0 t$, откуда с учетом $V = Sl$ скорость вытекания жидкости

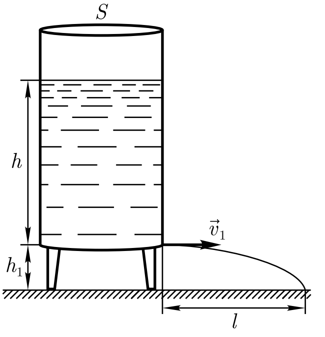
$$v = \frac{Sl}{S_0 t}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (1), найдем искомую силу

$$F = \frac{\rho S^3 l^2}{2S_0^2 t^2}.$$

Ответ: $F = 6{,}4$ Н.

1.191. Открытый цилиндрический сосуд, стоящий на ножках высотой $h_1 = 1{,}33$ м, заполнен водой до отметки $h = 3{,}8$ м (см. рисунок). Пренебрегая вязкостью воды, определите площадь сечения S цилиндра, если через отверстие диаметром $d_1 = 2{,}5$ см у его основания струя, вытекающая из отверстия, падает на пол на расстоянии $l = 4{,}5$ м от цилиндра.



Дано: $h_1 = 1{,}33$ м; $d_1 = 2{,}5$ см $(2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м); $l = 4{,}5$ м; $h = 5$ м.

Найти: S.

Решение. Согласно уравнению неразрывности,

$$Sv = S_1 v_1,$$

где v — скорость понижения воды в баке; v_1 — скорость вытекания струи; S_1 — площадь отверстия. Тогда

$$S = \frac{S_1 v_1}{v}. \tag{1}$$

Согласно уравнению Бернулли для сечений S и S_1,

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1, \tag{2}$$

где p и p_1 — статические давления жидкости соответственно для поверхности воды и отверстия; ρ — плотность воды. Учитывая, что $p_1 = p$ (бак открыт), из выражения (2) $v = \sqrt{v_1^2 - 2gh}$. Подставив эту формулу в (1), найдем

$$S = \frac{v_1 S_1}{\sqrt{v_1^2 - 2gh}}. \tag{3}$$

Согласно кинематическим уравнениям $h_1 = \dfrac{gt^2}{2}$ и $l = v_1 t$ (t — время падения струи воды на Землю), найдем

$$v_1 = l\sqrt{\frac{g}{2h_1}}. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3) и учитывая, что $S_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$, получаем искомую площадь сечения

$$S = \frac{\pi l d_1^2}{4\sqrt{l^2 - 4h_1 h}}.$$

Ответ: $S = 120$ см^2.

1.192. Цилиндрический сосуд высотой $H = 1$ м до краев заполнен жидкостью. Пренебрегая вязкостью жидкости, определите, на какой высоте h должно быть проделано малое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя, вытекающая из отверстия, падала на пол на расстоянии $l = 50$ см от цилиндра.

Дано: $H = 1$ м; $l = 50$ см (0,5 м).

Найти: h.

Решение. Согласно уравнению Бернулли,

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g H + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h + p_2, \qquad (1)$$

где ρ — плотность жидкости; v_1 — скорость понижения уровня жидкости в цилиндре; p_1 и p_2 — статическое давление у поверхности жидкости и у отверстия соответственно; v_2 — скорость вытекания жидкости из отверстия.

Поскольку сосуд открыт, $p_1 = p_2$ (равны атмосферному давлению). Согласно уравнению неразрывности,

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

где S_1 и S_2 — площади сечений цилиндра и отверстия соответственно, причем по условию задачи $S_2 \ll S_1$. Следовательно, $v_1 \ll v_2$. Учитывая приведенные рассуждения, уравнение Бернулли (1) запишется в виде

$$\frac{\rho v_2^2}{2} = \rho g (H - h),$$

откуда

$$v_2{}^2 = 2g(H - h). \qquad (2)$$

Учитывая кинематические уравнения $h = \dfrac{gt^2}{2}$ и $l = v_2 t$ (t — время падения струи воды на поверхность земли), найдем

$$v_2^2 = \frac{gl^2}{2h}. \qquad (3)$$

Приравняв (2) и (3), запишем $2g(H - h) = \dfrac{gl^2}{2h}$, откуда

$$4h^2 - 4hH + l^2 = 0.$$

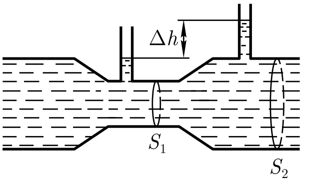
Решая это уравнение, найдем искомую высоту

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - l^2}}{2}.$$

Ответ: $h_1 = 93{,}3$ см; $h_2 = 6{,}7$ см.

1.193. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения. По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определите ее массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках $\Delta h = 8$ см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны $S_1 =$ $= 6$ см^2 и $S_2 = 12$ см^2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Дано: $\Delta h = 8$ см (0,08 м); $S_1 = 6$ см^2 $(6 \cdot 10^{-4}$ м$^2)$; $S_2 =$ $= 12$ см^2 $(1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м$^2)$; $\rho = 1$ г/см^3 $(10^3$ кг/м$^3)$.



Найти: Q.

Решение. Массовый расход воды — это масса воды, протекающая через сечение за единицу времени,

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho v_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho v_2 S_2, \tag{1}$$

где ρ — плотность воды; v_2 — скорость течения воды в месте сечения S_2. При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняются уравнение неразрывности

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \tag{2}$$

и уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$)

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \tag{3}$$

где p_1 и p_2 — статические давления в сечениях манометрических трубок; v_1 и v_2 — скорости течения воды в местах сечений S_1 и S_2. Учитывая, что

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h,$$

и решая систему уравнений (2), (3), получаем

$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Подставив это выражение в (1), найдем искомый массовый расход воды:

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

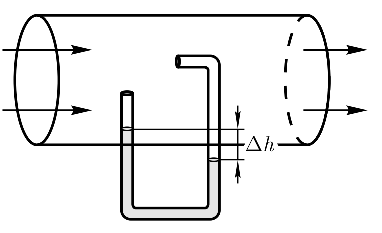
Ответ: $Q = 0{,}868$ кг/с.

1.194. Для определения объема перекачки газа используется прибор, основанный на принципе действия трубки Пито (см. рисунок). При перекачке азота по трубе за время $t = 1$ мин проходит объем газа $V = 59{,}3$ м^3. Определите диаметр d трубы, если разность уровней воды в коленах трубки Пито $\Delta h = 1$ см. Плотность азота $\rho = 1{,}25$ кг/м^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3.

Дано: $t = 1$ мин (60 с); $V = 59{,}3$ м^3; $\Delta h = 1$ см $(10^{-2}$ м$)$; $\rho = 1{,}25$ кг/м^3; $\rho_1 = 1$ г/см^3 $(10^3$ кг/м$^3)$.

Найти: d.

Решение. Согласно уравнению Бернулли, разность давлений газа, оказываемых на колена трубки (см. рисунок),



$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}, \tag{1}$$

где ρ — плотность газа; v — скорость течения газа.

С другой стороны, разность давлений в коленах определяется разностью уровней жидкости в коленах трубки

$$\Delta p = \rho_1 g \Delta h. \tag{2}$$

Приравняв выражения (1) и (2),

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho_1 g \Delta h,$$

найдем скорость движения газа

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_1 g \Delta h}{\rho}}. \tag{3}$$

Объем V газа, перекачиваемого за время t,

$$V = Svt,$$

где S — площадь сечения трубы.

Подставляя в эту формулу выражение (3) и $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, найдем

$$V = \frac{\pi d^2}{4} t \sqrt{\frac{2\rho_1 g \Delta h}{\rho}},$$

откуда искомый диаметр трубы

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi t \sqrt{2g\Delta h \dfrac{\rho_1}{\rho}}}}.$$

Ответ: $d = 31{,}7$ см.

1.195. Пренебрегая вязкостью воды, определите объем V воды в цилиндрическом баке диаметром $d = 1$ м, если через отверстие диаметром $d_1 = 2$ см на дне бака вся вода вытекла за время $t = 30$ мин.

Дано: $d = 1$ м; $t = 30$ мин $(1{,}8 \cdot 10^3$ с); $d_1 = 2$ см $(2 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: V.

Решение. Если за время $\mathrm{d}t$ уровень воды в баке понижается на $\mathrm{d}h$, то уменьшение объема воды за это же время

$$\mathrm{d}V = -S\mathrm{d}h, \tag{1}$$

где S — площадь основания бака, а знак «$-$» указывает на то, что высота слоя воды уменьшается. С другой стороны, уменьшение объема воды за время $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}V = S_1 v \mathrm{d}t, \tag{2}$$

где S_1 — площадь отверстия; v — скорость истечения воды из отверстия, определяемая согласно формуле Торричелли (применима при $S_1 \ll S$),

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{3}$$

где h — высота уровня воды в данный момент времени.

Приравняв выражения (1) и (2) и учитывая формулу (3), можем записать

$$-S\mathrm{d}h = S_1\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t,$$

откуда

$$\mathrm{d}t = -\frac{S\mathrm{d}h}{S_1\sqrt{2gh}}.$$

Время вытекания всей воды из бака

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{h_1}^0 \frac{S}{S_1}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}} = \frac{2S}{S_1}\sqrt{\frac{h_1}{2g}}, \tag{4}$$

где h_1 — первоначальный уровень воды. Из выражения (4)

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{S_1}{S}\right)^2. \tag{5}$$

Первоначальный объем воды

$$V = h_1 S. \tag{6}$$

Подставив в формулу (6) выражение (5), и учитывая, что $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, $S_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$, найдем искомый объем воды

$$V = \frac{\pi g d_1^4 t^2}{8d^2}.$$

Ответ: $V = 2$ м^3.

1.196. В области соприкосновения двух параллельно текущих слоев воды их скорость изменяется, как показано на рисунке. Определите силу внутреннего трения F, если площадь S соприкосновения слоев равна 3 м^2. Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Дано: $S = 3$ м^2; $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Найти: F.

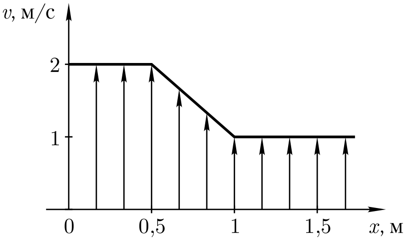
Решение. Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|S, \tag{1}$$

где η — динамическая вязкость жидкости; $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ — градиент скорости; S — площадь соприкосновения слоев.

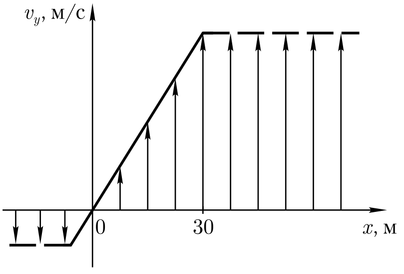
Согласно заданному графику,

$$\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right| = \frac{1}{0,5} = 2\ \text{с}^{-1}.$$



Подставляя значения физических величин в формулу (1), искомая сила внутреннего трения $F = 6 \cdot 10^{-3}$ Н.

Ответ: $F = 6$ мН.



1.197. При параллельном течении двух движущихся с разной скоростью слоев воды в области соприкосновения скорость изменяется по закону $\vec{v} = 5x\vec{j}$. Определите силу внутреннего трения F между слоями, если расстояние l, на котором происходит изменение скорости, равно 30 м (см. рисунок). Глубина слоев $h = 2$ м. Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Дано: $\vec{v} = 5x\vec{j}$; $l = 30$ м; $h = 2$ м; $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Найти: F.

Решение. Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|S = \eta\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|lh, \qquad (1)$$

где η — динамическая вязкость жидкости; $\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|$ — модуль градиента скорости; $S = lh$ — площадь соприкасающихся слоев.

Ось y, как следует из условия $\vec{v} = 5x\vec{j}$, направлена вдоль скорости, ось x, вдоль которой изменяется модуль скорости, перпендикулярна оси y (см. рисунок).

Согласно условию задачи $\vec{v} = 5x\vec{j}$, поэтому $\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right| = 5$ с$^{-1}$. Подставляя значения физических величин в формулу (1), найдем $F = 0{,}3$ Н.

Ответ: $F = 0{,}3$ Н.

1.198. Стальной шарик (плотность $\rho_1 = 9$ г/см^3) падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином ($\rho_2 = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па · с). Считая, что при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \leqslant 0{,}5$ выполняется закон Стокса, определите предельный диаметр шарика.

Дано: $v = \mathrm{const}$; $\rho_1 = 9$ г/см^3 ($9 \cdot 10^3$ кг/м^3); $\rho_2 = 1{,}26$ г/см^3 ($1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3); $\eta = 1{,}48$ Па · с; $\mathrm{Re} \leqslant 0{,}5$.

Найти: $d_{\max}$.

Решение. При установившемся движении шарика в жидкости ($v = \mathrm{const}$) сила тяжести (P) шарика уравновешивается выталкивающей силой (F_A) и силой трения (F):

$$P = F_\text{A} + F \text{ или } \rho_1 gV = \rho_2 gV + 6\pi\eta rv, \qquad (1)$$

где V — объем шарика. Подставив в уравнение (1) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ и решив его относительно v, получим

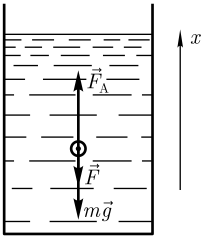
$$v = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)gr^2}{9\eta} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gd^2}{18\eta}.$$

Для шара небольшого радиуса, движущегося в вязкой жидкости, число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\rho_2 vd}{\eta}$, откуда искомый предельный диаметр шарика

$$d_{\max} = \frac{\eta\,\mathrm{Re}_\text{кр}}{\rho_2 v} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2\,\mathrm{Re}_\text{кр}}{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2 g}}.$$

Ответ: $d_{\max} = 5{,}91$ мм.

1.199. Пробковый шарик радиусом $r = 0{,}5$ см всплывает в широком сосуде в глицерине. Определите предельную скорость v_0 шарика, если течение жидкости, вызванное его всплытием, является ламинарным. Плотность материала шарика $\rho = 0{,}2$ г/см^3, плотность глицерина $\rho_1 = 1{,}26$ г/см^3. Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па · с.



Дано: $r = 0{,}5$ см $(5 \cdot 10^{-3}$ м); $\rho = 0{,}2$ г/см^3 $(0{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3); $\rho_1 = 1{,}26$ г/см^3 $(1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3); $\eta = 1{,}48$ Па · с.

Найти: v_0.

Решение. На всплывающий шарик (см. рисунок) действуют сила тяжести $mg = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (r — радиус шарика), стоксова сила сопротивления жидкости $F = 6\pi\eta r v$ (v — скорость шарика) и выталкивающая сила $F_{\text{A}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g$.

Сила сопротивления F возрастает до тех пор, пока геометрическая сумма сил не станет равной нулю, после чего движение шарика происходит с постоянной скоростью v_0.

Второй закон Ньютона в проекции на выбранную ось x (см. рисунок)

$$F_{\text{A}} - mg - F = 0. \tag{1}$$

Подставив записанные выражения для сил в формулу (1), найдем

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_0,$$

откуда искомая предельная скорость

$$v_0 = \frac{2(\rho_1 - \rho) g r^2}{9\eta}.$$

Ответ: $v_0 = 3{,}9$ см/с.

1.200. Цилиндрический сосуд площадью основания $S = 20$ см^2 заполнен машинным маслом. В его боковую поверхность на расстоянии $h = 1{,}2$ м от верхнего края вставлен капилляр радиусом $r = 1{,}2$ мм. Определите длину l капилляра, если за время $t = 5$ с уровень масла понизился на $\Delta h = 10$ мм. Плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 100$ мПа · с.

Дано: $S = 20$ см^2 $(2 \cdot 10^{-3}$ м^2); $h = 1{,}2$ м; $r = 1{,}2$ мм $(1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м); $t = 5$ с; $\Delta h = 10$ мм $(10^{-2}$ м); $\rho = 0{,}9$ г/см^3 $(9 \cdot 10^2$ кг/м^3); $\eta = 100$ мПа · с (0,1 Па · с).

Найти: l.

Решение. Согласно формуле Пуазейля,

$$\eta = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8Vl}, \tag{1}$$

где r — радиус капилляра; Δp — разность давлений на концах капилляра; t — время истечения жидкости; V — объем вытекающей за время t жидкости.

Длина капилляра, согласно (1),

$$l = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8V\eta}. \tag{2}$$

Перепад давлений Δp на концах капиллярной трубки равен давлению столба h жидкости: $\Delta p = \rho g h$. Объем вытекающего за время t масла $V = S\Delta h$. Подставив эти формулы в выражение (2), найдем искомую длину капилляра

$$l = \frac{\pi r^4 \rho g h t}{8\eta S \Delta h}.$$

Ответ: $l = 2{,}16$ см.

1.201. Шарик радиусом $r = 2$ мм падает в глицерине с постоянной скоростью $v = 8{,}5$ мм/с. Определите число Рейнольдса Re и плотность ρ_1 материала шарика, если критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 0{,}5$. Плотность глицерина $\rho = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па $\cdot$ с.

Дано: $r = 2$ мм ($2 \cdot 10^{-3}$ м); $v = 8{,}5$ мм/с ($8{,}5 \cdot 10^{-3}$ м/с); $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 0{,}5$; $\eta = 1{,}48$ Па $\cdot$ с; $\rho = 1{,}26$ г/см^3 ($1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3).

Найти: Re; ρ_1.

Решение. Характер течения жидкости зависит от числа Рейнольдса, определяемого формулой

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta},$$

где ρ — плотность жидкости; v — скорость жидкости; d — диаметр шарика; η — динамическая вязкость жидкости. Учитывая данные задачи, получаем $\mathrm{Re} = 0{,}029$. Поскольку $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, то движение жидкости является ламинарным.

Стокс установил, что при небольших скоростях и размерах тел (при малых Re) сопротивление среды обусловлено практически только силой трения, определяемой по формуле

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r — радиус шарика.

При установившемся движении шарика в глицерине ($v = \text{const}$) сила тяжести шарика (P) уравновешивается выталкивающей силой ($F_{\text{А}}$) и силой трения (F): $P = F_{\text{А}} + F$ или

$$\rho_1 g V = \rho g V + 6\pi\eta r v, \qquad (1)$$

где g — ускорение свободного падения; V — объем шарика. Подставив в уравнение (1) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ и решив его, найдем искомую плотность материала шарика:

$$\rho_1 = \rho + \frac{9\eta v}{2 g r^2}.$$

Ответ: $\mathrm{Re} = 0{,}029$; $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3.

1.202. За время $t = 1$ ч через трубу диаметром $d = 40$ см прокачивается газ массой $m = 15$ кг. Динамическая вязкость газа $\eta = 10^{-5}$ Па $\cdot$ с. Если за характерный размер принять диаметр трубы, то критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ для ламинарного течения газа равно 2000. Определите характер течения газа.

Дано: $t = 1$ ч (3600 с); $d = 40$ см (0,4 м); $m = 15$ кг; $\eta = 10^{-5}$ Па $\cdot$ с; $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2000$.

Найти: Re.

Решение. Масса m газа, протекающего за время t через поперечное сечение трубы S,

$$m = \rho V = \rho S v t,$$

где ρ — плотность газа; V — объем протекающего газа; v — скорость потока. Тогда

$$v = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t} \qquad (1)$$

(учли, что $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$).

По определению, число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}. \qquad (2)$$

Подставив в (2) выражение (1), найдем число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{4m}{\pi \eta t d} = 1330.$$

Поскольку $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, течение газа является ламинарным.

Ответ: течение ламинарное.

Задачи для самостоятельного решения

1.203. Алюминиевый шар с внутренней полостью плавает, полностью погрузившись в воду. Определите объем ΔV полости, если масса шара $m = 0{,}2$ кг. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3. [$\Delta V = m\dfrac{\rho - \rho_1}{\rho\rho_1} = 126$ см^3]

1.204. Металлический шарик радиусом $r = 20$ см был сначала взвешен в воде, а затем в некоторой жидкости. При этом разность показаний весов составила $P = 65{,}7$ Н. Определите плотность ρ_1 жидкости, если плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. [$\rho_1 = \rho - \dfrac{3P}{4\pi r^3 g} = 0{,}8$ г/см^3]

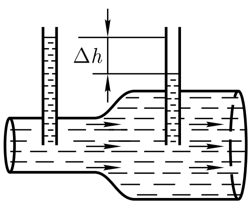
1.205. Масляный гидравлический пресс имеет площадь левого поршня $S_1 = 20$ см^2, правого — $S_2 = 100$ см^2. На какую высоту h опустится левый поршень, если на него поставить гирьку массой $m = 1{,}5$ кг? Плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3. [$h = \dfrac{m}{\rho S_1\left(1 + \dfrac{S_1}{S_2}\right)} = 69$ см]

1.206. Диаметр одного из колен U-образной трубки в $n = 3$ раза меньше, чем другого. В трубку сначала наливают воду, а затем в меньшее колено доливают масло, чтобы высота h его столба стала равной 30 см. Определите изменение Δh уровня воды в большем колене. Плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3. [$h = \dfrac{\rho h}{\rho_1(n^2+1)} = 2{,}7$ см]

1.207. Льдину толщиной $h = 1{,}5$ м вынесло из реки в океан. На какую высоту Δh поднялась льдина над поверхностью воды по сравнению с первоначальным уровнем? Плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3, плотность пресной воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, плотность океанской воды $\rho_2 = 1{,}03$ г/см^3. [$\Delta h = h\dfrac{\rho(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1\rho_2} = 0{,}04$ м]

1.208. Определите разность давлений Δp в широком и узком коленах горизонтальной трубы диаметрами $d_1 = 70$ см и $d_2 = 50$ см, если поток кислорода в узком колене имеет скорость $v = 24$ м/с. Плотность кислорода $\rho = 1{,}43$ г/см^3. [$\Delta p = \dfrac{\rho}{2}v^2\left[1 - \left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^4\right] = 304$ Па]

1.209. Определите объем воды V, проникающей внутрь корабля за время $t = 20$ мин через пробоину диаметром $d = 5$ см, которая находится в днище на глубине $h = 4$ м от поверхности воды. Давление в трюме принять равным атмосферному. [$V = \dfrac{\pi d^2 t}{4}\sqrt{2gh} = 20{,}9$ м^3]

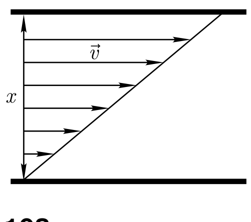


1.210. Определите время, необходимое для перекачки объема $V = 10$ м^3 воды через трубу переменного диаметра ($d_1 = 15$ см и $d_2 = 20$ см) (см. рисунок), если разность уровней воды в манометрических трубках $\Delta h = 12$ см. [$t = \dfrac{4V\sqrt{1 - \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^4}}{\pi d_1^2\sqrt{2g\Delta h}} = 5{,}08$ мин]

1.211. Пренебрегая вязкостью газа, определите разность уровней Δh воды в коленах трубки Пито (см. рис. к задаче 1.194), если она установлена в трубе диаметром $d = 40$ см, по которой протекает азот. Известно, что за время $t = 1$ мин перекачивается объем газа $V = 507$ м^3. Плотность азота $\rho_1 = 1{,}25$ кг/м^3, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. [$\Delta h = \dfrac{8V^2\rho_1}{\pi^2\rho g d^4 t^2} = 28{,}8$ см]

1.212. Алюминиевый шарик радиусом $r = 2$ мм падает в глицерине с постоянной скоростью. Определите время t, затрачиваемое шариком на прохождение расстояния $h = 10$ см, если плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3, плотность глицерина $\rho_1 = 1{,}26$ г/см^3. Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па $\cdot$ с. [$t = \dfrac{9\eta h}{2g(\rho - \rho_1)r^2} = 11{,}7$ с]

1.213. Горизонтальный капилляр внутренним радиусом $r = 1{,}5$ мм и длиной $l = 2$ см вставлен в боковую поверхность сосуда с касторовым маслом. На какой высоте h требуется поддерживать уровень масла по отношению к капилляру, чтобы за время $t = 1$ мин вытекало $m = 40$ г масла? Плотность касторового масла $\rho = 0{,}96$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 0{,}987$ Па $\cdot$ с. [$h = \dfrac{8\eta m l}{\rho^2\pi r^4 t g} = 0{,}732$ м]



1.214. Определите динамическую вязкость η воздуха, если капли дождя диаметром $d = 1$ мм падают со скоростью $v = 4{,}2$ м/с. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. [$\eta = \dfrac{\rho g d^2}{18v} = 0{,}13$ мПа $\cdot$ с]

1.215. Машинное масло течет между двумя пластинами с одинаковой площадью $S = 0{,}2$ м^2, при этом его скорость меняется линейно от 0 до 0,3 м/с (см. рисунок). Определите коэффициент динамической вязкости η масла, если сила внутреннего трения $F = 15$ мН, а расстояние между пластинами $x = 40$ см. [$\eta = 0{,}1$ Па $\cdot$ с]

1.7. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Основные законы и формулы

• Преобразования Лоренца

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

[система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y, z и z' параллельны; c — скорость распространения света в вакууме].

• Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

[τ — промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке, отсчитанный движущимися вместе с телом часами (собственное время движущихся часов); τ' — промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами].

• Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

[l_0 — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v].

• Релятивистский закон сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}, \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}.$$

Система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y, z и z' параллельны:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2}u}.$$

• Интервал между событиями

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$$

[$t_{12} = t_2 - t_1$ — промежуток времени между событиями *1* и *2*; $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$ — расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли].

• Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

[m — масса частицы; v — скорость частицы].

• Основной закон релятивистской динамики

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

[m — релятивистский импульс частицы].

• Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2$$

[m — масса частицы; c — скорость распространения света в вакууме].

• Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

[m — масса частицы; v — ее скорость].

• Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}$$

[m — масса частицы; E — полная энергия; T — кинетическая энергия; p — релятивистский импульс].

Примеры решения задач

1.216. Космический корабль летит со скоростью $v = 0{,}8c$ относительно Земли. Определите промежуток времени τ', отсчитанный по часам на Земле, если по корабельным часам между двумя происшедшими на корабле событиями проходит промежуток времени $\tau = 1$ год.

Дано: $v = 0{,}8c$; $\tau = 1$ год.

Найти: τ'.

Решение. Релятивистское замедление времени

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

где τ — промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный по часам, неподвижным относительно корабля; τ' — промежуток времени между теми же событиями по часам, неподвижным относительно Земли.

Вычисляя, получаем $\tau' = 1{,}6$ года.

Таким образом, на Земле прошло 1,6 года, т.е. часы на корабле идут медленнее, чем на Земле. При решении является важным тот факт, что события, между которыми отсчитывается время, происходят в одной точке корабля. Следует отметить, что по часам, связанным с кораблем, обнаруживается обратный эффект относительно событий, происходящих на Земле.

Ответ: $\tau' = 1{,}6$ года.

1.217. Определите скорость нестабильной частицы, если ее время жизни по часам наблюдателя с Земли увеличилось в $n = 1{,}8$ раз.

Дано: $n = \dfrac{\tau'}{\tau} = 1{,}8$.

Найти: v.

Решение. Систему отсчета K свяжем с частицей, тогда промежуток времени между возникновением и распадом частицы в этой системе равен ее собственному времени жизни τ. Поскольку система K движется вместе с частицей, то эти события происходят в одной точке, что является необходимым условием применения формулы, описывающей релятивистское замедление хода часов.

Для системы K', связанной с Землей, время жизни частицы — τ'. Тогда $\tau' = \dfrac{\tau}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, откуда

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = n \qquad (1)$$

(учли условие задачи). Из выражения (1) искомая скорость

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Ответ: $v = 0{,}831c$.

1.218. Долетит ли до поверхности Земли возникшая на высоте $h = 4$ км нестабильная частица, обладающая собственным временем жизни $\tau = 4{,}5$ мкс и летящая со скоростью $v = 0{,}95c$ по направлению к Земле?

Дано: $h = 4$ км ($4 \cdot 10^3$ м); $v = 0{,}95c$; $\tau = 4$ мкс ($4 \cdot 10^{-6}$ с).

Найти: s.

Решение. Расстояние, которое пройдет частица в системе отсчета, связанной с Землей, определяется как

$$s = v\tau', \tag{1}$$

где τ' — время жизни частицы, измеренное по часам на Земле.

Промежуток времени τ' связан с собственным временем жизни частицы τ соотношением

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

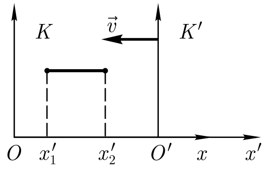
Подставив (2) в (1), получаем искомое расстояние

$$s = \frac{v\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычисляя, получаем: $s = 4{,}11 \cdot 10^3$ м $> h$, т. е. частица долетит до Земли.

Ответ: $s > h$, частица до Земли долетит.

1.219. С какой скоростью тело должно лететь навстречу наблюдателю, чтобы его линейный размер уменьшился на 7 %?



Дано: $l = 0{,}93 l_0$.

Найти: v.

Решение. Систему отсчета K' свяжем с телом, тогда $x_2' - x_1' = l_0$ — собственные размеры тела вдоль направления движения (см. рисунок). Если систему K связать с наблюдателем, то размер тела в этой системе $l = x_2 - x_1$, причем координаты x_2 и x_1 должны быть измерены в один и тот же момент времени по часам системы K, т. е. $t_1 = t_2$. Учитывая взаимное направление движения систем K и K', преобразования Лоренца для координат запишутся в виде

$$x_2' = \frac{x_2 + vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}; \qquad x_1' = \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

и искомая скорость

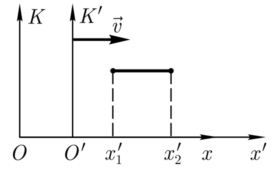
$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{l}{l_0}\right)^2}.$$

Ответ: $v = 0{,}368c$.

1.220. Определите собственную длину стержня l_0, если для наблюдателя, пролетающего со скоростью $v = 0{,}85c$, его длина равна 1 м.

Дано: $l = 1$ м; $v = 0{,}85c$.

Найти: l_0.



Решение. Систему отсчета K' свяжем со стержнем, систему отсчета K — с наблюдателем. Пусть система K' движется в положительном направлении оси x системы K (см. рисунок). Согласно преобразованиям Лоренца, координаты концов стержня

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где $t_1 = t_2$ (измерения координат концов стержня проводятся в один и тот же момент по часам данной системы).

Собственная длина стержня

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

Ответ: $l_0 = 1{,}9$ м.

1.221. Космическая платформа движется со скоростью $v = 0{,}8c$ относительно наблюдателя. На платформе одновременно происходят два события в точках, расположенных на расстоянии $l_0 = 150$ м друг от друга. Определите промежуток времени τ' между этими событиями, отсчитанный по часам наблюдателя.

Дано: $v = 0{,}8c$; $l_0 = x_2 - x_1 = 150$ м; $t_2 = t_1 = t$.

Найти: τ'.

Решение. Систему отсчета K свяжем с платформой, систему отсчета K' — с наблюдателем. По условию задачи K' движется относительно K со скоростью v в направлении, принятом за положительное.

Искомый промежуток времени

$$\tau' = t_1' - t_2', \tag{1}$$

где t_1' и t_2' — показания синхронизированных часов в системе K', расположенных в точках x_1' и x_2', в те моменты времени, когда в каждой из точек произошло рассматриваемое событие.

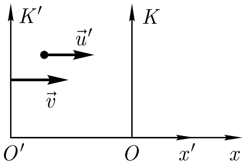
Согласно преобразованиям Лоренца,

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Подставив выражения (2) в формулу (1) и учитывая, что $t_2 = t_1 = t$ и $x_2 - x_1 = l_0$, найдем

$$\tau' = \frac{l_0 v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ответ: $\tau' = 0{,}667$ мкс.



1.222. С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью $v_1 = 0{,}6c$, по ходу движения корабля стартовала ракета со скоростью $v_2 = 0{,}5c$. С какой скоростью u ракета приближается к Земле?

Дано: $v_1 = 0{,}6c$; $v_2 = 0{,}5c$.

Найти: u.

Решение. Систему отсчета K свяжем с Землей, систему отсчета K' — с космическим кораблем. Тогда скорость ракеты u в системе K и есть искомая скорость сближения. Согласно релятивистскому закону сложения скоростей,

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}}, \qquad (1)$$

где, по условию задачи, скорость движения космического корабля относительно Земли $v = v_1$, скорость ракеты относительно космического корабля $u' = v_2$.

Подставив эти значения в формулу (1), найдем искомую скорость:

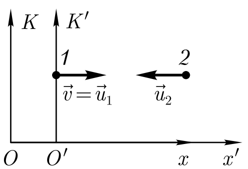
$$u = \frac{v_2 + v_1}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Ответ: $u = 0{,}846c$.

1.223. Два фотона движутся навстречу друг другу со скоростями, равными c относительно неподвижных звезд. Определите скорость сближения фотонов.

Дано: $u_1 = c$; $u_2 = c$.

Найти: u_2'.



Решение. Систему отсчета K' свяжем с одним из фотонов, а систему отсчета K — с неподвижными звездами. Тогда скорость первого фотона в системе K $u_1 = c$, второго $u_2 = -c$. Пусть система K' движется относительно K со скоростью v (см. рисунок). Согласно условию задачи и с учетом выбранного направления осей, $v = u_1 = c$. Скорость второго фотона u_2' в системе K' есть скорость сближения фотонов.

Согласно релятивистскому закону сложения скоростей,

$$u_2' = \frac{u_2 - v}{1 - \dfrac{v u_2}{c^2}}, \qquad (1)$$

где u_2' — скорость движения второго фотона в системе K' (равна искомой скорости сближения); $u_2 = -c$ — скорость второго фотона в системе K; $v = u_1 = c$ — скорость движения системы K' относительно K.

Подставляя эти значения в формулу (1), получаем искомую скорость

$$u_2' = -c,$$

знак «–» показывает лишь направление движения объекта относительно выбранной оси.

Ответ: $u_2' = c$.

1.224. Определите релятивистский импульс частицы, если ее полная энергия $E = 1{,}5$ ГэВ, а скорость $v = 0{,}5c$.

Дано: $E = 1{,}5$ ГэВ $= 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ Дж; $v = 0{,}5c$.

Найти: p.

Решение. Релятивистский импульс частицы

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

где m — масса частицы; v — ее скорость.

Умножая выражение (1) на c^2, получим искомый импульс:

$$p = \frac{mvc^2}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ev}{c^2}$$

(учли, что полная энергия $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$).

Ответ: $p = 0{,}4 \cdot 10^{-18}$ Н · с.

1.225. Определите скорость частицы, если ее полная энергия в $n = 2{,}5$ раза больше ее энергии покоя.

Дано: $\dfrac{E}{E_0} = n = 2{,}5$.

Найти: v.

Решение. Полная энергия частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

где m — масса частицы; v — ее скорость; c — скорость распространения света в вакууме.

Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2. \tag{2}$$

Согласно формулам (1) и (2),

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = n$$

(учли условие задачи), откуда искомая скорость частицы

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Ответ: $v = 0{,}917c$.

1.226. Кинетическая энергия частицы в $n = 2$ раза меньше ее энергии покоя. Определите скорость движения частицы.

Дано: $\dfrac{E_0}{T} = n = 2.$

Найти: v.

Решение. Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2, \tag{1}$$

где m — масса частицы.

Кинетическая энергия частицы

$$T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{2}$$

Учитывая формулу (1) и условие задачи, можем записать

$$T = \frac{mc^2}{n}. \tag{3}$$

Приравняв выражения (2) и (3), получим

$$\frac{mc^2}{n} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right),$$

откуда искомая скорость частицы

$$v = c\sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+1)^2}}.$$

Ответ: $v = 0{,}745c$.

1.227. Определите кинетическую энергию протона, если его релятивистский импульс $p = 2 \cdot 10^{-18}$ Н · с. Масса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано: $p = 2 \cdot 10^{-18}$ Н · с; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: T.

Решение. Релятивистский импульс протона

$$p = \frac{m_p v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

где m_p — масса протона; v — его скорость.

Кинетическая энергия релятивистского протона

$$T = m_p c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) найдем связь между кинетической энергией и релятивистским импульсом протона

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_p c^2)},$$

откуда искомая кинетическая энергия протона

$$T = \sqrt{m_p^2 c^4 + p^2 c^2} - m_p c^2.$$

Ответ: $T = 2{,}93$ ГэВ.

Задачи для самостоятельного решения

1.228. Какой промежуток времени τ пройдет между двумя событиями на Земле по неподвижным относительно Земли часам, если по часам на космическом корабле пройдет $\tau' = 1$ год? Корабль движется относительно Земли со скоростью $v = 0{,}6c$. [$\tau = 0{,}8$ года]

1.229. Для наблюдателя, неподвижного относительно системы K, одновременно в двух точках на расстоянии $l = 10^5$ км произошли два события. Определите промежуток времени τ' между этими событиями в системе K', движущейся относительно системы K со скоростью $v = 0{,}65c$. [$\tau' = \dfrac{vl}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 0{,}285$ с]

1.230. Скорость нестабильного мюона относительно Земли $v = 0{,}99c$. Чему равно время жизни τ' мюона для наблюдателя с Земли, если собственное время жизни мюона составляет $\tau = 3$ мкс. [$\tau' = 21{,}3$ мкс]

1.231. Определите скорость, с которой тело должно удаляться от наблюдателя, чтобы его линейные размеры уменьшились на 5 %. [$v = 0{,}312c$]

1.232. Докажите, что длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.

1.233. Определите расстояние s, которое пролетит мюон с собственным временем жизни $\tau = 1{,}5$ мкс. Время его жизни в системе, связанной с Землей, $\tau' = 6{,}0$ мкс. [$s = c\tau'\sqrt{1 - \left(\dfrac{\tau}{\tau'}\right)^2} = 1{,}74 \cdot 10^3$ м]

1.234. С космического корабля, удаляющегося от Земли со скоростью $v = 0{,}5c$, запустили фотонную ракету (с технической точки зрения — это пока фантазия). Какова должна быть скорость u этой ракеты относительно Земли? [$u = c$]

1.235. Две ракеты сближаются относительно неподвижных звезд со скоростями $v_1 = 0{,}6c$ и $v_2 = 0{,}8c$. Определите скорость u' их сближения. [$u' = 0{,}946c$]

1.236. Докажите инвариантность интервала во всех инерциальных системах отсчета.

1.237. Определите релятивистский импульс p электрона, движущегося со скоростью $v = 0{,}97c$. [$p = 1{,}09 \cdot 10^{-21}$ Н · с]

1.238. Определите увеличение релятивистского импульса частицы, если ее скорость $v = 0{,}75c$. [1,51 раз]

1.239. Определите кинетическую энергию электрона, если его скорость $v = 0{,}76c$. [$T = 0{,}276$ МэВ]

1.240. Определите кинетическую энергию релятивистского протона, если его полная энергия в $n = 1{,}5$ раза больше его энергии покоя. [$T = (n - 1)mc^2 = 0{,}47$ ГэВ]

1.241. Определите ускоряющую разность потенциалов U, сообщающую электрону скорость $v = 0{,}7c$. [$U = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right) = 0{,}205$ МВ]

1.242. Определите скорость релятивистской частицы, если ее кинетическая энергия в $n = 1{,}8$ раза больше энергии покоя. [$v = c\sqrt{1-\dfrac{1}{(n+1)^2}} = 0{,}934c$]

1.243. Используя выражения для релятивистского импульса и кинетической энергии частицы, докажите, что $pc = \sqrt{T(T+2mc^2)}$.

1.244. Определите релятивистский импульс электрона, если его скорость $v = 0{,}45c$, а кинетическая энергия $T = 0{,}3$ МэВ. [$p = mv\left(1+\dfrac{T}{mc^2}\right) = 1{,}95\cdot 10^{-23}$ Н $\cdot$ с]

1.245. Докажите, что величина $E^2 - p^2c^2$ является инвариантом для всех инерциальных систем отсчета.

ГЛАВА 2
ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Основные законы и формулы

• Связь термодинамической температуры T и температуры t по Международной практической шкале (шкале Цельсия)

$$T = 273 + t.$$

• Молярная масса

$$M = m_0 N_{\mathrm{A}}$$

[m_0 — масса молекулы; N_{A} — постоянная Авогадро].

• Молярный объем

$$V_{\mathrm{m}} = \frac{V}{\nu}$$

[V — объем однородной массы; $\nu = \dfrac{m}{M}$ — количество вещества].

• Закон Бойля—Мариотта

$$pV = \mathrm{const} \ (T = \mathrm{const},\ m = \mathrm{const})$$

[p — давление газа; V — объем газа; T — термодинамическая температура; m — масса газа].

• Закон Гей-Люссака

$$V = V_0(1 + \alpha t) \text{ или } \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \ (p = \mathrm{const},\ m = \mathrm{const});$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) \text{ или } \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \ (V = \mathrm{const},\ m = \mathrm{const})$$

[t — температура газа по шкале Цельсия; V_0 и p_0 — соответственно объем и давление при 0 °C; коэффициент $\alpha = \dfrac{1}{273}$ К$^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям газа].

• Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

[p_i — парциальное давление i-го компонента смеси], т. е. давление смеси газов равно сумме парциальных давлений.

• Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева)

$$pV_{\text{m}} = RT \text{ (для 1 моль газа)},$$

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[V_{m} — молярный объем; R — молярная газовая постоянная; M — молярная масса газа; m — масса газа; $\nu = \dfrac{m}{M}$ — количество вещества].

• Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT$$

[$k = \dfrac{R}{N_{\text{A}}}$ — постоянная Больцмана; N_{A} — постоянная Авогадро; R — молярная газовая постоянная].

• Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{\text{кв}}\rangle^2$$

или

$$pV = \frac{2}{3}N\frac{m_0\langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{2} = \frac{2}{3}E,$$

или

$$pV = \frac{1}{3}Nm_0\langle v_{\text{кв}}\rangle^2 = \frac{1}{3}m\langle v_{\text{кв}}\rangle^2$$

[$\langle v_{\text{кв}}\rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул; E — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n — концентрация молекул; m_0 — масса одной молекулы; $m = Nm_0$ — масса газа; N — число молекул в объеме V газа].

• Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle v_{\text{кв}}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

[T — термодинамическая температура; m_0 — масса одной молекулы; $k = \dfrac{R}{N_{\text{A}}}$ — постоянная Больцмана].

• Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0\rangle = \frac{m_0\langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

[m_0 — масса одной молекулы; $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ — ее средняя квадратичная скорость; k — постоянная Больцмана].

• Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N(v)}{N\mathrm{d}v} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{m_0v^2}{2kT}}$$

[функция $f(v)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $\frac{\mathrm{d}N(v)}{N}$, обладающих данной скоростью, из общего числа N молекул].

• Наиболее вероятная скорость молекул

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$

[m_0 — масса одной молекулы; M — молярная масса; R — молярная газовая постоянная; $k = \frac{R}{N_{\text{A}}}$ — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура].

• Средняя (средняя арифметическая) скорость молекул

$$\langle v\rangle = \int_0^{\infty} v f(v)\mathrm{d}v = \int_0^{\infty} 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

• Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{\mathrm{d}N(\varepsilon)}{N\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

[функция $f(\varepsilon)$ распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул $\frac{\mathrm{d}N(\varepsilon)}{N}$ из общего числа N молекул, которые имеют данную кинетическую энергию $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$].

• Барометрическая формула

$$p_h = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mg(h-h_0)}{RT}}$$

[p_h и p_0 — давления газа на высоте h и h_0 соответственно; M — молярная масса; g — ускорение свободного падения; R — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура].

• Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-\frac{\Pi}{kT}}$$

[n и n_0 — концентрация молекул на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0 g h$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; m_0 — масса одной молекулы].

• Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle$$

[d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle v\rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

• Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

[d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle z \rangle$ — среднее число столкновений молекулы за 1 с; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

• Закон теплопроводности Фурье

$$j_E = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

[j_E — плотность теплового потока; λ — теплопроводность (коэффициент теплопроводности); $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ — градиент температуры].

• Теплопроводность

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$$

[c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ — плотность газа; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул].

• Закон диффузии Фика

$$j_m = -D \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}$$

[j_m — плотность потока массы; D — диффузия (коэффициент диффузии); $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}$ — градиент плотности].

• Диффузия (коэффициент диффузии)

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$$

[$\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

• Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$j_p = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

[j_p — плотность потока импульса; η — динамическая вязкость; $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ — градиент скорости].

• Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$$

[ρ — плотность газа; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул; $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега].

• Связь между коэффициентами теплопроводности (λ), диффузии (D) и динамической вязкостью (η)

$$\eta = \rho D, \qquad \frac{\lambda}{\eta c_V} = 1$$

[ρ — плотность газа; c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме].

Примеры решения задач

2.1. Определите число N молекул воды в бутылке вместимостью 0,33 л. Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Дано: $V = 0{,}33$ л ($0{,}33 \cdot 10^{-3}$ м^3); $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\rho = 1$ г/см^3 (1000 кг/м^3).

Найти: N.

Решение. Масса воды, занимающей объем V,

$$m = \rho V, \tag{1}$$

где ρ — плотность воды.

Масса молекулы

$$m_0 = \frac{M}{N_{\text{A}}}, \tag{2}$$

где M — молярная масса; $N_{\text{A}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро.

Число молекул в бутылке

$$N = \frac{m}{m_0}. \tag{3}$$

Подставляя в выражение (3) формулы (1) и (2), получим искомое число молекул:

$$N = \frac{\rho N_{\text{A}} V}{M}.$$

Ответ: $N = 1{,}1 \cdot 10^{25}$.

2.2. В баллоне вместимостью $V = 5$ л находится кислород, концентрация n молекул которого равна $8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Определите массу m кислорода.

Дано: $V = 5$ л ($5 \cdot 10^{-3}$ м^3); $n = 8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: m.

Решение. Масса газа

$$m = N m_0, \tag{1}$$

где N — число молекул; m_0 — масса одной молекулы.

Масса молекулы

$$m_0 = \frac{M}{N_{\text{A}}}, \tag{2}$$

где M — молярная масса; N_{A} — постоянная Авогадро.

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что концентрация молекул $n = \dfrac{N}{V}$, получим выражение для искомой массы газа:

$$m = \frac{MnV}{N_A}.$$

Ответ: $m = 21{,}3$ г.

2.3. Газ в баллоне под давлением $p_1 = 3{,}1$ МПа находился на складе при температуре $t_1 = 6$ °C. Израсходовав половину газа, баллон внесли в помещение. Определите температуру t_2 в помещении, если давление газа через некоторое время стало $p_2 = 1{,}6$ МПа.

Дано: $p_1 = 3{,}1$ МПа ($3{,}1 \cdot 10^6$ Па); $t_1 = 6$ °C ($T_1 = 279$ К); $p_2 = 1{,}6$ МПа ($1{,}6 \cdot 10^6$ Па).

Найти: t_2.

Решение. После израсходования половины массы газа при постоянной температуре (на складе) плотность газа уменьшилась вдвое, поэтому вдвое уменьшилось и давление газа:

$$p_1' = \frac{p_1}{2}. \tag{1}$$

Далее газ нагревается при постоянном объеме (изохорно) и постоянной массе от температуры T_1 до температуры T_2. Согласно закону Гей-Люссака,

$$\frac{p}{T} = \text{const} \;\; (V = \text{const}, m = \text{const}).$$

Согласно этой формуле, можно записать

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) выражение (1), получим искомую температуру

$$T_2 = \frac{2p_2}{p_1} T_1.$$

Ответ: $t_2 = 15$ °C.

2.4. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находятся 10 г водорода и 16 г гелия. Считая газы идеальными, определите удельный объем $v_{см}$ смеси.

Дано: $m_1 = 10$ г (10^{-2} кг); $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m_2 = 16$ г ($1{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг); $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К; $p = 0{,}1$ МПа (10^5 Па).

Найти: $v_{см}$.

Решение. Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2. \tag{1}$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева имеем

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \quad \text{и} \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Найдя отсюда p_1 и p_2 и подставив в (1), получим

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT.$$

Удельный объем смеси

$$v_{\text{см}} = \frac{V}{m_1 + m_2} = \frac{\left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right) RT}{(m_1 + m_2)p}.$$

Ответ: $v_{\text{см}} = 8{,}63$ м^3/кг.

2.5. Кислород массой $m = 10$ г находится под давлением 200 кПа при температуре 280 К. В результате изобарного расширения газ занял объем 9 л. Определите: 1) объем газа V_1 до расширения; 2) температуру газа T_2 после расширения; 3) плотность газа ρ_2 после расширения.

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 10$ г (10^{-2} кг); $p = 200$ кПа ($2 \cdot 10^5$ Па) $=$ const; $T_1 = 280$ К; $V_2 = 9$ л ($9 \cdot 10^{-3}$ м^3).

Найти: 1) V_1; 2) T_2; 3) ρ_2.

Решение. Объем газа до расширения найдем, согласно уравнению Клапейрона — Менделеева,

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1,$$

откуда

$$V_1 = \frac{mRT_1}{Mp}.$$

Записав уравнение Клапейрона — Менделеева для конечного состояния газа,

$$pV_2 = \frac{m}{M} RT_2,$$

найдем искомую температуру

$$T_2 = \frac{MpV_2}{mR}.$$

Плотность газа после расширения газа

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2}.$$

Ответ: $V_1 = 3{,}64$ л; $T_2 = 693$ К; $\rho_2 = 1{,}11$ кг/м^3.

2.6. В баллоне вместимостью $V = 5$ л находится гелий под давлением $p_1 = 3$ МПа при температуре $t_1 = 27\ ^\circ$C. После того как из баллона был израсходован гелий массой $m = 15$ г, температура в баллоне понизилась до $t_2 = 17\ ^\circ$C. Определите давление p_2 газа, оставшегося в баллоне.

Дано: $V = 5$ л ($5 \cdot 10^{-3}$ м^3); $p_1 = 3$ МПа ($3 \cdot 10^6$ Па); $t_1 = 27\ ^\circ$C ($T_1 = 300$ К); $m = 15$ г ($1{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг); $t_2 = 17\ ^\circ$C ($T_2 = 290$ К); $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: p_2.

Решение. Запишем уравнение Клапейрона—Менделеева для начального *1* и конечного *2* состояний газа:

$$p_1V = \frac{m_1}{M}RT_1 \quad \text{и} \quad p_2V = \frac{m_2}{M}RT_2,$$

где R — молярная газовая постоянная; M — молярная масса.

Выразим из этих уравнений массы

$$m_1 = \frac{Mp_1V}{RT_1} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{Mp_2V}{RT_2}.$$

Тогда

$$m = m_1 - m_2 = \frac{MVp_1}{RT_1} - \frac{MVp_2}{RT_2},$$

откуда выражение для искомого давления

$$p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V} = T_2\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{m}{M}\frac{R}{V}\right).$$

Ответ: $p_2 = 1{,}09$ МПа.

2.7. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится кислород массой $m = 15$ г. Определите: 1) концентрацию n молекул кислорода в сосуде; 2) число N молекул газа в сосуде.

Дано: $V = 5$ л ($5 \cdot 10^{-3}$ м^3); $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 15$ г ($1{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг).

Найти: 1) n; 2) N.

Решение. Записав уравнение Клапейрона—Менделеева

$$pV = \frac{m}{M}RT \tag{1}$$

и уравнение состояния идеального газа

$$p = nkT \tag{2}$$

и поделив (1) на (2), найдем искомую концентрацию молекул кислорода в сосуде

$$n = \frac{mR}{kMV}.$$

Концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V},$$

откуда искомое число молекул газа в сосуде

$$N = nV.$$

Ответ: 1) $n = 5{,}64 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$; 2) $N = 2{,}82 \cdot 10^{23}$.

2.8. Определите среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул идеального газа, плотность которого при давлении 35 кПа составляет 0,3 кг/м^3.

Дано: $p = 35$ кПа ($3{,}5 \cdot 10^4$ Па); $\rho = 0{,}3$ кг/м^3.

Найти: $\langle v \rangle$.

Решение. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеальных газов,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \tag{1}$$

где n — концентрация молекул; m_0 — масса одной молекулы; $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул.

Учитывая, что $\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$, а $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, получаем

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \langle v_{\text{кв}} \rangle. \tag{2}$$

Так как плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N m_0}{V} = n m_0,$$

где m — масса газа; V — его объем; N — число молекул газа, уравнение (1) можно записать в виде

$$p = \frac{1}{3} \rho \langle v_{\text{кв}} \rangle^2$$

или $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}}$. Подставляя это выражение в формулу (2), находим искомую среднюю арифметическую скорость:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}}.$$

Ответ: $\langle v \rangle = 545$ м/с.

2.9. Исходя из основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов, выведите связь между давлением p газа, его объемом V и суммарной кинетической энергией E поступательного движения всех молекул газа.

Решение. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеальных газов,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \tag{1}$$

где n — концентрация молекул; m_0 — масса одной молекулы; $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул.

Учитывая, что $n = \dfrac{N}{V}$ (N — число молекул в объеме газа V), уравнение (1) можно записать в виде

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2. \tag{2}$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2},$$

а суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа

$$E = N\langle \varepsilon_0 \rangle = N\frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2}. \qquad (3)$$

Учитывая выражение (3), из формулы (2) получим искомую связь между p, V и E:

$$pV = \frac{2}{3}E.$$

Ответ: $pV = \dfrac{2}{3}E.$

2.10. Определите среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ поступательного движения молекул, содержащихся в 1 моль $\langle E_1 \rangle$ и в 1 кг $\langle E_2 \rangle$ азота при температуре 300 К.

Дано: $\nu = 1$ моль; $m = 1$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К.

Найти: $\langle E_1 \rangle$, $\langle E_2 \rangle$.

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана.

Так как число молекул в 1 моль равно $N_{\text{А}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, средняя кинетическая энергия содержащихся в 1 моль молекул

$$\langle E_1 \rangle = N_{\text{А}}\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2}kTN_{\text{А}} = \frac{3}{2}RT,$$

где $R = kN_{\text{А}}$ — молярная газовая постоянная.

Средняя кинетическая энергия молекул идеального газа в случае произвольной массы m газа

$$\langle E_2 \rangle = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT,$$

где M — молярная масса газа.

Ответ: $\langle E_1 \rangle = 3{,}74$ кДж; $\langle E_2 \rangle = 133$ кДж.

2.11. Используя закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям, найдите закон, выражающий распределение молекул идеального газа по энергиям теплового движения $f(\varepsilon)$.

Дано: $f(v) = 4\pi\left(\dfrac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$

Найти: $f(\varepsilon)$.

Решение. В случае функции распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения имеется в виду функция распределения по кинетическим энергиям поступательного движения. Эта энергия ε связана со скоростью v соотношением $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$, где m_0 — масса молекулы.

Функция распределения $f(v)$ определяет относительное число молекул $\frac{\mathrm{d}N_v}{N}$, скорости которых заключены в интервале от v до $v + \mathrm{d}v$:

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N_v}{N}\mathrm{d}v. \tag{1}$$

Согласно формуле (1), число молекул, скорости которых заключены в интервале от v до $v + \mathrm{d}v$, равно

$$\mathrm{d}N_v = Nf(v)\mathrm{d}v = N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 \mathrm{d}v \tag{2}$$

(учли условие задачи).

Заменив в формуле (2) v^2 и $\mathrm{d}v$ их выражениями через ε и $\mathrm{d}\varepsilon$ ($v^2 = \frac{2\varepsilon}{m_0}$; $v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}}$; $\mathrm{d}v = (2m_0\varepsilon)^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon$), придем к выражению

$$\mathrm{d}N_\varepsilon = N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \frac{2\varepsilon}{m_0}(2m_0\varepsilon)^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}\varepsilon = N\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}\varepsilon,$$

где $\mathrm{d}N_\varepsilon$ — число молекул, кинетическая энергия поступательного движения которых заключена в интервале от ε до $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$. Следовательно, функция распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения имеет вид

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

Ответ: $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$.

2.12. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$, определите для данной температуры отношение средней кинетической энергии $\langle\varepsilon\rangle$ молекул к их наиболее вероятному значению энергии $\varepsilon_{\text{в}}$.

Дано: $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$.

Найти: $\frac{\langle\varepsilon\rangle}{\varepsilon_{\text{в}}}$.

Решение. Согласно определению, средняя кинетическая энергия молекул задается формулой

$$\langle\varepsilon\rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon. \tag{1}$$

Подставив в выражение (1) функцию распределения и взяв интеграл, получим

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int\limits_0^{\infty}\varepsilon^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}\varepsilon = \frac{3}{2}kT. \quad (2)$$

Наиболее вероятное значение энергии найдем, продифференцировав функцию распределения по аргументу ε, приравняв результат нулю:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right] = 0,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2} - \frac{\varepsilon^{1/2}}{kT}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2\varepsilon_{\text{в}}^{1/2}} - \frac{\varepsilon_{\text{в}}^{1/2}}{kT} = 0. \quad (3)$$

Из выражения (3) получаем, что

$$\varepsilon_{\text{в}} = \frac{1}{2}kT. \quad (4)$$

Из формул (2) и (3) находим искомое отношение средней кинетической энергии молекул к их наиболее вероятному значению энергии

$$\frac{\langle\varepsilon\rangle}{\varepsilon_{\text{в}}} = 3.$$

Ответ: $\frac{\langle\varepsilon\rangle}{\varepsilon_{\text{в}}} = 3.$

2.13. Используя функцию распределения молекул идеального газа по относительным скоростям $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}u^2$ ($u = \frac{v}{v_{\text{в}}}$), определите число молекул ΔN, скорости v которых меньше 0,002 наиболее вероятной скорости, если в объеме газа содержится $N = 1{,}67\cdot10^{24}$ молекул.

Дано: $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}u^2$; $u = \frac{v}{v_{\text{в}}}$; $N = 1{,}67\cdot10^{24}$; $v_{\max} = 0{,}002v_{\text{в}}$.

Найти: ΔN.

Решение. Число $\mathrm{d}N(u)$ молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + \mathrm{d}u$,

$$\mathrm{d}N(u) = Nf(u)\mathrm{d}u = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}u^2\mathrm{d}u, \quad (1)$$

где N — число молекул в объеме газа. По условию задачи, $v_{\max} = 0{,}002v_{\text{в}}$, то $u_{\max} = \frac{v_{\max}}{v_{\text{в}}} = 0{,}002$. Так как $u \ll 1$, $\mathrm{e}^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Пренебрегая $u^2 \ll 1$, выражение (1) можно записать в виде

$$\mathrm{d}N(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}u^2\mathrm{d}u. \quad (2)$$

Проинтегрировав (2) по u в пределах от 0 до $u_{\max}$, найдем

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{u_{\max}} u^2\mathrm{d}u = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}}\,u_{\max}^3. \qquad (2)$$

Ответ: $\Delta N = 10^{16}$.

2.14. Используя функцию распределения молекул идеального газа по скоростям $f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$, найдите среднюю скорость $\langle v\rangle$ молекул.

Дано: $f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$.

Найти: $\langle v\rangle$.

Решение. Согласно определению, средняя скорость задается формулой

$$\langle v\rangle = \int\limits_0^{\infty} v f(v)\mathrm{d}v, \qquad (1)$$

где $f(v)$ — функция распределения молекул по скоростям.

Подставив в (1) функцию распределения, придем к выражению

$$\langle v\rangle = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int\limits_0^{\infty} v^3 \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\mathrm{d}v.$$

Используя табличный интеграл $\int\limits_0^{\infty} x^3\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a^{-2}$ и обозначив $x = v$ и $a = \frac{m_0}{2kT}$, получим

$$\langle v\rangle = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{-2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

Ответ: $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$.

2.15. Французский физик Ж. Перрен, наблюдая под микроскопом изменение концентрации взвешенных в воде ($\rho = 1$ г/см^3) шариков гуммигута ($\rho_1 = 1{,}25$ г/см^3) с изменением высоты, экспериментально определил постоянную Авогадро. Определите это значение, если температура взвеси $T = 298$ К, радиус шариков $r = 0{,}21$ мкм, а при расстоянии между двумя слоями $\Delta h = 30$ мкм число шариков гуммигута в одном слое в два раза больше, чем в другом.

Дано: $\rho = 1$ г/см^3 (1000 кг/м^3); $\rho_1 = 1{,}25$ г/см^3 (1250 кг/м^3); $T = 298$ К; $r = 0{,}21$ мкм ($0{,}21\cdot 10^{-6}$ м); $\Delta h = 30$ мкм ($3\cdot 10^{-5}$ м); $\frac{n_1}{n_2} = 2$.

Найти: N_A.

Решение. Барометрическую формулу

$$p = p_0\mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

используя уравнение состояния $p = nkT$, можно преобразовать для высот h_1 и h_2 к виду

$$n_1 = n_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mgh_1}{RT}} \text{ и } n_2 = n_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mgh_2}{RT}},$$

где n_0, n_1 и n_2 — соответственно концентрация молекул на высоте h_0, h_1 и h_2; M — молярная масса; g — ускорение свободного падения; R — молярная газовая постоянная.

Тогда

$$\frac{n_1}{n_2} = \mathrm{e}^{-\frac{Mg(h_1-h_2)}{RT}}. \quad (1)$$

Прологарифмировав выражение (1), получим

$$\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{Mg(h_1-h_2)}{RT} = \frac{Mg\Delta h}{RT}. \quad (2)$$

Масса частицы $m = \dfrac{M}{N_\mathrm{A}}$; $m = \rho V = \rho \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Подставив эти формулы в (2) и учитывая поправку на закон Архимеда, получим

$$\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_\mathrm{A}(\rho_1 - \rho)\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta h}{RT},$$

откуда искомое выражение для постоянной Авогадро

$$N_\mathrm{A} = \frac{RT\ln\dfrac{n_1}{n_2}}{\dfrac{4}{3}\pi(\rho_1-\rho)r^3 g\Delta h}.$$

Ответ: $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

2.16. Какова температура T азота, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота при давлении $p = 8$ кПа составляет 1 мкм. Эффективный диаметр молекул азота $d = 0{,}38$ нм.

Дано: $\langle l \rangle = 1$ мкм (10^{-6} м); $p = 8$ кПа ($8 \cdot 10^3$ Па); $d = 0{,}38$ нм ($0{,}38 \cdot 10^{-9}$ м).

Найти: T.

Решение. Согласно уравнению состояния идеального газа,

$$p = nkT, \quad (1)$$

где n — концентрация молекул; k — постоянная Больцмана.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

откуда $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle l \rangle}$. Подставив эту формулу в выражение (1), найдем искомую температуру азота

$$T = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 p\langle l\rangle}{k}.$$

Ответ: $T = 372$ К.

2.17. При температуре $T = 280$ К и некотором давлении средняя длина $\langle l_1\rangle$ свободного пробега молекул кислорода равна 0,1 мкм. Определите среднее число $\langle z_2\rangle$ столкновений молекул в 1 с, если давление в сосуде уменьшить до 0,02 первоначального давления. Температуру считать постоянной, а эффективный диаметр d молекулы кислорода принять равным 0,36 нм.

Дано: $T = 280$ К; $\langle l_1\rangle = 0{,}1$ мкм (10^{-7} м); $M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\frac{p_2}{p_1} = 0{,}02$; $d =$ $= 0{,}36$ нм ($0{,}36\cdot 10^{-9}$ м).

Найти: $\langle z_2\rangle$.

Решение. Среднее число $\langle z_2\rangle$ столкновений молекулы в 1 с при конечном давлении определяется отношением средней скорости $\langle v\rangle$ молекулы к средней длине ее свободного пробега $\langle l_2\rangle$ при том же давлении:

$$\langle z_2\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle l_2\rangle}, \tag{1}$$

где средняя скорость молекул определяется по формуле

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{2}$$

где R — молярная газовая постоянная; M — молярная масса вещества.

Из формул $\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ и $p = nkT$ следует, что средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна давлению:

$$\frac{\langle l_1\rangle}{\langle l_2\rangle} = \frac{p_2}{p_1},$$

откуда $\langle l_2\rangle = \langle l_1\rangle \frac{p_1}{p_2}$. Подставив это выражение в формулу (1) и учитывая (2), получаем искомое среднее число столкновений молекул в 1 с:

$$\langle z_2\rangle = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\langle l_1\rangle \frac{p_1}{p_2}} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\langle l_1\rangle}.$$

Ответ: $\langle z_2\rangle = 8{,}61\cdot 10^7$ с$^{-1}$.

2.18. Определите среднюю длину $\langle l\rangle$ свободного пробега атомов гелия, если плотность ρ газа равна $2\cdot 10^{-2}$ кг/м^3. Эффективный диаметр d молекулы гелия равен 0,22 нм.

Дано: $\rho = 2\cdot 10^{-2}$ кг/м^3; $M = 4\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $d = 0{,}22$ нм ($0{,}22\cdot 10^{-9}$ м).

Найти: $\langle l \rangle$.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \tag{1}$$

где n — концентрация молекул.

Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \tag{2}$$

(использовали уравнение Клапейрона—Менделеева $pV = \frac{m}{M}RT$).

Давление газа

$$p = nkT, \tag{3}$$

где k — постоянная Больцмана; T — температура.

Подставив выражение (3) в формулу (2) и выразив из (1) n, получаем искомую среднюю длину свободного пробега молекул:

$$\langle l \rangle = \frac{kM}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho R} = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho N_A}$$

[учли, что $R = kN_A$ (N_A — постоянная Авогадро)].

Ответ: $\langle l \rangle = 1{,}55$ мкм.

2.19. Определите давление p кислорода в сосуде, если при температуре $T = 250$ К средняя продолжительность $\langle \tau \rangle$ свободного пробега молекул кислорода равна 280 нс. Эффективный диаметр d молекулы кислорода равен 0,36 нм.

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 250$ К; $\langle \tau \rangle = 280$ нс ($2{,}8 \cdot 10^{-7}$ с); $d = 0{,}36$ нм ($0{,}36 \cdot 10^{-9}$ м).

Найти: p.

Решение. Средняя продолжительность свободного пробега молекул

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\langle z \rangle}, \tag{1}$$

где

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle \tag{2}$$

— среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с.

Средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{3}$$

концентрация молекул

$$n = \frac{p}{kT}. \tag{4}$$

Подставив формулы (2)—(4) в выражение (1), найдем искомое давление газа

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{TM}{\pi R}}\,\frac{k}{\langle\tau\rangle d^2}.$$

Ответ: $p = 52{,}6$ Па.

2.20. Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости кислорода η_1 и азота η_2, если температура газов одинакова. Эффективные диаметры молекул кислорода и азота соответственно равны $d_1 = 0{,}36$ нм и $d_2 = 0{,}38$ нм.

Дано: $M_1 = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T_1 = T_2 = T$; $d_1 = 0{,}36$ нм $(0{,}36\cdot 10^{-9}$ м); $d_2 = 0{,}38$ нм $(0{,}38\cdot 10^{-9}$ м).

Найти: $\frac{\eta_1}{\eta_2}$.

Решение. Коэффициент динамической вязкости газа

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle, \qquad (1)$$

где плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \qquad (2)$$

(учли $pV = \frac{m}{M}RT$); средняя скорость молекул

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad (3)$$

и средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \qquad (4)$$

(давление p газа и концентрация n молекул связаны формулой $p = nkT$).

Подставляя выражения (2)—(4) в формулу (1), получаем

$$\eta = \frac{2}{3}\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}}. \qquad (5)$$

Согласно формуле (5) и учитывая условие задачи $T_1 = T_2$, получаем искомое отношение коэффициентов динамической вязкости:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}.$$

Ответ: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1{,}19$.

2.21. Определите теплопроводность λ кислорода, находящегося в сосуде при температуре $T = 300$ К. Эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 0{,}36$ нм, удельная теплоемкость $c_V = 649$ Дж/(кг · К).

Дано: $d = 0{,}36$ нм ($0{,}36 \cdot 10^{-9}$ м); $c_V = 649$ Дж/(кг · К); $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К.

Найти: λ.

Решение. Теплопроводность

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \tag{1}$$

где плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \tag{2}$$

(учли $pV = \dfrac{m}{M} RT$); средняя скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \tag{3}$$

и средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}. \tag{4}$$

(давление p газа и концентрация n молекул связаны формулой $p = nkT$).

Подставляя выражения (2)—(4) в формулу (1), получаем искомую теплопроводность

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{kc_V}{\pi d^2} \sqrt{\frac{MT}{\pi R}}.$$

Ответ: $\lambda = 8{,}9$ мВт/(м · К).

2.22. Определите, во сколько раз отличается коэффициент диффузии азота ($M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и углекислого газа ($M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

Дано: $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T_1 = T_2$; $p_1 = p_2$; $d_1 = d_2$.

Найти: $\dfrac{D_1}{D_2}$.

Решение. Коэффициент диффузии газа

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle, \tag{1}$$

где $\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ — средняя арифметическая скорость его молекул; $\langle l \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ — средняя длина свободного пробега молекул.

Поскольку $p = nkT$, из условия задачи ($p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$) следует, что $n_1 = n_2$. Подставив значения $\langle v \rangle$, $\langle l \rangle$ в формулу (1) и учитывая условие задачи, найдем

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}.$$

Ответ: $\dfrac{D_1}{D_2} = 1{,}25$.

2.23. Определите массу m кислорода, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 100$ см^2 за $t = 20$ с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1,26 кг/м^4, температура газа $T = 300$ К, средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода 0,1 мкм.

Дано: $S = 100$ см^2 (10^{-2} м^2); $t = 20$ с; $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = 1{,}26$ кг/м^4; $T = 300$ К; $\langle l \rangle = 0{,}1$ мкм (10^{-7} м); $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: m.

Решение. Масса m вещества, перенесенная в результате диффузии через площадку S за время t:

$$m = \left| D \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} St \right|, \tag{1}$$

где коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \tag{2}$$

Средняя скорость молекул газа

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в (2), а затем (2) в (1), получим искомую массу кислорода

$$m = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \langle l \rangle \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} St.$$

Ответ: $m = 3{,}74 \cdot 10^{-6}$ кг.

2.24. Можно ли считать вакуум 100 мкПа высоким, если он создан в колбе радиусом $r = 15$ см, содержащей азот при 0 °C? Эффективный диаметр молекулы азота $d = 0{,}38$ нм.

Дано: $p = 100$ мкПа (10^{-4} Па); $r = 15$ см (0,15 м); $t = 0$ °C ($T = 273$ К); $d = 0{,}38$ нм ($0{,}38 \cdot 10^{-9}$ м).

Найти: $\langle l \rangle$.

Решение. Вакуум можно считать высоким, если средняя длина свободного пробега молекул газа гораздо больше линейных размеров сосуда, т. е. должно выполняться условие

$$\langle l \rangle \gg 2r.$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

(учли $p = nkT$).

Вычисляя, получаем $\langle l \rangle = 58{,}8$ м, т. е. 58,8 м $\gg$ 0,3 м.

Ответ: да, вакуум высокий.

Задачи для самостоятельного решения

2.25. Определите число N атомов в 1 кг кислорода и массу m_0 одного атома кислорода. [$N = 1{,}88 \cdot 10^{25}$; $m_0 = 5{,}32 \cdot 10^{-26}$ кг]

2.26. Определите количество вещества ν газа, заполняющего сосуд вместимостью $V = 5$ л, если концентрация n молекул газа в сосуде равна $9 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. [$\nu = \dfrac{nV}{N_A} = 7{,}47 \cdot 10^{-3}$ моль]

2.27. В закрытом сосуде вместимостью $V = 10$ л при температуре $T = 290$ К содержится смесь газов — водорода массой $m_1 = 2$ г и азота массой $m_2 = 7$ г. Определите давление смеси газов. [$p = \left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)\dfrac{RT}{V} = 301$ кПа]

2.28. Определите плотность смеси азота массой $m_1 = 4$ г и водорода массой $m_2 = 2$ г при температуре $T = 300$ К и давлении 0,2 МПа. Газы считать идеальными. [$\rho = \dfrac{(m_1 + m_2)p}{\left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)RT} = 0{,}421$ кг/м^3]

2.29. При нагревании идеального газа на $\Delta T = 1$ К при постоянном давлении его объем увеличился на $^1/_{300}$ первоначального объема. Определите начальную температуру газа. [$T_0 = 300$ К]

2.30. В баллоне находится газ при температуре $t_1 = 27\,°$C. До какой температуры t_2 следует нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в $n = 2$ раза? [$t_2 = n(t_1 + T_0) - T_0 = 327\,°$C]

2.31. В сосуде вместимостью $V = 10$ л находится газ массой $m = 35$ г. Концентрация ν молекул газа равна $7{,}52 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Определите, какой газ находится в сосуде. [Азот]

2.32.Число молекул в 1 м^3 газа при нормальных условиях ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К) получило название числа Лошмидта. Вычислите, чему равно число Лошмидта.

2.33. Определите плотность газа, если наиболее вероятная скорость $v_в$ его молекул при давлении $p = 50$ кПа равна 500 м/с. [$\rho = \dfrac{2p}{v_в^2} = 0{,}4$ кг/м^3]

2.34. Определите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекул газа, если их средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle = 476$ м/с. [$\langle v_{кв} \rangle = 516$ м/с]

2.35. Средняя энергия поступательного движения молекул газа в сосуде вместимостью $V = 0{,}5$ л равна 75 Дж. Определите давление газа. [$p = 100$ кПа]

2.36. Используя закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям $f(v) = 4\pi\left(\dfrac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$, найдите формулу, определяющую наиболее вероятную скорость $v_в$. [$v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$]

2.37. Используя закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям $f(v) = 4\pi\left(\dfrac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$, докажите, что средняя квадратичная скорость определяется формулой $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$.

2.38. Используя закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям $f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$, найдите закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям u ($u = \frac{v}{v_{\text{в}}}$, где $v_{\text{в}}$ — наиболее вероятная скорость). $[\,f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}\,]$

2.39. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$, докажите, что средняя кинетическая энергия молекул определяется формулой $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$.

2.40. Закон распределения молекул по скоростям в молекулярном пучке определяется выражением $f(v) = \frac{m_0^2}{2k^2T^2} v^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$. Найдите формулы, выражающие: 1) наиболее вероятную скорость $v_{\text{в}}$; 2) среднюю скорость $\langle v \rangle$. [1) $v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$; 2) $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\pi kT}{8m_0}}$]

2.41. Зная закон распределения молекул по скоростям в молекулярном пучке $f(v) = \frac{m_0^2}{2k^2T^2} v^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$, выведите закон, выражающий распределение молекул по энергиям теплового движения. $[\,f(\varepsilon) = \frac{1}{k^2T^2} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\,]$

2.42. На какой высоте давление воздуха составляет 70 % от давления на уровне моря? Считайте, что температура воздуха постоянна и равна 5 °C. [$h = 2{,}9$ км]

2.43. Определите, на сколько уменьшится атмосферное давление $p = 100$ кПа над поверхностью Земли на высоте $h = 200$ м. Считать температуру воздуха постоянной, равной 300 К. [на 2,3 кПа]

2.44. Чему равна средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота при давлении $p = 1$ Па и температуре $T = 300$ К. Эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 0{,}36$ нм. [$\langle l \rangle = 7{,}19$ мм]

2.45. Определите среднее число столкновений $\langle z \rangle$ некоторого газа, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ его молекул равна 5 мкм, а средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 600$ м/с. [$\langle z \rangle = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle}{\langle l \rangle} = 1{,}11 \cdot 10^8\ \text{с}^{-1}$]

2.46. Баллон вместимостью $V = 5$ л содержит водород массой $m = 1$ г. Определите среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул. Эффективный диаметр d молекулы водорода равен 0,28 нм. [$\langle l \rangle = \frac{MV}{\sqrt{2}\pi d^2 m N_{\text{A}}} = 47{,}7$ нм]

2.47. Средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул кислорода, находящегося при температуре $T = 280$ К, составляет 0,12 мкм. Определите среднее число столкновений $\langle z \rangle$, испытываемых молекулой за 1 с. [$\langle z \rangle = 3{,}59 \cdot 10^8\ \text{с}^{-1}$]

2.48. Определите среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода, если коэффициент диффузии кислорода при нормальных условиях $D = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ м²/с. [$\langle l \rangle = 0{,}13$ мкм]

2.49. Определите динамическую вязкость η азота при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы азота $d = 0{,}38$ нм. [$\eta = \frac{2}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{MT}{\pi R}} = 11$ мкПа · с]

2.50. Определите коэффициент динамической вязкости η водорода, если теплопроводность λ при тех же условиях равна 0,09 Вт/(м · К). $\left[\eta = \dfrac{2M\lambda}{iR} = 8{,}66\ \text{мкПа} \cdot \text{с}\right]$

2.51. Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дьюара, если расстояние между стенками сосуда $l = 6$ мм, а температура $T = 300$ К? Эффективный диаметр d молекулы воздуха принять равным 0,27 нм. $\left[p_{\text{вак}} \leqslant \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l} \leqslant 2{,}13\ \text{Па}\right]$

2.2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные законы и формулы

• Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT$$

[k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура].

• Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$$

[$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$ — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы].

• Внутренняя энергия идеального газа

$$U_{\text{m}} = \frac{i}{2} kTN_{\text{A}} = \frac{i}{2} RT \ \ \text{(для 1 моль газа)},$$

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT \ \ \text{(для произвольной массы газа)}$$

[i — число степеней свободы; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; N_{A} — постоянная Авогадро; R — молярная газовая постоянная; m — масса газа; M — молярная масса; $\nu = \dfrac{m}{M}$ — количество вещества].

• Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

[Q — количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU — изменение внутренней энергии системы; A — работа системы против внешних сил].

• Первое начало термодинамики для малого изменения системы

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$$

[$\mathrm{d}U$ — бесконечно малое изменение внутренней энергии; δA — элементарная работа; δQ — бесконечно малое количество теплоты].

• Молярная и удельная теплоемкости

$$C_{\mathrm{m}} = \frac{\delta Q}{\nu \mathrm{d}T} \qquad c = \frac{\delta Q}{m \mathrm{d}T}.$$

• Связь между молярной C_{m} и удельной c теплоемкостями газа

$$C_{\mathrm{m}} = cM$$

[M — молярная масса газа].

• Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R$$

[i — число степеней свободы].

• Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

• Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

• Элементарная работа газа при изменении его объема

$$\mathrm{d}A = p\,\mathrm{d}V$$

[p — давление].

• Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

[V_1 и V_2 — соответственно начальный и конечный объемы газа].

• Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_V \mathrm{d}T$$

[m — масса газа; M — его молярная масса; C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме].

• Работа газа:

• при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1), \qquad A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1);$$

• при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

• Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}, \quad T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \mathrm{const}$$

[$\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$ — показатель адиабаты; i — число степеней свободы].

• Работа газа в адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2),$$

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$$

[T_1, T_2 — начальная и конечная температуры газа; V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа соответственно; γ — показатель адиабаты; m — масса газа; M — его молярная масса; R — молярная газовая постоянная].

• Уравнение политропного процесса

$$pV^n = \text{const}$$

[$n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V}$ — показатель политропы].

• Уравнение теплового баланса

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i$$

[Q — количество теплоты, которое данные тела получили или отдали в процессе теплообмена; ΔU_i — изменение внутренней энергии i-го тела в процессе теплообмена; n — число тел, участвующих в теплообмене].

• Изменение внутренней энергии при нагревании или охлаждении

$$\Delta U = cm\Delta T$$

[c — удельная теплоемкость; m — масса тела; ΔT — изменение температуры].

• Изменение внутренней энергии при плавлении или затвердевании

$$\Delta U = \lambda m$$

[λ — удельная теплота плавления; m — масса тела].

• Изменение внутренней энергии при парообразовании или конденсации

$$\Delta U = rm$$

[r — удельная теплота парообразования; m — масса тела].

• Изменение внутренней энергии при сгорании вещества

$$\Delta U = qm$$

[q — удельная теплота сгорания; m — масса тела].

• Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

[Q_1 — количество теплоты, полученное системой; Q_2 — количество теплоты, отданное системой; A — работа, совершаемая за цикл].

• Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

[T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника].

• Неравенство Клаузиуса

$$\Delta S \geqslant 0$$

[$\Delta S > 0$ в необратимых процессах, $\Delta S = 0$ в обратимых процессах].

• Изменение энтропии при равновесном переходе системы из состояния *1* в состояние *2*

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right).$$

• Формула Больцмана

$$S = k\ln W$$

[S — энтропия; k — постоянная Больцмана; W — термодинамическая вероятность состояния].

Примеры решения задач

2.52. Определите среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_1\rangle$, приходящуюся на одну степень свободы молекулы кислорода, среднюю кинетическую энергию поступательного движения $\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle$ молекулы, среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle$ молекулы, среднее значение полной кинетической энергии $\langle\varepsilon\rangle$ молекулы, а также среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle E_{\text{вр}}\rangle$ всех молекул газа. Газ считать идеальным, температура газа $T = 500$ К, масса газа $m = 10$ г.

Дано: $M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 500$ К; $m = 10$ г (10^{-2} кг).

Найти: $\langle\varepsilon_1\rangle$; $\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle$; $\langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle$; $\langle\varepsilon\rangle$; $\langle E_{\text{вр}}\rangle$.

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{2}kT,$$

где $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Средняя кинетическая энергия поступательного и вращательного движения молекулы соответственно

$$\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle = \frac{i_{\text{п}}}{2}kT \;\text{ и }\; \langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle = \frac{i_{\text{вр}}}{2}kT,$$

где $i_{\text{п}}$ — сумма числа поступательных ($i_{\text{п}} = 3$); $i_{\text{вр}}$ — сумма числа вращательных ($i_{\text{вр}} = 2$) степеней свободы молекулы.

Среднее значение полной кинетической энергии молекулы

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} = 5$ (для двухатомного газа — кислорода).

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа

$$\langle E_{\text{вр}}\rangle = \langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle N = \frac{i_{\text{вр}}}{2}kT\,\frac{mN_{\text{A}}}{M} = \frac{i_{\text{вр}}}{2}\,\frac{m}{M}RT$$

(учли, что число молекул $N = \dfrac{mN_{\text{A}}}{M}$ (N_{A} — постоянная Авогадро); $R = kN_{\text{A}}$).

Ответ: $\langle\varepsilon_1\rangle = 3{,}45\cdot10^{-21}$ Дж; $\langle\varepsilon_{\text{п}}\rangle = 10{,}3\cdot10^{-21}$ Дж; $\langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle = 6{,}9\cdot10^{-21}$ Дж; $\langle\varepsilon\rangle =$ $= 17{,}2\cdot10^{-21}$ Дж; $\langle E_{\text{вр}}\rangle = 1{,}3$ кДж.

2.53. Азот массой $m = 5$ г находится под давлением 100 кПа при температуре 17° С. После нагревания при постоянном давлении газ занял объем 10 л. Определите: 1) количество теплоты Q, полученное газом; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: $m = 5$ г ($5\cdot10^{-3}$ кг); $M = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль; $p = 100$ кПа $=$ const (10^5 Па); $t_1 = 17°$ С ($T_1 = 290$ К); $V_2 = 10$ л ($V_2 = 10^{-2}$ м^3).

Найти: 1) Q; 2) ΔU.

Решение. Количество теплоты, полученное газом при изобарном нагревании,

$$Q = \frac{m}{M}C_p(T_2 - T_1) = \frac{m}{M}C_p\Delta T, \tag{1}$$

где молярная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2}R$$

(для двухатомного газа — азота $i = 5$).

Записав уравнение Клапейрона—Менделеева до и после нагревания газа $pV_1 = \frac{m}{M}RT_1$ и $pV_2 = \frac{m}{M}RT_2$, найдем $V_1 = \frac{mRT_1}{Mp}$ и $p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T$. Тогда

$$\Delta T = \frac{pM}{mR}\left(V_2 - \frac{mRT_1}{Mp}\right). \tag{2}$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомое количество теплоты, полученное газом,

$$Q = \frac{i+2}{2}p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{Mp}\right). \tag{3}$$

Внутренняя энергия произвольной массы m идеального газа $U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$, следовательно, искомое изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T = \frac{i}{2}p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{Mp}\right) = \frac{i}{i+2}Q$$

[учли формулы (2) и (3)].

Ответ: 1) $Q = 1{,}99$ Дж; 2) $\Delta U = 1{,}42$ кДж.

2.54. Определите удельные теплоемкости c_V и c_p смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 1$ г и водород массой $m_2 = 2$ г.

Дано: $m_1 = 1$ г (10^{-3} кг); $M_1 = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль; $m_2 = 2$ г ($2\cdot10^{-3}$ кг); $M_2 =$ $= 2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Найти: c_V, c_p.

Решение. Теплота, необходимая для нагревания смеси газов на ΔT при постоянном объеме,

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T = (c_{V_1}m_1 + c_{V_2}m_2)\Delta T, \tag{1}$$

где c_V — удельная теплоемкость смеси; m_1 — масса гелия; m_2 — масса водорода; c_{V_1} и c_{V_2} — соответственно удельные теплоемкости гелия и водорода, выражаемые формулами

$$c_{V_1} = \frac{i_1}{2}\frac{R}{M_1} = \frac{3}{2}\frac{R}{M_1} \text{ и } c_{V_2} = \frac{i_2}{2}\frac{R}{M_2} = \frac{5}{2}\frac{R}{M_2}, \tag{2}$$

где R — молярная газовая постоянная; i_1 — число степеней свободы для гелия ($i_1 = 3$ — одноатомный газ) и i_2 — для водорода ($i_2 = 5$ — двухатомный газ).

Подставив выражения (2) в формулу (1), получаем искомую удельную теплоемкость смеси газов при постоянном объеме:

$$c_V = \frac{R}{2(m_1 + m_2)}\left(\frac{3m_1}{M_1} + \frac{5m_2}{M_2}\right).$$

Теплота, необходимая для нагревания смеси газов на ΔT при постоянном давлении,

$$Q = c_p(m_1 + m_2)\Delta T = (c_{p_1}m_1 + c_{p_2}m_2)\Delta T, \tag{3}$$

где c_p — удельная теплоемкость смеси; c_{p_1} и c_{p_2} — соответственно удельные теплоемкости гелия и водорода, выражаемые формулами

$$c_{p_1} = \frac{i_1 + 2}{2}\frac{R}{M_1} = \frac{5}{2}\frac{R}{M_1} \text{ и } c_{p_2} = \frac{i_2 + 2}{2}\frac{R}{M_2} = \frac{7}{2}\frac{R}{M_2}. \tag{4}$$

Подставив выражения (4) в формулу (3), получаем искомую удельную теплоемкость при постоянном давлении:

$$c_p = \frac{R}{2(m_1 + m_2)}\left(\frac{5m_1}{M_1} + \frac{7m_2}{M_2}\right).$$

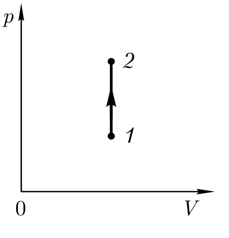
Ответ: $c_V = 7{,}96$ кДж/(кг·К); $c_p = 11{,}4$ кДж/(кг·К).

2.55. При изохорном нагревании (см. рисунок) азота объемом 10 л давление газа изменилось на $\Delta p = 0{,}1$ МПа. Определите количество теплоты Q, сообщенное газу.

Дано: $V = 10$ л (10^{-2} м^3); $\Delta p = 0{,}1$ МПа (10^5 Па).

Найти: Q.

Решение. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, сообщенное газу, расходуется на изменение внутренней энергии газа (ΔU) и совершение газом работы (A) против внешних сил:



$$Q = \Delta U + A.$$

Работа газа в изохорном процессе ($V = \text{const}$)

$$A = p\Delta V = 0,$$

поэтому для изохорного процесса

$$Q = \Delta U. \tag{1}$$

Изменение внутренней энергии произвольной массы m газа

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T, \tag{2}$$

где i — число степеней свободы (для двухатомного газа — азота $i = 5$); R — молярная газовая постоянная.

Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для состояний газа *1* и *2*,

$$p_1V = \frac{m}{M}RT_1 \;\text{ и }\; p_2V = \frac{m}{M}RT_2,$$

откуда $V\Delta p = \dfrac{m}{M}R\Delta T$ $(\Delta T = T_2 - T_1, \Delta p = p_2 - p_1)$. Тогда

$$\Delta T = \frac{MV\Delta p}{mR}. \tag{3}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) с учетом (3), найдем искомое количество теплоты, сообщенное газу

$$Q = \frac{i}{2}V\Delta p = \frac{5}{2}V\Delta p.$$

Ответ: $Q = 2{,}5$ кДж.

2.56. Азот (N_2) массой 14 г находится при температуре 27 °C. В результате изобарного расширения (см. рисунок) объем газа увеличился в 2 раза. Определите: 1) изменение внутренней энергии ΔU газа; 2) работу расширения A газа; 3) количество теплоты Q, сообщенное азоту. Удельная теплоемкость азота равна $1{,}05 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

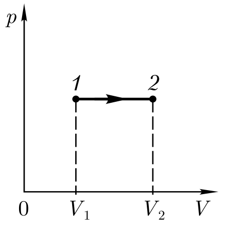
Дано: $m = 14$ г ($1{,}4 \cdot 10^{-2}$ кг); $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $t_1 = 27$ °C ($T_1 = 300$ К); $p =$ $=$ const; $V_2 = 2V_1$; $c = 1{,}05 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

Найти: 1) ΔU; 2) A; 3) Q.

Решение. Изменение внутренней энергии газа массой m при его нагревании от температуры T_1 до температуры T_2

$$\Delta U = mc(T_2 - T_1), \tag{1}$$

где c — удельная теплоемкость.



Поскольку расширение газа происходит при постоянном давлении, используя закон Гей-Люссака $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$ и условие задачи $V_2 = 2V_1$, найдем конечную температуру азота:

$$T_2 = \frac{V_2T_1}{V_1} = \frac{2V_1T_1}{V_1} = 2T_1. \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получаем

$$\Delta U = mc(2T_1 - T_1) = mcT_1.$$

Работа изобарного расширения с учетом условия задачи ($V_2 = 2V_1$)

$$A = p(V_2 - V_1) = p(2V_1 - V_1) = pV_1. \tag{3}$$

Согласно уравнению Клапейрона—Менделеева,

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1,$$

откуда $V_1 = \dfrac{mRT_1}{pM}$. Подставляя это выражение в формулу (3), находим искомую работу расширения газа

$$A = \frac{mRT_1}{M}.$$

Сообщенное газу количество теплоты, согласно первому началу термодинамики,

$$Q = \Delta U + A.$$

Ответ: 1) $\Delta U = 4{,}41$ кДж; 2) $A = 1{,}25$ кДж; 3) $Q = 5{,}66$ кДж.

2.57. При изобарном расширении двухатомного газа была совершена работа $A = 1$ кДж. Определите количество теплоты Q, переданное газу.

Дано: $i = 5$; $A = 1$ кДж (10^3 Дж).

Найти: Q.

Решение. Количество теплоты, переданное газу при изобарном нагревании,

$$Q = \frac{m}{M}C_p(T_2 - T_1), \tag{1}$$

где молярная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2}R, \tag{2}$$

где i — число степеней свободы (для двухатомного газа $i = 5$); T_1 и T_2 — соответственно начальная и конечная температура газа.

Работа газа при изобарном расширении

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1). \tag{3}$$

Поделив (1) на (3), получаем

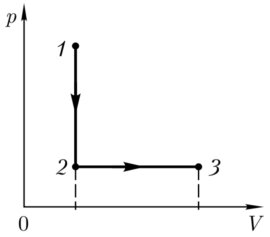
$$\frac{Q}{A} = \frac{C_p}{R},$$

откуда искомое количество теплоты, переданное газу,

$$Q = \frac{i+2}{2}A$$

[учли формулу (2)].

Ответ: $Q = 3{,}5$ кДж.



2.58. Азот массой $m = 100$ г (молярная масса $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) находится при температуре $T_1 = 300$ К. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в $n = 3$ раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии оказалась равной первоначальной. Определите: 1)работу A, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: $m = 100$ г (0,1 кг); $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T_1 = 300$ К; $V_1 = V_2$; $\dfrac{p_1}{p_2} = n = 3$; $p_2 = p_3$; $T_3 = T_1$.

Найти: 1) A; 2) ΔU.

Решение. Работа, совершенная газом в результате рассматриваемых процессов,

$$A = A_{12} + A_{23},$$

где $A_{12} = 0$ — работа изохорного охлаждения; $A_{23} = p_2(V_3 - V_2)$ — работа изобарного расширения. Следовательно,

$$A = p_2(V_3 - V_2). \qquad (1)$$

Согласно закону Гей-Люссака ($V_1 = V_2 = \text{const}$), $\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2}$, откуда

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = \frac{1}{n} T_1. \qquad (2)$$

Записав уравнение Клапейрона — Менделеева для состояний *2* и *3*

$$p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2 \text{ и } p_2 V_3 = \frac{m}{M} R T_3 = \frac{m}{M} R T_1 \text{ (по условию } T_3 = T_1\text{)},$$

получим

$$p_2(V_3 - V_2) = \frac{m}{M} R(T_1 - T_2). \qquad (3)$$

Приравнивая выражения (1) и (3) и учитывая (2), получим выражение для искомой работы, совершенной газом,

$$A = \frac{m}{M} R(T_1 - T_2) = \frac{m}{M} R T_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{(n-1) m R T_1}{nM}.$$

Поскольку изменение внутренней энергии данной массы идеального газа происходит только при изменении его температуры, то $\Delta U = 0$, так как согласно условию задачи температура газа в конечном состоянии стала равной первоначальной температуре ($T_3 = T_1$).

Ответ: 1) $A = 5{,}94$ кДж; 2) $\Delta U = 0$.

2.59. Газ массой $m = 10$ г расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Работа A расширения газа равна 900 Дж. Определите наиболее вероятную скорость $v_\text{в}$ молекул газа.

Дано: $m = 10$ г (10^{-2} кг); $T = \text{const}$; $V_2 = 2V_1$; $A = 900$ Дж.

Найти: $v_\text{в}$.

Решение. Наиболее вероятная скорость молекул газа

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (1)$$

Температуру T можно найти, используя выражение для работы расширения газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

(учли уравнение Клапейрона—Менделеева $pV = \frac{m}{M}RT$), откуда

$$T = \frac{AM}{mR \ln \frac{V_2}{V_1}}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомую наиболее вероятную скорость

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2A}{m \ln \frac{V_2}{V_1}}}.$$

Ответ: $v_{\text{в}} = 510$ м/с.

2.60. Некоторый газ массой $m = 1$ г и первоначальным удельным объемом $v_1 = 0{,}831$ м^3/кг, находящийся при температуре $T = 280$ К и под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа, сжимают изотермически до давления $p_2 = 1$ МПа. Определите: 1) какой это газ; 2) работу A, затраченную на сжатие газа.

Дано: $m = 1$ г (10^{-3} кг); $v_1 = 0{,}831$ м^3/кг; $T = 280$ К; $p_1 = 0{,}1$ МПа (10^5 Па); $p_2 = 1$ МПа (10^6 Па).

Найти: 1) M; 2) A.

Решение. Первоначальный удельный объем газа

$$v_1 = \frac{V_1}{m}, \qquad (1)$$

где V_1 — объем газа в начальном состоянии определим из уравнения Клапейрона—Менделеева

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT. \qquad (2)$$

Подставив уравнение (2) в формулу (1), найдем искомую молярную массу газа

$$M = \frac{RT}{p_1 v_1}.$$

Работа, затраченная на сжатие газа,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (3)$$

(учли уравнение $pV = \frac{m}{M}RT$). Согласно закону Бойля — Мариотта,

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

откуда

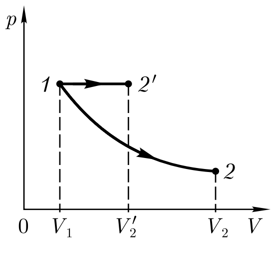
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (4)$$

Подставив выражение (4) в формулу (3), найдем искомую работу, затраченную на сжатие газа,

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Ответ: 1) $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (азот); 2) $A = 191$ Дж.

2.61. Многоатомный идеальный газ из одного и того же состояния расширяется один раз при постоянной температуре, другой — при постоянном давлении. В обоих случаях работа расширения газа одинакова. Начертите графики этих процессов. В котором из рассматриваемых процессов и во сколько раз количество подведенной к газу теплоты больше?



Дано: $i = 6$; $T = \text{const}$; $p = \text{const}$.

Найти: $\frac{Q_2}{Q_1}$.

Решение. Поскольку, согласно условию задачи, работа расширения газа в обоих процессах одинакова, площади под изотермой *1* → *2* и изобарой *1* → *2′* одинаковы (см. рисунок).

Согласно первому началу термодинамики,

$$Q = \Delta U + A, \qquad (1)$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа в процессе его расширения; A — работа расширения газа.

В случае изотермического процесса ($T = \text{const}$)

$$\Delta U = \frac{m}{M}C_V\Delta T = 0,$$

тогда, согласно (1),

$$Q_1 = A. \qquad (2)$$

В случае изобарного процесса ($p = \text{const}$)

$$\Delta U = \frac{m}{M}C_V\Delta T = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\frac{MA}{mR} = \frac{iA}{2} \qquad (3)$$

(учли, что работа расширения газа в случае изобарного процесса $A = \frac{m}{M}R\Delta T$, откуда $\Delta T = \frac{MA}{mR}$). Подставив выражение (3) в уравнение (1), найдем

$$Q_2 = \frac{iA}{2} + A = \frac{i+2}{2}A. \qquad (4)$$

Сравнивая выражения (2) и (4), видим, что количество подведенной к газу теплоты больше в случае изобарного процесса.

Отношение

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{i+2}{2}.$$

Ответ: $\frac{Q_2}{Q_1} = 4.$

2.62. Азот массой $m = 56$ г, находящийся при нормальных условиях, расширяется адиабатно, причем объем газа увеличивается в два раза. Определите: 1) изменение внутренней энергии ΔU газа; 2) работу расширения A газа.

Дано: $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 56$ г ($5{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг); $T = 273$ К; $V_2 = 2\,V_1$.

Найти: 1) ΔU; 2) A.

Решение. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния *1* в состояние *2*

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1), \tag{1}$$

где $C_V = \frac{i}{2} R$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; M — молярная масса газа; T_1 и T_2 — соответственно температуры, соответствующие начальному (*1*) и конечному (*2*) состояниям газа; i — число степеней свободы (для двухатомного газа (азота) $i = 5$).

Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона)

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \tag{2}$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = 1{,}4$. Из уравнения (2) найдем

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в формулу (1), получим искомое изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, переданное газу, расходуется на изменение его внутренней энергии ΔU и на работу расширения A, совершаемую газом:

$$Q = \Delta U + A.$$

В случае адиабатного процесса $Q = 0$, поэтому

$$A = -\Delta U.$$

Ответ: 1) $\Delta U = -2{,}75$ кДж; 2) $A = 2{,}75$ кДж.

2.63. Определите число i степеней свободы газа, если он расширяется адиабатно и при этом его объем увеличивается в четыре раза, а термодинамическая температура уменьшается в 1,74 раза.

Дано: $V_2 = 4\,V_1$; $T_2 = \dfrac{T_1}{1,74}$.

Найти: i.

Решение. Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона) для двух состояний газа можно записать в виде

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \tag{1}$$

откуда, найдя показатель адиабаты $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$, можно определить число степеней свободы молекул газа.

Подставим в уравнение (1) данные условия задачи:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = \frac{T_1}{1,74}(4V_1)^{\gamma-1},$$

$$1{,}74\,T_1 V_1^{\gamma-1} = T_1 \cdot 4^{\gamma-1} V_1^{\gamma-1}$$

или

$$1{,}74 = 4^{\gamma-1},$$

откуда получим $\gamma = 1{,}4$. Подставив это значение в формулу для показателя адиабаты

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4,$$

получим искомое число степеней свободы $i = 5$.

Ответ: $i = 5$ (газ двухатомный).

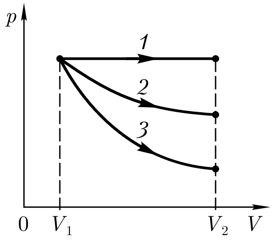
2.64. Газ расширяется от объема V_1 до объема V_2 один раз при постоянном давлении, второй — при постоянной температуре, третий — без теплообмена с окружающей средой. Начертив графики процессов, сравните для этих процессов работу расширения газа A_1, A_2, A_3 и количество теплоты Q_1, Q_2, Q_3, подведенной к газу.

Дано: $p = \text{const}$; $T = \text{const}$; $Q = 0$.

Найти: A_1, A_2, A_3; Q_1, Q_2, Q_3.

Решение. На диаграмме $p-V$ (см. рисунок): *1* — изобара ($p = \text{const}$); *2* — изотерма ($T = \text{const}$); *3* — адиабата ($Q = 0$).

Работа в рассматриваемых процессах численно равна площади, ограниченной осью абсцисс, прямыми V_1 и V_2 и соответственно изобарой *1* (изобарный процесс), изотермой *2* (изотермический процесс) и адиабатой *3* (адиабатный процесс). Из рисунка следует, что работа в случае изобарного процесса максимальна, а в случае адиабатного — минимальна. Из сравнения площадей находим, что



$$A_1 > A_2 > A_3. \tag{1}$$

Согласно первому началу термодинамики,

$$Q = \Delta U + A, \tag{2}$$

где изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T.$$

В случае изобарного расширения газа $\Delta U > 0$ (газ нагревается), в случае изотермического расширения — $\Delta U = 0$ (температура газа постоянна). Учитывая эти выводы, первое начало термодинамики (2) и выражение (1), можно записать

$$Q_1 > Q_2 > Q_3 \; (Q_3 = 0).$$

Ответ: $A_1 > A_2 > A_3$; $Q_1 > Q_2 > Q_3$.

2.65. Двухатомный газ необходимо сжать от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 2{,}5$ л. Определите, как и во сколько раз выгоднее газ сжимать: адиабатно или изотермически.

Дано: $i = 5$; $V_1 = 5$ л $(5 \cdot 10^{-3}$ м$^3)$; $V_2 = 2{,}5$ л $(2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^3)$; $Q = 0$; $T = \text{const}$.

Найти: $\frac{A_1}{A_2}$.

Решение. Диаграммы обоих процессов — адиабата (кривая *1*) и изотерма (кривая *2*) в координатах p, V представляют собой гиперболы, но адиабата ($pV^\gamma = \text{const}$) более крута, чем изотерма ($pV = \text{const}$).

Поскольку работа в обоих процессах численно равна площади, ограниченной осью абсцисс, прямыми V_1 и V_2 и соответственно адиабатой и изотермой, из рисунка следует, что *газ изотермически сжимать выгоднее* (заметим, что при сжатии газа работа совершается внешними силами).

Подтвердим данный вывод вычислениями. Работа при адиабатном сжатии

$$A_1 = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \tag{1}$$

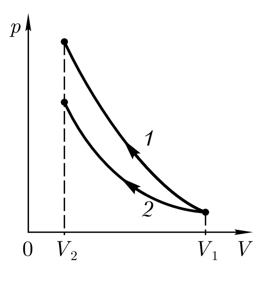
где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ — показатель адиабаты (учли, что молярные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме $C_p = \frac{i+2}{2}R$, $C_V = \frac{i}{2}R$; i — число степеней свободы: для двухатомного газа $i = 5$); T_1 — начальная температура газа; V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа соответственно.

Работа газа при изотермическом сжатии

$$A_2 = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{2}$$

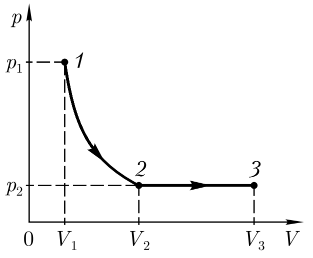
Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}{(\gamma - 1)\ln \frac{V_2}{V_1}}$$



(учли, что $T = T_1$).

Ответ: $\frac{A_1}{A_2} = 1{,}15$ — изотермически сжимать газ выгоднее.



2.66. Кислород ($M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), находящийся под давлением $p_1 = 0{,}5$ МПа при температуре $T_1 = 350$ К, подвергли сначала адиабатному расширению от объема $V_1 = 1$ л до объема $V_2 = 2$ л, а затем изобарному расширению, в результате которого объем газа увеличился от объема V_2 до объема $V_3 = 3$ л. Определите для каждого из этих процессов: 1) работу A, совершенную газом; 2) изменение его внутренней энергии ΔU; 3) количество подведенной к газу теплоты Q.

Дано: $p_1 = 0{,}5$ МПа $(0{,}5 \cdot 10^6$ Па); $T_1 = 350$ К; $V_1 = 1$ л $(10^{-3}$ м$^3)$; $V_2 = 2$ л $(2 \cdot 10^{-3}$ м$^3)$; $V_3 = 3$ л $(3 \cdot 10^{-3}$ м$^3)$.

Найти: 1) A; 2) ΔU; 3) Q.

Решение. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, сообщенное газу, расходуется на изменение внутренней энергии газа (ΔU) и совершение газом работы (A) против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A. \tag{1}$$

Адиабатный процесс *1—2* (см. рисунок) происходит без теплообмена с окружающей средой, поэтому

$$Q_{12} = 0. \tag{2}$$

Работа, совершаемая газом в адиабатном процессе,

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right], \tag{3}$$

где $\gamma = \dfrac{i+2}{i} = 1{,}4$ (кислород — двухатомный газ, число степеней свободы $i = 5$).

Согласно уравнению (1), в адиабатном процессе

$$\Delta U_{12} = -A_{12}. \tag{4}$$

Изобарный процесс *2—3*: работа изобарного расширения

$$A_{23} = p_2(V_3 - V_2), \tag{5}$$

где давление p_2 найдем, воспользовавшись уравнением Пуассона для адиабаты *1—2*:

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}.$$

Подставив это выражение в формулу (5), получим

$$A_{23} = p_1(V_3 - V_2)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}. \tag{6}$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U_{23} = \frac{m}{M} C_V \Delta T = \frac{m}{M} C_V (T_3 - T_2), \tag{7}$$

где m — масса газа; C_V — его молярная теплоемкость при постоянном объеме. Массу m газа находим из уравнения Клапейрона—Менделеева $p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1$, откуда $m = \frac{Mp_1V_1}{RT_1}$. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2}R$. Подставив эти выражения в уравнение (7), получим

$$\Delta U_{23} = \frac{i}{2}\frac{p_1V_1}{T_1}(T_3 - T_2). \tag{8}$$

Температуры T_3 и T_2 найдем, воспользовавшись уравнением Пуассона для адиабатного процесса *1—2* и законом Гей-Люссака для изобарного процесса *2—3*:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 265 \text{ К} \text{ и } T_3 = T_2\frac{V_3}{V_2} = 397 \text{ К}.$$

Количество теплоты Q_{23}, подведенное к газу в изобарном процессе, определим, согласно (1),

$$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23}. \tag{9}$$

Ответ: 1) $A_{12} = 303$ Дж; $A_{23} = 189$ Дж; 2) $\Delta U_{12} = -303$ Дж; $\Delta U_{23} = 471$ Дж; 3) $Q_{12} = 0$; $Q_{23} = 660$ Дж.

2.67. Двухатомный идеальный газ совершает процесс, в ходе которого молярная теплоемкость C газа остается постоянной и равной $\frac{7}{2}R$. Определите показатель политропы n этого процесса.

Дано: $i = 5$; $C = \frac{7}{2}R = \text{const}$.

Найти: n.

Решение. Если молярная теплоемкость C в ходе процесса остается постоянной, то имеем дело с политропным процессом. Показатель политропы

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}, \tag{1}$$

где C_p и C_V — соответственно молярные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме:

$$C_p = \frac{i+2}{2}R \text{ и } C_V = \frac{i}{2}R,$$

где i — число степеней свободы; R — молярная газовая постоянная. Учитывая, что в задаче рассматривается двухатомный газ ($i = 5$), имеем $C_p = \frac{7}{2}R$ и $C_V = \frac{5}{2}R$. Подставив эти значения в формулу (1), найдем показатель политропы: $n = 0$.

Ответ: $n = 0$.

2.68. Некоторый двухатомный газ подвергают политропному сжатию, в результате чего давление газа возросло от $p_1 = 10$ кПа до $p_2 = 30$ кПа, а объем газа уменьшился от $V_1 = 2{,}5$ л до $V_2 = 1$ л. Определите: 1) показатель политропы n; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: $i = 5$; $p_1 = 10$ кПа (10^4 Па); $p_2 = 30$ кПа ($3 \cdot 10^4$ Па); $V_1 = 2{,}5$ л ($2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3); $V_2 = 1$ л (10^{-3} м^3).

Найти: 1) n; 2) ΔU.

Решение. Уравнение политропного процесса для двух состояний газа (начального *1* и конечного *2*) можно записать в виде

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n,$$

где n — показатель политропы. Возможна другая форма записи

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n$$

или, учитывая условие задачи $\dfrac{p_2}{p_1} = 3$ и $\dfrac{V_1}{V_2} = 2{,}5$, получим

$$3 = (2{,}5)^n,$$

откуда искомый показатель политропы $n = 1{,}2$.

Внутренняя энергия газа — однозначная функция состояния, при всех процессах изменение внутренней энергии одинаково и равно

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1), \qquad (1)$$

где ν — количество вещества; $C_V = \dfrac{i}{2} R$ — молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Записав уравнение Клапейрона — Менделеева для двух состояний газа: $p_1 V_1 = \nu R T_1$ и $p_2 V_2 = \nu R T_2$, найдем температуры T_1 и T_2:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} \text{ и } T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R}. \qquad (2)$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), получим искомое изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{C_V}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{i}{2}(3p_1 \cdot 2{,}5 V_1 - p_1 V_1) = \frac{8i}{2} p_1 V_1 = 20 p_1 V_1.$$

Ответ: 1) $n = 1{,}2$; 2) $\Delta U = 12{,}5$ Дж.

2.69. В сосуде, теплоемкость* которого 0,6 кДж/К, находится 0,5 л воды и 300 г льда при 0 °C. Определите, какая установится температура Θ после впуска в воду 100 г водяного пара при температуре 100 °C. Удельная теплота парообразования 2,26 МДж/кг, удельная теплота плавления льда $3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, плотность воды 1 г/см^3, удельная теплоемкость воды $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

Дано: $C_1 = 0{,}6$ кДж/К ($0{,}6 \cdot 10^3$ Дж/К); $V_2 = 0{,}5$ л ($0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3); $m_3 = 300$ г (0,3 кг); $m_4 = 100$ г (0,1 кг); $t_3^{\text{пл}} = 0$ °C ($T_3^{\text{пл}} = 273$ К); $t_3^{\text{к}} = 100$ °C ($T_3^{\text{к}} = 373$ К); $r_4 = 2{,}26$ МДж/кг ($2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг); $\lambda_3 = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг; $\rho_2 = 1$ г/см^3 (1000 кг/м^3); $c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

* Теплоемкость C тела определяется количеством теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус.

Найти: Θ.

Решение. Поскольку результат теплообмена не известен, поэтому предположим, что температура всех тел после окончания теплообмена будет Θ, причем она больше температуры плавления льда, но меньше температуры кипения воды. Сосуд и вода нагрелись, получив соответственно количество теплоты

$$Q_1 = C_1(\Theta - T_3^{\text{пл}}), \tag{1}$$

$$Q_2 = c_2 m_2(\Theta - T_3^{\text{пл}}) = c_2 \rho_2 V_2(\Theta - T_3^{\text{пл}}), \tag{2}$$

где $m_2 = \rho_2 V_2$.

Лед расплавился, а вода нагрелась, получив количество теплоты

$$Q_3 = \lambda_3 m_3 + c_2 m_3(\Theta - T_3^{\text{пл}}). \tag{3}$$

При конденсации пара образовавшаяся вода охладилась, отдав количество теплоты

$$Q_4 = -r_4 m_4 + c_2 m_4(\Theta - T_3^{\text{к}}). \tag{4}$$

Уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0. \tag{5}$$

Подставив в формулу (5) выражения (1), (2), (3) и (4), получим

$$C_1(\Theta - T_3^{\text{пл}}) + c_2\rho_2 V_2(\Theta - T_3^{\text{пл}}) + \lambda_3 m_3 + c_2 m_3(\Theta - T_3^{\text{пл}}) - r_4 m_4 + c_2 m_4(\Theta - T_3^{\text{к}}) = 0.$$

Откуда искомая установившаяся температура

$$\Theta = \frac{r_4 m_4 + C_1 T_3^{\text{пл}} - \lambda_3 m_3 + c_2[m_4 T_3^{\text{к}} + (\rho_2 V_2 + m_3)T_3^{\text{пл}}]}{C_1 + c_2(\rho_2 V_2 + m_3 + m_4)}.$$

Ответ: $\Theta = 311$ К.

2.70. В идеальной тепловой машине Карно, работающей по обратному циклу (холодильной машине), в качестве холодильника используется вода при 0 °C, а в качестве нагревателя — вода при 100 °C. Сколько воды m_2 следует заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар 100 г воды в нагревателе? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26$ МДж/кг.

Дано: $t_1 = 100$ °C ($T_1 = 373$ К); $t_2 = 0$ °C ($T_2 = 273$ К); $m_1 = 100$ г (0,1 кг); $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг; $r = 2{,}26$ МДж/кг ($2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг).

Найти: m_2.

Решение. Для испарения воды массой m_1 следует затратить количество теплоты

$$Q_1 = r m_1, \tag{1}$$

где r — удельная теплота парообразования воды.

При замерзании воды массой m_2 выделяется количество теплоты

$$Q_2 = -\lambda m_2, \tag{2}$$

где λ — удельная теплота плавления воды.

Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{3}$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, отданное холодильнику; T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

Из выражения (3) находим

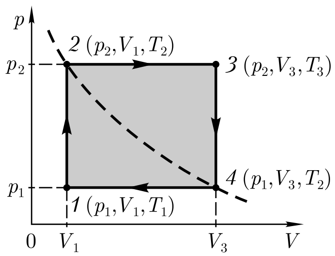
$$|Q_2| = |Q_1| \frac{T_2}{T_1}. \tag{4}$$

Подставив выражения (1) и (2) в формулу (4), получим $\lambda m_2 = \dfrac{m_1 r T_2}{T_1}$, откуда искомое значение

$$m_2 = \frac{m_1 r T_2}{\lambda T_1}.$$

Ответ: $m_2 = 0{,}494$ кг.

2.71. Идеальный газ количеством вещества $\nu = 2$ моль совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (см. рисунок). Определите работу A, совершенную газом за цикл, если точки *2* и *4* лежат на одной изотерме, начальная температура T_1 газа равна 300 К, а температура T_3 газа в результате изобарного расширения достигла 500 К.



Дано: $\nu = 2$ моль; $T_2 = T_4$; $T_1 = 300$ К; $T_3 = 500$ К.

Найти: A.

Решение. На рисунке представлены характерные точки цикла (*1*, *2*, *3*, *4*) и в скобках — параметры каждого из состояний (давление, объем и температура).

Работа за цикл численно равна площади заштрихованного прямоугольника, т. е., согласно рисунку,

$$A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = p_2 V_3 \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right). \tag{1}$$

Точки *2* и *4* лежат на изотерме ($T_2 = T_4$), поэтому для этих состояний по закону Бойля — Мариотта

$$p_2 V_1 = p_1 V_3. \tag{2}$$

Уравнения Клапейрона — Менделеева для произвольной массы газа для состояний *1* и *3* можно записать в виде

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 \text{ и } p_2 V_3 = \nu R T_3, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_3} = \frac{T_1}{T_3}. \tag{4}$$

Из уравнения (2) следует, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_3}.$$

Подставив последнее выражение в формулу (4), получаем

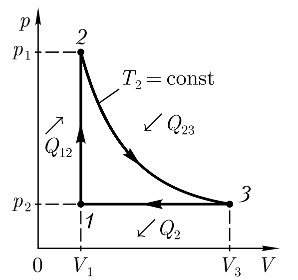
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_3} = \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}. \qquad (5)$$

Искомую работу найдем, если подставим в формулу (1) выражения (3) и (5):

$$A = p_2 V_3 \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right) = \nu R T_3 \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right) = \nu R T_3 \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right)^2.$$

Ответ: $A = 1{,}87$ кДж.

2.72. Идеальный трехатомный газ количеством вещества $\nu = 2$ моль занимает объем $V_1 = 10$ л и находится под давлением $p_1 = 250$ кПа. Сначала газ подвергли изохорному нагреванию до температуры $T_2 = 500$ К, затем — изотермическому расширению до начального давления, а после этого в результате изобарного сжатия возвратили в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите термический КПД η цикла.



Дано: $i = 6$; $\nu = 2$ моль; $V_1 = 10$ л (10^{-2} м^3); $p_1 = 250$ кПа ($2{,}5 \cdot 10^5$ Па); $T_2 = 500$ К.

Найти: η.

Решение. Термический КПД любого цикла определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (1)$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное газом за цикл; Q_2 — количество теплоты, отданное газом за цикл.

Количество теплоты Q_1 газ получает в двух процессах: изохорном *1*→*2* и изотермическом *2*→*3*, т. е.

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}.$$

Количество теплоты Q_2 газ отдает в изобарном процессе *3*→*1*, т. е.

$$Q_2 = |Q_{31}|.$$

В случае изохорного процесса *1*→*2*

$$Q_{12} = \nu C_V (T_2 - T_1),$$

где $C_V = \dfrac{i}{2} R$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме (i — число степеней свободы молекулы; для трехатомного газа $i = 6$).

Записав уравнение Клапейрона—Менделеева для состояния *1*, $p_1V_1 = \nu RT_1$, найдем температуру

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} = 150\ \text{К}.$$

В случае изотермического процесса *2*→*3*

$$Q_{23} = A_{23} = \nu RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2} = \nu RT_2 \ln\frac{V_3}{V_1}$$

(учли, что $V_2 = V_1$). В полученном выражении отношение $\frac{V_3}{V_1}$, согласно закону Гей-Люссака, заменим отношением температур $\frac{T_2}{T_1}$, т.е.

$$Q_{23} = \nu RT_2 \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

В случае изобарного процесса *3*→*1* газ отдает количество теплоты

$$Q_2 = \nu C_p(T_2 - T_1),$$

где $C_p = \frac{i+2}{2}R$ — молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Подставив найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу (1), получаем термический КПД цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\nu C_p(T_2 - T_1)}{\nu C_V(T_2 - T_1) + \nu RT_2 \ln\frac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{(i+2)(T_2 - T_1)}{i(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln\frac{T_2}{T_1}}.$$

Ответ: $\eta = 15{,}2\ \%$.

2.73. Температура пара, поступающего в паровую машину, $T_1 = 400$ К, температура в конденсаторе $T_2 = 320$ К. Какова теоретически возможная максимальная работа A машины при затрате количества теплоты 5 кДж?

Дано: $T_1 = 400$ К; $T_2 = 320$ К; $Q_1 = 5$ кДж ($5 \cdot 10^3$ Дж).

Найти: A.

Решение. Максимальная работа, совершаемая тепловым двигателем, возможна лишь при обратимом цикле Карно (состоит из двух изотерм и двух адиабат). Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

где T_1 и T_2 — термодинамические температуры нагревателя и холодильника соответственно.

КПД любой тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \qquad (2)$$

где A — работа, совершаемая тепловой машиной; Q_1 — количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя.

Приравняв выражения (1) и (2)

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{Q_1},$$

получим искомую теоретически возможную максимальную работу

$$A = \frac{T_1 - T_2}{T_1} Q_1.$$

Ответ: $A = 1$ кДж.

2.74. В котле паровой машины температура равна 400 К, а температура холодильника 300 К. Какова теоретически возможная максимальная работа А машины, если в топке сожжено 500 кг дров с удельной теплотой сгорания $1{,}26 \cdot 10^7$ Дж/кг.

Дано: $T_1 = 400$ К; $T_2 = 300$ К; $m = 500$ кг; $q = 1{,}26 \cdot 10^7$ Дж/кг.

Найти: A.

Решение. Теоретически возможная максимальная работа может быть совершена идеальной тепловой машиной, работающей по циклу Карно. Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

где T_1 и T_2 — термодинамические температуры нагревателя и холодильника соответственно.

КПД тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \qquad (2)$$

где A — работа, совершаемая тепловой машиной; Q_1 — количество теплоты, выделившееся при сгорании топлива:

$$Q_1 = \eta q m = \frac{T_1 - T_2}{T_1} q m, \qquad (3)$$

где q — удельная теплота сгорания; m — масса топлива.

Подставив формулу (3) в выражение (2) и приравняв (1) и (2), получаем

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{A}{\eta q m} = \frac{A T_1}{(T_1 - T_2) q m},$$

откуда искомая теоретически возможная максимальная работа паровой машины

$$A = \frac{q m (T_1 - T_2)^2}{T_1^2}.$$

Ответ: $A = 394$ МДж.

2.75. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу $A = 600$ Дж. Температура T_1 нагревателя равна 500 К, T_2 холодильника — 300 К. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Дано: $A = 600$ Дж; $T_1 = 500$ К; $T_2 = 300$ К.
Найти: 1) η; 2) Q_2.
Решение. Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2 = Q_1 - A, \quad (1)$$

где $Q_1 = \dfrac{A}{\eta}$ — количество теплоты, полученное от нагревателя.

Подставив это выражение в (1), найдем

$$Q_2 = A\left(\frac{1}{\eta} - 1\right).$$

Ответ: 1) $\eta = 0{,}4$; 2) $Q_2 = 900$ Дж.

2.76. Определите изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой $m = 10$ г, если давление газа уменьшилось от $p_1 = 0{,}1$ МПа до $p_2 = 50$ кПа.
Дано: $m = 10$ г (10^{-2} кг); $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $p_1 = 0{,}1$ МПа (10^5 Па); $p_2 = 50$ кПа ($5 \cdot 10^4$ Па).
Найти: ΔS.
Решение. Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \quad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, полученное газом, $Q = A + \Delta U$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$. Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2}. \quad (2)$$

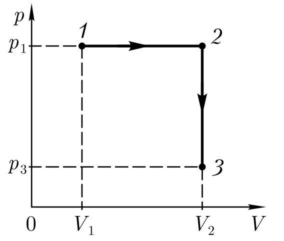
Подставив (2) в (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Ответ: $\Delta S = 2{,}06$ Дж/К.

2.77. Азот массой $m = 100$ г был изобарно нагрет так, что его объем увеличился в 2 раза, а затем был изохорно охлажден так, что его давление уменьшилось в 2 раза. Определите изменение энтропии ΔS в ходе указанных процессов.
Дано: $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 100$ г (10^{-1} кг); $\dfrac{V_2}{V_1} = 2$; $\dfrac{p_1}{p_3} = 2$.
Найти: ΔS.
Решение. Энтропия — величина аддитивная, поэтому общее изменение энтропии складывается из изменений ее в рассматриваемых процессах — изобарном *1* → *2* и изохорном *2* → *3* (см. рисунок):

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}. \qquad (1)$$



Изменение энтропии в изобарном процессе *1*→*2*

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{12}}{T} = \frac{m}{M} C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \ln\frac{T_2}{T_1} \qquad (2)$$

(учли, что $dQ_{12} = \frac{m}{M} C_p dT$, где C_p — молярная теплоемкость при постоянном давлении).

Изменение энтропии в изохорном процессе *2*→*3*

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{dQ_{23}}{T} = \frac{m}{M} C_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_V \ln\frac{T_3}{T_2} \qquad (3)$$

(учли, что $dQ_{23} = \frac{m}{M} C_V\, dT$, где C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме).

Для изобарного процесса *1*→*2* (p = const) $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, откуда $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 2$; для изохорного процесса *2*→*3* (V = const) $\frac{p_1}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$, откуда $\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{1}{2}$. Подставив полученные значения в формулы (2) и (3), которые в свою очередь подставим в выражение (1), получаем искомое изменение энтропии в ходе указанных процессов:

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_p \ln 2 + \frac{m}{M} C_V \ln\frac{1}{2} = \frac{m}{M}(C_p - C_V)\ln 2 = \frac{m}{M} R \ln 2. \qquad (3)$$

Ответ: $\Delta S = 20{,}6$ Дж/К.

2.78. Исходя из неравенства Клаузиуса, выведите формулу для термического КПД цикла Карно.

Дано: $\Delta S \geqslant 0$.

Найти: η.

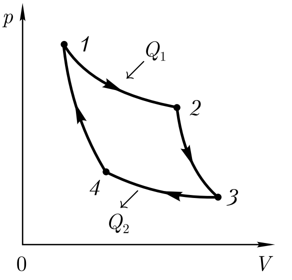
Решение. Согласно неравенству Клаузиуса,

$$\Delta S \geqslant 0,$$

т. е. энтропия замкнутой системы либо возрастает (необратимые процессы), либо остается постоянной (обратимые процессы).

Цикл Карно — обратимый цикл, поэтому изменение энтропии замкнутой системы

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0. \qquad (1)$$



Поскольку процессы *2*→*3* и *1*→*4* — адиабатные (изоэнтропийные), для них S = const и соответственно $\Delta S_{23} = 0$ и $\Delta S_{41} = 0$ (см. рисунок). Тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{34} = 0. \qquad (2)$$

Изменения энтропии

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T_1} = \frac{Q_1}{T_1} \text{ и } \Delta S_{34} = -\int_3^4 \frac{\mathrm{d}Q}{T_2} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

($T_1 = \mathrm{const}$, $T_2 = \mathrm{const}$). Подставим эти значения ΔS_{12} и ΔS_{34} в формулу (2):

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0;\ \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \text{ или } -\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}.$$

Прибавив к обеим частям последнего равенства по единице, найдем выражение для термического КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Ответ: $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$.

2.79. Определите изменение энтропии ΔS при превращении 15 г льда при -13 °C в пар при 100 °C. Удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Дано: $m = 15$ г ($1{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг); $t_1 = -13$ °C ($T_1 = 260$ К); $t_2 = 0$ °C ($T_2 = 273$ К); $t_3 = 100$ °C ($T_3 = 373$ К); $c_{\text{л}} = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К); $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг; $c_{\text{в}} = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К); $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Найти: ΔS.

Решение. Энтропия — величина аддитивная, поэтому общее изменение энтропии складывается из ее изменений в следующих процессах: 1) нагревание льда массой m от T_1 до T_2 (ΔS_1); 2) плавление льда массой m при температуре T_2 (ΔS_2); 3) нагревание воды массой m от T_2 до T_3 (ΔS_3); 4) испарение воды массой m при температуре T_3 (ΔS_4). Таким образом,

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4. \qquad (1)$$

Изменение энтропии выражается общей формулой:

$$\Delta S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T}. \qquad (2)$$

При бесконечно малом изменении температуры $\mathrm{d}T$ нагреваемого тела затрачивается количество теплоты $\mathrm{d}Q = mc\,\mathrm{d}T$, где m — масса тела; c — его удельная теплоемкость. Подставив $\mathrm{d}Q$ в выражение (2), найдем формулы для вычисления изменения энтропии при нагревании льда (процесс *1*) и воды (процесс *3*):

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_{\text{л}}\mathrm{d}T}{T} = mc_{\text{л}} \ln\frac{T_2}{T_1}; \qquad (3)$$

$$\Delta S_3 = \int_{T_2}^{T_3} \frac{mc_{\text{в}}\mathrm{d}T}{T} = mc_{\text{в}} \ln\frac{T_3}{T_2}. \qquad (4)$$

Плавление льда происходит при постоянной температуре T_2, поэтому в формуле (2) T_2 можно вынести за знак интеграла:

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_2}\int \mathrm{d}Q = \frac{Q_1}{T_2}, \tag{5}$$

где Q_1 — количество теплоты, переданное при плавлении льда, $Q_1 = \lambda m$ (λ — удельная теплота плавления). Подставив в равенство (5) Q_1, найдем формулу для вычисления изменения энтропии при плавлении льда (процесс *2*):

$$\Delta S_2 = \frac{\lambda m}{T_2}. \tag{6}$$

Испарение воды происходит при постоянной температуре T_3, поэтому

$$\Delta S_4 = \frac{1}{T_3}\int \mathrm{d}Q = \frac{Q_2}{T_3}, \tag{7}$$

где Q_2 — количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры, $Q_2 = rm$ (r — удельная теплота парообразования). Подставив в равенство (7) Q_2, найдем формулу для вычисления изменения энтропии при испарении воды (процесс *4*):

$$\Delta S_4 = \frac{rm}{T_3}. \tag{8}$$

Подставив выражения (3), (6), (4) и (8) в формулу (1), найдем искомое общее изменение энтропии:

$$\Delta S = m\left(c_{\text{л}} \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_{\text{в}} \ln\frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3}\right).$$

Ответ: $\Delta S = 130$ Дж/кг.

Задачи для самостоятельного решения

2.80. Определите среднюю кинетическую энергию $\langle E\rangle$ теплового движения азота ($m = 10$ г) при температуре $T = 300$ К. Какая энергия $\langle E_{\text{п}}\rangle$ приходится на долю поступательного движения, какая — $\langle E_{\text{вр}}\rangle$ на долю вращательного движения? [$\langle E\rangle = 742$ Дж; $\langle E_{\text{п}}\rangle = 445$ Дж; $\langle E_{\text{вр}}\rangle = 297$ Дж]

2.81. В закрытом сосуде находится смесь кислорода массой $m_1 = 48$ г и азота массой $m_2 = 42$ г. Определите изменение внутренней энергии смеси, если ее нагрели на $\Delta T = 10°$. [$\Delta U = 623$ Дж]

2.82. В закрытом сосуде вместимостью $V = 5$ л под давлением $p = 100$ кПа находится азот. Определите, какое количество теплоты надо сообщить азоту, чтобы повысить давление в сосуде в 2 раза. [$Q = \frac{iV}{2}p = 1{,}25$ кДж]

2.83. Считая углекислый газ идеальным газом, определите его удельную теплоемкость: 1) для изохорного процесса; 2) для изобарного процесса. [1) $c_V = 567$ Дж/(кг · К); 2) $c_p = 756$ Дж/(кг · К)]

2.84. Определите удельную теплоемкость c_V смеси газов, содержащей $V_1 = 3$ л водорода и $V_2 = 1$ л гелия, если газы находятся при одинаковых условиях. [$c_V = \frac{R(i_1V_1 + i_2V_2)}{2(M_1V_1 + M_2V_2)} = 5{,}82$ кДж/(кг · К)]

2.85. Применяя первое начало термодинамики и уравнение состояния идеального газа, докажите, что разность молярных теплоемкостей $c_p - c_V = R$ (уравнение Майера).

2.86. Закрытый баллон вместимостью $V = 0{,}5$ м^3 заполнен азотом под давлением $p_1 = 10$ кПа при температуре $T_1 = 290$ К. Определите температуру T_2 и давление газа p_2 после сообщения газу количества теплоты $Q = 5$ кДж. [$T_2 = T_1 + \dfrac{2QT_1}{ip_1V} = 406$ К; $p_2 = 14$ кПа]

2.87. Многоатомный идеальный газ количеством вещества $\nu = 3$ моль изобарно нагревается на $\Delta T = 100$ К. Определите: 1) количество теплоты Q, сообщенное газу; 2) изменение его внутренней энергии ΔU; 3) работу A расширения газа. [1) $Q = 9{,}97$ кДж; 2) $\Delta U = 7{,}48$ кДж; 3) $A = 2{,}49$ кДж]

2.88. Углекислый газ расширяется при постоянном давлении. Определите работу расширения A, если газу передано количество теплоты $Q = 6$ кДж. [$A = \dfrac{2Q}{i+2} = 1{,}5$ кДж]

2.89. Определите, какая доля теплоты, сообщенная трехатомному идеальному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение его внутренней энергии и какая — на работу расширения газа. [0,75; 0,25]

2.90. Кислород массой $m = 10$ г, находящийся при температуре $T = 273$ К и давлении $p_1 = 100$ кПа, сжимают изотермически до объема $V_2 = 1{,}2$ л. Определите: 1) давление кислорода p_2 после сжатия; 2) работу A сжатия газа. [1) $p_2 = 591$ кПа; 2) $A = -1260$ Дж]

2.91. Водород занимает объем $V_1 = 10$ л и находится под давлением $p_1 = 100$ кПа. Газ сначала нагрели при постоянном давлении до объема $V_2 = 20$ л, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 300$ кПа. Постройте график процесса и определите: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу. [1) $\Delta U = \dfrac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 12{,}5$ кДж; 2) $A = p_1(V_2 - V_1) = 1$ кДж; 3) $Q = 13{,}5$ кДж]

2.92. Кислород массой $m = 32$ г, находящийся при нормальных условиях, сжимают адиабатно до объема $V_2 = 2$ л. Определите давление p_2 и температуру T_2 кислорода после сжатия, а также работу сжатия A. [$p_2 = 2{,}98$ МПа; $T_2 = 717$ К; $A = -9{,}22$ кДж]

2.93. Определите массу кислорода, если при его адиабатном расширении с начальной температурой $T_1 = 300$ К внутренняя энергия газа уменьшилась на 8 кДж, а объем газа увеличился в $n = 6$ раз. [$m = \dfrac{(\gamma-1)n^{\gamma-1}M\Delta U}{RT_1(n^{\gamma-1}-1)} = 80{,}3$ г]

2.94. Определите, во сколько раз возрастет длина свободного пробега молекул двухатомного газа, если в результате адиабатного расширения давление газа падает вдвое. [в 1,64 раза]

2.95. Определите, во сколько раз уменьшится средняя скорость молекул двухатомного газа при адиабатном расширении газа в три раза. [В 1,25 раз]

2.96. Двухатомный газ, занимая при давлении $p_1 = 1$ МПа объем $V_1 = 2$ л, расширяется в $n = 2$ раза. Определите конечное давление p_2 и работу расширения A газа, если процесс проведен: 1) изотермически; 2) адиабатно. [1) $p_2 = \dfrac{p_1}{n} = 0{,}5$ МПа; $A = p_1V_1\ln n = 1{,}39$ кДж; 2) $p_2 = n^{-\gamma}p_1 = 0{,}379$ МПа; $A = \dfrac{i}{2}p_1V_1(1 - n^{1-\gamma}) = 1{,}21$ кДж]

2.97. В результате политропного сжатия от давления 0,2 МПа до давления 1,4 МПа объем газа уменьшился в пять раз. Определите показатель политропы. [$n = 1{,}21$]

2.98. В стеклянный стакан массой $m_1 = 100$ г при температуре $t_1 = 18$ °C налили $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = 95$ °C. Определите, какая температура Θ воды установилась в стакане, если удельная теплоемкость стекла $c_1 = 0{,}83$ кДж/(кг · К), воды $c_2 = 4{,}19$ кДж/(кг · К). [$\Theta = \dfrac{c_1m_1T_1 + c_2m_2T_2}{c_1m_1 + c_2m_2} = 361$ К]

2.99. В латунный калориметр массой $m_1 = 150$ г, содержащий $m_2 = 200$ г воды при температуре $T_1 = 288$ К, опустили железную гирю массой $m = 260$ г при температуре $T = 373$ К. Определите установившуюся температуру Θ. Удельные теплоемкости железа $c = 460$ Дж/(кг · К); воды $c_2 = 4{,}19$ кДж/(кг · К); латуни $c_1 = 380$ Дж/(кг · К). [$\Theta = \dfrac{cmT + (c_2m_2 + c_1m_1)T_1}{cm + c_2m_2 + c_1m_1} = 305$ К]

2.100. Определите, с какой высоты упал свинцовый шар, если он нагрелся при падении на $\Delta t = 3$ °C. Удар неупругий, и на нагревание пошло 40 % работы, в которую перешла кинетическая энергия. Удельная теплоемкость c свинца равна 130 Дж/(кг · К). [$h = \dfrac{c\Delta t}{0{,}4g} = 99{,}4$ м]

2.101. Определите, с какой скоростью должна лететь свинцовая пуля, чтобы при ударе о стенку она расплавилась. Температура летящей пули $T_1 = 323$ К, температура плавления свинца $T_2 = 598$ К, удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления свинца $\lambda = 25$ кДж/кг. [$v = \sqrt{2(c\Delta T + \lambda)} = 349$ м/с]

2.102. Кусочек меди массой $m = 150$ г, находящийся при температуре $t = 24$ °C, погружают в жидкий азот, температура кипения которого $T_0 = 77$ К. Определите массу азота, превратившегося при этом в пар, если удельная теплоемкость меди $c = 377$ Дж/(кг · К), а удельная теплота парообразования азота $r = 200$ кДж/кг. [$m_{N_2} = \dfrac{mc(T - T_0)}{r} = 6{,}22$ г]

2.103. Вода массой $m_1 = 10$ кг находится при температуре $t_1 = 80$ °C. Определите, сколько следует добавить воды при температуре $t_2 = 40$ °C, чтобы температура смеси Θ стала равной 50 °C. [$m_2 = m_1\dfrac{t_1 - \Theta}{\Theta - t_2} = 30$ кг]

2.104. Свинцовый осколок, падая с высоты $h = 500$ м, у поверхности Земли обладал скоростью $v = 40$ м/с. Определите, на сколько градусов повысилась температура осколка, если вся работа сопротивления воздуха пошла на нагревание осколка. Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг · К). [$\Delta t = \dfrac{2gh - v^2}{2c} = 31{,}6$ °C]

2.105. Газ в идеальном тепловом двигателе получил от нагревателя за цикл количество теплоты $Q_1 = 20$ кДж. Температуры нагревателя и холодильника соответственно равны $T_1 = 700$ К и $T_2 = 250$ К. Определите мощность теплового двигателя, если время осуществления цикла составляет $t = 0{,}6$ с. [$N = \dfrac{T_1 - T_2}{tT_1}Q_1 = 21{,}4$ кВт]

2.106. Рабочее тело — идеальный газ — теплового двигателя совершает цикл, состоящий из последовательных процессов: изобарного, адиабатного и изотермического. В результате изобарного процесса газ нагревается от $T_1 = 200$ К до $T_2 = 300$ К. Постройте график цикла и определите термический КПД теплового двигателя. [$\eta = 1 - \dfrac{T_1 \ln(T_2/T_1)}{T_2 - T_1} = 18{,}9\,\%$]

2.107. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого $\eta = 20\,\%$. Количество теплоты, полученной газом за цикл от нагревателя, $Q_1 = 4$ кДж. Определите: 1) работу A, совершенную газом за цикл; 2) количество теплоты Q_2, отдаваемой холодильнику. [1) $A = 800$ Дж; 2) $Q_2 = 3{,}2$ кДж]

2.108. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого $\eta = 30\,\%$. Определите работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 500 Дж. [$A = 350$ Дж]

2.109. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого $\eta = 18\,\%$. Определите, какое количество теплоты Q_1 газ получил от нагревателя, если отношение температур нагревателя и холодильника $n = 1{,}2$, а газ совершил работу $A = 1{,}5$ кДж. [$Q_1 = \dfrac{nA}{n-1} = 9$ кДж]

2.110. Азот массой $m = 28$ г изотермически расширяется от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 4$ л. Определите изменение энтропии для данного процесса. [$\Delta S = \dfrac{m}{M} R \ln \dfrac{V_2}{V_1} = 5{,}76$ Дж/К]

2.111. Азот массой $m = 100$ г изобарно нагрели от температуры $T_1 = 280$ К до $T_2 = 400$ К. Определите изменение энтропии для данного процесса. [$\Delta S = \dfrac{m}{M} C_p \ln \dfrac{T_2}{T_1} = 37{,}1$ Дж/К]

2.112. Водород массой $m = 28$ г адиабатно расширили в $n = 3$ раза, а затем изобарно сжали до начального объема. Определите изменение энтропии в ходе указанных процессов. [$\Delta S = \dfrac{m}{M} \dfrac{i+2}{i} R \ln \dfrac{1}{n} = -319$ Дж/кг]

2.113. Определите изменение энтропии при превращении воды массой 10 г при 0 °C в пар при 100 °C. Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). [$\Delta S = 73{,}1$ Дж/кг]

2.3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

Основные законы и формулы

- Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса)

$$\left(p + \frac{a}{V_\mathrm{m}^2}\right)(V_\mathrm{m} - b) = RT \quad \text{(для 1 моль газа)},$$

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[V_m — молярный объем; a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов; $\nu=\dfrac{m}{M}$ — количество вещества; $V=\nu V_m$].

• Внутреннее давление газа

$$p'=\frac{a}{V_m^2}$$

[a — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения; V_m — молярный объем].

• Связь критических параметров (объем, давление и температура) с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса

$$V_{кр}=3b,\quad p_{кр}=\frac{a}{27b^2},\quad T_{кр}=\frac{8a}{27Rb}$$

[R — молярная газовая постоянная].

• Внутренняя энергия реального газа

$$U_m=C_V T-\frac{a}{V_m} \text{ (для 1 моль газа),}$$

$$U_m=\frac{m}{M}\left(C_V T-\frac{a}{V_m}\right) \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; a — постоянная Ван-дер-Ваальса; V_m — молярный объем; $\dfrac{m}{M}$ — количество вещества].

• Энтальпия системы

$$U_1+p_1V_1=U_2+p_2V_2$$

[индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям системы].

• Поверхностное натяжение

$$\sigma=\frac{F}{l},\quad \sigma=\frac{\Delta E}{\Delta S}$$

[F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE — поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки].

• Формула Лапласа, позволяющая определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

[R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны — вне жидкости (вогнутый мениск); σ — поверхностное натяжение].

• Избыточное давление в случае сферической поверхности

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

• Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

[θ — краевой угол; r — радиус капилляра; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; σ — поверхностное натяжение].

• Закон Дюлонга и Пти

$$C_V = 3R,$$

где C_V — молярная теплоемкость химически простых тел в кристаллическом состоянии; R — молярная газовая постоянная.

Примеры решения задач

2.114. Углекислый газ массой $m = 10$ г находится в сосуде вместимостью $V = 1$ л. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4/моль^2 и $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, определите: 1) собственный объем V' молекул газа; 2) внутреннее давление p' газа.

Дано: $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 10$ г (10^{-2} кг); $V = 1$ л (10^{-3} м^3); $a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Найти: 1) V'; 2) p'.

Решение. Уравнение Ван-дер-Ваальса — уравнение состояния реальных газов:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \tag{1}$$

где $\nu = \dfrac{m}{M}$ — количество вещества; a и b — поправки Ван-дер-Ваальса; R — молярная газовая постоянная.

В уравнении (1) поправка νb определяет учетверенный объем молекул всего газа, т. е. $\nu b = 4V'$, откуда искомый собственный объем молекул газа

$$V' = \frac{\nu b}{4} = \frac{mb}{4M}.$$

Как следует из уравнения (1), внутреннее давление газа

$$p' = \frac{\nu^2 a}{V^2} = \frac{m^2 a}{M^2 V^2}.$$

Ответ: 1) $V' = 2{,}43$ см^3; 2) $p' = 18{,}6$ кПа.

2.115. Давление p кислорода равно 8 МПа, его плотность $\rho = 100$ кг/м^3. Определите температуру газа, если: 1) газ идеальный (T_1); 2) газ реальный (T). Поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}136$ Н $\cdot$ м^4/моль^2 и $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Дано: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $p = 8$ МПа ($8 \cdot 10^6$ Па); $\rho = 100$ кг/м^3; $a = 0{,}136$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Найти: T_1; T.

Решение. Идеальный газ подчиняется уравнению Клапейрона — Менделеева

$$pV = \frac{m}{M}RT_1, \tag{1}$$

где m — масса газа; M — молярная масса; R — молярная газовая постоянная.

Учитывая, что плотность газа $\rho = \dfrac{m}{V}$, из уравнения (1) найдем искомую температуру

$$T_1 = \frac{pM}{\rho R}.$$

Реальный газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \tag{2}$$

где ν — количество вещества; a и b — поправки Ван-дер-Ваальса. Подставив $\nu = \dfrac{m}{M} = \dfrac{\rho V}{M}$ в уравнение Ван-дер-Ваальса (2), после элементарных преобразований получим

$$\left(p + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M - \rho b) = \rho RT,$$

откуда искомая температура

$$T = \frac{\left(p + \dfrac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M - \rho b)}{\rho R}.$$

Ответ: $T_1 = 308$ К; $T = 324$ К.

2.116. Вычислите поправки Ван-дер-Ваальса для кислорода, если критическая температура $T_{кр} = 15$ К и критическое давление $p_{кр} = 5{,}08$ МПа.

Дано: $T_{кр} = 15$ К; $p_{кр} = 5{,}08$ МПа ($5{,}08 \cdot 10^6$ Па).

Найти: a, b.

Решение. Поправки Ван-дер-Ваальса a и b присутствуют в уравнении состояния реальных газов (уравнении Ван-дер-Ваальса):

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где ν — количество вещества. Это уравнение можно записать в виде:

$$pV^3 - (\nu RT + \nu bp)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \tag{1}$$

Для нахождения критических параметров подставим их значения в уравнение (1):

$$p_{кр}V^3 - (\nu RT_{кр} + \nu bp_{кр})V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0. \tag{2}$$

Поскольку в критической точке все три корня совпадают и равны $V_{кр}$, уравнение (2) приводится к виду:

$$p_{кр}(V - V_{кр})^3 = 0,$$

или

$$p_{кр}V^3 - 3p_{кр}V_{кр}V^2 + 3p_{кр}V_{кр}^2V - p_{кр}V_{кр}^3 = 0. \tag{3}$$

Так как уравнения (2) и (3) тождественны, в них должны быть равны и коэффициенты при неизвестных соответствующих степеней. Поэтому можно записать:

$$p_{кр}V_{кр}^3 = \nu^3 ab;\ 3p_{кр}V_{кр}^2 = \nu^2 a;\ 3p_{кр}V_{кр} = \nu RT_{кр} + \nu b p_{кр}.$$

Решая полученные уравнения, найдем

$$a = \frac{27R^2T_{кр}^2}{64p_{кр}};\quad b = \frac{RT_{кр}}{8p_{кр}}.$$

Ответ: $a = 0{,}138$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

2.117. Углекислый газ массой $m = 10$ кг адиабатно расширяется в вакуум от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 2$ м^3. Принимая поправку Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4/моль^2, определите понижение температуры ΔT газа при этом расширении.

Дано: $m = 10$ кг; $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $Q = 0$; $i = 6$; $V_1 = 1$ м^3; $V_2 = 2$ м^3; $a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4/моль^2.

Найти: ΔT.

Решение. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, переданное газу, идет на изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A газа против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A. \tag{1}$$

Согласно условию задачи, газ адиабатно ($Q = 0$) расширяется в вакуум ($A = 0$), поэтому из (1) следует, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0 \text{ и } U_1 = U_2. \tag{2}$$

Внутреннюю энергию реального газа количеством вещества ν

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a\nu}{V}\right)$$

запишем для двух состояний газа — *1* (до расширения) и *2* (после расширения):

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1}\right) \text{ и } U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2}\right), \tag{3}$$

где C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме; a — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Приравняв, согласно (2), выражения (3), получаем

$$C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1} = C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2},$$

откуда искомая разность температур $\Delta T = T_2 - T_1$:

$$T_2 - T_1 = -\frac{a\nu}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -\frac{2am}{iMR}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

(учли $C_V = \frac{i}{2}R$ и $\nu = \frac{m}{M}$).

Ответ: $\Delta T = -1{,}65$ К.

2.118. Некоторый газ количеством вещества $\nu = 1$ кмоль занимает объем $V_1 = 1$ м^3. При расширении газа до объема $V_2 = 1{,}5$ м^3 была совершена работа A против сил межмолекулярного притяжения, равная 45,3 кДж. Определите поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Дано: $\nu = 1$ кмоль (10^3 моль); $V_1 = 1$ м^3; $V_2 = 1{,}5$ м^3; $A = 45{,}3$ кДж ($45{,}3 \cdot 10^3$ Дж).

Найти: a.

Решение. Работа, совершаемая против сил межмолекулярного притяжения,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p' \mathrm{d}V,$$

где $p' = \frac{\nu^2 a}{V^2}$ — внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул. Таким образом,

$$A = \nu^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^2} = \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = \frac{\nu^2 a(V_2 - V_1)}{V_1 V_2},$$

откуда

$$a = \frac{A V_1 V_2}{\nu^2 (V_2 - V_1)}.$$

Ответ: $a = 0{,}136$ Н·м^4/моль^2.

2.119. Азот количеством вещества $\nu = 2$ моль, занимавший при температуре $T = 350$ К объем $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3, расширяется изотермически до объема $V_2 = 3V_1$. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}136$ Н $\cdot$ м^4/моль^2 и $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, определите: 1) работу A расширения газа; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа.

Дано: $\nu = 2$ моль; $T = 350$ К $= \mathrm{const}$; $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3; $V_2 = 3V_1$; $a = 0{,}136$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Найти: 1) A; 2) ΔU.

Решение. Работа расширения газа от объема V_1 до объема V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \,\mathrm{d}V, \tag{1}$$

где p — давление, производимое газом на стенки сосуда, найдем из уравнения Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества ν

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

откуда

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}. \tag{2}$$

Выражение (1) после подстановки (2) примет вид:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) \mathrm{d}V = \nu RT \ln \frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} + \nu^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Внутренняя энергия реального газа для состояний *1* и *2*:

$$U_1 = \nu \left(C_V T - \frac{a\nu}{V_1} \right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu \left(C_V T - \frac{a\nu}{V_2} \right)$$

(учли, что $T = \text{const}$). Искомое изменение внутренней энергии газа в результате изотермического расширения

$$\Delta U = U_2 - U_1 = a\nu^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Ответ: 1) $A = 6{,}36$ кДж; 2) $\Delta U = 181$ Дж.

2.120. Докажите, что эффект Джоуля—Томсона будет всегда положительным, если дросселируется газ, для которого можно пренебречь собственным объемом молекул.

Дано: $b = 0$.

Найти: ΔT.

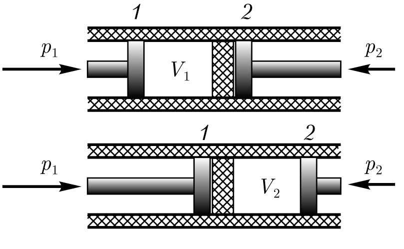
Решение. Эффект Джоуля—Томсона [изменение температуры реального газа в результате его адиабатного дросселирования — медленного прохождения газа (см. рисунок) под действием перепада давлений сквозь дроссель (например, пористую перегородку)] принято называть положительным, если газ в процессе дросселирования охлаждается ($\Delta T < 0$). В случае эффекта Джоуля—Томсона сохраняется (остается неизменной) функция состояния — энтальпия:

$$p_1 V_1 + U_1 = p_2 V_2 + U_2, \tag{1}$$

где p_1, V_1, U_1 — давление, объем и внутренняя энергия газа под поршнем *1*; p_2, V_2, U_2 — то же, под поршнем *2*.

Внутренняя энергия реального газа

$$U_1 = \nu \left(C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1} \right) \quad \text{и} \quad U_2 = \nu \left(C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2} \right), \tag{2}$$



где ν — количество вещества; C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; a — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения; T_1 и T_2 — температура газа под поршнями *1* и *2*.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества:

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu}-b\right)=RT, \tag{3}$$

где b — поправка Ван-дер-Ваальса, учитывающая собственный объем молекул.

Запишем уравнение (3) для двух состояний газа, приняв, согласно условию задачи, $b = 0$:

$$p_1V_1+\frac{a\nu^2}{V_1}=\nu RT_1 \text{ и } p_2V_2+\frac{a\nu^2}{V_2}=\nu RT_2,$$

откуда

$$p_1V_1=\nu RT_1-\frac{a\nu^2}{V_1} \text{ и } p_2V_2=\nu RT_2-\frac{a\nu^2}{V_2}. \tag{4}$$

Подставив выражения (2) и (4) в равенство (1), имеем

$$\nu RT_1-\frac{a\nu^2}{V_1}+\nu C_V T_1-\frac{a\nu^2}{V_1}=\nu RT_2-\frac{a\nu^2}{V_2}+\nu C_V T_2-\frac{a\nu^2}{V_2},$$

откуда после преобразований получаем искомую разность температур:

$$T_2-T_1=\frac{2a\nu}{C_V+R}\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)<0,$$

поскольку $V_2 \gg V_1$. Следовательно, расчет показывает, что газ в процессе дросселирования, если пренебречь собственным объемом молекул, охлаждается, т. е. эффект Джоуля—Томсона положительный.

Ответ: $\Delta T < 0$.

2.121. Определите, какую силу F следует приложить к горизонтальному медному кольцу высотой $h = 15$ мм, внутренним диаметром $d_1 = 40$ мм и внешним — $d_2 = 42$ мм, чтобы оторвать его от поверхности воды. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3, поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м.

Дано: $h = 15$ мм $(15 \cdot 10^{-3}$ м$)$; $d_1 = 40$ мм $(4 \cdot 10^{-2}$ м$)$; $d_2 = 42$ мм $(4{,}2 \cdot 10^{-2}$ м$)$; $\rho = 8{,}93$ г/см^3 (893 кг/м^3); $\sigma = 73$ мН/м $(73 \cdot 10^{-3}$ Н/м$)$.

Найти: F.

Решение. Сила, которую следует приложить для отрыва кольца от поверхности воды,

$$F = F_1 + F_2, \tag{1}$$

где F_1 — вес кольца; F_2 — сила поверхностного натяжения.

Вес кольца

$$F_1=\rho g h\frac{\pi}{4}(d_2^2-d_1^2), \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения.

При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внутренней и внешней поверхностям кольца, поэтому сила поверхностного натяжения

$$F_2 = \sigma l = \sigma\pi(d_1 + d_2). \qquad (3)$$

Подставив формулы (2) и (3) в равенство (1), получим искомую силу

$$F = \frac{\pi\rho g h}{4}(d_2^2 - d_1^2) + \pi\sigma(d_1 + d_2).$$

Ответ: $F = 35{,}7$ мН.

2.122. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 1{,}5$ мм. Плотность спирта $\rho = 0{,}8$ г/см^3, его поверхностное натяжение $\sigma = 22$ мН/м. Считая, что в момент отрыва капля имеет сферическую форму, определите ее диаметр D.

Дано: $\rho = 0{,}8$ г/см^3 (800 кг/м^3); $d = 1{,}5$ мм ($1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м); $\sigma = 22$ мН/м ($22 \cdot 10^{-3}$ Н/м).

Найти: D.

Решение. Вес капли

$$P = mg = \frac{1}{6}\pi D^3 \rho g \qquad (1)$$

(учли, что масса капли $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{1}{6}\pi D^3 \rho$) в момент ее отрыва должен разорвать поверхностную пленку на длине $l = \pi d$, где d — диаметр шейки капли (внутренний диаметр трубки), т.е. условие отрыва капли от трубки

$$P = F, \qquad (2)$$

где

$$F = \sigma l = \sigma\pi d \qquad (3)$$

— сила поверхностного натяжения, действующая на контуре l.

Подставив формулы (1) и (3) в равенство (2), получим

$$\frac{1}{6}\pi D^3 \rho g = \sigma\pi d,$$

откуда искомый диаметр капли

$$D = \sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}}.$$

Ответ: $D = 2{,}93$ мм.

2.123. Определите изменение поверхностной энергии ΔE мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1 = 5$ см^3 до $V_2 = 2V_1$. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м.

Дано: $V_1 = 5$ см^3 ($5 \cdot 10^{-6}$ м^3); $V_2 = 2V_1$; $\sigma = 40$ мН/м ($40 \cdot 10^{-3}$ Н/м).

Найти: ΔE.

Решение. По условию задачи рассматривается изотермический процесс, поэтому поверхностное натяжение постоянно (оно для данной жидкости — функция только температуры). Поверхностная энергия мыльного пузыря $E = 2\sigma S$ (у пузыря две поверхности — внутренняя и внешняя, площади которых можно принять равными из-за ничтожной толщины мыльной пленки).

Изменение поверхностной энергии мыльного пузыря

$$\Delta E = 2\sigma\Delta S, \tag{1}$$

где ΔS — изменение поверхности пузыря. Предполагая, что пузырь имеет сферическую форму,

$$\Delta S = 4\pi r_2^2 - 4\pi r_1^2, \tag{2}$$

где r_1 и r_2 — соответственно радиусы, отвечающие начальному V_1 и конечному V_2 объемам мыльного пузыря. Учитывая, что $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$ и $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$, выражение (2) примет вид:

$$\Delta S = 4\pi\left[\left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\right] = 4\pi\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}(\sqrt[3]{4} - 1) \tag{3}$$

(учли условие задачи $V_2 = 2V_1$).

Подставив выражение (3) в равенство (1), получим искомое изменение поверхностной энергии

$$\Delta E = 8\pi\sigma\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}(\sqrt[3]{4} - 1)\,.$$

Ответ: $\Delta E = 66{,}4$ мкДж.

2.124. Ртуть массой $m = 5$ г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Считая, что ртуть стекло не смачивает, определите силу F, которую следует приложить, чтобы расплющить каплю до толщины $h = 0{,}15$ мм. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Дано: $m = 5$ г ($5 \cdot 10^{-3}$ кг); $h = 0{,}15$ мм ($0{,}15 \cdot 10^{-3}$ м); $\rho = 13{,}6$ г/см^3 ($1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3); $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Найти: F.

Решение. При помещении капли ртути между двумя стеклянными пластинками капля примет вид тонкого диска с выпуклой боковой поверхностью. Возникшее из-за кривизны поверхности избыточное давление определяется формулой Лапласа

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{1}$$

где R_1 — радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, параллельной стеклянным пластинкам (радиус диска); $R_2 = \frac{h}{2}$ — радиус кривизны поверхности ртути в плоскости, перпендикулярной стеклянным пластинкам.

Избыточное давление (1) уравновешивается внешним давлением

$$\Delta p = \frac{F}{S}, \tag{2}$$

где S — площадь соприкосновения капли ртути с пластинкой:

$$S = \frac{V}{h} = \frac{m}{\rho h} = \pi R_1^2 \qquad (3)$$

(V — объем ртути). Тогда

$$R_1 = \sqrt{\frac{m}{\pi\rho h}}. \qquad (4)$$

Согласно (2), искомая сила

$$F = S\Delta p = \frac{m\sigma}{\rho h}\left(\sqrt{\frac{\pi\rho h}{m}} + \frac{2}{h}\right)$$

[учли выражения (3), (1) и (4)].

Ответ: $F = 16{,}4$ Н.

2.125. Определите давление p воздуха в воздушном пузырьке диаметром $d = 0{,}01$ мм, находящемся на глубине $h = 15$ см под поверхностью воды. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м, ее плотность $\rho = 1$ г/см^3. Атмосферное давление принять нормальным.

Дано: $d = 0{,}01$ мм (10^{-5} м); $h = 15$ см (0,15 м); $\sigma = 73$ мН/м ($73 \cdot 10^{-3}$ Н/м); $\rho = 1$ г/см^3 (1000 кг/м^3); $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па.

Найти: p.

Решение. Полное давление внутри пузырька складывается из атмосферного давления p_0, гидростатического давления p_1 и избыточного давления p_2, вызванного кривизной поверхности:

$$p = p_0 + p_1 + p_2. \qquad (1)$$

Гидростатическое давление

$$p_1 = \rho g h, \qquad (2)$$

где ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения; h — глубина, на которой находится под поверхностью воды воздушный пузырек.

Считая, что воздушный пузырек имеет форму сферы, избыточное давление, вызванное кривизной поверхности, согласно формуле Лапласа,

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{d} \qquad (3)$$

(учли, что радиусы кривизны всех нормальных сечений для сферы равны ее радиусу), т.е.

$$R_1 = R_2 = R = \frac{d}{2}.$$

Подставив выражения (2) и (3) в равенство (1), получим искомое давление воздуха в воздушном пузырьке:

$$p = p_0 + \rho g h + \frac{4\sigma}{d}.$$

Ответ: $p = 132$ кПа.

2.126. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $h = 37$ мм. Принимая плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м, определите радиус кривизны R ртутного мениска в капилляре.

Дано: $h = 37$ см ($3{,}7 \cdot 10^{-3}$ м); $\rho = 13{,}6$ г/см^3 ($1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3); $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Найти: R.

Решение. Избыточное давление, вызванное кривизной мениска,

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}, \qquad (1)$$

где σ — поверхностное натяжение; R — радиус кривизны ртутного мениска. Ртуть — несмачивающая жидкость, поэтому в капилляре опускается на такую глубину, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением Δp, т. е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h,$$

где ρ — плотность ртути; g — ускорение свободного падения. Откуда искомый радиус кривизны ртутного мениска

$$R = \frac{2\sigma}{\rho g h}.$$

Ответ: $R = 2{,}03$ мм.

2.127. Вертикальный капилляр внутренним диаметром $d = 0{,}04$ см погружен в воду. Определите, на какую высоту h поднимется вода в капилляре, если поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м, ее плотность $\rho = 1$ г/см^3. Считать, что вода полностью смачивает стекло.

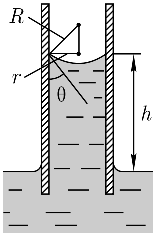
Дано: $d = 0{,}04$ см ($4 \cdot 10^{-4}$ м); $\sigma = 73$ мН/м ($73 \cdot 10^{-3}$ Н/м); $\rho = 1$ г/см^3 (1000 кг/м^3); $\theta = 0$.

Найти: h.

Решение. Жидкость в капилляре поднимется на такую высоту h, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением Δp, т. е.

$$\rho g h = \frac{2\sigma}{R},$$

где g — ускорение свободного падения; R — радиус свободной поверхности жидкости, имеющей форму полусферы (радиус мениска).



Если r — радиус капилляра, θ — краевой угол, то из рисунка следует, что $R = \dfrac{r}{\cos\theta}$. Тогда $\rho g h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{r}$, откуда высота капиллярного подъема

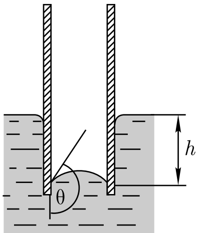
$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}. \qquad (1)$$

Если считать, что вода полностью смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Тогда, согласно (1), искомая высота, на которую поднимется вода в капилляре,

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{4\sigma}{\rho g d}.$$

Ответ: $h = 7{,}44$ см.

2.128. Вертикальный стеклянный капилляр внутренним радиусом $r = 0{,}2$ мм помещен в ртуть, которая опускается в капилляре на глубину $h = 3{,}75$ см. Определите поверхностное натяжение σ ртути, если ее плотность $\rho = 13{,}6$ г/см^3. Считать, что ртуть не смачивает стекло.



Дано: $r = 0{,}2$ мм $(2 \cdot 10^{-4}$ м); $h = 3{,}75$ см $(3{,}75 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 13{,}6$ г/см^3 $(1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3); $\theta = \pi$.

Найти: σ.

Решение. Ртуть в капилляре будет находиться в равновесии, если сумма гидростатического давления ($\rho g h$) и давления под искривленной поверхностью $\Delta p = -\dfrac{2\sigma\cos\theta}{r}$ будет равна нулю:

$$\rho g h - \frac{2\sigma\cos\theta}{r} = 0,$$

где g — ускорение свободного падения; θ — краевой угол; r — радиус капилляра. Из этого выражения следует, что

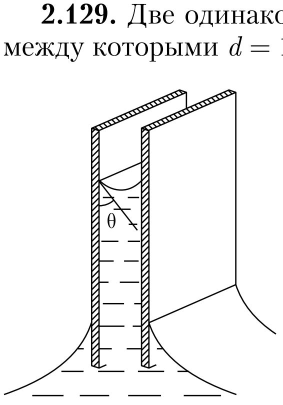
$$\sigma = \frac{\rho g r h}{2\cos\theta}. \qquad (1)$$

Если считать, что ртуть не смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$. Тогда, согласно (1), искомое поверхностное натяжение ртути

$$\sigma = -\frac{\rho g r h}{2}.$$

Ответ: $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

2.129. Две одинаковые длинные плоскопараллельные пластины, расстояние между которыми $d = 1$ мм, погружены в воду (см. рисунок). Считая смачивание полным, определите, на какую высоту h поднимется вода в зазоре. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, ее поверхностное натяжение $\sigma = 73$ мН/м.



Дано: $d = 1$ мм $(10^{-3}$ м); $\theta = 0$; $\rho = 1$ г/см^3 (1000 кг/м^3); $\sigma = 73$ мН/м $(73 \cdot 10^{-3}$ Н/м).

Найти: h.

Решение. Избыточное давление Δp уравновешивается давлением столба жидкости (гидростатическим давлением) $\rho g h$, т.е.

$$\Delta p = \rho g h. \qquad (1)$$

Избыточное давление под вогнутой поверхностью жидкости, согласно формуле Лапласа,

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (2)$$

где $R_1 = \dfrac{d}{2\cos\theta}$ (θ — краевой угол), $R_2 = \infty$ (поверхность цилиндрическая). Подставив R_1 и R_2 в формулу (2), найдем

$$\Delta p = \frac{2\sigma\cos\theta}{d}. \qquad (3)$$

Тогда, согласно (1) и (3),

$$\frac{2\sigma\cos\theta}{d} = \rho g h,$$

откуда искомая высота

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}.$$

Ответ: $h = 1{,}49$ см.

2.130. Узкое колено U-образного ртутного манометра имеет диаметр $d_1 = 2$ мм, широкое — $d_2 = 4$ мм (см. рисунок). Определите разность Δh уровней ртути в обоих коленах, если поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0{,}5$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а краевой угол $\theta = 138°$.

Дано: $d_1 = 2$ мм ($2 \cdot 10^{-3}$ м); $d_2 = 4$ мм ($4 \cdot 10^{-3}$ м); $\sigma = 0{,}5$ Н/м; $\rho = 13{,}6$ г/см^3 ($1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3); $\theta = 138°$.

Найти: Δh.

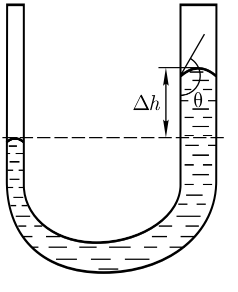
Решение. Ртуть по отношению к стеклу является несмачивающейся жидкостью, поэтому мениск имеет выпуклую форму (см. рисунок).

На уровне, отмеченном штриховой линией, давления в обоих капиллярах одинаковы. Следовательно, разность избыточных давлений должна уравновешиваться гидростатическим давлением жидкости высотой Δh, т. е.

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \rho g \Delta h, \qquad (1)$$

где

$$\Delta p_1 = \frac{2\sigma\cos\theta}{r_1} = \frac{4\sigma\cos\theta}{d_1} \quad \text{и} \quad \Delta p_2 = \frac{2\sigma\cos\theta}{r_2} = \frac{4\sigma\cos\theta}{d_2} \qquad (2)$$



(учли, что радиусы капилляров $r_1 = \dfrac{d_1}{2}$ и $r_2 = \dfrac{d_2}{2}$).

Подставив выражение (2) в равенство (1), получим искомую разность уровней ртути в обоих коленах:

$$\Delta h = \frac{4\sigma|\cos\theta|}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right).$$

Ответ: $\Delta h = 2{,}78$ мм.

2.131. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определите удельную теплоемкость c_V золота. Молярная масса золота $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Дано: $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: c_V.

Решение. В качестве модели твердого тела рассмотрим правильную кристаллическую решетку, в которой частицы (атомы, ионы, молекулы), принимаемые за материальные точки, колеблются в трех взаимно перпендикулярных направлениях около своих положений равновесия — узлов решетки.

Каждой частице, составляющей кристаллическую решетку, приписывается три колебательных степени свободы, каждая из которых, согласно закону равнораспределения энергии по степеням свободы, обладает энергией kT. Тогда внутренняя энергия 1 моль твердого тела

$$U_\mathrm{m} = 3N_\mathrm{A}kT = 3RT.$$

Молярная теплоемкость твердого тела

$$C_V = \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{m}}{\mathrm{d}T} = 3R \tag{1}$$

— закон Дюлонга и Пти, где R — молярная газовая постоянная.

Удельная теплоемкость

$$c_V = \frac{C_V}{M}. \tag{2}$$

Подставив выражение (1) в формулу (2), получим искомую удельную теплоемкость

$$c_V = \frac{3R}{M}.$$

Ответ: $c_V = 0{,}126$ кДж/(кг $\cdot$ К).

2.132. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определите количество теплоты Q, необходимое для нагревания алюминиевого шарика массой $m = 20$ г от $t_1 = 20$ °C до $t_2 = 40$ °C. Молярная масса алюминия $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Дано: $m = 20$ г ($2 \cdot 10^{-2}$ кг); $t_1 = 20$ °C; $t_2 = 40$ °C; $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: Q.

Решение. Количество теплоты Q, затрачиваемое для нагревания тела массой m от t_1 до t_2,

$$Q = c_V m(t_2 - t_1), \tag{1}$$

где c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Связь удельной c_V и молярной C_V теплоемкостей

$$c_V = \frac{C_V}{M}, \tag{2}$$

где M — молярная масса газа.

Согласно закону Дюлонга и Пти,

$$C_V = 3R, \tag{3}$$

где R — молярная газовая постоянная. Подставив выражения (2) и (3) в равенство (1), получим искомое количество теплоты

$$Q = \frac{3Rm(t_2 - t_1)}{M}.$$

Ответ: $Q = 369$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

2.133. Выведите единицы поправок a и b, входящих в уравнение Ван-дер-Ваальса. [Н $\cdot$ м^4/моль^2; м^3/моль]

2.134. Углекислый газ количеством вещества $\nu = 1$ кмоль находится при температуре $T = 380$ К в сосуде вместимостью $V = 1$ м^3. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса a и b, равными 0,361 Н $\cdot$ м^4/моль^2 и $4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, определите давление p газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. [1) $p = 3{,}16$ МПа; 2) $p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2} = 2{,}94$ МПа]

2.135. Рассмотрев уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль газа, найдите формулы для критических параметров. [$V_{\text{кр}} = 3b$; $p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}$, $T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}$]

2.136. Некоторый газ количеством вещества $\nu = 500$ моль занимает объем $V_1 = 2$ м^3. Определите поправку a Ван-дер-Ваальса, если при расширении газа до объема $V_2 = 2{,}4$ м^3 была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения $A = 2{,}84$ кДж. [$a = \frac{A V_1 V_2}{\nu^2 (V_2 - V_1)} = 0{,}136$ Н $\cdot$ м^4/моль^2]

2.137. Объем азота массой $m = 200$ г увеличился от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 10$ м^3. Принимая поправку Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}135$ Н $\cdot$ м^4/моль^2, определите работу внутренних сил взаимодействия молекул при этом расширении газа. [$A = a\frac{m^2(V_2 - V_1)}{M^2 V_1 V_2} = 6{,}2$ Дж]

2.138. Некоторый газ количеством вещества $\nu = 2$ моль адиабатно расширяется в вакуум от $V_1 = 10^{-3}$ м^3 до $V_2 = 10^{-2}$ м^3. Определите, сколькими степенями свободы обладает этот газ, если при расширении температура газа понизилась на $\Delta T = 11{,}8$ К. Поправку Ван-дер-Ваальса a примите равной 0,136 Н $\cdot$ м^4/моль^2. [$i = \frac{2a\nu(V_2 - V_1)}{R\Delta T V_1 V_2} = 5$]

2.139. Кислород количеством вещества $\nu = 2$ моль адиабатно расширяется в вакуум. Определите работу, совершаемую газом против сил межмолекулярного притяжения, если в результате расширения газа его температура понизилась на $\Delta T = -3$ К. [$A = -\frac{i}{2}\nu R\Delta T = 125$ Дж]

2.140. Докажите, что эффект Джоуля — Томсона будет всегда отрицательным, если дросселируется газ, для которого силами притяжения молекул можно пренебречь (см. задачу 2.120).

2.141. Определите поверхностное натяжение σ мыльного раствора, если при выдувании мыльного пузыря для увеличения его диаметра от $d_1 = 1$ см до $d_2 = 5$ см совершена работа $A = 603$ мкДж. Процесс образования мыльного пузыря считать изотермическим. $[\sigma = \dfrac{A}{2\pi(d_2^2 - d_1^2)} = 40$ мН/м$]$

2.142. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 1$ мм. Поверхностное натяжение спирта $\sigma = 22$ мН/м. Считая, что диаметр шейки капли в момент отрыва равен внутреннему диаметру трубки, определите сколько капель N содержит спирт массой $m = 10$ г. $[N = \dfrac{mg}{\pi\sigma d} = 1420]$

2.143. При плавлении золотой проволоки плотностью $\rho = 17{,}2$ г/см^3 и диаметром $d = 0{,}2$ мм капля золота в момент ее отрыва имеет диаметр $D = 1{,}63$ мм. Определите поверхностное натяжение σ расплавленного золота. $[\sigma = \dfrac{\rho g D^3}{6d} = 609$ мН/м$]$

2.144. Три капли ртути радиусом $r = 0{,}8$ мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение ΔE поверхностной энергии при этом слиянии. Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0{,}5$ Н/м. $[\Delta E = \sigma\Delta S = 4\pi r^2\sigma(3 - \sqrt[3]{9}) = 3{,}7$ мкДж$]$

2.145. Определите добавочное давление Δp внутри мыльного пузыря диаметром $d = 2$ мм. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м. $[\Delta p = 160$ Па$]$

2.146. Определите разность уровней глицерина в двух вертикальных капиллярных трубках, если плотность глицерина $\rho = 1{,}26$ г/см^3, внутренние диаметры капилляров 4 мм и 1 см, а поверхностное натяжение глицерина $\sigma = 62$ мН/м. $[\Delta h = 3{,}01$ мм$]$

2.147. В вертикальном стеклянном капилляре, находящемся на поверхности Земли, вода поднялась на 20 мм. Определите, на какую высоту (при тех же условиях опыта) поднялась бы вода в том же капилляре на поверхности Луны. Ускорение свободного падения на поверхности Луны в 6 раз меньше, чем на поверхности Земли. $[h = 1{,}2$ см$]$

2.148. Вертикальный капилляр внутренним диаметром $d = 0{,}7$ мм опущен в глицерин. Определите массу глицерина, поднявшегося в капилляре, если поверхностное натяжение глицерина $\sigma = 62$ мН/м, а его плотность $\rho = 1{,}26$ г/см^3. $[m = \dfrac{\pi\sigma d}{g} = 1{,}39 \cdot 10^{-5}$ кг$]$

2.149. В сосуд с ртутью опущен открытый вертикальный капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $\Delta h = 4$ мм. Определите радиус R кривизны ртутного мениска в капилляре. Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0{,}5$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3. $[R = \dfrac{2\sigma}{\rho g \Delta h} = 1{,}87$ мм$]$

2.150. Для нагревания металлического шарика массой $m = 25$ г от $t_1 = 10$ °C до $t_2 = 30$ °C затратили количество теплоты $Q = 117$ Дж. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определите материал шарика. $[M \approx 0{,}107$ кг/моль; серебро$]$

2.151. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определите, во сколько раз удельная теплоемкость меди больше удельной теплоемкости серебра. Молярные теплоемкости: меди $C_V = 63 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; серебра $C_V = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. [в 1,71 раза]

ГЛАВА 3
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

3.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Основные законы и формулы

• Закон сохранения заряда в замкнутой системе

$$\sum_i Q_i = \mathrm{const}.$$

• Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \text{ (в вакууме)}, \; F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{\varepsilon r^2} \text{ (в среде)}$$

[F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2; r — расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость среды].

• Напряженность электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$$

[$\vec{F}$ — сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля].

• Напряженность электростатического поля точечного заряда Q на расстоянии r от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

• Поток вектора напряженности электростатического поля

$$\mathrm{d}\Phi_E = \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = E_n\mathrm{d}\vec{S} \text{ (сквозь элементарную площадку d}S\text{)},$$

$$\Phi_E = \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = E_n\mathrm{d}\vec{S} \text{ (сквозь поверхность } S\text{)},$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n\mathrm{d}S \text{ (сквозь замкнутую поверхность } S\text{)}$$

[$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\cdot\vec{n}$ — вектор, модуль которого равен $\mathrm{d}S$, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке; E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $\mathrm{d}S$].

• Принцип суперпозиции электростатических полей

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

[$\vec{E}_i$ — напряженность поля, создаваемого зарядом Q_i].

• Плотность зарядов (линейная, поверхностная, объемная):

$$\tau = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}, \quad \sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}, \quad \rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}.$$

• Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:

• в случае дискретного распределения зарядов

$$\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} Q_i;$$

• в случае непрерывного распределения зарядов

$$\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, \mathrm{d}V$$

[$\sum\limits_{i=1}^{N} Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; N — число зарядов; ρ — объемная плотность зарядов].

• Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

[σ — поверхностная плотность заряда].

• Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

[σ — поверхностная плотность заряда].

• Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра сферы,

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри сферы)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geqslant R \text{ (вне сферы)}.$$

• Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра шара,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \text{ при } r \leqslant R \text{ (внутри шара)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geqslant R \text{ (вне шара)}.$$

• Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра,

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри цилиндра)},$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r} \text{ при } r \geqslant R \text{ (вне цилиндра)}$$

[τ — линейная плотность заряда].

• Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L E_l \mathrm{d}l = 0$$

[E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$. Интегрирование производится по любому замкнутому пути L].

• Потенциальная энергия заряда Q_0 в поле заряда Q на расстоянии r от него

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r}.$$

• Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{U}{Q_0}, \quad \varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}$$

[Q_0 — точечный положительный заряд, помещенный в данную точку поля; U — потенциальная энергия заряда Q_0; A_∞ — работа перемещения заряда Q_0 из данной точки поля за его пределы].

• Потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

• Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

[$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей. Знак «$-$» определяется тем, что вектор $\vec{E}$ поля направлен в сторону убывания потенциала].

• В случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией,

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

• Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки *1* в точку *2*,

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad A_{12} = Q_0\int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = Q_0\int_1^2 E_l \mathrm{d}l$$

[E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$].

• Разность потенциалов между двумя точками *1* и *2* в электростатическом поле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_0} = \int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 E_l \mathrm{d}l$$

[A_{12} — работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки *1* в точку *2*; E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$; интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения].

• Разность потенциалов между точками, находящимися на расстоянии x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$$

[σ — поверхностная плотность заряда].

• Разность потенциалов между бесконечными разноименно заряженными плоскостями, расстояние между которыми равно d,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E\mathrm{d}x = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d.$$

• Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра равномерно заряженной сферической поверхности (объемно заряженного шара) радиусом R с общим зарядом Q, причем $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

• Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра объемно заряженного шара радиусом R с общим зарядом Q, причем $r_1 < R$, $r_2 < R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\mathrm{d}r = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(r_2^2 - r_1^2).$$

• Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от оси равномерно заряженного с линейной плотностью τ бесконечного цилиндра радиусом R, причем $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

• Поляризованность диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$$

[V — объем диэлектрика; $\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_i$ — дипольный момент диэлектрика; $\vec{p}_i$ — дипольный момент i-й молекулы].

• Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля

$$\vec{P} = æ\varepsilon_0\vec{E}$$

[$æ$ — диэлектрическая восприимчивость вещества; ε_0 — электрическая постоянная].

• Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью $æ$

$$\varepsilon = 1 + æ.$$

• Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}, \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

[P — поляризованность; ε — диэлектрическая проницаемость].

• Связь между векторами электрического смещения $\vec{D}$, напряженности электростатического поля $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},\ \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

• Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\oint\limits_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_S D_n\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{N} Q_i$$

[$\sum\limits_{i=1}^{N} Q_i$ — алгебраическая сумма заключенных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов; D_n — проекция вектора $\vec{D}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $\mathrm{d}\vec{S}$; $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{n}$ — вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке].

• Условия на границе раздела диэлектрических сред (проницаемость которых ε_1 и ε_2) при отсутствии на границе свободных зарядов:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2},\ D_{n1} = D_{n2},\ \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

[E_τ, D_τ и E_n, D_n — тангенциальные и нормальные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ соответственно].

• Напряженность электростатического поля у поверхности проводника

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

[σ — поверхностная плотность зарядов; ε — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник].

• Электрическая емкость (емкость) уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

[Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника].

• Электрическая емкость шара радиусом R

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

• Электрическая емкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

[Q — заряд, накопленный в конденсаторе; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между его пластинами].

• Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

[S — площадь каждой пластины конденсатора; d — расстояние между пластинами].

• Электрическая емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

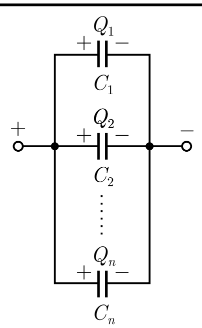
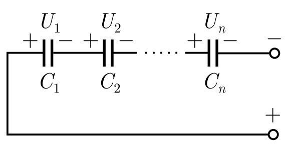
[r_1 и r_2 — радиусы концентрических сфер].

• Электрическая емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

[l — длина пластин конденсатора; r_1 и r_2 — радиусы полых коаксиальных цилиндров].

• Соединение конденсаторов:

	параллельное	последовательное
Схема		
Сохраняющаяся величина	$U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n = \mathrm{const}$	$Q = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = \mathrm{const}$
Суммируемая величина	$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$	$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$
Результирующая электрическая емкость	$C = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i$	$\frac{1}{C} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

• Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

[C, Q, φ — емкость, заряд и потенциал проводника соответственно].

• Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

[Q — заряд конденсатора; C — его электроемкость; $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между пластинами].

• Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}$$

[Q — заряд конденсатора; σ — поверхностная плотность заряда; S — площадь пластин конденсатора; E — напряженность электростатического поля; ε_0 — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость].

• Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V$$

[S — площадь одной пластины; U — разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ — объем конденсатора].

• Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$$

[E — напряженность электростатического поля; D — электрическое смещение].

Примеры решения задач

3.1. Два одинаковых шарика массой $m = 20$ г каждый находятся на некотором расстоянии друг от друга. Определите, какими равными зарядами следует зарядить шарики, чтобы их взаимодействие уравновешивало силу тяготения.

Дано: $m = 20$ г ($2 \cdot 10^{-2}$ кг); $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2); $F_к = F$.

Найти: Q.

Решение. Между двумя шариками одинаковой массы m на расстоянии r, согласно закону всемирного тяготения, действует сила притяжения

$$F = G\frac{m^2}{r^2}, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная.

Если рассматриваемые шарики зарядить (заряды равные и одноименные), то между ними, согласно закону Кулона, действует сила отталкивания

$$F_{\text{к}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}, \tag{2}$$

где r — расстояние между шариками.

По условию задачи кулоновская сила (2) уравновешивается силой тяготения (1), т. е.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2} = G\frac{m^2}{r^2},$$

откуда искомый заряд шариков

$$Q = m\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}.$$

Ответ: $Q = 172$ пКл.

3.2. Два одинаковых заряженных шарика массой m, подвешенные на нитях равной длины, опускаются в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ_1 и диэлектрическая проницаемость ε_1. Какова должна быть плотность ρ материала шариков, чтобы углы их расхождения в воздухе и диэлектрике были одинаковы?

Дано: m; ρ_1; ε_1; α.

Найти: ρ.

Решение. До погружения в жидкий диэлектрик, т. е. в воздухе, на каждый шарик (рис. *а*) действуют сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}_{\text{к}}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. При равновесии шариков

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{к}} + \vec{T} = 0.$$

После погружения в жидкий диэлектрик на каждый шарик (рис. *б*) действуют сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}_{\text{к1}}$, выталкивающая (архимедова) сила $\vec{F}_{\text{А}}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$. При равновесии шариков

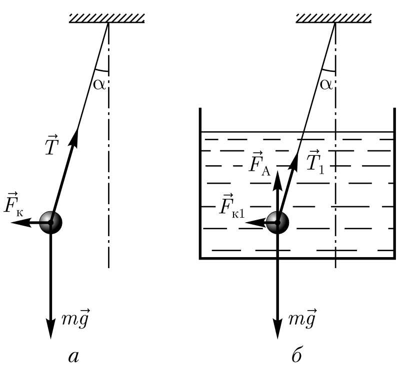
$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{к1}} + \vec{F}_{\text{А}} + \vec{T}_1 = 0.$$

Кулоновская сила отталкивания шариков в воздухе (из треугольника на рис. *а*)

$$F_{\text{к}} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{1}$$

в диэлектрике —

$$F_{\text{к1}} = (mg - F_{\text{А}})\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{2}$$



а *б*

(учли выталкивающую силу). В диэлектрике кулоновская сила уменьшается в ε_1 раз, так что

$$F_{\text{к1}} = \frac{F_{\text{К}}}{\varepsilon_1}. \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{F_{\text{к}}}{\varepsilon_1} = (mg - F_{\text{А}})\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{4}$$

Поделив (4) на (1), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{mg - F_{\text{А}}}{mg} = 1 - \frac{F_{\text{А}}}{mg}. \tag{5}$$

По закону Архимеда

$$F_А = \rho_1 V g,$$

где ρ_1 — плотность жидкого диэлектрика; V — объем шарика; g — ускорение свободного падения. Масса шарика $m = \rho V$, где ρ — плотность материала шарика. Подставив эти выражения в формулу (5), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho},$$

откуда искомая плотность материала шарика

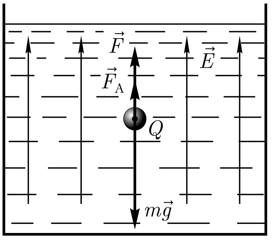
$$\rho = \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{\varepsilon_1 - 1}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{\varepsilon_1 \rho_1}{\varepsilon_1 - 1}$.

3.3. Медный шарик ($\rho = 8{,}93$ г/см^3) радиусом $r = 0{,}5$ см помещен в масло ($\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3). Определите заряд шарика, если в однородном электростатическом поле он оказался взвешенным в масле. Электростатическое поле направлено вертикально вверх, и его напряженность $E = 4{,}25$ кВ/см.

Дано: $r = 0{,}5$ см ($5 \cdot 10^{-3}$ м); $\rho = 8{,}93$ г/см^3 ($8{,}93 \cdot 10^3$ кг/м^3); $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3 ($8 \cdot 10^2$ кг/м^3); $E = 4{,}25$ кВ/см ($4{,}25 \cdot 10^5$ В/м).

Найти: Q.



Решение. На шарик, помещенный в масло, действуют три силы: 1) сила тяжести $mg = \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 g$ (ρ — плотность меди), направленная вертикально вниз; 2) выталкивающая (архимедова) сила $F_А = \rho_1 \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 g$ (ρ_1 — плотность масла), направленная вертикально вверх; 3) сила электростатического поля $F = QE$, направленная вертикально вверх.

По условию задачи шарик взвешен в масле (находится в равновесии), поэтому

$$mg = F_А + F. \tag{1}$$

Подставив вышеприведенные выражения для сил в уравнение (1), запишем

$$\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g + QE,$$

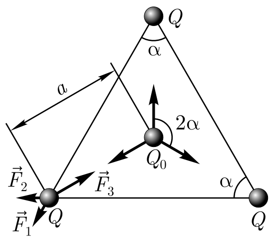
откуда искомый заряд шарика

$$Q = \frac{4\pi r^3 (\rho - \rho_1) g}{3E}.$$

Ответ: $Q = 10$ нКл.

3.4. Три точечных отрицательных заряда $Q = -3$ нКл каждый находятся в вершинах равностороннего треугольника. Определите, какой заряд Q_0 следует поместить в центре треугольника, чтобы система находилась в равновесии.

Дано: $\alpha = 60°$; $Q = -3$ нКл ($-3 \cdot 10^{-9}$ Кл).



Найти: Q_0.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на заряд Q в одной из вершин треугольника (см. рисунок) со стороны зарядов Q, находящихся в двух других вершинах треугольника:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}, \qquad (1)$$

эти силы равны ($F_1 = F_2$) и направлены под углом $\alpha = 60°$ друг к другу.

Чтобы рассматриваемый заряд Q находился в равновесии, в центр треугольника следует поместить *положительный* заряд Q_0, действующий на заряд Q. Условие равновесия рассматриваемого заряда Q имеет вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0,$$

откуда следует (при условии $F_1 = F_2$), что

$$F_3 = 2F_1\cos\frac{\alpha}{2}$$

или, учитывая выражение (1),

$$F_3 = \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $F_3 = \dfrac{QQ_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$, можно записать

$$\frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{QQ_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Учитывая, что $a = \dfrac{r}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ (см. рисунок), получаем

$$\frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4QQ_0\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

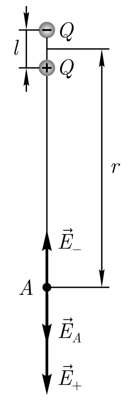
откуда искомый заряд

$$Q_0 = \frac{Q}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Поскольку система находится в равновесии, заряды, находящиеся в двух других вершинах треугольника, будут также в равновесии. На заряд Q_0, помещенный в центр треугольника, действуют три одинаковых силы, направленные под углами 2α (см. рисунок) и равные по величине. Равнодействующая этих трех сил равна нулю, поэтому заряд Q_0 также будет находиться в равновесии.

Ответ: $Q_0 = 1{,}73$ нКл.

3.5. Определите напряженность E электростатического поля на продолжении оси электрического диполя в точке A (см. рисунок).



Решение. Согласно принципу суперпозиции, напряженность $\vec{E}$ поля диполя (системы двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ($+Q$, $-Q$), расстояние между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля) в произвольной точке

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

Как следует из рисунка, напряженность поля диполя в точке A направлена по оси диполя и по модулю равна

$$E_A = E_+ - E_-.$$

Обозначив расстояние от точки A до середины оси диполя через r, для случая вакуума можно записать

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{Q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 - \left(r-\frac{l}{2}\right)^2}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}.$$

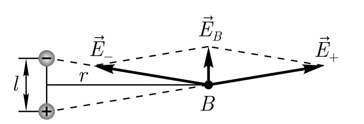
Согласно определению диполя, $\frac{l}{2} \ll r$, поэтому искомая напряженность

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ql}{r^3}.$$

Ответ: $E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ql}{r^3}$.

3.6. Определите напряженность E электростатического поля в точке B на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины (см. рисунок).

Решение. Согласно принципу суперпозиции, напряженность $\vec{E}$ поля диполя в произвольной точке



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

Точка B равноудалена от зарядов, поэтому

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad (1)$$

где r — расстояние от точки B до середины плеча диполя. Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор $\vec{E}_B$, получим

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r},$$

откуда

$$E_B = \frac{E_+ l}{r}. \tag{2}$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), получим искомую напряженность

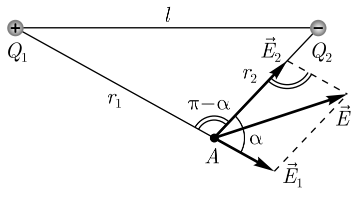
$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3},$$

где $p = |Q|l$ — электрический момент диполя.

Вектор $\vec{E}_B$ направлен противоположно вектору электрического момента диполя (вектор $\vec{p}$ направлен от отрицательного заряда к положительному).

Ответ: $E_B = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ql}{r^3} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^3}$.

3.7. Расстояние l между двумя точечными зарядами $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -3$ нКл, расположенными в вакууме, равно 20 см. Определите напряженность E в точке A, удаленной от первого заряда на расстояние $r_1 = 15$ см и от второго заряда на $r_2 = 10$ см.



Дано: $l = 20$ см (0,2 м); $Q_1 = 2$ нКл ($2 \cdot 10^{-9}$ Кл); $Q_2 = -3$ нКл ($-3 \cdot 10^{-9}$ Кл); $r_1 = 15$ см (0,15 м); $r_2 =$ $= 10$ см (0,1 м).

Найти: E.

Решение. Согласно принципу суперпозиции,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

(направления векторов показаны на рисунке). Напряженности электрического поля, создаваемые в вакууме зарядами Q_1 и Q_2,

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \quad E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{1}$$

Модуль вектора $\vec{E}$ находится по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \tag{2}$$

где

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0,25.$$

Подставив (1) в формулу (2), найдем искомую напряженность в точке A:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{2|Q_1||Q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha + \frac{Q_2^2}{r_2^4}}.$$

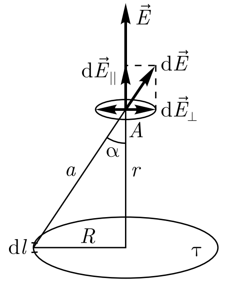
Ответ: $E = 3$ кВ/м.

3.8. Тонкое проволочное кольцо радиусом $R = 4$ см равномерно заряжено с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. Определите напряженность E электростатического поля в вакууме на оси, проходящей через центр кольца, в точке, удаленной на расстояние $r = 6$ см от центра кольца.

Дано: $\tau = 1$ нКл/м (10^{-9} Кл/м); $R = 4$ см ($4 \cdot 10^{-2}$ м); $r = 6$ см ($6 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: E.

Решение. Разобьем кольцо на бесконечно малые элементы $\mathrm{d}l$. Заряд такого элемента



$$\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}l,$$

и этот элемент создает в рассматриваемой точке электростатическое поле напряженностью

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{r^2+R^2}\right)^2},$$

где τ — линейная плотность заряда; a — расстояние от элемента $\mathrm{d}l$ кольца до точки A, где следует определить напряженность поля. Вектор $\mathrm{d}\vec{E}$ направлен вдоль линии a.

Для определения напряженности электростатического поля в данной точке A следует геометрически сложить $\mathrm{d}\vec{E}$ от всех элементов кольца. Вектор $\mathrm{d}\vec{E}$ разложим на два компонента: $\mathrm{d}\vec{E}_{\perp}$ и $\mathrm{d}\vec{E}_{\parallel}$ (см. рисунок). Геометрическая сумма всех $\mathrm{d}\vec{E}_{\perp}$ будет равна нулю ($\mathrm{d}\vec{E}_{\perp}$ от каждых двух диаметрально противоположных элементов кольца равны и противонаправлены). Тогда

$$E = \int \mathrm{d}E_{\parallel} = \int \mathrm{d}E\cos\alpha = \int_0^{2\pi r} \frac{\tau\cos\alpha\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{r^2+R^2}\right)^2} = \frac{2\pi r R\tau}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{\tau r R}{2\varepsilon_0\left(r^2+R^2\right)^{3/2}}$$

(учли, что $\cos\alpha = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}$).

Вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси кольца, как показано на рисунке.

Ответ: $E = 136$ В/м.

3.9. Определите поток Φ_E вектора напряженности электростатического поля сквозь сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -1$ нКл.

Дано: $Q_1 = 2$ нКл ($2 \cdot 10^{-9}$ Кл); $Q_2 = -1$ нКл (-10^{-9} Кл).

Найти: Φ_E.

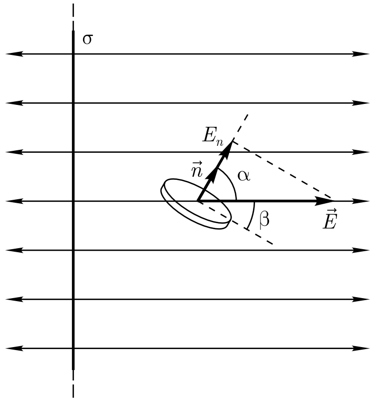
Решение. Согласно теореме Гаусса, поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на ε_0:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i.$$

Тогда для условия задачи можем записать

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_2).$$

Ответ: $\Phi_E = 113$ В·м.



3.10. Электростатическое поле создается в вакууме бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ мкКл/м^2. На некотором расстоянии от плоскости находится плоская круглая площадка радиусом $r = 10$ см. Определите поток вектора напряженности сквозь эту площадку, если ее плоскость составляет с линиями напряженности угол $\beta = 30°$.

Дано: $\sigma = 1$ мкКл/м^2 (10^{-6} Кл/м^2); $r = 10$ см (0,1 м); $\beta = 30°$.

Найти: Φ_E.

Решение. Поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной плоскостью, однородно, и напряженность электростатического поля

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

где σ — поверхностная плотность заряда; ε_0 — электрическая постоянная.

Поток вектора напряженности

$$\Phi_E = \int_S E_n \mathrm{d}S,$$

где $E_n = E\cos\alpha$ (см. рисунок) — проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к поверхности площадки dS. Интегрирование производится по всей поверхности площадки, которую пронизывают линии напряженности. Следовательно, поток сквозь площадку

$$\Phi_E = ES\cos\alpha. \qquad (2)$$

Из рисунка следует, что $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta$. Тогда формула (2) запишется в виде

$$\Phi_E = ES\sin\beta. \qquad (3)$$

Подставив в формулу (3) выражение (1) и учитывая, что $S = \pi r^2$, получим искомый поток вектора напряженности

$$\Phi_E = \frac{\sigma\pi r^2}{2\varepsilon_0}\sin\beta.$$

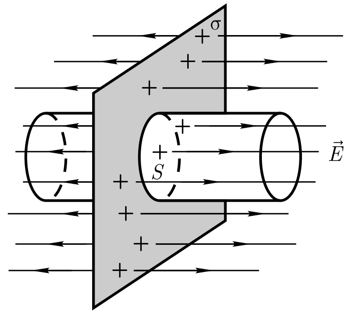
Ответ: $\Phi_E = 887$ В $\cdot$ м.

3.11. Определите напряженность E электростатического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженной бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$.

Решение. Из симметрии задачи (плоскость бесконечная) вектор $\vec{E}$ может быть только перпендикулярным заряженной плоскости ($E = E_n$). В качестве замкнутой поверхности выберем прямой цилиндр, основания которого параллельны плоскости, а ось перпендикулярна ей (см. рисунок).

Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме, поток вектора напряженности электростатического поля

$$\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} Q_i, \qquad (1)$$



где E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к заряженной плоскости ($\vec{n}$ направлен от плоскости); ε_0 — электрическая постоянная; $\sum_{i=1}^{N} Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, охватываемых произвольной замкнутой поверхностью S.

Поток вектора напряженности сквозь боковую поверхность выбранного в качестве замкнутой поверхности цилиндра равен нулю (образующие цилиндра параллельны линиям напряженности), поэтому полный поток сквозь всю поверхность цилиндра равен сумме потоков сквозь его основания, т. е. равен $2ES$ (в симметричных относительно этой плоскости точках $E = \text{const}$).

Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен σS (σ — заряд, приходящийся на единицу площади поверхности). Тогда, согласно теореме Гаусса (1),

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

откуда искомая напряженность электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Ответ: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

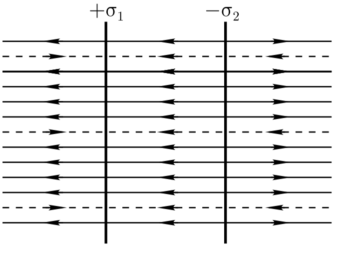
3.12. Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями в вакууме с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 0{,}8$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = -0{,}2$ мкКл/м^2. Определите напряженность E электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей.

Дано: $\sigma_1 = 0{,}8$ мкКл/м^2 ($8 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2); $\sigma_2 = -0{,}2$ мкКл/м^2 ($-2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2).

Найти: 1) $E_{\text{внутр}}$; 2) $E_{\text{внешн}}$.

Решение. Согласно принципу суперпозиции, напряженность $\vec{E}$ результирующего поля, создаваемого обеими плоскостями, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждой заряженной плоскостью (независимо от присутствия другой плоскости),

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$



На рисунке сплошные линии соответствуют полю от отрицательно заряженной плоскости, штриховые — от положительно заряженной плоскости. Слева и справа от плоскостей

$$E_{\text{внеш}} = E_1 - E_2$$

(линии напряженности направлены навстречу друг другу), а между плоскостями

$$E_{\text{внутр}} = E_1 + E_2$$

(линии напряженности сонаправлены).

Напряженности электростатических полей, создаваемых первой и второй плоскостями,

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \text{ и } E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Учитывая записанные формулы, получаем искомое поле между плоскостями

$$E_{\text{внутр}} = E_1 + E_2 = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}$$

и за пределами плоскостей

$$E_{\text{внеш}} = E_1 - E_2 = \frac{|\sigma_1| - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}.$$

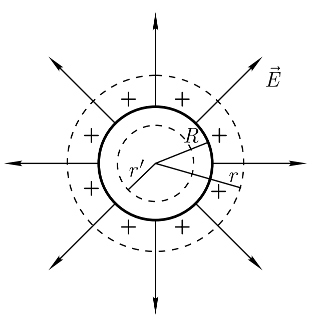
Ответ: 1) $E_{\text{внутр}} = 56{,}5$ кВ/м; 2) $E_{\text{внешн}} = 3{,}39$ кВ/м.

3.13. Сферическая поверхность радиусом R, равномерно заряженная с поверхностной плотностью σ, расположена в вакууме. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r > R$ от центра сферы; 2) на расстоянии $r' < R$ от центра сферы. Постройте график зависимости $E(r)$.

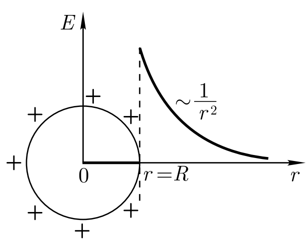
Дано: R; σ; 1) $r > R$; 2) $r' < R$.

Найти: E; $E(r)$.

Решение. Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности, поле, создаваемое им, будет центрально-симметричным, т.е. направление вектора $\vec{E}$ в любой точке проходит через центр сферы (рис. *а*), а напряженность есть функция расстояния r от центра сферы. При такой конфигурации поля в качестве произвольной замкнутой поверхности следует выбирать концентрическую сферу. Из соображений симметрии для всех точек этой поверхности $E_n = E(r) = \text{const}$.



а



б

Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме, поток вектора напряженности

$$\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где Q — общий заряд, охватываемый произвольной поверхностью S.

1) $\boldsymbol{r > R}$. В качестве замкнутой поверхности (см. рис. *а*) построим сферу радиусом $r > R$, имеющую общий центр с заряженной сферой. В данном случае внутрь поверхности попадает весь заряд, создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma \cdot 4\pi R^2$ — общий заряд сферы ($4\pi R^2$ — поверхность сферы). Тогда искомая напряженность

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1)$$

2) $\boldsymbol{r' < R}$. В данном случае замкнутая поверхность радиусом $r' < R$ не охватывает зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует:

$$E = 0.$$

График зависимости $E(r)$ приведен на рис. *б*.

В области $r' < R$ напряженность $E = 0$. В области $r > R$ напряженность определяется формулой (1), изменяясь по закону $\frac{1}{r^2}$, а в точке $r = R$ функция $E(r)$ терпит разрыв.

Ответ: 1) $E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$ $(r > R)$; 2) $E = 0$ $(r' < R)$.

3.14. Электростатическое поле создается шаром радиусом R, равномерно заряженным с объемной плотностью ρ. Определите напряженность E электростатического поля в вакууме: 1) на расстоянии $r > R$ от центра шара; 2) на расстоянии $r' < R$ от центра шара. Постройте график зависимости $E(r)$.

Дано: R; ρ; 1) $r > R$; 2) $r' < R$.

Найти: E; $E(r)$.

Решение. Поскольку заряд равномерно распределен по шару, поле является центрально-симметричным, т. е. направление вектора $\vec{E}$ в любой точке проходит через центр шара (рис. *а*), а напряженность есть функция расстояния r от центра шара. При такой конфигурации поля в качестве произвольной замкнутой поверхности следует выбирать концентрическую сферу. Для всех точек этой поверхности $E_n = E(r) = \text{const}$.

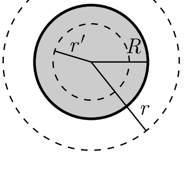
Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме, поток вектора напряженности электростатического поля

$$\oint_S \vec{E} \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где Q — общий заряд, охватываемый произвольной поверхностью S.

1) $\boldsymbol{r > R}$. В качестве замкнутой поверхности построим сферу радиусом r (см. рис. *а*), имеющую общий центр с заряженным шаром. В данном случае внутрь поверхности попадает весь заряд, создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса,

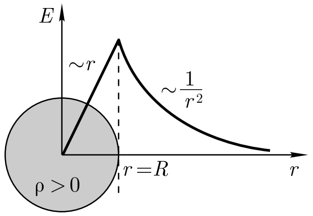
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0},$$



а

где Q — общий заряд шара в объеме V ($Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$), откуда искомая напряженность

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geqslant R).$$



б

2) $\boldsymbol{r' < R}$. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим сферу радиусом r' (см. рис. *а*). Эта сфера охватывает заряд $Q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(r')^3$. Поэтому, согласно теореме Гаусса,

$$E \cdot 4\pi(r')^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi(r')^3}{\varepsilon_0},$$

откуда искомая напряженность

$$E = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} \quad (r' \leqslant R).$$

График зависимости $E(r)$ представлен на рис. *б*. Внутри равномерно заряженного шара напряженность линейно растет с увеличением расстояния r' от его центра, вне шара напряженность изменяется по закону $\sim \frac{1}{(r')^2}$. Если $r = R$ $(r' = R)$, то $E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$.

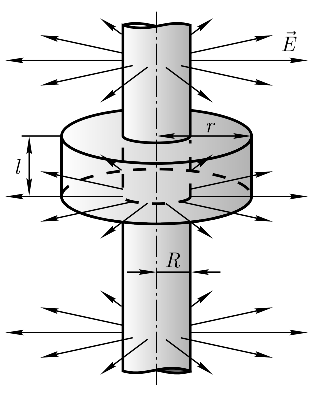
Ответ: 1) $E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ $(r \geqslant R)$; 2) $E = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}$ $(r' \leqslant R)$.

3.15. Электростатическое поле создается круглым бесконечным цилиндром радиусом R, заряженным в вакууме равномерно с линейной плотностью τ. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r > R$ от оси цилиндра; 2) на расстоянии $r' < R$ от оси цилиндра.

Дано: R; τ; 1) $r > R$; 2) $r' < R$.

Найти: E.

Решение. Из соображений симметрии следует, что вектор $\vec{E}$ в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора $\vec{E}$ зависит только от расстояния r от оси цилиндра. При такой конфигурации поля в качестве произвольной замкнутой поверхности следует выбрать коаксиальную с заряженным цилиндром цилиндрическую поверхность радиусом r и высотой R (см. рисунок). Для всех точек боковой поверхности этой цилиндрической поверхности $E_n = E(r) = \text{const}$, для оснований цилиндра $E_n = 0$.



Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме,

$$\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где Q — общий заряд, охватываемый произвольной поверхностью S.

1) $\boldsymbol{r > R}$. В данном случае поток вектора $\vec{E}$ сквозь торцы построенного коаксиального цилиндра равен нулю, а поток сквозь его боковую поверхность равен $E \cdot 2\pi r l$ ($2\pi r l$ — боковая поверхность коаксиального цилиндра). Тогда по теореме Гаусса,

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}$$

(учли, что τ — линейная плотность — заряд, приходящийся на единицу длины), откуда искомая напряженность

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r} \quad (r \geqslant R).$$

2) $\boldsymbol{r' < R}$. В данном случае рассматриваемая замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, а поэтому искомая напряженность

$$E = 0 \ (r' < R).$$

Ответ: 1) $E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\tau}{r}$ $(r \geqslant R)$; 2) $E = 0$ $(r' < R)$.

3.16. Сплошной шар из диэлектрика (диэлектрическая проницаемость ε) радиусом R заряжен равномерно с объемной плотностью ρ. Определите напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1 > R$ от центра шара; 2) на поверхности шара; 3) на расстоянии $r_2 < R$ от центра шара.

Дано: ε; R; ρ; $r_1 > R$; $r = R$; $r_2 < R$.

Найти: 1) E_1; 2) E_R; 3) E_2.

Решение. Поскольку шар из диэлектрика заряжен равномерно, то поле — центрально-симметрично (направление вектора электрического смещения $\vec{D}$ в любой точке проходит через центр шара), а электрическое смещение есть функция расстояния r от центра шара. При такой конфигурации поля в качестве произвольной замкнутой поверхности следует выбирать концентрическую сферу. Для всех точек этой поверхности $D_n = D(r) = \text{const}$.

Согласно теореме Гаусса для электростатического поля в диэлектрике, поток вектора электрического смещения

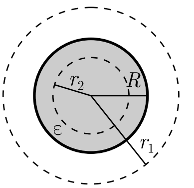
$$\oint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D_n \mathrm{d}S = Q, \qquad (1)$$

где Q — свободный заряд, охватываемый поверхностью S.

1) $\boldsymbol{r_1 > R}$. В качестве замкнутой поверхности построим сферу радиусом r_1 (см. рисунок), имеющую общий центр с заряженным шаром. В данном случае внутрь поверхности попадает весь заряд, создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса,

$$D_1 \cdot 4\pi r_1^2 = Q = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где Q — общий заряд диэлектрического шара в объеме $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, откуда



$$D_1 = \frac{\rho R^3}{3 r_1^2}.$$

Учитывая связь между электрическим смещением и напряженностью электростатического поля $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_1$, а также условие ($r_1 > R$), т.е. $\varepsilon = 1$, получим выражение для искомой напряженности электростатического поля при $r_1 > R$:

$$E_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_1^2}.$$

2) $\boldsymbol{r = R}$. В данном случае замкнутой поверхностью может быть сфера радиусом R (см. рисунок). Согласно теореме Гаусса (1),

$$D_R \cdot 4\pi R^2 = Q = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где Q — общий заряд диэлектрического шара в объеме $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда

$$D_R = \frac{\rho R}{3}.$$

Так как $D_R = \varepsilon_0 \varepsilon E_R$, то искомая напряженность электростатического поля при $r = R$:

$$E_R = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

3) $\boldsymbol{r_2 < R}$. В качестве замкнутой поверхности построим сферу радиусом r_2 (см. рисунок). Эта сфера охватывает заряд $Q' = \rho V' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3$. Поэтому, согласно теореме Гаусса (1) для поля в диэлектрике,

$$D_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3,$$

откуда

$$D_2 = \frac{\rho r_2}{3}.$$

Поскольку $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_2$, искомая напряженность электростатического поля при $r_2 < R$:

$$E_2 = \frac{\rho r_2}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

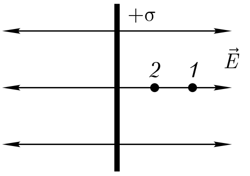
Ответ: 1) $E_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_1^2}$; 2) $E_R = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0 \varepsilon}$; 3) $E_2 = \frac{\rho r_2}{3\varepsilon_0 \varepsilon}$.

3.17. Определите работу внешних сил по перемещению заряда $Q = 1$ нКл вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 4$ см до расстояния $r_2 = 2$ см, если электростатическое поле создается бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 2$ мкКл/м^2.

Дано: $Q = 1$ нКл (10^{-9} Кл); $r_1 = 4$ см ($4 \cdot 10^{-2}$ м); $r_2 = 2$ см ($2 \cdot 10^{-2}$ м); $\sigma = 2$ мкКл/м^2 ($2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2).

Найти: A.

Решение. Работа силы F на элементарном перемещении $\mathrm{d}r$ вдоль линии напряженности (см. рисунок)



$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r,$$

причем сила

$$\vec{F} = -Q\vec{E}, \qquad (1)$$

где знак «−» показывает, что направления векторов $\vec{F}$ и $\vec{E}$ противоположны друг другу.

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью σ, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

где ε_0 — электрическая постоянная.

Работа внешних сил по перемещению заряда с расстояния r_1 до расстояния r_2

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F\mathrm{d}r = -\frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}r = \frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}(r_1 - r_2)$$

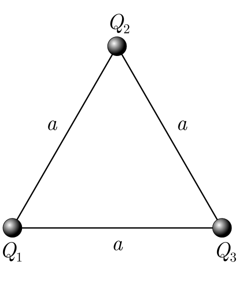
[учли формулы (1) и (2)].

Ответ: $A = 2{,}23$ мкДж.

3.18. Три точечных заряда $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл и $Q_3 = -4$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной длиной $a = 10$ см. Определите потенциальную энергию этой системы.

Дано: $Q_1 = 2$ нКл ($2\cdot10^{-9}$ Кл); $Q_2 = 3$ нКл ($3\cdot10^{-9}$ Кл); $Q_3 = -4$ нКл ($-4\cdot10^{-9}$ Кл); $a = 10$ см (0,1 м).

Найти: U.



Решение. Потенциальная энергия системы зарядов равна алгебраической сумме энергий взаимодействия каждой из взаимодействующих пар зарядов, т. е.

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}, \qquad (1)$$

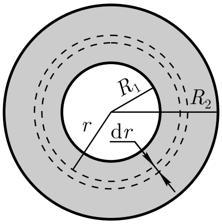
где соответственно потенциальные энергии одного из зарядов, находящегося в поле другого заряда на расстоянии a от него, равны

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{a}; \quad U_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{a}; \quad U_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{a}. \qquad (2)$$

Подставив формулы (2) в выражение (1), найдем искомую потенциальную энергию системы зарядов

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3).$$

Ответ: $U = -0{,}126$ мкДж.



3.19. Определите потенциал в центре кольца с внутренним радиусом $R_1 = 30$ см и внешним $R_2 = 60$ см, если на нем равномерно распределен заряд $Q = 5$ нКл.

Дано: $R_1 = 30$ см (0,3 м); $R_2 = 60$ см (0,6 м); $Q = 5$ нКл ($5 \cdot 10^{-9}$ Кл).

Найти: φ.

Решение. Кольцо разобьем на концентрические бесконечно тонкие кольца внутренним радиусом r и внешним — $(r + \mathrm{d}r)$. Площадь рассматриваемого тонкого кольца (см. рисунок) $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$.

Потенциал в центре кольца, создаваемый бесконечно тонким кольцом,

$$d\varphi = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma \mathrm{d}r}{2\varepsilon_0},$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Для определения потенциала в центре кольца следует арифметически сложить $\mathrm{d}\varphi$ от всех бесконечно тонких колец. Тогда

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2 - R_1).$$

Учитывая, что заряд кольца $Q = \sigma S$, где $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ — площадь кольца, получим искомый потенциал в центре кольца

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(R_2 + R_1)}.$$

Ответ: $\varphi = 25$ В.

3.20. Два точечных одноименных заряда ($Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = 5$ нКл) находятся в вакууме на расстоянии $r_1 = 20$ см. Определите работу A, которую надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 5$ см.

Дано: $Q_1 = 2$ нКл ($2 \cdot 10^{-9}$ Кл); $Q_2 = 5$ нКл ($5 \cdot 10^{-9}$ Кл); $r_1 = 20$ см (0,2 м); $r_2 = 5$ см (0,05 м).

Найти: A.

Решение. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q из точки поля, имеющей потенциал φ_1, в точку с потенциалом φ_2,

$$A_{12} = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

При сближении одноименных зарядов работу совершают внешние силы, поэтому работа этих сил равна по модулю, но противоположна по знаку работе кулоновских сил:

$$A = -Q(\varphi_1 - \varphi_2) = Q(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{1}$$

Потенциалы точек *1* и *2* электростатического поля

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2}. \tag{2}$$

Подставив формулы (2) в выражение (1), найдем искомую работу, которую надо совершить, чтобы сблизить заряды,

$$A = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Ответ: $A = 1{,}35$ мкДж.

3.21. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь под действием электростатического поля вдоль линии напряженности от нити с расстояния $r_1 = 2$ см до $r_2 = 10$ см, изменил свою скорость от $v_1 = 1$ Мм/с до $v_2 = 5$ Мм/с. Определите линейную плотность τ заряда нити.

Дано: $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $r_1 = 2$ см ($2 \cdot 10^{-2}$ м); $r_2 = 10$ см (0,1 м); $v_1 = 1$ Мм/с (10^6 м/с); $v_2 = 5$ Мм/с ($5 \cdot 10^6$ м/с).

Найти: τ.

Решение. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении протона из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2, идет на увеличение кинетической энергии протона

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta T. \tag{1}$$

В случае нити электростатическое поле обладает осевой симметрией, поэтому

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \quad \text{или} \quad \mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}r,$$

тогда разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от нити,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{2}$$

(учли, что напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной нитью, $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$).

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что $\Delta T = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$, получим

$$\frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда искомая линейная плотность заряда нити

$$\tau = \frac{\pi\varepsilon_0 m(v_2^2 - v_1^2)}{Q\ln\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Ответ: $\tau = 4{,}33$ мкКл/м.

3.22. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 4$ нКл/м^2. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 10$ см и $r_2 = 30$ см от плоскости.

Дано: $\sigma = 4$ нКл/м^2 ($4 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2); $r_1 = 10$ см (0,1 м); $r_2 = 30$ см (0,3 м).

Найти: $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстоянии r_1 и r_2 от плоскости,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r,$$

где $E = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ — напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ бесконечной плоскостью. С учетом этого

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r_2 - r_1).$$

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 45{,}2$ В.

3.23. Электростатическое поле создается сферой радиусом $R = 10$ см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 5$ нКл/м^2. Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях $r_1 = 15$ см и $r_2 = 20$ см от поверхности сферы.

Дано: $R = 10$ см (0,1 м); $\sigma = 5$ нКл/м^2 ($5 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2); $r_1 = 15$ см (0,15 м); $r_2 =$ $= 20$ см (0,2 м).

Найти: $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 *от поверхности сферы*,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1+R}^{r_2+R} E\mathrm{d}r, \tag{1}$$

где $E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$ (см. задачу 3.13) — напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ сферической поверхностью. Подставив это выражение в формулу (1) и проинтегрировав, получим искомую разность потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1+R}^{r_2+R} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int_{r_1+R}^{r_2+R} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1 + R} - \frac{1}{r_2 + R}\right).$$

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 3{,}77$ В.

3.24. Электростатическое поле создается в вакууме шаром радиусом $R = 8$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими от центра шара на расстояниях: 1) $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см; 2) $r_3 = 2$ см и $r_4 = 5$ см.

Дано: $R = 8$ см ($8 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 10$ нКл/м^3 (10^{-8} Кл/м^3); $r_1 = 10$ см (10^{-1} м); $r_2 = 15$ см ($1{,}5 \cdot 10^{-1}$ м); $r_3 = 2$ см ($2 \cdot 10^{-2}$ м); $r_4 = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: 1) $\varphi_1 - \varphi_2$; 2) $\varphi_3 - \varphi_4$.

Решение. 1) Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстоянии r_1 и r_2 от центра шара,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r, \qquad (1)$$

где $E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ (см. задачу 3.14) — напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным с объемной плотностью ρ шаром, в любой точке, лежащей *вне шара* на расстоянии r от его центра.

Подставив это выражение в формулу (1) и проинтегрировав, получим искомую разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

2) Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстоянии r_3 и r_4 от центра шара,

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{r_3}^{r_4} E\mathrm{d}r, \qquad (2)$$

где $E = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ (см. задачу 3.14) — напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным с объемной плотностью ρ шаром, в любой точке, лежащей *внутри шара* на расстоянии r от его центра.

Подставив это выражение в формулу (2) и проинтегрировав, получим искомую разность потенциалов

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{r_3}^{r_4} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\mathrm{d}r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{r_3}^{r_4} r\mathrm{d}r = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r_4^2 - r_3^2).$$

Ответ: 1) $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}643$ В; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = 0{,}395$ В.

3.25. Электростатическое поле создается бесконечно длинным цилиндром радиусом $R = 7$ мм, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 15$ нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см от поверхности цилиндра.

Дано: $R = 7$ мм ($7 \cdot 10^{-3}$ м); $\tau = 15$ нКл/м ($1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м); $r_1 = 1$ см ($1 \cdot 10^{-2}$ м); $r_2 = 2$ см ($2 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение. Для определения разности потенциалов используем соотношение между напряженностью электростатического поля и изменением потенциала

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi. \qquad (1)$$

В случае заряженного цилиндра электростатическое поле обладает сферической симметрией, поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -E dr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром (см. задачу 3.15),

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},$$

получим

$$d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем искомую разность потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1+R}^{r_2+R} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2+R}{r_1+R}.$$

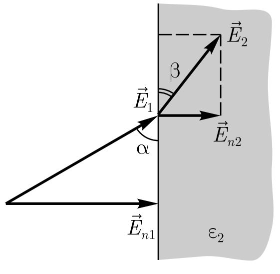
Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 125$ В.

3.26. В пространстве, наполовину заполненном парафином ($\varepsilon_2 = 2$), создано однородное электростатическое поле, напряженность которого в вакууме $E_1 = 4$ В/м. Вектор $\vec{E}_1$ образует с плоской границей вакуум — парафин угол $\alpha = 60°$. Определите в парафине: 1) электрическое смещение D_2; 2) напряженность E_2 электростатического поля; 3) поляризованность P_2.

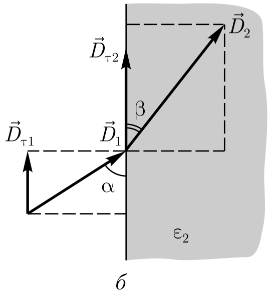
Дано: $\varepsilon_2 = 2$; $E_1 = 4$ В/м; $\alpha = 60°$; $\varepsilon_1 = 1$.

Найти: 1) D_2; 2) E_2; 3) P_2.

Решение. Поскольку в задаче задан вектор $\vec{E}_1$ как по модулю, так и по направлению (рис. *а*), то задано и направление вектора $\vec{D}_1$ в вакууме (рис. *б*) (векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ параллельны).



а



б

Связь между нормальной и тангенциальной составляющими векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$:

$$D_n = \varepsilon_0\varepsilon E_n \text{ и } D_\tau = \varepsilon_0\varepsilon E_\tau. \tag{1}$$

При переходе через границу раздела тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ (E_τ) и нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ (D_n) не претерпевают скачка, т. е.

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2};\ D_{n1} = D_{n2}, \tag{2}$$

а нормальная составляющая вектора $\vec{E}$ (E_n) и тангенциальная составляющая вектора $\vec{D}$ (D_τ)

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1};\quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{3}$$

что схематически изображено на рисунках.

Из формулы (3), учитывая, что $\varepsilon_1 = 1$, получим

$$E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad \text{и} \quad D_{\tau 1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}. \tag{4}$$

Из рис. *б*, с учетом формул (1) и (4), следует, что

$$D_2 = \sqrt{D_{n2}^2 + D_{\tau 2}^2} = \sqrt{D_{n1}^2 + \varepsilon_2^2 D_{\tau 1}^2}.$$

В вакууме (см. рис. *б*) $D_{n1} = D_1 \sin\alpha = \varepsilon_0 E_1 \sin\alpha$, $D_{\tau 2} = D_1 \cos\alpha = \varepsilon_0 E_1 \cos\alpha$. Тогда искомое электрическое смещение в парафине

$$D_2 = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \varepsilon_2^2 \cos^2\alpha}.$$

Из рис. *а*, с учетом формул (1) и (4), следует, что

$$E_2 = \sqrt{E_{n2}^2 + E_{\tau 2}^2} = \sqrt{\frac{E_{n1}^2}{\varepsilon_2^2} + E_{\tau 1}^2}.$$

В вакууме (см. рис. *а*) $E_{n1} = E_1 \sin\alpha$, $E_{\tau 1} = E_1 \cos\alpha$. Тогда искомая напряженность электростатического поля в парафине

$$E_2 = E_1 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_2^2} + \cos^2\alpha}.$$

Поляризованность $\vec{P}$ связана с $\vec{E}$ и $\vec{D}$ соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

откуда следует, что вектор $\vec{P}_2$ в парафине направлен так же, как вектор $\vec{D}_2$ (или $\vec{E}_2$). Тогда искомая поляризованность в парафине

$$P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2.$$

Ответ: 1) $D_2 = 46$ пКл/м^2; 2) $E_2 = 2{,}6$ В/м; 3) $P_2 = 23$ пКл/м^2.

3.27. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,5 кВ, зажата парафиновая пластинка ($\varepsilon = 2$) толщиной 5 мм. Определите поверхностную плотность связанных зарядов на парафине.

Дано: $U = 1{,}5$ кВ ($1{,}5 \cdot 10^3$ В); $\varepsilon = 2$; $d = 5$ мм ($5 \cdot 10^{-3}$ м).

Найти: σ'.

Решение. Векторы $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{P}$ связаны соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где $\vec{D}$ и $\vec{E}$ — соответственно векторы электрического смещения и напряженности поля плоского конденсатора; $\vec{P}$ — вектор поляризованности диэлектрика. Так как векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ нормальны к поверхности диэлектрика, то $D_n = D$ и $E_n = E$. Тогда можем записать $D = \varepsilon_0 E + P$, где $P = \sigma'$, т. е. равна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика (учли, что $P_n = P$). Тогда

$$\sigma' = D - \varepsilon_0 E.$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ и $E = \dfrac{U}{d}$, где d — расстояние между обкладками конденсатора, найдем

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d}.$$

Ответ: $\sigma' = 2{,}65$ мкКл/м^2.

3.28. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится стеклянная пластинка ($\varepsilon = 7$) толщиной $d = 3$ мм, заряжен до разности потенциалов $U = 500$ В. Определите: 1) поверхностную плотность σ зарядов на обкладках конденсатора; 2) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на стекле. Величиной зазора между пластинкой и обкладками пренебречь.

Дано: $\varepsilon = 7$; $d = 3$ мм ($3 \cdot 10^{-3}$ м); $U = 500$ В.

Найти: 1) σ; 2) σ'.

Решение. Напряженность поля внутри конденсатора при наличии диэлектрика между его обкладками

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \qquad (1)$$

С другой стороны, напряженность электрического поля внутри конденсатора

$$E = \frac{U}{d}. \qquad (2)$$

Приравняв (1) и (2), получим искомую поверхностную плотность зарядов на обкладках конденсатора

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{d}.$$

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна поляризованности P: $\sigma' = P$. Поляризованность диэлектрика P и напряженность E электростатического поля связаны соотношением $P = æ\varepsilon_0 E$, где $æ$ — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, связанная с диэлектрической проницаемостью соотношением: $\varepsilon = 1 + æ$. Тогда, учитывая формулу (2), получим искомую поверхностную плотность зарядов:

$$\sigma' = P = æ\varepsilon_0 E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d}.$$

Ответ: 1) $\sigma = 10{,}3$ мкКл; 2) $\sigma' = 8{,}85$ мкКл.

3.29. Расстояние между обкладками плоского конденсатора $d = 1$ мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов $U = 700$ В между обкладками вставили стеклянную пластинку ($\varepsilon = 7$). Определите: 1) диэлектрическую восприимчивость $æ$ стекла; 2) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на стеклянной пластинке.

Дано: $d = 1$ мм ($1 \cdot 10^{-3}$ м); $U = 700$ В; $\varepsilon = 7$.

Найти: 1) $æ$; 2) σ'.

Решение. Связь диэлектрической проницаемости ε и диэлектрической восприимчивости $æ$

$$\varepsilon = 1 + æ,$$

откуда искомая

$$æ = \varepsilon - 1.$$

Напряженность поля внутри конденсатора после его зарядки

$$E_0 = \frac{U}{d}, \tag{1}$$

а после того как в конденсатор вставили диэлектрик,

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon d} \tag{2}$$

[учли формулу (1)].

Поверхностная плотность связанных зарядов σ' равна поляризованности P:

$$\sigma' = P.$$

Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля

$$P = æ\varepsilon_0 E.$$

Тогда искомая поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = æ\varepsilon_0 E = \frac{æ\varepsilon_0 U}{\varepsilon d}.$$

Ответ: 1) $æ = 6$; 2) $\sigma' = 5{,}31$ мкКл/м^2.

3.30. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов 1,5 кВ. Площадь пластин 150 см^2 и расстояние между ними 5 мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами вставили стекло ($\varepsilon_2 = 7$). Определите: 1) разность потенциалов между пластинами после внесения диэлектрика; 2) емкость конденсатора до и после внесения диэлектрика; 3) поверхностную плотность заряда на пластинах до и после внесения диэлектрика.

Дано: $U_1 = 1{,}5$ кВ ($1{,}5 \cdot 10^3$ В); $S = 150$ см^2 ($1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2); $\varepsilon_1 = 1$; $d = 5$ мм ($5 \cdot 10^{-3}$ м); $\varepsilon_2 = 7$.

Найти: 1) U_2; 2) C_1, C_2; 3) σ_1, σ_2.

Решение. Так как $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \dfrac{U}{d}$ (σ — поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора), то до внесения диэлектрика $\sigma d = U_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1$ и после внесения диэлектрика $\sigma d = U_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2$, поэтому

$$U_2 = \frac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2}.$$

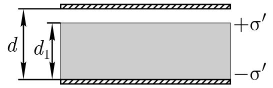
Емкость конденсатора до и после внесения диэлектрика

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d}.$$

Заряд пластин после отключения от источника напряжения не меняется, т. е. $Q = \mathrm{const}$. Поэтому поверхностная плотность заряда на пластинах до и после внесения диэлектрика

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Q}{S} = \frac{C_1 U_1}{S} = \frac{C_2 U_2}{S}.$$

Ответ: 1) $U_2 = 214$ В; 2) $C_1 = 26{,}5$ пФ; $C_2 = 186$ пФ; 3) $\sigma_1 = \sigma_2 = 2{,}65$ мкКл/м^2.



3.31. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно $d = 5$ мм, разность потенциалов $U = 300$ В. На нижней пластине лежит пластинка из парафина ($\varepsilon = 2$) толщиной $d_1 = 4$ мм. Определите поверхностную плотность σ' связанных зарядов этой пластинки.

Дано: $d = 5$ мм ($5 \cdot 10^{-3}$ м); $U = 300$ В; $\varepsilon = 2$; $d_1 = 4$ мм ($4 \cdot 10^{-3}$ м).

Найти: σ'.

Решение. Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P = æ\varepsilon_0 E_1, \tag{1}$$

где напряженность поля в слое парафина

$$E_1 = \frac{E_2}{\varepsilon} \tag{2}$$

(E_2 — напряженность поля в воздушном зазоре).

В пределах каждого слоя (воздух и парафин) поле однородно, поэтому

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2, \tag{3}$$

где U_1 и U_2 — соответственно напряжения в слоях диэлектрика и воздуха; $d_2 = d - d_1$ — толщина воздушной прослойки. Из выражений (3) и (2) найдем E_1:

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \varepsilon(d - d_1)}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в (1) и учитывая, что $æ = \varepsilon - 1$, получим искомую поверхностную плотность связанных зарядов парафиновой пластинки:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U}{d_1 + \varepsilon(d - d_1)}.$$

Ответ: $\sigma' = 442$ нКл/м^2.

3.32. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов U, параллельно его обкладкам помещены два слоя диэлектриков. Толщина слоев и диэлектрическая проницаемость диэлектриков соответственно равны d_1, d_2, ε_1, ε_2. Определите напряженность электростатических полей в слоях диэлектриков.

Дано: U; d_1; d_2; ε_1; ε_2.

Найти: E_1; E_2.

Решение. Напряжение на пластинах конденсатора, учитывая, что поле в пределах каждого из диэлектрических слоев однородно,

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2. \tag{1}$$

Электрическое смещение в обоих слоях диэлектрика одинаково, поэтому можем записать

$$D = D_1 = D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2. \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) найдем искомое

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}. \qquad (3)$$

Из формулы (2) следует, что

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2}.$$

Ответ: $E_1 = \dfrac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$; $E_2 = \dfrac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2}$.

3.33. Площадь пластин S плоского конденсатора равна 100 см^2. Пространство между пластинами заполнено вплотную двумя слоями диэлектриков — слюдяной пластинкой ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 3{,}5$ мм и парафина ($\varepsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 5$ мм. Определите емкость этого конденсатора.

Дано: $S = 100$ см^2 (10^{-2} м^2); $\varepsilon_1 = 7$; $d_1 = 3{,}5$ мм ($3{,}5 \cdot 10^{-3}$ м); $\varepsilon_2 = 2$; $d_2 = 5$ мм ($5 \cdot 10^{-3}$ м).

Найти: C.

Решение. Емкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U},$$

где $Q = \sigma S$ — заряд на пластинах конденсатора (σ — поверхностная плотность заряда на пластинах); U — разность потенциалов пластин, равная сумме напряжений на слоях диэлектрика: $U = U_1 + U_2$. Тогда

$$C = \frac{\sigma S}{U_1 + U_2}. \qquad (1)$$

Напряжения U_1 и U_2 найдем по формулам

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1; \quad U_2 = E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2, \qquad (2)$$

где E_1 и E_2 — напряженность электростатического поля в первом и втором слоях диэлектрика; D — электрическое смещение в диэлектриках (в обоих случаях одинаково). Приняв во внимание, что

$$D = \sigma,$$

и учитывая формулу (2), из выражения (1) найдем искомую емкость конденсатора

$$C = \frac{DS}{\dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}}.$$

Ответ: $C = 29{,}5$ пФ.

3.34. Батарея из трех последовательно соединенных конденсаторов $C_1 = 1$ мкФ; $C_2 = 2$ мкФ и $C_3 = 4$ мкФ подсоединены к источнику ЭДС. Заряд батареи конденсаторов $Q = 40$ мкКл. Определите: 1) напряжения U_1, U_2 и U_3 на каждом конденсаторе; 2) ЭДС источника; 3) емкость батареи конденсаторов.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ (10^{-6} Ф); $C_2 = 2$ мкФ ($2 \cdot 10^{-6}$ Ф); $C_3 = 4$ мкФ ($4 \cdot 10^{-6}$ Ф); $Q = 40$ мкКл ($4 \cdot 10^{-5}$ Кл).

Найти: 1) U_1, U_2, U_3; 2) $\mathscr{E}$; 3) C.

Решение. При последовательном соединении конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, поэтому

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q.$$

Напряжения на конденсаторах

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}; \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

ЭДС источника равна сумме напряжений каждого из последовательно соединенных конденсаторов:

$$\mathscr{E} = U_1 + U_2 + U_3.$$

При последовательном соединении суммируются величины, обратные емкостям каждого из конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

откуда искомая емкость батареи конденсаторов

$$C = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}.$$

Ответ: 1) $U_1 = 40$ В; $U_2 = 20$ В; $U_3 = 10$ В; 2) $\mathscr{E} = 70$ В; 3) $C = 0{,}571$ мкФ.

3.35. Два плоских воздушных конденсатора одинаковой емкости соединены последовательно и подключены к источнику ЭДС. Как и во сколько раз изменится заряд конденсаторов, если один из них погрузить в масло с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}2$?

Дано: $C_1 = C_2 = C$; $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 2{,}2$.

Найти: $\dfrac{Q'}{Q}$.

Решение. При последовательном соединении конденсаторов заряды обоих конденсаторов равны по модулю. До погружения в диэлектрик (масло) заряд каждого конденсатора

$$Q = \frac{CU}{2} = \frac{C\mathscr{E}}{2}, \tag{1}$$

где $\mathscr{E} = U_1 + U_2$ (при последовательном соединении конденсаторов ЭДС источника равна сумме напряжений каждого из конденсаторов).

После погружения одного из конденсаторов в диэлектрик заряды конденсаторов опять одинаковы и соответственно на первом и втором конденсаторах равны

$$Q = CU_1 = \varepsilon_2 CU_2$$

(учли, что $\varepsilon_1 = 1$), откуда, если учесть, что $\mathscr{E} = U_1 + U_2$, найдем

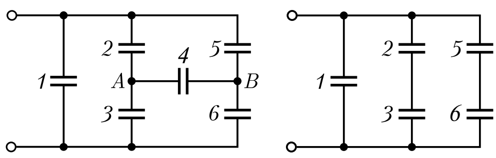
$$Q' = \frac{\varepsilon_2 C\mathscr{E}}{1+\varepsilon_2}. \qquad (2)$$

Поделив (2) на (1), найдем искомое отношение

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{2\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}.$$

Ответ: $\dfrac{Q'}{Q} = 1{,}37$, т.е. заряд конденсаторов возрастает в 1,37 раз.

3.36. Конденсаторы емкостями C каждый соединены так, как указано на рис. *а*. Определите емкость $C_{\text{общ}}$ этого соединения конденсаторов.



а *б*

Решение. Если отключить от цепи конденсатор C_4, то получится соединение конденсаторов, которое легко рассчитывается. Поскольку емкости всех конденсаторов одинаковы ($C_2 = C_3$ и $C_5 = C_6$), обе параллельные ветви симметричны, поэтому потенциалы точек A и B, одинаково расположенные в ветвях, должны быть равны. Конденсатор C_4 подключен, таким образом, к точкам с нулевой разностью потенциалов. Следовательно, конденсатор C_4 не заряжен, т.е. его можно исключить, и схему, представленную в условии задачи, упростить (рис. *б*).

Эта схема — из трех параллельных ветвей, две из которых содержат по два последовательно включенных конденсатора.

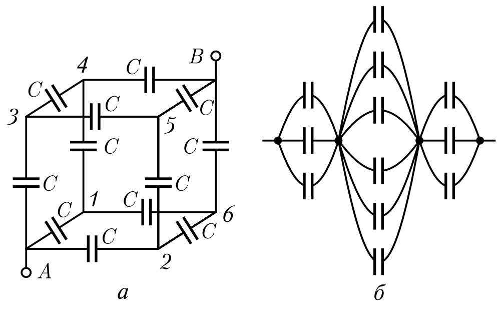
Емкость подобного соединения конденсаторов

$$C_{\text{общ}} = C_1 + \frac{C_2C_3}{C_2+C_3} + \frac{C_5C_6}{C_5+C_6} = 2C.$$

Ответ: $C_{\text{общ}} = 2C$.

3.37. В каждое ребро куба, изготовленного из проволоки (рис. *а*), включены по одному конденсатору емкостью C каждый. Определите емкость этой батареи конденсаторов, если она включается в цепь проводниками, подсоединенными к противоположным концам (A и B) диагонали куба.

Решение. Если батарея конденсаторов заряжена, то точки *1*, *2* и *3* имеют одинаковый потенциал и их можно соединить между собой параллельно. Точки *4*, *5* и *6* также можно соединить аналогично. Поэтому можно перейти к эквивалентной схеме, изображенной на рис. *б*. Эта схема — три последовательные ветви, каждая из которых содержит соответственно 3, 6 и 3 параллельно включенных конденсатора одинаковой емкости.



а *б*

Емкость отдельных ветвей равна $3C$, $6C$ и $3C$. Емкость последовательно соединенных ветвей

$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C} = \frac{5}{6C},$$

откуда искомая емкость батареи конденсаторов

$$C_{\text{общ}} = 1{,}2C.$$

Ответ: $C_{\text{общ}} = 1{,}2C$.

3.38. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C_1 = 4$ пФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 100$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между обкладками конденсатора увеличили в два раза. Определите: 1) разность потенциалов U_2 на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин.

Дано: $C_1 = 4$ пФ ($4 \cdot 10^{-12}$ Ф); $U_1 = 100$ В; $d_2 = 2d_1$.

Найти: 1) U_2; 2) A.

Решение. Заряд обкладок конденсатора после отключения от источника напряжения не меняется, т.е. $Q = \text{const}$. Поэтому

$$C_1U_1 = C_2U_2, \tag{1}$$

где C_2 и U_2 — соответственно емкость и разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения.

Учитывая, что емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$, из формулы (1) получим искомую разность потенциалов

$$U_2 = \frac{C_1}{C_2}U_1 = \frac{d_2}{d_1}U_1. \tag{2}$$

После отключения конденсатора от источника напряжения систему двух заряженных обкладок можно рассматривать как замкнутую, для которой выполняется закон сохранения энергии: работа A внешних сил равна изменению энергии системы

$$A = W_2 - W_1, \tag{3}$$

где W_1 и W_2 — соответственно энергия поля конденсатора в начальном и конечном состояниях.

Учитывая, что $W_1 = \dfrac{Q^2}{2C_1}$ и $W_2 = \dfrac{Q^2}{2C_2}$ ($Q = \text{const}$), из формулы (3) получим искомую работу внешних сил

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{C_1^2U_1^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{C_1U_1^2}{2}\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)$$

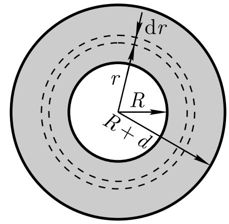
[учли, что $Q = C_1U_1$ и формулу (2)].

Ответ: 1) $U_2 = 200$ В; 2) $A = 40$ нДж.

3.39. Металлический шар радиусом $R = 5$ см с общим зарядом $Q = 10$ нКл окружен слоем эбонита толщиной $d = 3$ см. Определите энергию W электростатического поля, заключенного в слое диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость эбонита $\varepsilon = 3$.

Дано: $R = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м); $Q = 10$ нКл (10^{-8} Кл); $d = 3$ см ($3 \cdot 10^{-2}$ м); $\varepsilon = 3$.

Найти: W.



Решение. Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара.

Энергия в элементарном сферическом слое диэлектрика объемом $\mathrm{d}V$ (см. рисунок):

$$\mathrm{d}W = w\mathrm{d}V, \qquad (1)$$

где $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 dr$ (r — радиус элементарного сферического слоя; $\mathrm{d}r$ — его толщина); $w = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ — объемная плотность энергии (E — напряженность электростатического поля). Напряженность поля на расстоянии r от центра шара (внутри шара)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}.$$

Подставив эти формулы в выражение (1), найдем

$$\mathrm{d}W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Энергия, заключенная в слое диэлектрика,

$$W = \int \mathrm{d}W = \int\limits_R^{R+d} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_R^{R+d}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right).$$

Ответ: $W = 1{,}12$ мкДж.

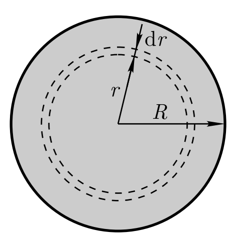
3.40. Сплошной эбонитовый шар ($\varepsilon = 3$) радиусом $R = 5$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 5$ нКл/м^3. Определите энергию электростатического поля, заключенную внутри шара.

Дано: $\varepsilon = 3$; $R = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 5$ нКл/м^3 ($5 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^3).

Найти: W.

Решение. Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность энергии одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара.

В качестве элементарного объема выберем сферический слой внутренним радиусом r и внешним — $r + \mathrm{d}r$ (см. рисунок). Его объем $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 dr$. Энергия в этом сферическом слое



$$\mathrm{d}W = w\mathrm{d}V, \qquad (1)$$

где $w = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ — объемная плотность энергии (E — напряженность электростатического поля). Напряженность поля на расстоянии r от центра шара (внутри шара) найдем согласно теореме Гаусса для поля в диэлектрике (см. задачу 3.16). В данном случае внутрь поверхности радиусом r попадает заряд $Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. Тогда

$$D \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

откуда $D = \frac{\rho r}{3}$. Поскольку $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, напряженность поля

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Подставив эти формулы в выражение (1), найдем

$$\mathrm{d}W = \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon} r^4 \mathrm{d}r.$$

Тогда искомая энергия, заключенная внутри шара,

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon} r^4 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0\varepsilon}\int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \frac{2\pi\rho^2}{45\varepsilon_0\varepsilon} R^5.$$

Ответ: $W = 4{,}11 \cdot 10^{-14}$ Дж.

3.41. Сплошной шар из диэлектрика радиусом $R = 5$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 5$ нКл/м^3. Определите энергию электростатического поля, заключенную в окружающем шар пространстве.

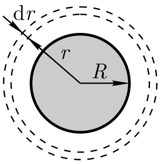
Дано: $R = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 5$ нКл/м^3 ($5 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^3).

Найти: W.

Решение. Поле заряженного шара сферически симметрично, поэтому объемная плотность заряда одинакова во всех точках, расположенных на равных расстояниях от центра шара.

Энергия в элементарном сферическом слое (он выбран за пределами диэлектрика, где следует определить энергию) объемом $\mathrm{d}V$ (см. рисунок)

$$\mathrm{d}W = w\mathrm{d}V, \tag{1}$$



где $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 dr$ (r — радиус элементарного сферического слоя; $\mathrm{d}r$ — его толщина); $w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ ($\varepsilon = 1$ — поле в вакууме; E — напряженность электростатического поля).

Напряженность E найдем по теореме Гаусса для поля в вакууме, причем в качестве замкнутой поверхности мысленно выберем сферу радиусом r (см. рисунок). В данном случае внутрь поверхности попадает весь заряд шара, создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Подставив найденные выражения в формулу (1), получим

$$\mathrm{d}W = \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^6}{\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Энергия, заключенная в окружающем шар пространстве,

$$W = \int \mathrm{d}W = \int\limits_R^\infty \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^6}{\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^6}{\varepsilon_0}\int\limits_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}R^5.$$

Ответ: $W = 6{,}16 \cdot 10^{-13}$ Дж.

3.42. Плоскому конденсатору с площадью обкладок S и расстоянием между ними l сообщен заряд Q, после чего конденсатор отключен от источника напряжения. Определите силу притяжения F между обкладками конденсатора, если диэлектрическая проницаемость среды между обкладками равна ε.

Дано: S; l; Q; ε.

Найти: F.

Решение. Заряд обкладок конденсатора после отключения от источника напряжения не меняется, т.е. $Q = \mathrm{const}$. Предположим, что под действием силы притяжения F расстояние между обкладками конденсатора изменилось на $\mathrm{d}l$. Тогда сила F совершает работу

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l. \tag{1}$$

Согласно закону сохранения энергии, эта работа равна убыли энергии конденсатора, т.е.

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}W, \tag{2}$$

откуда, исходя из выражений (1) и (2), получим

$$F = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l}. \tag{3}$$

Подставив в формулу для энергии заряженного конденсатора $W = \dfrac{Q^2}{2C}$ выражение для емкости плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{l}$, получим

$$W = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\,l. \tag{4}$$

Подставив в формулу (3) значение энергии (4) и выполнив дифференцирование, найдем искомую силу притяжения между обкладками конденсатора

$$F = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S},$$

где знак «$-$» указывает на то, что сила F является силой притяжения.

Ответ: $F = -\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$.

3.43. Плоский конденсатор площадью обкладок S и расстоянием между ними l подключен к источнику постоянного напряжения U. Определите силу притяжения F между обкладками конденсатора, если диэлектрическая проницаемость среды между обкладками равна ε.

Дано: S; l; U; ε.

Найти: F.

Решение. Согласно условию задачи, на обкладках конденсатора поддерживается постоянное напряжение, т.е. $U = \text{const}$. Предположим, что под действием силы притяжения F расстояние между обкладками конденсатора изменилось на $\mathrm{d}l$. Тогда сила F совершает работу

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l. \tag{1}$$

Согласно закону сохранения энергии, эта работа в данном случае идет на увеличение энергии конденсатора (сравните с предыдущей задачей), т.е.

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}W, \tag{2}$$

откуда, исходя из выражений (1) и (2), получим

$$F = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l}. \tag{3}$$

Подставив в формулу для энергии конденсатора $W = \dfrac{CU^2}{2}$ выражение для емкости плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{l}$, получим

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon U^2}{2l}. \tag{4}$$

Подставив в формулу (3) значение энергии (4) и выполнив дифференцирование, найдем искомую силу притяжения между обкладками конденсатора

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon U^2}{2l}\right) = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2l^2},$$

где знак «–» указывает на то, что сила F является силой притяжения.

Ответ: $F = -\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2l^2}$.

3.44. Пространство между обкладками плоского конденсатора площадью обкладок $S = 100$ см^2 заполнено эбонитом ($\varepsilon = 3$). Определите поверхностную плотность σ' связанных зарядов на эбоните, если обкладки конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 10$ мН.

Дано: $S = 100$ см^2 (10^{-2} м^2); $\varepsilon = 3$; $F = 10$ мН (10^{-2} Н).

Найти: σ'.

Решение. Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна поляризованности P: $\sigma' = P$. Поляризованность диэлектрика P и напряженность E электростатического поля связаны соотношением

$$P = æ\varepsilon_0 E,$$

где æ — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика: $æ = \varepsilon - 1$ (ε — диэлектрическая проницаемость). Учитывая вышесказанное, получим, что

$$\sigma' = P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E. \tag{1}$$

Напряженность электростатического поля

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}, \tag{2}$$

где σ — поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора, которую найдем из формулы для силы притяжения между обкладками конденсатора:

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

(учли, что заряд на обкладках конденсатора $Q = \sigma S$), откуда

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon|F|}{S}}. \tag{3}$$

Тогда, подставив (3) в (2), получим

$$E = \sqrt{\frac{2|F|}{\varepsilon_0\varepsilon S}}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в формулу (1), найдем искомую плотность связанных зарядов на эбоните:

$$\sigma' = (\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0|F|}{\varepsilon S}}.$$

Ответ: $\sigma' = 4{,}86$ мкКл/м^2.

Задачи для самостоятельного решения

3.45. Определите расстояние l между двумя одинаковыми точечными зарядами, находящимися в керосине с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, если сила взаимодействия между ними такая же, как и в вакууме, на расстоянии $r = 14$ см. [$l = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} = 9{,}9$ см]

3.46. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути (плотность $\rho = 13{,}6$ г/см^3) находится в равновесии при напряженности электростатического поля $E = 500$ В/см. Определите радиус r капли, если ее заряд $Q = 10^{-12}$ Кл. [$r = \sqrt[3]{\frac{3QE}{4\pi\rho g}} = 4{,}47 \cdot 10^{-5}$ м]

3.47. Два точечных заряда $Q_1 = 8$ нКл и $Q_2 = -6$ нКл находятся в вакууме на расстоянии друг от друга $r = 30$ см. Определите: 1) напряженность E_1 поля в точке, лежащей посередине между зарядами; 2) напряженность E_2 в той же точке при условии, что второй заряд положительный. [1) $E_1 = 5{,}6$ кВ/м; 2) $E_2 = 800$ В/м]

3.48. Определите напряженность E поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 2{,}7$ нКл $\cdot$ м на расстоянии $r = 30$ см от центра диполя в направлении, перпендикулярном оси диполя. [$E = 900$ В/м]

3.49. На некотором расстоянии от равномерно заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}1$ нКл/см^2 параллельно плоскости расположен круг радиусом $r = 15$ см. Определите поток Φ_E вектора напряженности сквозь этот круг. [$\Phi_E = \dfrac{\pi\sigma r^2}{2\varepsilon_0} = 3{,}99$ кВ $\cdot$ м]

3.50. Определите напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженной бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. [$E = 56{,}5$ В/м]

3.51. В электростатическом поле равномерно заряженной бесконечной плоскости вдоль линии напряженности на расстояние $r = 2$ см перенесли точечный заряд $Q = 2$ нКл, затратив при этом работу $A = 10$ мкДж. Определите поверхностную плотность σ заряда на плоскости. [$\sigma = \dfrac{2\varepsilon_0 A}{Qr} = 4{,}42$ мкКл/м^2]

3.52. Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями в вакууме, заряженными разноименными зарядами с поверхностной плотностью $\sigma = 5$ нКл/м^2. Определите напряженность E электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. [1) $E = 565$ В/м; 2) $E = 0$]

3.53. Электростатическое поле создается в вакууме двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно одноименными зарядами с поверхностной плотностью соответственно $\sigma_1 = 5$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = 2$ нКл/м^2. Определите напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. Постройте график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной плоскостям. [$E_1 = 169$ В/м; $E_2 = 395$ В/м]

3.54. Равномерно заряженная металлическая сфера радиусом $R = 10$ см с общим зарядом $Q = 4$ нКл расположена в вакууме. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1 = 6$ см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии $r_2 = 20$ см от центра сферы. [1) $E = 0$; 2) $E = 3600$ В/м; 3) $E = 900$ В/м]

3.55. Электростатическое поле создается в вакууме шаром радиусом $R = 10$ см, равномерно заряженным с общим зарядом $Q = 1$ нКл. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1 = 2$ см от центра шара; 2) на расстоянии $r_2 = 8$ см от центра шара. Постройте график зависимости $E(r)$. [1) $E = 180$ В/м; 2) $E = 720$ В/м]

3.56. Шар радиусом $R = 15$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 5$ нКл/м^3. Определите напряженность E электростатического поля в вакууме: 1) на расстоянии $r_1 = 30$ см от центра шара; 2) на расстоянии $r_2 = 8$ см от центра шара. [1) $E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_1^2} = 7{,}06$ В/м; 2) $E = \dfrac{\rho r_2}{3\varepsilon_0} = 15{,}1$ В/м]

3.57. Напряженность E электростатического поля, создаваемого длинным прямым проводом, расположенным в вакууме на расстоянии $r = 20$ см от провода, равна 250 В/м. Определите линейную плотность τ заряда, равномерно распределенного по всей длине провода. [$\tau = 2\pi\varepsilon_0 rE = 2{,}78$ нКл/м]

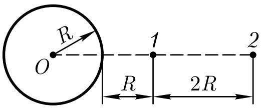
3.58. Сплошной эбонитовый шар (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 3$) радиусом $R = 10$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 5$ нКл/м^3. Определите электрическое смещение D и напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра шара; 2) на расстоянии $r_2 = 15$ см от центра шара. [1) $D_1 = \dfrac{\rho r_1}{3} = 50$ пКл/м^2; $E_1 = \dfrac{\rho r_1}{3\varepsilon_0\varepsilon} = 1{,}88$ В/м; 2) $D_2 = \dfrac{\rho R^3}{3r_2^2} = 74{,}1$ пКл/м^2; $E_2 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2} = 8{,}37$ В/м]

3.59. Электростатическое поле создается бесконечной равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м^2 плоскостью. Определите, какую скорость приобретет электрон под действием внешних сил, приблизившись вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 2$ см до расстояния $r_2 = 1$ см от нити. [$v = \sqrt{\dfrac{e\sigma(r_1 - r_2)}{\varepsilon_0 m}} = 1{,}41 \cdot 10^6$ м/с]

3.60. Определите потенциальную энергию системы двух точечных зарядов $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = 1$ нКл, расположенных на расстоянии $r = 20$ см друг от друга. [$U = 0{,}45$ мкДж]

3.61. Металлический шар радиусом $R = 10$ см несет заряд $Q = 5$ нКл. Определите потенциал φ электростатического поля: 1) в центре шара; 2) на поверхности шара; 3) на расстоянии $l = 5$ см от его поверхности. Постройте график зависимости $\varphi(r)$. [1) $\varphi = 450$ В; 2) $\varphi = 450$ В; 3) $\varphi = 300$ В]

3.62. На кольце радиусом $R = 10$ см из тонкой проволоки равномерно распределен заряд $Q = 10$ нКл. Определите: 1) потенциал φ_0 электростатического поля в центре кольца; 2) потенциал φ электростатического поля на оси, проходящей через центр кольца, в точке на расстоянии $l = 15$ см от центра кольца. [1) $\varphi_0 = 900$ В; 2) $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + l^2}} = 500$ В]



3.63. Определите работу сил поля по перемещению заряда $Q = 10$ нКл из точки *1* в точку *2* поля, создаваемого заряженным проводящим шаром (см. рисунок). Потенциал шара $\varphi = 100$ В. [$A = \dfrac{1}{4}Q\varphi = 250$ нДж]

3.64. Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м^2. Определите числовое значение и направление градиента потенциала электростатического поля, создаваемого этой плоскостью. [$|\mathrm{grad}\,\varphi| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 565$ В/м, градиент направлен к плоскости, перпендикулярно ей]

3.65. На расстоянии $r_1 = 10$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $Q = 1$ мкКл. При перемещении этого заряда до расстояния $r_2 = 2$ см в направлении, перпендикулярном нити, совершена работа $A = 1$ мДж. Определите линейную плотность τ рассматриваемой нити. [$\tau = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 A}{Q \ln \dfrac{r_1}{r_2}} = 34{,}9$ нКл/м]

3.66. Разность потенциалов между двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями $\varphi_1 - \varphi_2 = 500$ В, расстояние между плоскостями $d = 0{,}5$ мм. Определите поверхностную плотность зарядов на пластинах. [$\sigma = \dfrac{\varepsilon_0(\varphi_1 - \varphi_2)}{d} = 8{,}85$ мкКл/м^2]

3.67. Электростатическое поле создается равномерно заряженной сферической поверхностью с общим зарядом $Q = 10$ нКл. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 10$ см и $r_2 = 20$ см от центра сферы ($r_2 > r_1 > R$, где R — радиус сферической поверхности). [$\varphi_1 - \varphi_2 = 450$ В]

3.68. Электростатическое поле создается в вакууме равномерно заряженным шаром радиусом $R = 1$ м. Определите общий заряд шара, если разность потенциалов для точек, лежащих от центра шара на расстояниях $r_1 = 0{,}4$ м и $r_2 = 0{,}9$ м, равна $\varphi_1 - \varphi_2 = 120$ В. [$Q = \dfrac{8\pi\varepsilon_0 R^3(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_2^2 - r_1^2} = 41$ нКл]

3.69. Электростатическое поле создается в вакууме бесконечным цилиндром, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях $r_1 = 2$ мм и $r_2 = 5$ мм от оси цилиндра. [$\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{r_2}{r_1} = 16{,}5$ В]

3.70. В однородное электростатическое поле напряженностью $E_0 = 1{,}5$ кВ/м перпендикулярно полю помещается бесконечная плоскопараллельная эбонитовая пластина ($\varepsilon = 3$). Определите: 1) напряженность электростатического поля внутри пластины; 2) электрическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность эбонита; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на эбоните. [1) $E = 500$ В/м; 2) $D = 13{,}3$ нКл/м^2; 3) $P = 8{,}85$ нКл/м^2; 4) $\sigma = 8{,}85$ нКл/м^2]

3.71. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 5$ мм, разность потенциалов $U = 500$ В. Определите: 1) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектрике, если известно, что диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами, $\text{æ} = 1$. [1) $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0(1+\text{æ})U}{d} = 1{,}77$ мкКл/м^2; 2) $\sigma' = \varepsilon_0 \text{æ} \dfrac{U}{d} = 885$ нКл/м^2]

3.72. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). Расстояние между обкладками $d = 17{,}7$ мм. Какую разность потенциалов U следует подать на обкладки, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составляла 0,2 нКл/см^2? [$U = \dfrac{\sigma' d}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} = 4$ кВ]

3.73. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 1{,}5$ кВ. Площадь пластин $S = 150$ см^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. При включенном источнике напряжения между пластинами внесли стекло ($\varepsilon = 7$). Определите разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика. Определите также емкости конденсатора C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика. [$U_2 = 1{,}5$ кВ; $C_1 = 26{,}5$ пФ; $C_2 = 186$ пФ]

3.74. Между пластинами плоского конденсатора параллельно обкладкам помещено два слоя диэлектрика — парафин ($\varepsilon_1 = 2$) толщиной $d_1 = 0{,}5$ мм и слюдяная пластинка ($\varepsilon_2 = 7$) толщиной $d_2 = 1$ мм. Напряженность E_1 электростатического поля в парафине равна 700 кВ/м. Определите: 1) напряженность E_2 поля в слюде; 2) разность потенциалов между пластинами конденсатора. [1) $E_2 = \dfrac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2} = 200$ кВ/м; 2) $U = 550$ В]

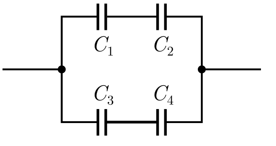
3.75. Определите расстояние между пластинами плоского конденсатора, если между ними приложена разность потенциалов $U = 400$ В, площадь каждой пластины $S = 50$ см^2, ее заряд $Q = 5$ нКл. В пространстве между пластинами находится парафин ($\varepsilon = 2$). [$d = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon US}{Q} = 7{,}08$ мм]

3.76. Два плоских воздушных конденсатора одинаковой емкости соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов $U = 150$ В. Определите разность потенциалов этой системы, если пространство между обкладками одного из конденсаторов заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). [$U' = \dfrac{2U}{\varepsilon + 1} = 100$ В]

3.77. Два плоских воздушных конденсатора одинаковой емкости соединены последовательно и подключены к источнику ЭДС. Как и во сколько раз изменится разность потенциалов на обкладках первого конденсатора, если, не отключая источника ЭДС, пространство между обкладками второго конденсатора заполнить эбонитом ($\varepsilon = 3$)? [$\dfrac{U_1'}{U_1} = \dfrac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1{,}5$]

3.78. Две концентрические металлические сферы радиусами $r_1 = 1$ см и $r_2 = 1{,}5$ см образуют сферический конденсатор. Пространство между обкладками конденсатора заполнено маслом ($\varepsilon = 2{,}2$). Определите: 1) емкость этого конденсатора; 2) шар какого радиуса, помещенный в это масло, будет обладать такой емкостью? [1) $C = 7{,}33$ пФ; 2) $R = 3$ см]

3.79. Определите емкость C батареи конденсаторов, изображенной на рисунке. Электроемкость каждого конденсатора $C_i = 1$ пФ ($i = 1, \ldots, 4$). [$C = 1$ пФ]



3.80. К обкладкам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 1$ кВ. Площадь обкладок $S = 250$ см^2, расстояние между ними $d_1 = 1$ мм. Обкладки раздвинули до расстояния $d_2 = 3$ мм. Определите энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения обкладок, если источник напряжения перед раздвижением: 1) не отключался; 2) отключался. [1) $W_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_1} = 111$ мкДж; $W_2 = \dfrac{d_1}{d_2} W_1 = 37$ мкДж; 2) $W_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_1} = 111$ мкДж; $W_2 = \dfrac{d_2}{d_1} W_1 = 333$ мкДж]

3.81. Металлический шар, погруженный в масло ($\varepsilon = 2{,}2$), имеет поверхностную плотность заряда $\sigma = 10$ нКл/м^2 и потенциал $\varphi = 100$ В. Определите его: 1) радиус; 2) заряд; 3) емкость; 4) энергию. [1) $R = 19{,}5$ см; 2) $Q = 4{,}78$ нКл; 3) $C = 47{,}7$ пФ; 4) $W = 239$ нДж]

3.82. Энергия электростатического поля, заключенная в окружающем диэлектрический шар радиусом $R = 5$ см пространстве, $W = 2{,}46$ пДж. Определите объемную плотность ρ, с которой шар заряжен равномерно. [$\rho = 3\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 W}{2\pi R^5}} = 10$ нКл/м^3]

3.83. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 25$ см заряжены соответственно одинаковыми зарядами $Q = 50$ нКл. Определите энергию электростатического поля, заключенного между этими сферами. [$W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) = 67{,}5$ мкДж]

3.84. Между обкладками плоского конденсатора зажата парафиновая пластинка ($\varepsilon = 2$). Площадь обкладок $S = 200$ см^2. Определите поверхностную плотность σ'

связанных зарядов на парафине, если обкладки конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 7$ мН. [$\sigma' = (\varepsilon - 1)\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0|F|}{\varepsilon S}} = 1{,}76$ мкКл/м^2]

3.85. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon = 7$). Когда конденсатор присоединили к источнику напряжения, давление пластин на стекло оказалось равным 1 Па. Определите: 1) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 2) электрическое смещение; 3) напряженность электростатического поля в стекле; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле; 5) объемную плотность энергии электростатического поля в стекле. [1) $\sigma = 11{,}1$ мкКл/м^2; 2) $D = 11{,}1$ мкКл/м^2; 3) $E = 179$ кВ/м; 4) $\sigma' = 9{,}5$ мкКл/м^2; 5) $w = 0{,}992$ Дж/м^3]

3.2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Основные законы и формулы

• Сила тока

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

• Плотность тока в проводнике

$$j = \frac{I}{S}, \qquad \vec{j} = ne\langle\vec{v}\rangle$$

[S — площадь поперечного сечения проводника; $\langle\vec{v}\rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n — концентрация зарядов].

• Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\mathscr{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{Q_0}$$

[$A_{\text{ст}}$ — работа сторонних сил; Q_0 — единичный положительный заряд],

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}}\mathrm{d}\vec{l} \ \ \text{(замкнутая цепь)},$$

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}}\mathrm{d}\vec{l} \ \ \text{(участок цепи } \mathit{1}\text{—}\mathit{2}\text{)}$$

[$\vec{E}_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил].

• Разность потенциалов между двумя точками цепи

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 E_l \mathrm{d}l$$

[$\vec{E}$ — напряженность электростатического поля; E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$].

• Напряжение на участке *1—2* цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}$$

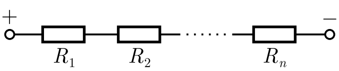
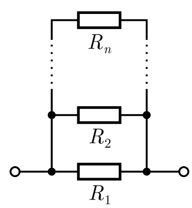
[$(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между точками цепи; $\mathscr{E}_{12}$ — ЭДС, действующая на участке *1—2* цепи].

• Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электрическая проводимость γ вещества проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad G = \frac{1}{R}, \quad \gamma = \frac{1}{\rho}$$

[ρ — удельное электрическое сопротивление; S — площадь поперечного сечения проводника; l — его длина].

• Соединение проводников:

	последовательное	параллельное
Схема		
Постоянная величина	$I = I_1 = I_2 = \ldots = I_n = \text{const}$	$U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n = \text{const}$
Суммируемая величина	$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$	$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$
Полное сопротивление	$R = \sum\limits_{i=1}^{n} R_i$	$\frac{1}{R} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

• Закон Ома

$$I = \frac{U}{R} \text{ (для однородного участка цепи)},$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}}{R} \text{ (для неоднородного участка цепи)},$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} \text{ (для замкнутой цепи)}$$

[U — напряжение на участке цепи; R — сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathscr{E}_{12}$ — ЭДС источников тока, входящих в участок; $\mathscr{E}$ — ЭДС всех источников тока цепи].

• Зависимость удельного сопротивления ρ и сопротивления R от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad R = R_0(1 + \alpha t)$$

[ρ и ρ_0, R и R_0 — соответственно удельное сопротивление и сопротивление проводника при t и 0 °С; α — температурный коэффициент сопротивления, для чистых металлов (при не очень низкой температуре) близкий к $^1/_{273}\,\text{К}^{-1}$].

• Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

[$\vec{j}$ — плотность тока; $\vec{E}$ — напряженность электростатического поля; γ — удельная электрическая проводимость проводника].

• Работа тока

$$\mathrm{d}A = U\mathrm{d}Q = IU\mathrm{d}t = I^2R\mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\,\mathrm{d}t$$

[U — напряжение, приложенное к концам однородного проводника; I — сила тока в проводнике; R — сопротивление проводника; $\mathrm{d}Q$ — заряд, переносимый через сечение проводника за промежуток времени $\mathrm{d}t$].

• Мощность тока

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

[U — напряжение, приложенное к концам однородного проводника; I — сила тока в проводнике; R — его сопротивление].

• Закон Джоуля — Ленца

$$\mathrm{d}Q = IU\mathrm{d}t = I^2R\mathrm{d}t$$

[$\mathrm{d}Q$ — количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за промежуток времени $\mathrm{d}t$; U — напряжение, приложенное к концам участка цепи; I — сила тока в цепи; R — сопротивление участка].

• Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме

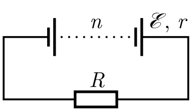
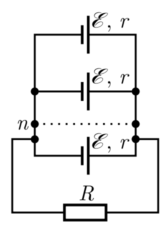
$$w = jE = \gamma E^2$$

[w — удельная тепловая мощность тока; j — плотность тока; E — напряженность электростатического поля; γ — удельная электрическая проводимость вещества].

• Правила Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0, \quad \sum_i I_i R_i = \sum_k \mathscr{E}_k.$$

• Соединение n одинаковых элементов (источников тока) электрической цепи постоянного тока:

<table>
<tr><th>Схема электрической цепи</th><th>Закон Ома</th><th>Схема электрической цепи</th><th>Закон Ома</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$I = \dfrac{n\mathscr{E}}{R + nr}$</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">$I = \dfrac{\mathscr{E}}{R + \dfrac{r}{n}}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$I = \dfrac{\mathscr{E} - U_{ab}}{r}$</td></tr>
</table>

[r — внутреннее сопротивление каждого источника; R — внешнее сопротивление цепи; $\mathscr{E}$ — ЭДС источника].

Примеры решения задач

3.86. Сила тока в проводнике равномерно растет от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 3$ А за время $\tau = 6$ с. Определите заряд Q, прошедший по проводнику.

Дано: $I_0 = 0$; $I_{\max} = 3$ А; $\tau = 6$ с.

Найти: Q.

Решение. Заряд $\mathrm{d}Q$, проходящий через поперечное сечение проводника за время $\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t.$$

По условию задачи сила тока растет равномерно, т.е. $I = kt$, где коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{I_{\max} - I_0}{\tau} = \mathrm{const}\,.$$

Тогда можно записать

$$\mathrm{d}Q = kt\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Проинтегрировав (1) и подставив выражение для k, найдем искомый заряд, прошедший по проводнику:

$$Q = \int_0^{\tau} kt\mathrm{d}t = \frac{k\tau^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{I_{\max} - I_0}{\tau}\tau^2 = \frac{\tau}{2}(I_{\max} - I_0).$$

Ответ: $Q = 9$ Кл.

3.87. По железному проводнику ($\rho = 7{,}87$ г/см^3, $M = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) сечением $S = 0{,}5$ мм^2 течет ток $I = 0{,}1$ А. Определите среднюю скорость упорядоченного (направленного) движения электронов, считая, что число n свободных электронов в единице объема проводника равно числу атомов n' в единице объема проводника.

Дано: $\rho = 7{,}87$ г/см^3 ($7{,}87 \cdot 10^3$ кг/м^3); $M = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $I = 0{,}1$ А; $S = 0{,}5$ мм^2 ($0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м^2).

Найти: $\langle v \rangle$.

Решение. Плотность тока в проводнике

$$j = ne\langle v \rangle, \tag{1}$$

где $\langle v \rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов в проводнике; n — концентрация электронов (число электронов в единице объема); $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона.

Согласно условию задачи,

$$n = n' = \frac{N}{V} = \frac{\dfrac{m}{M}N_{\mathrm{A}}}{V} = \frac{\rho N_{\mathrm{A}}}{M} \tag{2}$$

(учли, что $N = \dfrac{m}{M}N_{\mathrm{A}}$, где m — масса проводника; M — его молярная масса; $N_{\mathrm{A}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро; $\rho = \dfrac{m}{V}$ — плотность железа).

Учитывая формулу (2) и то, что плотность тока $j = \dfrac{I}{S}$, выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{I}{S} = \frac{\rho N_\text{A}}{M}\, e\langle v\rangle,$$

откуда искомая скорость упорядоченного движения электронов

$$\langle v\rangle = \frac{IM}{\rho N_\text{A} e S}.$$

Ответ: $\langle v\rangle = 14{,}8$ мкм/с.

3.88. Сопротивление однородной проволоки $R = 36$ Ом. Определите, на сколько равных отрезков разрезали проволоку, если после их параллельного соединения сопротивление оказалось равным $R_1 = 1$ Ом.

Дано: $R = 36$ Ом; $R_1 = 1$ Ом.

Найти: N.

Решение. Неразрезанную проволоку можно представить как N последовательно соединенных сопротивлений. Тогда

$$R = Nr, \tag{1}$$

где r — сопротивление каждого отрезка.

В случае параллельного соединения N отрезков проволок

$$\frac{1}{R_1} = \frac{N}{r} \quad \text{или} \quad R_1 = \frac{r}{N}. \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) найдем искомое число отрезков

$$N = \sqrt{\frac{R}{R_1}}.$$

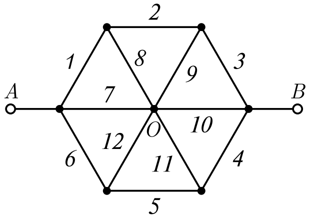
Ответ: $N = 6$.

3.89. Определите общее сопротивление между точками A и B цепи проводников в виде шестиугольника (рис. *а*). Сопротивление каждой проволоки $r = 1$ Ом.

Дано: $r = 1$ Ом.

Найти: R.

Решение. В силу симметрии токи, текущие по сопротивлениям *8*, *9*, *11* и *12*, одинаковы. Поэтому ток через узел O равен нулю. Тогда схема, представленная на рис. *б*, является эквивалентной той, которая задана в виде шестиугольника (см. рис. *а*).



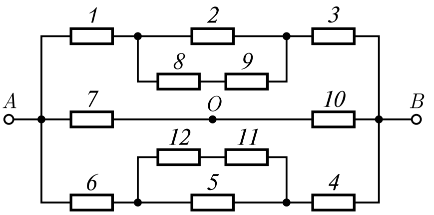
а

Сопротивления *8* и *9* соединены между собой последовательно и параллельно с сопротивлением *2*. Тогда

$$R_{8,9,2} = \frac{2}{3}r.$$

Эквивалентное сопротивление $R_{8,9,2}$ соединено последовательно с сопротивлениями *1* и *3*, поэтому

$$R_{1\to 3} = \frac{2}{3}r + r + r = \frac{8}{3}r.$$



б

Из схемы следует, что эквивалентное сопротивление $R_{4\to 6}$ равно $R_{1\to 3}$, т. е.

$$R_{4\to 6} = \frac{8}{3}r.$$

Сопротивления $R_{1\to 3}$, $R_{4\to 6}$, *7* и *10* соединены параллельно, поэтому

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{1\to 3}} + \frac{1}{R_{4\to 6}} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

или, подставив значения $R_{1\to 3}$ и $R_{4\to 6}$, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{3}{8r} + \frac{3}{8r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{5}{4r},$$

откуда искомое общее сопротивление

$$R = \frac{4}{5}r.$$

Ответ: $R = 0{,}8$ Ом.

3.90. Определите плотность тока в медной проволоке длиной $l = 100$ м, если разность потенциалов на ее концах $\varphi_1 - \varphi_2 = 10$ В. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм · м.

Дано: $l = 100$ м; $\varphi_1 - \varphi_2 = 10$ В; $\rho = 17$ нОм · м ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м).

Найти: j.

Решение. Согласно закону Ома в дифференциальной форме,

$$j = \gamma E, \tag{1}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$ — удельная электрическая проводимость проводника; $E = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$ — напряженность электрического поля внутри однородного проводника, выраженная через разность потенциалов на концах проводника и его длину.

Подставив записанные формулы в выражение (1), найдем искомую плотность тока

$$j = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho l}.$$

Ответ: $j = 5{,}88$ МА/м^2.

3.91. Через лампу накаливания течет ток $I = 1$ А. Температура t вольфрамовой нити диаметром $d_1 = 0{,}2$ мм равна 2000 °С. Ток подводится медным проводом сечением $S_2 = 5$ мм^2. Определите напряженность электростатического поля: 1) в вольфраме; 2) в меди. Удельное сопротивление вольфрама при 0 °С $\rho_0 = 55$ нОм · м, его температурный коэффициент сопротивления $\alpha_1 = 0{,}0045$ град$^{-1}$, удельное сопротивление меди $\rho_2 = 17$ нОм · м.

Дано: $I = 1$ А; $d_1 = 0{,}2$ мм $(2 \cdot 10^{-4}$ м); $t = 2000\,°\mathrm{C}$; $S_2 = 5$ мм^2 $(5 \cdot 10^{-6}$ м$^2)$; $\rho_0 =$ $= 55$ нОм · м $(5{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ом·м); $\alpha_1 = 0{,}0045\,°\mathrm{C}^{-1}$; $\rho_2 = 17$ нОм · м $(1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м).

Найти: E_1; E_2.

Решение. Согласно закону Ома в дифференциальной форме, плотность тока

$$j = \gamma E = \frac{E}{\rho}, \tag{1}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$ — удельная электрическая проводимость проводника; E — напряженность электростатического поля.

Удельное сопротивление вольфрама изменяется с температурой по линейному закону:

$$\rho_1 = \rho_0(1 + \alpha t). \tag{2}$$

Плотность тока в вольфраме

$$j_1 = \frac{I}{S_1} = \frac{I}{\pi d_1^2/4}. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую напряженность электростатического поля в вольфраме

$$E_1 = j_1\rho_1 = \frac{4I}{\pi d_1^2}\rho_0(1 + \alpha t).$$

Напряженность электростатического поля в меди

$$E_2 = j_2\rho_2 = \frac{I\rho_2}{S_2}$$

(учли, что $j_2 = \dfrac{I}{S_2}$).

Ответ: 1) $E_1 = 17{,}5$ В/м; 2) $E_2 = 3{,}4$ мВ/м.

3.92. Два цилиндрических проводника одинаковой длины и одинакового сечения, один из железа, а другой из алюминия, соединены сначала последовательно, а затем параллельно. Определите отношение мощностей для этих проводников при их соединении: 1) последовательно; 2) параллельно. Удельные сопротивления железа и алюминия соответственно 98 нОм · м и 26 нОм · м.

Дано: $l_1 = l_2 = l$; $S_1 = S_2 = S$; $\rho_1 = 98$ нОм · м $(9{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м); $\rho_2 = 26$ нОм · м $(2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м).

Найти: 1) $\dfrac{P_1}{P_2}$; 2) $\dfrac{P_1}{P_2}$.

Решение. В случае *последовательного* соединения проводников $I_1 = I_2 = I =$ $= \mathrm{const}$.

Мощность тока

$$P = I^2 R, \tag{1}$$

где $R = \rho\dfrac{l}{S}$ — сопротивление проводника.

Тогда $P_1 = I^2R_1$, где $R_1 = \rho_1 \dfrac{l}{S}$, и $P_2 = I^2R_2$, где $R_2 = \rho_2 \dfrac{l}{S}$. Искомое отношение мощностей для последовательно соединенных проводников

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

В случае *параллельного* соединения проводников $U_1 = U_2 = U = \text{const}$. Мощность тока

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Тогда $P_1 = \dfrac{U^2}{R_1}$, где $R_1 = \rho_1 \dfrac{l}{S}$, и $P_2 = \dfrac{U^2}{R_2}$, где $R_2 = \rho_2 \dfrac{l}{S}$.

Искомое отношение мощностей для параллельно соединенных проводников

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Ответ: 1) $\dfrac{P_1}{P_2} = 3{,}77$; 2) $\dfrac{P_1}{P_2} = 0{,}265$.

3.93. По проводнику сопротивлением $R = 10$ Ом течет ток, сила тока возрастает при этом линейно. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время $\tau = 10$ с, равно 300 Дж. Определите заряд q, прошедший за это время по проводнику, если в начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.

Дано: $R = 10$ Ом; $\tau = 10$ с; $Q = 300$ Дж; $I_0 = 0$.

Найти: q.

Решение. Из условия равномерности возрастания силы тока (при $I_0 = 0$) следует, что $I = kt$, где k — коэффициент пропорциональности. Учитывая, что $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, можем записать

$$\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t = kt\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Проинтегрируем выражение (1), тогда

$$q = \int_0^\tau kt\mathrm{d}t = \frac{k\tau^2}{2}. \tag{2}$$

Для нахождения коэффициента k запишем закон Джоуля—Ленца для бесконечно малого промежутка времени $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}Q = I^2R\mathrm{d}t.$$

Проинтегрировав это выражение от 0 до τ, получим количество теплоты Q, заданное в условии задачи:

$$Q = \int_0^\tau I^2R\mathrm{d}t = \int_0^\tau k^2t^2R\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k^2R\tau^3,$$

откуда найдем k:

$$k = \sqrt{\frac{3Q}{\tau^3 R}}. \tag{3}$$

Подставив формулу (3) в выражение (2), определим искомый заряд

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3Q\tau}{R}}.$$

Ответ: $q = 15$ Кл.

3.94. Сопротивление второго проводника в пять раз больше, чем сопротивление первого. Их сначала включают в цепь последовательно, а затем — параллельно. Определите отношение количеств теплоты, выделившихся в этих проводниках, для обоих случаев.

Дано: R_1; $R_2 = 5R_1$; 1) последовательно; 2) параллельно.

Найти: $\dfrac{Q_1}{Q_2}$.

Решение. 1. В случае последовательного соединения проводников $I = \text{const}$.

Согласно закону Джоуля—Ленца, количество теплоты, выделившееся в первом и втором проводниках,

$$Q_1 = \frac{U_1^2}{R_1}t, \quad Q_2 = \frac{U_2^2}{R_2}t, \tag{1}$$

где t — время прохождения тока через проводники; U_1 и U_2 — соответственно разность потенциалов между концами первого и второго проводников.

Учитывая, что $I_1 = I_2$, т. е. $\dfrac{U_1}{R_1} = \dfrac{U_2}{R_2}$ или $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$, из формулы (1) найдем отношение

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U_1^2 R_2}{U_2^2 R_1} = \frac{R_1^2 R_2}{R_2^2 R_1} = \frac{R_1}{R_2}.$$

2. В случае параллельного соединения проводников $U = \text{const}$. Согласно закону Джоуля—Ленца, количество теплоты, выделившееся в первом и втором проводниках, за время t:

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}t, \quad Q_2 = \frac{U^2}{R_2}t. \tag{2}$$

Из формул (2) отношение

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Ответ: 1) $\dfrac{Q_1}{Q_2} = 0{,}2$; 2) $\dfrac{Q_1}{Q_2} = 5$.

3.95. Определите плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление $\rho = 17$ нОм · м), если удельная тепловая мощность тока $w = 1{,}7$ Дж/(м^3 · с).

Дано: $\rho = 17$ нОм · м ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м); $w = 1{,}7$ Дж/(м^3 · с).

Найти: j.

Решение. Согласно законам Джоуля—Ленца и Ома в дифференциальной форме,

$$w = \gamma E^2 = \frac{E^2}{\rho}; \qquad (1)$$

$$j = \gamma E = \frac{E}{\rho}, \qquad (2)$$

где γ и ρ — соответственно удельные проводимость и сопротивление проводника. Из закона (2) получим, что $E = \rho j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока:

$$j = \sqrt{\frac{w}{\rho}}.$$

Ответ: $j = 10$ кА/м^3.

3.96. Определите внутреннее сопротивление источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4$ А развивается мощность $P_1 = 10$ Вт, а при силе тока $I_2 = 6$ А — мощность $P_2 = 12$ Вт.

Дано: $I_1 = 4$ А; $P_1 = 10$ Вт; $I_2 = 6$ А; $P_2 = 12$ Вт.

Найти: r.

Решение. Мощность, развиваемая током,

$$P_1 = I_1^2 R_1 \text{ и } P_2 = I_2^2 R_2, \qquad (1)$$

где R_1 и R_2 — сопротивления внешней цепи.

Согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}; \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + r},$$

где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника. Решив эти два уравнения относительно r, получим

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \qquad (2)$$

Выразив $I_1 R_1$ и $I_2 R_2$ из уравнений (1) и подставив в выражение (2), найдем искомое внутреннее сопротивление источника тока:

$$r = \frac{\dfrac{P_1}{I_1} - \dfrac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1}.$$

Ответ: $r = 0{,}25$ Ом.

3.97. Определите мощность тока P_1 во внешней цепи при силе тока $I_1 = 2$ А, если при силе тока $I_2 = 3$ А мощность $P_2 = 6$ Вт, а внутреннее сопротивление r источника тока равно 0,5 Ом.

Дано: $I_1 = 2$ А; $I_2 = 3$ А; $P_2 = 6$ Вт; $r = 0{,}5$ Ом.

Найти: P_1.

Решение. Мощность, развиваемая током,

$$P_1 = I_1^2 R_1, \ P_2 = I_2^2 R_2, \qquad (1)$$

где R_1 и R_2 — сопротивления внешней цепи.

Согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}; \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + r},$$

где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника. Эти формулы можно записать в виде

$$\mathscr{E} = I_1R_1 + I_1r,$$

$$\mathscr{E} = I_2R_2 + I_2r.$$

Приравняв полученные выражения, получаем

$$I_1R_1 + I_1r = I_2R_2 + I_2r,$$

откуда

$$r = \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) следует, что

$$I_1R_1 = \frac{P_1}{I_1}, \quad I_2R_2 = \frac{P_2}{I_2}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (3) в формулу (2), получаем

$$r = \frac{\dfrac{P_1}{I_1} - \dfrac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1},$$

откуда искомая мощность

$$P_1 = I_1\left[r(I_2 - I_1) + \frac{P_2}{I_2}\right].$$

Ответ: $P_1 = 5$ Вт.

3.98. Определите ток короткого замыкания $I_{кз}$ для источника ЭДС, если полезная мощность P_1 при токе в цепи $I_1 = 5$ А равна 300 Вт, а при токе $I_2 = 1$ А — полезная мощность $P_2 = 100$ Вт.

Дано: $I_1 = 5$ А; $P_1 = 300$ Вт; $I_2 = 1$ А; $P_2 = 100$ Вт.

Найти: $I_{кз}$.

Решение. Ток короткого замыкания — характеристика источника ЭДС

$$I_{кз} = \frac{\mathscr{E}}{r}, \qquad (1)$$

где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника; r — его внутреннее сопротивление. Полезная мощность

$$P = IU, \qquad (2)$$

где U — падение напряжения на внешнем сопротивлении или напряжение на зажимах источника.

Падение напряжения на зажимах источника в первом и втором случаях

$$U_1 = \mathscr{E} - I_1 r = \frac{P_1}{I_1} \text{ и } U_2 = \mathscr{E} - I_2 r = \frac{P_2}{I_2}$$

[учли формулу (2)], откуда, вычитая второе уравнение из первого,

$$\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2} = (\mathscr{E} - I_1 r) - (\mathscr{E} - I_2 r) = (I_2 - I_1) r.$$

Внутреннее сопротивление

$$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}. \tag{3}$$

ЭДС источника

$$\tilde{o} = U_1 + I_1 r = \frac{P_1}{I_1} + \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_2 (I_2 - I_1)}. \tag{4}$$

Подставив выражения (3) и (4) в формулу (1), найдем искомый ток короткого замыкания

$$I_{\text{кз}} = \frac{P_1 I_2 (I_2 - I_1)}{P_1 I_2 - P_2 I_1} + I_1. \tag{4}$$

Ответ: $I_{\text{кз}} = 11$ А.

3.99. В цепь, состоящую из источника ЭДС и резистора сопротивлением $R = 10$ Ом, включают вольтметр, сначала параллельно, а затем последовательно резистору, причем показания вольтметра одинаковы. Определите внутреннее сопротивление r источника ЭДС, если сопротивление вольтметра $R_V = 500$ Ом.

Дано: $R = 10$ Ом; $R_V = 500$ Ом; $U_1 = U_2$.

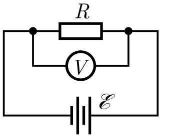
Найти: r.

Решение. Согласно условию задачи, вольтметр один раз подключают к резистору параллельно (рис. *а*), второй — последовательно (рис. *б*), причем его показания одинаковы.

Силу тока найдем согласно закону Ома для замкнутой цепи:

— при *параллельном* соединении

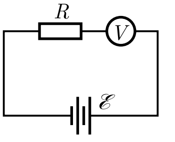
$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{\dfrac{R R_V}{R + R_V} + r},$$



а

— при *последовательном* соединении

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R + R_V + r},$$



б

где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника.

Падение напряжения на вольтметре

— при *параллельном* соединении

$$U_1 = \frac{\mathscr{E}}{\dfrac{R R_V}{R + R_V} + r} \frac{R R_V}{R + R_V} \tag{1}$$

($\dfrac{RR_V}{R+R_V}$ — сопротивление параллельно соединенных вольтметра и резистора);
— при *последовательном* соединении

$$U_2 = \frac{\mathscr{E}}{R+R_V+r} R_V. \tag{2}$$

Приравняв выражения (1) и (2), согласно условию $U_1 = U_2$, получим

$$\frac{RR_V}{\left(\dfrac{RR_V}{R+R_V}+r\right)(R+R_V)} = \frac{R_V}{R+R_V+r} \quad \text{или} \quad \frac{R}{RR_V+Rr+R_Vr} = \frac{1}{R+R_V+r},$$

откуда после элементарных преобразований искомое внутреннее сопротивление

$$r = \frac{R^2}{R_V}.$$

Ответ: $r = 0{,}2$ Ом.

3.100. Источник ЭДС вначале замыкают на резистор сопротивлением R_1, а затем — на резистор сопротивлением R_2, при этом в обоих случаях выделяется одинаковое количество теплоты. Определите внутреннее сопротивление r источника ЭДС.

Дано: R_1; R_2; $Q_1 = Q_2$.

Найти: r.

Решение. Согласно закону Джоуля—Ленца, за время t в резисторе сопротивлением R_1 выделяется теплота

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t = \frac{\mathscr{E}^2 R_1 t}{(R_1+r)^2} \tag{1}$$

(учли, что, согласно закону Ома для замкнутой цепи, $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1+r}$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника). Аналогично

$$Q_2 = I_2^2 R_2 t = \frac{\mathscr{E}^2 R_2 t}{(R_2+r)^2}. \tag{2}$$

Согласно условию задачи, $Q_1 = Q_2$, т. е., приравняв (1) и (2), получаем

$$\frac{\mathscr{E}^2 R_1 t}{(R_1+r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2 R_2 t}{(R_2+r)^2} \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{(R_1+r)^2} = \frac{R_2}{(R_2+r)^2},$$

откуда искомое внутреннее сопротивление

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Ответ: $r = \sqrt{R_1 R_2}$.

3.101. Из 200 одинаковых источников ЭДС составлена батарея так, что имеется n соединенных последовательно групп, в каждой из которых содержится m источников, соединенных параллельно. Внутреннее сопротивление r_1 каждого из элементов равно 2 Ом. Батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 98$ Ом. Определите значения n и m, при которых сила тока в цепи максимальна.

Дано: $k = 200$; $r_1 = 2$ Ом; $R = 98$ Ом.

Найти: n; m.

Решение. Ток в цепи максимален, если максимальна мощность во внешней цепи. Мощность, развиваемая во внешней цепи,

$$P = \mathscr{E}I - I^2 r,$$

где $\mathscr{E} = n\mathscr{E}_1$ — ЭДС батареи ($\mathscr{E}_1$ — ЭДС каждого из источников); $r = \dfrac{nr_1}{m}$ — внутреннее сопротивление батареи (n и m — соответственно число последовательно и параллельно соединенных источников ЭДС). Тогда

$$P = n\mathscr{E}_1 I - I^2 \frac{nr_1}{m}.$$

Сила тока $I = I_{\max}$ при условии $\dfrac{\partial P}{\partial I} = 0$:

$$\frac{\partial P}{\partial I} = n\mathscr{E}_1 - 2I\frac{nr_1}{m} = 0. \qquad (1)$$

Согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \frac{n\mathscr{E}_1}{R + \dfrac{nr_1}{m}} = \frac{nm\mathscr{E}_1}{mR + nr_1}. \qquad (2)$$

Подставив значение I из формулы (2) в выражение (1), после элементарных преобразований найдем

$$mR = nr_1. \qquad (3)$$

Поскольку $n + m = k$, то, учитывая (3), найдем

$$n = \frac{kR}{R + r_1}.$$

Ответ: $n = 196$; $m = 4$.

3.102. Определите внутреннее сопротивление и ЭДС батареи, образованной тремя источниками ЭДС (см. рисунок), если ЭДС источников $\mathscr{E}_1 = 2$ В, $\mathscr{E}_2 = 4$ В и $\mathscr{E}_3 = 6$ В, а их внутренние сопротивления одинаковы и равны 0,2 Ом.

Дано: $\mathscr{E}_1 = 2$ В; $\mathscr{E}_2 = 4$ В; $\mathscr{E}_3 = 6$ В; $r_1 = r_2 = r_3 = r = 0{,}2$ Ом.

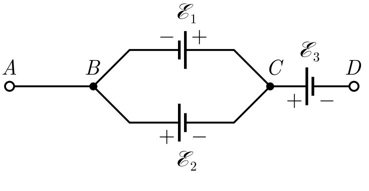
Найти: $r_б$; $\mathscr{E}_б$.

Решение. Общее внутреннее сопротивление на участке BC (источники $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ соединены параллельно)

$$\frac{1}{r_{BC}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r},$$

откуда

$$r_{BC} = \frac{r}{2}. \qquad (1)$$



Внутреннее сопротивление батареи (она подключена между точками A и D)

$$r_б = r_{BC} + r_3 = \frac{r}{2} + r = \frac{3}{2} r$$

[учли (1)].

Для участка BC можем записать

$$\frac{\mathscr{E}_{BC}}{r_{BC}} = \frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2} = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{r},$$

откуда

$$\mathscr{E}_{BC} = \frac{r_{BC}(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{r} = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{2}$$

[учли (1)].

Искомая ЭДС батареи

$$\mathscr{E}_б = \mathscr{E}_{BC} + \mathscr{E}_3 = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{2} + \mathscr{E}_3.$$

Из рисунка следует, что если считать ЭДС $\mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E}_3$ положительной, то ЭДС $\mathscr{E}_1$ — отрицательна.

Ответ: $r_б = 0{,}3$ Ом; $\mathscr{E}_б = 7$ В.

3.103. Два источника, ЭДС которых $\mathscr{E}_1 = 2$ В и $\mathscr{E}_2 = 4$ В, соединены, как показано на рис. *а*. Внешнее сопротивление $R = 1$ Ом, а внутренние сопротивления источников $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом. Определите силы токов, протекающих через источники и внешнее сопротивление.

Дано: $\mathscr{E}_1 = 2$ В; $\mathscr{E}_2 = 4$ В; $R = 1$ Ом; $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом.

Найти: I_1; I_2; I_R.

Решение. Выберем направления токов, как указано на рис. *б*. Согласно первому правилу Кирхгофа для узла A:

$$I_R = I_1 + I_2. \tag{1}$$

Второе правило Кирхгофа для замкнутых контуров $\mathscr{E}_1$, R и $\mathscr{E}_2$, R

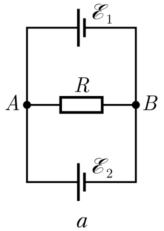
$$I_1 r_1 + I_R R = \mathscr{E}_1, \tag{2}$$

$$I_2 r_2 + I_R R = \mathscr{E}_2. \tag{3}$$

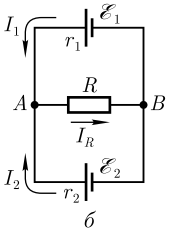
Решая уравнения (1)—(3), получим (учли, что $r_1 = r_2 = r$)

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 - I_R R}{r}, \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}_2 - I_R R}{r},$$

$$I_R = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{r + 2R}.$$



а



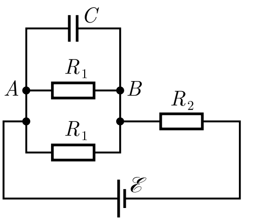
б

Вычисляя, получаем $I_R = 2{,}4$ А; $I_1 = -0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А.

Знак «–» означает, что ток I_1 течет в направлении, обратном выбранному на рис. *б*.

Ответ: $I_1 = 0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А; $I_R = 2{,}4$ А.

3.104. Два одинаковых резистора сопротивлением $R_1 = 10$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 20$ Ом подключены к источнику ЭДС (см. рисунок). К участку AB подключен плоский конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ. Заряд Q на обкладках конденсатора равен 2 мкКл. Определите ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением.



Дано: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $C = 0{,}1$ мкФ (10^{-7} Ф); $Q = 2$ мкКл ($2 \cdot 10^{-6}$ Кл).

Найти: $\mathscr{E}$.

Решение. ЭДС источника

$$\mathscr{E} = U_1 + U_2, \tag{1}$$

где U_1 — напряжение между обкладками конденсатора (равно напряжению на параллельно включенных резисторах сопротивлением R_1); U_2 — падение напряжения на резисторе сопротивлением R_2.

Учитывая, что резисторы сопротивлением R_1 включены параллельно и их сопротивления равны,

$$U_1 = I\frac{R_1}{2} = \frac{Q}{C}, \tag{2}$$

где I — сила тока в общей цепи, имеем

$$I = \frac{2Q}{CR_1}. \tag{3}$$

Падение напряжения

$$U_2 = IR_2 = \frac{2QR_2}{CR_1} \tag{4}$$

[учли формулу (3)]. Подставив выражения (2) и (4) в формулу (1), найдем искомую ЭДС источника:

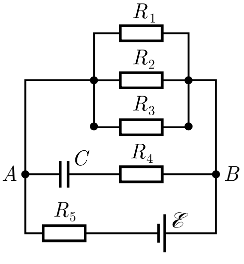
$$\mathscr{E} = \frac{Q}{C} + \frac{2QR_2}{CR_1} = \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right).$$

Ответ: $\mathscr{E} = 100$ В.

3.105. Определите разность потенциалов на обкладках конденсатора в схеме, приведенной на рисунке. ЭДС источника $\mathscr{E} = 20$ В, сопротивления всех резисторов равны. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано: $\mathscr{E} = 20$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$.

Найти: U.



Решение. Сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно велико, поэтому через резистор сопротивлением R_4 ток протекать не будет. Следовательно, разность потенциалов между обкладками конденсатора определяется падением напряжения на участке AB, состоящем из трех параллельно включенных резисторов сопротивлением R_1, R_2 и R_3:

$$U = IR, \tag{1}$$

где R — результирующее сопротивление трех сопротивлений R_1, R_2 и R_3. Ток в общей цепи, согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_5 + R}, \tag{2}$$

где

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{R_1},$$

откуда

$$R = \frac{R_1}{3}. \tag{3}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая (3), найдем искомую разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$U = \frac{\mathscr{E}}{R_5 + R} R = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + \frac{R_1}{3}} \frac{R_1}{3} = \frac{\mathscr{E}}{4}.$$

Ответ: $U = 5$ В.

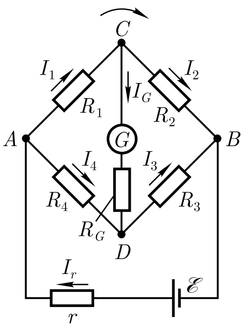
3.106. В приведенной на рисунке электрической схеме моста Уитстона заданы сопротивления R_2, R_3, R_4, электродвижущая сила $\mathscr{E}$ источника тока и его внутреннее сопротивление r. Определите сопротивление R_1, если известно, что ток в цепи гальванометра G отсутствует ($I_G = 0$). Сопротивление гальванометра равно R_G.

Дано: R_2; R_3; R_4; $\mathscr{E}$; r; $I_G = 0$; R_G.

Найти: R_1.

Решение. Выберем направление токов в различных ветвях контура и направление обхода, как показано на рисунке. Для узлов A, B и C, применяя первое правило Кирхгофа, получаем

$$\begin{cases} I_r - I_1 - I_4 = 0; \\ I_2 + I_3 - I_r = 0; \\ I_1 - I_2 - I_G = 0. \end{cases} \tag{1}$$



Для контуров $ACB\mathscr{E}A$, $ACDA$ и $CBDC$, согласно второму правилу Кирхгофа, можно записать:

$$\begin{cases} I_r r + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathscr{E}; \\ I_1 R_1 + I_G R_G - I_4 R_4 = 0; \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_G R_G = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Согласно условию задачи, $I_G = 0$ (ток в цепи гальванометра отсутствует), поэтому из (1) найдем

$$I_1 = I_2, I_3 = I_4, \tag{3}$$

а из (2) получим

$$I_1R_1 = I_4R_4,\ I_2R_2 = I_3R_3. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3},$$

откуда искомое сопротивление

$$R_1 = \frac{R_2R_4}{R_3}.$$

Таким образом, в случае *равновесного моста* ($I_G = 0$) при определении искомого сопротивления R_1 ЭДС батареи, сопротивления батареи и гальванометра роли не играют.

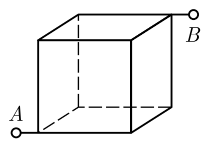
Ответ: $R_1 = \dfrac{R_2R_4}{R_3}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.107. Определите, за какое время сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 3$ А, если заряд Q, прошедший по проводнику, равен 6 Кл. [$\tau = 4$ с]

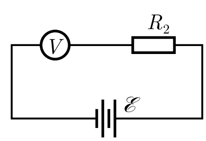
3.108. Определите длину прямого провода с током $I = 10$ А, если суммарный импульс электронов в проводе $p = 7 \cdot 10^{-9}$ кг · м/с. [$l = \dfrac{pe}{mI} = 123$ м, m — масса электрона; e — заряд электрона]

3.109. Определите сопротивление проволочного каркаса, имеющего форму куба, если он включен в цепь между точками A и B. Сопротивление каждого ребра каркаса $r = 6$ Ом. [$R = \dfrac{5r}{6} = 5$ Ом]

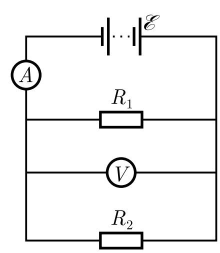


3.110. Плотность тока j в алюминиевом проводнике равна 1 А/мм^2. Определите напряженность E электрического поля в этом проводнике. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм · м. [$E = 26$ мВ/м]

3.111. В цепи (см. рисунок) вольтметр, включенный последовательно с резистором сопротивлением $R_1 = 5$ кОм, показал напряжение $U_1 = 50$ В, а с резистором сопротивлением R_2 — напряжение $U_2 = 10$ В. Определите сопротивление R_2, если ЭДС источника тока $\mathscr{E} = 100$ В. [$R_2 = \dfrac{U_1R_1(\mathscr{E} - U_2)}{U_2(\mathscr{E} - U_1)} = 45$ кОм]



3.112. Определите показания амперметра и вольтметра в схеме, приведенной на рисунке. Сопротивление вольтметра $R_V = 500$ Ом, ЭДС батареи $\mathscr{E} = 100$ В, $R_1 = 200$ Ом и $R_2 = 300$ Ом. Сопротивлением батареи и амперметра пренебречь. [1,03 А; 100 В]

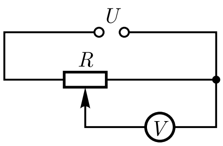


3.113. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 5$ Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 3$ А за время $\tau = 6$ с. Определите выделившееся в проводнике за это время количество теплоты. [$Q = 90$ Дж]

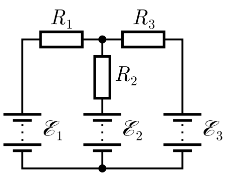
3.114. Определите тепловую мощность тока w, если плотность j электрического тока в алюминиевом проводе равна 1 А/мм^2. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм · м. [$w = 26$ кДж/(м$^3 \cdot$ с)]

3.115. Определите ток короткого замыкания $I_{\text{кз}}$, если при замыкании источника ЭДС на внешнее сопротивление R_1 в цепи течет ток I_1, а при замыкании на внешнее сопротивление R_2 — ток I_2. [$I_{\text{кз}} = \dfrac{(R_1 - R_2)I_1 I_2}{I_1 R_1 - I_2 R_2}$]

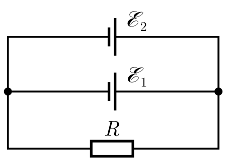
3.116. В цепь, состоящую из источника ЭДС и резистора сопротивлением $R = 10$ Ом, включают вольтметр, сопротивление которого $R_V = 500$ Ом, один раз последовательно резистору, другой раз — параллельно. Определите внутреннее сопротивление источника, если показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. [$r = \dfrac{R^2}{R_V} = 0{,}2$ Ом]



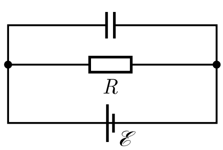
3.117. В схеме (см. рисунок) сопротивление потенциометра $R = 1000$ Ом, внутреннее сопротивление вольтметра $R_V = 2500$ Ом, $U = 110$ В. Определите показания вольтметра, если подвижный контакт находится посередине потенциометра. [$U_V = \dfrac{2R_V U}{R + 4R_V} = 50$ В]



3.118. В схеме (см. рисунок) $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3$, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, падение напряжения U_2 на сопротивлении R_2 равно 6 В. Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определите: 1) силу тока на всех участках цепи; 2) сопротивление R_3. [1) $I_1 = 0{,}3$ А; $I_2 = 0{,}5$ А; $I_3 = 0{,}8$ А; 2) $R_3 = 7{,}5$ Ом]



3.119. Два источника тока, ЭДС которых $\mathscr{E}_1 = 3$ В и $\mathscr{E}_2 = 2$ В, а внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2$ Ом и $r_2 = 0{,}5$ Ом, включены параллельно резистору (см. рисунок) сопротивлением $R = 5$ Ом. Определите силу тока I через резистор. [$I = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{R r_1 + R r_2 + r_1 r_2} = 0{,}528$ А]



3.120. В схеме (см. рисунок) напряженность электростатического поля в плоском конденсаторе $E = 2$ кВ/м, внешнее сопротивление $R = 5$ Ом, внутреннее сопротивление источника ЭДС $r = 1$ Ом, расстояние между обкладками конденсатора $d = 0{,}1$ см. Определите ЭДС источника тока. [$\mathscr{E} = \dfrac{(R + r)Ed}{R} = 2{,}4$ В]

3.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Основные законы и формулы

• Магнитный момент контура с током

$$\vec{p}_{\text{m}} = IS\vec{n}$$

[S — площадь контура с током; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура].

• Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = [\vec{p}_{\mathrm{m}}, \vec{B}]$$

[$\vec{B}$ — магнитная индукция; $\vec{p}_{\mathrm{m}}$ — магнитный момент контура с током].

• Модуль механического момента

$$M = p_{\mathrm{m}} B \sin\alpha$$

[α — угол между нормалью к плоскости контура и вектором $\vec{B}$].

• Связь между магнитной индукцией $\vec{B}$ и напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

[μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды].

• Закон Био — Савара — Лапласа

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

[$\mathrm{d}\vec{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемая элементом длиной $\mathrm{d}\vec{l}$ проводника с током I; $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от $\mathrm{d}\vec{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция].

• Модуль вектора $\mathrm{d}\vec{B}$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I \,\mathrm{d}l \sin\alpha}{r^2}$$

[α — угол между векторами $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{r}$].

• Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

[$\vec{B}$ — магнитная индукция результирующего поля; $\vec{B}_i$ — магнитные индукции складываемых полей].

• Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

[R — расстояние от оси проводника; I — сила тока в проводнике].

• Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}$$

[R — радиус проводника; I — сила тока в проводнике].

• Закон Ампера

$$\mathrm{d}\vec{F} = I[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{B}]$$

[$\mathrm{d}\vec{F}$ — сила, действующая на элемент длиной $\mathrm{d}\vec{l}$ проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$].

Модуль вектора $\mathrm{d}\vec{F}$

$$\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}l \sin\alpha$$

[α — угол между векторами $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{B}$].

• Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}\,\mathrm{d}l$$

[R — расстояние между проводниками; $\mathrm{d}l$ — отрезок проводника].

• Магнитная индукция поля точечного заряда Q, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Q[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}$$

[$\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда к точке, в которой определяется индукция].

Модуль вектора $\vec{B}$

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}\sin\alpha$$

[α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$].

• Сила Лоренца

$$\vec{F} = Q[\vec{v},\vec{B}]$$

[$\vec{F}$ — сила, действующая на заряд Q, движущийся в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$].

Модуль вектора $\vec{F}$

$$F = QvB\sin\alpha$$

[α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$].

• Формула Лоренца

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{v},\vec{B}]$$

[$\vec{F}$ — результирующая сила, действующая на движущийся заряд Q, если на него действуют электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ и магнитное поле индукцией $\vec{B}$].

• Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d}$$

[B — магнитная индукция; I — сила тока; d — толщина пластинки; $R = \dfrac{1}{en}$ — постоянная Холла (n — концентрация электронов)].

• Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)

$$\oint\limits_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint\limits_L B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0\sum_{k=1}^{n} I_k$$

[$\mathrm{d}\vec{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $B_l = B\cos\alpha$ — составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α — угол между векторами $\vec{B}$ и $\mathrm{d}\vec{l}$; $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k$ — алгебраическая сумма n токов, охватываемых контуром].

• Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

[I — сила тока в соленоиде; l — длина соленоида].

• Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}$$

[N — число витков тороида; I — сила тока; r — внутренний радиус тороида].

• Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток):

$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = B_n \mathrm{d}S \text{ (сквозь площадку } \mathrm{d}S\text{)},$$

$$\Phi_B = \int\limits_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_S B_n \mathrm{d}S \text{ (сквозь поверхность } S\text{)},$$

$$\Phi_B = \oint\limits_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_S B_n \mathrm{d}S \text{ (сквозь замкнутую поверхность } S\text{)}$$

[$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ — вектор, модуль которого равен $\mathrm{d}S$, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке; B_n — проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к площадке].

• Элементарная работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$\mathrm{d}A = I\mathrm{d}\Phi$$

[$\mathrm{d}\Phi$ — магнитный поток, пересекаемый движущимся проводником].

• Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

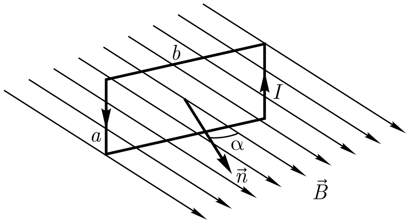
$$\mathrm{d}A = I\mathrm{d}\Phi'$$

[$\mathrm{d}\Phi'$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром].

Примеры решения задач

3.121. Прямоугольная рамка со сторонами $a = 5$ см и $b = 10$ см, состоящая из $N = 20$ витков, помещена во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Нормаль к рамке составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Определите вращающий момент сил, действующих на рамку, если по ней течет ток $I = 2$ А.

Дано: $a = 5$ см $(5 \cdot 10^{-2}$ м$)$; $b = 10$ см $(10^{-1}$ м$)$; $N = 20$; $B = 0{,}2$ Тл; $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $I = 2$ А.
Найти: M.



Решение. Механический момент, действующий на рамку с током, помещенную в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = [\vec{p}_{\mathrm{m}}, \vec{B}],$$

$\vec{p}_{\mathrm{m}}$ — магнитный момент рамки с током. Модуль

$$M = p_{\mathrm{m}} B \sin\alpha.$$

Поскольку рамка состоит из N витков, то

$$M = N p_{\mathrm{m}} B \sin\alpha, \tag{1}$$

где магнитный момент рамки с током

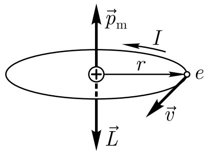
$$p_{\mathrm{m}} = IS = Iab. \tag{2}$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомый вращающий момент

$$M = NIBab \sin\alpha.$$

Ответ: $M = 0{,}02$ Н · м.

3.122. Принимая, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите, определите отношение магнитного момента p_{m} эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона.



Дано: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: $\dfrac{p_{\mathrm{m}}}{L}$.

Решение. Электрон, движущийся в атоме водорода по круговой орбите, эквивалентен круговому току, поэтому он обладает орбитальным магнитным моментом $\vec{p}_{\mathrm{m}} = IS\vec{n}$, где $I = e\nu$ — сила тока (ν — частота вращения электрона по орбите); S — площадь контура; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура. Вектор $\vec{p}_{\mathrm{m}}$ направлен в соответствии с правилом правого винта перпендикулярно плоскости орбиты электрона, как показано на рисунке. Модуль вектора орбитального магнитного момента

$$p_{\mathrm{m}} = IS = e\nu S. \tag{1}$$

С другой стороны, движущийся по орбите электрон обладает орбитальным механическим моментом $\vec{L}$, направление которого также определяется по правилу правого винта (см. рисунок). Модуль орбитального механического момента

$$L = mvr = 2m\nu S \tag{2}$$

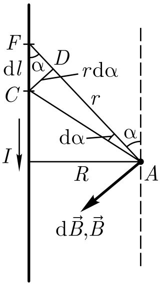
(учли, что $v = 2\pi\nu r$, где r — радиус орбиты; $S = \pi r^2$).

Из выражений (1) и (2) искомое отношение орбитальных моментов

$$\frac{p_{\mathrm{m}}}{L} = \frac{e\nu S}{2m\nu S} = \frac{e}{2m}.$$

Ответ: $\dfrac{p_{\mathrm{m}}}{L} = 87{,}8$ ГКл/кг.

3.123. Используя закон Био — Савара — Лапласа, определите магнитную индукцию B поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током I, в точке A, находящейся от оси проводника на расстоянии R.



Дано: I; R.

Найти: B.

Решение. Векторы $\mathrm{d}\vec{B}$ от всех элементов тока $\mathrm{d}l$ (см. рисунок) имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа к нам. Поэтому сложение векторов $\mathrm{d}\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей.

Согласно закону Био — Савара — Лапласа, элемент проводника $\mathrm{d}\vec{l}$ с током I создает магнитное поле с индукцией

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I[\mathrm{d}\vec{l},\vec{r}]}{r^3},$$

где $\mathrm{d}\vec{l}$ — вектор, по модулю равный длине $\mathrm{d}l$ элемента проводника и совпадающий по направлению с током; $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из элемента $\mathrm{d}\vec{l}$ проводника в точку A поля; r — модуль радиуса-вектора $\vec{r}$. Модуль вектора $\mathrm{d}\vec{B}$ определяется выражением

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}, \tag{1}$$

где α — угол между векторами $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{r}$.

В качестве постоянной интегрирования выберем угол α, выразив через него все остальные величины. Из рисунка следует, что

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}, \quad \mathrm{d}l = \frac{r\,\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha}$$

(радиус дуги CD вследствие малости $\mathrm{d}l$ равен r, и угол FDC по этой же причине можно считать прямым). Подставив эти выражения в (1), получим, что магнитная индукция, создаваемая одним элементом проводника, равна

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi R}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{2}$$

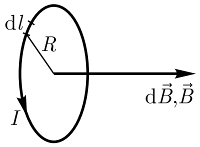
Так как угол α для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от 0 до π, то, согласно принципу суперпозиции и формуле (2),

$$B = \int\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R}\int\limits_0^{\pi}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R} = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\frac{I}{R}.$$

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0\mu}{2\pi}\dfrac{I}{R}$.



3.124. Используя закон Био — Савара — Лапласа, определите в вакууме магнитную индукцию B поля в центре кругового проводника радиусом $R = 10$ см, если сила тока I в проводнике равна 5 А.

Дано: $\mu = 1$; $R = 10$ см (0,1 м); $I = 5$ А.

Найти: B.

Решение. Как следует из рисунка, все элементы dl кругового проводника с током создают в его центре магнитные поля одинакового направления — вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов d$\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей.

Согласно закону Био — Савара — Лапласа (см. предыдущую задачу),

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}. \quad (1)$$

Поскольку все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ($\sin\alpha = 1$) и расстояние всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно R, то, согласно (1),

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}\,\mathrm{d}l.$$

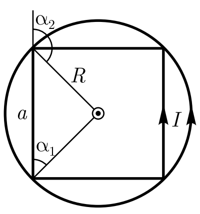
Тогда искомая магнитная индукция в центре кругового тока

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int \mathrm{d}l = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi R^2}2\pi R = \mu_0\mu\frac{I}{2R} = \mu_0\frac{I}{2R}$$

(учли, что $\mu = 1$).

Ответ: $B = 31{,}4$ мкТл.

3.125. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Определите, во сколько раз изменится индукция в центре контура, если проводнику придать форму квадрата, не изменяя силы тока в проводнике.



Решение. Вектор $\vec{B}_1$ в центре кругового тока направлен при выбранном направлении тока (см. рисунок), согласно правилу правого винта, перпендикулярно чертежу к нам (на рисунке это обозначено точкой в кружочке). Его модуль

$$B_1 = \mu_0\mu\frac{I}{2R}, \quad (1)$$

где I — сила тока; R — радиус кольца; μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды.

Сторона квадрата, вписанная в кольцо, равна $a = \dfrac{\pi R}{2}$ (длина окружности кольца $2\pi R$). Вектор $\vec{B}_2$ в центре квадрата направлен также перпендикулярно чертежу к нам. Магнитная индукция в центре квадрата равна сумме магнитных индукций, создаваемых каждой стороной квадрата. Тогда модуль B_2, согласно закону Био — Савара — Лапласа,

$$B_2 = 4\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{(a/2)}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0\mu}{\pi}\frac{I}{(a/2)}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0\mu}{\pi}\frac{I}{(a/2)}\cdot 2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{8\mu_0\mu I}{\pi^2 R}\cos\frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получим отношение

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{16\cos\dfrac{\pi}{4}}{\pi^2}.$$

Ответ: $\dfrac{B_2}{B_1} = 1{,}15.$

3.126. Определите магнитную индукцию на оси кругового контура на расстоянии $d = 3$ см от его плоскости, если радиус контура $R = 4$ см, а сила тока I в контуре равна 5 А.

Дано: $d = 3$ см ($3 \cdot 10^{-2}$ м); $R = 4$ см ($4 \cdot 10^{-2}$ м); $I = 5$ А.

Найти: B.

Решение. Согласно закону Био — Савара — Лапласа, магнитная индукция поля в вакууме, создаваемого элементом $\mathrm{d}\vec{l}$ проводника с током I,

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от $\mathrm{d}\vec{l}$ к точке A, а вектор $\mathrm{d}\vec{B}$ (см. рисунок) направлен, согласно правилу правого винта.

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, индукция в точке A

$$\vec{B} = \oint\limits_L \mathrm{d}\vec{B}, \tag{2}$$

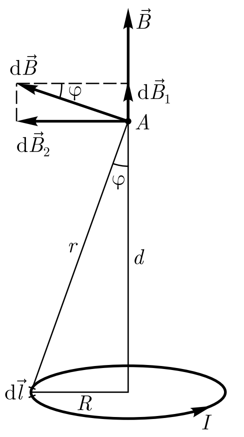
где интегрирование ведется по всем элементам кругового контура.

Разложив вектор $\mathrm{d}\vec{B}$ на два компонента — $\mathrm{d}\vec{B}_1$, перпендикулярный плоскости контура, и $\mathrm{d}\vec{B}_2$, параллельный ей, — получим

$$\mathrm{d}\vec{B} = \mathrm{d}\vec{B}_1 + \mathrm{d}\vec{B}_2.$$

Учитывая, что из соображений симметрии $\int\limits_L \mathrm{d}\vec{B}_2 = 0$, а векторы $\mathrm{d}\vec{B}_1$ от всех элементов $\mathrm{d}\vec{l}$ сонаправлены, интеграл (2) сведется к выражению

$$B = \int\limits_0^{2\pi R} \mathrm{d}B_1, \tag{3}$$



где, как следует из рисунка,

$$\mathrm{d}B_1 = \mathrm{d}B\sin\varphi. \tag{4}$$

Поскольку все элементы кругового контура перпендикулярны радиусу-вектору, то, согласно (1),

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{(R^2 + d^2)} \tag{5}$$

(учли, что $r = \sqrt{R^2 + d^2}$).

Из рисунка следует, что $\sin\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}}$. Подставив это выражение в формулу (4), а также учитывая (5), найдем, согласно (3), искомую магнитную индукцию на оси кругового контура

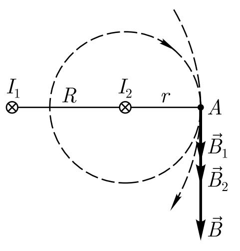
$$B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR\mathrm{d}l}{(R^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2+d^2)^{3/2}}.$$

Ответ: $B = 40{,}2$ мкТл.

3.127. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, находящимся в вакууме на расстоянии $R = 30$ см, текут одинаковые токи одного направления. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого токами в точке A, лежащей на прямой, соединяющей проводники и лежащей на расстоянии $r = 20$ см правее правого провода (см. рисунок). Сила тока в проводниках равна 20 А.

Дано: $\mu = 1$; $R = 30$ см (0,3 м); $r = 20$ см (0,2 м); $I_1 = I_2 = I = 20$ А.

Найти: B.



Решение. Пусть токи направлены перпендикулярно плоскости чертежа от нас, что обозначено на рисунке крестиками. Линии магнитной индукции замкнуты и охватывают проводники с токами. Их направление задается правилом правого винта. Вектор $\vec{B}$ в каждой точке направлен по касательной к линии магнитной индукции (см. рисунок).

Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция результирующего поля в точке A

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ — магнитные индукции полей в этой точке, создаваемые первым и вторым проводниками. Векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ сонаправлены, поэтому сложение векторов можно заменить сложением их модулей

$$B = B_1 + B_2. \qquad (1)$$

Магнитная индукция полей, создаваемых бесконечно длинными прямыми проводниками с токами I_1 и I_2,

$$B_1 = \mu_0\mu \frac{I_1}{2\pi(R+r)}, \quad B_2 = \mu_0\mu \frac{I_2}{2\pi r}, \qquad (2)$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды.

Подставив выражения (2) в формулу (1) и учитывая, что $I_1 = I_2 = I$ и $\mu = 1$ (для вакуума), получим искомое выражение для магнитной индукции в точке A:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{R+r} + \frac{1}{r}\right).$$

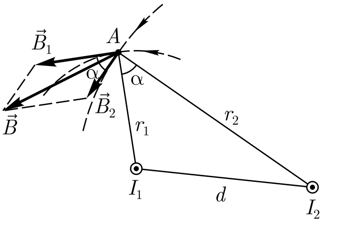
Ответ: $B = 28$ мкТл.

3.128. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам в вакууме, расстояние между которыми $d = 15$ см, текут токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А в одном направлении. Определите магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1 = 10$ см от первого и $r_2 = 20$ см от второго проводников.

Дано: $\mu = 1$; $d = 15$ см (0,15 м); $I_1 = 70$ А; $I_2 = 50$ А; $r_1 = 10$ см (0,1 м); $r_2 = 20$ см (0,2 м).

Найти: B.

Решение. Пусть токи направлены перпендикулярно плоскости чертежа к нам. Векторы магнитной индукции направлены по касательной к линиям магнитной индукции.



Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в точке A (см. рисунок)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ — соответственно магнитные индукции полей, создаваемые проводниками с токами I_1 и I_2 (направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ и токов I_1 и I_2 показаны на рисунке). Модуль вектора $\vec{B}$, по теореме косинусов,

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}, \tag{1}$$

где

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1};\ B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2};\ \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), найдем искомое B:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} + \frac{2I_1I_2}{r_1^2r_2^2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

Ответ: $B = 178$ мкТл.

3.129. Вычислите значение магнитной постоянной μ_0.

Решение. Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных проводников с токами I_1 и I_2

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}\,\mathrm{d}l,$$

где R — расстояние между проводниками; $\mathrm{d}l$ — отрезок проводника.

Сила взаимодействия на единицу длины проводника в вакууме ($\mu = 1$)

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}. \tag{1}$$

Для нахождения численного значения μ_0 воспользуемся определением ампера, согласно которому при $I_1 = I_2 = 1$ А и $R = 1$ м

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = 2\cdot 10^{-7}\ \text{Н/м}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомое значение

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Н/А}^2 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}.$$

Ответ: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м.

3.130. По прямому горизонтальному проводу пропускают ток $I_1 = 100$ А. Под этим проводом на расстоянии $R = 1$ см расположен второй, параллельный ему медный провод, по которому пропускают ток $I_2 = 50$ А. Определите, какова должна быть площадь поперечного сечения второго провода, чтобы он удерживался в состоянии равновесия незакрепленным. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3.

Дано: $I_1 = 100$ А; $R = 1$ см (10^{-2} м); $I_2 = 50$ А; $\rho = 8{,}93$ г/см^3 ($8{,}93 \cdot 10^3$ кг/м^3).

Найти: S.

Решение. Сила взаимодействия двух параллельных прямолинейных проводников в вакууме, приходящаяся на отрезок $\mathrm{d}l$ проводника,

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R}\mathrm{d}l, \qquad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

Вес этого участка провода

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}m \cdot g = \rho g \mathrm{d}V = \rho g S \mathrm{d}l, \qquad (2)$$

где S — площадь поперечного сечения второго провода; g — ускорение свободного падения.

По условию задачи

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}F,$$

т. е., приравняв выражения (1) и (2),

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R}\mathrm{d}l = \rho g S \mathrm{d}l,$$

найдем искомую площадь поперечного сечения второго провода:

$$S = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R\rho g}.$$

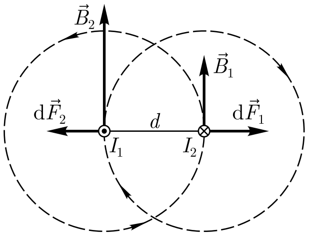
Ответ: $S = 1{,}14$ мм^2.

3.131. По двум параллельным прямым проводникам длиной $l = 2$ м каждый, находящимся в вакууме на расстоянии $d = 10$ см друг от друга, в противоположных направлениях текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А. Определите силу взаимодействия токов.

Дано: $l = 2$ м; $d = 10$ см (0,1 м); $I_1 = 50$ А; $I_2 = 100$ А.

Найти: F.

Решение. Согласно закону Ампера, на каждый элемент проводника длиной $\mathrm{d}l$ с током I_2 действует в магнитном поле, создаваемом током I_1, сила



$$\mathrm{d}F_1 = I_2 B_1 \mathrm{d}l \qquad (1)$$

(ее направление определено по правилу левой руки и указано на рисунке). Аналогичные рассуждения (ток I_1 находится в магнитном поле, создаваемом током I_2) приводят к выражению

$$\mathrm{d}F_2 = I_1 B_2 \mathrm{d}l. \qquad (2)$$

Модули магнитных индукций B_1 и B_2 (направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ показаны на рисунке) определяются соотношениями

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}; \quad B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d}.$$

Подставив эти выражения в (1) и (2), получим, что по модулю

$$\mathrm{d}F_1 = \mathrm{d}F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,\mathrm{d}l = \mathrm{d}F \tag{3}$$

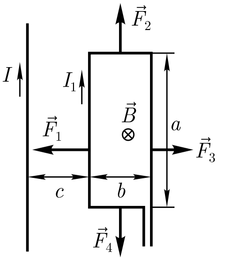
(направления сил указаны на рисунке).

Проинтегрировав выражение (3), найдем искомую силу взаимодействия токов:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\int_0^l \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,l.$$

Ответ: $F = 20$ мН.

3.132. В одной плоскости с бесконечно прямым проводником с током $I = 10$ А расположена прямоугольная проволочная рамка (стороны $a = 25$ см, $b = 10$ см), по которой протекает ток $I_1 = 2$ А. Длинные стороны рамки параллельны прямому току, причем ближайшая из них находится от прямого тока на расстоянии $c = 10$ см и ток в ней сонаправлен току I. Определите силы, действующие на каждую из сторон рамки.



Дано: $I = 10$ А; $a = 25$ см (0,25 м); $b = 10$ см (0,1 м); $I_1 = 2$ А; $c = 10$ см (0,1 м).

Найти: F_1; F_2; F_3; F_4.

Решение. Прямоугольная рамка находится в неоднородном поле прямого тока с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{1}$$

(рассматриваем случай вакуума), где r — расстояние от прямого тока до рассматриваемой точки.

Сила, с которой действует поле прямого тока, может быть найдена суммированием элементарных сил, определяемых законом Ампера,

$$\mathrm{d}\vec{F} = I[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{B}].$$

Вектор $\vec{B}$ в пределах рамки направлен перпендикулярно ее плоскости за чертеж, и в пределах каждой стороны угол $\widehat{d\vec{l}, \vec{B}} = \frac{\pi}{2}$. Это означает, что в пределах одной стороны элементарные силы параллельны друг другу и сложение векторов можно заменить сложением их модулей:

$$F = \int_l \mathrm{d}F = \int_l I_1 B\,\mathrm{d}l, \tag{2}$$

где интегрирование ведется по соответствующей стороне рамки.

Короткие стороны рамки расположены одинаково относительно провода, а потому действующие на них силы численно равны, но направлены противоположно. Их направление, впрочем как и направление других сил (см. рисунок), определяется по правилу левой руки. Вдоль каждой из коротких сторон прямоугольника магнитная индукция изменяется [см. формулу (1)]. Тогда, произведя интегрирование [с учетом (2)],

$$F_2 = F_4 = \int\limits_c^{c+b} \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi l}\,\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi}\ln\frac{c+b}{c}.$$

Длинные стороны рамки параллельны прямому току, находясь от него соответственно на расстояниях c и $c + b$. Тогда

$$F_1 = \int\limits_0^a I_1 B_1 \mathrm{d}l = \int\limits_0^a \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi c}\,\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi c};$$

$$F_3 = \int\limits_0^a I_1 B_2 \mathrm{d}l = \int\limits_0^a \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi(c+b)}\,\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi(c+b)},$$

где $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi c}$ и $B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(c+b)}$.

Ответ: $F_1 = 10$ мкН; $F_2 = 2{,}77$ мкН; $F_3 = 5$ мкН; $F_4 = 2{,}77$ мкН.

3.133. В однородном магнитном поле ($B = 1$ мТл) в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, расположено тонкое проволочное полукольцо длиной $l = 50$ см, по которому течет ток $I = 5$ А. Определите результирующую силу, действующую на полукольцо.

Дано: $B = 1$ мТл (10^{-3} Тл); $l = 50$ см (0,5 м); $I = 5$ А.

Найти: F.

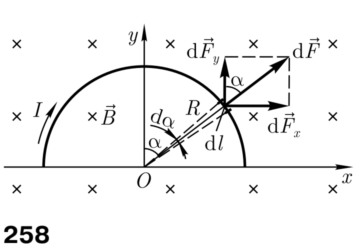
Решение. Согласно условию задачи, полукольцо расположили (см. рисунок) перпендикулярно линиям магнитной индукции (вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно чертежу от нас, что обозначено крестиками). На полукольце выделим малый элемент $\mathrm{d}l$ с током I. На этот элемент будет действовать по закону Ампера сила

$$\mathrm{d}\vec{F} = I[\mathrm{d}\vec{l}, \vec{B}], \tag{1}$$

направление которой задается правилом левой руки (см. рисунок).

По условию задачи во всех точках полукольца угол между $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{B}$ равен $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому уравнение (1) в скалярной форме примет вид

$$\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}l. \tag{2}$$



Все элементарные силы $\mathrm{d}\vec{F}$ (при указанном на рисунке направлении тока они растягивают кольцо) лежат в одной плоскости, совпадающей с плоскостью рисунка, однако при переходе от одного элемента полукольца к другому их направление меняется (правда, они всегда направлены вдоль радиуса полукольца). Для нахождения результирующей силы необходимо найти ее проекции на оси координат, которые (см. рисунок) выбраны, учитывая симметрию полукольца.

Тогда

$$F_x = \int_L \mathrm{d}F_x \ \text{ и } \ F_y = \int_L \mathrm{d}F_y,$$

где интеграл берется по полукольцу; $\mathrm{d}F_x$ и $\mathrm{d}F_y$ — проекции элементарных сил на оси координат; F_x и F_y — проекции искомой результирующей силы на те же оси координат.

Из соображений симметрии проекция результирующей силы на ось Ox

$$F_x = \int_L \mathrm{d}F_x = 0. \tag{3}$$

Проекция элементарной силы на ось Oy

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cos\alpha = IB\mathrm{d}l\cos\alpha = IBR\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

(учли формулу (2) и $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\alpha$, где R — радиус полукольца).

Проинтегрировав по полукольцу (из рисунка следует, что α изменяется от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $+\dfrac{\pi}{2}$), найдем

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} IBR\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = 2IBR. \tag{4}$$

Учитывая, что $R = \dfrac{l}{\pi}$, получим

$$F_y = \frac{2IBl}{\pi}.$$

Ясно, что сила $F = F_y$ [см. выражение (4)] и направлена вдоль оси Oy. Таким образом, искомая результирующая сила, действующая на полукольцо,

$$F = \frac{2IBl}{\pi}.$$

Ответ: $F = 1{,}59$ мН.

3.134. Электрон в вакууме движется прямолинейно с постоянной скоростью $v = 5$ км/с. Определите напряженность H магнитного поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии $r = 16$ нм от электрона и лежащей на прямой, проходящей через мгновенное положение электрона, под углом $\alpha = 30°$ к вектору скорости электрона.

Дано: $\mu = 1$; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл; $v = 5$ км/с ($5\cdot10^3$ м/с); $r = 16$ нм ($1{,}6\cdot10^{-8}$ м); $\alpha = 30°$.

Найти: H.

Решение. Связь между магнитной индукцией B и напряженностью H магнитного поля

$$B = \mu_0\mu H, \tag{1}$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды.

Магнитная индукция поля точечного заряда Q, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Q[\vec{v},\vec{r}]}{r^3},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда к точке, в которой определяется индукция. Модуль вектора $\vec{B}$ с учетом $Q = e$

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{ev}{r^2}\sin\alpha, \tag{2}$$

где α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$.

Из формул (1) и (2) найдем искомую напряженность магнитного поля

$$H = \frac{B}{\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu ev\sin\alpha}{4\pi\mu_0\mu r^2} = \frac{ev}{4\pi r^2}\sin\alpha.$$

Ответ: $H = 0{,}124$ А/м.

3.135. Определите угловую скорость ω вращения протона по окружности, которую он описывает в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}03$ Тл.

Дано: $Q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл; $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг; $B = 0{,}03$ Тл.

Найти: ω.

Решение. Угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{1}$$

где период вращения

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{2}$$

(r — радиус окружности; v — скорость протона).

Сила Лоренца, действующая на заряд Q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$,

$$\vec{F}_Л = Q[\vec{v},\vec{B}].$$

Ее модуль

$$F_Л = QvB\sin\alpha,$$

где $\alpha = 90^\circ$ (в данной задаче $\vec{v}\perp\vec{B}$).

Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости и, следовательно, сообщает протону нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{r}$. По второму закону Ньютона, $F_Л = ma_n$, где $F_Л = QvB$. Тогда

$$\frac{mv^2}{r} = QvB. \tag{3}$$

Из формулы (3) найдем

$$v = \frac{QBr}{m}.$$

Подставив это выражение в формулу (2), найдем

$$T = \frac{2\pi m}{QB}. \tag{4}$$

Из выражений (1) и (4) найдем искомую угловую скорость

$$\omega = \frac{QB}{m}.$$

Ответ: $\omega = 2{,}87 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}$.

3.136. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 3$ мТл перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите: 1) силу, действующую на электрон; 2) радиус окружности, по которой электрон движется; 3) период обращения электрона.

Дано: $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $U = 1$ кВ (10^3 В); $B = 3$ мТл ($3 \cdot 10^{-3}$ Тл); $\alpha = 90°$.

Найти: 1) F; 2) R; 3) T.

Решение. При движении электрона в магнитном поле со скоростью v на него действует сила Лоренца

$$F_{\text{Л}} = evB\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$ (в нашем случае $\alpha = 90°$). Тогда

$$F_{\text{Л}} = evB. \tag{1}$$

При прохождении ускоряющей разности потенциалов U работа сил электростатического поля идет на сообщение электрону кинетической энергии $\frac{mv^2}{2} = eU$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}\,. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомую силу, действующую на электрон,

$$F_{\text{Л}} = eB\sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Из механики известно, что постоянная сила, перпендикулярная скорости, а ею и является сила Лоренца (1), вызывает движение по окружности. Она сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, где R — радиус окружности. По второму закону Ньютона $F = ma_n$, где $F = evB$. Тогда

$$\frac{mv^2}{R} = evB,$$

откуда искомый радиус окружности с учетом (2)

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}. \tag{3}$$

Период обращения электрона

$$T = \frac{2\pi R}{v}. \tag{4}$$

Подставив выражения (3) и (2) в формулу (4), найдем искомый период обращения электрона

$$T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Ответ: 1) $F = 9 \cdot 10^{-15}$ Н; 2) $R = 3{,}56$ см; 3) $T = 11{,}9$ нс.

3.137. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 30$ мТл, движется по окружности радиусом $R = 10$ см. Определите магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

Дано: $B = 30$ мТл ($3 \cdot 10^{-2}$ Тл); $R = 10$ см (0,1 м); $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: p_m.

Решение. Так как движение электрона по окружности эквивалентно круговому току, магнитный момент кругового тока

$$p_\mathrm{m} = IS = \frac{|e|}{T} S, \tag{1}$$

где e — заряд электрона; T — период обращения электрона; S — площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном; $T = \dfrac{2\pi R}{v}$ (v — скорость электрона); $S = \pi R^2$.

Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости и, следовательно, согласно второму закону Ньютона, сообщает электрону нормальное ускорение a_n:

$$ma_n = F_\text{Л}, \text{ или } \frac{mv^2}{R} = |e|vB. \tag{2}$$

Из выражения (2) получим, что скорость $v = \dfrac{|e|BR}{m}$. Тогда $T = \dfrac{2\pi m}{|e|B}$.

Подставив выражения для T и S в формулу (1), получим искомый магнитный момент эквивалентного кругового тока:

$$p_\mathrm{m} = \frac{|e^2|BR^2}{2m}.$$

Ответ: $p_\mathrm{m} = 4{,}21$ пА · м^2.

3.138. Как и во сколько раз отличаются радиусы кривизны траекторий протона и электрона, если они влетают в однородное магнитное поле с одинаковой скоростью перпендикулярно линиям магнитной индукции?

Дано: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $\alpha = 90°$; $v_p = v_e$.

Найти: $\dfrac{R_p}{R_e}$.

Решение. На движущуюся в магнитном поле заряженную частицу действует сила Лоренца

$$F_Л = QvB\sin\alpha,$$

где Q — заряд частицы (по условию задачи e); α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$ (по условию задачи $\alpha = 90°$), т. е. сила Лоренца постоянна и равна

$$F_Л = evB. \tag{1}$$

Постоянная сила, перпендикулярная скорости, вызывает движение по окружности. Она сообщает заряженной частице нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, где R — радиус окружности. По второму закону Ньютона, $F = ma_n$, где $F = evB$.

Записав для протона и электрона

$$\frac{m_p v_p^2}{R_p} = ev_pB \quad \text{и} \quad \frac{m_e v_e^2}{R_e} = ev_eB$$

и учитывая, что по условию задачи $v_p = v_e$, получим искомое отношение

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p}{m_e},$$

т. е. радиус окружности, по которой движется протон, больше.

Ответ: $\dfrac{R_p}{R_e} = 1830.$

3.139. Протон, обладая скоростью $v = 10^4$ м/с, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10$ мТл под углом $\alpha = 60°$ к направлению линий магнитной индукции. Определите радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться протон.

Дано: $v = 10^4$ м/с; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $B = 10$ мТл (10^{-2} Тл); $\alpha = 60°$.

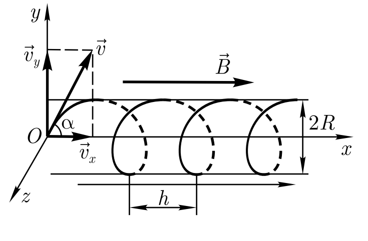
Найти: R; h.

Решение. Движение протона в однородном магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к вектору $\vec{B}$, происходит по винтовой линии (см. рисунок). Для доказательства этого разложим вектор скорости на составляющие, параллельную ($v_x = v\cos\alpha$) и перпендикулярную ($v_y = v\sin\alpha$) вектору индукции.

Движение в направлении поля происходит с равномерной скоростью v_x, а в направлении, перпендикулярном вектору $\vec{B}$, под действием силы Лоренца — по окружности ($\vec{B} = \text{const}$, $v_x = \text{const}$). В результате сложения двух движений траектория результирующего движения протона — винтовая линия (спираль).

Сила Лоренца сообщает протону нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v_y^2}{R}$ (R — радиус окружности). По второму закону Ньютона, $F = ma_n$, где $F_Л = ev_yB$ — сила Лоренца. Тогда

$$\frac{mv_y^2}{R} = ev_yB,$$



откуда искомый радиус винтовой линии, по которой будет двигаться протон,

$$R = \frac{v_y m}{eB} = \frac{vm}{eB}\sin\alpha.$$

Шаг винтовой линии равен расстоянию, пройденному протоном вдоль оси Ox за время одного полного оборота, т. е.

$$h = v_x T = vT\cos\alpha, \qquad (1)$$

где период вращения

$$T = \frac{2\pi R}{v_y} = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомый шаг винтовой линии

$$h = 2\pi R\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $R = 9{,}04$ мм; $h = 3{,}28$ см.

3.140. Покоящийся в начальный момент протон ускоряется однородным электрическим полем. Через 0,05 с он влетает в магнитное поле с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл, которое перпендикулярно электрическому. Как и во сколько раз отличаются в этот момент нормальная a_n и тангенциальная a_τ составляющие ускорения?

Дано: $m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг; $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл; $t = 0{,}05$ с; $B = 10^{-3}$ Тл; $\vec{E}\perp\vec{B}$.

Найти: $\dfrac{a_n}{a_\tau}$.

Решение. В скрещенных электрическом и магнитном полях ($\vec{E}\perp\vec{B}$) на движущийся протон действуют две силы:

1) кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$. Модуль силы $\vec{F}$

$$F = eE$$

($\vec{F}$ и $\vec{E}$ сонаправлены, так как $e > 0$);

2) сила Лоренца $\vec{F}_\text{Л} = e[\vec{v},\vec{B}]$. Модуль силы Лоренца

$$F_\text{Л} = evB$$

($\vec{F}_\text{Л}$ направлена перпендикулярно векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$).

Тангенциальная составляющая ускорения, создаваемая электрическим полем,

$$a_\tau = \frac{eE}{m},$$

а нормальная составляющая ускорения, создаваемая магнитным полем,

$$a_n = \frac{evB}{m}.$$

Тогда

$$\frac{a_n}{a_\tau} = \frac{vB}{E}. \qquad (1)$$

Скорость протона

$$v = a_\tau t = \frac{eE}{m}t. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомое отношение

$$\frac{a_n}{a_\tau} = \frac{eBt}{m}.$$

Ответ: $\frac{a_n}{a_\tau} = 4790.$

3.141. Заряженная частица движется со скоростью $v = 10$ км/с перпендикулярно скрещенным под прямым углом однородным электрическому и магнитному полям, не отклоняясь. Определите напряженность E электрического поля, если индукция B магнитного поля равна 10 мТл.

Дано: $\vec{E} \perp \vec{B}$; $v = 10$ км/с (10^4 м/с); $B = 10$ мТл (10^{-2} Тл).

Найти: E.

Решение. Поскольку заряженная частица проходит скрещенные электрическое и магнитное поля без отклонения, кулоновская сила $F = QE$ и сила Лоренца $F_Л = QvB$, действующие на движущуюся заряженную частицу со стороны электрического и магнитного полей (учли, что $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{v} \perp \vec{B}$, $\vec{v} \perp \vec{E}$), уравновешиваются:

$$QE = QvB,$$

откуда искомая напряженность электрического поля

$$E = vB.$$

Ответ: $E = 100$ В/м.

3.142. Между пластинами плоского конденсатора, находящегося в вакууме, создано однородное магнитное поле напряженностью $H = 2$ кА/м. Электрон движется в конденсаторе параллельно пластинам конденсатора и перпендикулярно направлению магнитного поля со скоростью $v = 2$ Мм/с. Определите напряжение U, приложенное к конденсатору, если расстояние d между его пластинами составляет 1,99 см.

Дано: $\mu = 1$; $H = 2$ кА/м ($2 \cdot 10^3$ А/м); $v = 2$ Мм/с ($2 \cdot 10^6$ м/с); $d = 1{,}99$ см ($1{,}99 \cdot 10^{-2}$ м).

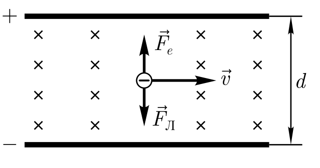
Найти: U.

Решение. Предположим, что магнитное поле направлено перпендикулярно чертежу от нас, что указано на рисунке крестиками. Электрон может двигаться перпендикулярно направлению магнитного поля и параллельно пластинам конденсатора (при выбранных направлении магнитного поля и зарядах на пластинах) только так, как указано на рисунке. При этом кулоновская сила $F_e = eE = e\frac{U}{d}$ (E — напряженность электрического поля) уравновешивается силой Лоренца $F_Л = evB$ (ее направление определяется по правилу левой руки). Тогда

$$e\frac{U}{d} = evB,$$

откуда

$$U = vBd. \qquad (1)$$



Формула, выражающая связь между магнитной индукцией $\vec{B}$ и напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H},$$

для случая вакуума ($\mu = 1$) имеет вид $B = \mu_0 H$. Подставив эту формулу в выражение (1), найдем искомое напряжение на пластинах конденсатора

$$U = \mu_0 vHd.$$

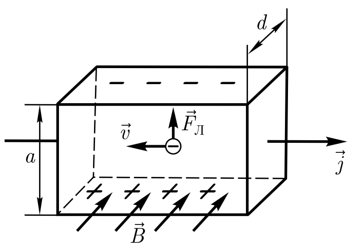
Ответ: $U = 100$ В.

3.143. Через сечение медной пластинки (плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3) толщиной $d = 0{,}1$ мм пропускается ток $I = 5$ А. Пластинка с током помещается в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл, перпендикулярное направлению тока и ребру пластинки. Определите возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов, если концентрация n свободных электронов равна концентрации n' атомов проводника.

Дано: $\rho = 8{,}93$ г/см^3 ($8{,}93 \cdot 10^3$ кг/м^3); $d = 0{,}1$ мм (10^{-4} м); $I = 5$ А; $B = 0{,}5$ Тл; $n = n'$; $M = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $\Delta\varphi$.

Решение. На рисунке показана металлическая пластинка с током плотностью $\vec{j}$ в магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном $\vec{j}$ (как в условии задачи). При данном направлении $\vec{j}$ скорость носителей тока в металлах — электронов — направлена справа налево. Электроны испытывают действие силы Лоренца, которая в данном случае направлена вверх. У верхнего края пластинки возникает повышенная концентрация электронов (он зарядится отрицательно), а у нижнего — их недостаток (зарядится положительно). Поэтому между краями пластинки возникнет дополнительное *поперечное* электрическое поле, направленное снизу вверх.



В случае стационарного распределения зарядов в поперечном направлении (напряженность E_B поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды уравновесит силу Лоренца)

$$eE_B = \frac{e\Delta\varphi}{a} = evB \text{ или } \Delta\varphi = vBa, \tag{1}$$

где a — ширина пластинки; $\Delta\varphi$ — поперечная (холловская) разность потенциалов.

Сила тока

$$I = jS = nevS = nevad, \tag{2}$$

где S — площадь поперечного сечения пластинки толщиной d; n — концентрация электронов; v — средняя скорость упорядоченного движения электронов.

Подставив (2) в (1), получим

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en}\frac{IB}{d}. \tag{3}$$

Согласно условию задачи, концентрация свободных электронов равна концентрации атомов проводника. Следовательно,

$$n = n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{\rho N_A}{M}, \tag{4}$$

где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро; V_m — молярный объем меди; M — молярная масса меди; ρ — ее плотность.

Подставив формулу (4) в выражение (3), найдем искомую поперечную (холловскую) разность потенциалов:

$$\Delta\varphi = \frac{MIB}{e\rho N_A d}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 1{,}85$ мкВ.

3.144. Магнитная индукция B на оси тороида без сердечника (внешний диаметр тороида $d_1 = 60$ см, внутренний — $d_2 = 40$ см), содержащего $N = 200$ витков, составляет 0,16 мТл. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определите силу тока в обмотке тороида.

Дано: $d_1 = 60$ см (0,6 м); $d_2 = 40$ см (0,4 м); $B = 0{,}16$ мТл ($1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Тл); $N = 200$.
Найти: I.
Решение. Циркуляция вектора $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \oint_L B_l\,dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k, \tag{1}$$

т.е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция, умноженной на магнитную постоянную. В качестве контура выберем окружность, расположенную так же, как и линия магнитной индукции, т.е. окружность некоторым радиусом r, центр которой лежит на оси тороида. Из условия симметрии следует, что модуль вектора $\vec{B}$ во всех точках линии магнитной индукции одинаков, а поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = B\oint_L dl = 2\pi r B = \mu_0 N I \tag{2}$$

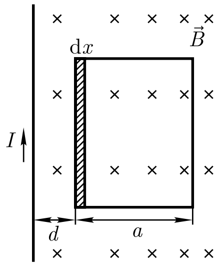
(учли, что сила тока во всех витках одинакова, а контур охватывает число токов, равное числу витков тороида). Для средней линии тороида $r = \dfrac{d_1 + d_2}{4}$. Подставив r в (2), получим искомую силу тока:

$$I = \frac{\pi(d_1 + d_2)B}{2\mu_0 N}.$$

Ответ: $I = 1$ А.

3.145. В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом, по которому течет ток $I = 10$ А, расположена квадратная рамка со стороной $a = 15$ см. Определите магнитный поток Φ, пронизывающий рамку, если две стороны рамки параллельны проводу, а расстояние d от провода до ближайшей стороны рамки составляет 2 см.

Дано: $I = 10$ А; $a = 15$ см (0,15 м); $d = 2$ см (0,02 м).
Найти: Φ.



Решение. Магнитный поток Ф сквозь поверхность площадью S вычисляется по формуле:

$$\Phi_B = \int\limits_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_S B_n \mathrm{d}S.$$

Квадратная рамка находится в неоднородном поле прямого тока с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

(рассматриваем случай вакуума), где x — расстояние от провода до рассматриваемой точки.

Магнитное поле создается прямым током (направление показано на рисунке), и вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рамки (направлен перпендикулярно чертежу от нас, что на рисунке изображено крестиками), поэтому для всех точек рамки $B_n = B$.

Площадь рамки разобьем на узкие элементарные площадки шириной $\mathrm{d}x$ и площадью $a\mathrm{d}x$ (см. рисунок), в пределах которых магнитную индукцию можно считать постоянной. Тогда поток сквозь элементарную площадку

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Проинтегрировав выражение (1) в пределах от d до $d + a$, найдем искомый магнитный поток

$$\Phi = \int\limits_d^{d+a} \frac{\mu_0 I a}{2\pi x}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{d+a}{a}.$$

Ответ: $\Phi = 0{,}25$ мкВб.

3.146. Круговой проводящий контур радиусом $r = 6$ см и током $I = 2$ А установился в магнитном поле так, что плоскость контура перпендикулярна направлению однородного магнитного поля с индукцией $B = 10$ мТл. Определите работу, которую следует совершить, чтобы медленно повернуть контур на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ относительно оси, совпадающей с диаметром контура.

Дано: $r = 6$ см (0,06 м); $I = 2$ А; $B = 10$ мТл (10^{-2} Тл); $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Найти: $A_{\text{вн}}$.

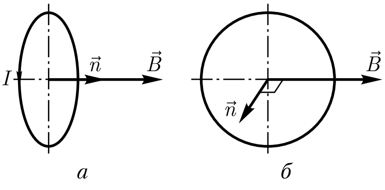
Решение. Работа сил поля по перемещению замкнутого проводника с током I равна

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (1)$$

где Φ_1 и Φ_2 — потоки магнитной индукции, пронизывающие контуры в начальном и конечном положениях. Ток в контуре считаем постоянным, так как при медленном повороте контура в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь.

Поток магнитной индукции сквозь плоский контур площадью S в однородном магнитном поле с индукцией B

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$



где α — угол между вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости контура и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

В начальном положении, рис. *а*, контура (контур установился свободно) поток магнитной индукции максимален ($\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$) и $\Phi_1 = BS$ (S — площадь контура), а в конечном положении, рис. *б* ($\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; $\cos\alpha = 0$), $\Phi_2 = 0$. Тогда, подставив эти выражения в формулу (1), найдем, что

$$A = -IBS = -\pi IBr^2$$

(учли, что площадь кругового контура $S = \pi r^2$).

Работа внешних сил направлена против сил поля (равна ей по модулю, но противоположна по знаку), поэтому искомая работа

$$A_{\text{вн}} = \pi IBr^2.$$

Ответ: $A_{\text{вн}} = 226$ мкДж.

Задачи для самостоятельного решения

3.147. Определите напряженность H магнитного поля, если его магнитная индукция в вакууме равна 3,14 мТл. [$H = 2{,}5$ кА/м]

3.148. На круговой виток радиусом $r = 15$ см, находящийся между полюсами магнита, действует максимальный механический момент $M_{\max} = 20$ мкН · м. Определите индукцию B магнитного поля между полюсами магнита, если сила тока в витке $I = 5$ А. [$B = \dfrac{M_{\max}}{\pi I r^2} = 56{,}6$ мкТл]

3.149. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $I = 5$ А. Определите магнитную индукцию в точке B, удаленной от проводника на расстояние $R = 2$ см. [$B = 50$ мкТл]

3.150. Тонкое кольцо массой $m = 15$ г и радиусом $r = 10$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 15$ нКл/м. Определите отношение магнитного момента p_{m} кругового тока, создаваемого кольцом, к его механическому орбитальному моменту L, если кольцо равномерно вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. [$\dfrac{p_{\text{m}}}{L} = \dfrac{\pi\tau r}{m} = 314$ нКл/кг]

3.151. Ток $I = 15$ А, протекая по проволочному кольцу из алюминиевой проволоки (удельное сопротивление $\rho = 26$ нОм · м) сечением $S = 0{,}5$ мм^2, создает в центре кольца напряженность магнитного поля $H = 10$ кА/м. Определите разность потенциалов, приложенную к концам проволоки, образующей кольцо. [$U = \dfrac{\pi\rho I^2}{SH} = 3{,}67$ мВ]

3.152. Определите магнитную индукцию B на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 10$ см в точке, расположенной на расстоянии $d = 25$ см от центра кольца, если сила тока I, текущего по кольцу, равна 10 А. [$B = \dfrac{\mu_0}{2}\dfrac{IR^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}} = 3{,}22$ мкТл]

3.153. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $I_1 = 3$ А. Круговой виток с током $I_2 = 5$ А и радиусом $r = 30$ см расположен так, что плоскость витка параллельна проводнику, а перпендикуляр, опущенный на проводник из центра витка, является нормалью к плоскости витка. Определите магнитную индукцию в центре витка, если расстояние от провода до центра витка $l = 25$ см. [$B = \frac{\mu_0}{2}\sqrt{\frac{I_1^2}{\pi^2 l^2} + \frac{I_2^2}{r^2}} = 10{,}7$ мкТл]

3.154. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам в вакууме, расстояние d между которыми равно 15 см, текут в противоположном направлении токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А. Определите магнитную индукцию B в точке A, удаленной на $r_1 = 20$ см от первого и $r_2 = 30$ см от второго проводников. [$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} + \frac{2I_1I_2}{r_1^2r_2^2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2)} = 143$ мкТл]

3.155. Определите напряженность H магнитного поля в центре кругового витка и его магнитный момент p_m, если радиус витка $r = 10$ см и по нему протекает ток $I = 20$ А. [$H = 100$ А/м; $p_\text{m} = 0{,}628$ А/м]

3.156. На прямолинейный проводник с током $I = 10$ А в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}3$ Тл действует сила $F = 1{,}5$ Н. Определите длину l проводника, если он расположен под углом $\alpha = 30°$ к линиям магнитной индукции. [$l = 1$ м]

3.157. Два бесконечных прямолинейных проводника с одинаковыми токами, которые текут в одном направлении, находятся в вакууме на расстоянии $r_1 = 3$ см друг от друга. Определите силу тока в проводниках, если для раздвижения проводников на расстояние $r_2 = 5$ см на $l = 1$ см длины проводника следует затратить работу $A = 103$ нДж. [$I = \sqrt{\frac{2\pi A}{l\mu_0 \ln\frac{r_2}{r_1}}} = 10$ А]

3.158. В одной плоскости с бесконечным прямым проводником с током $I = 10$ А расположена квадратная проволочная рамка, по которой протекает ток $I_1 = 1$ А. Две стороны квадрата (сторона квадрата $a = 20$ см) параллельны прямому току, причем ближайшая находится от прямого тока на расстоянии $b = 10$ см, ток в ней сонаправлен току I. Определите силу, действующую на контур. [$F = \frac{\mu_0 a^2 I_1 I}{2\pi b(a+b)} = 2{,}67$ мкН]

3.159. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ нм. Определите скорость движения электрона, если магнитная индукция B поля, создаваемого электроном в центре круговой орбиты, равна 12,6 мкТл. [$v = \frac{4\pi r^2 B}{e\mu_0} = 2{,}19 \cdot 10^6$ м/с]

3.160. Электрон, обладая скоростью $v = 6$ км/с, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ мТл перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения электрона. [$a_n = \frac{Bev}{m} = 1{,}05 \cdot 10^{12}$ м/с^2; $a_\tau = 0$]

3.161. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции перемещается прямой проводник длиной $l = 80$ см. Определите разность потенциалов U, возникающую на концах проводника, если на свободный электрон проводника действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = 3 \cdot 10^{-24}$ Н. [$U = \dfrac{F_{\text{Л}} l}{e} = 15$ мкВ]

3.162. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 300$ В, движется параллельно прямому длинному проводнику на расстоянии $r = 4$ мм от него. Определите силу тока в проводнике, если на движущийся электрон действует сила $F = 4{,}11 \cdot 10^{-16}$ Н. [$I = \dfrac{\pi r F}{\mu_0 e}\sqrt{\dfrac{2m}{eU}} = 5$ А]

3.163. Во сколько раз отличаются радиусы кривизны траектории протона и электрона, если они, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции? Масса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. [$\dfrac{R_p}{R_e} = \sqrt{\dfrac{m_p}{m_e}} = 42{,}8$]

3.164. Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл по винтовой линии. Определите скорость протона, если радиус винтовой линии $R = 2$ см, а шаг $h = 50$ см. [$v = \dfrac{eB}{m}\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} = 1{,}57$ Мм/с]

3.165. Тонкая медная пластинка толщиной $d = 0{,}1$ мм с током $I = 5$ А помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}8$ Тл. Магнитное поле перпендикулярно плоскости пластинки. Определите концентрацию n свободных электронов в меди, если возникшая поперечная (вдоль ширины пластинки) разность потенциалов $\Delta\varphi = 2$ мкВ. [$n = \dfrac{IB}{ed\Delta\varphi} = 1{,}25 \cdot 10^{29}$ м$^{-3}$]

3.166. В случае эффекта Холла для натриевого проводника при плотности тока $j = 100$ А/см^2 и магнитной индукции $B = 1$ Тл напряженность поперечного электрического поля $E_B = 0{,}25$ мВ/м. Определите отношение концентрации свободных электронов к концентрации атомов в этом проводнике. Плотность натрия $\rho = 0{,}97$ г/см^3, его молярная масса $M = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. [$\dfrac{n}{n'} = \dfrac{BjM}{e\rho E_B N_{\text{A}}} = 0{,}985$]

3.167. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определите магнитную индукцию B в точке, расположенной на расстоянии $r = 5$ см от прямого бесконечного проводника с током $I = 5$ А. [$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} = 20$ мкТл]

3.168. Определите, пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, индукцию и напряженность магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 100 витков, протекает ток 1 А. Внешний радиус тороида равен 25 см, внутренний — 15 см. [$B = 0{,}1$ мТл; $H = 79{,}6$ А/м]

3.169. Магнитный момент p_{m} соленоида без сердечника длиной $l = 10$ см равен $0{,}2$ А $\cdot$ м^2. Определите поток магнитной индукции сквозь площадь поперечного сечения этого соленоида. [$\Phi = \dfrac{\mu_0 p_{\text{m}}}{l} = 2{,}51$ мкВб]

3.170. Квадратный проводящий контур со стороной $a = 5$ см и током $I = 1$ А свободно подвешен в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ мТл. Принимая силу тока в контуре неизменной, определите работу, которую следует совершить, чтобы повернуть контур на 180° вокруг оси, перпендикулярной направлению магнитного поля. [$A = 2IBa^2 = 10$ мкДж]

3.171. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл равномерно со скоростью $v = 10$ см/с движется проводник длиной $l = 20$ см. Определите работу перемещения проводника за время $t = 10$ с, если скорость его движения перпендикулярна к магнитному полю и сила тока в проводнике $I = 5$ А. [$A = IBlvt = 0{,}5$ Дж]

3.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Основные законы и формулы

• Закон Фарадея

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

[$\mathscr{E}_i$ — ЭДС электромагнитной индукции].

• ЭДС индукции, возникающая в рамке площадью S при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$\mathscr{E}_i = BS\omega \sin \omega t$$

[ωt — мгновенное значение угла между вектором $\vec{B}$ и вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости рамки].

• Магнитный поток, создаваемый током I в контуре,

$$\Phi = LI$$

[L — индуктивность контура].

• Закон Фарадея применительно к самоиндукции

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

[L — индуктивность контура].

• Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2 S}{l}$$

[μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды; N — число витков соленоида; l — его длина; S — площадь поперечного сечения].

• Сила тока при размыкании и замыкании цепи, содержащей источник тока, резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L,

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \text{ (размыкание)},$$

$$I = I_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ (замыкание)}$$

[I_0 — установившаяся сила тока; $\tau = \dfrac{L}{R}$ — время релаксации].

• ЭДС взаимной индукции

$$\mathscr{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

[L — взаимная индуктивность контуров].

• Взаимная индуктивность двух катушек (с числом витков N_1 и N_2), намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L = \mu_0\mu\frac{N_1N_2}{l}S$$

[l — длина сердечника по средней линии; S — площадь поперечного сечения сердечника].

• Коэффициент трансформации

$$k = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

[N, $\mathscr{E}$, I — число витков, ЭДС и сила тока в обмотках трансформатора соответственно].

• Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре индуктивностью L, по которому течет ток I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

• Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$$

[W — энергия однородного магнитного поля; V — объем соленоида; B — магнитная индукция; H — напряженность магнитного поля].

Примеры решения задач

3.172. В магнитное поле, изменяющееся по закону $B = B_0\cos\omega t$ ($B_0 = 5$ мТл, $\omega = 5$ с$^{-1}$), помещен круговой проволочный виток радиусом $r = 30$ см, причем нормаль к витку образует с направлением поля угол $\alpha = 30°$. Определите ЭДС индукции, возникающую в витке в момент времени $t = 10$ с.

Дано: $B = B_0\cos\omega t$; $B_0 = 5$ мТл ($5 \cdot 10^{-3}$ Тл); $\omega = 5$ с$^{-1}$; $r = 30$ см (0,3 м); $\alpha = 30°$; $t = 10$ с.

Найти: $\mathscr{E}_i$.

Решение. Согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

где магнитный поток, сцепленный с витком при произвольном его расположении относительно магнитного поля,

$$\Phi = BS\cos\alpha.$$

По условию задачи $B = B_0 \cos\omega t$, а площадь кольца $S = \pi r^2$, поэтому

$$\Phi = \pi r^2 B_0 \cos\omega t \cos\alpha. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и продифференцировав, получаем искомую ЭДС индукции в заданный момент времени:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi r^2 B_0 \cos\omega t \cos\alpha) = -\pi r^2 B_0 \cos\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t) = \pi r^2 B_0 \omega \cos\alpha \sin\omega t.$$

Ответ: $\mathscr{E}_i = 4{,}69$ мВ.

3.173. В соленоиде длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 6$ см сила тока равномерно увеличивается на 0,3 А за одну секунду. Определите число витков соленоида, если сила индукционного тока в кольце радиусом 3,1 см из медной проволоки ($\rho = 17$ нОм · м), надетом на катушку, $I_к = 0{,}3$ А.

Дано: $l = 50$ см (0,5 м); $d = 6$ см ($6 \cdot 10^{-2}$ м); $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0{,}3$ А/с; $r_к = 3{,}1$ см ($3{,}1 \cdot 10^{-2}$ м); $\rho = 17$ нОм · м ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м); $I_к = 0{,}3$ А.

Найти: N.

Решение. При изменении силы тока в соленоиде возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathscr{E}_{is} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \qquad (1)$$

где $L = \dfrac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}$ — индуктивность соленоида. Подставив это выражение в (1) с учетом $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, получим

$$|\mathscr{E}_{is}| = \mu_0 \mu \frac{N^2 \pi d^2}{4l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

ЭДС индукции, возникающая в одном кольце, в N раз меньше, чем найденное значение ЭДС самоиндукции в соленоиде, состоящем из N витков, т. е.

$$|\mathscr{E}_к| = \frac{|\mathscr{E}_{is}|}{N} = \mu_0 \mu \frac{N \pi d^2}{4l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \qquad (2)$$

Согласно закону Ома, сила индукционного тока в кольце

$$I_к = \frac{|\mathscr{E}_к|}{R_к}, \qquad (3)$$

где $R_к = \dfrac{\rho l_к}{S_к}$ — сопротивление кольца. Поскольку $l_к = \pi d$, а $S_к = \pi r_к^2$, выражение (3) примет вид

$$I_к = \frac{|\mathscr{E}_к| r_к^2}{\rho d}.$$

Подставив в эту формулу выражение (2), найдем искомое число витков соленоида

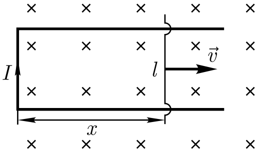
$$N = \frac{4l\rho I_к}{\mu_0\mu\pi d \frac{dI}{dt} r_к^2}.$$

Ответ: $N = 150$.

3.174. В однородном магнитном поле подвижная сторона (ее длина $l = 20$ см) прямоугольной рамки (см. рисунок) перемещается перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 5$ м/с. Определите индукцию B магнитного поля, если возникающая в рамке ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = 0{,}2$ В.

Дано: $l = 20$ см (0,2 м); $v = 5$ м/с; $\mathscr{E}_i = 0{,}2$ В.

Найти: B.



Решение. При движении в магнитном поле подвижной стороны прямоугольной рамки поток Φ вектора магнитной индукции сквозь рамку возрастает, что, согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

приводит к возникновению ЭДС индукции.

Поток вектора магнитной индукции, сцепленный с рамкой,

$$\Phi = Blx. \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что B и l — величины постоянные, получаем

$$\mathscr{E}_i = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv,$$

откуда искомая индукция магнитного поля

$$B = \frac{|\mathscr{E}_i|}{lv}.$$

Ответ: $B = 0{,}2$ Тл.

3.175. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл равномерно вращается катушка, содержащая $N = 600$ витков, с частотой $n = 6$ с$^{-1}$. Площадь S поперечного сечения катушки 100 см^2. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определите максимальную ЭДС индукции вращающейся катушки.

Дано: $B = 0{,}2$ Тл; $N = 600$; $n = 6$ с$^{-1}$; $S = 100$ см^2 (10^{-2} м^2).

Найти: $(\mathscr{E}_i)_{\max}$.

Решение. Согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками катушки. При произвольном расположении катушки относительно магнитного поля

$$\Phi = NBS\cos\omega t, \qquad (1)$$

где круговая частота $\omega = 2\pi n$. Подставив ω в (1), получим

$$\Phi = NBS\cos 2\pi nt.$$

Тогда

$$\mathscr{E}_i = -NBS \cdot 2\pi n(-\sin 2\pi nt) = 2\pi nNBS\sin 2\pi nt,$$

$\mathscr{E}_i = (\mathscr{E}_i)_{\max}$ при $\sin 2\pi nt = 1$, поэтому

$$(\mathscr{E}_i)_{\max} = 2\pi nNBS.$$

Ответ: $(\mathscr{E}_i)_{\max} = 45{,}2$ В.

3.176. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из медной проволоки диаметром $d = 0{,}3$ мм и площадью поперечного сечения $S_1 = 3$ мм^2 имеет длину $l = 0{,}6$ м. Определите индуктивность соленоида, если сопротивление обмотки $R = 10$ Ом. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм · м.

Дано: $\mu = 1$; $d = 0{,}3$ мм ($3 \cdot 10^{-4}$ м); $l = 0{,}6$ м; $S_1 = 3$ мм^2 ($3 \cdot 10^{-6}$ м^2); $R = 10$ Ом; $\rho = 17$ нОм · м ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м).

Найти: L.

Решение. Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l}, \qquad (1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды; N — число витков соленоида; l — его длина; S — площадь поперечного сечения соленоида.

Для определения N и S необходимо найти длину проволоки l_1, из которой намотан соленоид. Учитывая, что электрическое сопротивление обмотки $R = \rho\dfrac{l_1}{S_1}$, найдем

$$l_1 = \frac{RS_1}{\rho}.$$

С другой стороны,

$$l_1 = 2\pi rN,$$

где $2\pi r$ — длина одного витка (r — радиус соленоида); N — число витков. Тогда, приравняв два последних выражения,

$$N = \frac{RS_1}{2\pi\rho r}. \qquad (2)$$

Площадь сечения соленоида

$$S = \pi r^2. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую индуктивность соленоида

$$L = \mu_0\mu\frac{R^2S_1^2\pi r^2}{4\pi^2\rho^2r^2l} = \mu_0\mu\frac{R^2S_1^2}{4\pi\rho^2l}.$$

Ответ: $L = 0{,}519$ Гн.

3.177. Однослойная длинная катушка содержит $N = 300$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Определите индуктивность катушки, если диаметр проволоки $d = 0{,}7$ мм (изоляция ничтожной толщины) и она намотана на картонный цилиндр радиусом $r = 1$ см.

Дано: $N = 300$; $d = 0{,}7$ мм ($7 \cdot 10^{-4}$ м); $r = 1$ см (10^{-2} м).

Найти: L.

Решение. Индуктивность катушки

$$L = \frac{\Phi}{I}, \qquad (1)$$

где Φ — полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками катушки; I — сила тока в катушке.

Учитывая, что полный магнитный поток

$$\Phi = NBS$$

(N — число витков катушки; B — магнитная индукция; S — площадь поперечного сечения катушки), магнитная индукция в катушке без сердечника

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

(μ_0 — магнитная постоянная; l — длина катушки), длина катушки

$$l = Nd$$

(d — диаметр проволоки; витки вплотную прилегают друг к другу), площадь поперечного сечения катушки

$$S = \pi r^2,$$

получим после подстановки записанных выражений в формулу (1) искомую индуктивность катушки:

$$L = \frac{\mu_0 N \pi r^2}{d}.$$

Ответ: $L = 1{,}69$ мГн.

3.178. Определите время t, за которое сила тока замыкания достигнет 0,8 предельного значения, если источник ЭДС замыкают на катушку сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн.

Дано: $I = 0{,}8 I_0$; $R = 10$ Ом; $L = 0{,}1$ Гн.

Найти: t.

Решение. Сила тока при замыкании цепи, содержащей источник ЭДС,

$$I = I_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad (1)$$

где R — сопротивление катушки; L — ее индуктивность; I_0 — установившаяся сила тока.

Подставив в выражение (1) $I = 0{,}8 I_0$ (условие задачи), можем записать

$$0{,}8 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

откуда искомое время

$$t = -\frac{L \ln 0,2}{R}.$$

Ответ: $t = 16{,}2$ мс.

3.179. Соленоид без сердечника длиной $l = 0{,}8$ м и диаметром $D = 2$ см содержит $N = 800$ витков. Определите среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathscr{E}_s \rangle$ в соленоиде, если за время $\Delta t = 0{,}1$ с сила тока в нем равномерно возрастает от $I_1 = 1$ А до $I_2 = 5$ А.

Дано: $\mu = 1$; $l = 0{,}8$ м; $D = 2$ см ($2 \cdot 10^{-2}$ м); $N = 800$; $\Delta t = 0{,}1$ с; $I_1 = 1$ А; $I_2 = 5$ А.

Найти: $\langle \mathscr{E}_s \rangle$.

Решение. Средняя ЭДС самоиндукции, согласно закону Фарадея,

$$\langle \mathscr{E}_s \rangle = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \tag{1}$$

где $\Delta I = (I_2 - I_1)$ — изменение силы тока в обмотке соленоида за время Δt, причем знак «$-$» показывает, что ЭДС самоиндукции препятствует возрастанию тока в соленоиде.

Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \tag{2}$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды (по условию задачи $\mu = 1$), $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения соленоида.

Подставив формулу (2) в выражение (1), учитывая значения для ΔI и S, найдем искомую среднюю ЭДС самоиндукции

$$\left| \langle \mathscr{E}_s \rangle \right| = \frac{\mu_0 \pi D^2 N^2 (I_2 - I_1)}{4 l \Delta t}.$$

Ответ: $\left| \langle \mathscr{E}_s \rangle \right| = 12{,}6$ мВ.

3.180. Две катушки намотаны на общий сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}16$ Гн, второй — $L_2 = 1$ Гн, сопротивление второй катушки $R_2 = 400$ Ом. Определите силу тока I_2 во второй катушке, если ток 0,4 А, текущий в первой катушке, выключить в течение 0,002 с.

Дано: $L_1 = 0{,}16$ Гн; $L_2 = 1$ Гн; $R_2 = 400$ Ом; $I_1 = 0{,}4$ А; $\Delta t = 0{,}002$ с.

Найти: I_2.

Решение. Сила тока во второй катушке

$$I_2 = \frac{|\mathscr{E}_{i2}|}{R_2}, \tag{1}$$

где $\mathscr{E}_{i2}$ — ЭДС, индуцируемая во второй катушке при изменении силы тока в первой.

Согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}_{i2} = -L \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

где L — взаимная индуктивность катушек, намотанных на общий сердечник, равная

$$L = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2 S}{l}, \qquad (3)$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды; l — длина сердечника; S — площадь поперечного сечения сердечника. Учитывая, что индуктивности

$$L_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1^2 S}{l} \quad \text{и} \quad L_2 = \mu_0 \mu \frac{N_2^2 S}{l},$$

формулу (3) можно представить в виде:

$$L = \sqrt{\mu_0 \mu \frac{N_1^2 S}{l}} \cdot \sqrt{\mu_0 \mu \frac{N_2^2 S}{l}} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Подставив это значение L в формулу (2), а формулу (2) в выражение (1), найдем искомое значение силы тока во второй катушке

$$I_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_2} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Ответ: $I_2 = 0{,}2$ А.

3.181. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 0{,}1$ включена в сеть с источником переменного напряжения с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 220$ В. Пренебрегая потерями энергии в первичной обмотке, определите напряжение U_2 на зажимах вторичной обмотки, если ее сопротивление $R_2 = 5$ Ом и сила тока в ней $I_2 = 2$ А.

Дано: $k = 0{,}1$; $\mathscr{E}_1 = 220$ В; $R_2 = 5$ Ом; $I_2 = 2$ А.

Найти: U_2.

Решение. В первичной обмотке под действием переменной ЭДС $\mathscr{E}_1$ возникает переменный ток I_1, создающий в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток Φ, который пронизывает вторичную обмотку. Согласно закону Ома, для первичной обмотки

$$\mathscr{E}_1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_1 \Phi) = I_1 R_1,$$

где R_1 — сопротивление первичной обмотки. Падение напряжения $I_1 R_1$ при быстропеременных полях мало́ по сравнению с $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Тогда можем записать:

$$\mathscr{E}_1 = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

ЭДС взаимной индукции, возникающая во вторичной обмотке,

$$\mathscr{E}_2 = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1}\mathscr{E}_1 = -k\mathscr{E}_1,$$

где $\dfrac{N_2}{N_1} = k$ — коэффициент трансформации, а знак «–» показывает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе. Следовательно, ЭДС во вторичной обмотке

$$\mathscr{E}_2 = k\mathscr{E}_1.$$

Напряжение на зажимах вторичной обмотки

$$U_2 = \mathscr{E}_2 - I_2R_2 = k\mathscr{E}_1 - I_2R_2.$$

Ответ: $U_2 = 12$ В.

3.182. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}4$ мм имеет длину $l = 0{,}5$ м и поперечное сечение $S = 60$ см^2. За какое время при напряжении $U = 10$ В и силе тока $I = 1{,}5$ А в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано: $d = 0{,}4$ мм ($4 \cdot 10^{-4}$ м); $l = 0{,}5$ м; $S = 60$ см^2 ($6 \cdot 10^{-3}$ м^2); $I = 1{,}5$ А; $U = 10$ В; $Q = W$.

Найти: t.

Решение. При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделяется теплота

$$Q = IUt. \tag{1}$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}lS, \tag{2}$$

где $B = \dfrac{\mu_0\mu NI}{l}$ (N — общее число витков соленоида). Если витки вплотную прилегают друг к другу, то $l = Nd$, откуда $N = \dfrac{l}{d}$. Подставив выражения для B и N в (2), получаем

$$W = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I^2lS}{d^2}. \tag{3}$$

Согласно условию задачи, $Q = W$. Приравняв выражения (1) и (3), найдем искомое время:

$$t = \frac{\mu_0\mu ISl}{2Ud^2}.$$

Ответ: $t = 1{,}77$ мс.

3.183. Катушка без сердечника длиной $l = 50$ см содержит $N = 200$ витков. По катушке течет ток $I = 1$ А. Определите объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки.

Дано: $l = 50$ см (0,5 м); $N = 200$; $I = 1$ А.
Найти: w.

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия единицы объема)

$$w = \frac{W}{V}, \tag{1}$$

где $W = \dfrac{LI^2}{2}$ — энергия магнитного поля (L — индуктивность катушки); $V = Sl$ — объем катушки (S — площадь катушки; l — длина катушки).

Магнитная индукция поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью μ равна

$$B = \mu_0\mu\frac{NI}{l}.$$

Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида,

$$\Phi = NBS = \mu_0\mu\frac{N^2I}{l}S.$$

Учитывая, что $\Phi = LI$, получаем формулу для индуктивности соленоида:

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) с учетом того, что $W = \dfrac{LI^2}{2}$, найдем искомую объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки:

$$w = \mu_0\mu\frac{N^2I^2}{2l^2}.$$

Ответ: $w = 0{,}1$ Дж/м^3.

Задачи для самостоятельного решения

3.184. Соленоид радиусом $r = 3$ см, содержащий $N = 600$ витков, помещен в магнитное поле, индукция которого изменяется со скоростью 0,5 мТл/с. Определите ЭДС индукции, возникающей в соленоиде, если ось соленоида составляет с вектором магнитной индукции угол $\alpha = 60°$. [$|\mathscr{E}_i| = \pi r^2 N\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\alpha = 424$ мкВ]

3.185. Соленоид без сердечника длиной $l = 0{,}5$ м и диаметром $d = 2{,}5$ см содержит $N = 100$ витков. На соленоид надето кольцо из медной проволоки ($\rho = 17$ нОм · м) радиусом $r_к = 2{,}6$ см. Определите силу тока $I_к$ в кольце, если в соленоиде ток растет равномерно со скоростью $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0{,}01$ А/с. [$I_к = \dfrac{\mu_0\pi N r_к^2 d}{4l\rho}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0{,}196$ А]

3.186. Прямой провод длиной $l = 20$ см движется в однородном магнитном поле со скоростью $v = 10$ м/с перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите индукцию B магнитного поля, если разность потенциалов U между концами провода равна 0,2 В. [$B = 0{,}1$ Тл]

3.187. В однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл) с частотой $n = 300$ мин$^{-1}$ равномерно вращается прямоугольная рамка. Площадь рамки $S = 100$ см^2. Определите число N витков рамки, плотно прилегающих друг к другу, если максимальная ЭДС, индуцируемая в рамке, $(\mathscr{E}_i)_{\max} = 6{,}28$ В. $\left[N = \dfrac{(\mathscr{E}_i)_{\max}}{2\pi nBS} = 200\right]$

3.188. Соленоид без сердечника содержит $N = 500$ витков, имеет длину $l = 0{,}6$ м и диаметр $d = 4$ см. Определите магнитный поток Φ, пронизывающий площадь поперечного сечения соленоида, если сила тока I в обмотке равна 1 А. $\left[\Phi = \dfrac{\mu_0 \pi d^2 N I}{4l} = 1{,}31 \text{ мкВб}\right]$

3.189. Две длинные катушки намотаны на общий сердечник, причем индуктивности их соответственно $L_1 = 1{,}25$ Гн и $L_2 = 0{,}05$ Гн. Определите, во сколько раз n число витков первой катушки отличается от числа витков второй катушки. $\left[n = \dfrac{N_1}{N_2} = \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}} = 5\right]$

3.190. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и резистора сопротивлением $R = 12$ Ом. Источник ЭДС можно отключать, не разрывая цепи. Определите время t, за которое сила тока уменьшится до 0,01 первоначального значения. [$t = 0{,}192$ с]

3.191. Соленоид без сердечника содержит 500 витков. Определите среднюю ЭДС самоиндукции, возникающую в соленоиде, если при увеличении силы тока за 5 с поток магнитной индукции сквозь соленоид увеличился на 2 мВб. [$\langle \mathscr{E}_s \rangle = 0{,}2$ В]

3.192. Две катушки индуктивностью $L_1 = 0{,}2$ Гн и $L_2 = 3{,}2$ Гн намотаны на общий сердечник. Определите взаимную индуктивность L катушек. [$L = \sqrt{L_1 L_2} = 0{,}8$ Гн]

3.193. Две катушки намотаны на общий сердечник. Определите ЭДС, индуцируемую во второй катушке, если взаимная индуктивность катушек равна 0,2 Гн, а скорость изменения силы тока в первой катушке составляет 1 А/с. [$\mathscr{E} = 0{,}2$ В]

3.194. Автотрансформатор, понижающий напряжение с $U_1 = 5{,}5$ кВ до $U_2 = 110$ В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 1000$ витков. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определите число витков N_2 во вторичной обмотке трансформатора, если сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 1{,}5$ Ом, а сопротивление внешней цепи (в сети пониженного напряжения) $R = 9$ Ом. $\left[N_2 = \dfrac{U_2}{U_1} N_1 \left(\dfrac{R}{R_2} + 1\right) = 140\right]$

3.195. В обмотке электромагнита, находящейся под постоянным напряжением, за время $t = 5$ мс выделилось количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике. Определите индуктивность обмотки, если ее сопротивление $R = 10$ Ом. [$L = 2Rt = 0{,}1$ Гн]

3.196. Соленоид без сердечника длиной $l = 50$ см содержит $N = 150$ витков. Определите силу тока I в соленоиде, если объемная плотность w энергии магнитного поля внутри соленоида равна 0,25 Дж/м^3. $\left[I = \dfrac{l}{N}\sqrt{\dfrac{2w}{\mu_0}} = 2{,}1 \text{ А}\right]$

3.5. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

Основные законы и формулы

• Связь между орбитальным магнитным $\vec{p}_{\mathrm{m}}$ и орбитальным механическим $\vec{L}_l$ моментами электрона

$$\vec{p}_{\mathrm{m}} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l = g\vec{L}_l$$

[$g = -\dfrac{e}{2m}$ — гиромагнитное отношение орбитальных моментов].

• Намагниченность

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_{\mathrm{m}}}{V} = \frac{\sum \vec{p}}{V}$$

[$\vec{P}_{\mathrm{m}} = \sum \vec{p}$ — магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул].

• Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

[χ — магнитная восприимчивость вещества].

• Связь между векторами $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}.$$

• Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества

$$\mu = 1 + \chi.$$

• Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)

$$\oint\limits_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint\limits_L B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0(I + I')$$

[$\mathrm{d}\vec{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l — составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру L произвольной формы; I и I' — соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным контуром].

• Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint\limits_L \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = I$$

[I — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L].

• Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

[$\vec{D}$ — электрическое смещение; $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ — плотность тока смещения в вакууме; $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ — плотность тока поляризации].

• Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\vec{S}$$

[$\vec{j}$ — плотность тока проводимости; $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — плотность тока смещения; S — поверхность, охватываемая замкнутым контуром L].

• Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{S}; \qquad \oint_S \vec{D} \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \, \mathrm{d}V;$$

$$\oint_L \vec{H} \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\vec{S}; \qquad \oint_S \vec{B} \mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Примеры решения задач

3.197. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл вносится вольфрамовый стержень. Магнитная проницаемость вольфрама $\mu = 1{,}0176$. Определите магнитную индукцию B' поля, создаваемого молекулярными токами.

Дано: $B = 1$ Тл; $\mu = 1{,}0176$.

Найти: B'.

Решение. Магнитная индукция поля молекулярных токов

$$B' = \mu_0 J, \tag{1}$$

где μ_0 — магнитная постоянная; J — намагниченность магнетика (вольфрама).

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$J = \chi H, \tag{2}$$

где магнитная восприимчивость χ и магнитная проницаемость вещества связаны соотношением:

$$\chi = \mu - 1. \tag{3}$$

Из формулы $B = \mu_0 \mu H$ получаем

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}. \tag{4}$$

Учитывая формулы (3) и (4), выражение (2) можем записать в виде

$$J = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} B.$$

Подставив его в формулу (1), найдем искомую магнитную индукцию молекулярных токов:

$$B' = \frac{\mu - 1}{\mu} B.$$

Ответ: $B' = 17{,}3$ мТл.

3.198. По круговому контуру радиусом $R = 20$ см, погруженному в жидкий кислород (магнитная восприимчивость жидкого кислорода $\chi = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$), течет ток. Определите силу тока в контуре, если намагниченность J в его центре составляет 3,4 мА/м.

Дано: $R = 20$ см (0,2 м); $\chi = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$; $J = 3{,}4$ мА/м ($3{,}4 \cdot 10^{-3}$ А/м).

Найти: I.

Решение. Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$J = \chi H. \tag{1}$$

Учитывая, что магнитная индукция в центре кругового проводника с током $B = \mu_0 \mu \dfrac{I}{2R}$ и $B = \mu_0 \mu H$ (μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость), получаем

$$H = \frac{I}{2R}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), найдем искомую силу тока в контуре:

$$I = \frac{2JR}{\chi}.$$

Ответ: $I = 0{,}4$ А.

3.199. Соленоид длиной $l = 20$ см, площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 и общим числом витков $N = 400$ находится в диамагнитной среде. Определите силу тока в обмотке соленоида, если его индуктивность $L = 1$ мГн и намагниченность J внутри соленоида равна 20 А/м.

Дано: $l = 20$ см (0,2 м); $S = 10$ см^2 (10^{-3} м^2); $N = 400$; $L = 1$ мГн (10^{-3} Гн); $J = 20$ А/м.

Найти: I.

Решение. Намагниченность внутри соленоида

$$J = \chi H,$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества; H — напряженность магнитного поля.

Так как магнитная проницаемость вещества $\mu = 1 + \chi$, то

$$J = (\mu - 1) H. \tag{1}$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L H_l \mathrm{d}l = \sum_k I_k,$$

т. е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром. Для соленоида $Hl = NI$, откуда $H = \dfrac{NI}{l}$.

Индуктивность соленоида $L = \mu_0\mu\dfrac{N^2S}{l}$, тогда $\mu = \dfrac{Ll}{\mu_0 N^2 S}$. Подставив значения μ и H в формулу (1), получим

$$J = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)\frac{NI}{l},$$

откуда искомая сила тока

$$I = \frac{Jl}{N\left(\dfrac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)}.$$

Вычисляя и учитывая, что для диамагнетиков $\chi < 0$, получаем $I = 2{,}09$ А.

Ответ: $I = 2{,}09$ А.

3.200. По обмотке соленоида, в который вставлен железный сердечник (для железа график зависимости индукции магнитного поля от напряженности задан на рисунке), течет ток $I = 1{,}2$ А. Соленоид имеет длину $l = 0{,}6$ м, площадь поперечного сечения $S = 15$ см^2 и число витков $N = 400$. Определите энергию магнитного поля соленоида.

Дано: $I = 1{,}2$ А; $l = 0{,}6$ м; $S = 15$ см^2 $(1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м$^2)$; $N = 400$.

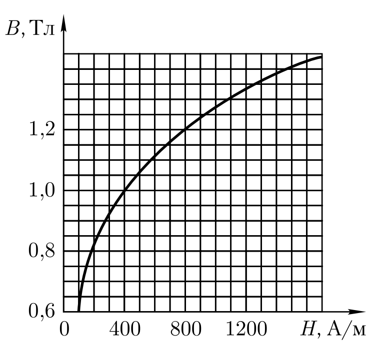
Найти: W.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида

$$W = wV,$$

где объемная плотность энергии $w = \dfrac{BH}{2}$ и объем соленоида $V = Sl$. Тогда можем записать:

$$W = \frac{BH}{2}Sl. \tag{1}$$



Для нахождения напряженности магнитного поля воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряженности

$$\oint_L \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = I, \tag{2}$$

где I — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L. Магнитное поле сосредоточено внутри соленоида, оно однородно, и формулу (2) для соленоида можно записать в виде

$$Hl = NI,$$

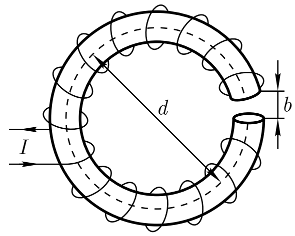
где N — число витков соленоида. Тогда

$$H = \frac{NI}{l} = 800\ \text{А/м}.$$

Согласно приведенному рисунку, при напряженности $H = 800$ А/м магнитная индукция $B = 1{,}2$ Тл. Подставив в формулу (1) заданные и найденные значения физических величин, найдем искомую энергию магнитного поля соленоида $W = 0{,}432$ Дж.

Ответ: $W = 0{,}432$ Дж.

3.201. На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм (см. рисунок). При силе тока через обмотку $I = 4$ А магнитная индукция в прорези $B_0 = 1{,}5$ Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определите магнитную проницаемость железа для данных условий.



Дано: $d = 70$ мм $(7 \cdot 10^{-2}$ м); $N = 600$; $I = 4$ А; $B_0 = 1{,}5$ Тл; $b = 1{,}5$ мм $(1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м).

Найти: μ.

Решение. Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint_L \vec{H} \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L H_l \mathrm{d}l = I, \tag{1}$$

где I — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром.

Выбрав в качестве контура окружность диаметром d (см. рисунок, штриховая линия), теорему (1) можно записать в виде:

$$H(\pi d - b) + H_0 b = NI,$$

где H и H_0 — соответственно модули вектора $\vec{H}$ в железе и прорези; N — число витков тороида.

Поскольку рассеяние поля на краях прорези отсутствует, магнитные индукции поля в железе и прорези одинаковы:

$$B = B_0. \tag{2}$$

Учитывая формулу (2) и то, что $B = \mu_0\mu H$ (μ — магнитная проницаемость железа) и $B_0 = \mu_0 H_0$ (магнитная проницаемость вакуума равна 1), выражение (1) можем записать в виде:

$$\frac{B_0}{\mu_0\mu}(\pi d - b) + \frac{B_0}{\mu_0} b = NI,$$

откуда искомая магнитная проницаемость железа при рассматриваемых условиях

$$\mu = \frac{(\pi d - b)B_0}{\mu_0 NI - bB_0}.$$

Ответ: $\mu = 428$.

3.202. При разрядке цилиндрического конденсатора длиной $l = 10$ см и внешним радиусом $r = 1$ см в подводящих проводах течет ток $I = 1$ мкА. Определите плотность тока смещения.

Дано: $l = 10$ см (0,1 м); $r = 1$ см (10^{-2} м); $I = 1$ мкА (10^{-6} А).

Найти: $j_{\text{см}}$.

Решение. Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $\vec{D}$ — вектор электрического смещения в диэлектрике между обкладками конденсатора.

Согласно теореме Гаусса для электростатического поля в диэлектрике,

$$\oint_S \vec{D} \mathrm{d}\vec{S} = Q, \qquad (2)$$

где Q — заряд конденсатора. Поскольку поток вектора $\vec{D}$ пронизывает только боковую цилиндрическую поверхность ($S = 2\pi rl$) и вектор $\vec{D}$ направлен перпендикулярно к поверхности ($D = D_n$; D_n — проекция вектора электрического смещения на направление внешней нормали к элементу сечением $\mathrm{d}S$), то выражение (2) можно записать в виде

$$D \cdot 2\pi rl = Q,$$

откуда

$$D = \frac{Q}{2\pi rl}. \qquad (3)$$

Продифференцировав выражение (3) по времени и учитывая, что $\dfrac{\partial Q}{\partial t} = I$ (сила тока проводимости), найдем искомую плотность тока смещения

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi rl}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{I}{2\pi rl}.$$

Ответ: $j_{\text{см}} = 0{,}16$ мА/м^2.

3.203. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника ЭДС. Пренебрегая краевыми эффектами, докажите, что ток смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равен току в цепи источника ЭДС.

Решение. Выделим в диэлектрике цилиндр площадью S, радиусом r и длиной l. Ток смещения сквозь выбранное сечение диэлектрика

$$I_{\text{см}} = \int_S j_{\text{см}} \mathrm{d}S, \qquad (1)$$

где плотность тока смещения

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} \qquad (2)$$

(D — электрическое смещение поля конденсатора). Поскольку вектор $\vec{D}$ направлен вдоль нормали к боковой поверхности цилиндра, $D = D_n$, где D_n — проекция вектора $\vec{D}$ на направление внешней нормали к элементу сечением $\mathrm{d}S$.

Согласно теореме Гаусса для электростатического поля в диэлектрике,

$$\oint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D_n \mathrm{d}S = Q, \tag{3}$$

где Q — заряд обкладки конденсатора. Учитывая, что поток вектора электрического смещения сквозь основания выбранной цилиндрической поверхности, перпендикулярные оси цилиндра, равен нулю, выражение (3) можно представить в виде

$$D \cdot 2\pi rl = Q,$$

откуда

$$D = \frac{Q}{2\pi rl}.$$

Продифференцировав это выражение, получаем

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi rl}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2\pi rl}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = j_{\text{см}}$$

[учли, что заряд Q зависит только от времени, и формулу (2)]. Подставив это выражение в формулу (1), найдем

$$I_{\text{см}} = \int_S \frac{1}{2\pi rl}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S = \frac{1}{2\pi rl}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\int_S \mathrm{d}S = \frac{S}{2\pi rl}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Учитывая, что площадь выбранного цилиндра $S = 2\pi rl$, а $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$ (ток в цепи, соединяющей конденсатор с источником ЭДС), из выражения (3) получаем искомое равенство тока смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, и тока в цепи источника ЭДС:

$$I_{\text{см}} = I.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.204. Определите гиромагнитное отношение орбитальных моментов (магнитного и механического), считая, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите. [$g = \frac{p_{\mathrm{m}}}{L_l} = \frac{e}{2m}$]

3.205. В однородное магнитное поле вносится парамагнитный стержень с магнитной проницаемостью μ. Определите, какая доля суммарного магнитного поля в этом стержне определяется молекулярными токами. [$\frac{\mu - 1}{\mu}$]

3.206. Напряженность H однородного магнитного поля в алюминии (магнитная восприимчивость алюминия $\chi = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$) равна 10 А/м. Определите магнитную индукцию поля, обусловленную намагничиванием. [$B = 289$ пТл]

3.207. По обмотке соленоида индуктивностью $L = 1$ мГн, находящегося в диамагнитной среде, течет ток $I = 0{,}1$ А. Определите намагниченность J внутри соленоида, если он содержит $N = 500$ витков, имеет длину $l = 0{,}5$ м и площадь поперечного сечения $S = 15$ см^2. [$J = \dfrac{NI}{l}\left(\dfrac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right) = 6{,}16$ А/м]

3.208. Железный сердечник длиной $l = 1$ м и малого сечения ($d \ll l$) содержит $N = 200$ витков. Определите, используя график (см. задачу 3.200), магнитную проницаемость железа при силе тока $I = 2$ А. [$\mu = 1{,}19 \cdot 10^3$]

3.209. На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 50$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 500$. В сердечнике имеется узкая поперечная прорезь шириной $b = 1$ мм. Сила тока в обмотке $I = 2$ А. Определите: 1) напряженность H магнитного поля в железе; 2) напряженность H_0 магнитного поля в прорези. Магнитную проницаемость μ железа для данных условий принять равной 480. [1) $H = \dfrac{NI}{(\pi d - b) + \mu b} = 1{,}57$ кА/м; 2) $H_0 = \mu H = 754$ кА/м]

3.210. Запишите полную систему уравнений Максвелла для стационарных полей ($\vec{E} = \text{const}$; $\vec{B} = \text{const}$) в интегральной и дифференциальной формах; объясните физический смысл каждого из этих уравнений.

ГЛАВА 4

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные законы и формулы

• Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[x — смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ — круговая (циклическая) частота; $\nu = \dfrac{1}{T}$ — частота; T — период колебаний; φ — начальная фаза].

• Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

[A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; φ — начальная фаза].

• Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m,

$$F = -m\omega_0^2 x$$

[ω_0 — круговая частота; x — смещение точки из положения равновесия].

• Кинетическая энергия точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания,

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

[m — масса материальной точки; v — ее скорость; A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; φ — начальная фаза].

• Потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F,

$$\Pi = -\int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x m\omega_0^2 x\mathrm{d}x = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

[m — масса материальной точки; ω_0 — круговая частота; x — смещение точки от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; φ — начальная фаза].

• Механическая энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

• Дифференциальное уравнение гармонических колебаний пружинного маятника

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

[m — масса тела; x — смещение из положения равновесия; k — жесткость пружины; ω_0 — циклическая частота].

• Решение этого уравнения

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[A — амплитуда колебаний; φ — начальная фаза].

• Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

[m — масса пружинного маятника; k — жесткость пружины].

• Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

[l — длина маятника; g — ускорение свободного падения].

• Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

[J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = \dfrac{J}{ml}$ — приведенная длина физического маятника; g — ускорение свободного падения].

• Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Начальная фаза результирующего колебания

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

[A_1 и A_2 — амплитуды двух складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 — начальные фазы колебаний].

• Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

[$\Delta\omega$ — разность частот складываемых колебаний, $\Delta\omega \ll \omega$].

• Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты (уравнение эллипса),

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

[A и B — амплитуды складываемых колебаний; φ — разность между фазами колебаний].

• Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

[x — смещение колеблющегося тела из положения равновесия; $\delta = \dfrac{r}{2m}$ — коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ — собственная частота той же колебательной системы; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — частота затухающих колебаний; $A_0 e^{-\delta t}$ — амплитуда затухающих колебаний].

• Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

[$A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период].

• Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

[$A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период; δ — коэффициент затухания; T — период затухающих колебаний; τ — время релаксации; N_e — число колебаний, совершаемых за время релаксации].

• Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

[Θ — логарифмический декремент затухания; ω_0 — циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; δ — коэффициент затухания].

• Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение для установившихся колебаний

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \quad x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

[x — смещение колеблющегося тела из положения равновесия; F_0 — амплитуда вынуждающей силы; m — масса тела];

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

[ω_0 — собственная частота той же колебательной системы; ω — частота внешней вынуждающей силы; δ — коэффициент затухания].

• Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

[ω_0 — собственная частота колебательной системы; δ — коэффициент затухания; F_0 — амплитуда внешней вынуждающей силы; m — масса тела].

Примеры решения задач

4.1. Гармонические колебания материальной точки описываются уравнением $x = 0{,}01\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) период колебаний; 4) частоту колебаний; 5) начальную фазу колебаний.

Дано: $x = 0{,}01\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$, м.

Найти: 1) A; 2) ω_0; 3) T; 4) ν; 5) φ.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{1}$$

где x — смещение колеблющейся точки из положения равновесия в момент времени t; A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая (циклическая) частота; φ — начальная фаза.

По условию задачи

$$x = 0{,}01\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{8}\right), \text{ м.} \tag{2}$$

Из этого уравнения, согласно (1), можем записать, что $A = 0{,}01$ м; $\omega_0 = 4\pi$ с$^{-1}$; $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

а частота колебаний — число полных колебаний, совершаемых в единицу времени,

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Ответ: 1) $A = 0{,}01$ м; 2) $\omega_0 = 4\pi$ с$^{-1}$; 3) $T = 0{,}5$ с; 4) $\nu = 2$ Гц; 5) $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

4.2. Уравнение гармонического колебательного движения материальной точки имеет вид $x = 0{,}02\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, м. Определите: 1) смещение x_0 материальной точки из положения равновесия в начальный момент времени; 2) период колебаний.

Дано: $x = 0{,}02\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, м.

Найти: 1) x_0; 2) T.

Решение. Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{1}$$

По условию задачи смещение материальной точки из положения равновесия в момент $t = 0$ равно x_0, т. е., согласно (1),

$$x_0 = A\cos\varphi. \tag{2}$$

Из заданного по условию задачи уравнения

$$x = 0{,}02\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right),\ \text{м}$$

следует, что амплитуда колебаний $A = 0{,}02$ м; циклическая частота $\omega_0 = 2\pi$ с$^{-1}$; начальная фаза $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Подставив найденные значения в выражение (2), найдем, что искомое $x_0 = 1{,}73$ см.

Искомый период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1\ \text{с}.$$

Ответ: 1) $x_0 = 1{,}73$ см; 2) $T = 1$ с.

4.3. Ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $a(t) = -45\pi^2\cos 3\pi t$. Определите зависимость смещения этой точки от времени.

Дано: $a(t) = -45\pi^2\cos 3\pi t$.

Найти: $x(t)$.

Решение. Ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t},$$

откуда $\mathrm{d}v(t) = a(t)\,\mathrm{d}t$. Проинтегрировав это выражение, найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = -\int_0^t 45\pi^2\cos 3\pi t\,\mathrm{d}t = -\frac{45\pi^2}{3\pi}\sin 3\pi t = -15\pi\sin 3\pi t.$$

Учитывая, что

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},$$

аналогично получим

$$\mathrm{d}x(t) = v(t)\,\mathrm{d}t,$$

откуда посредством интегрирования найдем искомую зависимость смещения материальной точки от времени:

$$x(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = -\int_0^t 15\pi\sin 3\pi t\,\mathrm{d}t = \frac{15\pi}{3\pi}\cos 3\pi t = 5\cos 3\pi t.$$

Ответ: $x(t) = 5\cos 3\pi t$.

4.4. Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $\nu = 1$ Гц, в момент времени $t = 0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0 = 4$ см, со скоростью $v_0 = -16$ см/с. Определите амплитуду колебаний.

Дано: $\nu = 1$ Гц; $t = 0$; $x_0 = 4$ см ($4 \cdot 10^{-2}$ м); $v_0 = -16$ см/с ($-1{,}6 \cdot 10^{-1}$ м/с).

Найти: A.

Решение. Уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A\cos(2\pi\nu t + \varphi) \tag{1}$$

(учли, что циклическая частота $\omega_0 = 2\pi\nu$).

Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\pi\nu A\sin(2\pi\nu t + \varphi). \tag{2}$$

В начальный момент времени ($t = 0$) смещение и скорость материальной точки, согласно (1) и (2),

$$x_0 = A\cos\varphi; \tag{3}$$

$$v_0 = -2\pi\nu A\sin\varphi. \tag{4}$$

Поделив (4) на (3), получим

$$-2\pi\nu\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{v_0}{x_0},$$

откуда $\mathrm{tg}\,\varphi = -\dfrac{v_0}{2\pi\nu x_0}$ или $\varphi = -\mathrm{arctg}\dfrac{v_0}{2\pi\nu x_0} = 32{,}5°$.

Из формулы (3) искомая амплитуда колебаний

$$A = \frac{x_0}{\cos\varphi}.$$

Учитывая, что $\cos\varphi = 0{,}843$, получаем $A = 4{,}74$ см.

Ответ: $A = 4{,}74$ см.

4.5. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 1$ Гц. Запишите уравнение колебаний точки, если в начальный момент времени она проходит положение равновесия с отрицательной скоростью $v_0 = -3{,}14$ см/с.

Дано: $\nu = 1$ Гц; $t = 0$; $x_0 = 0$; $v_0 = -3{,}14$ см/с ($-3{,}14 \cdot 10^{-2}$ м/с).

Найти: $x(t)$.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{1}$$

Циклическая частота

$$\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi\ \mathrm{c}^{-1}.$$

В начальный момент времени $t = 0$ смещение $x_0 = 0$ (положение равновесия), т. е.

$$x_0 = A\cos\varphi = 0,$$

откуда $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Скорость материальной точки

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

В начальный момент времени ($t = 0$) при прохождении положения равновесия (условие задачи) скорость точки

$$v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi = -3{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}. \tag{2}$$

Учитывая, что $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, уравнение (2) можно записать в виде: $A\omega_0 = 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ м/с, откуда амплитуда колебаний

$$A = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-2}}{2\pi} = 0{,}005 \text{ м} = 0{,}5 \text{ см}.$$

Подставив найденные значения ω_0, A и φ в уравнение (1), запишем искомое уравнение колебаний:

$$x = 0{,}5\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ см}.$$

Ответ: $x = 0{,}5\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, см.

4.6. Материальная точка массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}2$ Гц. Амплитуда колебаний равна 5 см. Определите: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колеблющейся точки.

Дано: $m = 10$ г (10^{-2} кг); $\nu = 0{,}2$ Гц; $A = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: 1) $F_{\max}$; 2) E.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Тогда скорость и ускорение колеблющейся точки

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на точку,

$$F = ma = -A\omega_0^2 m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$F = F_{\max}$ при $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1$, поэтому искомое максимальное значение силы

$$F_{\max} = A\omega_0^2 m = 4\pi^2\nu^2 Am$$

(учли, что $\omega_0 = 2\pi\nu$).

Полная энергия колеблющейся точки

$$E = T_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Подставив сюда ω_0, найдем искомую полную энергию:

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

Ответ: 1) $F_{\max} = 0{,}8$ мН; 2) $E = 19{,}7$ мкДж.

4.7. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1\cos 2t$, м. В тот момент времени, когда возвращающая сила достигла значения $F = -18$ мН, точка обладает потенциальной энергией $\Pi = 0{,}4$ мДж. Определите этот момент времени и соответствующую ему фазу колебаний.

Дано: $x = 0{,}1\cos 2t$, м; $F = -18$ мН $(-1{,}8\cdot 10^{-4}$ Н$)$; $\Pi = 0{,}4$ мДж $(4\cdot 10^{-4}$ Дж$)$.

Найти: t; ωt.

Решение. Возвращающая сила $F = -kx = ma$, где k — коэффициент упругости; m — масса материальной точки; a — ее ускорение.

Если уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos\omega t,$$

то соответственно скорость и ускорение материальной точки

$$v = -A\omega\sin\omega t; \quad a = -A\omega^2\cos\omega t.$$

Следовательно, возвращающая сила

$$F = -mA\omega^2\cos\omega t. \tag{1}$$

Потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F в точке с координатой x:

$$\Pi = -\int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x m\omega^2 x\mathrm{d}x = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2\omega t. \tag{2}$$

Поделив выражения (2) и (1), найдем $\dfrac{\Pi}{F} = -\dfrac{A\cos\omega t}{2}$, откуда

$$\cos\omega t = -\frac{2\Pi}{AF}. \tag{3}$$

Согласно условию задачи, $x = 0{,}1\cos 2t$, м, откуда следует, что амплитуда $A = 0{,}1$ м, а циклическая частота $\omega = 2$ рад/с.

Из выражения (3) искомая фаза колебаний

$$\omega t = \arccos\left(-\frac{2\Pi}{AF}\right) = 63^\circ\,37' = 1{,}11 \text{ рад}; \; t = 0{,}555 \text{ с}.$$

Ответ: $t = 0{,}555$ с; $\omega t = 1{,}11$ рад.

4.8. Материальная точка массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 40$ см и периодом $T = 4$ с. В начальный момент времени $t_0 = 0$ смещение x_0 достигает максимально возможного значения. Запишите уравнение колебаний точки и определите кинетическую, потенциальную и полную энергии точки в момент времени $t = 3$ с.

Дано: $m = 10$ г $(10^{-2}$ кг$)$; $A = 40$ см $(0{,}4$ м$)$; $t_0 = 0$; $T = 4$ с; $t = 3$ с.

Найти: $x(t)$; T; Π; E.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{1}$$

где циклическая частота $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$ с$^{-1}$ (учли условие задачи); φ — начальная фаза колебаний.

Согласно условию задачи, в момент времени $t_0 = 0$ смещение $x_0 = A$ (A — амплитуда колебаний). Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$x_0 = A\cos\left(\frac{\pi}{2}t_0 + \varphi\right) = A,$$

откуда $\cos\varphi = 1$. Следовательно, начальная фаза $\varphi = 0$.

Используя найденные значения ω_0, φ и заданное A, искомое уравнение колебаний точки:

$$x = 0{,}4\cos\frac{\pi}{2}t, \text{ м}.$$

Кинетическая и потенциальная энергии материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2\frac{\pi}{2}t;$$

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\frac{\pi}{2}t$$

(учли найденные значения ω_0 и φ).

Полная энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Ответ: $x = 0{,}4\cos\dfrac{\pi}{2}t$, м; $\Pi = 1{,}97$ мДж; $T = 0$; $E = 1{,}97$ мДж.

4.9. Материальная точка массой $m = 5$ г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и частотой $\nu = 1$ Гц. В начальный момент времени $t_0 = 0$ смещение $x_0 = A$. Определите кинетическую и потенциальную энергии в момент времени $t = 2{,}2$ с.

Дано: $m = 5$ г ($5 \cdot 10^{-3}$ кг); $A = 10$ см (0,1 м); $\nu = 1$ Гц; $t_0 = 0$; $x_0 = A$; $t = 2{,}2$ с.

Найти: T; Π.

Решение. Кинетическая и потенциальная энергии материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi); \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi), \tag{2}$$

где циклическая частота $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi$ с$^{-1}$ (учли условие задачи); φ — начальная фаза.

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

которое для условий задачи запишется в виде

$$x = 0{,}1\cos(2\pi t + \varphi),\ \text{м}. \tag{3}$$

Для определения начальной фазы учтем, что при $t_0 = 0$ смещение $x_0 = A$. Тогда можем, согласно (3), записать

$$x_0 = 0{,}1\cos(2\pi\cdot 0 + \varphi) = 0{,}1\ \text{м},$$

т. е. $\cos\varphi = 1$ и $\varphi = 0$. Таким образом, фаза колебаний равна $2\pi t$ с$^{-1}$.

При заданной фазе колебаний уравнения (1) и (2) примут вид:

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2 2\pi t; \quad \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2 2\pi t.$$

Ответ: $T = 892$ мкДж; $\Pi = 94{,}2$ мкДж.

4.10. Материальная точка массой $m = 10$ г движется под действием силы $F = 2\cos\omega t$ (мН), где $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$. Определите максимальную кинетическую энергию материальной точки.

Дано: $m = 10$ г (10^{-2} кг); $F = 2\cos\omega t$, мН ($2\cdot 10^{-3}\cos\omega t$, Н); $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$.

Найти: $T_{\max}$.

Решение. Заданную в задаче силу можно записать в общем виде как

$$F = F_0\cos\omega t, \tag{1}$$

где F_0 — амплитуда силы ($F_0 = 2\cdot 10^{-3}$ Н); ω — циклическая частота.

Закон движения материальной точки

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

где v — скорость точки. Из уравнений (1) и (2) найдем

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

откуда скорость

$$v = \int_0^t \frac{F_0}{m}\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{F_0}{m\omega^2}\sin\omega t.$$

Кинетическая энергия материальной точки

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{F_0^2}{2m\omega^2}\sin^2\omega t.$$

Кинетическая энергия максимальна ($T = T_{\max}$) при $\sin\omega t = \pm 1$, т. е. искомая максимальная кинетическая энергия материальной точки

$$T_{\max} = \frac{F_0^2}{2m\omega^2}.$$

Ответ: $T_{\max} = 5{,}01$ мкДж.

4.11. Пружинный маятник совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 8$ см, периодом $T = 12$ с и начальной фазой $\varphi = 0$. Определите потенциальную энергию маятника в момент времени $t = 2$ с, когда возвращающая сила F в первый раз достигает значения -5 мН.

Дано: $A = 8$ см (0,08 м); $T = 12$ с; $\varphi = 0$; $t = 2$ с; $F = -5$ мН ($5 \cdot 10^{-3}$ Н).

Найти: П.

Решение. Уравнение гармонических колебаний пружинного маятника можно представить в виде

$$x = A\cos\omega t \tag{1}$$

(учли, что начальная фаза $\varphi = 0$), где циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Возвращающая сила упругости деформированной пружины пропорциональна смещению x из положения равновесия и равна

$$F = -kx = -kA\cos\omega t \tag{3}$$

[учли формулу (1)], где k — жесткость пружины.

Потенциальная энергия маятника, совершающего под действием упругой силы гармонические колебания,

$$\Pi = -\int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t \tag{4}$$

[учли формулу (1)].

Поделив (4) на (3) и учитывая выражение (2), найдем искомую потенциальную энергию:

$$\Pi = -\frac{1}{2}AF\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Ответ: $\Pi = 0{,}1$ мДж.

4.12. Тело массой $m = 2$ кг, подвешенное к упругой пружине, совершает гармонические колебания. Определите жесткость k пружины, если за время $t = 1{,}5$ мин число N полных колебаний равно 60.

Дано: $m = 2$ кг; $t = 1{,}5$ мин (90 с); $N = 60$.

Найти: k.

Решение. Период гармонических колебаний тела, подвешенного на пружине (пружинный маятник),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m — масса тела; k — жесткость пружины.

С другой стороны, период колебаний

$$T = \frac{t}{N},$$

где t — время, за которое совершилось N полных колебаний.

Приравняв оба выражения

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{t}{N},$$

найдем искомую жесткость пружины

$$k = \frac{4\pi^2 m N^2}{t^2}.$$

Ответ: $k = 35{,}1$ Н/м.

4.13. Груз, подвешенный к спиральной пружине, совершает гармонические колебания. Как изменится период колебаний после подвешивания еще одного груза с массой, в три раза большей первоначальной?

Дано: $m_2 = 3m_1$.

Найти: $\frac{T_2}{T_1}$.

Решение. Период гармонических колебаний груза, подвешенного на пружине (пружинный маятник),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (1)$$

где m — масса груза; k — жесткость пружины.

Записав формулу (1) для грузов массами m_1 и $m_1 + m_2$,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}},$$

найдем искомое отношение

$$\frac{T_2}{T_1} = 2,$$

т. е. период колебаний увеличится в два раза.

Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = 2$.

4.14. При подвешивании грузов массами m_1 и $m_2 = 2m_1$ к свободным пружинам пружины удлинились одинаково ($\Delta x = 15$ см). Пренебрегая массой пружин, определите: 1) периоды колебаний грузов; 2) какой из грузов при одинаковых амплитудах обладает большей энергией и во сколько раз?

Дано: m_1; $m_2 = 2m_1$; $\Delta x = 15$ см (0,15 м); $A_1 = A_2 = A$.

Найти: 1) T_1; T_2; 2) $\frac{E_1}{E_2}$.

Решение. Из условия равновесия грузов на пружинах следует, что

$$m_1 g = k_1 \Delta x \text{ и } m_2 g = k_2 \Delta x$$

(удлинение в обоих случаях одинаково), где k_1 и k_2 — соответственно жесткость первой и второй пружин. Тогда

$$k_1 = \frac{m_1 g}{\Delta x} \text{ и } k_2 = \frac{m_2 g}{\Delta x}. \tag{1}$$

Периоды колебаний грузов на пружинах соответственно

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \text{ и } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}. \tag{2}$$

Подставив выражения (1) в формулы (2), найдем

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{g}} \text{ и } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{g}},$$

т. е. периоды колебаний равны:

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{g}}.$$

Механическая энергия груза, колеблющегося на пружине,

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}, \tag{3}$$

где A — амплитуда колебаний; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ — циклическая частота.

Поскольку по условию задачи $A_1 = A_2 = A$ и нашли, что $T_1 = T_2$, поэтому искомое отношение энергий, согласно формуле (3),

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1}{2m_1} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, E_1 в два раза меньше, чем E_2.

Ответ: $T_1 = T_2 = 0{,}776$ с; $E_2 = 2E_1$.

4.15. На идеально гладкой плоской поверхности лежит брусок массой $M = 4$ кг, прикрепленный к стене (см. рисунок) упругой пружиной. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v_0 = 600$ м/с и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в брусок и застряла в нем. Пренебрегая сопротивлением воздуха и массой пружины, определите жесткость k пружины и период колебаний бруска с застрявшей в нем пулей, если амплитуда колебаний $A = 10$ см.

Дано: $M = 4$ кг; $m = 10$ г (0,01 кг); $v_0 = 600$ м/с; $A = 10$ см (0,1 м).

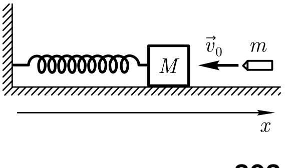
Найти: k; T.

Решение. Брусок с застрявшей в нем пулей совершает гармонические колебания под действием упругой силы. Удар неупругий (пуля застряла в бруске), поэтому после удара брусок и пуля движутся с общей скоростью v, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$mv_0 = (M + m)v$$

(уравнение записано в проекции на ось x), откуда

$$v = \frac{mv_0}{M + m}. \tag{1}$$



Согласно закону сохранения механической энергии, кинетическая энергия бруска с застрявшей в нем пулей переходит в потенциальную энергию деформации:

$$\frac{(M+m)v^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

откуда искомая жесткость пружины

$$k = \frac{(M+m)v^2}{A^2} = \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)A^2}.$$

Циклическая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$, тогда искомый период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

Ответ: $k = 898$ Н/м; $T = 0{,}42$ с.

4.16. Физический маятник в виде тонкого однородного стержня длиной 0,5 м совершает гармонические колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку подвеса O, не совпадающую с центром масс C. Определите, на каком расстоянии x от центра масс должна находиться точка подвеса, чтобы циклическая частота колебаний была максимальна.

Дано: $l = 0{,}5$ м; $\omega = \omega_{\max}$.

Найти: x.

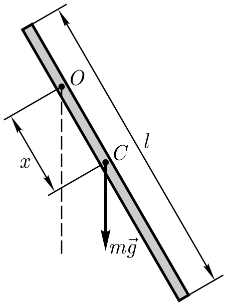
Решение. Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}},$$

где J — момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O, не совпадающую с центром масс C стержня (см. рисунок); m — масса стержня; g — ускорение свободного падения; x — расстояние между точкой подвеса O и центром масс C.

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}. \tag{1}$$



Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса, находящуюся от центра масс на расстоянии x,

$$J = J_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + mx^2, \tag{2}$$

где $J_0 = \dfrac{ml^2}{12}$ — момент инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс стержня (через середину стержня).

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \tag{3}$$

Найдем экстремум функции (3) (по условию задачи циклическая частота максимальна):

$$\frac{d\omega}{dx} = 0; \qquad \frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3g}(l^2 - 12x^2)}{\sqrt{x(l^2 + 12x^2)^3}} = 0,$$

откуда

$$l^2 - 12x^2 = 0$$

(нас интересуют только положительные решения), т. е. искомое расстояние

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Ответ: $x = 14{,}4$ см.

4.17. Тонкий обруч подвешен на вбитый в стену гвоздь и совершает гармонические колебания с периодом $T = 1{,}56$ с в плоскости, параллельной стене. Определите радиус обруча.

Дано: $T = 1{,}56$ с.

Найти: R.

Решение. Тонкий обруч под действием силы тяжести совершает колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс C обруча (см. рисунок).

Это — пример физического маятника.

Период колебаний физического маятника

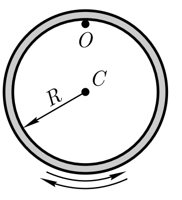
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \tag{1}$$

где J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O; l — расстояние между точкой подвеса O и центром масс C маятника; m — масса обруча; g — ускорение свободного падения.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции J диска относительно оси, не проходящей через его центр масс,

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J_0 — момент инерции обруча относительно оси, проходящей через центр масс обруча; a — расстояние между осями. Учитывая, что $J_0 = mR^2$ (тонкостенный диск); $a = R$, последняя формула запишется в виде



$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), учитывая, что $l = R$, найдем искомый радиус диска:

$$R = \frac{T^2 g}{8\pi^2}.$$

Ответ: $R = 30{,}2$ см.

4.18. Один из математических маятников совершил $N_1 = 20$ колебаний, другой за то же время совершил $N_2 = 12$ колебаний. Определите длины обоих маятников, если разность их длин $\Delta l = 16$ см.

Дано: $t_1 = t_2 = t$; $N_1 = 20$; $N_2 = 12$; $\Delta l = 16$ см (0,16 м).

Найти: l_1; l_2.

Решение. Период колебаний

$$T = \frac{t}{N},$$

где t — время, за которое совершилось N полных колебаний.

По условию задачи,

$$N_1 T_1 = N_2 T_2, \tag{1}$$

где периоды колебаний первого и второго математических маятников

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \text{ и } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \tag{2}$$

(g — ускорение свободного падения).

Из выражений (1) и (2) следует, что

$$N_1\sqrt{l_1} = N_2\sqrt{l_2}. \tag{3}$$

Учитывая, что

$$\Delta l = l_2 - l_1, \tag{4}$$

и решая уравнения (3) и (4), найдем искомые длины математических маятников:

$$l_1 = \frac{N_2^2 \Delta l}{N_1^2 - N_2^2}; \quad l_2 = \frac{N_1^2 \Delta l}{N_1^2 - N_2^2}.$$

Ответ: $l_1 = 9$ см; $l_2 = 25$ см.

4.19. Период колебаний математического маятника длиной l, подвешенного к потолку кабины в неподвижном лифте, равен T. Определите период колебаний этого маятника, если лифт: 1) движется вертикально вверх с ускорением $a = 0{,}5g$; 2) движется вертикально вниз с ускорением $a = 0{,}5g$; 3) движется равномерно.

Дано: T; 1) $a = 0{,}5g$; 2) $a = 0{,}5g$; 3) $a = 0$.

Найти: T_1; T_2; T_3.

Решение. Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина математического маятника; g — ускорение свободного падения.

1) Если лифт движется с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вверх, то на тело массой m помимо силы тяжести будет действовать сила инерции, направленная вниз, и суммарная сила $F = m(g + a)$. Тогда период колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

2) Если лифт движется с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным вниз, то сила инерции будет направлена вверх, и

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

3) При равномерном движении лифта ($a = 0$)

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ответ: $T_1 = 0{,}816\,T$; $T_2 = 1{,}41\,T$; $T_3 = T$.

4.20. При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с той же амплитудой и тем же периодом. Определите разность фаз складываемых колебаний.

Дано: $A_1 = A_2 = A$; $T_1 = T_2 = T$.

Найти: $\varphi_2 - \varphi_1$.

Решение. Согласно условию задачи, складываемые и результирующее колебания имеют одинаковый период, а это означает, что циклические частоты их также равны ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

Уравнения складываемых колебаний с учетом равенства амплитуд и частот:

$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1);$$
$$x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 — соответственно начальные фазы первого и второго колебаний.

Уравнение результирующего колебания

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда A в общем случае задается соотношением

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

или, учитывая, что амплитуды складываемых и результирующего колебаний равны,

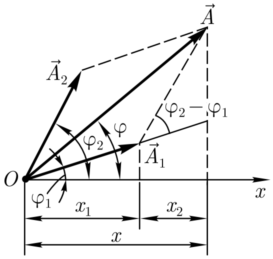
$$A^2 = 2A^2 + 2A^2\cos(\varphi_2 - \varphi_1);\ \text{откуда}\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{1}{2},$$

а искомая разность фаз складываемых колебаний

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.

4.21. Складываются два гармонических колебания, описываемых уравнениями $x_1 = 0,2\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$, м и $x_2 = 0,3\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, м. Сложив эти колебания с помощью метода векторных диаграмм, запишите уравнение результирующего колебания. Определите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.



Дано: $x_1 = 0,2\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$, м; $x_2 = 0,3\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, м.

Найти: $x(t)$; A; φ.

Решение. Согласно заданным в задаче уравнениям, складываемые гармонические колебания имеют одинаковые циклические частоты ($\omega_1 = \omega_2 = \omega = \pi$ с$^{-1}$); первое колебание характеризуется амплитудой $A_1 = 0{,}2$ м, второе — амплитудой $A_2 = 0{,}3$ м. Начальная фаза первого колебания $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$, второго — $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

Сложим колебания, воспользовавшись методом векторных диаграмм (см. рисунок). Поскольку векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω (равна циклической частоте колебаний), разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними сохраняется постоянной

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{6}.$$

Результирующее колебание (см. рисунок)

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}; \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \tag{3}$$

Вычисляя, получаем $A = 48{,}4$ см; $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}11$; $\varphi = \operatorname{arctg}\varphi = 48°$.

Используя полученные данные для A и φ, уравнение результирующего колебания можно записать в виде:

$$x = 48,4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ см}, \tag{4}$$

т. е. сумма двух гармонических колебаний одного направления с одинаковой частотой является гармоническим колебанием (4) с той же частотой и амплитудой и фазой, определяемыми выражениями (2) и (3).

Ответ: $x = 48,4\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, см ; $A = 48{,}4$ см; $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

4.22. Используя комплексную форму записи колебаний, сложите два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 0,2\cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{12}\right)$, м и $x_2 = 0,2\cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$, м, определив амплитуду результирующего колебания.

Дано: $x_1 = 0{,}2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{12}\right)$, м; $x_2 = 0{,}2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, м.

Найти: A.

Решение. Запишем складываемые колебания в комплексной форме:

$$x_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}, \tag{1}$$

$$x_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}, \tag{2}$$

где $A_1 = A_2 = 0{,}2$ м — амплитуды колебаний; $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$ — одинаковая для обоих колебаний циклическая частота; $\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$ — начальная фаза первого колебания; $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ — начальная фаза второго колебания.

Сложим колебания (1) и (2). Результирующее колебание

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}. \tag{3}$$

Квадрат амплитуды результирующего колебания получим, умножив правую часть выражения (3) на сопряженную с ней величину:

$$A^2 = \left[A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}\right]\left[A_1 e^{-i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{-i(\omega t + \varphi_2)}\right],$$

откуда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right). \tag{4}$$

Применив формулу Эйлера ($e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$), получим

$$e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} = 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

откуда искомая амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = A_1\sqrt{2[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]}$$

(учли, что амплитуды складываемых колебаний равны).

Ответ: $A = 39{,}6$ см.

4.23. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми амплитудами, начальными фазами, равными нулю, и периодами $T_1 = 3$ с и $T_2 = 3{,}04$ с. Определите: 1) период результирующего колебания; 2) период биений.

Дано: $A_1 = A_2 = A$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; $T_1 = 3$ с; $T_2 = 3{,}04$ с.

Найти: 1) T; 2) $T_б$.

Решение. По условию задачи, складываемые колебания имеют одинаковые амплитуды, начальные фазы, равные нулю, и разные периоды (разные циклические частоты, так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$). Тогда уравнения складываемых колебаний

$$x_1 = A\cos\omega_1 t;$$

$$x_2 = A\cos\omega_2 t.$$

Суммируя эти выражения, получим результирующее колебание x с периодически изменяющейся амплитудой

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t\right). \quad (1)$$

Искомый период результирующего колебания найдем, используя уравнение (1),

$$T = \frac{2\pi}{\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{2}{\dfrac{\omega_1}{2\pi} + \dfrac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}.$$

Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\dfrac{\omega_1}{2\pi} - \dfrac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{T_1T_2}{T_2 - T_1}.$$

Ответ: $T = 3{,}02$ с; $T_б = 228$ с.

4.24. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми амплитудами и начальными фазами, равными нулю, мало отличающихся по частоте, описывается уравнением $x = A\cos 2t\cos 48t$ (t — в секундах). Определите циклические частоты складываемых колебаний и период биений результирующего колебания.

Дано: $B_1 = B_2 = B$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; $x = A\cos 2t\cos 48t$.

Найти: ω_1; ω_2; $T_б$.

Решение. При сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми амплитудами, начальными фазами, равными нулю, и близкими частотами

$$x_1 = B\cos\omega_1 t;$$

$$x_2 = B\cos\omega_2 t,$$

результирующее колебание x имеет периодически изменяющуюся амплитуду:

$$x = x_1 + x_2 = 2B\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t\right). \quad (1)$$

Учитывая, что результирующее колебание, заданное в задаче, имеет вид

$$x = A\cos 2t\cos 48t, \quad (2)$$

из уравнений (1) и (2) найдем

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 2; \qquad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 48.$$

Решая два последних уравнения, получим $\omega_1 = 50\ с^{-1}$; $\omega_2 = 46\ с^{-1}$.

Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\ с.$$

Ответ: $\omega_1 = 50\ с^{-1}$; $\omega_2 = 46\ с^{-1}$; $T_б = 1{,}57$ с.

4.25. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания с одинаковыми периодами 0,2 с и одинаковой начальной фазой $\frac{\pi}{3}$. Амплитуда одного колебания $A = 4$ см, второго — $B = 3$ см. Найдите уравнение результирующего колебания.

Дано: $T_1 = T_2 = T = 0{,}2$ с; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \frac{\pi}{3}$; $A = 4$ см (0,04 м); $B = 3$ см (0,03 м).
Найти: $y(x)$.

Решение. При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты (одинакового периода) уравнение траектории результирующего колебания имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi, \qquad (1)$$

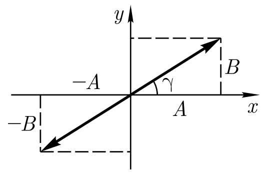
где A и B — амплитуды складываемых колебаний; φ — разность между фазами колебаний. Уравнение (1) описывает эллипс, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно.

Согласно условию задачи, разность фаз $\varphi = 0$, поэтому уравнение (1) примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

или

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$



откуда

$$y = \frac{B}{A}x$$

— *уравнение прямой*. Следовательно, результирующее колебание будет происходить вдоль прямой линии (см. рисунок).

Угол наклона прямой найдется из уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{B}{A} = 0{,}75, \text{ откуда } \gamma = 36^\circ\,52'.$$

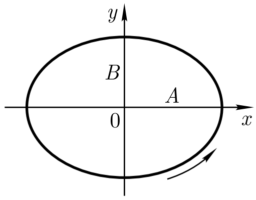
Результирующее колебание является гармоническим с тем же периодом T (с той же циклической частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$), а амплитуда результирующего колебания $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 5$ см.

Следовательно, уравнение результирующего колебания

$$y(x) = 0{,}05\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ м.}$$

Ответ: $y(x) = 0{,}05\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м.

4.26. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 0{,}2\sin\pi t$, м и $y = -0{,}1\cos\pi t$, м. Определите: 1) урав-



нение траектории точки, вычертите траекторию движения точки, указав направление ее движения; 2) скорость точки в момент времени $t = 0{,}2$ с.

Дано: $x = 0{,}2\sin\pi t$, м; $y = -0{,}1\cos\pi t$, м; $t = 0{,}2$ с.

Найти: 1) $y(x)$; 2) v.

Решение. Для нахождения уравнения траектории точки следует из заданных в задаче уравнений исключить время t.

Преобразуем уравнения

$$x = 0{,}2\sin\pi t, \tag{1}$$

$$y = -0{,}1\cos\pi t \tag{2}$$

к виду

$$\frac{x}{0{,}2} = \sin\pi t; \qquad \frac{y}{0{,}1} = -\cos\pi t.$$

Возведя оба уравнения в квадрат и сложив их, получаем

$$\frac{x^2}{0{,}2^2} + \frac{y^2}{0{,}1^2} = \sin^2\pi t + \cos^2\pi t$$

или

$$\frac{x^2}{0{,}2^2} + \frac{y^2}{0{,}1^2} = 1$$

— искомое уравнение траектории точки — *уравнение эллипса* с полуосями $A = 0{,}2$ м и $B = 0{,}1$ м (см. рисунок).

Чтобы определить направление движения точки, рассмотрим, как изменяется ее положение с течением времени. При $t = 0$ координаты точки $x(0) = 0$, $y(0) = -0{,}1$ м. Далее, например, при $t = 0{,}5$ с координаты точки $x(0{,}5) = 0{,}2$ м, $y(0{,}5) = 0$. Следовательно, точка движется по траектории против часовой стрелки (см. рисунок).

Скорость точки при ее движении по эллипсу

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y,$$

где $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ — скорости точки в слагаемых колебаниях. Поскольку складываются взаимно перпендикулярные колебания, то

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{3}$$

Из формул (1) и (2) получим

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0{,}2\pi\cos\pi t, \tag{4}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}1\pi\sin\pi t. \tag{5}$$

Подставив выражения (4) и (5) в формулу (3), найдем искомую скорость в момент времени t:

$$v = \sqrt{0{,}04\pi^2 \cos^2 \pi t + 0{,}01\pi^2 \sin^2 \pi t}.$$

Ответ: 1) $\dfrac{x^2}{0{,}2^2} + \dfrac{y^2}{0{,}1^2} = 1$; 2) $v = 0{,}54$ м/с.

4.27. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых $x = \cos 2\pi t$ и $y = \cos \pi t$. Найдите уравнение траектории точки. Вычертите траекторию точки с соблюдением масштаба, указав направление движения точки.

Дано: $x = \cos 2\pi t$, см; $y = \cos \pi t$, см.

Найти: $y(x)$.

Решение. Для нахождения уравнения траектории точки следует из заданных в задаче уравнений исключить время t.

Второе заданное уравнение, воспользовавшись формулой $\cos^2 \alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, можно записать в виде

$$y = \cos \pi t = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\pi t}{2}}.$$

Учитывая, что $x = \cos 2\pi t$, придем к уравнению

$$y = \sqrt{\frac{1 + x}{2}},$$

откуда искомое уравнение материальной точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях,

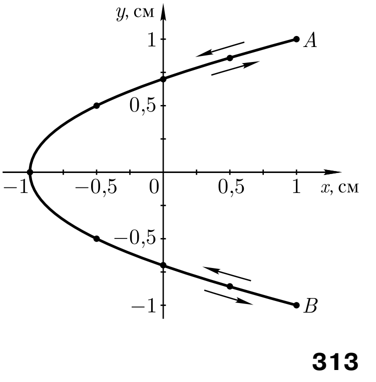
$$2y^2 - x = 1 \qquad (1)$$

— *уравнение параболы.*

Из уравнений $x = \cos 2\pi t$, см и $y = \cos \pi t$, см следует, что смещение точки по осям координат x и y ограничено и заключено в пределах от -1 см до $+1$ см.

Для построения траектории найдем, согласно уравнению (1), значения y, отвечающие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$ см.

x, см	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
y, см	0	$\pm 0{,}5$	$\pm 0{,}707$	$\pm 0{,}866$	± 1



Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость $x0y$ найденные точки. Соединив их, получим траекторию точки, совершающей одновременно взаимно перпендикулярные колебания согласно заданным в задаче уравнениям.

Для определения направления движения точки рассмотрим, как изменяется ее положение с течением времени. При $t = 0$ координаты точки $x(0) = 1$ см, $y(0) = 1$ см. Далее, например, при $t = 0{,}5$ с координаты точки изменяются и станут равными $x(0{,}5) = -1$ см, $y(0{,}5) = 0$ см, при $t = 1$ с — $x(1) = 1$ см,

$y(1) = -1$ см и т. д. Анализ расположения точек показывает, что направление движения происходит от точки A к началу координат (это указано стрелкой). После того как в момент времени $t = 1$ с колеблющаяся точка достигнет точки B, она будет двигаться в обратном направлении.

Ответ: $2y^2 - x = 1$.

4.28. Запишите уравнение затухающих колебаний материальной точки, если смещение x_0 точки при $t = \dfrac{T}{3}$ составляет 10 см, период затухающих колебаний $T = 3$ с, логарифмический декремент затухания $\Theta = 0{,}03$, начальная фаза колебаний равна нулю.

Дано: $t = \dfrac{T}{3}$; $x_0 = 10$ см (0,1 м); $T = 3$ с; $\Theta = 0{,}03$.

Найти: $x(t)$.

Решение. Уравнение затухающих колебаний, если начальная фаза равна нулю, имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos \omega t, \tag{1}$$

где A_0 — амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$.

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Коэффициент затухания δ найдем из выражения для логарифмического декремента затухания: $\Theta = \delta T$, откуда

$$\delta = \frac{\Theta}{T}. \tag{3}$$

Амплитуду A_0 найдем из начальных условий ($x_0 = 10$ см при $t = \dfrac{T}{3} = 1$ с), согласно уравнению (1), где

$$x_0 = A_0 e^{-\delta t},$$

откуда

$$A_0 = x_0 e^{\delta t} = x_0 e^{\frac{\Theta}{T} \cdot \frac{T}{3}} = x_0 e^{\frac{\Theta}{3}}. \tag{4}$$

Подставив в формулы (2), (3) и (4) заданные цифры, найдем: $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ с$^{-1}$; $\delta = 0{,}01$; $A_0 = 10{,}1$ см. Тогда, подставив эти значения в уравнение (1), запишем искомое уравнение затухающих колебаний:

$$x = 10{,}1 e^{-0{,}01t} \cos \frac{2\pi}{3} t, \text{ см.}$$

Ответ: $x = 10{,}1 e^{-0{,}01t} \cos \dfrac{2\pi}{3} t$, см.

4.29. Маятник совершил 100 полных колебаний, при этом его амплитуда уменьшилась в 10 раз. Определите логарифмический декремент затухания маятника.

Дано: $N = 100$; $\dfrac{A_0}{A} = 10$.

Найти: Θ.

Решение. Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \delta T = \frac{\delta}{\nu}, \qquad (1)$$

где $T = \dfrac{1}{\nu}$ — условный период затухающих колебаний (ν — частота колебаний); δ — коэффициент затухания.

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}, \qquad (2)$$

где A_0 — амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$.

Из формулы (1) найдем $\delta = \nu\Theta$, где частоту ν вычислим, зная число N полных колебаний за время t, за которое произошло указанное уменьшение амплитуды:

$$N = \frac{t}{T} = t\nu,$$

откуда $\nu = \dfrac{N}{t}$ и тогда

$$\delta = \frac{N\Theta}{t}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), получаем

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-N\Theta},$$

откуда искомый декремент затухания

$$\Theta = \frac{1}{N} \ln \frac{A_0}{A}.$$

Ответ: $\Theta = 0{,}023$.

4.30. Логарифмический декремент Θ затухания камертона, колеблющегося с частотой $\nu = 100$ Гц, составляет 0,002. Определите промежуток времени, за который амплитуда возбужденного камертона уменьшится в 50 раз.

Дано: $\nu = 100$ Гц; $\Theta = 0{,}002$; $\dfrac{A_0}{A} = 50$.

Найти: t.

Решение. Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}, \qquad (1)$$

где A_0 — начальная амплитуда (в момент времени $t = 0$); δ — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания $\Theta = \delta T$, где $T = \dfrac{1}{\nu}$ — условный период затухающих колебаний. Тогда

$$\delta = \Theta\nu$$

и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\Theta\nu t},$$

откуда искомый промежуток времени

$$t = \frac{1}{\Theta\nu} \ln \frac{A_0}{A}.$$

Ответ: $t = 19{,}6$ с.

4.31. Добротность Q колебательной системы равна 314. Определите, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за время, в течение которого система совершает $N = 110$ полных колебаний.

Дано: $Q = 314$; $N = 110$.

Найти: $\frac{A_0}{A_N}$.

Решение. Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A_N = A_0 e^{-\delta t}, \qquad (1)$$

где A_0 — начальная амплитуда (в момент времени $t = 0$); δ — коэффициент затухания; t — время, за которое совершается N колебаний.

Коэффициент затухания найдем из выражения логарифмического декремента затухания: $\Theta = \delta T$, откуда

$$\delta = \frac{\Theta}{T}, \qquad (2)$$

где T — условный период затухающих колебаний. Время, за которое совершается N колебаний,

$$t = NT. \qquad (3)$$

Учитывая формулы (2) и (3), выражение (1) запишется в виде

$$A_N = A_0 e^{-\Theta N}. \qquad (4)$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta},$$

откуда логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \frac{\pi}{Q}.$$

Подставив это выражение в (4), получаем

$$A_N = A_0 e^{-\frac{\pi N}{Q}},$$

откуда искомое

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{\frac{\pi N}{Q}}.$$

Вычисляя, получаем $\frac{A_0}{A_N} = 3$.

Ответ: амплитуда уменьшится в 3 раза.

4.32. Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде за время $t = 1{,}5$ мин, уменьшилась в $n = 75$ раз. Определите коэффициент r сопротивления среды, если масса m маятника равна 200 г.

Дано: $t = 1{,}5$ мин (90 с); $\dfrac{W_0}{W} = n = 75$; $m = 200$ г (0,2 кг).

Найти: r.

Решение. Коэффициент затухания

$$\delta = \frac{r}{2m},$$

где r — коэффициент сопротивления среды; m — масса маятника. Тогда коэффициент сопротивления

$$r = 2\delta m. \tag{1}$$

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \tag{2}$$

где A_0 — начальная амплитуда (в момент времени $t = 0$).

Энергия колебаний E пропорциональна квадрату произведения частоты колебаний на их амплитуду (частота колебаний постоянна), поэтому

$$n = \frac{W_0}{W} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{A_0}{A} = \sqrt{n}. \tag{3}$$

Из выражений (2) и (3) получаем $e^{\delta t} = \sqrt{n}$. Логарифмируя, находим

$$\delta = \frac{\ln\sqrt{n}}{t}.$$

Подставив найденное значение δ в формулу (1), получим искомый коэффициент сопротивления

$$r = \frac{2m\ln\sqrt{n}}{t}.$$

Ответ: $r = 9{,}6$ г/с.

4.33. Точка массой $m = 20$ г совершает затухающие колебания, начальная амплитуда A_0 которых равна 6 см, начальная фаза $\varphi_0 = 0$, коэффициент затухания $\delta = 1{,}6\ \text{с}^{-1}$. В результате действия на это тело внешней периодической силы установились вынужденные колебания, описываемые уравнением $x = 3\cos(10\pi t - 0{,}75\pi)$, см. Найдите: 1) уравнение собственных затухающих колебаний; 2) уравнение внешней периодической силы.

Дано: $m = 20$ г (0,02 кг); $x = 3\cos(10\pi t - 0{,}75\pi)$, см [$0{,}03\cos(10\pi t - 0{,}75\pi)$, м]; $\varphi_0 = 0$; $A_0 = 6$ см (0,06 м); $\delta = 1{,}6\ \text{с}^{-1}$.

Найти: 1) $x_з(t)$; 2) $F(t)$.

Решение. Уравнение собственных затухающих колебаний с нулевой начальной фазой

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos\omega_0 t. \tag{1}$$

Для определения собственной частоты ω_0 колебательной системы запишем выражение для сдвига фаз φ между собственными и вынужденными колебаниями

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{2}$$

где ω — циклическая частота внешней вынуждающей силы, которая, согласно заданному в задаче уравнению вынужденных колебаний, равна 10π. Из этого же уравнения следует, что $\varphi = -0{,}75\pi$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Тогда, согласно (2),

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega},$$

откуда после подстановки числовых значений получаем $\omega_0 = 10{,}5\pi$ с$^{-1}$.

Уравнение (1) собственных затухающих колебаний после подстановки числовых значений запишется в виде:

$$x_з = 0{,}06\,\mathrm{e}^{-1{,}6t}\cos 10{,}5\pi t, \text{ м}.$$

Уравнение внешней вынуждающей силы

$$F = F_0 \cos\omega t,$$

где F_0 и ω — соответственно амплитуда и частота внешней вынуждающей силы (по условию задачи $\omega = 10\pi$ с$^{-1}$).

Зная выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

(из заданного уравнения вынужденных колебаний $A = 0{,}03$ м), найдем амплитуду вынуждающей силы:

$$F_0 = mA\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Подставив числовые значения, получаем $F_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-2}$ Н. Тогда искомое уравнение внешней периодической силы

$$F = 8{,}85 \cdot 10^{-2}\cos 10\pi t, \text{ Н}.$$

Ответ: $x_з = 0{,}06\,\mathrm{e}^{-1{,}6t}\cos 10{,}5\pi t$, м; $F = 8{,}85 \cdot 10^{-2}\cos 10\pi t$, Н.

4.34. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 800$ Гц. Определите резонансную частоту $\nu_{рез}$, если собственная частота ν_0 колебательной системы составляет 802 Гц.

Дано: $\nu = 800$ Гц; $\nu_0 = 802$ Гц.

Найти: $\nu_{рез}$.

Решение. Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \tag{1}$$

где ω_0 — собственная циклическая частота колебательной системы; δ — коэффициент затухания.

Резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) находим

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2; \tag{3}$$

$$\omega_0^2 = \omega_{\text{рез}}^2 + 2\delta^2. \tag{4}$$

Умножив уравнение (3) на 2 и вычитая из него (4), получаем

$$\omega_{\text{рез}}^2 = 2\omega^2 - \omega_0^2. \tag{5}$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, из уравнения (5) найдем искомую резонансную частоту:

$$\nu_{\text{рез}} = \sqrt{2\nu^2 - \nu_0^2}.$$

Ответ: $\nu_{\text{рез}} = 798$ Гц.

4.35. Груз массой $m = 50$ г, подвешенный на нити длиной $l = 20$ см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления $r = 0{,}02$ кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н. Определите: 1) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 2) резонансную амплитуду.

Дано: $m = 50$ г ($5 \cdot 10^{-2}$ кг); $l = 20$ см (0,2 м); $r = 0{,}02$ кг/с; $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н.

Найти: 1) $\omega_{\text{рез}}$; 2) $A_{\text{рез}}$.

Решение. Очевидно, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, является резонансной частотой:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \tag{1}$$

где ω_0 — собственная частота колебаний системы; $\delta = \dfrac{r}{2m}$ — коэффициент затухания.

Груз, подвешенный на нити, можно принять за математический маятник, тогда $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Подставив значения ω_0 и δ в формулу (1), найдем искомую резонансную частоту:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

Подставив в выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

где F_0 — амплитудное значение вынуждающей силы (по условию задачи, $F_0 = 0{,}1$ Н), формулу (1), найдем искомую резонансную амплитуду:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\dfrac{g}{l} - \dfrac{r^2}{4m^2}}}.$$

Ответ: 1) $\omega_{\text{рез}} = 7$ рад/с; 2) $A_{\text{рез}} = 71{,}4$ см.

Задачи для самостоятельного решения

4.36. Запишите уравнение колебательного движения материальной точки, совершающей колебания с амплитудой $A = 3$ см, частотой $\nu = 1$ Гц и начальной фазой $\varphi = 60°$.

4.37. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 5$ см и периодом $T = 5$ с. Запишите уравнение гармонического колебательного движения материальной точки, если ее движение начинается из положения $x_0 = 2{,}5$ см.

4.38. Запишите уравнение гармонического колебания материальной точки, если его амплитуда $A = 10$ см, максимальная скорость колеблющейся точки $v_{\max} = 20$ см/с, начальная фаза $\varphi = 15°$. [$x = 0{,}1\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{12}\right)$, м]

4.39. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно закону $x = 0{,}2\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, м. Определите: 1) период T колебания; 2) максимальную скорость $v_{\max}$ точки; 3) максимальное ускорение $a_{\max}$ точки. [1) $T = 2$ с; 2) $v_{\max} = 0{,}628$ м/с; 3) $a_{\max} = 1{,}97$ м/с^2]

4.40. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 8$ см и периодом $T = \pi$ с. Определите для точки: 1) максимальную скорость $v_{\max}$; 2) максимальное ускорение $a_{\max}$. [1) $v_{\max} = 16$ см/с; 2) $a_{\max} = 32$ см/с^2]

4.41. Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $v(t) = -2\sin\dfrac{\pi}{3}t$. Запишите зависимость смещения этой точки от времени. [$x(t) = \dfrac{6}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{3}t$]

4.42. Гармонические колебания материальной точки описываются уравнением $x = A\sin\omega t$, см. В некоторый момент времени смещение x_1 точки оказалось равным 15 см. При возрастании фазы колебаний вдвое смещение x_2 точки стало равным 24 см. Определите амплитуду A колебаний. [$A = \dfrac{2x_1^2}{\sqrt{4x_1^2 - x_2^2}} = 25$ см]

4.43. Материальная точка массой $m = 15$ г совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 2\sin\left(\dfrac{\pi t}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)$, см. Определите максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии. [1) $|F_{\max}| = mA\omega^2 = 0{,}185$ мН; 2) $T_{\max} = \dfrac{mA^2\omega^2}{2} = 1{,}85$ мкДж]

4.44. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 2$ см. Определите полную энергию E гармонических колебаний точки, если максимальная сила $F_{\max}$, действующая на нее, равна $-0{,}2$ мН. [$E = \dfrac{F_{\max}A}{2} = 2$ мкДж]

4.45. Определите отношение потенциальной энергии П материальной точки, совершающей гармонические колебания, к ее кинетической энергии T, если известна фаза колебаний. [$\dfrac{\Pi}{T} = \operatorname{ctg}^2(\omega_0 t + \varphi)$]

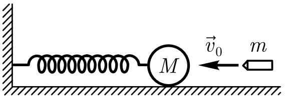
4.46. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см. Полная энергия колебаний $E = 0{,}5$ мкДж. Определите, при каком смещении x от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 10$ мкН. $[x = \dfrac{FA^2}{2E} = 1{,}6$ см$]$

4.47. Груз, подвешенный к упругой пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 10$ см. Определите жесткость k пружины, если известно, что максимальная кинетическая энергия $T_{\max}$ груза равна 1 Дж. $[k = \dfrac{2T_{\max}}{A^2} = 200$ Н/м$]$

4.48. При увеличении массы груза, подвешенного к упругой пружине, на $\Delta m =$ $= 800$ г период колебаний груза увеличивается в три раза. Определите массу первоначального груза, подвешенного к пружине. $[m = \dfrac{\Delta m}{8} = 100$ г$]$

4.49. К пружине подвешена чашка весов с гирями. Период T_1 вертикальных колебаний чашки равен 1 с. После того как на чашку положили добавочные гири, период вертикальных колебаний T_2 стал равным 1,2 с. Определите удлинение Δx пружины после прибавления добавочного груза. $[\Delta x = \dfrac{g}{4\pi^2}(T_2^2 - T_1^2) = 11$ см$]$

4.50. На идеально гладком горизонтальном столе лежит шар массой $M = 3$ кг, прикрепленный к упругой пружине жесткостью $k = 1$ кН/м. В шар попадает пуля массой $m = 8$ г, имеющая в момент удара скорость $v_0 =$ $= 500$ м/с, направленную вдоль оси пружины (см. рисунок). Считая удар абсолютно неупругим, а также пренебрегая сопротивлением и массой пружины, определите амплитуду колебаний шара. $[A = mv_0\sqrt{\dfrac{1}{(m+M)k}} = 7{,}29$ см$]$



4.51. Физический маятник в виде тонкого однородного прямого стержня длиной $l = 1$ м колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на расстояние $x = 30$ см от его середины. Определите период T колебаний стержня, если он совершает малые колебания. $[T =$ $= 2\pi\sqrt{\dfrac{l^2 + 12x^2}{12gx}} = 1{,}52$ с$]$

4.52. Однородный диск радиусом $R = 30$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих поверхности диска. Определите период T колебаний диска. $[T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}} = 1{,}34$ с$]$

4.53. Определите период колебаний математического маятника длиной $l = 1$ м, подвешенного в вагоне, если вагон движется горизонтально с ускорением $a = 3$ м/с^2. $[T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}} = 1{,}96$ с$]$

4.54. Математический маятник длиной $l = 0{,}8$ м установлен в лифте. Определите период T колебаний маятника, если лифт поднимается с ускорением $a = 2{,}8$ м/с^2. $[T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}} = 1{,}58$ с$]$

4.55. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковым периодом $T = 8$ с и одинаковыми амплитудами $A = 2$ см составляет

$\frac{\pi}{4}$. Запишите уравнение результирующего колебания, если начальная фаза одного из складываемых колебаний равна нулю. [$x = 3{,}7\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$, см]

4.56. Определите максимальную скорость материальной точки, одновременно участвующей в двух гармонических колебаниях одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3\cos 2\pi t$, см и $x_2 = 3\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, см. [$v_{\max} = 34{,}8$ см/с]

4.57. Определите период биений, если они возникают при сложении двух колебаний, описываемых уравнениями $x_1 = \cos 5000\pi t$ и $x_2 = \cos 5002\pi t$. [$T_б = 1$ с]

4.58. Найдите уравнение результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами $A = 4$ см, начальными фазами, равными нулю, и циклическими частотами $\omega_1 = 46$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 44$ с$^{-1}$. Определите также период биений. [$x = 0{,}08\cos t \cos 45t$, м; $T_б = 3{,}14$ с]

4.59. Материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos\omega t$, см и $y = 4\cos\omega t$, см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба. [$y = \frac{4}{3}x$]

4.60. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 2\sin\omega t$, м и $y = 2\cos\omega t$, м. Определите уравнение траектории точки, вычертив ее с нанесением масштаба и указав направление движения точки по этой траектории. [$x^2 + y^2 = A^2$, где $A = 2$ мм]

4.61. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = \cos\pi t$ и $y = \cos\frac{\pi t}{2}$. Определите уравнение траектории точки, вычертив ее с соблюдением масштаба и указав направление ее движения. [$2y^2 - x = 1$]

4.62. Запишите уравнение затухающих колебаний материальной точки, если смещение точки при $t = 2T$ составляет 5 см. Период T затухающих колебаний равен 1 с, логарифмический декремент затухания $\Theta = 0{,}3$, начальная фаза колебаний равна нулю. [$x = 9{,}1\,e^{-0{,}3t}\cos 2\pi t$, см]

4.63. Докажите, что для затухающих колебаний, описываемых уравнением $x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos\omega t$, выполняется условие $x(t + T) = x(t)\,e^{-\delta t T}$.

4.64. Гиря массой $m = 1$ кг подвешена к спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Определите число N полных колебаний, совершенных гирей, если при логарифмическом декременте колебаний $\Theta = 0{,}005$ амплитуда колебаний уменьшилась в $n = 3$ раза. [$N = \frac{1}{\Theta}\ln n = 220$]

4.65. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\Theta = 0{,}15$. Определите, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника. [$\frac{A_1}{A_2} = e^{\Theta} = 1{,}16$]

4.66. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1 = 1$ мин уменьшилась в $n_1 = 3$ раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда этих колебаний уменьшится в $n_2 = 81$ раз? [$t_2 = \frac{t_1 \ln n_2}{\ln n_1} = 4$ мин]

4.67. Определите логарифмический декремент колебаний Θ колебательной системы, если собственная частота колебаний $\nu_0 = 1$ кГц, а резонансная частота $\nu_{\text{рез}}$ колебательной системы составляет 998 Гц. $\left[\Theta = \pi\sqrt{2\left(1 - \frac{\nu^2_{\text{рез}}}{\nu^2_0}\right)} = 0{,}281\right]$

4.68. Гиря массой $m = 400$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 40$ Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления r для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = \cos\omega t$, Н. Определите: 1) амплитуду вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы вдвое меньше собственной частоты колебаний; 2) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 3) резонансную амплитуду. [1) $A = 3{,}3$ см; 2) $\omega_{\text{рез}} = 9{,}96\ \text{с}^{-1}$; 3) $A_{\text{рез}} = 20$ см]

4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные законы и формулы

• Собственная частота колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

[L — индуктивность катушки; C — электрическая емкость (емкость) конденсатора].

• Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его решение:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0\,, \quad Q = Q_{\text{m}}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[Q_{m} — амплитуда колебаний заряда конденсатора; ω_0 — собственная частота контура].

• Формула Томсона, устанавливающая связь между периодом T собственных колебаний в контуре без активного сопротивления, индуктивностью L и емкостью контура C,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

• Сила тока в колебательном контуре и напряжение на конденсаторе в случае гармонических электромагнитных колебаний:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} = -\omega_0 Q_{\text{m}}\sin(\omega_0 t + \varphi) = I_{\text{m}}\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_{\text{m}}}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{\text{m}}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[$I_{\text{m}} = \omega_0 Q_{\text{m}}$ — амплитуда силы тока; $U_{\text{m}} = \dfrac{Q_{\text{m}}}{C}$ — амплитуда напряжения; ω_0 — собственная частота контура].

• Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в контуре и его решение

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad Q = Q_\mathrm{m} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

[$Q_\mathrm{m} e^{-\delta t}$ — амплитуда затухающих колебаний заряда конденсатора; Q_m — начальная амплитуда; частота $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$].

• Добротность колебательного контура с активным сопротивлением R, индуктивностью L и емкостью контура C

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

• Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение:

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_\mathrm{m}}{L}\cos\omega t, \quad Q = Q_\mathrm{m}\cos(\omega t - \alpha)$$

[$Q_\mathrm{m} = \dfrac{U_\mathrm{m}}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$; α — сдвиг по фазе между зарядом и приложенным напряжением $U = U_\mathrm{m}\cos\omega t$; R, L и C — соответственно активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура].

• Резонансная частота и резонансная амплитуда заряда в случае электрического резонанса:

$$\omega_\text{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}, \quad (Q_\mathrm{m})_\text{рез} = \frac{U_\mathrm{m}/L}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

[ω_0 — собственная частота контура; δ — коэффициент затухания; R, L и C — соответственно активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура; U_m — амплитуда внешнего приложенного напряжения].

• Резонансная частота и резонансная амплитуда силы тока в случае электрического резонанса:

$$\omega_\text{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (I_\mathrm{m})_\text{рез} = \frac{U_\mathrm{m}}{R}$$

[ω_0 — собственная частота контура; R, L и C — соответственно активное сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура; U_m — амплитуда внешнего приложенного напряжения].

• Реактивное индуктивное сопротивление (индуктивное сопротивление)

$$R_L = \omega L$$

[ω — частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; L — индуктивность].

• Реактивное емкостное сопротивление (емкостное сопротивление)

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

[ω — частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; C — емкость].

• Полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

[$R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$ — реактивное емкостное сопротивление].

• Реактивное сопротивление

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

[$R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$ — реактивное емкостное сопротивление].

• Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения:

$$I = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}$$

[I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения].

• Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_\mathrm{m} U_\mathrm{m} \cos\varphi$$

[I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения].

• Коэффициент мощности

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

[R — активное сопротивление цепи; ωL — реактивное индуктивное сопротивление; $\dfrac{1}{\omega C}$ — реактивное емкостное сопротивление].

Примеры решения задач

4.69. Колебательный контур состоит из воздушного плоского конденсатора (расстояние между пластинами $d = 1$ мм, площадь пластин $S = 100$ см^2 каждая) и соленоида без сердечника (длина $l = 10$ см, площадь поперечного сечения $S_1 = 2$ см^2, число витков $N = 100$). Пренебрегая сопротивлением контура, определите частоту ω_0 собственных колебаний контура.

Дано: $d = 1$ мм (10^{-3} м); $S = 100$ см^2 (10^{-2} м^2); $\varepsilon = 1$; $l = 10$ см (0,1 м); $S_1 = 2$ см^2 ($2 \cdot 10^{-4}$ м^2); $N = 100$; $\mu = 1$.

Найти: ω_0.

Решение. Собственная частота колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{1}$$

где индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S_1}{l} \tag{2}$$

($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды; l — длина соленоида; S_1 — площадь его поперечного сечения; N — число витков соленоида) и емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \tag{3}$$

($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость среды; d — расстояние между пластинами конденсатора; S — площадь пластин конденсатора).

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1) и учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме), найдем искомую частоту собственных колебаний контура:

$$\omega_0 = \frac{c}{N} \sqrt{\frac{ld}{SS_1}}.$$

Ответ: $\omega_0 = 2{,}12 \cdot 10^7$ рад/с.

4.70. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 40$ нФ и катушку индуктивностью $L = 1{,}6$ мГн. Определите максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока I_m в колебательном контуре равна 1 А. Сопротивлением контура пренебречь.

Дано: $C = 40$ нФ ($4 \cdot 10^{-8}$ Ф); $L = 1{,}6$ мГн ($1{,}6 \cdot 10^{-3}$ Гн); $I_\text{m} = 1$ А; $R = 0$.

Найти: U_m.

Решение. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора

$$U_\text{m} = \frac{Q_\text{m}}{C}, \tag{1}$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора емкостью C.

В случае свободных незатухающих колебаний ($R = 0$) заряд на обкладках конденсатора совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_\text{m} \cos \omega_0 t,$$

где собственная частота колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{2}$$

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin \omega_0 t,$$

где максимальная сила тока

$$I_m = \omega_0 Q_m,$$

откуда

$$Q_m = \frac{I_m}{\omega_0} = I_m \sqrt{LC} \qquad (3)$$

[учли формулу (2)].

Подставив выражение (3) в формулу (1), найдем искомое максимальное напряжение на обкладках конденсатора

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Ответ: $U_m = 200$ В.

4.71. Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $Q = 0{,}2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, мКл. Определите: амплитуду колебаний заряда на обкладках конденсатора, циклическую частоту, частоту, период и начальную фазу колебаний заряда, амплитуду силы тока в контуре.

Дано: $Q = 0{,}2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, мКл.

Найти: Q_m; ω_0; ν_0; T; φ; I_m.

Решение. Из заданного закона изменения электрического заряда на обкладках конденсатора

$$Q = 0{,}2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ мКл}$$

следует:

амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора $Q_m = 0{,}2$ мКл;
циклическая частота $\omega_0 = 4\pi$ с$^{-1}$;
начальная фаза колебаний заряда $\varphi = \frac{\pi}{3}$ рад.

Искомые частота и период колебаний соответственно равны

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Силу тока в колебательном контуре найдем, продифференцировав по времени уравнение гармонических колебаний заряда $Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$:

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 Q_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда искомая амплитуда силы тока в контуре

$$I_m = \omega_0 Q_m.$$

Ответ: $Q_m = 0{,}2$ мКл; $\omega_0 = 4\pi$ с$^{-1}$; $\nu_0 = 2$ Гц; $T = 0{,}5$ с; $\varphi = \frac{\pi}{3}$ рад; $I_m = 0{,}8\pi$ мА.

4.72. Напряжение на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U_C = 100\cos 1000\pi t$, В. Емкость конденсатора $C = 1$ мкФ. Пренебрегая сопротивлением контура, определите: 1) период колебаний; 2) индуктивность контура; 3) закон изменения со временем силы тока в цепи.

Дано: $U_C = 100\cos 1000\pi t$, В; $C = 1$ мкФ (10^{-6} Ф).

Найти: 1) T; 2) L; 3) $I(t)$.

Решение. Из заданного уравнения изменения напряжения на обкладках конденсатора

$$U_C = 100\cos 1000\pi t, \text{ В}$$

следует, что амплитуда напряжения $U_\mathrm{m} = 100$ В, собственная циклическая частота $\omega_0 = 1000\pi$ с$^{-1}$.

Искомый период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Собственная частота колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

откуда искомая индуктивность контура

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C}.$$

Заряд Q совершает гармонические колебания

$$Q = Q_\mathrm{m}\cos\omega_0 t,$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора с циклической частотой ω_0. Сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_\mathrm{m}\sin\omega_0 t = I_\mathrm{m}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где амплитуда силы тока

$$I_\mathrm{m} = \omega_0 Q_\mathrm{m} = \omega_0 C U_\mathrm{m}$$

(учли, что $U_C = \dfrac{Q}{C}$ и $U_\mathrm{m} = \dfrac{Q_\mathrm{m}}{C}$).

Вычисляя, получаем $I_\mathrm{m} = 0{,}314$ А. Тогда искомый закон изменения со временем силы тока в колебательном контуре

$$I = 0{,}314\cos\left(1000\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ А}.$$

Ответ: $T = 2$ мс; $L = 0{,}101$ Гн; $I = 0{,}314\cos\left(1000\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$, А.

4.73. Частота ν_0 свободных незатухающих электромагнитных колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн, составляет 50 Гц. Запишите для данного контура уравнение изменения заряда на обкладках конденсатора в зависимости от времени, если максимальная энергия магнитного поля $W_\mathrm{m}^\text{м}$ в катушке составляет 4 мкДж.

Дано: $L = 0{,}5$ Гн; $\nu_0 = 50$ Гц; $W_\mathrm{m}^\text{м} = 4$ мкДж ($4 \cdot 10^{-6}$ Дж).

Найти: $Q(t)$.

Решение. В случае свободных незатухающих колебаний ($R \approx 0$) заряд на обкладках конденсатора совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_\mathrm{m} \cos \omega_0 t, \tag{1}$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора с циклической частотой

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0. \tag{2}$$

Максимальная энергия магнитного поля в катушке

$$W_\mathrm{m}^\text{м} = \frac{LI_\mathrm{m}^2}{2}, \tag{3}$$

где I_m — амплитуда колебаний силы тока. Из уравнения (3)

$$I_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2W_\mathrm{m}^\text{м}}{L}}. \tag{4}$$

Продифференцировав уравнение (1) по времени, определим силу тока в колебательном контуре:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} = -\omega_0 Q_\mathrm{m} \sin \omega_0 t,$$

где амплитуда силы тока $I_\mathrm{m} = \omega_0 Q_\mathrm{m}$. Тогда

$$Q_\mathrm{m} = \frac{I_\mathrm{m}}{\omega_0}. \tag{5}$$

Подставив выражение (4) в формулу (5) и учитывая (2), найдем амплитуду колебаний заряда

$$Q_\mathrm{m} = \frac{1}{2\pi\nu_0}\sqrt{\frac{2W_\mathrm{m}^\text{м}}{L}}.$$

Вычисляя, получаем $Q_\mathrm{m} = 1{,}27 \cdot 10^{-5}$ Кл.

Подставив в уравнение (1) числовые значения Q_m и ω_0, искомое уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения заряда на обкладках конденсатора примет вид:

$$Q = 1{,}27 \cdot 10^{-5} \cos 100\pi t, \text{ Кл}.$$

Ответ: $Q = 1{,}27 \cdot 10^{-5} \cos 100\pi t$, Кл.

4.74. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100$ пФ, катушки индуктивностью $L = 0{,}01$ Гн и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Определите: 1) период затухающих колебаний; 2) через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в е раз.

Дано: $C = 100$ нФ (10^{-7} Ф); $L = 0{,}01$ Гн; $R = 20$ Ом.

Найти: 1) T; 2) N_e.

Решение. Искомый период электромагнитных колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}$$

(учли, что собственная частота контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ и коэффициент затухания $\delta = \dfrac{R}{2L}$).

Число полных колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в е раз,

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \tag{1}$$

где время релаксации

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомое число полных колебаний:

$$N_e = \frac{2L}{RT}.$$

Ответ: 1) $T = 0{,}2$ мс; 2) $N_e = 5$.

4.75. Определите добротность Q колебательного контура, если собственная частота ω_0 колебательного контура отличается на 5 % от частоты ω свободных затухающих колебаний.

Дано: $\omega_0 = 1{,}05\omega$.

Найти: Q.

Решение. В реальном колебательном контуре (т. е. обладающем сопротивлением) частота ω свободных затухающих электромагнитных колебаний меньше собственной частоты ω_0 колебательного контура (при $R \simeq 0$):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \tag{1}$$

где δ — коэффициент затухания.

Добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\Theta},$$

где логарифмический декремент затухания $\Theta = \delta T$ (T — период затухающих колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$). Учитывая приведенные формулы, найдем коэффициент затухания

$$\delta = \frac{\Theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\pi\omega}{Q \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2Q}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получаем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{4Q^2}} \text{ или } \omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}},$$

откуда искомая добротность

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}}.$$

Ответ: $Q = 1{,}56$.

4.76. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 3$ нФ, катушку индуктивностью $L = 6$ мкГн и резистор сопротивлением $R = 10$ Ом. Определите отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент времени, когда ток максимален.

Дано: $C = 3$ нФ ($3 \cdot 10^{-9}$ Ф); $L = 6$ мкГн ($6 \cdot 10^{-6}$ Гн); $R = 10$ Ом; $I = I_{\text{m}}$.

Найти: $\dfrac{W_{\text{м}}}{W_{\text{э}}}$.

Решение. Энергия магнитного поля катушки, когда ток максимален,

$$W_{\text{м}} = \frac{LI_{\text{m}}^2}{2}, \qquad (1)$$

энергия электрического поля конденсатора

$$W_{\text{э}} = \frac{Q^2}{2C}, \qquad (2)$$

где Q — заряд на обкладках конденсатора. Тогда, поделив (1) на (2), получаем

$$\frac{W_{\text{м}}}{W_{\text{э}}} = \frac{LCI_{\text{m}}^2}{Q^2}. \qquad (3)$$

Согласно закону Ома, для контура, содержащего катушку индуктивностью L, конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R,

$$IR + U_C = \mathscr{E}_s,$$

где IR — напряжение на резисторе; $U_C = \dfrac{Q}{C}$ — напряжение на конденсаторе; $\mathscr{E}_s = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ — ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока ($\mathscr{E}_s$ — единственная ЭДС в контуре). Следовательно,

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \qquad (4)$$

В случае максимума тока $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$. Тогда уравнение (4) запишется в виде

$$I_\mathrm{m}R + \frac{Q}{C} = 0,$$

откуда

$$I_\mathrm{m} = -\frac{Q}{CR}. \tag{5}$$

Подставив выражение (5) в формулу (3), найдем искомое отношение

$$\frac{W_\text{м}}{W_\text{э}} = \frac{L}{CR^2}.$$

Ответ: $\frac{W_\text{м}}{W_\text{э}} = 20$.

4.77. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 10$ нФ и катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн. Определите критическое сопротивление $R_\text{кр}$ контура, при котором наступает апериодический процесс.

Дано: $C = 10$ нФ (10^{-8} Ф); $L = 4$ мкГн ($4 \cdot 10^{-6}$ Гн).

Найти: $R_\text{кр}$.

Решение. Частота свободных затухающих электромагнитных колебаний в контуре

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

При увеличении коэффициента затухания период затухающих колебаний растет и при $\delta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т. е. вместо колебаний будет происходить разряд конденсатора.

Критическое сопротивление, при котором наступает апериодический процесс, определяется из условия:

$$\frac{R_\text{кр}^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

откуда

$$R_\text{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Ответ: $R_\text{кр} = 40$ Ом.

4.78. Колебательный контур содержит последовательно соединенные конденсатор и дроссель, активное сопротивление R которого равно 80 Ом, а индуктивность $L = 5$ мГн. Резонансная частота контура $\nu_\text{рез} = 5$ кГц. Определите полное сопротивление Z для цепи переменного тока, если его частота $\nu = 50$ Гц.

Дано: $R = 80$ Ом; $L = 5$ мГн ($5 \cdot 10^{-3}$ Гн); $\nu_\text{рез} = 5$ кГц ($5 \cdot 10^3$ Гц); $\nu = 50$ Гц.

Найти: Z.

Решение. Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R — активное сопротивление; C — емкость конденсатора; L — индуктивность дросселя; $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота переменного тока. Таким образом,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}. \qquad (1)$$

Емкость C найдем из формулы для резонансной частоты

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad 2\pi\nu_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

откуда

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu_{\text{рез}}^2 L}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомое полное сопротивление для цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2\left(1 - \frac{\nu_{\text{рез}}^2}{\nu^2}\right)^2}.$$

Ответ: $Z = 15{,}7$ кОм.

4.79. Последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 55$ Ом и конденсатор подключены к источнику внешней ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{m}}\cos\omega t$ с амплитудным значением $\mathscr{E}_{\text{m}} = 110$ В. Определите разность фаз между током и внешней ЭДС, если амплитуда I_{m} установившегося тока в цепи равна 1 А.

Дано: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{m}}\cos\omega t$; $R = 55$ Ом; $\mathscr{E}_{\text{m}} = 110$ В; $I_{\text{m}} = 1$ А.

Найти: φ.

Решение. Согласно условию задачи,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{m}}\cos\omega t.$$

Сила тока при установившихся вынужденных колебаниях

$$I = I_{\text{m}}\cos(\omega t - \varphi),$$

где сдвиг по фазе между током и внешней ЭДС

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Поскольку катушка индуктивности в цепи отсутствует ($L \to 0$), то

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\omega CR}. \qquad (1)$$

Электроемкость C найдем из выражения для амплитуды тока

$$I_m = \left.\frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\right|_{L=0} = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

откуда

$$C = \frac{1}{\omega\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}_m}{I_m}\right)^2 - R^2}}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}_m}{RI_m}\right)^2 - 1},$$

откуда искомая разность фаз между током и внешней ЭДС

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}_m}{RI_m}\right)^2 - 1}\right).$$

Вычисляя, получаем $\varphi = -60°$, т. е. ток опережает по фазе внешнюю ЭДС на $60°$.

Ответ: $\varphi = -60°$.

4.80. В колебательный контур, содержащий последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопротивлением, подключена внешняя переменная ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \cos\omega t$, частоту которой можно менять, не меняя ее амплитуды. При частотах внешнего напряжения $\omega_1 = 300$ рад/с и $\omega_2 = 420$ рад/с амплитуды силы тока в цепи оказались одинаковыми. Определите резонансную частоту тока.

Дано: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \cos\omega t$; $\omega_1 = 300$ рад/с; $\omega_2 = 420$ рад/с; $\mathscr{E}_m = \text{const}$; $I_{m1} = I_{m2}$.

Найти: $\omega_{рез}$.

Решение. Амплитуда силы тока

$$I_m = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad (1)$$

где $\mathscr{E}_m$ — амплитуда внешней ЭДС; ω — частота внешней ЭДС.

Согласно (1), амплитуды токов будут одинаковыми ($I_{m1} = I_{m2}$) при условии

$$\left|\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right| = \left|\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right|. \qquad (2)$$

Максимуму резонансной кривой тока I_m соответствует резонансная частота $\omega_{рез}$, равная собственной частоте ω_0:

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (3)$$

Учитывая формулу (3), равенству (2) можно придать вид:

$$\left|\omega_1 - \frac{1}{\omega_1 LC}\right| = \left|\omega_2 - \frac{1}{\omega_2 LC}\right| \quad \text{или} \quad \left|\omega_1 - \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{\omega_1}\right| = \left|\omega_2 - \frac{\omega_{\text{рез}}^2}{\omega_2}\right|,$$

откуда

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\dfrac{1}{\omega_1} - \dfrac{1}{\omega_2}}\right| = |\omega_1\omega_2|.$$

Тогда искомая резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}.$$

Ответ: $\omega_{\text{рез}} = 355$ рад/с.

4.81. Катушка без сердечника длиной $l = 25$ см и диаметром $d = 4$ см, обмотка которой содержит $N = 1000$ витков медной проволоки площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2, включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Определите, какая доля полного сопротивления цепи приходится на реактивное сопротивление. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м.

Дано: $l = 25$ см (0,25 м); $\mu = 1$; $d = 4$ см ($4 \cdot 10^{-2}$ м); $N = 1000$; $S = 1$ мм^2 (10^{-6} м^2); $\nu = 50$ Гц; $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м).

Найти: $\dfrac{R_L}{Z}$.

Решение. Полное сопротивление цепи переменного тока (конденсатор в цепи отсутствует)

$$Z = \sqrt{R^2 + R_L^2}, \tag{1}$$

где R — активное сопротивление; R_L — индуктивное реактивное сопротивление:

$$R_L = \omega L = 2\pi\nu L \tag{2}$$

($\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота переменного тока).

Активное сопротивление

$$R = \rho\frac{\pi N d}{S} \tag{3}$$

[учли, что длина провода, охватывающего катушку, $l' = \pi N d$ (считаем, что витки плотно прилегают друг к другу и изоляция имеет ничтожную толщину)].

Индуктивность катушки

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2\dfrac{\pi d^2}{4}}{l}, \tag{4}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды (катушка без сердечника: $\mu = 1$).

Подставив выражения (4) и (3) в формулы (2) и (1), найдем

$$R_L = \frac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2}{2l} \quad \text{и} \quad Z = \sqrt{\frac{\rho^2 \pi^2 N^2 d^2}{S^2} + \frac{\mu_0^2 \pi^4 \nu^2 N^4 d^4}{4l^2}},$$

откуда искомое отношение

$$\frac{R_L}{Z} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\rho l}{\mu_0 \pi \nu N S d}\right)^2 + 1}}.$$

Ответ: $\frac{R_L}{Z} = 0{,}681.$

4.82. В цепь переменного тока частотой ω резистор сопротивлением R и конденсатор емкостью C один раз включены последовательно, другой — параллельно. Определите для обоих случаев полное сопротивление цепи Z.

Дано: R; C; ω; 1) последовательное включение; 2) параллельное включение.

Найти: Z.

Решение. 1) **Последовательное включение *R* и *C*** (рис. *а*).

На рис. *б* приведена векторная диаграмма амплитудных значений падений напряжений на резисторе (U_R) и конденсаторе (U_C), причем напомним, что исходной для построения векторной диаграммы выбирается ось токов. Амплитуда U_m приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд падений напряжений U_R и U_C.

Из прямоугольного треугольника имеем

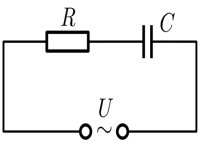
$$U_m^2 = U_R^2 + U_C^2.$$

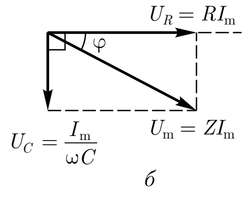
Учитывая, что $U_m = ZI_m$, $U_R = RI_m$, $U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$, получаем

$$Z^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2},$$

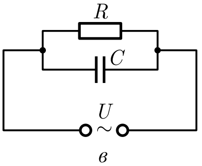
откуда искомое полное сопротивление цепи при последовательном включении резистора и конденсатора

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

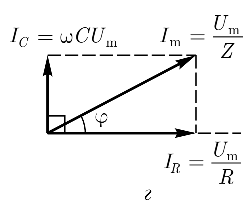




б



в



г

В данном случае $\varphi < 0$, т. е. ток опережает по фазе внешнее напряжение.

2) **Параллельное включение *R* и *C*** (рис. *в*).

На рис. *г* приведена векторная диаграмма параллельной цепи. Она строится аналогично векторной диаграмме последовательной цепи (см. рис. *б*), только исходной для построения выбирается ось напряжений. Из прямоугольного треугольника имеем

$$I_m = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}.$$

Учитывая, что при параллельном соединении $U_\mathrm{m} = U_R = U_C$ и амплитуды силы токов $I_\mathrm{m} = \dfrac{U_\mathrm{m}}{Z}$; $I_R = \dfrac{U_R}{R}$; $I_C = \dfrac{U_C}{1/\omega C}$, получаем

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2},$$

откуда искомое полное сопротивление цепи при параллельном включении резистора и конденсатора

$$Z = \frac{R}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}}.$$

В данном случае $\varphi > 0$, т. е. ток отстает по фазе от внешнего напряжения.

Ответ: 1) $Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega C}}$; 2) $Z = \dfrac{R}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}}$.

4.83. Цепь переменного тока состоит из последовательно включенных катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис. *а*). Определите амплитудное значение U_{LC_m} суммарного напряжения на катушке и конденсаторе, если амплитудное значение напряжения на резисторе $U_R = 100$ В, а сдвиг фаз φ между током и внешним напряжением составляет 30°.

Дано: $U_R = 100$ В; $\varphi = 30°$.

Найти: U_{LC_m}.

Решение. В приведенной на рис. *а* цепи возникает переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи падения напряжения. На рис. *б* приведена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C). Амплитуда U_m приложенного напряжения равна сумме амплитуд этих падений напряжений.

Разность фаз между током и внешним напряжением определим с помощью векторной диаграммы:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \tag{1}$$

Реактивные (ωL и $\dfrac{1}{\omega C}$) и активное сопротивления найдем из выражений для амплитуд напряжений на соответствующих элементах цепи. Амплитудные значения напряжения

на резисторе

$$U_R = RI_\mathrm{m},$$

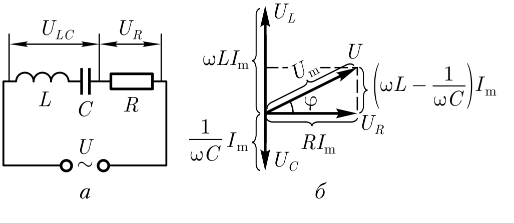
на катушке индуктивности

$$U_L = \omega L I_\mathrm{m},$$

на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_\mathrm{m},$$

где I_m — амплитуда силы тока.



а *б*

Из этих выражений находим:

$$R = \frac{U_R}{I_{\mathrm{m}}}; \quad \omega L = \frac{U_L}{I_{\mathrm{m}}}; \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_{\mathrm{m}}}. \tag{2}$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), получаем

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}. \tag{3}$$

Учитывая, что

$$U_{LC} = U_L - U_C$$

(см. векторную диаграмму), выражение (3) можно записать в виде

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_{LC}}{U_R},$$

откуда искомое амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе

$$U_{LC_{\mathrm{m}}} = U_R \,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Ответ: $U_{LC_{\mathrm{m}}} = 57{,}7$ В.

4.84. В цепь переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц и действующим значением напряжения $U = 220$ В последовательно включены конденсатор, резистор сопротивлением $R = 50$ Ом и катушка индуктивностью $L = 0{,}05$ Гн (см. рисунок). Падение напряжения $U_2 = 2U_1$. Определите: 1) емкость C конденсатора; 2) действующее значение I силы тока.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $U = 220$ В; $L = 0{,}05$ Гн; $R = 50$ Ом; $U_2 = 2U_1$.

Найти: 1) C; 2) I.

Решение. Падения напряжения, согласно закону Ома, на последовательно соединенных элементах цепи

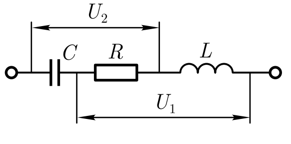
$$U_1 = I\sqrt{R^2 + R_L^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \tag{1}$$

$$U_2 = I\sqrt{R^2 + R_C^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{2}$$

где I — сила тока (ее действующее значение); R — активное сопротивление цепи; $R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$ — реактивное емкостное сопротивление; ω — циклическая частота.

Согласно данным задачи, $U_2 = 2U_1$. Тогда, учитывая (1) и (2), можем записать

$$I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 2I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$



откуда

$$R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = 4\left[R^2 + (\omega L)^2\right]. \tag{3}$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, из выражения (3) после элементарных преобразований найдем искомую емкость конденсатора

$$C = \frac{1}{2\pi\nu\sqrt{3R^2 + 16\pi^2\nu^2L^2}}.$$

Действующее значение силы тока

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}.$$

Ответ: 1) $C = 34{,}6$ мкФ; 2) $I = 2{,}42$ А.

4.85. В цепь переменного тока с амплитудным значением внешнего напряжения $U_\text{m} = 150$ В последовательно включены резистор, конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ и катушка индуктивностью $L = 1$ мГн. Определите сопротивление R резистора, амплитудные значения напряжений на элементах цепи, если амплитуда силы тока при резонансе $(I_\text{m})_\text{рез} = 3$ А.

Дано: $U_\text{m} = 150$ В; $C = 0{,}1$ мкФ (10^{-7} Ф); $L = 1$ мГн (10^{-3} Гн); $(I_\text{m})_\text{рез} = 3$ А.

Найти: R; $(U_R)_\text{рез}$; $(U_C)_\text{рез}$; $(U_L)_\text{рез}$.

Решение. В случае резонанса напряжений, наблюдаемого в последовательной цепи переменного тока, полное сопротивление цепи Z минимально и равно активному сопротивлению R. Тогда резонансная амплитуда силы тока

$$(I_\text{m})_\text{рез} = \frac{U_\text{m}}{R},$$

откуда искомое сопротивление

$$R = \frac{U_\text{m}}{(I_\text{m})_\text{рез}} = 50 \text{ Ом}.$$

Согласно закону Ома, искомое амплитудное значение напряжения на резисторе при резонансе

$$(U_R)_\text{рез} = R(I_\text{m})_\text{рез}.$$

При последовательном резонансе (резонансе напряжений)

$$(U_L)_\text{рез} = (U_C)_\text{рез},$$

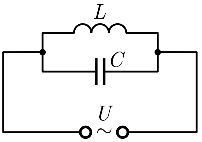
что можно проверить, применяя закон Ома:

$$(U_L)_\text{рез} = \omega_\text{рез} L (I_\text{m})_\text{рез} = \sqrt{\frac{L}{C}}(I_\text{m})_\text{рез},$$

$$(U_C)_\text{рез} = \frac{(I_\text{m})_\text{рез}}{\omega_\text{рез} C} = \sqrt{\frac{L}{C}}(I_\text{m})_\text{рез}$$

(в двух последних формулах учли, что $\omega_\text{рез} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$).

Ответ: $R = 50$ Ом; $(U_R)_\text{рез} = 150$ В; $(U_L)_\text{рез} = (U_C)_\text{рез} = 300$ В.



4.86. В цепи переменного тока (см. рисунок) с частотой $\nu = 50$ Гц амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. Определите емкость C конденсатора, если индуктивность L катушки равна 0,2 Гн.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $I_{\mathrm{m}} = 0$; $L = 0{,}2$ Гн.

Найти: C.

Решение. В рассматриваемой параллельной цепи переменного тока, содержащей емкость C и индуктивность L, наблюдается резонанс токов.

Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_{\mathrm{m}} = |I_C - I_L| = 0, \tag{1}$$

где I_C и I_L — соответственно амплитуды силы токов в ветвях цепи, содержащих C и L. Знак «–» в формуле (1) показывает, что токи в обеих ветвях противоположны по знаку.

Из формулы (1) следует, что

$$I_C = I_L. \tag{2}$$

Поскольку имеем параллельную цепь, амплитудные значения внешнего напряжения и напряжений на конденсаторе и катушке равны:

$$U_C = U_L = U_{\mathrm{m}}.$$

Учитывая эту формулу, выражение (2) можно записать в виде:

$$\frac{U_{\mathrm{m}}}{R_C} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{R_L},$$

откуда следует, что емкостное реактивное ($R_C = \dfrac{1}{\omega C}$) и индуктивное реактивное ($R_L = \omega L$) сопротивления равны, т. е.

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L. \tag{3}$$

Так как $\omega = 2\pi\nu$, из формулы (3) найдем искомую емкость:

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 L}.$$

Ответ: $C = 50{,}7$ мкФ.

4.87. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 5$ мГн и конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ. Добротность колебательного контура $Q = 100$. Какую среднюю мощность следует подводить для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{C_{\mathrm{m}}} = 2$ В?

Дано: $L = 5$ мГн ($5 \cdot 10^{-3}$ Гн); $C = 2$ мкФ ($2 \cdot 10^{-6}$ Ф); $Q = 100$; $U_{C_{\mathrm{m}}} = 2$ В.

Найти: $\langle P \rangle$.

Решение. Средняя мощность, выделяемая в колебательном контуре,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_{\mathrm{m}}^2, \tag{1}$$

где R — активное сопротивление; I_m — амплитуда силы тока.

Активное сопротивление R найдем из формулы для добротности: $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, откуда

$$R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{2}$$

Амплитудное значение силы тока найдем, применяя закон Ома для элемента контура C, поскольку в задаче задано амплитудное значение напряжения на конденсаторе:

$$I_\mathrm{m} = \omega C U_{C_\mathrm{m}} = U_{C_\mathrm{m}}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{3}$$

(учли, что при незатухающих колебаниях $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$).

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую среднюю мощность:

$$\langle P \rangle = \frac{U_{C_\mathrm{m}}^2}{2Q}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Ответ: $\langle P \rangle = 0{,}4$ мВт.

4.88. В колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 10$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом, поддерживаются незатухающие гармонические колебания. Определите амплитудное значение напряжения U_{C_m} на конденсаторе, если средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, составляет 5 мВт.

Дано: $C = 5$ нФ ($5 \cdot 10^{-9}$ Ф); $L = 10$ мкГн (10^{-5} Гн); $R = 0{,}2$ Ом; $\langle P \rangle = 5$ мВт ($5 \cdot 10^{-3}$ Вт).

Найти: U_{C_m}.

Решение. Средняя мощность, потребляемая контуром,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_\mathrm{m}^2, \tag{1}$$

где $I_\mathrm{m} = U_{C\mathrm{m}}\omega C$ — амплитуда силы тока.

Так как в контуре поддерживаются незатухающие колебания, $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Подставив эти выражения в формулу (1), получим

$$\langle P \rangle = \frac{R U_{C_\mathrm{m}}^2 \omega^2 C^2}{2} = \frac{R U_{C_\mathrm{m}}^2 C}{2L},$$

откуда найдем искомое амплитудное значение напряжения на конденсаторе:

$$U_{C_\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2L\langle P \rangle}{RC}}.$$

Ответ: $U_{C_\mathrm{m}} = 10$ В.

4.89. В цепь переменного тока с действующим значением напряжения $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор с активным сопротивлением $R = 5$ Ом и катушка индуктивности. Определите индуктивность L катушки, если амплитудное значение I_m силы тока в цепи равно 2 А.

Дано: $U = 220$ В; $\nu = 50$ Гц; $R = 5$ Ом; $I_m = 2$ А.

Найти: L.

Решение. Индуктивность катушки можно найти из формулы полного сопротивления заданной в задаче цепи переменного тока:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2} \qquad (1)$$

(учли, что циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$).

Согласно закону Ома,

$$Z = \frac{U_m}{I_m}, \qquad (2)$$

где амплитудное значение U_m напряжения связано с действующим значением U напряжения соотношением

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (3) в формулу (2), получим

$$\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = \frac{\sqrt{2}U}{I_m},$$

откуда искомая индуктивность катушки

$$L = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2U^2}{I_m^2} - R^2}.$$

Ответ: $L = 0{,}495$ Гн.

4.90. В цепь переменного тока с амплитудным значением напряжения $U_m = 100$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 1$ кОм, катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Определите среднюю мощность, выделяемую в цепи.

Дано: $U_m = 100$ В; $\nu = 50$ Гц; $R = 1$ кОм (10^3 Ом); $L = 0{,}5$ Гн; $C = 1$ мкФ (10^{-6} Ф).

Найти: $\langle P \rangle$.

Решение. Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi, \qquad (1)$$

где I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения; $\cos\varphi$ — коэффициент мощности.

Амплитудное значение силы тока

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где Z — полное сопротивление цепи переменного тока; $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота тока. Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$\langle P\rangle = \frac{U_\text{m}^2}{2Z}\cos\varphi = \frac{U_\text{m}^2\cos\varphi}{2\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (2)$$

Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Учитывая, что

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},$$

получим

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2) и учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, найдем искомую среднюю мощность, выделяемую в цепи,

$$\langle P\rangle = \frac{U_\text{m}^2 R}{2Z^2} = \frac{U_\text{m}^2 R}{2\left[R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2\right]}.$$

Ответ: $\langle P\rangle = 0{,}492$ Вт.

Задачи для самостоятельного решения

4.91. Конденсатор емкостью C зарядили до максимального напряжения U_m и замкнули на катушку индуктивностью L. Пренебрегая сопротивлением контура, определите амплитудное значение силы тока в данном колебательном контуре. [$I_\text{m} = U_\text{m}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$]

4.92. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ и катушку индуктивностью $L = 25$ мГн. Максимальный заряд на обкладках конденсатора $Q_\text{m} = 0{,}1$ мКл. Пренебрегая сопротивлением контура, запишите закон изменения заряда на обкладках конденсатора и определите амплитуду силы тока в контуре. [$Q = 0{,}1\cos 2000t$, мКл; $I_\text{m} = 0{,}2$ А]

4.93. Напряжение на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U_C = 50\cos\left(500\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, В. Определите амплитуду силы тока в контуре, если емкость конденсатора $C = 10$ мкФ. [$I_\text{m} = \omega_0 C U_\text{m} = 0{,}785$ А]

4.94. Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $Q = 10\cos 100\pi t$, мкКл. Определите максимальную энергию магнитного поля $W_\text{m}^\text{м}$ в катушке, если ее индуктивность $L = 0{,}5$ Гн. [$W_\text{m}^\text{м} =$ $= 2{,}46$ мкДж]

4.95. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = -0{,}1\sin 200\pi t$, А. Определите: 1) период колебаний; 2) емкость конденсатора; 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора; 4) максимальную энергию магнитного поля; 5) максимальную энергию электрического поля. [1) $T =$ $= \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 10$ мс; 2) $C = \dfrac{T^2}{4\pi^2 L} = 25{,}3$ мкФ; 3) $U_\text{m} = \dfrac{I_\text{m}}{\omega_0 C} = 6{,}29$ В; 4), 5) $W_\text{m}^\text{м} = W_\text{m}^\text{э} =$ $= 0{,}5$ мДж]

4.96. Добротность колебательного контура $Q = 4$. Определите, во сколько раз собственная частота ω_0 колебательного контура отличается от частоты ω свободных затухающих колебаний. [$\dfrac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4Q^2}} = 1{,}00778$]

4.97. Определите добротность Q колебательного контура, состоящего из конденсатора емкостью $C = 0{,}2$ мкФ, катушки индуктивностью $L = 2$ мГн и резистора сопротивлением $R = 1$ Ом. [$Q = \dfrac{L}{R}\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}} = 100$]

4.98. Логарифмический декремент Θ затухания колебательного контура составляет 0,23. Определите число N полных колебаний, за которое энергия колебательного контура уменьшится в $n = 10$ раз. [$N = \dfrac{\ln\sqrt{n}}{\Theta} = 5$]

4.99. Определите емкость C лейденской банки, если апериодический разряд наблюдается при минимальном активном сопротивлении $R = 80$ Ом, а индуктивность L проводов составляет 2 мкГн. [$C = \dfrac{4L}{R^2} = 1{,}25$ нФ]

4.100. В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушку индуктивностью $L = 0{,}36$ Гн и конденсатор емкостью $C = 28$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_\text{m} = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определите: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) сдвиг φ по фазе между током и внешним напряжением. [1) $I_\text{m} = 4{,}5$ А; 2) $\varphi = -1°$]

4.101. В цепь переменного тока напряжением $U_\text{m} = 220$ В и частотой 50 Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определите амплитудное значение: 1) силы тока в цепи; 2) падения напряжения на активном сопротивлении; 3) падения напряжения на конденсаторе; 4) падения напряжения на катушке. [1) $I_\text{m} = 1{,}16$ А; 2) $U_{R_\text{m}} = 116$ В; 3) $U_{C_\text{m}} = 369$ В; 4) $U_{L_\text{m}} = 182$ В]

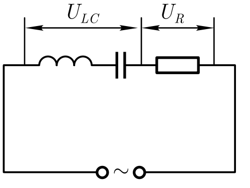
4.102. Катушка длиной $l = 25$ см и диаметром $d = 4$ см, обмотка которой содержит $N = 1000$ витков медной проволоки площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2, включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Определите, какую долю полного сопротивления Z цепи составляет активное сопротивление R. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм · м. [$\dfrac{R}{Z} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mu_0 \pi \nu N S d}{2\rho l}\right)^2}} = 0{,}733$]

4.103. К зажимам генератора присоединен конденсатор емкостью $C = 0{,}3$ мкФ. Определите амплитудное значение напряжения U_m на зажимах, если амплитудное значение силы тока $I_m = 3{,}3$ А, а частота тока ν составляет 2,5 кГц. [$U_m = \dfrac{I_m}{2\pi\nu C} = 700$ В]

4.104. Определите в случае переменного тока ($\nu = 50$ Гц) полное сопротивление Z участка цепи, содержащего параллельно включенный резистор сопротивлением $R = 60$ Ом и конденсатор емкостью $C = 15$ мкФ. [$Z = \dfrac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2\nu^2R^2C^2}} = 57{,}7$ Ом]

4.105. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц резистор сопротивлением $R = 1$ кОм и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ один раз включены последовательно, другой — параллельно. Определите для обоих случаев полное сопротивление цепи Z. [1) $Z = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} = 3{,}34$ кОм; 2) $Z = \dfrac{R}{\sqrt{4\pi^2\nu^2R^2C^2 + 1}} = 954$ Ом]

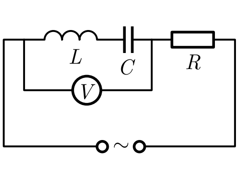
4.106. Цепь переменного тока содержит последовательно соединенные катушку индуктивности, конденсатор и резистор (см. рисунок). Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{LC} = 173$ В, а амплитудное значение напряжения на резисторе $U_R = 100$ В. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением. [$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{U_{LC}}{U_R} = 60°$]



4.107. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ. Определите, какая доля напряжения, приложенного к цепи, приходится на падение напряжения на конденсаторе. [$\dfrac{U_{C_m}}{U_m} = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi\nu CR)^2 + 1}} = 0{,}847$]

4.108. Генератор с частотой $\nu = 30$ кГц и амплитудным значением напряжения $U_m = 110$ В включен в цепь, емкость C которой равна 2 нФ и активное сопротивление $R = 5$ Ом. Определите амплитудное значение напряжения на конденсаторе U_{C_m}, если в цепи наблюдается резонанс напряжений. [$U_{C_m} = \dfrac{1}{2\pi\nu C}\dfrac{U_m}{R} = 58{,}4$ кВ]

4.109. В цепи переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц вольтметр (см. рисунок) показывает нуль при $L = 0{,}5$ Гн. Определите емкость конденсатора. [$C = \dfrac{1}{4\pi^2\nu^2L} = 20{,}3$ мкФ]



4.110. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и катушку индуктивностью $L = 0{,}01$ Гн. В контуре поддерживаются незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_{C_m} = 3$ В. Определите добротность Q колебательного контура, если к нему подводят среднюю мощность $\langle P\rangle = 0{,}3$ мВт. [$Q = \dfrac{U_m^2}{2\langle P\rangle}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 150$]

4.111. Колебательный контур содержит конденсатор, катушку индуктивностью $L = 1$ мкГн и резистор сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом. Определите емкость C конденсатора, если средняя мощность $\langle P\rangle$, потребляемая колебательным контуром для поддержания в нем незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{C_\text{m}} = 10$ В, составляет 10 мВт. $\left[C = \dfrac{2\langle P\rangle L}{RU_\text{m}^2} = 1 \text{ нФ}\right]$

4.112. В цепь переменного тока с действующим значением напряжения $U = 127$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и конденсатор емкостью $C = 40$ мкФ. Определите амплитудное значение I_m силы тока в цепи. $\left[I_\text{m} = \dfrac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{4\pi^2\nu^2C^2}}} = 1{,}8 \text{ А}\right]$

4.3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Основные законы и формулы

• Связь между длиной волны λ, периодом T колебаний и частотой ν

$$\lambda = vT, \quad v = \lambda\nu$$

[v — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость)].

• Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

[λ — длина волны; v — фазовая скорость; T — период колебаний].

• Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x,

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

[$\xi(x,t)$ — смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A — амплитуда волны; ω — циклическая (круговая) частота; k — волновое число; φ_0 — начальная фаза колебаний].

• Уравнение сферической волны

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

[$\xi(r,t)$ — смещение точек среды на расстоянии r от центра волны в момент времени t; A_0 — постоянная величина; ω — циклическая частота; k — волновое число; φ_0 — начальная фаза колебаний].

• Волновое уравнение

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

[$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; v — фазовая скорость].

• Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

• Фазовая (v) и групповая (u) скорости и связь между ними:

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}, \quad u = v - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}$$

[ω — циклическая частота; k — волновое число; λ — длина волны].

• Связь между разностью фаз δ и разностью хода волн Δ:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta.$$

• Условия максимума и минимума амплитуды при интерференции волн

$$\Delta_{\max} = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad \Delta_{\min} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

[$m = 0, 1, 2, \ldots$; λ — длина волны].

• Уравнение стоячей волны

$$\xi(x,t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

• Координаты пучностей и узлов стоячей волны

$$x_{\text{п}} = \pm m\frac{\lambda}{2}, \quad x_{\text{у}} = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \ (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

• Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{\text{пр}})\nu_0}{v \mp v_{\text{ист}}}$$

[ν — частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 — частота звука, посылаемая источником; $v_{\text{пр}}$ — скорость движения приемника; $v_{\text{ист}}$ — скорость движения источника; v — скорость распространения звука. Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления].

Примеры решения задач

4.113. Определите скорость распространения звука в воде, если длина волны λ равна 2 м, а частота колебаний источника $\nu = 725$ Гц. Определите также наименьшее расстояние между точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе.

Дано: $\lambda = 2$ м; $\nu = 725$ Гц.

Найти: v; x.

Решение. Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется определенная фаза волны за период T, т. е.

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

где v — скорость волны; ν — частота колебаний.

Тогда искомая скорость

$$v = \lambda\nu.$$

Длина волны — расстояние между ближайшими частицами среды, колеблющимися в одинаковой фазе. Следовательно, искомое наименьшее расстояние между точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе, равно длине волны, т. е.

$$x = \lambda.$$

Ответ: $v = 1450$ м/с; $x = 2$ м.

4.114. Определите, во сколько раз изменится длина ультразвуковой волны при переходе ее из меди в сталь, если скорость распространения ультразвука в меди и стали соответственно равны $v_1 = 3{,}6$ км/с и $v_2 = 5{,}5$ км/с.

Дано: $v_1 = 3{,}6$ км/с $(3{,}6 \cdot 10^3$ м/с$)$; $v_2 = 5{,}5$ км/с $(5{,}5 \cdot 10^3$ м/с$)$.

Найти: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Решение. При распространении волн частота колебаний не изменяется при переходе из одной среды в другую (она зависит только от свойств источника волн), т. е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Связь длины λ волны с частотой ν:

$$\lambda = \frac{v}{\nu}, \qquad (1)$$

где v — скорость волны.

Искомое отношение, согласно (1),

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Вычисляя, получаем $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}53$ (увеличится в 1,53 раза).

Ответ: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}53$.

4.115. Плоская волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 300$ м/с. Две частицы среды находятся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 6$ м и $x_2 = 12$ м от источника колебаний. Определите: 1) длину волны; 2) разность фаз колебаний этих частиц, если период колебаний $T = 40$ мс.

Дано: $v = 300$ м/с; $x_1 = 6$ м; $x_2 = 12$ м; $T = 40$ мс $(4 \cdot 10^{-2}$ с$)$.

Найти: 1) λ; 2) $\Delta\varphi$.

Решение. Длина волны — расстояние, на которое распространяется определенная фаза волны за период,

$$\lambda = vT. \qquad (1)$$

Уравнения колебаний частиц, лежащих в плоскостях x_1 и x_2,

$$\xi_1(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right) = A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_1}{v}\right);$$

$$\xi_2(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right) = A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_2}{v}\right),$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ — циклическая частота. Тогда фазы колебаний этих частиц

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_1}{v}\right) \text{ и } \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_2}{v}\right). \qquad (2)$$

Разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, учитывая формулы (1) и (2), найдем

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$

Ответ: 1) $\lambda = 12$ м; 2) $\Delta\varphi = \pi$.

4.116. Определите разность фаз двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 40$ см, если при частоте $\nu = 500$ Гц волны распространяются со скоростью $v = 400$ м/с.

Дано: $\Delta x = 40$ см (0,4 м); $\nu = 500$ Гц; $v = 400$ м/с.

Найти: $\Delta\varphi$.

Решение. Разность фаз, лежащих на луче двух точек,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x, \qquad (1)$$

где Δx — расстояние между этими точками; λ — длина волны.

Длина волны λ связана с частотой ν соотношением

$$\lambda = \frac{v}{\nu}, \qquad (2)$$

где v — скорость волны.

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомую разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta x}{v}.$$

Вычисляя, получаем $\Delta\varphi = \pi$ (точки колеблются в противофазе).

Ответ: $\Delta\varphi = \pi$.

4.117. Смещение ξ_1 из положения равновесия частицы среды, находящейся на расстоянии $x_1 = 5$ см от источника колебаний через промежуток времени $t = \dfrac{T}{3}$, равно половине амплитуды. Определите длину волны.

Дано: $x_1 = 5$ см $(5 \cdot 10^{-2}$ м); $t = \dfrac{T}{3}$; $\xi_1 = \dfrac{A}{2}$.

Найти: λ.

Решение. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию,

$$\xi(x, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (1)$$

где ξ — смещение частицы среды от положения равновесия; A — амплитуда волны; x — расстояние частицы среды от источника волн; v — скорость распространения волны. Подставив выражения для циклической частоты $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ и длины волны $\lambda = vT$ в уравнение (1), можем записать

$$\xi(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

По условию задачи $\xi_1(x,t) = \dfrac{A}{2}$, поэтому можем записать

$$\frac{A}{2} = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right),$$

откуда

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2},$$

т. е. аргумент косинуса $\dfrac{2\pi t}{T} - \dfrac{2\pi x_1}{\lambda} = \dfrac{\pi}{3}$. Согласно условию задачи, $t = \dfrac{T}{3}$, поэтому $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\pi x_1}{\lambda} = \dfrac{\pi}{3}$, откуда искомая длина волны

$$\lambda = 6x_1.$$

Ответ: $\lambda = 0{,}3$ м.

4.118. Источник незатухающих колебаний совершает колебания по закону $x = 0{,}4\cos 60\pi t$, м. Скорость распространения колебаний $v = 90$ м/с. Запишите уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию. Определите: 1) длину λ бегущей волны; 2) смещение ξ_1 и ξ_2 точек среды, находящихся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 20$ м и $x_2 = 21$ м от источника, через $t = 2$ с от момента начала колебаний источника; 3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний точек *1* и *2*.

Дано: $x = 0{,}4\cos 60\pi t$, м; $v = 90$ м/с; $x_1 = 20$ м; $x_2 = 21$ м; $t = 2$ с.

Найти: $\xi(x,t)$; 1) λ; 2) ξ_1; ξ_2; 3) $\Delta\varphi$.

Решение. Источник колеблется по закону

$$x = 0{,}4\cos 60\pi t, \text{ м}, \tag{1}$$

откуда следует, что частицы среды будут совершать колебания по тому же закону, но их колебания будут отставать по времени от колебаний источника на время, необходимое для прохождения волной расстояния x. Тогда уравнение колебаний частиц среды, лежащих в плоскости x, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{2}$$

Для записи уравнения плоской волны, возбуждаемой источником, из уравнения (1) находим, что амплитуда волны $A = 0{,}4$ м, циклическая частота $\omega = 60\pi$ с$^{-1}$. Подставив эти данные и значение v в выражение (2), запишем искомое уравнение волны:

$$\xi(x,t) = 0{,}4\cos\left(60\pi t - \frac{2}{3}\pi x\right), \text{ м}. \tag{3}$$

Искомая длина волны

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

(учли формулу $\omega = 2\pi\nu$).

Смещение точек *1* и *2* среды через время t от начала колебаний источника определим из уравнения (3), подставив в него значения t, x_1 и x_2:

$$\xi_1 = 0,4\cos\left(60\pi \cdot 2 - \frac{2}{3}\pi \cdot 20\right) = -0,2 \text{ м};$$

$$\xi_2 = 0,4\cos\left(60\pi \cdot 2 - \frac{2}{3}\pi \cdot 21\right) = 0,4 \text{ м}.$$

Разность фаз колебаний точек *1* и *2* среды найдем по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$

Ответ: $\xi(x,t) = 0,4\cos\left(60\pi t - \frac{2}{3}\pi x\right)$, м; 1) $\lambda = 3$ м; 2) $\xi_1 = -20$ см; $\xi_2 = 40$ см; 3) $\Delta\varphi = 2{,}09$ рад.

4.119. Бегущая плоская звуковая волна описывается уравнением вида $\xi(x,t) = 6 \cdot 10^{-5}\cos(1800t - 5{,}3x)$, м. Определите: 1) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны; 2) отношение амплитуды колебаний скорости частиц среды к скорости распространения волны.

Дано: $\xi(x,t) = 6 \cdot 10^{-5}\cos(1800t - 5{,}3x)$, м.

Найти: 1) $\dfrac{A}{\lambda}$; 2) $\dfrac{A_v}{v}$.

Решение. Из заданного в условии задачи уравнения волны

$$\xi(x,t) = 6 \cdot 10^{-5}\cos(1800t - 5{,}3x), \text{ м} \qquad (1)$$

следует, что амплитуда смещения частиц среды $A = 6 \cdot 10^{-5}$ м, волновое число $k = 5{,}3$ м$^{-1}$ (сравните с уравнением волны $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$). Волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны. Тогда $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$.

Искомое отношение амплитуды смещения частиц к длине волны

$$\frac{A}{\lambda} = \frac{Ak}{2\pi} = 5{,}06 \cdot 10^{-5}.$$

Скорость колебаний частиц среды найдем, продифференцировав (1) по времени:

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi} = -6 \cdot 10^{-5} \cdot 1800\sin(1800t - 5,3x) = -0{,}108\sin(1800t - 5,3x), \text{ м/с},$$

откуда амплитуда колебаний частиц среды $A_v = 0{,}108$ м/с.

Скорость распространения волны найдем из условия постоянства фазы $1800t - 5{,}3x = \text{const}$, продифференцировав это выражение:

$$1800\,dt - 5{,}3\,dx = 0,$$

откуда скорость волны

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1800}{5,3} \text{ (м/с)}.$$

Искомое отношение амплитуды колебаний скорости частицы к скорости распространения волны

$$\frac{A_v}{v} = \frac{0{,}108 \cdot 5{,}3}{1800} = 3{,}18 \cdot 10^{-4}.$$

Ответ: 1) $\dfrac{A}{\lambda} = 5{,}06 \cdot 10^{-5}$; 2) $\dfrac{A_v}{v} = 3{,}18 \cdot 10^{-4}$.

4.120. Докажите, что в недиспергирующей среде групповая скорость u и фазовая скорость v равны.

Решение. Среда является диспергирующей, если в ней наблюдается дисперсия волн — зависимость фазовой скорости волн в среде от их частоты (или длины волны).

Групповая скорость $u = \dfrac{d\omega}{dk}$. Учитывая, что фазовая скорость $v = \dfrac{\omega}{k}$, предыдущее выражение можно записать в виде:

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} = v + k\left(\frac{dv}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda}\right) = v + k\left[\frac{dv}{d\lambda} : \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= v - k\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{dv}{d\lambda} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

(учли, что волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$).

Следовательно, связь между групповой и фазовой скоростями:

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи, среда недиспергирующая ($\dfrac{dv}{d\lambda} = 0$), поэтому из выражения (1) следует, что

$$u = v,$$

т. е. групповая и фазовая скорости в недиспергирующей среде равны.

4.121. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 50$ Гц. Скорость v распространения волн в не поглощающей энергию среде равна 400 м/с. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, наблюдается: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослабление колебаний.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $v = 400$ м/с.

Найти: 1) $\Delta_{\max}$; 2) $\Delta_{\min}$.

Решение. При наложении в пространстве двух когерентных волн в разных его точках наблюдается усиление или ослабление результирующей волны — интерференция волн.

Максимальное усиление колебаний (интерференционный максимум) наблюдается при разности хода

$$\Delta_{\max} = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

максимальное ослабление колебаний (интерференционный минимум) — при разности хода

$$\Delta_{\min} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (m=0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где длина волны

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \tag{3}$$

Из выражений (1) и (2) с учетом (3) получаем искомые условия наименьших разностей хода, не равных нулю, для интерференционных максимума ($m = 1$) и минимума ($m = 1$):

$$\Delta_{\max} = \frac{v}{\nu}; \quad \Delta_{\min} = \frac{v}{2\nu}.$$

Ответ: 1) $\Delta_{\max} = 8$ м; 2) $\Delta_{\min} = 4$ м.

4.122. Два динамика расположены на расстоянии $d = 20$ см друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на частоте $\nu = 2000$ Гц. Приемник находится на расстоянии $l = 4$ м от центра динамика (см. рисунок). Принимая скорость звука $v = 340$ м/с, определите, на какое расстояние от центральной линии параллельно динамикам следует отодвинуть приемник, чтобы он зафиксировал первый интерференционный минимум.

Дано: $d = 20$ см (0,2 м); $\nu = 2000$ Гц; $l = 4$ м; $v = 340$ м/с.

Найти: x.

Решение. Первый минимум наблюдается при разности хода (см. предыдущую задачу)

$$s_2 - s_1 = \frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

где длина волны

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \tag{2}$$

Из рисунка следует, что

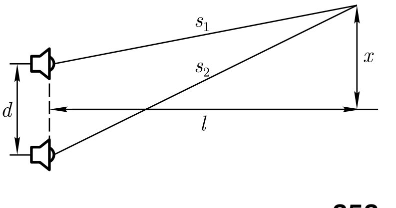
$$s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \text{ и } s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2,$$

откуда $s_2 - s_1 = \dfrac{2xd}{s_1 + s_2}$. Принимая $l \gg d$, можем записать, что $s_1 + s_2 \approx 2l$. Тогда

$$s_2 - s_1 = \frac{xd}{l}. \tag{3}$$

Подставив в выражение (1) формулы (2) и (3), найдем искомое расстояние, на которое следует отодвинуть приемник, чтобы он зафиксировал первый интерференционный минимум:

$$x = \frac{vl}{2\nu d}.$$



Ответ: $x = 1{,}7$ м.

4.123. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\sin\omega t$, а другой конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определите: 1) уравнение стоячей волны; 2) координаты узлов; 3) координаты пучностей.

Дано: $\xi = A\sin\omega t$.

Найти: 1) $\xi(x, t)$; 2) $x_у$; 3) $x_п$.

Решение. Уравнение падающей волны

$$\xi_1(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{1}$$

где A — амплитуда волны; ω — циклическая частота; v — скорость волны.

Согласно условию задачи, отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, поэтому волна меняет фазу на противоположную, и уравнение отраженной волны

$$\xi_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \pi\right] = -A\sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{2}$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим уравнение стоячей волны

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - A\sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

откуда

$$\xi(x,t) = -2A\sin\omega\frac{x}{v}\cos\omega t = -2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$$

(учли $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\lambda = vT$).

В точках среды, где

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

амплитуда колебаний обращается в нуль (наблюдаются узлы), в точках среды, где

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного $2A$ (наблюдаются пучности). Искомые координаты узлов и пучностей находим из выражений (3) и (4):

координаты узлов $x_у = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$;

координаты пучностей, $x_п = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ответ: 1) $\xi(x,t) = -2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$; 2) $x_у = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$; 3) $x_п = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$.

4.124. Определите длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и девятой пучностями равно 20 см.

Дано: $\Delta l_{9,1} = 20$ см (0,2 м).

Найти: λ.

Решение. В стоячей волне расстояния между двумя соседними пучностями или двумя соседними узлами одинаковы и равны половине длины бегущей волны. Согласно условию задачи, задано расстояние между первой и девятой пучностями стоячей волны, т. е.

$$\Delta l_{9,1} = 8\frac{\lambda}{2} = 4\lambda.$$

Тогда искомая длина бегущей волны

$$\lambda = \frac{\Delta l_{9,1}}{4}.$$

Ответ: $\lambda = 5$ см.

4.125. Расстояние между соседними узлами стоячей волны, создаваемой камертоном в воздухе, $l = 42$ см. Принимая скорость звука в воздухе $v = 332$ м/с, определите частоту колебаний ν камертона.

Дано: $l = 42$ см (0,42 м); $v = 332$ м/с.

Найти: ν.

Решение. В стоячей волне расстояние между двумя соседними узлами равно $\dfrac{\lambda}{2}$. Следовательно, $l = \dfrac{\lambda}{2}$, откуда длина бегущей волны

$$\lambda = 2l. \qquad (1)$$

Связь между длиной волны и частотой $\nu = \dfrac{v}{\lambda}$. Подставив в эту формулу значение (1), получим искомую частоту колебаний камертона

$$\nu = \frac{v}{2l}.$$

Ответ: $\nu = 395$ Гц.

4.126. Тонкий стержень длиной l закреплен с обоих концов. Определите возможные собственные частоты продольных колебаний.

Дано: l.

Найти: $\nu_{\text{п}}$.

Решение. На закрепленных концах стержня находятся узлы (отражение от более плотной среды), и на стержне должно укладываться целое число полуволн:

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (1)$$

Учитывая, что $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$, из выражения (1) найдем искомые возможные частоты продольных колебаний:

$$\nu_{\text{п}} = n\frac{v}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ответ: $\nu_{\text{п}} = n\frac{v}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

4.127. Труба длиной $l = 50$ см заполнена воздухом и открыта с одного конца. Принимая скорость v звука равной 340 м/с, определите, при какой наименьшей частоте в трубе будет возникать стоячая звуковая волна.

Дано: $l = 50$ см (0,5 м); $v = 340$ м/с.

Найти: ν_0.

Решение. Частота будет минимальной при условии, что длина стоячей волны максимальна.

В открытой с одного конца трубе на открытой части будет пучность (отражение от менее плотной среды), а на закрытой части — узел (отражение от более плотной среды). Поэтому в трубе уложится четверть длины волны:

$$l = \frac{\lambda}{4}.$$

Учитывая, что длина волны $\lambda = \frac{v}{\nu}$, можем записать

$$4l = \frac{v}{\nu_0},$$

откуда искомая наименьшая частота

$$\nu_0 = \frac{v}{4l}.$$

Ответ: $\nu_0 = 170$ Гц.

4.128. Два звука отличаются по уровню громкости на 3 фон. Определите отношение интенсивностей этих звуков.

Дано: $\Delta\Gamma = 3$ фон.

Найти: $\frac{I_2}{I_1}$.

Решение. Один фон — громкость для звука стандартной частоты 1000 Гц (частота стандартного чистого тона — синусоидального акустического колебания), если его уровень интенсивности равен 1 дБ. Следовательно, $\Delta\Gamma = 3$ фон соответствует уровень интенсивности звука $\Delta L = 3$ дБ $= 0{,}3$ Б.

Уровень интенсивности звука

$$L = \lg\frac{I}{I_0}, \tag{1}$$

где I_0 — интенсивность звука на пороге слышимости, принимаемая для всех звуков равной 10 пВт/м^2.

Согласно уравнению (1), можем записать

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \lg\frac{I_2}{I_0} - \lg\frac{I_1}{I_0} = \lg\frac{I_2}{I_1} = 0{,}3,$$

откуда искомое отношение интенсивностей звуков

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{0,3} = 1,99.$$

Ответ: $\dfrac{I_2}{I_1} = 1,99.$

4.129. Скорость v распространения звука в двухатомном газе при некоторых условиях равна 320 м/с. Определите наиболее вероятную скорость $v_{\text{в}}$ молекул этого газа при тех же условиях.

Дано: $v = 320$ м/с; $i = 5$.

Найти: $v_{\text{в}}$.

Решение. Наиболее вероятная скорость молекул газа

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \tag{1}$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К) — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура; M — молярная масса газа.

Скорость распространения звука в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \tag{2}$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме.

Согласно данным задачи, условия в обоих случаях одинаковы. Поделив (1) на (2), получаем

$$\frac{v_{\text{в}}}{v} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}. \tag{3}$$

Учитывая, что $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$, где i — число степеней свободы (для двухатомного газа $i = 5$), из выражения (3) найдем искомую вероятную скорость молекул:

$$v_{\text{в}} = v\sqrt{\frac{2i}{i+2}}.$$

Ответ: $v_{\text{в}} = 382$ м/с.

4.130. Плотность ρ азота при давлении 10^5 Па равна 1,43 кг/м^3. Определите скорость распространения звука в азоте при данных условиях.

Дано: $\rho = 1{,}43$ кг/м^3; $i = 5$; $p = 10^5$ Па.

Найти: v.

Решение. Скорость распространения звука в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \tag{1}$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$ — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме (i — число степеней свободы, для двухатомного газа равное 5); $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура; M — молярная масса газа.

Температуру газа найдем из уравнения Клапейрона — Менделеева $pV = \dfrac{m}{M}RT$, учитывая, что $\rho = \dfrac{m}{V}$,

$$T = \frac{pM}{\rho R}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомую скорость звука в азоте:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{(i+2)p}{i\rho}}.$$

Ответ: $v = 313$ м/с.

4.131. Неподвижный источник звука излучает колебания с частотой $\nu_0 = 360$ Гц. Принимая скорость звука $v = 332$ м/с, определите частоту ν, воспринимаемую приемником при его удалении от источника со скоростью 10 м/с.

Дано: $v_{\text{ист}} = 0$; $\nu_0 = 360$ Гц; $v = 332$ м/с; $v_{\text{пр}} = 10$ м/с.

Найти: ν.

Решение. В случае неподвижного источника длина звуковой волны в среде остается постоянной и равной

$$\lambda_0 = \frac{v}{\nu_0}, \tag{1}$$

где v — скорость распространения звука. Скорость распространения волны относительно движущегося приемника изменяется, а именно при удалении приемника от источника колебаний со скоростью $v_{\text{пр}}$ становится равной $v - v_{\text{пр}}$.

Частота колебаний, регистрируемая движущимся приемником,

$$\nu = \frac{v - v_{\text{пр}}}{\lambda_0}. \tag{2}$$

Подставив формулу (1) в выражение (2), найдем искомую частоту, воспринимаемую приемником при его удалении от неподвижного источника:

$$\nu = \frac{v - v_{\text{пр}}}{v}\nu_0 = \left(1 - \frac{v_{\text{пр}}}{v}\right)\nu_0.$$

Ответ: $\nu = 349$ Гц.

4.132. Два электропоезда движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 20$ м/с и $v_2 = 10$ м/с. Первый поезд дает свисток, высота тона которого соответствует частоте $\nu_0 = 600$ Гц. Определите частоту, воспринимаемую пассажиром второго поезда перед встречей поездов и после их встречи. Скорость звука принять равной $v = 332$ м/с.

Дано: $v_1 = 20$ м/с; $v_2 = 10$ м/с; $\nu_0 = 600$ Гц; $v = 332$ м/с.

Найти: ν; ν'.

Решение. Согласно общей формуле, описывающей эффект Доплера в акустике, частота звука, воспринимаемая движущимся приемником,

$$\nu = \frac{v \pm v_{\text{пр}}}{v \mp v_{\text{ист}}}\,\nu_0, \tag{1}$$

где ν_0 — частота звука, посылаемая источником; $v_{\text{пр}}$ — скорость движения приемника; $v_{\text{ист}}$ — скорость движения источника. Если источник и приемник приближаются друг к другу, то берется верхний знак, если удаляются — нижний знак.

Согласно обозначениям, данным в задаче ($v_{\text{пр}} = v_2$ и $v_{\text{ист}} = v_1$) и приведенным выше пояснениям, из формулы (1) искомые частоты, воспринимаемые пассажиром второго поезда:

перед встречей поездов (электропоезда сближаются):

$$\nu = \frac{v + v_2}{v - v_1}\,\nu_0;$$

после встречи поездов (поезда удаляются друг от друга):

$$\nu' = \frac{v - v_2}{v + v_1}\,\nu_0.$$

Ответ: $\nu = 658$ Гц; $\nu' = 549$ Гц.

4.133. Неподвижный приемник при приближении источника звука, излучающего волны с частотой $\nu_0 = 360$ Гц, регистрирует звуковые колебания с частотой $\nu = 400$ Гц. Принимая температуру воздуха $T = 300$ К, его молярную массу $M = 0{,}029$ кг/моль, определите скорость движения источника звука.

Дано: $v_{\text{пр}} = 0$; $\nu_0 = 360$ Гц; $\nu = 400$ Гц; $T = 300$ К; $M = 0{,}029$ кг/моль.

Найти: $v_{\text{ист}}$.

Решение. Согласно общей формуле, описывающей эффект Доплера в акустике, и учитывая, что приемник покоится ($v_{\text{пр}} = 0$), а источник приближается к приемнику, частота звука, воспринимаемая приемником,

$$\nu = \frac{v}{v - v_{\text{ист}}}\,\nu_0, \tag{1}$$

где v — скорость распространения звука. Отсюда

$$v_{\text{ист}} = \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right) v.$$

Скорость звука в газах зависит от природы газа и температуры и определяется по формуле

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \tag{2}$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме. Для воздуха число степеней свободы $i = 5$ и $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$.

Подставив формулу (2) в уравнение (1) и учитывая выражение для γ, найдем искомую скорость движения источника звука:

$$v_{\text{ист}} = \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right)\sqrt{\frac{(i+2)RT}{iM}}.$$

Ответ: $v_{\text{ист}} = 34{,}7$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

4.134. Определите длину звуковой волны λ в воде, вызываемой источником колебаний с частотой $\nu = 250$ Гц, если скорость v звука в воде равна 1450 м/с. [$\lambda = 5{,}8$ м]

4.135. Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстояниях $x_1 = 2$ м и $x_2 = 5$ м. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний этих точек, если период колебаний $T = 10$ мс, а скорость v распространения волны равна 300 м/с. [$\Delta\varphi = 2\pi$]

4.136. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 300$ м/с. Определите частоту ν колебаний, если минимальное расстояние Δx между двумя точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 1 м. [$\nu = \dfrac{v}{2\Delta x} = 150$ Гц]

4.137. Определите смещение ξ от положения равновесия точки среды, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = \dfrac{\lambda}{12}$, для момента времени $t = \dfrac{T}{6}$ (T — период колебаний), если амплитуда колебаний $A = 10$ см. [$\xi = A\cos\dfrac{\pi}{6} = 8{,}66$ см]

4.138. Плоская гармоническая волна с амплитудой $A = 4$ см распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 15$ м/с. Две точки среды, находящиеся на этой прямой на расстоянии $x_1 = 2$ м и $x_2 = 5$ м от источника колебаний, совершают колебания с разностью фаз $\Delta\varphi = \dfrac{3\pi}{10}$. Определите: 1) длину волны λ; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_2 второй точки в момент времени $t = 1$ с. [1) $\lambda = 20$ м; 2) $\xi(x,t) = 0{,}04\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}t - \dfrac{\pi}{10}x\right)$, м; 3) $\xi_2 = A\cos\omega\left(t_2 - \dfrac{x_2}{v}\right) = -4$ см]

4.139. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 10$ м/с. Амплитуда колебаний точек шнура $A = 5$ см, а период колебаний $T = 1$ с. Запишите уравнение волны и определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, расположенной на расстоянии $x_1 = 9$ м от источника колебаний в момент времени $t_1 = 2{,}5$ с. [$\xi(x,t) = 5\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{5}x\right)$, см; 1) $\lambda = 10$ м; 2) $\varphi_1 = 3{,}2\pi$, $\xi_1 = -4$ см, $\dot{\xi}_1 = 18{,}5$ см/с, $\ddot{\xi}_1 = -160$ см/с^2]

4.140. Определите длину волны λ, если волновое число $k = 0{,}01256$ см$^{-1}$. [$\lambda = 5$ м]

4.141. Выведите уравнение связи между групповой u и фазовой v скоростями. [$u = v - \lambda\dfrac{dv}{d\lambda}$]

4.142. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 400$ Гц. Скорость v распространения волн в не поглощающей энергию среде составляет 800 м/с. Определите, при какой разности хода при наложении волн будет наблюдаться: 1) ослабление колебаний; 2) усиление колебаний. [1) $\Delta_{\min} = \pm(2m+1)$, м ($m = 0, 1, 2, \ldots$); 2) $\Delta_{\max} = \pm 2m$, м ($m = 0, 1, 2, \ldots$)]

4.143. Два динамика расположены на расстоянии $d = 1$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на определенной частоте, регистрируемой приемником, который находится на расстоянии $l = 5$ м от центра динамиков. Принимая скорость звука $v = 340$ м/с, определите частоту ν звука, если, передвигая приемник от центральной линии параллельно динамикам на расстояние $x = 1{,}5$ м, он фиксирует первый интерференционный минимум. [$\nu = \dfrac{v}{2\left(\sqrt{l^2 + \left(x + \dfrac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(x - \dfrac{d}{2}\right)^2}\right)} = 607$ Гц]

4.144. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от менее плотной среды, определите: 1) уравнение стоячей волны; 2) координаты узлов; 3) координаты пучностей. [1) $\xi(x, t) = 2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$; 2) $x_{\text{у}} = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$); 3) $x_{\text{п}} = \pm m\dfrac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$)]

4.145. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определите: 1) уравнение стоячей волны; 2) координаты узлов; 3) координаты пучностей. [1) $\xi(x, t) = 2A\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}x \cdot \sin\omega t$; 2) $x = \pm m\dfrac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$); 3) $x = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$)]

4.146. Определите длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и пятой пучностями составляет 40 см. [$\lambda = 0{,}2$ м]

4.147. Расстояние l между двумя соседними пучностями стоячей волны, создаваемой камертоном с частотой 450 Гц в воздухе, составляет 36,9 см. Определите скорость звука в воздухе. [$v = 2\nu l = 332$ м/с]

4.148. Тонкий стержень длиной l закреплен с одного конца. Определите возможные частоты продольных колебаний. [$\nu_{\text{п}} = n\dfrac{v}{4l}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)]

4.149. Ухо человека может воспринимать звуки с граничными частотами $\nu_1 = 16$ Гц и $\nu_2 = 20$ кГц. Принимая скорость звука в воздухе равной 343 м/с, определите интервал длин волн, соответствующий указанным частотам. [$\lambda = 17{,}1$ мм … 21,4 м]

4.150. Шум на улице громкостью 80 фон слышен в квартире так, как шум громкостью 40 фон. Определите отношение интенсивностей этих звуков. [$\dfrac{I_1}{I_2} = 10^4$]

4.151. Средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ молекул двухатомного газа в условиях опыта равна 483 м/с. Определите скорость v распространения звука в газе при тех же условиях опыта. [$v = \dfrac{\langle v_{\text{кв}}\rangle}{\sqrt{3/\gamma}} = 330$ м/с]

4.152. Скорость v распространения звуковой волны в двухатомном газе при $T = 300$ К составляет 330 м/с. Определите молярную массу этого газа. [$M = \dfrac{\gamma RT}{v^2} = 3{,}2 \cdot 10^{-2}$ кг/моль]

4.153. Неподвижный источник звука излучает колебания с частотой $\nu = 360$ Гц. Принимая скорость звука $v = 332$ м/с, определите частоту ν', воспринимаемую приемником при его приближении к источнику со скоростью 10 м/с. [$\nu' = 371$ Гц]

4.154. Электропоезд проходит со скоростью $v_1 = 54$ км/ч мимо неподвижного приемника и дает гудок, частота которого $\nu_0 = 400$ Гц. Принимая скорость v звука равной 332 м/с, определите скачок частоты $\Delta\nu$, воспринимаемый приемником. [$\Delta\nu = \dfrac{2v_1 v}{(v-v_1)(v+v_1)}\nu_0 = 36{,}2$ Гц]

4.155. Источник звука с частотой $\nu_0 = 17{,}5$ кГц приближается к неподвижному резонатору, настроенному на длину волны $\lambda_{\text{рез}} = 1{,}8$ см. Принимая температуру воздуха $T = 300$ К, его молярную массу $M = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, определите необходимую скорость движения источника звука $v_{\text{ист}}$, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызывали колебания резонатора. [$v_{\text{ист}} = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}} - \nu_0\lambda_{\text{рез}} = 31{,}9$ м/с]

4.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Основные законы и формулы

• Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

[$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ — скорость распространения света в вакууме; ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды].

• Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H.$$

• Волновое уравнение электромагнитной волны

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

[$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; v — фазовая скорость электромагнитных волн; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — соответственно векторы напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны].

• Уравнения плоской электромагнитной волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - kx + \varphi), \quad \vec{H} = \vec{H}_0\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

[$\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω — круговая частота; $k = \dfrac{\omega}{v}$ — волновое число; φ — начальная фаза колебаний в точке с координатой $x = 0$].

• Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

[E — напряженность электрического поля волны; H — напряженность магнитного поля волны].

• Вектор плотности потока электромагнитной энергии — вектор Умова — Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}\,]$$

[$\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля электромагнитной волны; $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля электромагнитной волны].

• Модуль плотности потока энергии

$$S = wv = EH$$

[w — объемная плотность энергии электромагнитной волны; v — скорость распространения волны в среде; E — напряженность электрического поля волны; H — напряженность магнитного поля волны].

Примеры решения задач

4.156. Определите длину λ_0 электромагнитных волн в вакууме, если их частота ν колебаний в некоторой среде составляет 1 МГц.

Дано: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $\nu = 1$ МГц (10^6 Гц).

Найти: λ_0.

Решение. Длина волны в вакууме

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0},$$

где c — скорость распространения света в вакууме; ν_0 — частота колебаний электромагнитной волны в вакууме.

При переходе из одной среды в другую частота колебаний электромагнитной волны не изменяется, т. е. $\nu_0 = \nu$. Следовательно, искомая длина электромагнитной волны в вакууме

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}.$$

Ответ: $\lambda_0 = 300$ м.

4.157. При переходе электромагнитной волны из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$ в вакуум длина волны увеличилась на $\Delta\lambda = 50$ м. Определите частоту колебаний.

Дано: $\mu = 1$; $\varepsilon = 4$; $\Delta\lambda = 50$ м.

Найти: ν.

Решение. При переходе электромагнитной волны из одной среды в другую частота колебаний не изменяется ($\nu = \text{const}$), а приращение длины волны

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda, \tag{1}$$

(λ_0 — длина волны в вакууме; λ — длина волны в среде), причем

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}; \quad \lambda = \frac{v}{\nu}, \tag{2}$$

где c и v — соответственно скорости распространения электромагнитных волн в вакууме и среде.

Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{3}$$

(учли, что среда немагнитная: магнитная проницаемость среды $\mu = 1$).

Подставив выражение (3) в (2), а затем (2) в (1), найдем искомую частоту колебаний

$$\nu = \frac{c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\Delta\lambda}.$$

Ответ: $\nu = 3$ МГц.

4.158. Колебательный контур содержит плоский конденсатор площадью пластин $S = 150$ см^2, расстояние между которыми $d = 1{,}5$ мм, и катушку индуктивностью $L = 0{,}2$ мГн. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами конденсатора, если контур резонирует на волну длиной $\lambda =$ $= 663$ м.

Дано: $S = 150$ см^2 ($1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2); $d = 1{,}5$ мм ($1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м); $L = 0{,}2$ мГн ($2 \cdot 10^{-4}$ Гн); $\lambda = 663$ м; $R = 0$.

Найти: ε.

Решение. Диэлектрическую проницаемость можем найти, используя формулу, определяющую емкость плоского конденсатора,

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Учитывая, что длина волны $\lambda = cT$, а период колебаний определяется по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, можем записать

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{2}$$

Подставив формулу (1) в выражение (2), найдем искомую диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^2 L S}.$$

Ответ: $\varepsilon = 7$.

4.159. Длина электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 31,4 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите максимальную силу тока I_m в контуре, если максимальный заряд Q_m на обкладках конденсатора равен 50 нКл.

Дано: $\lambda = 31{,}4$ м; $R = 0$; $Q_\mathrm{m} = 50$ нКл ($5 \cdot 10^{-8}$ Кл).

Найти: I_m.

Решение. Колебания в контуре незатухающие ($R = 0$), поэтому максимальная энергия магнитного поля катушки равна максимальной энергии электрического поля конденсатора (полная энергия колебательного контура постоянна):

$$\frac{LI_\mathrm{m}^2}{2} = \frac{Q_\mathrm{m}^2}{2C}, \tag{1}$$

где L — индуктивность катушки; C — емкость конденсатора, откуда

$$LC = \frac{Q_\mathrm{m}^2}{I_\mathrm{m}^2}. \tag{2}$$

Длина волны определяется по формуле

$$\lambda = cT, \tag{3}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме; T — период колебаний, определяемый по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{4}$$

Подставив выражение (2) в формулу (4), а затем (4) в (3), найдем искомую максимальную силу тока в контуре:

$$I_\mathrm{m} = 2\pi c\frac{Q_\mathrm{m}}{\lambda}.$$

Ответ: $I_\mathrm{m} = 3$ А.

4.160. Два тонких изолированных стержня погружены в трансформаторное масло и индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний. При частоте колебаний 506 МГц в системе возникают стоячие волны, расстояние между первой и третьей пучностями которых равно 40 см. Принимая магнитную проницаемость μ масла равной единице, определите его диэлектрическую проницаемость ε.

Дано: $\nu = 506$ МГц ($5{,}06 \cdot 10^8$ Гц); $\Delta l_{3,1} = 40$ см (0,4 м); $\mu = 1$.

Найти: ε.

Решение. Расстояние между двумя соседними пучностями в стоячей волне равно половине длины бегущей волны. Согласно условию задачи, задано расстояние между первой и третьей пучностями, т. е.

$$\Delta l_{3,1} = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\lambda = \frac{v}{\nu}, \tag{2}$$

где ν — частота колебаний генератора электромагнитных колебаний; v — скорость распространения электромагнитной волны в трансформаторном масле:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (3)$$

(учли, что трансформаторное масло — среда немагнитная: $\mu = 1$).

Приравняв выражения (1) и (2) с учетом (3), получаем

$$\Delta l_{3,1} = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon}},$$

откуда искомая диэлектрическая проницаемость трансформаторного масла

$$\varepsilon = \frac{c^2}{\nu^2(\Delta l_{3,1})^2}.$$

Ответ: $\varepsilon = 2{,}2$.

4.161. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Определите амплитуду напряженности электрического поля волны, если амплитуда H_0 напряженности магнитного поля волны равна 5 мА/м.

Дано: $\varepsilon = 1$; $\mu = 1$; $H_0 = 5$ мА/м ($5 \cdot 10^{-3}$ А/м).

Найти: E_0.

Решение. Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H,$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; ε и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды. Поскольку электромагнитная волна распространяется в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), то

$$\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H. \qquad (1)$$

В электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в одинаковых фазах, поэтому выражение (1) может быть записано и для мгновенных значений амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны:

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0.$$

Из последнего выражения найдем искомую амплитуду напряженности электрического поля электромагнитной волны:

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}H_0.$$

Ответ: $E_0 = 1{,}88$ В/м.

4.162. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде с $\varepsilon = 2$ и $\mu = 1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 12$ В/м. Определите: 1) фазовую скорость волны; 2) амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано: $\varepsilon = 2$; $\mu = 1$; $E_0 = 12$ В/м.

Найти: 1) v; 2) H_0.

Решение. Фазовая скорость электромагнитных волн

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H.$$

Тогда для амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны (см. предыдущую задачу)

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}H_0,$$

откуда искомая амплитуда напряженности магнитного поля электромагнитной волны

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\mu}}E_0.$$

Ответ: 1) $v = 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с; 2) $H_0 = 45$ мА/м.

4.163. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Интенсивность волны, т.е. средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, составляет 21,2 мкВт/м^2. Определите амплитуду напряженности электрического поля волны.

Дано: $\varepsilon = 1$; $\mu = 1$; $I = 21{,}2$ мкВт/м^2 ($2{,}12 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^2).

Найти: E_0.

Решение. Так как интенсивность электромагнитной волны определена как средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, то

$$I = \langle S \rangle, \tag{1}$$

где S — модуль вектора плотности потока электромагнитной энергии — модуль вектора Умова—Пойнтинга. Согласно определению,

$$S = EH,$$

где E и H — соответственно мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны, описываемые уравнениями

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx);$$
$$H = H_0 \cos(\omega t - kx),$$

где E_0 и H_0 — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны; ω — круговая частота; $k = \dfrac{\omega}{v}$ — волновое число; φ — начальная фаза колебаний — принята равной нулю.

Мгновенное значение модуля вектора Умова—Пойнтинга

$$S = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx),$$

а его среднее значение

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}E_0H_0 \tag{2}$$

(учли, что $\langle\cos^2(\omega t - kx)\rangle = \dfrac{1}{2}$). Записав (см. решение предыдущей задачи)

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}H_0,$$

получим

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\mu}}E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 \tag{3}$$

(учли, что электромагнитная волна распространяется в вакууме).

Подставив (3) в (2) и учитывая (1), найдем искомую амплитуду напряженности электрического поля электромагнитной волны:

$$E_0 = \sqrt{2I\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}.$$

Ответ: $E_0 = 126$ мВ/м.

4.164. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает перпендикулярно к поверхности тела, полностью ее поглощающего. Определите давление, оказываемое волной на тело, если амплитуда электрического поля электромагнитной волны равна 1,5 В/м.

Дано: $\varepsilon = 1$; $E_0 = 1{,}5$ В/м.

Найти: p.

Решение. Согласно теории Максвелла, если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то давление, оказываемое электромагнитной волной на тело, равно среднему значению объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне, т. е.

$$p = \langle w\rangle, \tag{1}$$

где объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2} \tag{2}$$

(E — напряженность электрического поля волны; H — напряженность магнитного поля волны; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H.$$

Тогда выражение (2) можно записать в виде

$$w = \varepsilon_0\varepsilon E^2, \tag{3}$$

где E описывается уравнением

$$E = E_0\cos(\omega t - kx)$$

(E_0 — амплитуда напряженности электрического поля электромагнитной волны; ω — циклическая частота; $k = \dfrac{\omega}{v}$ — волновое число; начальная фаза принята равной нулю).

Мгновенное значение объемной плотности энергии (3) тогда можно записать в виде

$$w = \varepsilon_0\varepsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - kx),$$

а ее среднее значение

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 \qquad (4)$$

(учли, что среднее значение $\langle\cos^2(\omega t - kx)\rangle = \dfrac{1}{2}$). Так как электромагнитная волна распространяется в вакууме ($\varepsilon = 1$), выражение (4) запишется в виде:

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомое давление, оказываемое электромагнитной волной:

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2.$$

Ответ: $p = 39{,}8$ пПа.

Задачи для самостоятельного решения

4.165. Определите длину λ_0 электромагнитной волны в вакууме, если частота колебаний в ней составляет $3\cdot 10^{10}$ Гц. Чему равна длина λ этой же волны в среде, если скорость распространения электромагнитной волны в ней равна $1{,}5\cdot 10^8$ м/с. [$\lambda_0 = 1$ см; $\lambda = 0{,}5$ см]

4.166. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$ в вакуум. Определите приращение ее длины волны. [$\Delta\lambda = \dfrac{c}{\nu}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = 12{,}7$ м]

4.167. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 1$ мГн и конденсатор емкостью $C = 2$ нФ. Пренебрегая сопротивлением контура, определите длину волны λ излучения, генерируемого контуром. [$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 2{,}67$ км]

4.168. Длина λ электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 12 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите максимальный заряд Q_m на обкладках конденсатора, если максимальный ток I_m в контуре равен 1 А. [$Q_\mathrm{m} = \dfrac{\lambda I_\mathrm{m}}{2\pi c} = 6{,}37$ нКл]

4.169. Определите длину волны λ, на которую настроен колебательный контур с индуктивностью L, если максимальный ток в контуре I_m, максимальное напряжение на конденсаторе U_m, а скорость распространения электромагнитных волн равна v. Активным сопротивлением контура пренебречь. [$\lambda = 2\pi v\dfrac{LI_\mathrm{m}}{U_\mathrm{m}}$]

4.170. Два параллельных провода, одни концы которых изолированы, а другие индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний, погружены в спирт. При соответствующем подборе частоты колебаний в системе возникают стоячие волны. Расстояние между двумя узлами стоячих волн на проводах равно 40 см. Принимая диэлектрическую проницаемость спирта $\varepsilon = 26$, а его магнитную проницаемость $\mu = 1$, определите частоту колебаний генератора. [$\nu = \dfrac{c}{2l\sqrt{\varepsilon\mu}} = 73{,}5$ МГц]

4.171. Покажите, что плоская монохроматическая волна $E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ удовлетворяет волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$, где v — фазовая скорость электромагнитной волны.

4.172. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Определите амплитуду напряженности магнитного поля волны, если амплитуда напряженности электрического поля волны равна 5 В/м. [$H_0 = 13{,}3$ мА/м]

4.173. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда H_0 напряженности магнитного поля которой составляет 10 мА/м. Определите интенсивность I волны (среднюю энергию, проходящую через единицу поверхности за единицу времени). [$I = \sqrt{\dfrac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}} H_0^2 = 18{,}8$ мВт/м^2]

4.174. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда H_0 напряженности магнитного поля волны равна 25 мА/м. Определите давление, оказываемое волной на тело. Воспользуйтесь результатом выводов теории Максвелла о том, что если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то давление равно среднему значению объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне. [$p = \langle w \rangle = \dfrac{\mu_0\mu H_0^2}{2} = 0{,}393$ нПа]

ГЛАВА 5

ОПТИКА

5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Основные законы и формулы

• Абсолютный показатель преломления

$$n = \frac{c}{v}$$

[c — скорость электромагнитных волн в вакууме; v — фазовая скорость электромагнитных волн в среде].

• Показатель преломления второй среды относительно первой (относительный показатель преломления)

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

[n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй сред].

• Закон отражения света

$$i_1' = i_1.$$

• Закон преломления света

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}$$

[i_1 — угол падения; i_1' — угол отражения; i_2 — угол преломления; n_{21} — относительный показатель преломления; n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй сред].

• Связь угла φ отклонения лучей призмой и преломляющего угла A призмы

$$\varphi = A(n-1).$$

• Формула сферического зеркала (для параксиальных световых лучей)

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

[f — главное фокусное расстояние; R — радиус кривизны сферического зеркала; a — расстояние от зеркала до светящейся точки; b — расстояние от зеркала до изображения].

• Оптическая сила сферического зеркала

$$\Phi = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

[f — главное фокусное расстояние; R — радиус кривизны сферического зеркала].

• Оптическая сила тонкой линзы

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

[f — фокусное расстояние линзы; $N = \dfrac{n}{n_1}$ — относительный показатель преломления (n и n_1 — соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы ($R > 0$ для выпуклой поверхности, $R < 0$ для вогнутой)].

• Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

[f — фокусное расстояние линзы; a — расстояние от линзы до предмета; b — расстояние от линзы до изображения предмета].

• Поток излучения

$$\Phi_e = \frac{W}{t}$$

[W — энергия излучения; t — время излучения].

• Энергетическая светимость

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S}$$

[Φ_e — поток излучения сквозь сечение поверхности площадью S].

• Энергетическая сила света (сила излучения)

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\omega}$$

[Φ_e — поток излучения источника; ω — телесный угол, в пределах которого это излучение распространяется].

• Энергетическая яркость (светимость)

$$B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}$$

[ΔI_e — энергетическая сила света элемента излучающей поверхности; ΔS — площадь проекции элемента излучающей поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения].

• Светимость поверхности

$$R = \frac{\Phi}{S}$$

[Φ — световой поток, испускаемый поверхностью; S — площадь этой поверхности].

• Освещенность поверхности

$$E = \frac{\Phi}{S}$$

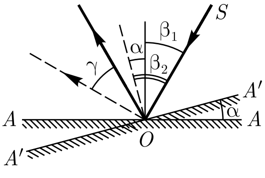
[Φ — световой поток, падающий на поверхность; S — площадь этой поверхности].

Примеры решения задач

5.1. Определите, на какой угол γ повернется луч, отраженный от плоского зеркала, если повернуть зеркало на угол α.

Дано: α.

Найти: γ.



Решение. Пусть AA — первоначальное положение зеркала; $A'A'$ — его положение после поворота на угол α. Если угол падения луча SO на зеркало в положении AA равен β_1 (см. рисунок), то при повороте зеркала на угол α (положение $A'A'$) угол падения луча стал равным

$$\beta_2 = \alpha + \beta_1.$$

Следовательно, отраженный луч повернется на угол

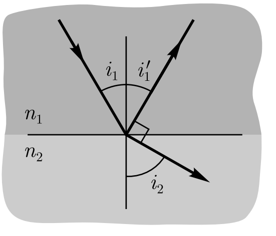
$$\gamma = (\beta_2 + \alpha) - \beta_1 = \alpha + \beta_1 + \alpha - \beta_1 = 2\alpha.$$

Ответ: $\gamma = 2\alpha$.

5.2. Луч света падает на плоскую границу раздела двух сред под углом $i_1 = 30°$. Показатель преломления первой среды $n_1 = 2{,}42$. Определите показатель преломления второй среды n_2, если отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

Дано: $i_1 = 30°$; $n_1 = 2{,}42$.

Найти: n_2.



Решение. Согласно условию задачи, отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу (см. рисунок), т. е.

$$i_1 + i_2 = 90°. \qquad (1)$$

Запишем закон преломления на границе раздела двух сред и учтем выражение (1):

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin i_1}{\sin(90° - i_1)} = \frac{\sin i_1}{\cos i_1} = \operatorname{tg} i_1 = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда искомый показатель преломления второй среды

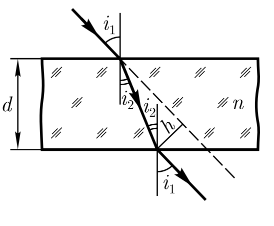
$$n_2 = n_1 \operatorname{tg} i_1.$$

Ответ: $n_2 = 1{,}4$.

5.3. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1{,}5$) под углом $45°$. Определите толщину пластинки, если вышедший из пластинки луч смещен относительно падающего луча на 1,5 см.

Дано: $n = 1{,}5$; $i_1 = 45°$; $h = 1{,}5$ см ($1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: d.



Решение. Вышедший из пластинки луч параллелен падающему (ход лучей показан на рисунке). Из рисунка следует, что

$$\frac{d}{\cos i_2} = \frac{h}{\sin(i_1 - i_2)}, \qquad (1)$$

откуда

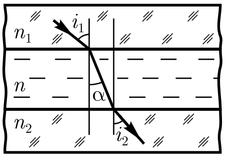
$$d = \frac{h\cos i_2}{\sin(i_1 - i_2)} = \frac{h\cos i_2}{\sin i_1 \cos i_2 - \cos i_1 \sin i_2}.$$

Согласно закону преломления, $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$, откуда $\sin i_2 = \dfrac{\sin i_1}{n}$. Подставив это значение в формулу (1), а также выразив косинус угла через синус, найдем искомую толщину пластинки

$$d = \frac{h\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}{\sin i_1 \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \sqrt{1 - \sin^2 i_1}\right)}.$$

Ответ: $d = 5{,}58$ см.

5.4. Между двумя стеклянными параллельными пластинками с показателями преломления n_1 и n_2 находится тонкий плоскопараллельный слой жидкости. Луч света, распространяющийся в первой пластинке под углом i_1 (меньше предельного), выходя из слоя жидкости, входит во вторую пластинку под углом i_2. Докажите, что в данном случае выполняется закон преломления $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$ независимо от присутствия слоя жидкости между пластинами.



Дано: n_1; n_2; $i_1 < i_{пр}$; i_2.

Найти: $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$.

Решение. Закон преломления на границе раздела стекло — жидкость:

$$\frac{\sin i_1}{\sin \alpha} = \frac{n}{n_1}, \qquad (1)$$

где α — угол преломления светового луча в жидкости; n — показатель преломления жидкости.

Закон преломления на границе раздела жидкость — стекло

$$\frac{\sin \alpha}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n}. \qquad (2)$$

Перемножая почленно уравнения (1) и (2), получаем

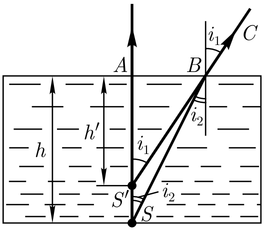
$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

т. е. прозрачный плоскопараллельный слой жидкости, находящийся между двумя стеклянными плоскопараллельными пластинками, не изменяет условий преломления.

5.5. Определите глубину, на которой кажется расположенной монета, лежащая на дне бассейна глубиной $h = 1{,}5$ м, если угол i_1 между лучом зрения и вертикалью составляет 30°. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Дано: $h = 1{,}5$ м; $i_1 = 30°$; $n = 1{,}33$.

Найти: h'.



Решение. Найдем положение точки S', представляющей собой мнимое изображение точки S (точка S' находится на глубине h', точка S — на глубине h).

Из рисунка следует, что

$$AB = h \operatorname{tg} i_2 = h' \operatorname{tg} i_1,$$

откуда

$$h' = h\frac{\operatorname{tg} i_2}{\operatorname{tg} i_1} = h\left(\frac{\sin i_2}{\cos i_2} : \frac{\sin i_1}{\cos i_1}\right). \quad (1)$$

Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомую глубину

$$h' = \frac{h}{n}\frac{\cos i_1}{\cos i_2} = \frac{h}{n}\frac{\cos i_1}{\sqrt{1-\sin^2 i_2}} == \frac{h}{n}\frac{\cos i_1}{\sqrt{1-(\sin^2 i_1)/n^2}}.$$

Ответ: $h' = 1{,}05$ м.

5.6. Световой луч выходит из алмаза в масло. Определите предельный угол $i_{\text{пр}}$ падения света на границе этих сред, если показатели преломления алмаза $n_1 = 2{,}42$, масла — $n_2 = 1{,}6$.

Дано: $n_1 = 2{,}42$; $n_2 = 1{,}6$.

Найти: $i_{\text{пр}}$.

Решение. Поскольку свет распространяется из оптически более плотной среды (алмаз) в оптически менее плотную (масло), может наблюдаться явление полного отражения.

Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1)$$

где i_1 — угол падения; i_2 — угол преломления.

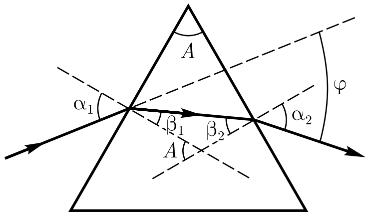
Для нахождения предельного угла положим $i_1 = i_{\text{пр}}$, $i_2 = 90°$, тогда формула (1) запишется в виде

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда искомый предельный угол

$$i_{\text{пр}} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}.$$

Ответ: $i_{\text{пр}} = 41°23'$.



5.7. Выведите зависимость угла φ отклонения узкого монохроматического пучка света призмой с показателем преломления n и малым преломляющим углом A.

Дано: A; n.

Найти: $\varphi(A)$.

Решение. Пусть узкий монохроматический пучок света падает на призму под углом α_1 (см. рисунок). После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) пучок отклоняется от первоначального направления на угол φ. Пользуясь законами преломления и учитывая геометрические соотношения, получим

$$\left.\begin{aligned} &\sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}, A = \beta_2 + \beta_1, \\ &\sin\alpha_2 = n\sin\beta_2, \varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Из формул (1) видно, что угол отклонения зависит от показателя преломления, поэтому при прохождении через призму светового пучка сплошного спектрального состава наблюдается дисперсия света. Преломляющую призму с малым преломляющим углом называют *оптическим клином*. В случае оптического клина при малом угле падения луча α_1 формулы (1) принимают следующий вид:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{n};\ A = \beta_2 + \beta_1;\ \alpha_2 = n\beta_2,\ \varphi = n\beta_1 + n\beta_2 - A = n(\beta_1 + \beta_2) - A = nA - A = A(n-1).$$

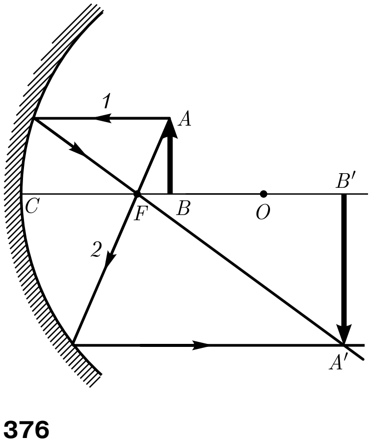
Ответ: $\varphi = A(n-1)$.

5.8. Радиус R кривизны вогнутого зеркала 60 см. Определите, на каком расстоянии a от полюса зеркала следует поместить предмет, чтобы его действительное изображение было в два раза больше предмета.

Дано: $R = 60$ см (0,6 м); $|A'B'| = 2|AB|$.

Найти: a.

Решение. Известно, чтобы получить в вогнутом зеркале действительное увеличенное изображение, предмет следует поместить между главным фокусом F и оптическим центром O зеркала (см. рисунок).



Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета AB: 1) луч *1*, параллельный главной оптической оси, который после отражения проходит через главный фокус; 2) луч *2*, проходящий через главный фокус, который после отражения от зеркала идет параллельно главной оптической оси. Точка пересечения A' отраженных лучей — действительное изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось. Таким образом, $A'B'$ — изображение действительное, увеличенное, перевернутое.

Согласно формуле сферического зеркала,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{1}$$

[все расстояния взяты со знаком «+» (изображение действительное)]. По условию задачи

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = 2 = \frac{b}{a},$$

откуда

$$b = 2a. \tag{2}$$

Фокусное расстояние

$$f = \frac{R}{2}. \tag{3}$$

Подставив (2) и (3) в формулу (1), получим

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} = \frac{2}{R},$$

откуда искомое расстояние

$$a = \frac{3}{4}R.$$

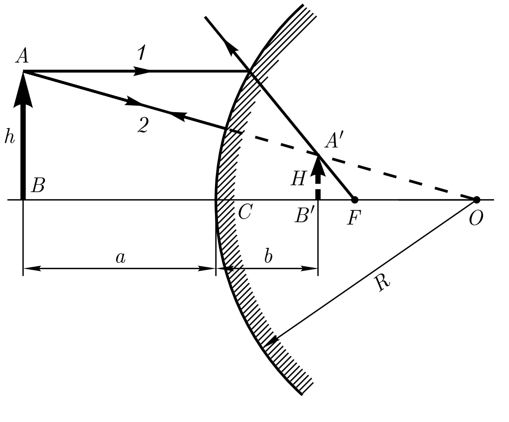
Ответ: $a = 45$ см.

5.9. Выпуклое сферическое зеркало имеет радиус кривизны $R = 40$ см. На расстоянии $a = 30$ см от полюса зеркала поставлен предмет высотой $h = 20$ см. Определите: 1) расстояние b от полюса зеркала до изображения; 2) высоту H изображения.

Дано: $R = 40$ см (0,4 м); $a = 30$ см (0,3 м); $h = 20$ см (0,2 м).

Найти: 1) b; 2) H.

Решение. Известно, что в выпуклом сферическом зеркале при любом положении предмета получается мнимое, прямое, уменьшенное изображение предмета, которое находится между главным фокусом и зеркалом.



Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета AB: 1) луч *1*, параллельный главной оптической оси, продолжение которого после отражения проходит через фокус F; 2) луч *2*, проходящий через оптический центр O зеркала, который после отражения идет назад вдоль первоначального направления. Точка пересечения A' отраженных лучей — мнимое изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось.

Согласно формуле сферического зеркала для параксиальных лучей,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}=\frac{2}{R}, \quad (1)$$

где f — главное фокусное расстояние зеркала. Поскольку сферическое зеркало выпуклое, фокусное расстояние — величина отрицательная. Расстояние b — расстояние до мнимого изображения — его следует также брать со знаком «−». Поэтому для выпуклого сферического зеркала формула (1) запишется в виде: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{f}$ или

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R},$$

откуда искомое расстояние от полюса зеркала до изображения

$$b=\frac{aR}{2a+R}.$$

Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем

$$\frac{h}{H}=\frac{R+a}{R-b},$$

откуда искомая высота изображения

$$H=\frac{R-b}{R+a}h.$$

Ответ: 1) $b=12$ см; 2) $H=8$ см.

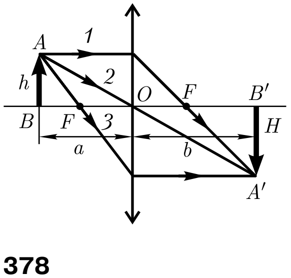
5.10. На расстоянии $a=7$ см от двояковыпуклой тонкой линзы с оптической силой $\Phi=25$ диоптрий перпендикулярно к главной оптической оси находится предмет высотой $h=4$ см. Определите: 1) расстояние b изображения от линзы; 2) высоту H изображения. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

Дано: $a=7$ см $(7\cdot10^{-2}$ м); $\Phi=25$ дптр; $h=4$ см $(4\cdot10^{-2}$ м).

Найти: 1) b; 2) H.

Решение. Для корректного построения изображения найдем, согласно условию задачи, фокусное расстояние линзы. Оптическая сила тонкой линзы

$$\Phi=\frac{1}{f}, \quad (1)$$



где f — фокусное расстояние. Получаем, что фокусное расстояние линзы составляет 4 см.

Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета AB: 1) луч *1*, идущий параллельно главной оптической оси, который после преломления в линзе проходит через второй фокус линзы; 2) луч *2*, проходящий через оптический центр линзы и не изменяющий своего направления; 3) луч *3*, проходящий через первый фокус линзы, который после преломления в ней выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси. Точка пересечения A' этих лучей и есть действительное изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось. Естественно, для построения изображения достаточно рассмотреть ход двух лучей.

Из построения следует, что при помещении предмета между двойным фокусным расстоянием и фокусом (см. условие задачи) изображение находится за двойным фокусным расстоянием по другую сторону линзы и является действительным, перевернутым и увеличенным.

Согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

откуда искомое расстояние изображения от линзы

$$b=\frac{af}{a-f}.$$

Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем

$$\frac{h}{H}=\frac{a}{b},$$

откуда искомая высота изображения

$$H=\frac{bh}{a}.$$

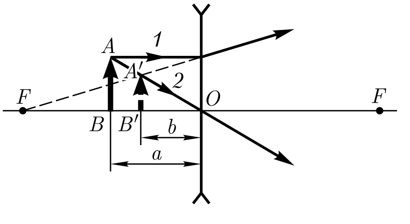
Ответ: 1) $b = 9{,}33$ см; 2) $H = 5{,}33$ см.

5.11. На расстоянии $a = 15$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $f = 30$ см перпендикулярно главной оптической оси находится предмет высотой $h = 9$ см. Определите: 1) расстояние b изображения от линзы; 2) высоту H изображения. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

Дано: $a = 15$ см (0,15 м); $f = 30$ см (0,3 м); $h = 9$ см (0,09 м).

Найти: 1) b; 2) H.

Решение. Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета AB: 1) луч *1*, идущий параллельно главной оптической оси, продолжение которого после преломления в линзе проходит через фокус линзы; 2) луч *2*, проходящий через оптический центр линзы и не изменяющий своего направления. Точка пересечения A' и есть мнимое изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось.



Из построения следует, что при *любом* расположении предмета изображение находится между предметом и линзой (по ту же сторону линзы, что и предмет) и является мнимым, прямым и уменьшенным.

Согласно формуле тонкой линзы, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$. Поскольку линза рассеивающая, то f — величина отрицательная, b — также величина отрицательная (расстояние до мнимого изображения). Поэтому формула тонкой линзы запишется в виде

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{f},$$

откуда искомое расстояние изображения до линзы

$$b=\frac{af}{a+f}.$$

Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем

$$\frac{h}{H}=\frac{a}{b},$$

откуда искомая высота изображения

$$H=\frac{bh}{a}.$$

Ответ: 1) $b=10$ см; 2) $H=6$ см.

5.12. Определите, как изменятся фокусные расстояния двояковыпуклой тонкой линзы из стекла ($n=1{,}5$) с радиусами кривизны $R_1=R_2=25$ см после помещения линзы в горчичное масло ($n_1=1{,}6$).

Дано: $n=1{,}5$; $R_1=R_2=25$ см (0,25 м); $n_1=1{,}6$.

Найти: $\frac{f_1}{f}$.

Решение. Оптическая сила тонкой двояковыпуклой линзы

$$\Phi=\frac{1}{f}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),$$

где f — фокусное расстояние линзы; N — относительный показатель преломления (отношение абсолютных показателей преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны передней и задней относительно предмета поверхностей линзы.

Фокусное расстояние линзы, если световой луч выходит в воздух,

$$f=\frac{1}{(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)} \qquad (1)$$

(учли, что абсолютный показатель преломления воздуха равен единице).

При погружении линзы в масло фокусное расстояние определится по формуле

$$f_1=\frac{1}{\left(\frac{n}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) искомое отношение фокусных расстояний

$$\frac{f_1}{f}=\frac{n-1}{\frac{n}{n_1}-1}.$$

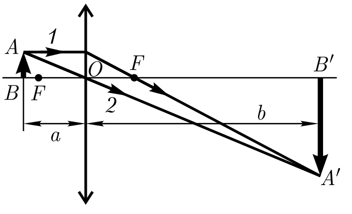
Вычисляя, получаем $\frac{f_1}{f} = -8$, т. е. $f_1 = -8f$. Следовательно, собирающая линза при погружении ее в оптически более плотную среду становится рассеивающей (фокусное расстояние f_1 имеет знак «$-$»).

Ответ: $f_1 = -8f$.

5.13. Двояковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1{,}5$ имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей, равные 9 см. Определите расстояние l от предмета до изображения, если изображение предмета с помощью этой линзы в $\eta = 5$ раз больше предмета.

Дано: $n = 1{,}5$; $R = 9$ см (0,09 м); $\eta = 5$.

Найти: l.



Решение. Увеличенное изображение предмета (действительное и перевернутое) получается в двояковыпуклой линзе, если предмет находится между двойным фокусным расстоянием и фокусом линзы (см. рисунок).

Искомое расстояние

$$l = a + b,$$

где a — расстояние от линзы до предмета; b — расстояние от линзы до изображения.

Формулу тонкой линзы с учетом того, что радиусы кривизны поверхностей одинаковы, изображение действительное и световой луч выходит в воздух, можно записать в виде:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\frac{2}{R}. \qquad (1)$$

Из рисунка следует (рассматриваем подобные треугольники AOB и $A'OB'$), что $\eta = \frac{b}{a}$, откуда $b = \eta a$. Подставив это выражение в формулу (1), после элементарных преобразований найдем

$$a = \frac{(1+\eta)R}{2\eta(n-1)}.$$

Тогда искомое расстояние от предмета до изображения

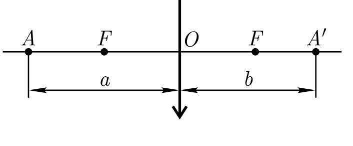
$$l = a + b = a + \eta a = (1+\eta)a = \frac{(1+\eta)^2 R}{2\eta(n-1)}.$$

Ответ: $l = 64{,}8$ см.

5.14. Определите расстояние a от собирающей линзы до предмета, при котором расстояние l от предмета до действительного изображения будет минимальным, если фокусное расстояние линзы равно f.

Дано: $l = l_{\min}$; $OF = f$.

Найти: a.



Решение. Согласно условию задачи,

$$l = a + b. \qquad (1)$$

Применяя формулу тонкой линзы (линза собирающая и изображение действительное)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

выразим l как функцию одной переменной a, исключив, согласно (1), величину b,

$$l=\frac{a^2}{a-f}. \qquad (2)$$

Исследуем функцию (2) на экстремум, продифференцировав выражение (2) по переменной a и приравняв нулю производную,

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}a}=\frac{2a(a-f)-a^2}{(a-f)^2}=0.$$

Записав

$$2a(a-f)-a^2=0,$$

откуда искомое расстояние от линзы до предмета (учитываем, что изображение действительное и должно выполняться неравенство $a>f$)

$$a=2f.$$

Ответ: $a=2f$.

5.15. Предмет высотой 20 см расположен на расстоянии 30 см перед двояковыпуклой линзой, имеющей оптическую силу 2,5 дптр. Определите: 1) фокусное расстояние линзы; 2) на каком расстоянии от линзы находится изображение предмета; 3) линейное увеличение линзы; 4) высоту изображения. Постройте изображение предмета в линзе. Что это за изображение?

Дано: $h=20$ см (0,2 м); $a=30$ см (0,3 м); $\Phi=2{,}5$ дптр.

Найти: 1) f; 2) b; 3) Γ; 4) H.

Решение. 1) Оптическая сила линзы — величина, обратная фокусному расстоянию,

$$\Phi=\frac{1}{f},$$

откуда фокусное расстояние

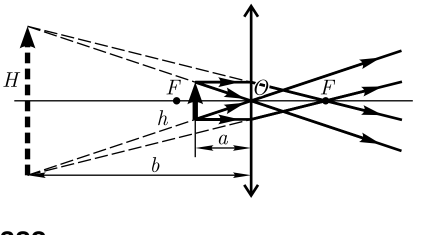
$$f=\frac{1}{\Phi}.$$

2) Согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

получим искомое расстояние от изображения предмета до линзы:

$$b=\frac{af}{a-f}. \qquad (1)$$



3) Линейное увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{b}{a}. \qquad (2)$$

4) Высота изображения предмета

$$H = \Gamma h. \qquad (3)$$

Подставив формулы (1) и (2) в выражение (3), получаем

$$H = h\frac{f}{a - f}.$$

Вычисляя, получаем: 1) $f = 0{,}4$ м; 2) $b = -1{,}2$ м; 3) $\Gamma = -4$; 4) $H = -0{,}8$ м.

Согласно полученным значениям, изображение мнимое, прямое, увеличенное, что и осуществлено с помощью построения на рисунке.

Ответ: 1) $f = 0{,}4$ м; 2) $b = -1{,}2$ м; 3) $\Gamma = -4$; 4) $H = -0{,}8$ м.

5.16. Светильник в виде равномерно светящегося шара в 500 кд имеет диаметр 50 см. Определите: 1) полный световой поток Φ, излучаемый светильником; 2) его светимость R; 3) освещенность E_1, светимость R_1 и яркость B_1 экрана, на который падает 20 % светового потока, излучаемого светильником. Площадь экрана составляет 0,5 м^2, а коэффициент отражения света его поверхностью $\rho = 0{,}7$.

Дано: $I = 500$ кд; $d = 50$ см (0,5 м); $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2} = 0{,}2$; $S_1 = 0{,}5$ м^2; $\rho = 0{,}7$.

Найти: 1) Φ; 2) R; 3) E_1, R_1, B_1.

Решение. Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником,

$$\Phi = 4\pi I.$$

Светимость источника света

$$R = \frac{\Phi}{S},$$

где S — площадь поверхности светильника: $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$. Тогда

$$R = \frac{4\pi I}{\pi d^2} = \frac{4I}{d^2}.$$

Так как, по условию, на экран падает световой поток $\Phi_1 = 0{,}2\Phi$, то освещенность экрана

$$E_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = 0{,}2\frac{\Phi}{S_1}.$$

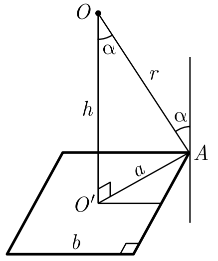
Светимость экрана

$$R_1 = \rho E_1.$$

Яркость экрана

$$B_1 = \frac{R_1}{\pi}.$$

Ответ: 1) $\Phi = 6{,}28$ клм; 2) $R = 8$ клм/м^2; 3) $E_1 = 2{,}51$ клк; $R_1 = 1{,}76$ клм/м^2; $B_1 =$ $= 560$ кд/м^2.



5.17. В центре квадратной комнаты площадью $S = 16$ м^2 висит светильник. Считая светильник точечным источником света, определите высоту h от пола, на которой должен висеть светильник, чтобы освещенность в углах комнаты была максимальной.

Дано: $S = 16$ м^2; $E = E_{\max}$.

Найти: h.

Решение. Освещенность поверхности, создаваемая источником силой света I в точке, удаленной от него на расстояние r,

$$E = \frac{I\cos\alpha}{r^2}, \tag{1}$$

где α — угол падения лучей.

Если r — расстояние от лампы до угла комнаты; a — половина диагонали квадратного пола комнаты; b — сторона квадратного пола, то из треугольника OAO' (см. рисунок)

$$a = r\sin\alpha = h\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{2}$$

Подставив из формулы (2) $r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ в формулу (1), найдем выражение для освещенности поверхности:

$$E = \frac{I\cos\alpha\sin^2\alpha}{a^2}.$$

Чтобы определить максимум освещенности, следует взять производную $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\alpha}$ и приравнять ее нулю:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{I}{a^2}\left(2\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2}. \tag{3}$$

Искомая высота, согласно формуле (2), $h = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$. Рассматривая квадрат, можем записать, что $a^2 = \dfrac{2b^2}{4}$ или $a = \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{2}}$ $(S = b^2)$. Тогда с учетом (3)

$$h = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\sqrt{S}}{2}.$$

Ответ: $h = 2$ м.

5.18. Определите высоту, на которую следует над чертежной доской повесить лампочку мощностью $P = 100$ Вт, чтобы освещенность E доски под лампочкой была равна 50 лк. Наклон доски $\alpha = 30°$, световая отдача L лампочки равна 10 лм/Вт. Лампочку считать точечным источником, принимая полный световой поток $\Phi = 4\pi I$ (I — сила света лампочки).

Дано: $P = 100$ Вт; $E = 50$ лк; $\alpha = 30°$; $L = 10$ лм/Вт; $\Phi = 4\pi I$.

Найти: h.

Решение. Световой отдачей лампочки называется отношение полного светового потока Φ, излучаемого лампочкой, к ее электрической мощности P:

$$L = \frac{\Phi}{P}. \quad (1)$$

Освещенность поверхности, создаваемая источником силой света I в точке, удаленной от него на расстояние h,

$$E = \frac{I\cos\alpha}{h^2},$$

где α — угол между световым лучом и нормалью к поверхности (равен углу наклона доски). Тогда

$$h = \sqrt{\frac{I\cos\alpha}{E}}. \quad (2)$$

Учитывая формулу (1) и $\Phi = 4\pi I$, из формулы (2) найдем искомую высоту

$$h = \sqrt{\frac{LP\cos\alpha}{4\pi E}}.$$

Ответ: $h = 1{,}17$ м.

Задачи для самостоятельного решения

5.19. Плоское зеркало поворачивают вокруг оси, проходящей через точку падения луча и перпендикулярной к плоскости, в которой лежат падающий и отраженные лучи. Определите, на какой угол осуществлен поворот зеркала, если отраженный от него световой луч повернулся на угол β. [$\alpha = \frac{\beta}{2}$]

5.20. На горизонтальном дне бассейна лежит плоское зеркало. Луч света входит в воду под углом $i_1 = 30°$. Определите глубину h бассейна, если расстояние s от места вхождения луча в воду до места выхода его на поверхность воды после отражения от зеркала составляет 1,5 м, а показатель преломления воды $n = 1{,}33$. [$h = \frac{s\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}{2\sin i_1} = 1{,}85$ м]

5.21. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1{,}6$) толщиной $d = 6$ см под углом $i = 45°$. Определите расстояние h, на которое сместился луч после прохождения пластинки относительно продолжения падающего луча. [$h = d\sin i\left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right) = 2{,}15$ см]

5.22. Рыбак с лодки рассматривает предмет, лежащий на дне реки. Определите глубину h реки, если визуально по вертикальному направлению глубина h' реки кажется равной 2 м. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. [$h = nh' = 2{,}66$ м]

5.23. Световой луч выходит из масла в воздух. Предельный угол $i_{\text{пр}} = 38°\,41'$. Определите скорость v света в масле. [$v = 187$ Мм/с]

5.24. На дне сосуда, наполненного прозрачной жидкостью (показатель преломления n) до высоты h, находится точечный источник света. На поверхности жидкости плавает круглый диск, причем центр диска находится над источником света. Определите минимальный радиус диска, при котором ни один луч не выйдет сквозь поверхность жидкости. [$r \geqslant \dfrac{h}{\sqrt{n^2-1}}$]

Рис. *а*

5.25. Два плоских зеркала наклонены друг к другу и образуют острый двугранный угол α. На одно из зеркал падает световой луч перпендикулярно ребру угла. Определите, на какой угол β повернется отраженный луч после отражения от обоих зеркал. [$\beta = 2\alpha$]

Рис. *б*

5.26. На рис. *а* горизонтальная прямая — главная оптическая ось сферического зеркала, S — светящаяся точка, S' — ее изображение в зеркале. Используя правила построения в сферических зеркалах, определите положения оптического центра O зеркала и его фокуса F. Является ли зеркало выпуклым или вогнутым?

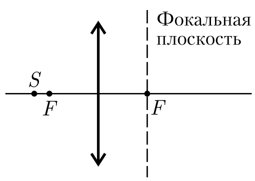


Рис. *в*

5.27. На рис. *б* горизонтальная прямая — главная оптическая ось сферического зеркала, S — светящаяся точка, S' — ее изображение в зеркале. Используя правила построения в сферических зеркалах, определите положения оптического центра O зеркала и его фокуса F. Является ли зеркало выпуклым или вогнутым?

5.28. Вогнутое сферическое зеркало дает действительное изображение, которое в три раза больше предмета. Определите фокусное расстояние f зеркала, если расстояние между предметом и изображением равно 20 см. [$f = 7{,}5$ см]

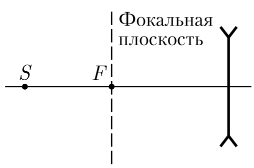


Рис. *г*

5.29. Постройте изображение произвольной точки S, которая лежит на главной оптической оси собирающей линзы (рис. *в*).

5.30. Постройте изображение произвольной точки S, которая лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы (рис. *г*).

Рис. *д*

5.31. На рис. *д* горизонтальная прямая — главная оптическая ось тонкой линзы, S — светящаяся точка, S' — ее изображение в линзе. Используя правила построения в тонких линзах, определите положения оптического центра O линзы и ее фокусов F. Является ли линза собирающей или рассеивающей? Среды по обе стороны линзы одинаковы.

Рис. *е*

5.32. На рис. *е* горизонтальная прямая — главная оптическая ось тонкой линзы, S — светящаяся точка, S' — ее изображение в линзе. Используя правила построения в тонких линзах, определите положения оптического центра O линзы и ее фокусов F. Является ли линза собирающей или рассеивающей? Среды по обе стороны линзы одинаковы.

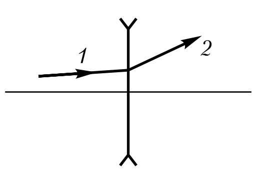


Рис. *ж*

5.33. На рис. *ж* горизонтальная прямая — главная оптическая ось рассеивающей линзы, луч *1* — падающий на линзу, луч *2* — преломленный линзой. Используя правила построения в тонких линзах, определите положение оптического центра O линзы и фокусное расстояние f линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

5.34. Определите фокусное расстояние f_2 двояковыпуклой линзы, погруженной в воду ($n_2 = 1{,}33$), если ее фокусное расстояние f_1 в воздухе составляет 20 см. Показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза, $n = 1{,}6$. $\left[f_2 = \dfrac{(n-1)f_1}{\dfrac{n}{n_2} - 1} = 59{,}1 \text{ см}\right]$

5.35. Предмет расположен на расстоянии $l_1 = 25$ см перед передним фокусом собирающей линзы. Изображение предмета находится на расстоянии $l_2 = 36$ см за задним фокусом. Определите фокусное расстояние f линзы. $[f = \sqrt{l_1 l_2} = 30 \text{ см}]$

5.36. Светильник в виде равномерно светящегося шара радиусом $r = 20$ см имеет силу света $I = 200$ кд. Определите для этого светильника: 1) полный световой поток Φ_0; 2) светимость R. [1) $\Phi_0 = 2{,}51$ клм; 2) $R = 5$ клм/м^2]

5.37. На лист белой бумаги площадью 500 см^2 нормально к поверхности падает световой поток $\Phi = 100$ лм. Принимая коэффициент рассеяния бумажного листа $\rho = 0{,}6$, определите для него: 1) светимость R; 2) освещенность E; 3) яркость B. [1) $R = 1{,}2$ клк/м^2; 2) $E = 2$ клк; 3) $B = 382$ кд/м^2]

5.38. Докажите, что освещенность, создаваемая изотропным (сила света источника не зависит от направления) точечным источником света I на бесконечно малой площадке, удаленной на расстояние r от источника, равна $E = \dfrac{I}{r^2}\cos i$, где i — угол падения луча на площадку.

5.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Основные законы и формулы

• Связь длины когерентности $l_{\text{ког}}$ с временем когерентности $\tau_{\text{ког}}$

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}.$$

• Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{n}$$

[c — скорость распространения света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды].

• Оптическая длина пути

$$L = ns$$

[s — геометрическая длина пути световой волны в среде; n — показатель преломления этой среды].

• Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1$$

[L_1 и L_2 — соответственно оптические длины проходимых волнами путей].

• Разность фаз двух когерентных волн

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$$

[λ_0 — длина волны в вакууме; Δ — оптическая разность хода двух световых волн].

• Условие интерференционных максимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0$$

[$m = 0, 1, 2, \ldots$; λ_0 — длина волны в вакууме].

• Условие интерференционных минимумов

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

[$m = 0, 1, 2, \ldots$; λ_0 — длина волны в вакууме].

• Ширина интерференционной полосы

$$b = \frac{l}{d}\lambda_0$$

[d — расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана ($l \gg d$)].

• Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе ($n_0 = 1$),

$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0,$$

$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

[d — толщина пленки; n — ее показатель преломления; i — угол падения; r — угол преломления; $m = 0, 1, 2, \ldots$].

В общем случае слагаемое $\pm\frac{\lambda_0}{2}$ обусловлено потерей полуволны при отражении света от границы раздела.

• Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 R}$$

[$m = 1, 2, 3, \ldots$ — номер кольца; R — радиус кривизны линзы; λ_0 — длина волны в вакууме].

• Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем свете)

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R}$$

[$m = 0, 1, 2, \ldots$ — номер кольца; R — радиус кривизны линзы; λ_0 — длина волны в вакууме].

• В случае просветления оптики интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n = \sqrt{n_c}, \quad nd = (2m+1)\frac{\lambda_0}{4}$$

[n_c — показатель преломления стекла; n — показатель преломления пленки; nd — оптическая толщина пленки; $m = 0, 1, 2, \ldots$; λ_0 — длина волны в вакууме].

Примеры решения задач

5.39. Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела воздух — стекло. Определите длину волны λ в стекле, если длина волны λ_0 в воздухе равна 640 нм, а показатель n преломления стекла равен 1,6.

Дано: $\lambda_0 = 640$ нм ($6{,}4 \cdot 10^{-7}$ м); $n = 1{,}6$.

Найти: λ.

Решение. Длина волны в среде

$$\lambda = \frac{v}{\nu},$$

где скорость распространения волны в среде зависит от показателя преломления, а частота колебаний при распространении во всех средах одинакова. Учитывая, что

$$v = \frac{c}{n}$$

($c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме), из записанных двух формул искомая длина волны в стекле

$$\lambda = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Ответ: $\lambda = 400$ нм.

5.40. Когерентные лучи, длины волн которых в вакууме $\lambda_0 = 600$ нм, приходят в некоторую точку с геометрической разностью хода $\Delta s = 1{,}2$ мкм. Определите, максимум или минимум наблюдается в этой точке, если лучи проходят в воздухе (показатель преломления $n_1 = 1$), стекле ($n_2 = 1{,}75$) и скипидаре ($n_3 = 1{,}5$).

Дано: $\lambda_0 = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $\Delta s = 1{,}2$ мкм ($1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м); $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}75$; $n_3 = 1{,}5$.

Найти: max или min.

Решение. Соответственно из условий интерференционных максимумов и минимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \ (m = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \ (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

следует, что максимум наблюдается, если оптическая разность хода Δ равна целому числу длин волн в вакууме, минимум — полуцелому числу длин волн в вакууме.

Оптическая разность хода в перечисленных средах: $\Delta_1 = n_1\Delta s$; $\Delta_2 = n_2\Delta s$; $\Delta_3 = n_3\Delta s$.

Тогда

$$\frac{\Delta_1}{\lambda_0} = \frac{n_1 \Delta s}{\lambda_0} = 2; \quad \frac{\Delta_2}{\lambda_0} = \frac{n_2 \Delta s}{\lambda_0} = 3,5; \quad \frac{\Delta_3}{\lambda_0} = \frac{n_3 \Delta s}{\lambda_0} = 3.$$

Ответ: в воздухе и скипидаре наблюдается интерференционный максимум, в стекле — интерференционный минимум.

5.41. В опыте Юнга щели освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, расстояние d между щелями равно 1 мм и расстояние l от щелей до экрана 1,2 м. Определите: 1) положение первой темной полосы; 2) положение третьей светлой полосы.

Дано: $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $d = 1$ мм (10^{-3} м); $l = 1{,}2$ м.

Найти: 1) $x_{1\,\min}$; 2) $x_{3\,\max}$.

Решение. Две узкие щели S_1 и S_2 находятся на расстоянии d друг от друга и являются когерентными (реальными или мнимыми изображениями источника S в какой-то оптической системе) источниками света. Интерференция наблюдается в произвольной точке A экрана, параллельного обеим щелям и расположенного от них на расстоянии l ($l \gg d$). Начало отсчета выберем в точке, симметричной относительно щелей.

Интенсивность в любой точке A экрана, лежащей на расстоянии x от O, определяется оптической разностью хода $\Delta = s_2 - s_1$ (см. рисунок*). Применяя теорему Пифагора, имеем

$$s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \quad s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

откуда $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$, или

$$\Delta = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_1 + s_2}.$$

Из условия $l \gg d$ следует, что $s_1 + s_2 \approx 2l$, поэтому оптическая разность хода

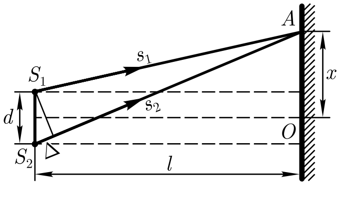
$$\Delta = \frac{xd}{l}. \qquad (1)$$

Интерференционный минимум наблюдается при оптической разности хода, равной полуцелому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \ (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Приравняв (1) и (2),

$$\frac{x_{\min} d}{l} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$



найдем искомое положение первой темной полосы ($m = 1$):

$$x_{\min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{d}\lambda; \quad x_{1\,\min} = \pm\frac{3}{2}\frac{l}{d}\lambda.$$

* Отметим, что рисунок выполнен не в масштабе.

Интерференционный максимум наблюдается при оптической разности хода, равной целому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm m\lambda \ (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

Приравняв выражения (3) и (1),

$$\frac{x_{\max} d}{l} = \pm m\lambda,$$

найдем искомое положение третьей светлой полосы ($m = 3$)

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d}\lambda; \quad x_{3\max} = \pm 3\frac{l}{d}\lambda.$$

Ответ: 1) $x_{1\min} = 1{,}08$ мм; 2) $x_{3\max} = 2{,}16$ мм.

5.42. В опыте Юнга угловое расстояние Δd между соседними светлыми полосами составляет 10^{-3} рад. Определите расстояние l от щелей до экрана, если вторая светлая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на 4 мм.

Дано: $\Delta d = 10^{-3}$ рад; $m = 2$; $x = 4$ мм ($4 \cdot 10^{-3}$ м).

Найти: l.

Решение. Угол α, под которым наблюдается светлая полоса, отстоящая от центра O интерференционной картины (см. рисунок*), ввиду его малости ($l \gg d$),

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{l}, \qquad (1)$$

где l — расстояние от щелей до экрана.

Приравняв оптическую разность хода $\Delta = \dfrac{xd}{l}$ (см. решение предыдущей задачи) и $\Delta = \pm m\lambda$ (условие интерференционного максимума), получим

$$x = \frac{ml\lambda}{d}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем

$$\alpha = \frac{m\lambda}{d}. \qquad (3)$$

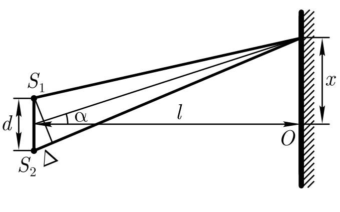
Угловое расстояние между соседними светлыми полосами

$$\Delta\alpha = \frac{m\lambda}{d} - \frac{(m-1)\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} = \frac{x}{ml}$$

[учли равенство выражений (1) и (3)], откуда искомое расстояние от щелей до экрана

$$l = \frac{x}{m\Delta\alpha}.$$

Ответ: $l = 2$ м.



* Отметим, что рисунок выполнен не в масштабе.

5.43. На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников ($\lambda = 500$ нм). На пути одного из лучей перпендикулярно ему поместили стеклянную пластинку ($n = 1{,}6$) толщиной $d = 5$ мкм. Определите, на сколько полос сместится при этом интерференционная картина.

Дано: $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м); $n = 1{,}6$; $d = 5$ мкм ($5 \cdot 10^{-6}$ м).

Найти: m.

Решение. При внесении стеклянной пластинки оптическая разность хода между лучами изменится на

$$\Delta = nd - d = d(n - 1),$$

где d — толщина пластинки; n — ее показатель преломления.

С другой стороны, внесение пластинки приведет к смещению интерференционной картины на m полос, т. е. дополнительная разность хода равна $m\lambda$. Следовательно,

$$d(n - 1) = m\lambda,$$

откуда найдем искомое m:

$$m = \frac{d(n-1)}{\lambda}.$$

Ответ: $m = 6$.

5.44. При освещении зеркал Френеля монохроматическим светом ($\lambda = 600$ нм) от узкой щели S на экране, отстоящем на расстоянии $a = 2{,}7$ м от линии пересечения зеркал, наблюдают интерференционные полосы, ширина которых $b = 2{,}9$ мм. Источник света находится на расстоянии $r = 10$ см от линии пересечения зеркал. Определите угол между зеркалами.

Дано: $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $a = 2{,}7$ м; $b = 2{,}9$ мм ($2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м); $r = 10$ см ($0{,}1$ м).

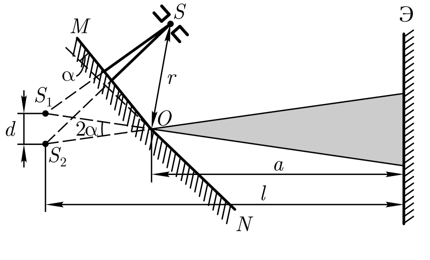
Найти: α.

Решение. После отражения от зеркал OM и ON световые пучки можно считать как бы выходящими из двух когерентных источников S_1 и S_2, являющихся мнимыми изображениями щели S (см. рисунок).

Если расстояние между источниками S_1 и S_2 обозначить d, а расстояние от них до экрана l, то величины l, d, b и λ связаны соотношением

$$b = \frac{l\lambda}{d}. \qquad (1)$$

Точки S_1 и S_2 симметричны точке S относительно соответствующих зеркал. Поэтому $S_1O = S_2O = r$ и угол S_2OS_1 равен 2α. Так как угол α очень мал и экран обычно располагают параллельно S_1S_2, то



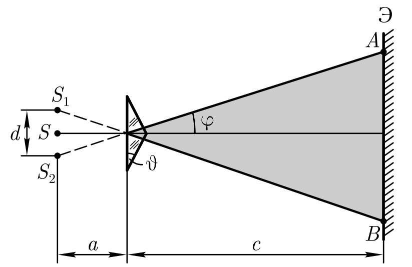
$$d = 2\alpha r,\ l = r + a.$$

Подставив эти выражения в (1), получим искомый угол между зеркалами (в рад):

$$\alpha = \frac{(r + a)\lambda}{2rb}.$$

Ответ: $\alpha = 10'$.

5.45. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равны $a = 48$ см и $c = 6$ м. Бипризма стеклянная ($n = 1{,}5$) с преломляющим углом $\vartheta = 10'$. Определите число полос, наблюдаемых на экране, если длина волны λ монохроматического света равна 600 нм.



Дано: $a = 48$ см (0,48 м); $c = 6$ м; $n = 1{,}5$; $\vartheta = 10'$; $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: N.

Решение. За бипризмой распространяются световые лучи, исходящие от мнимых источников S_1 и S_2, лежащих в одной плоскости с S, и являющиеся когерентными. Число полос, наблюдаемых на экране,

$$N = \frac{AB}{b}, \tag{1}$$

где AB — область, где происходит наложение когерентных пучков и наблюдается интерференция; b — ширина интерференционной полосы.

Протяженность

$$AB = 2c\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Поскольку отклоняющие углы у основания призмы малы, угол падения на бипризму также мал, поэтому все лучи отклоняются бипризмой на одинаковый угол

$$\varphi = (n-1)\vartheta. \tag{2}$$

Тогда

$$AB = 2c\,\mathrm{tg}\,\varphi \simeq 2c\varphi = 2c(n-1)\vartheta, \tag{3}$$

где ϑ — угол, выражаемый в радианах.

Ширина интерференционной полосы [расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами)]

$$b = \frac{l}{d}\lambda \tag{4}$$

не зависит от порядка интерференции (величины m) и является постоянной для данных l, λ и d. Расстояние между источниками с учетом (2):

$$d = 2a\,\mathrm{tg}\,\varphi \approx 2a\varphi = 2a(n-1)\vartheta. \tag{5}$$

Учитывая выражение (5), формулу (4) можно записать в виде:

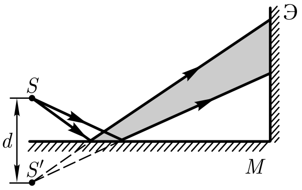
$$b = \frac{a+c}{2a(n-1)\vartheta}. \tag{6}$$

Подставив выражения (3) и (6) в формулу (1), найдем искомое число полос, наблюдаемых на экране,

$$N = \frac{4ac(n-1)^2\vartheta^2}{(a+c)\lambda}.$$

Вычисляя, получаем $N = 6{,}27$, т. е. наблюдается 6 полос.

Ответ: $N = 6$.



5.46. В зеркале Ллойда (см. рисунок) точечный источник S находится на расстоянии $l = 2$ м от экрана. На экране образуется система интерференционных полос (когерентными источниками являются первичный источник S и его мнимое изображение S' в зеркале). Ширина интерференционных полос b на экране равна 1,2 мм. Определите длину волны λ света, если после того, как источник света S отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta d = 0{,}5$ мм, ширина полос уменьшилась в $n = 2$ раза.

Дано: $l = 2$ м; $b = 1{,}2$ мм $(1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м); $\Delta d = 0{,}5$ мм $(5 \cdot 10^{-4}$ м); $n = 2$.

Найти: λ.

Решение. Ширина интерференционной полосы [расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами)]

$$b = \frac{l}{d}\lambda$$

не зависит от порядка интерференции (величины m) и является постоянной для данных l, λ и d, откуда расстояние между источником S и его мнимым изображением S'

$$d = \frac{l\lambda}{b}. \qquad (1)$$

После того как источник S отодвинули от плоскости зеркала на Δd, расстояние между источником и его мнимым изображением стало

$$d + 2\Delta d = \frac{l\lambda}{b/n} \qquad (2)$$

(учли, что ширина полос стала в n раз меньше).

Вычитая выражение (1) из (2), получаем

$$2\Delta d = \frac{l\lambda}{b}(n-1),$$

откуда искомая длина волны

$$\lambda = \frac{2b\Delta d}{(n-1)l}.$$

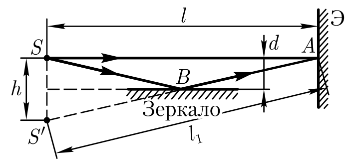
Ответ: $\lambda = 600$ нм.

5.47. В точку A (см. рисунок) на экране Э, отстоящем от источника S монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) на расстоянии $l = 1$ м, распространяются два луча: SA (перпендикулярен экрану) и SBA (отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу SA). Определите, что будет наблюдаться в точке A — усиление или ослабление интенсивности, если расстояние d от плоскости зеркала до луча SA равно 2,5 мм.

Дано: $\lambda = 0{,}5$ мкм $(5 \cdot 10^{-7}$ м); $l = 1$ м; $d = 2{,}5$ мм $(2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м).

Найти: m.

Решение. На рисунке, помимо данных, приведенных в задаче, построено мнимое изображение S' источника S в зеркале.



На экране при сложении волн, распространяющихся от источников S и S' (они когерентны), наблюдается интерференционная картина. Усиление или ослабление интенсивности в точке A зависит от числа полуволн, укладывающихся на оптической разности хода Δ:

$$m = \frac{\Delta}{\lambda/2}, \tag{1}$$

а именно, если m — целое четное, то в точке A будет максимум (условие интерференционного максимума $\Delta = \pm 2m\dfrac{\lambda}{2}$), если m — целое нечетное, то в точке A будет минимум (условие интерференционного минимума $\Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda}{2}$).

Оптическая разность хода

$$\Delta = l_1 - l - \frac{\lambda}{2}, \tag{2}$$

т. е. складывается из геометрической разности хода лучей (они распространяются в воздухе) и дополнительной разности хода $\dfrac{\lambda}{2}$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от более плотной среды.

Из рисунка следует, что

$$h = 2d \ \text{ и } \ l_1 = \sqrt{l^2 + h^2} = l\sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + 1}.$$

Тогда

$$l_1 - l = l\left[\sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + 1} - 1\right].$$

Так как величина $\dfrac{h}{l} \ll 1$, можно считать, что

$$\left[\left(\frac{h}{l}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \ \text{ и } \ l_1 - l = \frac{1}{2}\frac{h^2}{l}.$$

Учитывая полученное, формула (2) запишется в виде

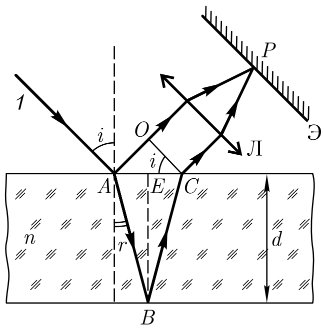
$$\Delta = \frac{1}{2}\frac{h^2}{l} - \frac{\lambda}{2}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в формулу (1), найдем

$$m = \frac{h^2}{\lambda l} - 1 = \frac{4d^2}{\lambda l} - 1.$$

Вычисляя, получаем $m = 49$, т. е. на оптической разности хода укладывается нечетное число длин полуволн: в точке A наблюдается минимум интенсивности.

Ответ: $m = 49$.



5.48. На плоскопараллельную прозрачную пластинку с показателем преломления $n = 1{,}5$ под углом $i = 30°$ падает параллельный пучок белого света. Определите, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в красный свет ($\lambda = 670$ нм).

Дано: $n = 1{,}5$; $i = 30°$; $\lambda = 670$ нм ($6{,}7 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: $d_{\min}$.

Решение. Световой луч *1*, выделенный из параллельного пучка белого света, падающего под углом i на плоскопараллельную пластинку, в точках A, B и C частично отражается и частично преломляется (см. рисунок).

Оптическая разность хода, возникающая между двумя интерферирующими лучами от точки A до плоскости OC:

$$\Delta = (AB + BC)n - AO - \frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

где учтено, что показатель преломления среды, окружающей пластинку, равен единице, и при отражении от верхней поверхности пластинки (от среды оптически более плотной) происходит потеря полуволны (происходит скачок фазы на π у отраженной волны).

Из рисунка следует, что $AB = \dfrac{d}{\cos r}$, $AO = AC\sin i = 2AE\sin i = 2d\,\mathrm{tg}\, r\sin i$, где d — толщина пленки; i — угол падения; r — угол преломления. Подставив эти значения в формулу (1) и учитывая закон преломления $\dfrac{\sin i}{\sin r} = n$, получаем

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos r} - 2d\,\mathrm{tg}\, r\sin i - \frac{\lambda}{2} = 2dn\sqrt{1-\sin^2 r} - \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}.$$

Интерференционный максимум наблюдается при оптической разности хода, равной целому числу длин полуволн: $\Delta = m\lambda$. Тогда можем записать

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \qquad (2)$$

Для наименьшей толщины пленки $m = 1$. Тогда выражение (2) запишется в виде

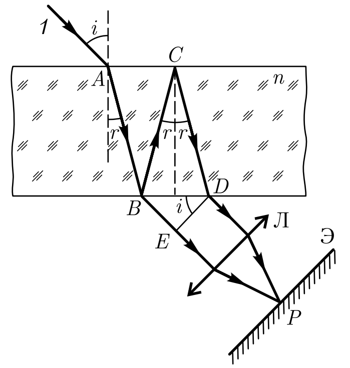
$$2d_{\min}\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

откуда искомая минимальная толщина пленки

$$d_{\min} = \frac{3\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Ответ: $d_{\min} = 355$ нм.

5.49. На тонкую прозрачную плоскопараллельную пластинку ($n = 1{,}5$) под углом $i = 30°$ падает белый свет. Определите минимальную толщину пленки, если она в проходящем свете кажется желтой ($\lambda = 600$ нм).



Дано: $n = 1{,}5$; $i = 30°$; $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м).
Найти: $d_{\min}$.

Решение. Световой луч *1*, выделенный из пучка параллельных лучей, падая на плоскопараллельную пластинку, частично отражается и частично преломляется в точках A, B, C и D (см. рисунок). Оптическая разность хода между интерферирующими лучами

$$\Delta = nBC - BE \qquad (1)$$

(отражение в точке C не сопровождается потерей полуволны. Показатель преломления среды, окружающей пленку, принят равным единице).

Из рисунка следует, что $BC = CD = \dfrac{d}{\cos r}$, $BE = BD \sin i = 2d \operatorname{tg} r \sin i$. Согласно закону преломления, $\sin i = n \sin r$. Подставив эти значения в формулу (1), найдем

$$\Delta = 2dn\cos r = 2dn\sqrt{1-\sin^2 r} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

(учли закон преломления).

Пленка кажется окрашенной в желтый цвет, поэтому, используя условие интерференционного максимума $\Delta = m\lambda$, можем записать

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = m\lambda. \qquad (2)$$

Для минимальной толщины пленки $m = 1$. Тогда выражение (2) примет вид

$$2d_{\min}\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \lambda,$$

откуда искомая минимальная толщина пленки

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Ответ: $d_{\min} = 213$ нм.

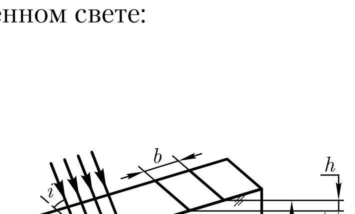
5.50. На стеклянный клин ($n = 1{,}5$) с углом при вершине $\alpha = 1'$ падает под углом $i = 18°$ монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите расстояние между двумя соседними минимумами при наблюдении интерференции в отраженном свете.

Дано: $n = 1{,}5$; $\alpha = 1'$; $i = 18°$; $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м).
Найти: b.

Решение. Для расчета расстояния между соседними минимумами (темными полосами) определим соответствующую им толщину клина (см. рисунок). Условия минимумов m-го и $(m+1)$-го порядков в отраженном свете:

$$2d_m\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

$$2d_{m+1}\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = (2m+3)\frac{\lambda}{2}, \qquad (2)$$



где d_m и d_{m+1} — толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номерам m и $m+1$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$);

$-\dfrac{\lambda}{2}$ — потеря полуволны, обусловленная отражением световой волны от оптически более плотной среды. Вычитая из (2) выражение (1) и разделив правую и левую части полученного уравнения на $2\sqrt{n^2-\sin^2 i}$, получим

$$h = d_{m+1} - d_m = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-\sin^2 i}}.$$

Как следует из рисунка, $h = b\sin\alpha$. Тогда искомое расстояние между двумя соседними минимумами

$$b = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{\lambda}{2\sin\alpha\sqrt{n^2-\sin^2 i}}.$$

Ответ: $b = 0{,}703$ мм.

5.51. На стеклянный клин ($n = 1{,}5$) нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите преломляющий угол клина, если в отраженном свете на 1 см укладывается $N = 9$ темных интерференционных полос.

Дано: $n = 1{,}5$; $\lambda = 550$ нм ($5{,}5\cdot 10^{-7}$ м); $l = 1$ см (10^{-2} м); $N = 9$.

Найти: α.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается от верхней и нижней граней клина (см. рисунок). Так как угол клина мал, то отраженные лучи *1* и *2* практически параллельны. Отраженные лучи когерентны, и на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы.

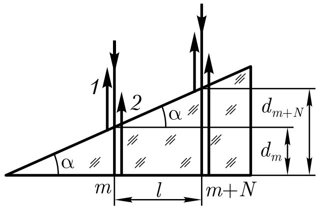
Условия минимумов для m- и $(m+N)$-порядков в отраженном свете

$$2d_m n - \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

$$2d_{m+N} n - \frac{\lambda}{2} = \left[2(m+N)+1\right]\frac{\lambda}{2}, \tag{2}$$

где d_m и d_{m+N} — толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номерам m и $(m+N)$; n — показатель преломления стекла; $-\dfrac{\lambda}{2}$ определяет потерю полуволны, обусловленную отражением световой волны *1* от оптически более плотной среды (от верхней поверхности клина). В выражениях (1) и (2) учтено, что угол падения, согласно условию задачи, равен нулю, следовательно, и угол преломления равен нулю.

Согласно условию задачи, на расстоянии l укладывается N темных полос. Из рисунка следует, что



$$\sin\alpha = \frac{d_{m+N} - d_m}{l}. \tag{3}$$

Угол клина мал (на рисунке не в масштабе), поэтому можно считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$. Подставив значения d_m и d_{m+N} из формул (1) и (2) в выражение (3) с учетом малости угла, получим искомый угол

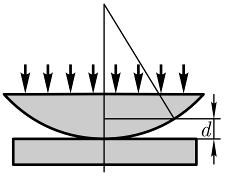
$$\alpha = \frac{[2(m+N)+1]\dfrac{\lambda}{2} - (2m+1)\dfrac{\lambda}{2}}{2nl} = \frac{N\lambda}{2nl}.$$

Ответ: $\alpha = 1{,}65 \cdot 10^{-4}$ рад.

5.52. Установка для наблюдения колец Ньютона (см. рисунок) освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, падающим нормально. Определите толщину d воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой в том месте, где наблюдается пятое светлое кольцо в отраженном свете.

Дано: $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $i = 0$; $m = 5$; $n = 1$.

Найти: d.



Решение. Параллельный пучок света, падая нормально на плоскопараллельную пластинку, частично отражается от верхней и нижней поверхностей зазора между линзой и пластинкой. При наложении отраженных лучей возникают кольцевые полосы равной толщины.

Условие образования светлых колец (интерференционных максимумов)

$$\Delta = \pm m\lambda \; (m = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

т.е. оптическая разность хода Δ лучей, отраженных от обеих поверхностей воздушного зазора, должна быть равна целому числу длин волн.

С другой стороны, в отраженном свете

$$\Delta = 2dn\cos r + \frac{\lambda}{2} = 2d + \frac{\lambda}{2}, \tag{2}$$

где учтено, что показатель преломления воздуха $n = 1$, угол преломления $r = 0$ (по условию задачи угол падения $i = 0$); $\dfrac{\lambda}{2}$ — потеря полуволны при отражении от оптически менее плотной среды. Отметим, что если бы мы записали $-\dfrac{\lambda}{2}$, то значения m в выражении (1) следовало бы начинать с нуля.

Приравняв выражения (1) и (2), можем записать:

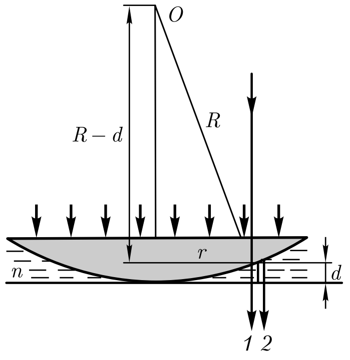
$$2d + \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

откуда искомая толщина воздушного зазора

$$d = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Ответ: $d = 1{,}35$ мкм.

5.53. Установка для наблюдения колец Ньютона (см. рисунок) освещается монохроматическим светом, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено прозрачной жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}33$. Определите длину волны падающего света, если радиус R кривизны линзы равен 10 м, радиус r третьего светлого кольца 3,65 мм, а наблюдение ведется в проходящем свете.



Дано: $n = 1{,}33$; $R = 10$ м; $r = 3{,}65$ мм $(3{,}65 \cdot 10^{-3}$ м$)$; $m = 3$; $i = 0$.

Найти: λ.

Решение. При нормальном падении параллельного пучка света на плоскую поверхность линзы указанные на рисунке лучи *1* и *2* когерентны, и при их наложении возникают кольцевые полосы равной толщины.

При наблюдении колец Ньютона в проходящем свете условие интерференционного максимума

$$2dn\cos r = m\lambda \text{ или } 2dn = m\lambda, \qquad (1)$$

где d — толщина клина, в котором наблюдается светлая полоса, соответствующая номеру m; n — показатель преломления жидкости (в проходящем свете потери полуволны не наблюдается).

Из рисунка следует, что $R^2 = (R - d)^2 + r^2$, где R — радиус кривизны линзы; r — радиус кривизны окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор d. Учитывая, что d мало, получим

$$d = \frac{r^2}{2R}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получаем

$$\frac{r^2}{R} n = m\lambda,$$

откуда искомая длина волны

$$\lambda = \frac{nr^2}{mR}.$$

Ответ: $\lambda = 591$ нм.

5.54. Плосковыпуклая линза $(n = 1{,}5)$ выпуклой стороной прижата к стеклянной пластинке. Расстояние между четвертым и третьим кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, равно 0,4 мм. Определите оптическую силу линзы, если освещение производится монохроматическим светом с $\lambda = 550$ нм, падающим нормально.

Дано: $n = 1{,}5$; $r_4 - r_3 = 0{,}4$ мм $(4 \cdot 10^{-4}$ м$)$; $\lambda = 550$ нм $(5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м$)$.

Найти: Φ.

Решение. Оптическая сила линзы

$$\Phi = (N - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где $N = \dfrac{n}{n_1}$ — относительный показатель преломления (n и n_1 — соответственно показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы. По условию задачи линза плосковыпуклая и находится в воздухе. Для нее оптическая сила

$$\Phi = \frac{n-1}{R}. \qquad (1)$$

Радиус темного кольца Ньютона в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

По условию задачи и согласно формуле (2), разность радиусов четвертого и третьего темных колец

$$r_4 - r_3 = \sqrt{R\lambda}\left(2-\sqrt{3}\right),$$

откуда

$$R = \frac{(r_4 - r_3)^2}{\lambda\left(2-\sqrt{3}\right)^2}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (1), найдем искомую оптическую силу линзы

$$\Phi = (n-1)\frac{\lambda\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{(r_4-r_3)^2}.$$

Ответ: $\Phi = 0{,}123$ дптр.

5.55. Определите минимальную толщину просветляющей пленки ($n = 1{,}22$) в области длин волн $\lambda = 600$ нм, если свет падает на стекло ($n_с = 1{,}5$) нормально.

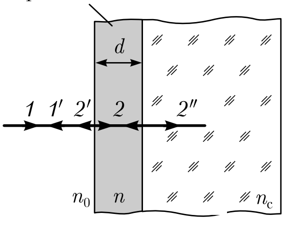
Дано: $n = 1{,}22$; $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $i = 0$; $n_с = 1{,}5$.

Найти: $d_{\min}$.

Решение. Чтобы интерферирующие лучи *1′* и *2′* [они возникают при отражении света от границ раздела воздух — пленка и пленка — стекло (см. рисунок)] гасили друг друга, их амплитуды должны быть равны, а оптическая разность хода равна $(2m+1)\dfrac{\lambda_0}{2}$. Амплитуды отраженных лучей равны, если $n = \sqrt{n_с}$, что соблюдается для условия данной задачи.

Так как $n_с > n > n_0$ (n_0 — показатель преломления воздуха), то потеря полуволны происходит на обеих границах раздела (одинаково испытывают потерю полуволны), поэтому условие интерференционного минимума (учитывая, что свет падает нормально, т.е. $i = 0$)

$$2dn = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$



где nd — оптическая толщина пленки.

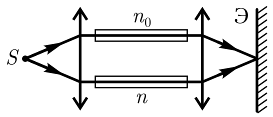
Минимальной толщине пленки соответствует $m = 0$, поэтому, записав выражение (1) в виде

$$2d_{\min}n = \frac{\lambda}{2},$$

получим искомую минимальную толщину просветляющей пленки

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n}.$$

Ответ: $d_{\min} = 0{,}1$ мкм.



5.56. На пути лучей интерференционного рефрактометра (см. рисунок) помещаются трубки одинаковой длины $l = 5$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями, в одной из которых находится воздух ($n_0 = 1{,}000277$). Определите, на сколько полос сместилась интерференционная картина, если вторую трубку заполнили хлором ($n = 1{,}000866$), и наблюдение производится в монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 589$ нм.

Дано: $l = 5$ см (0,05 м); $n_0 = 1{,}000277$; $n = 1{,}000866$; $\lambda = 589$ нм ($5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: m.

Решение. В случае заполнения второй трубки хлором между интерферирующими лучами возникает дополнительная оптическая разность хода

$$\Delta = nl - n_0 l = l(n - n_0). \qquad (1)$$

С другой стороны, при заполнении трубки хлором интерференционная картина смещается на m полос, т. е. дополнительная разность хода

$$\Delta = m\lambda. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2),

$$l(n - n_0) = m\lambda,$$

найдем искомое число полос, на которое сместилась интерференционная картина,

$$m = \frac{l(n - n_0)}{\lambda}.$$

Ответ: $m = 50$.

Задачи для самостоятельного решения

5.57. С помощью принципа Гюйгенса докажите, что при падении плоской волны на границу раздела двух сред угол отражения равен углу падения.

5.58. С помощью принципа Гюйгенса докажите, что при падении плоской волны на границу раздела двух сред отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно относительному показателю преломления (показателю преломления второй среды относительно первой).

5.59. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний, возбуждаемых двумя интерферирующими волнами в некоторой точке, если их оптическая разность хода составляет $0{,}5\lambda$. [$\Delta\varphi = \pi$]

5.60. Определите длину отрезка, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке 4,15 мм в алмазе. Показатель преломления алмаза равен 2,42. [$l = 10$ мм]

5.61. В опыте Юнга щели (расстояние между ними $d = 1$ мм) освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определите ширину b интерференционных полос, если расстояние l от щелей до экрана равно 2 м. [$b = \dfrac{l\lambda}{d} = 1$ мм]

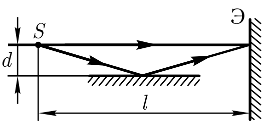
5.62. В опыте Юнга щели освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм, расстояние d между щелями равно 1 мм. Определите расстояние l от щелей до экрана, если вторая светлая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на расстоянии $x = 2{,}75$ мм. [$l = \dfrac{xd}{m\lambda} = 2{,}5$ м]

5.63. На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников ($\lambda = 600$ нм). На пути одного из лучей перпендикулярно ему поместили стеклянную пластинку ($n = 1{,}6$), в результате чего интерференционная картина сместилась на $m = 10$ полос. Определите толщину этой пластинки. [$d = \dfrac{m\lambda}{n-1} = 10$ мкм]

5.64. Зеркала Френеля образуют угол $\alpha = 179°$. Освещенная узкая щель находится на расстоянии $r = 10$ см от линии пересечения зеркал. Интерференционная картина наблюдается на экране, отстоящем от линии пересечения зеркал на расстоянии $l = 3$ м. Определите расстояние b между светлыми полосами, если зеркала освещаются монохроматическим светом $\lambda = 500$ нм. [$b = \dfrac{(r+l)\lambda}{2(\pi - \alpha)r} = 0{,}444$ м; α — в радианах]

5.65. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана равны соответственно $a = 30$ см и $c = 1{,}5$ м. Бипризма стеклянная с преломляющим углом $\vartheta = 20'$. Определите ширину b интерференционных полос, если длина волны λ монохроматического света равна 630 нм. [$b = \dfrac{(a+c)\lambda}{2a(n-1)\vartheta} = 0{,}65$ мм; ϑ выражен в радианах]

5.66. В зеркале Ллойда (см. рисунок) точечный источник света S находится на расстоянии $l = 1{,}2$ м от экрана. Определите ширину b интерференционных полос, если расстояние от источника до плоскости зеркала $d = 1$ мм, а длина λ монохроматической световой волны равна 600 нм. [$b = \dfrac{l\lambda}{2d} = 0{,}36$ мм]



5.67. На тонкий стеклянный клин ($n = 1{,}55$) нормально падает монохроматический свет. Угол α между поверхностями клина равен $3'$. Определите длину световой волны λ, если расстояние b между двумя соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,2 мм. [$\lambda = 2nb\alpha = 541$ нм, α — в радианах]

5.68. Две плоскопараллельные стеклянные пластинки с показателем преломления $n = 1{,}55$ образуют клин с углом $\alpha = 30''$. На клин нормально к его поверхности падает пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 564$ нм. Интерференционная картина наблюдается в отраженном свете. Определите число N темных интерференционных полос, приходящихся на $l = 1$ см длины клина. [$N = \dfrac{2nl\alpha}{\lambda} = 8$]

5.69. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите радиус R кривизны линзы, если расстояние между вторым и третьим темными кольцами в отраженном свете составляет 0,5 мм. [$R = 4{,}5$ м]

5.70. Определите показатель преломления n жидкости, заполняющей пространство между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой с радиусом кривизны $R = 1$ м, если при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 558$ нм) радиус r десятого темного кольца Ньютона оказался равным 2,1 мм. [$n = \dfrac{(2m+1)\lambda R}{2r^2} = 1{,}33$]

5.71. Как изменится радиус колец Ньютона, если пространство между плосковыпуклой линзой и плоскопараллельной пластинкой заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}56$? [Уменьшится в 1,25 раза]

5.72. Определите показатель преломления пленки, которая просветляла бы поверхность стекла ($n_с = 1{,}67$), находящегося в воздухе. Какова минимальная толщина пленки для длины волны $\lambda = 0{,}55$ мкм, если свет на систему падает нормально? [$n = 1{,}29$; $d_{\min} = 0{,}107$ мкм]

5.73. В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на $\Delta m = 400$ полос необходимо переместить зеркало на расстояние $l = 0{,}1$ мм. Определите длину волны падающего света. [$\lambda = \dfrac{2l}{\Delta m} = 500$ нм]

5.74. В интерферометре Майкельсона на пути одного из интерферирующих пучков света ($\lambda = 496$ нм) помещена закрытая с обеих сторон откаченная до высокого вакуума стеклянная трубка длиной $l = 10$ см. При заполнении трубки хлористым водородом произошло смещение интерференционной картины. При замене хлористого водорода на бромистый водород интерференционная картина сместилась еще на $\Delta m = 50$ полос. Определите разность Δn показателей преломления обоих газов. [$\Delta n = \dfrac{\lambda \Delta m}{2l} = 0{,}000124$]

5.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Основные законы и формулы

• Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$$

[m — номер зоны Френеля; λ — длина волны; a и b — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается].

• Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально:

$$a \sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \ (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

[a — ширина щели; φ — угол дифракции; m — порядок спектра; λ — длина волны].

• Постоянная (период) дифракционной решетки

$$d = a + b, \quad d = \frac{1}{N_0}$$

[a — ширина каждой щели решетки; b — ширина непрозрачных участков между щелями; N_0 — число щелей, приходящихся на единицу длины дифракционной решетки].

• Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N} \ \ (m' \neq 0, N, 2N, \ldots)$$

[d — период дифракционной решетки; N — число штрихов решетки].

• Формула Вульфа — Брэггов (условие дифракционных максимумов от пространственной дифракционной решетки)

$$2d\sin\vartheta = m\lambda \ \ (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

[d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения; λ — длина волны рентгеновского излучения].

• Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}$$

[φ — угол дифракции; m — порядок спектра; d — период решетки].

Линейная дисперсия дифракционной решетки

$$D = F\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}$$

[F — фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран; $\mathrm{d}\varphi$ — разница в углах, соответствующая двум линиям, отличающимся по длине волны на $\mathrm{d}\lambda$].

• Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

[$\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно].

• Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R_{\text{диф. реш}} = mN$$

[m — порядок спектра; N — общее число штрихов решетки].

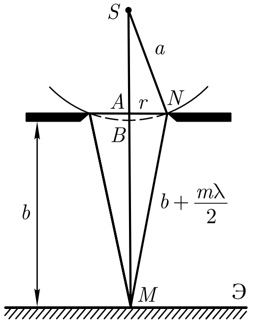
Примеры решения задач

5.75. Точечный источник света ($\lambda = 600$ нм) расположен перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $r = 2$ мм. Определите расстояние a от источника до диафрагмы, если отверстие открывает пять зон Френеля и расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения составляет 3 м.

Дано: $\lambda = 600$ нм ($6\cdot10^{-7}$ м); $r = 2$ мм ($2\cdot10^{-3}$ м); $b = 3$ м; $m = 5$.

Найти: a.

Решение. Пусть на открытой части волновой поверхности в плоскости круглого отверстия умещается m зон Френеля. Тогда расстояние от точки наблюде-



ния M на экране до края отверстия равно $b+\dfrac{m\lambda}{2}$ (см. рисунок). По теореме Пифагора

$$a^2-(a-x)^2=\left(b+\frac{m\lambda}{2}\right)^2-(b+x)^2,$$

где $x=AB$. Учитывая, что $\lambda \ll a$ и $\lambda \ll b$, получаем $x=\dfrac{bm\lambda}{2(a+b)}$ (пренебрегли слагаемым $\dfrac{m^2\lambda^2}{4}$). Из треугольника SAN

$$r^2=a^2-(a-x)^2,$$

откуда с учетом выражения для x, пренебрегая слагаемым второго порядка малости $\left[\dfrac{b^2}{4(a+b)^2}m^2\lambda^2\right]$, получаем искомое расстояние от источника до диафрагмы

$$a=\frac{br^2}{mb\lambda-r^2}.$$

Ответ: $a=2{,}4$ м.

5.76. Дифракция наблюдается на расстоянии 1,2 м от точечного источника монохроматического света. Посередине между источником света и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Определите длину волны падающего света, если диаметр отверстия, при котором центр дифракционных колец на экране является наиболее темным, равен 1,2 мм.

Дано: $a=b=0{,}6$ м; $d=1{,}2$ мм $(1{,}2\cdot 10^{-3}$ м).

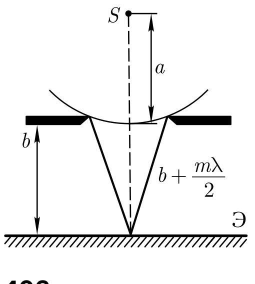
Найти: λ.

Решение. Если отверстие диафрагмы открывает m зон Френеля, то радиус m-й зоны Френеля есть не что иное, как радиус отверстия:

$$r_m=\sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda},$$

где m — номер зоны Френеля; λ — длина волны; a и b — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием до точечного источника и до экрана, на котором наблюдается дифракционная картина.

Центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным, если отверстие открывает две зоны Френеля, т.е. $m=2$. Следовательно, радиус отверстия



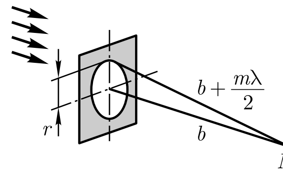
$$r=\sqrt{\frac{2ab}{a+b}\lambda}.$$

Учитывая, что $r=\dfrac{d}{2}$, искомая длина волны

$$\lambda=\frac{d^2(a+b)}{4abm}.$$

Ответ: $\lambda=500$ нм.

5.77. На диафрагму с круглым отверстием падает нормально параллельный пучок света длиной волны 625 нм. Определите радиус четвертой зоны Френеля, если расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, находящейся на оси отверстия, составляет 2,5 м.



Дано: $\lambda = 625$ нм ($6{,}25 \cdot 10^{-7}$ м); $m = 4$; $b = 2{,}5$ м.
Найти: r.
Решение. Предполагая, что диафрагма с круглым отверстием открывает m зон Френеля (волновая поверхность в данном случае плоскость, лежащая в плоскости отверстия), то радиус m-й зоны Френеля и есть радиус отверстия. Из прямоугольного треугольника (см. рисунок)

$$r^2 = \left(b + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - b^2$$

или

$$r^2 = bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}.$$

Учитывая, что $\lambda \ll b$, искомый радиус зоны Френеля

$$r = \sqrt{mb\lambda}.$$

Ответ: $r = 2{,}5$ мм.

5.78. Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 2 м, на расстоянии 3 м от своей поверхности. Определите расстояние от зонной пластинки до изображения, если источник поместить в бесконечность.
Дано: $a = 2$ м; $b = 3$ м; $a_1 = \infty$.
Найти: b_1.
Решение. Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda} \qquad (1)$$

(см. также задачу 5.76), а радиус внешней границы m-й зоны Френеля для плоской волны (случай удаления источника в бесконечность), согласно решению задачи 5.77,

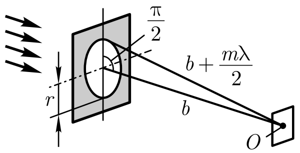
$$r_m = \sqrt{mb_1\lambda}. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), получаем искомое расстояние от зонной пластинки до изображения источника, находящегося в бесконечности:

$$b_1 = \frac{ab}{a+b}.$$

Ответ: $b_1 = 1{,}2$ м.

5.79. На экран с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм нормально падает параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $b = 1$ м от него (см. рисунок). Опреде-



лите: 1) число зон Френеля, открываемых отверстием; 2) темное или светлое пятно наблюдается в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения помещен экран.

Дано: $r = 1$ мм (10^{-3} м); $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м); $b = 1$ м.
Найти: m.

Решение. Будет ли в центре дифракционной картины наблюдаться темное или светлое пятно, определяется числом зон Френеля, открываемых отверстием. Пусть отверстие открывает m зон Френеля. Радиус m-й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda},$$

где λ — длина волны; a и b — соответственно расстояние круглого отверстия от источника (по условию задачи падающие лучи параллельны, $a = \infty$) и от экрана, на котором наблюдается дифракционная картина. Преобразуя

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda} = \sqrt{mb\lambda\frac{1}{1+\dfrac{b}{a}}},$$

и учитывая, что, по условию задачи, $a = \infty$, получаем

$$m = \frac{r^2}{b\lambda}.$$

Вычисления приводят к значению $m = 2$, т. е. в центре дифракционной картины наблюдается темное пятно.

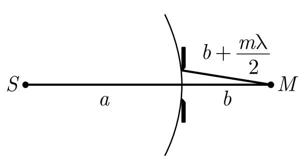
Ответ: 1) две зоны; 2) темное пятно.

5.80. Сферическая волна, распространяющаяся от точечного монохроматического источника света ($\lambda = 500$ нм), встречает на своем пути экран с круглым отверстием радиусом $r = 0{,}4$ мм. Расстояние a от источника до экрана равно 1 м (см. рисунок). Определите расстояние от отверстия до точки экрана, лежащей на линии, соединяющей источник с центром отверстия, где наблюдается максимум освещенности.

Дано: $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м); $r = 0{,}4$ мм ($0{,}4 \cdot 10^{-3}$ м); $a = 1$ м; $m = 1$.
Найти: b.

Решение. Если в центре дифракционной картины наблюдается максимум освещенности, то на открытой части волновой поверхности в плоскости щели укладывается одна зона Френеля ($m = 1$). Радиус m-й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda},$$

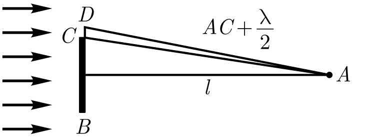


откуда искомое расстояние

$$b = \left.\frac{r^2 a}{am\lambda - r^2}\right|_{m=1} = \frac{r^2 a}{a\lambda - r^2}.$$

Ответ: $b = 47{,}1$ см.

5.81. На пути параллельного пучка монохроматического света ($\lambda = 550$ нм) находится круглый диск диаметром 3 мм. Наблюдение производится в точке, лежащей на линии, соединяющей точку с центром диска, и отстоящей от экрана на расстоянии 1 м. Определите ширину зоны Френеля, непосредственно прилегающей к экрану.



Дано: $\lambda = 550$ нм ($5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м); $d = 3$ мм ($3 \cdot 10^{-3}$ м); $l = 1$ м.

Найти: x.

Решение. Диск BC закрывает часть плоского фронта волны. $CD = x$ — ширина первой открытой зоны Френеля.

Дифрагирующие лучи AD и AC имеют разность хода $\frac{\lambda}{2}$. Из рисунка следует, что

$$\left(\frac{d}{2}+x\right)^2 + l^2 = \left(AC + \frac{\lambda}{2}\right)^2, \quad AC = \sqrt{l^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Тогда

$$\left(\frac{d}{2}+x\right)^2 + l^2 = \left(\sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}} + \frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

откуда

$$x^2 + xd = \lambda\sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}} + \frac{\lambda^2}{4},$$

где слагаемыми $\frac{d^2}{4}$ и $\frac{\lambda^2}{4}$ можно пренебречь

$$x^2 + xd - l\lambda = 0.$$

Решив это уравнение, получим искомую ширину зоны Френеля, непосредственно прилегающей к экрану:

$$x = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l\lambda}$$

(учли только положительное решение, имеющее физическое значение).

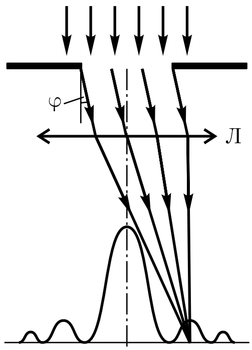
Ответ: $x = 0{,}173$ мм.

5.82. Определите длину волны монохроматического света, нормально падающего на узкую щель шириной 0,05 мм, если направление света на первый дифракционный максимум (по отношению к первоначальному направлению света) составляет 1° (см. рисунок).

Дано: $a = 0{,}05$ мм ($5 \cdot 10^{-5}$ м); $m = 1$; $\varphi = 1^\circ$.

Найти: λ.

Решение. Максимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми из условия



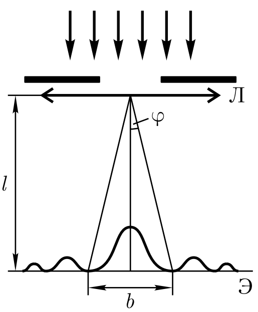
$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где m — порядок максимума. Из выражения (1) получаем искомую длину волны

$$\lambda = \frac{2a\sin\varphi}{2m+1}.$$

Ответ: $\lambda = 582$ нм.

5.83. На щель шириной $a = 0{,}24$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Дифракционная картина проецируется на экран, параллельный плоскости щели, с помощью линзы, расположенной вблизи щели. Определите расстояние от экрана до линзы, если расстояние b между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального максимума, равно 1 см (см. рисунок).



Дано: $a = 0{,}24$ мм ($2{,}4 \cdot 10^{-4}$ м); $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $b = 1$ см (10^{-2} м); $m = 1$.

Найти: l.

Решение. Условие дифракционных минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально,

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda \ (m = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (1)$$

где по условию задачи $m = 1$. Из рисунка следует, что $b = 2l\,\mathrm{tg}\,\varphi$, где φ — угол, под которым наблюдается первый минимум интенсивности света. Так как $\frac{b}{2} \ll l$, то $\mathrm{tg}\,\varphi \approx \sin\varphi$, поэтому $b = 2l\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \frac{b}{2l}$.

Подставив последнее выражение в формулу (1), получим искомое расстояние от экрана до линзы

$$l = \frac{ab}{2\lambda}.$$

Ответ: $l = 2$ м.

5.84. На узкую щель нормально падает монохроматический свет. Определите его направление на вторую темную дифракционную полосу, если на ширине щели укладывается 100 длин волн.

Дано: $m = 2$; $\frac{a}{\lambda} = 100$.

Найти: φ.

Решение. Условие дифракционных минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально,

$$a\sin\varphi = \pm\, m\lambda \ (m = 1, 2, \ldots),$$

где по условию задачи $m = 2$. Тогда

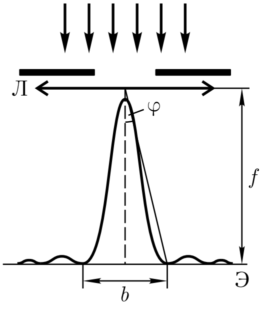
$$\sin\varphi = m\frac{\lambda}{a},$$

откуда искомое направление на вторую темную дифракционную полосу

$$\varphi = \arcsin m\frac{\lambda}{a}.$$

Ответ: $\varphi = 1^\circ 15'$.

5.85. На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Дифракционная картина проецируется на экран с помощью линзы с фокусным расстоянием $f = 0{,}5$ м. Ширина центральной светлой полосы $b = 5$ см (см. рисунок). Определите, как надо изменить ширину щели, чтобы центральная полоса занимала весь экран (при любой ширине экрана).



Дано: $f = 0{,}5$ м; $b = 5$ см ($5 \cdot 10^{-2}$ м).

Найти: $\dfrac{a_2}{a_1}$.

Решение. Центральная светлая полоса заключена между двумя минимумами первого порядка (см. рисунок). Ее ширина b зависит от угла дифракции φ, соответствующего первому минимуму. Условие дифракционного минимума

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda \; (m = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (1)$$

где по условию задачи $m = 1$. При изменении ширины щели от a_1 до a_2 величины m и λ остаются неизменными, поэтому, согласно (1),

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}. \qquad (2)$$

Из условия задачи следует, что угол φ_1 очень мал, а потому $\sin\varphi_1 \approx \operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{b}{2f}$. Чтобы центральная полоса заняла весь экран (при любой ширине экрана), необходимо условие $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Подставив значения $\sin\varphi_1$ и $\sin\varphi_2$ в формулу (2), найдем искомое отношение:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b}{2f}.$$

Ответ: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{20}$, т.е. ширину щели надо уменьшить в 20 раз.

5.86. Наибольший порядок спектра, получаемый с помощью дифракционной решетки, равен 5. Определите постоянную дифракционной решетки, если известно, что монохроматический свет ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает на нее нормально.

Дано: $m_{\max} = 5$; $\lambda = 0{,}5$ мкм ($0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м).

Найти: d.

Решение. Постоянная d дифракционной решетки и угол φ отклонения лучей, соответствующий m-му главному дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \; (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (1)$$

где m — порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

Для определения максимального числа максимумов (наибольшего порядка спектра), получаемого с помощью дифракционной решетки, следует максимальный угол отклонения лучей решеткой принять равным $\dfrac{\pi}{2}$ (тогда $\sin\varphi_{\max} = 1$). Из формулы (1) при данных допущениях получаем

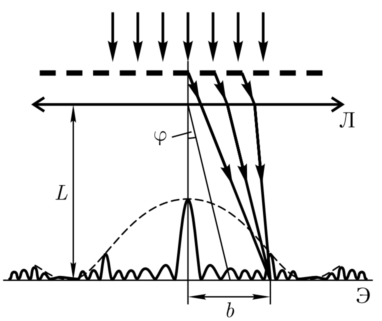
$$m_{\max} = \frac{d}{\lambda},$$

откуда искомая постоянная дифракционной решетки

$$d = m_{\max}\lambda.$$

Ответ: $d = 2{,}5$ мкм.

5.87. На дифракционную решетку, содержащую 200 штрихов на 1 мм, нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Вблизи решетки помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран, на который проецируется дифракционная картина. Определите расстояние L экрана от линзы, если первый главный максимум наблюдается на расстоянии $b = 10$ см от центрального.



Дано: $N = 200$; $l = 1$ мм (10^{-3} м); $\lambda = 500$ нм ($0{,}5\cdot10^{-6}$ м); $b = 10$ см (10^{-1} м); $m = 1$.

Найти: L.

Решение. Условие главного дифракционного максимума в случае дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = m\lambda \; (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

где m — порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума (по условию задачи, $m = 1$).

Из рисунка следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{L}$. Так как $b \ll L$, то $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{b}{L}$. Период дифракционной решетки, зная число штрихов на единицу длины, $d = \dfrac{l}{N}$. Подставив два последних выражения в формулу (1), получаем

$$\frac{l}{N}\frac{b}{L} = m\lambda,$$

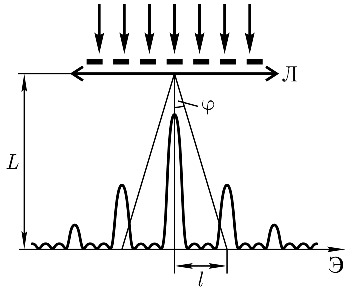
откуда искомое расстояние от экрана до линзы

$$L = \frac{bl}{mN\lambda}.$$

Ответ: $L = 1$ м.

5.88. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. На экран, находящийся от линзы на расстоянии $L = 1$ м, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии

$l = 12$ см от центрального. Определите: 1) период дифракционной решетки; 2) число штрихов на 1 см ее длины; 3) общее число максимумов, даваемых решеткой; 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.



Дано: $\lambda = 550$ нм ($5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м); $L = 1$ м; $m = 1$; $l = 12$ см (0,12 м); $l' = 1$ см (0,01 м).

Найти: 1) d; 2) n; 3) N; 4) $\varphi_{\max}$.

Решение. 1) Период дифракционной решетки найдем из условия главного максимума

$$d \sin \varphi = m\lambda \ (m = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где m — порядок спектра (по условию задачи, $m = 1$).

Из рисунка следует, что $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{l}{L}$. Так как $l \ll L$, то $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$. Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{ld}{L} = m\lambda,$$

откуда

$$d = \frac{m\lambda L}{l}.$$

2) Число штрихов на $l' = 1$ см

$$n = \frac{l'}{d}.$$

3) Поскольку наибольший угол отклонения лучей решеткой не может быть более $\dfrac{\pi}{2}$, из условия (1) можно найти максимальное значение

$$m_{\max} \leqslant \frac{d}{\lambda}$$

(приняли $\sin \varphi_{\max} = 1$). Естественно, что число m должно быть целым. Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой,

$$N = 2m_{\max} + 1,$$

так как максимумы наблюдаются как справа, так и слева от центрального максимума (единица учитывает центральный максимум).

4) Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, найдем, записав условие (1) в виде

$$d \sin \varphi_{\max} = m_{\max}\lambda,$$

откуда

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{m_{\max}\lambda}{d}.$$

Ответ: 1) $d = 4{,}58$ мкм; 2) $n = 21{,}8$ см$^{-1}$; 3) $N = 17$; 4) $\varphi_{\max} = 73{,}9°$.

5.89. Параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения ($\lambda = 243$ пм) падает под углом скольжения $\vartheta = 60°$ на грань кристалла каменной соли. Определите расстояние d между атомными плоскостями кристалла, если при зеркальном отражении от этой грани наблюдается максимум второго порядка.

Дано: $\lambda = 243$ пм ($2{,}43 \cdot 10^{-10}$ м); $\vartheta = 60°$; $m = 2$.

Найти: d.

Решение. Дифракционные максимумы от пространственной решетки (в данном случае кристалла каменной соли) определяются согласно формуле Вульфа—Брэггов:

$$2d\sin\vartheta = m\lambda \; (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения (угол между направлением падающего излучения и гранью кристалла); λ — длина волны падающего рентгеновского излучения; m — порядок максимума. Тогда искомое расстояние между атомными плоскостями кристалла

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\vartheta}.$$

Ответ: $d = 0{,}28$ нм.

5.90. Дифракционная решетка длиной $l = 5$ мм может разрешить в спектре первого порядка две спектральные линии натрия ($\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм). Определите, под каким углом в спектре третьего порядка будет наблюдаться свет с $\lambda_3 = 600$ нм, падающий на решетку нормально.

Дано: $l = 5$ мм ($5 \cdot 10^{-3}$ м); $\lambda_1 = 589{,}0$ нм ($5{,}890 \cdot 10^{-7}$ м); $\lambda_2 = 589{,}6$ нм ($5{,}896 \cdot 10^{-7}$ м); $\lambda_3 = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $m_1 = 1$; $m_3 = 3$.

Найти: φ.

Решение. Для нахождения искомого угла запишем условие дифракционного максимума

$$d\sin\varphi = m_3\lambda_3,$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{m_3\lambda_3}{d}. \tag{1}$$

Период дифракционной решетки $d = \dfrac{l}{N}$, где N — общее число штрихов дифракционной решетки. Найдем N из формулы для разрешающей способности дифракционной решетки:

$$R = m_1 N = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda},$$

где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Тогда $N = \dfrac{\lambda_1}{m_1\Delta\lambda}$ и

$$d = \frac{m_1 l\Delta\lambda}{\lambda_1}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), найдем искомый угол:

$$\varphi = \arcsin \frac{m_3 \lambda_1 \lambda_3}{m_1 l \Delta\lambda}.$$

Ответ: $\varphi = 20^\circ\, 42'$.

5.91. Сравните наибольшую разрешающую способность для желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм) двух дифракционных решеток одинаковой длины ($l = 4$ мм), но разных периодов ($d_1 = 5$ мкм, $d_2 = 10$ мкм).

Дано: $\lambda = 589$ нм ($5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м); $l = 4$ мм ($4 \cdot 10^{-3}$ м); $d_1 = 5$ мкм ($5 \cdot 10^{-6}$ м); $d_2 =$ $= 10$ мкм (10^{-5} м).

Найти: $R_{1\,\max}$; $R_{2\,\max}$.

Решение. Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = mN,$$

где m — порядок спектра; N — общее число штрихов решетки. Согласно записанной формуле, наибольшая разрешающая способность дифракционных решеток

$$R_{1\,\max} = m_{1\,\max} N_1 \text{ и } R_{2\,\max} = m_{2\,\max} N_2, \qquad (1)$$

где $m_{1\max}$ и $m_{2\,\max}$ — соответственно максимальное число максимумов (наибольший порядок спектра), даваемых решетками.

Из условия главных максимумов в случае дифракционных решеток

$$d_1 \sin\varphi_1 = m_1 \lambda \quad \text{и} \quad d_2 \sin\varphi_2 = m_2 \lambda,$$

приняв $\sin\varphi_{\max} = 1$ (максимальный угол отклонения лучей решеткой приняли равным $\frac{\pi}{2}$), получаем

$$m_{1\,\max} = \frac{d_1}{\lambda} \text{ и } m_{2\,\max} = \frac{d_2}{\lambda}, \qquad (2)$$

где $m_{1\,\max}$ и $m_{2\,\max}$ — целые числа. Вычисляя, получаем $m_{1\,\max} = 8$; $m_{2\,\max} = 16$.

Число штрихов дифракционных решеток

$$N_1 = \frac{l}{d_1} \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{l}{d_2}, \qquad (3)$$

где l — длина решетки (по условию задачи она для обеих решеток одинакова); d_1 и d_2 — периоды решеток. Подставив выражения (3) и значения $m_{1\,\max}$ и $m_{2\,\max}$ в формулы (1), найдем искомую разрешающую способность дифракционных решеток:

$$R_{1\,\max} = 8\frac{l}{d_1} \quad \text{и} \quad R_{2\,\max} = 16\frac{l}{d_2}.$$

Ответ: $R_{1\,\max} = R_{2\,\max} = 6400$.

5.92. Угловая дисперсия D_φ дифракционной решетки для $\lambda = 600$ нм в спектре второго порядка составляет $4 \cdot 10^5$ рад/м. Определите постоянную дифракционной решетки.

Дано: $\lambda = 600$ нм $(6 \cdot 10^{-7}$ м); $m = 2$; $D_\varphi = 4 \cdot 10^5$ рад/м.

Найти: d.

Решение. Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi},$$

где φ — угол дифракции; m — порядок спектра; d — период дифракционной решетки. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{m}{D_\varphi d}. \qquad (1)$$

Из условия главного максимума для дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = m\lambda \qquad (2)$$

получаем, что

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{d}. \qquad (3)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{m\lambda D_\varphi d}{md} = \lambda D_\varphi \qquad (4)$$

(учли формулы (1) и (2), откуда угол дифракции $\varphi = \operatorname{arctg}\varphi = \operatorname{arctg}(\lambda D_\varphi)$).

Искомую постоянную дифракционной решетки получим из выражения (2), используя формулу (4):

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi} = \frac{m\lambda}{\sin(\operatorname{arctg}\lambda D_\varphi)}.$$

Ответ: $d = 5{,}14$ мкм.

5.93. При нормальном падении света на дифракционную решетку на экране с помощью линзы (фокусное расстояние $F = 0{,}8$ м) наблюдается дифракционная картина. Красная линия ($\lambda = 630$ нм) в спектре второго порядка наблюдается под углом $\varphi = 11°$. Определите: 1) постоянную решетки; 2) линейную дисперсию решетки D.

Дано: $F = 0{,}8$ м; $\lambda = 630$ нм $(6{,}3 \cdot 10^{-7}$ м); $m = 2$; $\varphi = 11°$.

Найти: d; D.

Решение. Постоянную дифракционной решетки найдем из условия главного максимума

$$d\sin\varphi = m\lambda \ (m = 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где m — порядок спектра (по условию задачи, $m = 2$). Тогда искомое значение постоянной решетки

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Линейная дисперсия дифракционной решетки, согласно определению,

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} F, \tag{3}$$

где F — фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран. Дифференцируя условие максимума для решетки ($d\sin\varphi = m\lambda$), получаем $d\cos\varphi\,d\varphi = m\,d\lambda$, откуда

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}. \tag{3}$$

Учитывая (2),

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\lambda}. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3), найдем искомую линейную дисперсию дифракционной решетки:

$$D = \frac{F\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\lambda}.$$

Ответ: $d = 6{,}6$ мкм; $D = 2{,}47 \cdot 10^5$ м/м.

Задачи для самостоятельного решения

5.94. Определите число зон Френеля в плоскости круглого отверстия радиусом $r = 1$ мм, если расстояние от точечного источника света ($\lambda = 500$ нм) до волновой поверхности и от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1 м. [$m = 2$]

5.95. Посередине между точечным источником монохроматического света $\lambda = 550$ нм и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии 5 м от источника. Определите радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным. [$r = 1{,}17$ мм]

5.96. На диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 4$ мм нормально падает монохроматический пучок света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите расстояние от точки наблюдения до отверстия, если отверстие открывает пять зон Френеля. [$b = \dfrac{d^2}{4m\lambda} = 1{,}33$ м]

5.97. Определите радиус восьмой зоны Френеля, если радиус второй зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 1,5 мм. [$r_8 = 3$ мм]

5.98. Определите длину волны монохроматического точечного источника света, если расстояние от него до зонной пластинки и от пластинки до места наблюдения $a = b = 1$ м, а радиус второй зоны Френеля $r = 2{,}5$ мм. [$\lambda = \dfrac{(a+b)r^2}{mab} = 625$ мкм]

5.99. Определите расстояние b от зонной пластинки до места наблюдения, если радиус третьей зоны Френеля для плоской монохроматической волны ($\lambda = 500$ нм) составляет 1,5 мм. [$b = 1{,}5$ м]

5.100. Дифракция наблюдается на расстоянии $l = 2$ м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Посередине между источником света и экраном находится непрозрачный диск. Определите диаметр диска, если он закрывает только центральную зону Френеля. [$d = \sqrt{\lambda l} = 1$ мм]

5.101. Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника, встречает на своем пути диск достаточно малых размеров. Докажите, что на экране в точке, соединяющей точечный источник с центром диска, всегда наблюдается светлое пятно.

5.102. На щель шириной $a = 0{,}2$ мм нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Экран, на котором наблюдается дифракционная картина, расположен параллельно щели на расстоянии $l = 2$ м. Определите расстояние b между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального фраунгоферова максимума. [$b = \dfrac{2l\lambda}{a} = 1$ см]

5.103. На щель шириной $a = 0{,}2$ мм нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определите расстояние b между дифракционными минимумами второго порядка, если расстояние l от щели до экрана равно 1,5 м. [$b = \dfrac{2ml\lambda}{a} = 1{,}8$ см]

5.104. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет ($\lambda = 0{,}55$ мкм). Определите максимальное число максимумов, получаемых с помощью этой решетки, если ее постоянная $d = 4{,}4$ мкм. [$m_{\max} = 8$]

5.105. Определите постоянную дифракционной решетки, если при нормальном падении на нее монохроматического света ($\lambda = 500$ нм) наибольший порядок дифракционного спектра, получаемый с помощью этой решетки, равен 5. [$d = 2{,}5$ мкм]

5.106. На дифракционную решетку длиной $l = 10$ мм, содержащую $N = 2000$ штрихов, нормально падает монохроматический свет ($\lambda = 600$ нм). Определите: 1) число максимумов, наблюдаемых в дифракционном спектре; 2) угол, соответствующий последнему максимуму. [1) $n = 17$; 2) $\varphi_{\max} = \arcsin\dfrac{m_{\max}\lambda N}{l} = 73^\circ 44'$]

5.107. Определите угол φ дифракции, соответствующий второму главному максимуму, если на дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет ($\varphi = 600$ нм) и она содержит $N = 2500$ штрихов на 1 см. [$\varphi = \arcsin\dfrac{m\lambda N}{l} = 17^\circ 28'$]

5.108. Монохроматический свет нормально падает на дифракционную решетку. Определите, максимуму какого порядка соответствует угол дифракции $\varphi = 21^\circ 30'$, если максимуму второго порядка соответствует $\varphi_2 = 14^\circ$. [$m = 3$]

5.109. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет. В дифракционном спектре, получаемом с помощью этой решетки, наблюдается некоторая спектральная линия в третьем порядке под углом $\varphi = 25°$. Определите наивысший порядок спектра, в котором эта линия может наблюдаться. [$m_{\max} \leqslant \dfrac{m}{\sin\varphi} = 7$]

5.110. Параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на грань кристалла с расстоянием между его плоскостями 0,28 нм. Определите длину волны рентгеновского излучения, если под углом $\vartheta = 60°$ к плоскости грани наблюдается дифракционный максимум третьего порядка. [$\lambda = 162$ пм]

5.111. Параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения ($\lambda = 300$ пм) падает на грань кристалла с расстоянием между его атомными плоскостями $d = 0{,}3$ нм. Определите угол между направлением падающего излучения и гранью кристалла, если в дифракционном спектре наблюдается максимум первого порядка. [$\vartheta = 30°$]

5.112. Определите постоянную дифракционной решетки длиной $l = 3$ см, если разность длин волн $\delta\lambda$, разрешаемая этой решеткой, для света с длиной волны $\lambda = 600$ нм в спектре третьего порядка составляет 40 пм. [$d = \dfrac{ml}{\lambda}\delta\lambda = 6$ мкм]

5.113. Постоянная d дифракционной решетки равна 35 мкм. Определите длину этой решетки, если она в первом порядке разрешает две спектральные линии калия ($\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм). [$l = \dfrac{\lambda_1 d}{m\delta\lambda_2} = 1{,}01$ см]

5.114. Определите длину дифракционной решетки с периодом $d = 30$ мкм, если она во втором порядке разрешает две желтые линии натрия ($\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм). [$l = \dfrac{\lambda_1 d}{m\delta\lambda_2} = 1{,}47$ см]

5.115. На дифракционную решетку с периодом $d = 3$ мкм нормально падает монохроматический свет. Угол дифракции для третьего максимума составляет 30°, а минимальная разрешаемая решеткой разность длин волн $\delta\lambda = 0{,}1$ нм. Определите: 1) длину волны монохроматического света; 2) длину дифракционной решетки. [1) $\lambda = 500$ нм; 2) $l = \dfrac{\lambda^2}{\delta\lambda\sin\varphi} = 5$ мм]

5.116. Определите длину волны, для которой дифракционная решетка с постоянной $d = 3{,}5$ мкм в спектре второго порядка имеет угловую дисперсию $D_\varphi = 6\cdot10^5$ рад/м. [$\lambda = \dfrac{d\sin\left(\arccos\dfrac{m}{D_\varphi d}\right)}{m} = 534$ нм]

5.117. Дифракционная решетка имеет 500 штрихов и постоянную $d = 5$ мкм. Определите угловую дисперсию для угла дифракции $\varphi = 30°$ в спектре второго порядка, а также разрешающую способность дифракционной решетки в спектре четвертого порядка. [$D_\varphi = 4{,}62\cdot10^5$ рад/м; $R = 2000$]

5.118. Нормально поверхности дифракционной решетки падает монохроматический пучок света ($\lambda = 630$ нм). За решеткой находится линза, в фокальной плоскости которой на экране наблюдается дифракционная картина. Определите фокусное расстояние F линзы, если линейная дисперсия D в спектре некоторого порядка для угла $\varphi = 20°$ составляет 0,4 мм/нм. [$F = \dfrac{\lambda D}{\operatorname{tg}\varphi} = 69{,}2$ см]

5.4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ВЕЩЕСТВЕ

Основные законы и формулы

• Уравнение вынужденных колебаний оптического электрона под действием электрической составляющей поля электромагнитной волны (простейшая задача дисперсии)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t$$

[eE_0 — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны; ω_0 — собственная частота колебаний электрона; ω — частота внешнего поля; m, e — масса и заряд электрона].

• Зависимость показателя преломления вещества n от частоты ω внешнего поля, согласно элементарной электронной теории дисперсии,

$$n^2 = 1 + \frac{n_{0i}}{\varepsilon_0}\sum_i \frac{e^2/m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

[ε_0 — электрическая постоянная; n_{0i} — концентрация электронов; m — масса электрона; e — заряд электрона].

• Закон Бугера (закон ослабления интенсивности света в веществе)

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha x}$$

[I_0 и I — интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x; α — коэффициент поглощения].

• Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}$$

[ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника электромагнитного излучения относительно приемника; c — скорость света в вакууме; θ — угол между вектором скорости $\vec{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем].

• Продольный эффект Доплера ($\theta = 0$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

• Поперечный эффект Доплера ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

• Эффект Вавилова — Черенкова

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv}$$

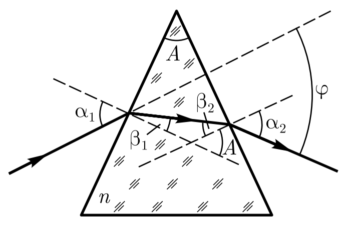
[ϑ — угол между направлением распространения излучения и вектором скорости частицы; n — показатель преломления среды].

Примеры решения задач

5.119. На грань стеклянной призмы с преломляющим углом $A = 50°$ падает монохроматический луч света под углом $\alpha_1 = 40°$. Определите угол отклонения φ луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1,5.

Дано: $A = 50°$; $\alpha_1 = 40°$; $n = 1{,}5$.

Найти: φ.



Решение. Падающий луч претерпевает двукратное преломление (на левой и правой гранях призмы) и потому отклоняется от первоначального направления на угол φ. Из рисунка следует, что

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A \qquad (1)$$

(учли, что $\beta_1 + \beta_2 = A$).

Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n,$$

откуда $\sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}$ и $\beta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right) = 25{,}37°$. Учитывая, что $\beta_2 = A - \beta_1$, получаем $\beta_2 = 24{,}63°$.

Применяя закон преломления, запишем

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_1} = \frac{1}{n},$$

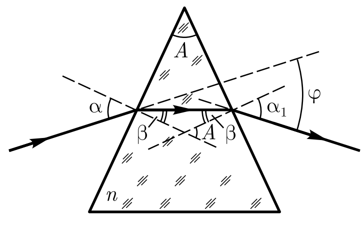
откуда $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_2$ и $\alpha_1 = \arcsin(n\sin\beta_2) = 38{,}69°$.

Искомый угол отклонения луча призмой, согласно (1),

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - A = 40° + 38{,}69° - 50° = 28{,}69° = 28°\,41'.$$

Ответ: $\varphi = 28°\,41'$.

5.120. Монохроматический луч света падает на боковую поверхность равнобедренной призмы и после преломления на ее левой грани идет в призме параллельно ее основанию. Выйдя из призмы, он оказывается отклоненным на угол φ от своего первоначального направления. Выведите связь между преломляющим углом призмы A, показателем преломления призмы n и углом φ.



Решение. Ход лучей в равнобедренной призме, согласно данным задачи, показан на рисунке. Из рисунка следует, что углы β равны. Тогда законы преломления света на левой и правой гранях призмы запишутся соответственно в виде:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \quad \text{и} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_1} = \frac{1}{n},$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha$.

Из рисунка следует также, что

$$A = 2\beta \text{ и } \varphi = (\alpha - \beta) + (\alpha_1 - \beta) = 2(\alpha - \beta) = 2\alpha - A,$$

откуда

$$\beta = \frac{A}{2} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\varphi + A}{2}.$$

Согласно закону преломления на левой грани призмы,

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\left(\dfrac{\varphi + A}{2}\right)}{\sin\dfrac{A}{2}},$$

откуда искомая связь

$$\sin\left(\frac{\varphi + A}{2}\right) = n\sin\frac{A}{2}.$$

Ответ: $\sin\left(\dfrac{\varphi + A}{2}\right) = n\sin\dfrac{A}{2}$.

5.121. Определите концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 95$ МГц ее показатель преломления $n = 0{,}92$.

Дано: $\nu = 95$ МГц ($9{,}5 \cdot 10^7$ Гц); $n = 0{,}92$.

Найти: n_0.

Решение. Формально дисперсия света — следствие зависимости показателя преломления n среды от частоты ω электромагнитного излучения. Для изотропной немагнитной среды

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + æ}, \tag{1}$$

где æ — диэлектрическая восприимчивость среды. Поскольку

$$æ = \frac{P}{\varepsilon_0 E},$$

где P — поляризованность (дипольный момент единицы объема); E — модуль вектора напряженности электрического поля электромагнитной волны. Тогда выражение (1) можно переписать в виде

$$n^2 = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}. \tag{2}$$

Если концентрация свободных электронов в среде равна n_0, то мгновенное значение поляризованности

$$P = n_0 p = n_0 ex, \tag{3}$$

где $p = ex$ — наведенный дипольный момент электрона, совершающего вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны (e — заряд электрона; x — смещение электрона под действием электрического поля электромагнитной волны). Подставив (3) в (2), получим

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 ex}{\varepsilon_0 E}, \tag{4}$$

т. е. задача сводится к определению смещения x электрона под действием внешнего поля E. Примем, что $E = E_0 \cos\omega t$.

Уравнение вынужденных колебаний электрона (без учета силы сопротивления, обусловливающей поглощение энергии падающей волны)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t, \tag{5}$$

где $F_0 = eE_0$ — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны; ω_0 — собственная частота колебаний электрона; m — масса электрона.

Решение уравнения (5)

$$x = A\cos\omega t, \tag{6}$$

где

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Поскольку, по условию задачи, рассматриваем свободные электроны, то собственная частота колебаний $\omega_0 = 0$, поэтому

$$A = \frac{eE_0}{m\omega^2}. \tag{7}$$

Подставив (6) и (7) в уравнение (4), получим

$$n^2 = 1 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m\omega^2},$$

откуда искомый показатель преломления

$$n_0 = (1 - n^2)\frac{\varepsilon_0 m\omega^2}{e^2} = \frac{4\pi^2\nu^2\varepsilon_0 m}{e^2}(1 - n^2)$$

(учли, что $\omega = 2\pi\nu$).

Ответ: $n_0 = 1{,}71 \cdot 10^7$ см$^{-3}$.

5.122. Электромагнитная волна распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0. Пренебрегая взаимодействием волны с ионами плазмы, определите зависимость фазовой скорости волны от частоты ω.

Дано: n_0; ω.

Найти: $v(\omega)$.

Решение. Фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{c}{n}, \qquad (1)$$

где c — скорость распространения света в вакууме, а показатель преломления

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad (2)$$

где n_0 — концентрация электронов; e — заряд электрона; ε_0 — электрическая постоянная; m — масса электрона; ω_0 — собственная частота колебаний электронов среды; ω — частота падающего света.

В случае разреженной плазмы электроны можно считать свободными, и собственная частота колебаний электронов $\omega_0 = 0$. Тогда выражение (2) можно привести к виду

$$n = \sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в формулу (1), найдем искомую зависимость фазовой скорости электромагнитной волны от частоты

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}}}.$$

Ответ: $v = \dfrac{c}{\sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}}}$.

5.123. Монохроматический свет падает нормально поочередно на две пластинки, изготовленные из одного и того же материала, одна толщиной $d_1 = 4$ мм, другая — $d_2 = 8{,}5$ мм. Пренебрегая вторичными отражениями, определите коэффициент поглощения α этого материала, если первая пластинка пропускает $\eta_1 = 0{,}7$ светового потока, вторая — $\eta_2 = 0{,}52$.

Дано: $d_1 = 4$ мм ($4 \cdot 10^{-3}$ м); $d_2 = 8{,}5$ мм ($8{,}5 \cdot 10^{-3}$ м); $\eta_1 = 0{,}7$; $\eta_2 = 0{,}52$.

Найти: α.

Решение. Учитывая, что обе пластинки изготовлены из одного и того же материала ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$), запишем для них закон Бугера:

$$I_1 = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha d_1}; \qquad (1)$$

$$I_2 = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha d_2}, \qquad (2)$$

где I_0, I_1, I_2 — соответственно интенсивности монохроматического света на входе и выходе первой и второй пластинки; α — коэффициент поглощения; d_1 и d_2 — толщины пластинок.

Согласно условию задачи,

$$\eta_1 = \frac{I_1}{I_0} \quad \text{и} \quad \eta_2 = \frac{I_2}{I_0}. \qquad (3)$$

Поделив (1) на (2) с учетом (3), получаем

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = e^{\alpha(d_2 - d_1)},$$

откуда, потенцируя,

$$\ln\frac{\eta_1}{\eta_2} = \alpha(d_2 - d_1),$$

находим искомый коэффициент поглощения

$$\alpha = \frac{\ln\dfrac{\eta_1}{\eta_2}}{d_2 - d_1}.$$

Ответ: $\alpha = 0{,}661$ мм$^{-1}$.

5.124. Две пластинки одинаковой толщины, но сделанные из разного материала, пропускают соответственно $^1\!/_2$ и $^1\!/_4$ падающего потока световой волны. Пренебрегая отражением света, определите отношение коэффициентов поглощения этих пластинок.

Дано: $I_1 = \dfrac{1}{2} I_0$; $I_2 = \dfrac{1}{4} I_0$; $x_1 = x_2$.

Найти: $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Решение. Учитывая, что толщины обеих пластинок одинаковы ($x_1 = x_2 = x$), запишем для них закон Бугера:

$$I_1 = I_0 e^{-\alpha_1 x}; \qquad (1)$$

$$I_2 = I_0 e^{-\alpha_2 x}, \qquad (2)$$

где I_0, I_1 и I_2 — соответственно интенсивности монохроматической световой волны на входе и выходе первой и второй пластинок; α_1 и α_2 — коэффициенты поглощения первой и второй пластинок.

Подставив в (1) и (2) данные по условию задачи значения для I_1 и I_2 и произведя элементарные преобразования, получим искомое отношение коэффициентов поглощения

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Ответ: $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2$.

5.125. Определите кинетическую энергию T протонов в электронвольтах, которые в среде с показателем преломления $n = 1{,}7$ излучают свет под углом $\vartheta = 25°$ к направлению своего движения.

Дано: $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $n = 1{,}7$; $\vartheta = 25°$.

Найти: T.

Решение. Отличительная особенность излучения Вавилова — Черенкова — распространение лишь по направлениям, составляющим острый угол ϑ с траекторией частицы, т. е. вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы:

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv}, \tag{1}$$

где c — скорость распространения света в вакууме; n — показатель преломления среды; v — скорость частицы.

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right), \tag{2}$$

где m — масса протона.

Из формулы (1) получаем $\dfrac{v}{c} = \dfrac{1}{n\cos\vartheta}$. Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомую кинетическую энергию протонов:

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2\cos^2\vartheta}}}-1\right) = mc^2\left(\frac{n\cos\vartheta}{\sqrt{n^2\cos^2\vartheta-1}}-1\right).$$

Ответ: $T = 0{,}295$ ГэВ.

5.126. Определите показатель n преломления среды, в которой наблюдается эффект Вавилова — Черенкова, если минимальный импульс $p_{\min}$ электрона равен $2{,}5\cdot10^{-22}$ кг · м/с.

Дано: $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг; $p_{\min} = 2{,}5\cdot10^{-22}$ кг · м/с.

Найти: n.

Решение. Эффект Вавилова — Черенкова наблюдается при движении релятивистских частиц в среде с постоянной скоростью v, превышающей фазовую скорость света в этой среде, т. е. при условии

$$v > \frac{c}{n}, \tag{1}$$

где $c = 3\cdot10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

Релятивистский импульс электрона

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

где m — масса электрона.

Естественно, что минимальному импульсу соответствует минимальное значение

$$v_{\min} = \frac{c}{n}$$

[учли формулу (1)]. Тогда

$$p_{\min} = \frac{mv_{\min}}{\sqrt{1-\dfrac{v_{\min}^2}{c^2}}} = \frac{mc}{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{mc}{\sqrt{n^2-1}},$$

откуда искомый показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\frac{m^2c^2}{p_{\min}^2} + 1}.$$

Ответ: $n = 1{,}48$.

5.127. Выведите выражение для уширения $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ спектральных линий для продольного эффекта Доплера при $v \ll c$.

Дано: $v \ll c$; $\theta = 0$.

Найти: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$.

Решение. Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме описывается формулой

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta}, \tag{1}$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитных волн, излучаемых источником и воспринимаемых приемником; v — скорость источника относительно приемника; c — скорость света в вакууме; θ — угол между вектором скорости $\vec{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

В случае продольного эффекта Доплера (наблюдается при движении приемника вдоль линии, соединяющей его с источником) $\theta = 0$ и формула (1) примет вид

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{v}{c}}}. \tag{2}$$

При малых относительных скоростях v ($v \ll c$), разлагая (2) в ряд и пренебрегая членами второго порядка, получим

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{3}$$

Учитывая, что $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ и $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, выражение (3) можно записать в виде

$$\frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\left(1 - \frac{v}{c}\right),$$

откуда

$$\frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-1} \quad \text{или} \quad 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{v}{c}$$

(учли, что $\left(1 - \dfrac{v}{c}\right)^{-1} = 1 + \dfrac{v}{c} + \dfrac{v^2}{c^2} + \ldots$, и пренебрегли членом второго порядка малости), откуда искомое уширение спектральных линий

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}.$$

Ответ: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{v}{c}$.

5.128. Выведите выражение для уширения $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ спектральных линий для поперечного эффекта Доплера.

Дано: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Найти: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$.

Решение. Из общей формулы эффекта Доплера для электромагнитных волн в вакууме (см. предыдущую задачу) для поперечного эффекта Доплера (наблюдается при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$) получаем

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad (1)$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника относительно приемника; c — скорость света в вакууме.

Учитывая, что $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ и $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

Разложив в ряд $\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{v^4}{c^4} + \ldots$ и ограничившись только первыми двумя членами, выражение (2) примет вид

$$1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

откуда искомое уширение спектральных линий при поперечном эффекте Доплера

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v^2}{2c^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{v^2}{2c^2}$.

5.129. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 600$ нм движется по направлению к наблюдателю. Определите скорость движения источника, если приемник наблюдателя зафиксировал длину волны $\lambda = 542$ нм.

Дано: $\lambda_0 = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м); $\lambda = 542$ нм ($5{,}42 \cdot 10^{-7}$ м); $\theta = \pi$.

Найти: v.

Решение. Согласно формуле, описывающей эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме,

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\theta}, \qquad (1)$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника относительно приемника; θ — угол между вектором скорости $\vec{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

Так как по условию задачи $\theta = \pi$ ($\cos\theta = -1$), а $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, выражение (1) можно представить в виде

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v}{c}}.$$

Возведя обе части этого выражения в квадрат, получаем

$$\lambda^2 = \frac{1-\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}}\lambda_0^2,$$

откуда скорость движения источника

$$v = c\frac{\lambda_0^2-\lambda^2}{\lambda_0^2+\lambda^2}.$$

Ответ: $v = 0{,}101c$.

5.130. Определите в вакууме доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для спектральной линии атомарного водорода с длиной волны $\lambda_0 = 656$ нм, если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией $T = 200$ кэВ.

Дано: $\lambda_0 = 656$ нм ($6{,}56\cdot10^{-7}$ м); $T = 200$ кэВ ($3{,}2\cdot10^{-14}$ Дж); $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг; $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$.

Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. В данном случае скорость источника перпендикулярна направлению наблюдателя $\left(\vartheta = \dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. наблюдается поперечный эффект Доплера. Согласно формуле, описывающей поперечный эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме,

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad (1)$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника относительно приемника; c — скорость света в вакууме.

Учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ и $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$, а длина волны, фиксируемая приемником наблюдателя, $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, выражение (1) можно представить в виде

$$\frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \qquad (2)$$

Разложим правую часть выражения (2) в ряд, ограничившись двумя первыми членами,

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}.$$

Тогда выражение (2) примет вид

$$\frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v^2}{2c^2}. \qquad (3)$$

Так как кинетическая энергия $T = \dfrac{mv^2}{2}$, то $v^2 = \dfrac{2T}{m}$, и подставив это выражение в формулу (3), найдем искомое доплеровское смещение

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{T}{mc^2}.$$

Ответ: $\Delta\lambda = 0{,}14$ нм.

Задачи для самостоятельного решения

5.131. Докажите, что при преломлении в призме с малым преломляющим углом A монохроматический луч света отклоняется от своего первоначального направления на угол $\varphi = A(n-1)$, который не зависит от угла падения (при условии, что угол падения также мал).

5.132. На стеклянную призму с преломляющим углом $A = 18^\circ$ нормально падает монохроматический луч света. Определите угол φ отклонения луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1,5. [$\varphi = 9^\circ\,36'$]

5.133. Монохроматический луч света выходит из стеклянной призмы с показателем преломления $n = 1{,}56$ под тем же углом, что и входит в нее. Определите угол отклонения φ луча призмой, если преломляющий угол A призмы равен 30°. [$\varphi = 2\arcsin\left(n\sin\dfrac{A}{2}\right) - A = 17^\circ\,36'$]

5.134. Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0. Пренебрегая взаимодействием волны с ионами плазмы, определите зависимость диэлектрической проницаемости ε плазмы от частоты ω. [$\varepsilon = 1 - \dfrac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}$]

5.135. Максимальная скорость $v_{\max}$ вынужденных колебаний свободного электрона равна 60 км/с. Определите амплитуду E_0 напряженности электрического поля электромагнитной волны, если в точке нахождения свободного электрона частота ν радиопередатчика равна 510 кГц. [$E_0 = \dfrac{2\pi\nu m v_{\max}}{e} = 1{,}09$ В/см]

5.136. Концентрация n_0 свободных электронов ионосферы равна $2{,}4 \cdot 10^7$ см$^{-3}$. Определите частоту ν радиоволн, если показатель n преломления ионосферы равен 0,9. [$\nu = \dfrac{e}{2\pi}\sqrt{\dfrac{n_0}{(1-n^2)\varepsilon_0 m}}$ = 101 кГц]

5.137. Коэффициент поглощения графита для монохроматического света определенной длины волны $\alpha = 700$ см$^{-1}$. Определите толщину слоя графита, вызывающего ослабление света в 100 раз. [$l = 65{,}8$ мкм]

5.138. При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность монохроматического света уменьшилась в 4 раза. Определите, во сколько раз уменьшится его интенсивность при прохождении пути $3x$. [В 64 раза]

5.139. Определите скорость электронов (в долях скорости света), при которой черенковское излучение происходит в среде с показателем преломления $n = 1{,}76$ под углом $\vartheta = 25°$ к направлению их движения. [$v = 0{,}627c$]

5.140. Определите минимальную ускоряющую разность потенциалов $U_{\min}$, которую должен пройти электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}6$ возникло черенковское излучение. [$U_{\min} = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right)$ = 144 кВ]

5.141. Определите, с какой скоростью должен был бы двигаться автомобиль, чтобы красный сигнал светофора ($\lambda_0 = 687$ нм) воспринимался бы как зеленый ($\lambda = 527$ нм) (анекдот о Вуде). [$v = 7{,}77 \cdot 10^4$ км/с]

5.142. Определите скорость движения туманности относительно Земли, если линия атомарного водорода с длиной волны $\lambda_0 = 656{,}3$ нм в спектре туманности испытывает доплеровское красное смещение на $\Delta\lambda = 1{,}2$ нм. [$v = \left(1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda}\right)c =$ $= 547$ км/с]

5.143. Определите доплеровское смещение $\Delta\lambda$ линии атомарного водорода с длиной волны $\lambda_0 = 656{,}3$ нм, если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода, движущихся со скоростью $v = 1{,}2$ Мм/с. [$\Delta\lambda = \dfrac{v^2}{2c^2}\lambda_0$ = 5,25 пм]

5.5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Основные законы и формулы

• Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2\alpha$$

[I и I_0 — интенсивности плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор и падающего на анализатор; α — угол между плоскостями поляризатора и анализатора].

• Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

[$I_{\max}$ и $I_{\min}$ — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором].

• Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_{\text{Б}} = n_{21}$$

[$i_{\text{Б}}$ — угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} — относительный показатель преломления среды].

• Оптическая разность хода для кристаллической пластинки:

• в четверть длины волны

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

• в полдлины волны

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

• в целую длину волны

$$(n_o - n_e)d = \pm(m + 1)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

[знак «+» соответствует отрицательным одноосным кристаллам, «−» — положительным; λ — длина волны; d — толщина пластинки; n_o, n_e — соответственно показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси].

• Угол поворота плоскости поляризации:

• для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d,$$

• для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha] C d$$

[d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; α ([α]) — удельное вращение; C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе].

Примеры решения задач

5.144. Интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшилась в четыре раза. Пренебрегая поглощением света, определите угол α между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

Дано: $\dfrac{I_{\text{ест}}}{I_2} = 4.$

Найти: α.

Решение. Если пропустить естественный свет через поляризатор и анализатор, главные плоскости которых образуют угол α, то после прохождения поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{\text{ест}},$$

а из анализатора, согласно закону Малюса, выйдет свет интенсивностью

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha.$$

Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора,

$$I_2 = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2\alpha,$$

откуда

$$\cos^2\alpha = \frac{2I_2}{I_{\text{ест}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

и искомый угол

$$\alpha = 45°.$$

Ответ: $\alpha = 45°$.

5.145. Определите, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, расположенные так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 30°$ и в каждом из них теряется 8 % падающего света.

Дано: $\alpha = 30°$; $k = 0{,}08$.

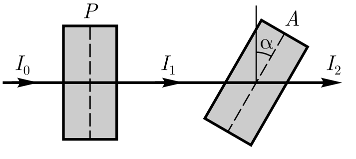
Найти: $\dfrac{I_0}{I_2}$.

Решение. Естественный свет, проходя через поляризатор P (см. рисунок), превращается в плоскополяризованный, и его интенсивность на выходе из поляризатора (с учетом потери интенсивности)

$$I_1 = \frac{1}{2}(1-k)I_0. \qquad (1)$$

Согласно закону Малюса, интенсивность света на выходе из анализатора (с учетом потери интенсивности)

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\alpha. \qquad (2)$$



Подставив выражение (1) в (2), получим

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0(1-k)^2\cos^2\alpha.$$

Тогда искомое ослабление интенсивности при прохождении света через поляризатор и анализатор

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{I_0}{I_2} = 3{,}15$.

5.146. На систему, состоящую из поляризатора и анализатора, у которых угол α между главными плоскостями составляет 60°, падает естественный свет, интенсивность которого после прохождения системы ослабляется в $n = 10$ раз. Пренебрегая потерями на отражение света, определите, каков процент интенсивности падающего света теряется при прохождении данной системы (потери в поляризаторе и анализаторе считать одинаковыми).

Дано: $\alpha = 60°$; $n = \dfrac{I_0}{I_2} = 10$; $k_1 = k_2 = k$.

Найти: η.

Решение. Согласно условию задачи, потери света в поляризаторе и анализаторе одинаковы, поэтому

$$\eta = 2k.$$

Обозначим интенсивность падающего естественного света через I_0. После прохождения поляризатора выйдет поляризованный свет, интенсивность которого с учетом потери света на поляризаторе

$$I_1 = \frac{1}{2}(1-k)I_0, \tag{1}$$

где k — доля света, теряемого в поляризаторе.

Согласно закону Малюса, интенсивность света, прошедшего анализатор (с учетом потери света на анализаторе),

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\alpha$$

или, учитывая формулу (1), получаем

$$I_2 = \frac{1}{2}(1-k)^2 I_0 \cos^2\alpha,$$

откуда

$$n = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha} \tag{2}$$

(по условию $n = \dfrac{I_0}{I_2}$).

Из формулы (2) найдем

$$k = 1 - \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Тогда потери света при прохождении поляризатора и анализатора

$$\eta = 2k = 2\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

Ответ: $\eta = 0{,}211$, теряется 21,1 % падающего на систему света.

5.147. Частично поляризованный свет проходит сквозь ни́коль. При повороте ни́коля на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ от положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего пучка уменьшилась в $n = 2$ раза. Пренебрегая поглощением света в ни́коле, определите: 1) отношение интенсивностей плоскополяризованного и естественного света; 2) степень поляризации падающего света.

Дано: $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; $n = 2$.

Найти: 1) $\dfrac{I_п}{I_{ест}}$; 2) P.

Решение. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь света плоскополяризованного и естественного. Ни́коль пропускает половину падающего на него естественного света, при этом превращая его в плоскополяризованный. Степень пропускания падающего на ни́коль поляризованного света зависит, согласно закону Малюса, от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора.

При первом положении ни́коля, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света равна

$$I_1 = 0{,}5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}}, \tag{1}$$

где $I_{\text{п}}$ — интенсивность всего ранее поляризованного света. При втором положении ни́коля интенсивность прошедшего света

$$I_2 = 0{,}5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}}\cos^2\frac{\pi}{3} = 0{,}5I_{\text{ест}} + 0{,}25I_{\text{п}}. \tag{2}$$

Так как, по условию задачи, $I_1 = 2I_2$, то из соотношений (1) и (2) получим

$$0{,}5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}} = 2(0{,}5I_{\text{ест}} + 0{,}25I_{\text{п}}),$$

откуда $I_{\text{ест}} = I_{\text{п}}$, т. е. искомое отношение $\dfrac{I_{\text{п}}}{I_{\text{ест}}} = 1$.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{3}$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ — максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого поляризатором.

Максимальная интенсивность света, пропускаемого ни́колем с учетом (1),

$$I_{\max} = I_1 = 0{,}5I_{\text{ест}} + I_{\text{п}} = 1{,}5I_{\text{п}}. \tag{4}$$

При повороте ни́коля на $\dfrac{\pi}{2}$ свет, ранее поляризованный, не проходит, а поэтому минимальная интенсивность

$$I_{\min} = 0{,}5I_{\text{ест}} = 0{,}5I_{\text{п}}. \tag{5}$$

Подставив (4) и (5) в (3), найдем искомую степень поляризации

$$P = \frac{1{,}5I_{\text{п}} - 0{,}5I_{\text{п}}}{1{,}5I_{\text{п}} + 0{,}5I_{\text{п}}}.$$

Ответ: 1) $\dfrac{I_{\text{п}}}{I_{\text{ест}}} = 1$; 2) $P = 0{,}5$.

5.148. Степень поляризации P света, представляющего собой смесь естественного света с плоскополяризованным, равна 0,5. Определите отношение интенсивности поляризованного света к интенсивности естественного.

Дано: $P = 0{,}5$.

Найти: $\dfrac{I_{\text{п}}}{I_{\text{ест}}}$.

Решение. Обозначим искомое отношение

$$\frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{ест}}} = x. \tag{1}$$

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{2}$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь света плоскополяризованного и естественного.

Анализатор при любом положении пропускает половину падающего на него естественного света, превращая его в плоскополяризованный.

Максимальная интенсивность соответствует положению анализатора, когда его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний плоскополяризованного света, т. е. анализатор пропускает весь ранее плоскополяризованный свет.

Максимальная интенсивность

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} + I_{\text{п}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} I_{\text{п}} + I_{\text{п}}, \tag{3}$$

где, согласно (1), $I_{\text{ест}} = \dfrac{1}{x} I_{\text{п}}$.

Минимальная интенсивность соответствует положению анализатора, когда его плоскость пропускания перпендикулярна плоскости колебаний плоскополяризованного света, т. е. плоскополяризованный свет гасится полностью. Анализатор в данном положении пропускает только половину падающего на него естественного света, превращая его в плоскополяризованный:

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} I_{\text{п}} \tag{4}$$

[вновь учли условие (1)].

Подставив выражения (3) и (4) в формулу (2), запишем

$$P = \frac{\dfrac{I_{\text{п}}}{2x} + I_{\text{п}} - \dfrac{I_{\text{п}}}{2x}}{\dfrac{I_{\text{п}}}{2x} + I_{\text{п}} + \dfrac{I_{\text{п}}}{2x}} = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + 1},$$

откуда искомое отношение интенсивности поляризованного света к интенсивности естественного

$$x = \frac{P}{1 - P} = \frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{ест}}}.$$

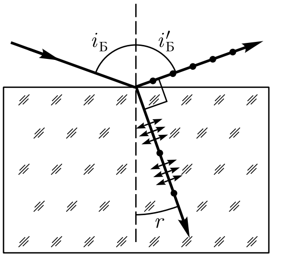
Ответ: $\dfrac{I_{\text{п}}}{I_{\text{ест}}} = 1.$

5.149. Определите показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован при угле преломления $r = 30°$.

Дано: $r = 30°$.

Найти: n.

Решение. Свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован (содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения), если он падает на диэлектрик под углом Брюстера (см. рисунок). Тогда, согласно закону преломления,



$$\frac{\sin i_Б}{\sin r} = n_{21} = n, \qquad (1)$$

где n_{21} — показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (воздуха): $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1} = n$ (поскольку $n_1 = 1$).

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны ($\operatorname{tg} i_Б = \dfrac{\sin i_Б}{\cos i_Б}$; $n_{21} = \dfrac{\sin i_Б}{\sin r}$, откуда $\cos i_Б = \sin r$). Следовательно, $i_Б + r = \dfrac{\pi}{2}$, но $i'_Б = i_Б$ (закон отражения), поэтому $i'_Б + r = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда угол Брюстера, при котором отраженный луч полностью поляризован,

$$i_Б = 90^\circ - r = 60^\circ.$$

Подставляя значение угла Брюстера в выражение (1), находим искомый показатель преломления стекла $n = 1{,}73$.

Ответ: $n = 1{,}73$.

5.150. Пучок естественного света, идущий в воздухе, отражается от поверхности некоторого вещества, скорость v распространения света в котором равна $1{,}5 \cdot 10^8$ м/с. Определите угол падения, при котором отраженный свет полностью поляризован.

Дано: $v = 1{,}5 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: $i_Б$.

Решение. Свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован, если он падает на диэлектрик под углом Брюстера. Согласно закону Брюстера,

$$\operatorname{tg} i_Б = n_{21} = n, \qquad (1)$$

где $i_Б$ — угол Брюстера — угол падения света на вещество, при котором отраженный свет полностью поляризован; n_{21} — показатель преломления второй среды (вещества) относительно первой (воздуха), равный в данном случае показателю преломления n вещества (показатель преломления воздуха равен единице).

Показатель преломления вещества

$$n = \frac{c}{v}, \qquad (2)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

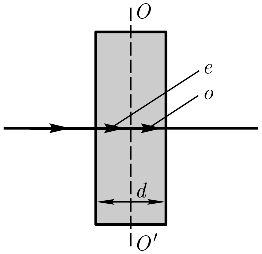
Приравняв выражения (1) и (2), получаем

$$\frac{c}{v} = \operatorname{tg} i_Б,$$

откуда искомый угол Брюстера

$$i_Б = \operatorname{arctg} \frac{c}{v}.$$

Ответ: $i_Б = 63^\circ\, 4'$.



5.151. Пучок плоскополяризованного света падает нормально на пластинку кварца толщиной $d = 0{,}4$ мм, вырезанную параллельно оптической оси. Определите оптическую разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей, прошедших через эту пластинку, если показатели преломления кварца для этих лучей равны соответственно 1,544 и 1,553.

Дано: $d = 0{,}4$ мм ($4 \cdot 10^{-4}$ м); $n_o = 1{,}544$; $n_e = 1{,}553$.

Найти: Δ.

Решение. Кварц — положительный кристалл ($v_o > v_e$). Падающий нормально на пластинку из кварца, вырезанную параллельно оптической оси, плоскополяризованный луч внутри пластинки разбивается на обыкновенный (o) и необыкновенный (e) лучи. В кристалле эти лучи пространственно не разделены, но движутся с разными скоростями (см. рисунок), причем $v_o > v_e$.

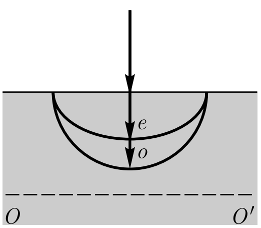
Искомая оптическая разность хода

$$\Delta = d(n_e - n_o),$$

где d — толщина пластинки.

Ответ: $\Delta = 3{,}6$ мкм.

5.152. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 550$ нм, падает на пластинку кварца перпендикулярно его оптической оси. Принимая показатели преломления в кварце для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1{,}544$ и $n_e = 1{,}553$, определите длины волн этих лучей в кристалле.



Дано: $\lambda = 550$ нм ($5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м); $n_o = 1{,}544$; $n_e = 1{,}553$.

Найти: λ_o; λ_e.

Решение. Кварц — положительный кристалл ($v_o > v_e$). На рисунке показаны направление оптической оси OO', направление падения на кристалл света и сечения волновых поверхностей для обыкновенного (окружность) и необыкновенного (эллипс) лучей.

Длина волны света в вакууме и в кристалле

$$\lambda = cT; \quad \lambda_o = v_o T; \quad \lambda_e = v_e T,$$

где c — скорость распространения света в вакууме; индексы o и e относятся к обыкновенному и необыкновенному лучам. Учитывая, что

$$v_o = \frac{c}{n_o} \quad \text{и} \quad v_e = \frac{c}{n_e},$$

получаем искомые выражения для длин волн обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле:

$$\lambda_o = \frac{\lambda}{n_o} \quad \text{и} \quad \lambda_e = \frac{\lambda}{n_e}.$$

Ответ: $\lambda_o = 356{,}2$ нм; $\lambda_e = 354{,}2$ нм.

5.153. Плоскопараллельная пластинка с наименьшей толщиной $d_{\min} = 16$ мкм служит пластинкой в четверть длины волны для света длиной волны $\lambda = 589$ нм. Определите показатель преломления для необыкновенного луча, если показатель преломления для обыкновенного луча $n_o = 1{,}544$.

Дано: $d_{\min} = 16$ мкм $(1{,}6 \cdot 10^{-5}$ м); $\lambda = 589$ нм $(5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м); $n_o = 1{,}544$.

Найти: n_e.

Решение. Пластинка в четверть длины волны — пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, для которой оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \;\; (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

причем знак «+» соответствует отрицательным кристаллам, «−» — положительным. При нормальном падении на пластинку «$\frac{\lambda}{4}$» плоскополяризованного света между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке (в кристалле лучи пространственно не разделены) возникает оптическая разность хода, равная $\frac{\lambda}{4}$.

Минимальная толщина пластинки в четверть длины волны соответствует $m = 0$. Тогда, например, для положительного кристалла,

$$d_{\min}(n_o - n_e) = -\frac{\lambda}{4},$$

откуда искомый показатель преломления необыкновенного луча

$$n_e = n_o + \frac{\lambda}{4d_{\min}}.$$

Вычисляя, получаем $n_e = 1{,}553$. Поскольку $n_e > n_o$, имеем дело действительно с пластинкой, вырезанной из положительного кристалла.

Ответ: $n_e = 1{,}553$.

5.154. Определите минимальную толщину пластинки исландского шпата, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий на нее нормально плоскополяризованный свет выходил циркулярно поляризованным. Показатели преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей $n_e = 1{,}489$, $n_o = 1{,}664$, длина световой волны 527 нм.

Дано: $n_e = 1{,}489$; $n_o = 1{,}664$; $\lambda = 527$ нм $(5{,}27 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: $d_{\min}$.

Решение. Плоскополяризованный свет, падающий нормально на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, в результате прохождения пластинки превращается в циркулярно поляризованный в случае пластинки в четверть длины волны, если угол между электрическим вектором плоскополяризованного луча и оптической осью кристалла составляет 45°.

Для пластинки в четверть длины волны оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \;\; (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

причем знак «+» соответствует отрицательным кристаллам, «−» — положительным.

Рассматриваемый в задаче исландский шпат — отрицательный кристалл, поэтому

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Минимальная толщина пластинки в четверть длины волны соответствует $m = 0$. Тогда

$$(n_o - n_e)\,d_{\min} = \frac{\lambda}{4},$$

откуда искомая минимальная толщина пластинки, при которой на выходе свет окажется циркулярно поляризованным,

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}.$$

Ответ: $d_{\min} = 0{,}753$ мкм.

5.155. Определите разность показателей преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей, если наименьшая толщина кварцевой кристаллической пластинки в целую длину волны для голубого света ($\lambda = 486$ нм) равна 54 мкм.

Дано: $\lambda = 486$ нм ($4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м); $d_{\min} = 54$ мкм ($5{,}4 \cdot 10^{-5}$ м).

Найти: $n_e - n_o$.

Решение. Кристаллическая пластинка в целую длину волны — пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, для которой оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm(m + 1)\lambda \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где знак «$-$» соответствует положительным кристаллам, «$+$» — отрицательным. При нормальном падении на пластинку «λ» плоскополяризованного света между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке (в кристалле эти лучи пространственно не разделены) возникает оптическая разность хода, равная λ.

Рассматриваемый в задаче кварц — положительный кристалл ($n_e > n_o$), поэтому можем записать

$$(n_e - n_o)d = (m + 1)\lambda \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Минимальная толщина пластинки в целую длину волны соответствует $m = 0$. Тогда

$$(n_e - n_o)\,d_{\min} = \lambda,$$

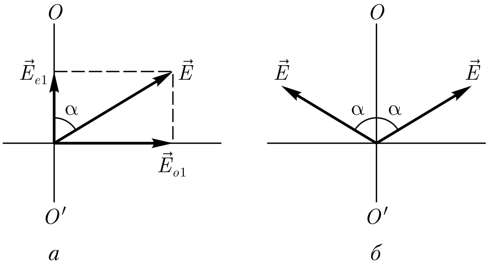
откуда искомая разность показателей преломления

$$n_e - n_o = \frac{\lambda}{d_{\min}}.$$

Ответ: $n_e - n_o = 0{,}009$.

5.156. Плоскополяризованный свет падает нормально на кристаллическую пластинку из положительного кристалла в полдлины волны. Плоскость колебаний падающего света составляет угол α с оптической осью кристалла. Определите поляризацию света, прошедшего эту пластинку.

Решение. При нормальном падении плоскополяризованного луча на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси (таковою является пластинка «$\frac{\lambda}{4}$»), он разбивается на два луча: обыкновенный (o) и необыкновенный (e). Эти лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, распространяются в кристаллической пластинке в направлении падения (перпендикулярно оптической оси) с разными скоростями.



Пройдя пластинку толщиной d, e- и o-лучи приобретают в случае положительного кристалла оптическую разность хода $(n_e - n_o)d$ и разность фаз между колебаниями

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d. \qquad (1)$$

Электрический вектор $\vec{E}$ плоскополяризованного света составляет угол α с оптической осью кристалла (рис. *а*), где E_{e1} и E_{o1} — соответственно амплитудные значения электрических векторов в необыкновенном и обыкновенном лучах.

На выходе из кристаллической пластинки в результате сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разными амплитудами (E_{e1} и E_{o1}) и разностью фаз φ возникают световые волны, вектор $\vec{E}$ в которых описывает эллипс, ориентированный относительно координатных осей произвольно. Уравнение этого эллипса

$$\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} - \frac{2E_oE_e}{E_{o1}E_{e1}}\cos\varphi + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} = \sin^2\varphi, \qquad (2)$$

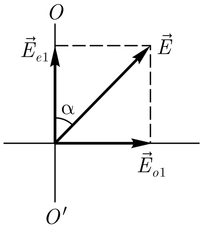
где E_o и E_e — соответственно амплитудные значения электрических векторов обыкновенного и необыкновенного лучей, прошедших кристаллическую пластинку.

По условию задачи на пути плоскополяризованного света ставится пластинка в полдлины волны. Для нее оптическая разность хода между необыкновенным и обыкновенным лучами $(n_e - n_o)d = \frac{\lambda}{2}$, а разность фаз в данном случае $\varphi = \pi$ [см. формулу (1)]. Учитывая полученную разность фаз, уравнение (2) примет вид:

$$\frac{E_o}{E_{o1}} + \frac{E_e}{E_{e1}} = 0, \qquad (3)$$

т. е. после прохождения кристаллической пластинки в полдлины волны свет остается плоскополяризованным (уравнение (3) — уравнение прямой), но плоскость колебаний наклонена к оптической оси под углом $(-\alpha)$, т. е. поворачивается на угол 2α, рис. *б*.

5.157. Плоскополяризованный свет нормально падает на кристаллическую пластинку из кварца в четверть длины волны. Плоскость колебаний падающего света составляет с оптической осью кристалла угол $\alpha = 45°$. Докажите, что после прохождения этой пластинки плоскополяризованный свет превращается в циркулярно поляризованный.



Решение. При нормальном падении плоскополяризованного луча на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси (таковою является пластинка в четверть длины волны), он разбивается на два луча — необыкновенный (e) и обыкновенный (o), поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяющиеся в пластинке в направлении падения (перпендикулярно оптической оси) с разными скоростями.

Пройдя пластинку толщиной d, o- и e-лучи приобретают в случае кварца (положительный кристалл) оптическую разность хода $(n_e - n_o)d$ и разность фаз между колебаниями

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d. \tag{1}$$

В общем случае на выходе из кристаллической пластинки в результате сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разными амплитудами и разностью фаз φ возникают световые волны, вектор $\vec{E}$ описывает эллипс, ориентированный относительно координатных осей произвольно. Уравнение этого эллипса

$$\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} - \frac{2E_oE_e}{E_{o1}E_{e1}}\cos\varphi + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} = \sin^2\varphi, \tag{2}$$

где E_o и E_e — амплитудные значения электрических векторов o- и e-лучей, прошедших кристаллическую пластинку; E_{o1} и E_{e1} — амплитудные значения электрических векторов в o- и e-лучах.

По условию задачи на пути плоскополяризованного света поставлена пластинка в четверть длины волны. Для нее оптическая разность хода между необыкновенным и обыкновенным лучами $(n_e - n_o)d = \dfrac{\lambda}{4}$, а разность фаз в данном случае $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ [см. формулу (1)].

Согласно условию задачи, электрический вектор $\vec{E}$ плоскополяризованного света составляет угол $\alpha = 45°$ с оптической осью кристалла (см. рисунок), что означает равенство $E_{e1} = E_{o1}$. Учитывая это равенство и разность фаз $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, уравнение (2) примет вид:

$$E_o^2 + E_e^2 = E_{o1}^2, \tag{3}$$

т. е. в данном случае в результате прохождения кристаллической пластинки в четверть длины волны (при $\alpha = 45°$) плоскополяризованный свет превращается в циркулярно поляризованный (уравнение (3) — уравнение окружности).

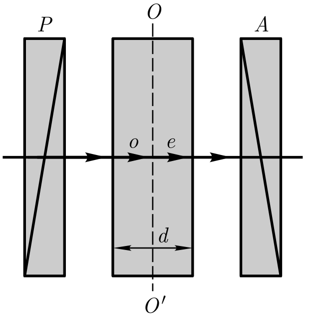
5.158. Кристаллическая пластинка из исландского шпата в полдлины волны помещена между скрещенными поляризатором и анализатором (рис. *а*). Плоскость колебаний падающего света составляет угол 45° с оптической осью кристалла. Возможна ли в данном случае интерференция на выходе света из кристалла? На выходе света из данной системы будет наблюдаться максимум или минимум?

Дано: $\beta = 90°$; $\alpha = 45°$.

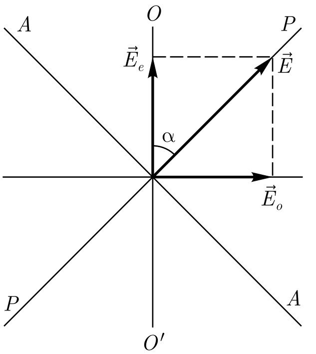
Найти: max, min.

Решение. Известно, что интерференция наблюдается лишь в тех случаях, когда колебания в складываемых когерентных волнах совершаются *вдоль одного направления.*

Чтобы получить интерференцию поляризованных лучей, кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, помещают между поляризатором P и анализатором A (см. рис. *а*). Параллельный пучок естественного света на выходе из поляризатора оказывается плоскополяризованным. В кристаллической пластинке из исландского шпата необыкновенный (e) и обыкновенный (o) лучи пространственно не разделены, но движутся с разными скоростями ($v_e > v_o$). Отметим, что o- и e-лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Анализатор же, пропуская колебания, поляризованные только в одной плоскости, сводит два взаимно ортогональных когерентных колебания к одной плоскости, создавая тем самым условия, при которых *возможна интерференция* e- и o-лучей.



а



б

Результат интерференции зависит от разности фаз φ, приобретенной e- и o-лучами в кристаллической пластинке, от амплитуд складываемых колебаний и угла β между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

По условию задачи плоскость колебаний падающего плоскополяризованного света составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с оптической осью кристалла (рис. *б*). При входе в кристаллическую пластинку колебание $\vec{E}$ возбудит два колебания: перпендикулярное оптической оси OO' (o-луч) и параллельное ей (e-луч). Поскольку $\alpha = 45^\circ$, амплитуды (E_o и E_e) и интенсивности обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы.

Между поляризатором и анализатором помещена кристаллическая пластинка в полдлины волны, поэтому, по определению, оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами (исландский шпат — отрицательный кристалл) $(n_o - n_e)d = \dfrac{\lambda}{2}$, а разность фаз

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2} = \pi,$$

т.е. свет после прохождения кристаллической пластинки остается плоскополяризованным, но плоскость колебаний вектора $\vec{E}$ наклонена к оптической оси под углом $(-\alpha)$, т.е. поворачивается на угол $2\alpha = 90^\circ$ (см. задачу 5.156).

По условию задачи поляризатор и анализатор скрещены (см. рис. *а*), т.е. $\beta = 90^\circ$, поэтому интенсивность света на выходе из анализатора максимальна (плоскости колебаний вектора $\vec{E}$ и пропускания анализатора параллельны), т.е. наблюдается *интерференционный максимум.*

Ответ: возможна, интерференционный максимум.

5.159. Ячейку Керра поместили между скрещенными поляризатором и анализатором. Вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля составляет угол $\alpha = 45°$ с плоскостями пропускания (главными плоскостями) поляризаторов. Конденсатор имеет длину $l = 15$ см и заполнен нитробензолом, постоянная Керра B которого для используемой длины волны и данной температуры равна $2{,}2 \cdot 10^{-10}$ см/В. Определите минимальное значение напряженности электрического поля в конденсаторе, при которой интенсивность света за анализатором не будет зависеть от поворота анализатора.

Дано: $\alpha = 45°$; $l = 15$ см (0,15 м); $B = 2{,}2 \cdot 10^{-10}$ см/В ($2{,}2 \cdot 10^{-12}$ м/В).

Найти: $E_{\min}$.

Решение. При электрическом поле в конденсаторе, напряженность $\vec{E}$ которого составляет угол $\alpha = 45°$ с главными плоскостями поляризаторов, вещество в конденсаторе становится оптически анизотропным, двоякопреломляющим, оптическая ось которого совпадает с направлением вектора $\vec{E}$.

Возникающая разность показателей между обыкновенным и необыкновенным лучами

$$n_o - n_e = B\lambda E^2,$$

где B — постоянная Керра; λ — длина волны света; E — напряженность электрического поля в конденсаторе.

Чтобы интенсивность прошедшего через систему света не зависела от поворота анализатора, необходимо, чтобы вышедший из ячейки Керра свет был циркулярно поляризованным. Это означает, что нитробензол должен соответствовать пластинке в четверть длины волны. Тогда можем записать

$$B\lambda E^2 l = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda.$$

Поскольку значению $E_{\min}$ соответствует $m = 1$, то

$$B\lambda E_{\min}^2 l = \frac{\lambda}{4},$$

откуда искомое

$$E_{\min} = \frac{1}{2\sqrt{Bl}}.$$

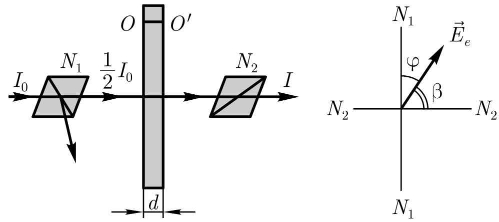
Ответ: $E_{\min} = 8{,}7$ кВ/см.

5.160. Пластинка кварца толщиной $d = 2$ мм (удельное вращение кварца 15 град/мм), вырезанная перпендикулярно оптической оси, помещена между двумя скрещенными ни́колями. Пренебрегая потерями света в ни́колях, определите, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего эту систему.

Дано: $d = 2$ мм ($2 \cdot 10^{-3}$ м); $\alpha = 15$ град/мм ($1{,}5 \cdot 10^4$ град/м).

Найти: $\dfrac{I_0}{I}$.

Решение. Естественный свет, проходя через первый ни́коль (рис. a), вследствие двойного лучепреломления расщепляется на два пучка: обыкновенный (o) и необыкновенный (e). Оба пучка одинаковы по интенсивности и поляризованы полностью, но во взаимно перпендикулярных плоскостях. Из первого ни́коля выходит необыкновенный (e) луч света с интенсивностью $I_0/2$ (обыкновенный (o) луч претерпевает полное внутреннее отражение).



а *б*

В кварцевой пластинке наблюдается вращение плоскости поляризации необыкновенного луча на угол

$$\varphi = \alpha d = 30°.$$

Электрический вектор $\vec{E}_e$ луча, падающего на ни́коль N_2, после прохождения пластинки (рис. *б*) составляет с его направлением пропускания угол

$$\beta = 90° - \varphi = 60°.$$

Согласно закону Малюса, интенсивность прошедшего через ни́коль N_2 света

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \beta.$$

Следовательно,

$$\frac{I_0}{I} = \frac{2}{\cos^2 \beta}.$$

Ответ: $\dfrac{I_0}{I} = 8.$

Задачи для самостоятельного решения

5.161. Отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной равно 3. Определите степень поляризации P частично поляризованного света. [$P = 0{,}5$]

5.162. Анализатор в $n = 4$ раза уменьшает интенсивность света, прошедшего через него от поляризатора. Пренебрегая потерями света, определите угол α между главными плоскостями поляризатора и анализатора. [$\alpha = 60°$]

5.163. Определите угол α между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность света, вышедшего из анализатора, в два раза меньше интенсивности света, прошедшего через поляризатор. [$\alpha = 45°$]

5.164. Определите степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, причем интенсивность поляризованного света в 4 раза больше интенсивности естественного. [$P = 0{,}8$]

5.165. На пути естественного света поставлены поляризатор и анализатор (ни́коли), угол α между главными плоскостями которых составляет 60°. Определите, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через систему, если потери на поглощение и отражение в каждом ни́коле составляют 10 %. [В 12,5 раза]

5.166. Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых равен α. После прохождения света через эту систему он падает на зеркало и, отразившись, проходит вновь через нее. Пренебрегая поглощением света, определите интенсивность I света после его обратного прохождения. [$I = \dfrac{1}{2} I_0 \cos^4 \alpha$]

5.167. Угол Брюстера $i_Б$ при падении света из воздуха в стекло составляет 57,5°. Определите скорость распространения света в стекле. [$v = 191$ Мм/с]

5.168. Определите угол преломления, если при отражении света от стекла с показателем преломления $n = 1{,}73$ отраженный луч оказался полностью поляризованным. [$\alpha = 30°$]

5.169. Предельный угол полного отражения для пучка света на границе некоторого вещества с воздухом равен 45°. Определите угол Брюстера при падении света из воздуха на поверхность этого вещества. [$i_Б = 54°44'$]

5.170. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 656$ нм, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно его оптической оси. Принимая показатели преломления в исландском шпате для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1{,}655$ и $n_e = 1{,}485$, определите длины волн этих лучей в исландском шпате. [$\lambda_o = 396$ нм; $\lambda_e = 442$ нм]

5.171. Определите разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, если наименьшая толщина кристаллической пластинки в полволны для $\lambda_o = 560$ нм составляет 28 мкм. [0,01]

5.172. Минимальная толщина $d_{\min}$ пластинки слюды, вырезанной параллельно оптической оси, при которой падающий на нее нормально плоскополяризованный свет выходит циркулярно поляризованным, равна 29,5 мкм. Определите длину световой волны, если показатели преломления в слюде для лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, равны $n_1 = 1{,}594$ и $n_2 = 1{,}589$. [$\lambda = 4(n_1 - n_2)d_{\min} = 590$ нм]

5.173. Плоскополяризованный свет падает нормально на кристаллическую пластинку из исландского шпата в целую длину волны. Докажите, что после прохождения этой пластинки свет остается плоскополяризованным без изменения направления колебаний.

5.174. Определите удельное вращение для кварца, если кварцевая пластинка толщиной 6 мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси и помещенная между ни́колями (поляризатором и анализатором) с параллельными главными плоскостями, полностью затемняет поле зрения. [$\alpha = 15$ град/мм]

5.175. Массовая концентрация C_1 раствора сахара, налитого в стеклянную трубку, равна 0,3 г/см^3. Этот раствор вращает плоскость поляризации монохроматического света на угол $\varphi_1 = 25°$. Определите массовую концентрацию C_2 раствора сахара в другой такой же стеклянной трубке, если он вращает плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 20°$. [$C_2 = \dfrac{\varphi_2 C_1}{\varphi_1} = 0{,}24$ г/см^3]

5.6. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

Основные законы и формулы

• Энергия кванта (фотона)

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

[h — постоянная Планка; ν — частота; c — скорость распространения света в вакууме; λ — длина волны].

• Закон Кирхгофа

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}$$

[$R_{\nu,T}$ — спектральная плотность энергетической светимости тела; $A_{\nu,T}$ — спектральная поглощательная способность тела; $r_{\nu,T}$ — спектральная плотность энергетической светимости черного тела].

• Энергетическая светимость черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T}\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\,\mathrm{d}\lambda$$

[$r_{\nu,T}\,(r_{\lambda,T})$ — спектральная плотность энергетической светимости черного тела как функция частоты ν и длины волны λ].

• Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4$$

[R_e — энергетическая светимость черного тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — термодинамическая температура].

• Энергетическая светимость серого тела

$$R_T^c = A_T R_e = A_T \sigma T^4$$

[A_T — поглощательная способность серого тела; R_e — энергетическая светимость черного тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — термодинамическая температура].

• Закон смещения Ви́на

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

[$\lambda_{\max}$ — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела; b — постоянная Ви́на; T — термодинамическая температура].

• Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = CT^5$$

[$C = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м$^3 \cdot$ К^5)].

• Формула Рэлея — Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$$

[kT — средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν (k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура); c — скорость распространения света в вакууме].

• Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}, \qquad r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}$$

[$r_{\nu,T}$, $r_{\lambda,T}$ — спектральные плотности энергетической светимости черного тела соответственно как функция частоты ν и длины волны λ].

• Радиационная температура тела

$$T_{\text{р}} = \sqrt[4]{\frac{R_T}{\sigma}}$$

[R_T — энергетическая светимость тела; σ — постоянная Стефана—Больцмана].

• Радиационная температура серого тела

$$T_{\text{р}} = T\sqrt[4]{A_T}$$

[T — истинная температура; A_T — поглощательная способность серого тела].

• Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2} \quad \text{или} \quad h\nu = h\nu_0 + eU_0$$

[ν — частота падающего фотона; h — постоянная Планка; A — работа выхода электрона из металла; $\frac{mv_{\max}^2}{2}$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона; U_0 — задерживающее напряжение; ν_0 — красная граница фотоэффекта].

• Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A}, \quad \nu_0 = \frac{A}{h}$$

[λ_0 — максимальная длина волны излучения (ν_0 — соответственно минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен; A — работа выхода электрона из металла].

• Импульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

[$h\nu$ — энергия фотона].

• Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho)$$

[$E_e = Nh\nu$ — облученность поверхности; ρ — коэффициент отражения; w — объемная плотность энергии излучения].

• Изменение длины волны излучения при комптоновском рассеянии (*комптоновский сдвиг*)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\vartheta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = 2\lambda_C\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

[λ и λ' — длина волн падающего и рассеянного излучения; m — масса электрона; ϑ — угол рассеяния; $\lambda_C = \frac{h}{mc}$ — комптоновская длина волны ($\lambda_C = 2{,}43$ пм)].

Примеры решения задач

5.176. Металлическая поверхность площадью $S = 10$ см^2, нагретая до температуры $T = 2{,}5$ кК, излучает в одну минуту 60 кДж. Определите: 1) энергию, излучаемую этой поверхностью, считая ее черной; 2) отношение энергетических светимостей этой поверхности и черного тела при данной температуре.

Дано: $S = 10$ см^2 (10^{-3} м^2); $T = 2{,}5$ кК ($2{,}5 \cdot 10^3$ К); $\Delta t = 1$ мин (60 с); $W = 60$ кДж ($6 \cdot 10^4$ Дж).

Найти: 1) W_e; 2) $\dfrac{R}{R_e}$.

Решение. Энергия, излучаемая телом,

$$W = \Phi \Delta t, \tag{1}$$

где в случае черного тела (условие задачи) излучаемый поток энергии

$$\Phi = R_e S, \tag{2}$$

причем энергетическая светимость черного тела определяется законом Стефана—Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4 \tag{3}$$

(σ — постоянная Стефана—Больцмана).

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую энергию, излучаемую черным телом,

$$W_e = \sigma T^4 S \Delta t.$$

Из формул (1) и (2) следует, что

$$R_e = \frac{W_e}{S \Delta t},$$

т. е. искомое отношение энергетических светимостей поверхности и черного тела

$$\frac{R}{R_e} = \frac{W}{W_e}.$$

Ответ: 1) $W_e = 133$ кДж; 2) $\dfrac{R}{R_e} = 0{,}451$.

5.177. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии диаметром 6 см равна 650 °С. Принимая, что отверстие печи излучает как черное тело, определите, какая доля мощности рассеивается стенками, если мощность, потребляемая печью, составляет 600 Вт.

Дано: $d = 6$ см ($6 \cdot 10^{-2}$ м); $t = 650$ °С ($T = 923$ К); $P = 600$ Вт.

Найти: η.

Решение. В случае установившегося теплового режима печи доля потребляемой мощности, рассеиваемая стенками,

$$\eta = \frac{P - \Phi}{P} = 1 - \frac{\Phi}{P}, \tag{1}$$

где Φ — поток излучения, испускаемый отверстием.

Поток излучения

$$\Phi = R_e S, \qquad (2)$$

где R_e — энергетическая светимость черного тела; $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ — площадь отверстия.

Согласно закону Стефана — Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (3)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую долю мощности, рассеиваемой стенками:

$$\eta = 1 - \frac{\pi d^2}{4} \frac{\sigma T^4}{P}.$$

Ответ: $\eta = 0{,}806$.

5.178. Максимум спектральной плотности энергетической светимости Солнца приходится на длину волны $\lambda = 0{,}48$ мкм. Считая, что Солнце излучает как черное тело, определите: 1) температуру его поверхности; 2) мощность, излучаемую его поверхностью.

Дано: $\lambda = 0{,}48$ мкм ($4{,}8 \cdot 10^{-7}$ м); $r = 6{,}95 \cdot 10^8$ м.

Найти: 1) T; 2) P.

Решение. Согласно закону смещения Ви́на, искомая температура поверхности Солнца

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}},$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м $\cdot$ К — постоянная Ви́на.

Мощность, излучаемая поверхностью Солнца,

$$P = R_e S, \qquad (1)$$

где R_e — энергетическая светимость черного тела (Солнца); $S = 4\pi r^2$ — площадь поверхности Солнца.

Энергетическая светимость черного тела по закону Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

Подставив записанные выражения в формулу (1), найдем искомую мощность, излучаемую поверхностью Солнца:

$$P = 4\pi\sigma T^4 r^2.$$

Ответ: 1) $T = 6{,}04$ кК; 2) $P = 4{,}58 \cdot 10^{26}$ Вт.

5.179. Черное тело находится при температуре 1,5 кК. При остывании этого тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на 5 мкм. Определите температуру, до которой тело охладилось.

Дано: $T_1 = 1{,}5$ кК (1500 К); $\Delta\lambda = 5$ мкм ($5 \cdot 10^{-6}$ м).

Найти: T_2.

Решение. Длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела, согласно закону смещения Ви́на, обратно пропорциональна его термодинамической температуре:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \tag{1}$$

где b — постоянная Ви́на. Следовательно, с остыванием тела $\lambda_{\max}$ смещается в сторону более длинных волн. Тогда

$$\Delta\lambda = \lambda_{2\max} - \lambda_{1\max}. \tag{2}$$

Учитывая формулу (1), выражение (2) представляется в виде

$$\Delta\lambda = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1},$$

откуда искомая температура

$$T_2 = \frac{bT_1}{T_1\Delta\lambda + b}.$$

Ответ: $T_2 = 418$ К.

5.180. В результате охлаждения черного тела длина волны, отвечающая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{1\max} = 0{,}8$ мкм до $\lambda_{2\max} = 2{,}4$ мкм. Определите, во сколько раз изменилась: 1) энергетическая светимость тела; 2) максимальная спектральная плотность энергетической светимости.

Дано: $\lambda_{1\max} = 0{,}8$ мкм $(0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м); $\lambda_{2\max} = 2{,}4$ мкм $(2{,}4 \cdot 10^{-6}$ м).

Найти: 1) $\dfrac{R_{2e}}{R_{1e}}$; 2) $\dfrac{(r_{\lambda_2,T_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1,T_1})_{\max}}$.

Решение. Энергетическая светимость черного тела, согласно закону Стефана — Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4, \tag{1}$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — термодинамическая температура.

Согласно закону смещения Ви́на,

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \tag{2}$$

где b — постоянная Ви́на. Тогда

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{1\max}} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{b}{\lambda_{2\max}}. \tag{3}$$

Искомое отношение энергетических светимостей с учетом формул (1) и (3) запишется в виде:

$$\frac{R_{2e}}{R_{1e}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{\lambda_{1\max}}{\lambda_{2\max}}\right)^4.$$

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = CT^5,$$

где постоянная $C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м$^3 \cdot$ К^5). Тогда искомое отношение максимальных спектральных плотностей энергетической светимости с учетом закона смещения Ви́на (2)

$$\frac{(r_{\lambda_2,T_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1,T_1})_{\max}} = \left(\frac{\lambda_{1\max}}{\lambda_{2\max}}\right)^5.$$

Вычисляя, получаем

$$\frac{R_{2e}}{R_{1e}} = \frac{1}{81}; \quad \frac{(r_{\lambda_2,T_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1,T_1})_{\max}} = \frac{1}{243}.$$

Ответ: 1) уменьшается в 81 раз; 2) уменьшается в 243 раза.

5.181. Определите количество теплоты, теряемой 50 см^2 поверхности расплавленной платины за 1 мин, если поглощательная способность платины $A_T = 0{,}8$. Температура t плавления платины равна 1770 °С.

Дано: $S = 50$ см^2 ($5 \cdot 10^{-3}$ м^2); $t = 1$ мин (60 с); $t = 1770$ °С ($T = 2043$ К); $A_T = 0{,}8$.

Найти: Q.

Решение. Количество теплоты, теряемое платиной, равно энергии, излучаемой ее раскаленной поверхностью:

$$Q = W = A_T R_e S t, \tag{1}$$

где R_e — энергетическая светимость черного тела; S — поверхность излучения; t — время.

Согласно закону Стефана — Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4, \tag{2}$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) — постоянная Стефана — Больцмана. Подставив (2) в (1), найдем искомое количество теплоты, теряемое расплавленной платиной:

$$Q = A_T \sigma T^4 S t.$$

Ответ: $Q = 237$ кДж.

5.182. Преобразуйте формулу Планка, выражающую спектральную плотность энергетической светимости черного тела в переменной ν, перейдя к переменной λ.

Решение. Спектральная плотность энергетической светимости, выражаемая формулой Планка, в переменных ν и T имеет вид

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{1}$$

где h — постоянная Планка; ν — частота; c — скорость распространения света в вакууме; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

Связь $r_{\nu,T}$ и $r_{\lambda,T}$ задается формулой

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}. \qquad (2)$$

Перейдя от формулы (1) к формуле (2) и учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, после элементарных преобразований найдем искомую формулу Планка в переменных λ и T:

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}.$$

5.183. Используя формулу Планка $r_{\nu,T} = \dfrac{2\pi h\nu^3}{c^2} \dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$, докажите, что при $h\nu \ll kT$ она совпадает с формулой Рэлея — Джинса.

Решение. Если энергия кванта много меньше энергии теплового движения ($h\nu \ll kT$), то можем разложить экспоненциальную функцию в ряд, ограничившись двумя первыми членами,

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}, \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

найдем, что

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\dfrac{h\nu}{kT}} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

т. е. получили формулу Рэлея — Джинса.

5.184. Используя формулу Планка $r_{\nu,T} = \dfrac{2\pi h\nu^3}{c^2} \dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$, выведите из нее закон Стефана — Больцмана.

Решение. Энергетическая светимость черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T} \, d\nu, \qquad (1)$$

где $r_{\nu,T}$ — спектральная плотность энергетической светимости черного тела. С другой стороны, согласно закону Стефана — Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (2)$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — термодинамическая температура.

Подставив в формулу (1) $r_{\nu,T}$ из заданной в задаче формулы Планка, получим

$$R_e = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu. \tag{3}$$

Введем безразмерную переменную $x = \dfrac{h\nu}{kT}$; $dx = \dfrac{h d\nu}{kT}$; $d\nu = \dfrac{kT}{h} dx$. Тогда формула (3) преобразуется к виду

$$R_e = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4,$$

$$\sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}, \text{ так как } \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Подстановка числовых значений k, c и h дает для постоянной Стефана — Больцмана значение, хорошо согласующееся с экспериментальными данными.

Таким образом, из формулы Планка получили закон Стефана — Больцмана (2).

5.185. Используя формулу Планка $r_{\nu,T} = \dfrac{2\pi h\nu^3}{c^2} \dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$, выведите из нее закон смещения Ви́на.

Решение. Закон смещения Ви́на:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

где $\lambda_{\max}$ — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела; b — постоянная Ви́на; T — термодинамическая температура.

Перейдем от формулы Планка в переменных ν и T, заданной в задаче, к формуле Планка в переменных λ и T (см. решение задачи 5.182):

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1},$$

откуда

$$\frac{\partial r_{\lambda,T}}{\partial \lambda} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^6 \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)} \left(\frac{\frac{hc}{kT\lambda} e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} - 5 \right).$$

Значение $\lambda_{\max}$, при котором функция достигает максимума, найдем, приравняв эту производную нулю.

Введя безразмерную переменную $x = \dfrac{hc}{kT\lambda_{\max}}$, получим уравнение

$$x e^x - 5(e^x - 1) = 0.$$

Решение этого трансцендентного уравнения методом последовательных приближений дает $x = 4{,}965$. Тогда

$$T\lambda_{\max} = \frac{hc}{4,965k} = b,$$

где b — постоянная Ви́на.

Таким образом, из формулы Планка получили закон смещения Ви́на.

5.186. Используя формулу Планка, определите энергетическую светимость ΔR_e черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм, соответствующий максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если температура черного тела $T = 3{,}2$ кК.

Дано: $\Delta\lambda = 1$ нм (10^{-9} м); $T = 3{,}2$ кК (3200 К).

Найти: ΔR_e.

Решение. Энергетическая светимость черного тела, приходящаяся на узкий интервал длин волн, соответствующий максимуму спектральной плотности энергетической светимости,

$$\Delta R_e = (r_{\lambda,T})_{\max}\Delta\lambda, \tag{1}$$

где $(r_{\lambda,T})_{\max}$ — максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости черного тела при данной температуре. Согласно формуле Планка, спектральная плотность энергетической светимости черного тела

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}. \tag{2}$$

Величине $(r_{\lambda,T})_{\max}$ соответствует длина волны $\lambda_{\max}$, определяемая законом Ви́на:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

где b — постоянная Ви́на. Подставив значение $\lambda_{\max}$ в формулу (2), получим

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = \frac{2\pi hc^2T^5}{b^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{bk}} - 1}. \tag{3}$$

Из формул (1) и (3) найдем искомую величину

$$\Delta R_e = \frac{2\pi hc^2T^5}{b^5}\frac{\Delta\lambda}{e^{\frac{hc}{bk}} - 1}.$$

Ответ: $\Delta R_e = 4{,}29$ кВт/м^2.

5.187. Выведите связь между истинной T и радиационной $T_{\text{р}}$ температурами, если известна поглощательная способность A_T серого тела.

Дано: A_T.

Найти: $T = f(T_{\text{р}})$.

Решение. В случае серого тела энергетическая светимость

$$R_T^{\text{с}} = A_T R_e = A_T\sigma T^4, \tag{1}$$

где $R_e = \sigma T^4$ — энергетическая светимость черного тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — истинная температура; A_T — поглощательная способность серого тела.

С другой стороны,

$$R_T^{\text{с}} = \sigma T_{\text{р}}^4, \qquad (2)$$

где $T_{\text{р}}$ — радиационная температура.

Приравняв выражения (1) и (2), запишем

$$A_T \sigma T^4 = \sigma T_{\text{р}}^4,$$

откуда искомая связь между истинной и радиационной температурами

$$T = \frac{T_{\text{р}}}{\sqrt[4]{A_T}}.$$

Ответ: $T = \dfrac{T_{\text{р}}}{\sqrt[4]{A_T}}$.

5.188. Определите температуру, при которой средняя энергия молекул трехатомного газа равна энергии фотонов, соответствующих излучению с $\lambda = 500$ нм.

Дано: $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м); $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon$.

Найти: T.

Решение. Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \qquad (1)$$

где i — число степеней свободы; k — постоянная Больцмана. Для трехатомного газа $i = 6$.

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \qquad (2)$$

Приравняв, согласно условию задачи, (1) и (2),

$$\frac{i}{2} kT = \frac{hc}{\lambda},$$

получим искомую температуру

$$T = \frac{2hc}{ik\lambda}.$$

Ответ: $T = 9{,}61$ кК.

5.189. Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия T равнялась энергии ε фотона с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм.

Дано: $T = \varepsilon$; $\lambda = 0{,}55$ мкм ($0{,}55 \cdot 10^{-6}$ м).

Найти: v.

Решение. Энергия фотона

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

Чтобы определить, является ли электрон частицей классической или релятивистской, следует энергию фотона (по условию задачи кинетическая энергия электрона равна энергии фотона) сравнить с энергией покоя электрона

$$E_0 = mc^2, \tag{2}$$

где $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона. Поделив (1) на (2), получим

$$\frac{\varepsilon}{E_0} = \frac{h}{m\lambda c} = 4{,}41 \cdot 10^{-6},$$

т. е. $\varepsilon \ll E_0$. Следовательно, кинетическая энергия электрона определяется по классической формуле:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{3}$$

Приравняв, согласно условию задачи, выражения (3) и (2), найдем искомую скорость электрона

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda}}.$$

Ответ: $v = 891$ км/с.

5.190. Определите, с какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия T была равна энергии ε фотона с длиной волны $\lambda = 1$ пм.

Дано: $T = \varepsilon$; $\lambda = 1$ пм (10^{-12} м).

Найти: v.

Решение. Чтобы определить, является ли электрон частицей классической или релятивистской, следует энергию фотона (по условию задачи кинетическая энергия электрона равна энергии фотона) сравнить с энергией покоя электрона.

Энергия фотона

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \tag{1}$$

где h — постоянная Планка; c — скорость распространения света в вакууме. Энергия покоя электрона

$$E_0 = mc^2, \tag{2}$$

где m — масса электрона.

Поделив (1) на (2), получим

$$\frac{\varepsilon}{E_0} = \frac{h}{m\lambda c} = 2{,}43,$$

т. е. $\varepsilon > E_0$, и электрон является релятивистской частицей. Следовательно, кинетическая энергия электрона определяется релятивистской формулой:

$$T = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{3}$$

Приравняем, согласно условию задачи, выражения (1) и (3):

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right)=\frac{hc}{\lambda},$$

найдем искомую скорость

$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\dfrac{h}{mc\lambda}+1\right)^2}}.$$

Ответ: $v = 2{,}87 \cdot 10^8$ м/с.

5.191. Определите длину волны λ фотона, импульс p которого в два раза меньше импульса p_e электрона, движущегося со скоростью 0,1 Мм/с.

Дано: $p = \dfrac{p_e}{2}$; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $v = 0{,}1$ Мм/с (10^5 м/с).

Найти: λ.

Решение. Импульс фотона

$$p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}, \tag{1}$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка.

Импульс электрона

$$p_e = m_e v, \tag{2}$$

где m_e — масса электрона.

Согласно условию задачи,

$$p=\frac{p_e}{2}. \tag{3}$$

Подставив выражения (1) и (2) в формулу (3), найдем

$$\frac{h}{\lambda}=\frac{m_e v}{2},$$

откуда искомая длина волны фотона

$$\lambda=\frac{2h}{m_e v}.$$

Ответ: $\lambda = 14{,}5$ нм.

5.192. Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 10$ В.

Дано: $p = p_e$; $U = 10$ В.

Найти: λ.

Решение. Импульс фотона

$$p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия электрона $T = \dfrac{p_e^2}{2m_e} = eU$, откуда импульс электрона

$$p_e = \sqrt{2m_e eU}, \tag{2}$$

где m_e — масса электрона; e — заряд электрона.

Приравняв, согласно условию задачи, (1) и (2), получим искомую длину волны фотона:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}}.$$

Ответ: $\lambda = 388$ пм.

5.193. Фотоэлектроны, вырываемые с поверхности металла, полностью задерживаются при приложении задерживающего напряжения $U_0 = 1{,}7$ В. Фотоэффект для этого металла начинается при частоте падающего монохроматического света $5{,}55 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. Определите: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) частоту применяемого облучения.

Дано: $U_0 = 1{,}7$ В; $\nu_0 = 5{,}55 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

Найти: 1) A; 2) ν.

Решение. Поскольку, согласно условию задачи, фотоэффект начинается при ν_0 (ν_0 — красная граница фотоэффекта), работа выхода электронов

$$A = h\nu_0, \tag{1}$$

где h — постоянная Планка.

Записав уравнение Эйнштейна

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2} \tag{2}$$

(m — масса электрона; $v_{\max}$ — максимальная скорость фотоэлектрона) и учитывая, что

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0$$

(e — заряд электрона; U_0 — задерживающее напряжение), уравнение (2) можно записать в виде

$$h\nu = A + eU_0,$$

откуда искомая частота применяемого облучения

$$\nu = \frac{A + eU_0}{h}.$$

Ответ: 1) $A = 3{,}68 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 2{,}3$ эВ; 2) $\nu = 9{,}65 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

5.194. Натрий освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 40$ нм. Определите наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. «Красная граница» фотоэффекта для натрия $\lambda_0 = 584$ нм.

Дано: $\lambda = 40$ нм ($4 \cdot 10^{-8}$ м); $\lambda_0 = 584$ нм ($5{,}84 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: U_0.

Решение. Задерживающее напряжение можно определить из выражения

$$eU_0 = \frac{mv_{\max}^2}{2} \tag{1}$$

($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона), кинетическую энергию электрона — из уравнения Эйнштейна

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}, \tag{2}$$

где работа выхода

$$A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), получим

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{hc(\lambda_0 - \lambda)}{\lambda_0\lambda}. \tag{4}$$

Подставив (4) в (1), найдем искомое задерживающее напряжение

$$U_0 = \frac{hc(\lambda_0 - \lambda)}{e\lambda\lambda_0}.$$

Ответ: $U_0 = 28{,}9$ В.

5.195. Некоторый металл, работа выхода электронов из которого составляет 4 эВ, освещается монохроматическим светом с длиной волны 220 нм. Определите, какое напряжение следует приложить, чтобы фотоэффект прекратился.

Дано: $A = 4$ эВ ($4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж); $\lambda = 220$ нм ($2{,}2 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: U_0.

Решение. Задерживающее напряжение можно найти из условия

$$eU_0 = \frac{mv_{\max}^2}{2}, \tag{1}$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона.

Согласно уравнению Эйнштейна,

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}. \tag{2}$$

Подставив (1) в выражение (2) и учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме), получаем

$$\frac{hc}{\lambda} = A + eU_0,$$

откуда искомое задерживающее напряжение

$$U_0 = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right).$$

Ответ: $U_0 = 1{,}65$ В.

5.196. Цезий освещается монохроматическим светом с длиной волны 500 нм. Определите максимальную скорость фотоэлектронов, зная, что красная граница для цезия 658 нм.

Дано: $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м); $\lambda_{\max} = 658$ нм ($6{,}58 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: $v_{\max}$.

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна,

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}. \tag{1}$$

Работа выхода электронов из металла

$$A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_{\max}}, \tag{2}$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

Подставив (2) в (1) и учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, получаем

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

откуда искомая максимальная скорость фотоэлектронов

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\max}}\right)}$$

($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона).

Ответ: $v_{\max} = 458$ км/с.

5.197. На поверхность металла падает излучение с длиной волны 280 нм. При некотором задерживающем напряжении фототок прекращается. При изменении длины волны излучения на 20 нм задерживающий потенциал пришлось увеличить на 0,34 В. Определите заряд электрона, считая постоянную Планка и скорость света известными.

Дано: $\lambda = 280$ нм ($2{,}8 \cdot 10^{-7}$ м); $\Delta\lambda = 20$ нм ($0{,}2 \cdot 10^{-7}$ м); $\Delta U_0 = 0{,}34$ В; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: e.

Решение. Поскольку при изменении длины волны падающего излучения, вызывающего фототок, задерживающий потенциал пришлось увеличить, длина волны уменьшилась. Уравнение Эйнштейна соответственно для двух длин волн:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + eU_0 \quad \text{и} \quad \frac{hc}{\lambda - \Delta\lambda} = A + e(U_0 + \Delta U_0).$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$hc\left(\frac{1}{\lambda - \Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) = e\Delta U_0,$$

откуда искомый заряд электрона

$$e = \frac{hc}{\Delta U_0}\left(\frac{1}{\lambda - \Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{hc}{\Delta U_0}\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda - \Delta\lambda)}.$$

Ответ: $e = 1{,}61 \cdot 10^{-19}$ Кл.

5.198. При облучении некоторого металла монохроматическим электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 248$ нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении U_1. Увеличив длину волны излучения в 1,25 раза, задерживающее напряжение оказалось меньше на 1 В. Определите по данным эксперимента постоянную Планка.

Дано: $\lambda_1 = 248$ нм ($2{,}48 \cdot 10^{-7}$ м); $\lambda_2 = 1{,}25\lambda_1$; $\Delta U = U_1 - U_2 = 1$ В.

Найти: h.

Решение. Запишем в соответствии с уравнением Эйнштейна и условием задачи два уравнения:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_1; \quad \frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_2.$$

Вычитая из первого уравнения второе и учитывая, что $\Delta U = U_1 - U_2$ и $\lambda_2 = 1{,}25\lambda_1$, получим

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{1{,}25\lambda_1}\right) = e\,\Delta U,$$

откуда искомое значение постоянной Планка

$$h = \frac{5e\lambda_1\,\Delta U}{c}.$$

Ответ: $h = 6{,}61 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с.

5.199. Определите, во сколько раз максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка (работа выхода 4,0 эВ) монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 220$ нм, превосходит среднюю энергию теплового движения электронов при температуре 27° С.

Дано: $A = 4{,}0$ эВ ($4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж); $\lambda = 220$ нм ($2{,}2 \cdot 10^{-7}$ м); $t = 27°$ С ($T = 300$ К).

Найти: $\dfrac{T_{\max}}{\langle\varepsilon\rangle}$.

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна,

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, получаем

$$T_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Средняя энергия теплового движения электронов

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура. Тогда

$$\frac{T_{\max}}{\langle\varepsilon\rangle} = \frac{\dfrac{hc}{\lambda} - A}{\dfrac{3}{2}kT} = \frac{2\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right)}{3kT}.$$

[$\dfrac{T_{\max}}{\langle\varepsilon\rangle} = 42{,}5$, т. е. максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов в 42,5 раза больше, чем средняя энергия теплового движения электронов.]

Ответ: $\dfrac{T_{\max}}{\langle\varepsilon\rangle} = 42{,}5$.

5.200. Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}3$, расположенную перпендикулярно падающему свету, равно 0,2 мкПа. Определите число фотонов, падающих ежесекундно на единицу площади этой поверхности.

Дано: $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м); $\rho = 0{,}3$; $p = 0{,}2$ мкПа ($0{,}2 \cdot 10^{-6}$ Па).

Найти: N.

Решение. Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho),$$

где E_e — облученность поверхности, т. е. энергия всех фотонов, падающих в единицу времени на единицу поверхности; $E_e = Nh\nu$. Так как $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, имеем

$$p = Nh\frac{1+\rho}{\lambda},$$

откуда искомое число фотонов, падающих ежесекундно на единицу площади поверхности,

$$N = \frac{p\lambda}{(1+\rho)h}.$$

Ответ: $N = 1{,}16 \cdot 10^{20}$ м$^{-2}$с$^{-1}$.

5.201. На идеально отражающую плоскую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. Поток излучения Φ_e составляет 0,45 Вт. Определите: 1) силу давления, испытываемую этой поверхностью; 2) число фотонов N, ежесекундно падающих на поверхность.

Дано: $\rho = 1$; $\lambda = 0{,}55$ мкм ($5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м); $\Phi_e = 0{,}45$ Вт.

Найти: 1) F; 2) N.

Решение. Сила светового давления на поверхность площадью S

$$F = pS, \tag{1}$$

где световое давление

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = \frac{\Phi_e}{cS}(1+\rho) \tag{2}$$

(E_e — облученность поверхности; $\Phi_e = E_e S$ — поток излучения).

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомую силу давления

$$F = \frac{\Phi_e(1+\rho)}{c}.$$

Поток излучения (мощность излучения)

$$\Phi_e = N\varepsilon = Nh\nu = \frac{Nhc}{\lambda}, \qquad (3)$$

где N — число фотонов, ежесекундно падающих на поверхность; $\varepsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ — энергия фотона. Искомое число фотонов, согласно формуле (3),

$$N = \frac{\Phi_e \lambda}{hc}.$$

Ответ: 1) $F = 3$ нН; 2) $N = 1{,}24 \cdot 10^{18}$ с$^{-1}$.

5.202. Параллельный пучок монохроматического света длиной волны $\lambda = 550$ нм падает нормально на идеально отражающую поверхность, производя давление $p = 10$ мкПа. Определите: 1) концентрацию n фотонов в световом пучке; 2) число N фотонов, падающих на поверхность площадью $S = 40$ см^2 за время $t = 5$ с.

Дано: $\lambda = 550$ нм ($5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м); $\rho = 1$; $p = 10$ мкПа (10^{-5} Па); $S = 40$ см^2 ($4 \cdot 10^{-3}$ м^2); $t = 5$ с.

Найти: 1) n; 2) N.

Решение. Концентрация фотонов в световом пучке

$$n = \frac{w}{\varepsilon}, \qquad (1)$$

где w — объемная плотность энергии; $\varepsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ — энергия одного фотона.

Из формулы для давления света

$$p = w(1+\rho)$$

найдем

$$w = \frac{p}{1+\rho}.$$

Подставив w и ε в формулу (1), получим искомую концентрацию фотонов в световом пучке:

$$n = \frac{\lambda p}{(1+\rho)hc}.$$

Согласно формуле для давления света,

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho), \qquad (2)$$

где E_e — облученность поверхности, т. е. энергия всех фотонов, падающих на единицу площади в единицу времени. Энергия света, падающего на поверхность площадью S за время t,

$$W = E_e St = \frac{pcSt}{(1+\rho)} \tag{3}$$

[учли формулу (2)]. С другой стороны,

$$W = \varepsilon N = \frac{hc}{\lambda} N, \tag{4}$$

где N — число фотонов.

Приравняв выражения (3) и (4),

$$\frac{pcSt}{(1+\rho)} = \frac{hc}{\lambda} N,$$

найдем искомое число фотонов

$$N = \frac{pSt\lambda}{h(1+\rho)}.$$

Ответ: 1) $n = 1{,}38 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$; 2) $N = 8{,}3 \cdot 10^{19}$.

5.203. Сколько фотонов испускает электрическая лампочка мощностью $P = 25$ Вт за время $t = 1$ с, если предположить, что она излучает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм, а также, что вся потребляемая мощность идет на излучение?

Дано: $P = 25$ Вт; $t = 1$ с; $\lambda = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: N.

Решение. Энергия, потребляемая электрической лампочкой,

$$W = Pt. \tag{1}$$

Энергия N фотонов

$$W = Nh\nu. \tag{2}$$

Приравняв, согласно закону сохранения и превращения энергии, выражения (1) и (2) и учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, получаем

$$Pt = \frac{Nhc}{\lambda},$$

откуда искомое число фотонов

$$N = \frac{Pt\lambda}{hc}.$$

Ответ: $N = 7{,}54 \cdot 10^{19}$.

5.204. Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}3$, расположенную перпендикулярно падающему свету, равно 0,2 мкПа. Определите число фотонов, поглощаемых ежесекундно 1 м^2 этой поверхности.

Дано: $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м); $\rho = 0{,}3$; $p = 0{,}2$ мкПа ($2 \cdot 10^{-7}$ Па); $t = 1$ с; $S = 1$ м^2.

Найти: N.

Решение. Давление, производимое светом при его нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho),$$

где $E_e = N'h\nu$ — облученность поверхности (энергия всех фотонов, падающих на 1 м^2 поверхности за 1 с).

Так как $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, имеем

$$p = \frac{N'h}{\lambda}(1 + \rho),$$

откуда число фотонов, падающих на 1 м^2 поверхности за 1 с,

$$N' = \frac{p\lambda}{(1+\rho)h}. \qquad (1)$$

Исходя из определения коэффициента отражения, получим, что искомое число фотонов, поглощаемых ежесекундно 1 м^2 поверхности,

$$N = (1 - \rho)N'. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем

$$N = \frac{p\lambda}{h}\frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Ответ: $N = 8{,}12 \cdot 10^{19}$.

5.205. Определите энергию электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон ($\lambda = 100$ пм) был рассеян на угол $\vartheta = 180°$.

Дано: $\lambda = 100$ пм (10^{-10} м); $\vartheta = 180°$.

Найти: W.

Решение. Энергия электрона отдачи равна разности энергий падающего и рассеянного фотонов:

$$W = \varepsilon - \varepsilon' = h\nu - h\nu' = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda\lambda'}, \qquad (1)$$

где $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ — изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроне:

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \qquad (2)$$

где $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка.

Подставив (2) в (1) и учитывая, что $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, найдем искомую энергию электрона отдачи

$$W = \frac{2h^2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}{m\lambda\left(\lambda + \dfrac{2h}{mc}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}\right)}.$$

Ответ: $W = 9{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж (575 эВ).

5.206. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказалось, что длины волн рассеянного под углами $\vartheta_1 = 60°$ и $\vartheta_2 = 120°$ излучения отличаются в $n = 1{,}5$ раза. Определите длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

Дано: $\vartheta_1 = 60°$; $\vartheta_2 = 120°$; $\dfrac{\lambda_2'}{\lambda_1'} = n = 1{,}5$.

Найти: λ.

Решение. Изменение длины волны излучения при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta}{2}, \qquad (1)$$

где λ и λ' — длина волн падающего и рассеянного излучений; $\lambda_C = 2{,}43$ пм — комптоновская длина волны; ϑ — угол рассеяния.

На основании формулы (1) можем записать:

$$\lambda_1' = \lambda + 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta_1}{2};$$

$$\lambda_2' = \lambda + 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta_2}{2}.$$

Поделив второе уравнение на первое и учитывая, что по условию задачи $\dfrac{\lambda_2'}{\lambda_1'} = n$, получим

$$n = \frac{\lambda + 2\lambda_C \sin^2\dfrac{\vartheta_2}{2}}{\lambda + 2\lambda_C \sin^2\dfrac{\vartheta_1}{2}},$$

откуда после элементарных преобразований искомая длина падающего излучения

$$\lambda = \frac{2\lambda_C\left(\sin^2\dfrac{\vartheta_2}{2} - n\sin^2\dfrac{\vartheta_1}{2}\right)}{n-1}.$$

Ответ: $\lambda = 3{,}64$ пм.

5.207. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}23$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 15 %.

Дано: $\varepsilon = 0{,}23$ МэВ; $\Delta\lambda = 0{,}15\lambda$.

Найти: T.

Решение. Кинетическая энергия электрона отдачи, согласно закону сохранения энергии, равна разности между энергией падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:

$$T = \varepsilon - \varepsilon'. \qquad (1)$$

В результате эффекта Комптона длина волны рассеянного излучения увеличивается, поэтому, по условию задачи,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0{,}15\lambda. \qquad (2)$$

Энергии падающего и рассеянного фотонов равны соответственно:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{и} \quad \varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda},$$

откуда $\lambda = \dfrac{hc}{\varepsilon}$; учитывая (2), получаем

$$\varepsilon' = \frac{hc}{1{,}15\lambda} = \frac{hc\varepsilon}{1{,}15hc} = \frac{\varepsilon}{1{,}15}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомую кинетическую энергию электрона отдачи

$$T = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1{,}15}.$$

Ответ: $T = 30$ кэВ.

5.208. В результате эффекта Комптона фотон рассеялся на покоившемся свободном электроне на угол $\theta = 90°$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon' = 216$ кэВ. Определите: 1) энергию фотона до рассеяния; 2) кинетическую энергию T электрона отдачи; 3) угол φ, под которым движется электрон отдачи.

Дано: $\vartheta = 90°$; $\varepsilon' = 216$ кэВ (0,216 МэВ).

Найти: 1) ε; 2) T; 3) φ.

Решение. Для определения энергии фотона до рассеяния рассмотрим формулу Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\vartheta) = \frac{h}{mc}, \tag{1}$$

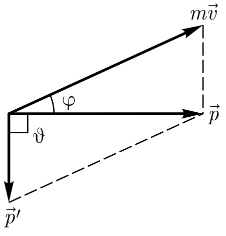
(по условию задачи, $\cos\vartheta = 0$). Выразив длины волн λ и λ' через энергии фотонов ε и ε' и воспользовавшись формулой $\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$, получим

$$\frac{hc}{\varepsilon'} - \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{h}{mc}. \tag{2}$$

Преобразовав формулу (2), найдем искомую энергию фотона до рассеяния

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' mc^2}{mc^2 - \varepsilon'} = \frac{\varepsilon' E_0}{E_0 - \varepsilon'}, \tag{3}$$

где $E_0 = mc^2 = 0{,}512$ МэВ — энергия покоя электрона.



Кинетическая энергия электрона отдачи, согласно закону сохранения энергии, равна разности между энергией ε падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:

$$T = \varepsilon - \varepsilon'.$$

Согласно закону сохранения импульса, импульс $\vec{p}$ падающего фотона равен векторной сумме импульса рассеянного фотона $\vec{p}\,'$ и электрона отдачи $m\vec{v}$ (см. рисунок). На рисунке учтено, что фотон рассеялся на $\vartheta = 90°$. Угол, под которым движется электрон отдачи, можно найти из рисунка: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p'}{p}$. Импульсы и энергии падающего и рассеянного фотонов связаны между собой следующим образом:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} \quad \text{и} \quad p' = \frac{\varepsilon'}{c}.$$

Тогда с учетом формулы (3)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p'}{p} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon'(E_0 - \varepsilon')}{\varepsilon' E_0} = \frac{E_0 - \varepsilon'}{E_0} = 1 - \frac{\varepsilon'}{E_0},$$

откуда искомый угол φ, под которым движется электрон отдачи,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{\varepsilon'}{E_0}\right).$$

Ответ: 1) $\varepsilon = 374$ кэВ; 2) $T = 158$ кэВ; 3) $\varphi = 30°$.

Задачи для самостоятельного решения

5.209. Определите, во сколько раз следует увеличить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость R_e возросла в 81 раз. [В три раза]

5.210. Температура T внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью $S = 40$ см^2 составляет 1000 К. Принимая, что отверстие печи излучает как черное тело, определите, какая часть мощности рассеивается стенками, если потребляемая печью мощность $P = 2$ кВт. [$\eta = 1 - \frac{\sigma T^4 S}{P} = 0{,}887$]

5.211. Определите длину волны $\lambda_{\max}$, соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела, если его энергетическая светимость $R_e = 56{,}7$ кВт/м^2. [$\lambda_{\max} = \frac{b}{\sqrt[4]{R_e/\sigma}} = 2{,}9$ мкм]

5.212. Черное тело нагрели от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 1200$ К. Определите: 1) во сколько раз увеличилась его энергетическая светимость; 2) как изменилась длина волны, отвечающая максимуму спектральной плотности энергетической светимости. [1) Увеличилась в 256 раз; 2) уменьшилась на 7,25 мкм]

5.213. Определите длину волны $\lambda_{\max}$, соответствующую максимальной спектральной плотности энергетической светимости $(r_{\lambda,T})_{\max} = 2{,}6 \cdot 10^{11}$ Вт/м^3. [$\lambda_{\max} = b\sqrt[5]{\frac{C}{(r_{\lambda,T})_{\max}}} = 1{,}6$ мкм]

5.214. Мощность P излучения черного тела составляет 30 кВт. Пренебрегая потерями энергии, определите температуру этого тела, если площадь S его поверхности равна 0,4 см^2. [$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}} = 10{,}7$ кК]

5.215. Используя формулу Планка в переменных λ и T, определите спектральную плотность потока излучения единицы поверхности черного тела, приходящегося на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 5$ нм около максимума спектральной плотности энергетической светимости, если температура черного тела $T = 2500$ К. $\left[(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = \dfrac{2\pi hc^2T^5}{b^5} \dfrac{1}{e^{\frac{hc}{kb}} - 1} \cdot \Delta\lambda = 6{,}26 \text{ кВт/м}^2\right]$

5.216. Для вольфрамовой нити при температуре $T = 1000$ К поглощательная способность $A_T = 0{,}115$. Определите радиационную температуру $T_\text{р}$ нити. $[T_\text{р} = T\sqrt[4]{A_T} = 582 \text{ К}]$

5.217. Определите энергию E и импульс p фотона с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. $[E = 2{,}26 \text{ эВ};\ p = 1{,}2 \cdot 10^{-27} \text{ Н} \cdot \text{с}]$

5.218. Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны 0,1 мкм. $[v = 7{,}28 \text{ км/с}]$

5.219. Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс p_e был равен импульсу p фотона с длиной волны $\lambda = 2$ пм. $\left[v = \dfrac{hc}{\sqrt{m^2\lambda^2c^2 + h^2}} = 2{,}31 \cdot 10^8 \text{ м/с}\right]$

5.220. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, длина волны λ которого равна 200 нм? $\left[U = \dfrac{h^2}{2me\lambda^2} = 37{,}7 \text{ мкВ}\right]$

5.221. Красная граница фотоэффекта для лития составляет 517 нм. Определите минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект. $[E_\text{min} = 2{,}4 \text{ эВ}]$

5.222. Выбиваемые светом при фотоэффекте электроны при облучении фотокатода видимым светом полностью задерживаются обратным напряжением $U_0 = 1{,}2$ В. Специальные измерения показали, что длина волны падающего света $\lambda = 400$ нм. Определите красную границу фотоэффекта. $\left[\lambda_0 = \left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{eU_0}{hc}\right)^{-1} = 651 \text{ нм}\right]$

5.223. Задерживающее напряжение для серебряной пластинки (работа выхода 4,7 эВ) составляет 0,95 В. При тех же условиях для пластинки цинка задерживающее напряжение равно 1,65 В. Определите работу выхода электронов из цинка. $[A = 4 \text{ эВ}]$

5.224. При фотоэффекте с поверхности лития (работа выхода $A = 2{,}3$ эВ) задерживающее напряжение U_0 оказалось равным 1,7 В. Определите: 1) длину волны λ применяемого облучения; 2) максимальную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект. $\left[1)\ \lambda = \dfrac{hc}{A + eU_0} = 311 \text{ нм};\ 2)\ \lambda_0 = 540 \text{ нм}\right]$

5.225. Определите, какая часть энергии фотона израсходована на работу выхода фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 275$ нм и максимальная кинетическая энергия T_max фотоэлектрона равна 0,8 эВ. $\left[\eta = 1 - \dfrac{\lambda T_\text{max}}{hc} = 0{,}823\right]$

5.226. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4{,}3$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4$ эВ. Определите максимальный импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона. $[p_\text{max} = \sqrt{2m(\varepsilon - A)} = 2{,}96 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м/с}]$

5.227. Число фотонов, падающих перпендикулярно за 1 с на 1 м^2 зачерненной поверхности, равно 10^{20}. Определите длину волны монохроматического света, если его давление на поверхность оказалось равным 0,133 мкПа. $[\lambda = 498 \text{ нм}]$

5.228. Давление p монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм на идеально отражающую поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, равно 0,14 мкПа. Определите число фотонов, падающих на поверхность площадью $S = 30$ см^2 за время $t = 1$ с. [$N = \dfrac{p\lambda St}{(1+\rho)h} = 1{,}74 \cdot 10^{17}$]

5.229. На идеально отражающую плоскую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Поток энергии $\Phi_e = 0{,}5$ Вт. Определите: 1) число фотонов N, падающих на поверхность за время $t = 5$ с; 2) силу давления, испытываемую этой поверхностью. [1) $N = \dfrac{\Phi_e \lambda t}{hc} = 6{,}28 \cdot 10^{18}$; 2) $F = \dfrac{\Phi_e}{c}(1+\rho) = 3{,}33$ нН]

5.230. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм нормально падает на зачерненную поверхность, оказывая на нее давление $p = 0{,}2$ мкПа. Определите концентрацию n фотонов в световом пучке. [$n = \dfrac{p\lambda}{(1+\rho)hc} = 6{,}03 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$]

5.231. Давление p монохроматического света на идеально отражающую зеркальную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,2 мкПа. Определите площадь S поверхности, если на нее за время $t = 1$ мин падает световая энергия $W = 72$ Дж. [$S = \dfrac{(1+\rho)W}{pct} = 400$ см^2]

5.232. Определите длину волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения под углом $\vartheta = 90°$ длина волны λ' рассеянного излучения оказалась равной 60 пм. [$\lambda = 57{,}6$ пм]

5.233. Фотон с энергией $\varepsilon = 4$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите угол рассеяния ϑ фотона, если длина волны λ' рассеянного фотона оказалась равной 6,21 пм. [$\vartheta = \arccos\dfrac{hc}{\lambda'\varepsilon} = 60°$]

5.234. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}3$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите кинетическую энергию T электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 25 %. [$T = \dfrac{\varepsilon}{5} = 60$ кэВ]

5.235. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}4$ МэВ рассеялся под углом $\vartheta = 180°$ на свободном электроне. Определите долю энергии фотона, приходящуюся на рассеянный фотон. [$\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \left(1 + \dfrac{\lambda_C(1-\cos\vartheta)\varepsilon}{hc}\right)^{-1} = 0{,}39$]

5.236. Фотон с длиной волны $\lambda = 10$ пм рассеялся на свободном электроне под углом $\vartheta = 90°$. Определите долю энергии фотона, приходящуюся на электрон отдачи. [$\dfrac{T}{\varepsilon} = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + \lambda_C(1-\cos\vartheta)} = 0{,}195$]

ГЛАВА 6

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

6.1. ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА ПО БОРУ

Основные законы и формулы

• Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре излучения атома водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

[ν — частота спектральных линий в спектре атома водорода; R, R' — постоянная Ридберга; $\dfrac{1}{\lambda}$ — волновое число; m определяет серию ($m = 1, 2, 3, \ldots$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, \ldots$); $m = 1$ (серия Лаймана), $m = 2$ (серия Бальмера), $m = 3$ (серия Пашена), $m = 4$ (серия Брэкета), $m = 5$ (серия Пфунда), $m = 6$ (серия Хэмфри)].

• Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e v_n r_n = n\hbar \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[m_e — масса электрона; v_n — скорость электрона по n-й орбите радиусом r_n].

• Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m$$

[E_n и E_m — энергии стационарных состояний атома соответственно до и после излучения (поглощения)].

• Радиус n-й стационарной орбиты в боровской модели атома водорода

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[$\hbar$ — постоянная Планка; ε_0 — электрическая постоянная; m_e — масса электрона; e — элементарный заряд].

• Первый боровский радиус

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 52{,}8 \text{ пм}.$$

• Энергия электрона в атоме водорода по Бору

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -\frac{13{,}6}{n^2} \text{ эВ} \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

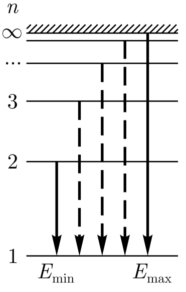
[h — постоянная Планка; m_e — масса электрона; e — элементарный заряд].

Примеры решения задач

6.1. Определите максимальную и минимальную энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).

Дано: $Z = 1$; $m = 1$.

Найти: $E_{\max}$; $E_{\min}$.



Решение. Согласно обобщенной формуле Бальмера, частота, соответствующая линии в спектре атома водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где $R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ — постоянная Ридберга; m определяет серию (по условию задачи $m = 1$ — серия Лаймана), т. е. номер орбиты, на которую переходит электрон; n определяет отдельную линию серии, т. е. номер орбиты, с которой переходит электрон. Для серии Лаймана

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Максимальная энергия фотона (см. рисунок)

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = h\nu_{\infty\to 1} = hR,$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка; $\nu_{\infty\to 1}$ — частота, соответствующая переходу электрона с энергетического уровня $n = \infty$ на первый энергетический уровень.

Минимальная энергия фотона (см. рисунок)

$$E_{\min} = h\nu_{\min} = h\nu_{21} = hR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hR.$$

Ответ: $E_{\max} = 21{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж (13,6 эВ); $E_{\min} = 10{,}2$ эВ.

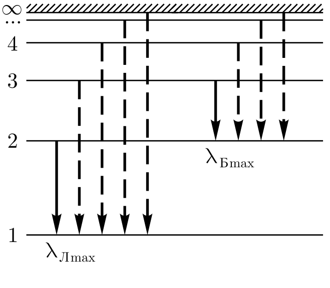
6.2. Максимальная длина волны $\lambda_{\text{Б}\max}$ спектральной серии Бальмера равна 648 нм. Считая, что постоянная Ридберга неизвестна, определите максимальную длину волны $\lambda_{\text{Л}\max}$ линии серии Лаймана.

Дано: $\lambda_{\text{Б}\max} = 648$ нм ($6{,}48 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: $\lambda_{\text{Л}\max}$.

Решение. Согласно обобщенной формуле Бальмера, длина волны λ, соответствующая линии в спектре атома водорода,

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (1)$$



где R' — постоянная Ридберга (по условию задачи она неизвестна); m определяет серию (серия Бальмера $m = 2$; серия Лаймана $m = 1$); $n = m + 1$, $m + 2$, … определяет линию соответствующей серии.

Для линии $\lambda_{\text{Б}\max}$ (см. рисунок) формула (1) запишется в виде:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{Б}\max}} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right); \qquad (2)$$

для линии $\lambda_{\text{Л}\max}$ —

$$\frac{1}{\lambda_{\text{Л}\max}} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right). \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (2) и (3) R', получим искомую максимальную длину волны:

$$\lambda_{\text{Л}\max} = \frac{\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2}}{\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2}}\lambda_{\text{Б}\max} = \frac{\dfrac{5}{36}}{\dfrac{3}{4}}\lambda_{\text{Б}\max} = \frac{20}{108}\lambda_{\text{Б}\max}.$$

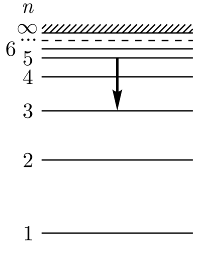
Ответ: $\lambda_{\text{Л}\max} = 120$ нм.

6.3. Определите длину волны λ спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с пятой боровской орбиты на третью. К какой серии относится эта линия и которая она, считая от головной линии, по счету?

Дано: $m = 3$; $n = 5$.

Найти: λ.

Решение. Согласно обобщенной формуле Бальмера, длина волны λ, соответствующая линии в спектре атома водорода,



$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (1)$$

где $R' = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга; m определяет серию (по условию задачи $m = 3$ [переход происходит на третий энергетический уровень (см. рисунок)]; n определяет отдельную линию серии (по условию задачи $n = 5$ — переход происходит с пятого энергетического уровня).

Из рисунка следует, что рассматриваемая линия относится к серии Пашена ($m = 3$) и, считая от головной линии, является по счету второй.

Для рассматриваемой линии формула (1) запишется в виде:

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) = \frac{16}{225}R',$$

откуда искомая длина волны

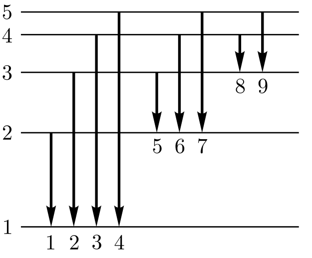
$$\lambda = \frac{225}{16R'}.$$

Ответ: $\lambda = 1{,}28$ мкм.

6.4. Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n = 5$. Определите длины волн возможных спектральных линий в спектре атома водорода, наблюдающихся при переходе атома из возбужденного состояния в основное.

Дано: $n = 5$.

Найти: λ.



Решение. Если атом находится в возбужденном состоянии, характеризующемся главным квантовым числом $n = 5$, рассмотрим переходы, указанные на рисунке стрелками: четыре линии серии Лаймана (соответствуют переходам $1-4$), три линии серии Бальмера (соответствуют переходам $5-7$) и две линии серии Пашена (соответствуют переходам $8-9$).

Согласно обобщенной формуле Бальмера (см. предыдущие задачи), для каждой из этих линий можем записать:

$$\frac{1}{\lambda_1} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right), \ \lambda_1 = \frac{4}{3}\frac{1}{R'}, \qquad \frac{1}{\lambda_6} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right), \ \lambda_6 = \frac{16}{3}\frac{1}{R'},$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right), \ \lambda_2 = \frac{9}{8}\frac{1}{R'}, \qquad \frac{1}{\lambda_7} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right), \ \lambda_7 = \frac{100}{21}\frac{1}{R'},$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right), \ \lambda_3 = \frac{16}{15}\frac{1}{R'}, \qquad \frac{1}{\lambda_8} = R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right), \ \lambda_8 = \frac{144}{7}\frac{1}{R'},$$

$$\frac{1}{\lambda_4} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2}\right), \ \lambda_4 = \frac{25}{24}\frac{1}{R'}, \qquad \frac{1}{\lambda_9} = R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right), \ \lambda_9 = \frac{225}{16}\frac{1}{R'}.$$

$$\frac{1}{\lambda_5} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right), \ \lambda_5 = \frac{36}{5}\frac{1}{R'},$$

Ответ: $\lambda_1 = 1{,}21 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_2 = 1{,}02 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_3 = 0{,}97 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_4 = 0{,}95 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_5 = 6{,}54 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_6 = 4{,}85 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_7 = 4{,}33 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_8 = 18{,}7 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_9 = 12{,}8 \cdot 10^{-7}$ м.

6.5. Вычислите минимальную разрешающую способность спектрального прибора для разрешения первых шести линий серии Бальмера.

Решение. Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \tag{1}$$

где $\delta\lambda$ — абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно.

С увеличением номера спектральной линии данной определенной серии разность длин волн $\delta\lambda$ соседних линий уменьшается, так как линии располагаются все теснее. Первые шесть линий серии Бальмера разрешены, если разрешены шестая (λ_6) и седьмая (λ_7) линии серии Бальмера. Тогда, согласно (1), минимальная разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_7}. \tag{2}$$

Длины волн λ_6 и λ_7 найдем, применив обобщенную формулу Бальмера, положив $m = 2$, $n = 6$ (для λ_6) и $n = 7$ (для λ_7):

$$\frac{1}{\lambda_6} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) = 0{,}2222R';$$

$$\frac{1}{\lambda_7} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2}\right) = 0{,}2296R'.$$

Подставив λ_6 и λ_7 в выражение (2), найдем искомую минимальную разрешающую способность оптического прибора:

$$R = \frac{\dfrac{1}{0{,}2222R'}}{\dfrac{1}{0{,}2222R'} - \dfrac{1}{0{,}2296R'}} = 31.$$

Ответ: $R = 31$.

6.6. При анализе спектра излучения атомарного водорода с помощью дифракционной решетки (постоянная решетки d) оказалось, что дифракционный максимум k-го порядка, наблюдаемый под углом дифракции φ, соответствует одной из линий серии Бальмера. Определите, с какого энергетического уровня произошел переход электрона.

Дано: d; k; φ; $m = 2$.

Найти: n.

Решение. Согласно обобщенной формуле Бальмера, длина волны, соответствующая линии серии Бальмера, в спектре атома водорода

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{1}$$

где R' — постоянная Ридберга; n определяет линию серии Бальмера (номер энергетического уровня, с которого переходит электрон).

Условие главного максимума в случае дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = k\lambda, \tag{2}$$

где d — постоянная дифракционной решетки; φ — угол дифракции (угол отклонения лучей), соответствующий k-му главному дифракционному максимуму; λ — длина волны.

Подставив λ из выражения (2) в формулу (1), получим искомый номер энергетического уровня, с которого произошел переход:

$$n = \left(\frac{1}{4} - \frac{k}{R'd\sin\varphi}\right)^{-1/2}.$$

Ответ: $n = \left(\frac{1}{4} - \frac{k}{R'd\sin\varphi}\right)^{-1/2}$.

6.7. Определите скорость, с которой электрон движется по первой боровской орбите атома водорода.

Дано: $Z = 1$; $n = 1$.

Найти: v_1.

Решение. Для электрона, движущегося по окружности радиусом r_n под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}, \tag{1}$$

где m_e — масса электрона; v_n — его скорость на n-й орбите радиусом r_n; e — элементарный заряд; ε_0 — электрическая постоянная.

Согласно теории Бора, момент импульса электрона, движущегося по n-й орбите,

$$m_e v_n r_n = n\hbar\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{2}$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Решая уравнения (1) и (2), получим искомую скорость

$$v_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}. \tag{3}$$

Подставив в формулу (3) $n = 1$, получаем $v_1 = 2{,}19$ Мм/с.

Ответ: $v_1 = 2{,}19$ Мм/с.

6.8. Определите длину волны света, излучаемого возбужденным атомом водорода при переходе электрона на вторую орбиту, если радиус орбиты электрона изменился в 4 раза.

Дано: $m = 2$; $\dfrac{r_n}{r_m} = 4$.

Найти: λ.

Решение. Согласно обобщенной формуле Бальмера, длина волны света, излучаемого атомом водорода,

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{1}$$

где R' — постоянная Ридберга; m определяет серию (по условию задачи, $m = 2$ — серия Бальмера), т. е. номер орбиты, на которую переходит электрон; n определяет линию серии, т. е. номер орбиты, с которой переходит электрон.

Для электрона, движущегося по окружности радиусом r_n под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}. \tag{2}$$

Согласно теории Бора, момент импульса электрона, движущегося по n-й орбите,

$$m_e v_n r_n = n\hbar\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{3}$$

Решая уравнения (2) и (3), получаем

$$r_n = n^2\frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2}. \tag{4}$$

Из выражения (4) и условия задачи следует, что

$$\frac{r_n}{r_2} = \frac{n^2}{m^2} = 4. \tag{5}$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (1) на m^2 и учитывая (5), получим

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\frac{1}{m^2} = \frac{R'}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3R'}{16},$$

откуда искомая длина волны

$$\lambda = \frac{16}{3R'}.$$

Ответ: $\lambda = 485$ нм.

6.9. Определите потенциальную П, кинетическую T и полную E энергии электрона в атоме водорода.

Решение. Атом водорода состоит из протона и электрона, вращающегося вокруг общего центра масс. Поскольку масса протона $m_p \approx 1836 m_e$ (m_e — масса электрона), то в первом приближении можно считать, что центр масс атома водорода совпадает с центром масс протона, и движение электрона происходит, следуя Бору, по круговой орбите.

Потенциальная энергия обусловлена взаимодействием электрона с ядром (протоном) и определяется выражением

$$\Pi = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где e — заряд электрона; ε_0 — электрическая постоянная; r — радиус орбиты. Знак «–» означает, что в системе электрон – ядро действуют силы притяжения (электрон притягивается к положительно заряженному ядру).

Для электрона, движущегося по окружности радиусом r под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

откуда кинетическая энергия ($T = \frac{m_e v^2}{2}$)

$$T = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Полная энергия электрона в атоме водорода складывается из его потенциальной и кинетической энергий:

$$E = \Pi + T = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r},$$

где знак «–» означает, что электрон находится в связанном состоянии.

Ответ: $\Pi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$; $T = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$; $E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$.

6.10. Определите длину волны λ фотона, излученного атомом водорода, если энергия электрона изменилась на 1,9 эВ.

Дано: $Z = 1$; $\Delta E = 1{,}9$ эВ ($1{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Найти: λ.

Решение. Согласно второму постулату Бора, при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m,$$

равной разности энергий соответствующих стационарных состояний (E_n и E_m — соответственно энергии стационарных состояний до и после излучения). В данном случае $E_m < E_n$. Учитывая условие задачи, можем записать

$$h\nu = \Delta E. \qquad (1)$$

Учитывая, что частота и длина волны связаны соотношением

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

где c — скорость распространения света в вакууме, выражение (1) запишем в виде

$$\frac{hc}{\lambda} = \Delta E,$$

откуда искомая длина волны

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}.$$

Ответ: $\lambda = 654$ нм.

6.11. Докажите, что орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по n-й орбите атома водорода, определяется выражением $p_\mathrm{m} = n\dfrac{e\hbar}{2m}$.

Решение. Считая, что электрон движется по круговой орбите, его движение по окружности эквивалентно круговому току. Магнитный момент кругового тока

$$p_\mathrm{m} = IS = \frac{e}{T}S, \qquad (1)$$

где e — заряд электрона; T — период обращения электрона; $S = \pi r^2$ — площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном; $T = \dfrac{2\pi r_n}{v_n}$ (v_n — скорость электрона на n-й орбите). Подставив эти выражения в формулу (1), получим

$$p_\mathrm{m} = \frac{e v_n r_n}{2}. \qquad (2)$$

Согласно первому постулату Бора (постулату стационарных состояний),

$$m_e v_n r_n = n\hbar,$$

где m_e — масса электрона; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка. Тогда

$$v_n r_n = \frac{n\hbar}{m_e}. \qquad (3)$$

Подставив формулу (3) в выражение (2), получаем

$$p_{\mathrm{m}} = n\frac{e\hbar}{2m_e},$$

что и требовалось доказать.

6.12. При переходе электрона в атоме водорода из возбужденного состояния в основное испускается фотон с длиной волны $\lambda = 121$ нм. Определите изменение момента импульса электрона при этом.

Дано: $Z = 1$; $m = 1$; $\lambda = 121$ нм $(1{,}21 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: ΔL.

Решение. Согласно теории Бора, электрон, двигаясь по круговой орбите, имеет квантованные значения момента импульса

$$L = m_e v_n r_n = n\hbar \; (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots),$$

где m_e — масса электрона; v_n — скорость электрона на n-й орбите радиусом r_n; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

Изменение момента импульса при переходе электрона из возбужденного состояния n в основное $m = 1$

$$\Delta L = n\hbar - m\hbar = (n-1)\hbar. \quad (1)$$

Согласно обобщенной формуле Бальмера, длина волны, соответствующая серии Лаймана (по условию задачи $m = 1$),

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

откуда

$$n = \sqrt{\frac{R'\lambda}{R'\lambda - 1}}. \quad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомое изменение момента импульса электрона

$$\Delta L = \left(\sqrt{\frac{R'\lambda}{R'\lambda - 1}} - 1\right)\hbar.$$

Ответ: $\Delta L = \left(\sqrt{\dfrac{R'\lambda}{R'\lambda - 1}} - 1\right)\hbar = 1{,}06 \cdot 10^{-34}$ кг · м^2/с.

6.13. Определите, по какой орбите в атоме водорода вращается электрон, если частота f его вращения равна $3{,}02 \cdot 10^{13}$ Гц.

Дано: $f = 3{,}02 \cdot 10^{13}$ Гц.

Найти: n.

Решение. Частота вращения электрона по n-й орбите

$$f = \frac{v_n}{2\pi r_n}, \quad (1)$$

где v_n — скорость электрона на круговой орбите радиусом r_n ($2\pi r_n$ — длина окружности).

Для электрона, движущегося по окружности радиусом r_n под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}, \tag{2}$$

где m_e — масса электрона; e — его заряд; ε_0 — электрическая постоянная.

Согласно теории Бора, момент импульса электрона, движущегося по n-й орбите,

$$m_e v_n r_n = n\hbar \; (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{3}$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

Решая уравнения (2) и (3), найдем

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar}{m_e e^2} \quad \text{и} \quad v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), получим

$$f = \frac{me^4}{4\varepsilon_0 h^3 n^3},$$

откуда искомое значение

$$n = \sqrt[3]{\frac{m_e e^4}{4\varepsilon_0^2 h^3 f}} = \frac{e}{h} \sqrt[3]{\frac{m_e e}{4\varepsilon_0^2 f}}.$$

Ответ: $n = 6$.

6.14. Пользуясь теорией Бора, определите числовое значение постоянной Ридберга.

Решение. Согласно второму постулату Бора (правилу частот), при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m, \tag{1}$$

равной разности энергий соответствующих стационарных состояний.

Энергия электрона в атоме водорода по Бору

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \; (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{2}$$

Учитывая формулу (2), выражение (1) запишем в виде:

$$h\nu = E_n - E_m = \frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

или

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \tag{3}$$

Согласно обобщенной формуле Бальмера, частота, соответствующая n-й линии в спектре атома водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{4}$$

где R — постоянная Ридберга; m определяет серию (стационарное состояние, куда переходит электрон); $n = m + 1,\ m + 2,\ \ldots$ определяет отдельную линию серии (стационарное состояние, с которого переходит электрон).

Сравнивая формулы (3) и (4), получаем

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2} = 3{,}27 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$$

(табличное значение $3{,}29 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$).

Ответ: $R = 3{,}27 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$.

6.15. Определите потенциал ионизации атома водорода.

Дано: $Z = 1$.

Найти: φ_i.

Решение. Потенциал ионизации φ_i — наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем электрическом поле, чтобы его энергия $e\varphi_i$ была достаточна для ионизации невозбужденного атома электронным ударом, т. е. энергия ионизации

$$E_i = e\varphi_i. \tag{1}$$

Энергия ионизации, учитывая квантовый характер поглощения, равна кванту энергии $h\nu_{1\to\infty}$, поглощенному атомом водорода при переходе электрона с первой боровской орбиты на бесконечно удаленную орбиту. Применяя обобщенную формулу Бальмера, $\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, положив в ней $m = 1$ и $n = \infty$, получим

$$E_i = h\nu_{1\to\infty} = hR. \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) найдем искомый потенциал ионизации атома водорода

$$\varphi_i = \frac{hR}{e}.$$

Ответ: $\varphi_i = 13{,}6$ В.

6.16. Определите первый потенциал возбуждения атома водорода.

Дано: $Z = 1$.

Найти: φ_1.

Решение. Первый потенциал φ_1 возбуждения — наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем электрическом поле, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода — это переход электрона с первой боровской орбиты на вторую.

Учитывая квантовый характер поглощения, приравняем работу сил ускоряющего поля $e\varphi_1$ кванту энергии $h\nu_{1\to 2}$, поглощенному атомом при переходе его в первое возбужденное состояние,

$$e\varphi_1 = h\nu_{1\to 2}. \qquad (1)$$

Применяя обобщенную формулу Бальмера, $\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, положив в ней $m = 1$ и $n = 2$, получим

$$e\varphi_1 = \frac{3}{4} Rh. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) найдем искомый первый потенциал возбуждения атома водорода

$$\varphi_1 = \frac{3}{4}\frac{hR}{e}.$$

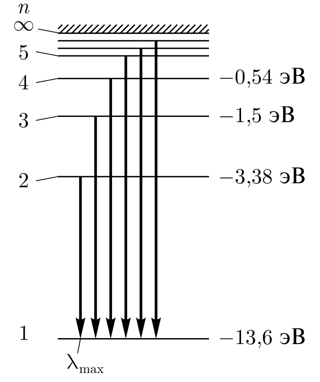
Ответ: $\varphi_1 = 10{,}2$ В.

6.17. Определив энергию ионизации атома водорода, найдите в электронвольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Лаймана.

Дано: $m = 1$.

Найти: 1) E_i; 2) $E_{\lambda_{\max}}$.

Решение. Энергия ионизации атома (энергия, необходимая для отрыва электрона, находящегося в основном состоянии, от атома) определяется уравнением



$$E_i = h\nu = hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где $R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ — постоянная Ридберга; $m = 1$ и $n = \infty$. Тогда искомая энергия ионизации

$$E_i = hR. \qquad (1)$$

Самая длинноволновая линия серии Лаймана (см. рисунок) соответствует переходу электрона со второго энергетического уровня на основной, т. е.

$$E_{\lambda_{\max}} = E_{2\to 1} = h\nu_{2\to 1} = hR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} hR.$$

Учитывая (1), получим искомую энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серий Лаймана:

$$E_{\lambda_{\max}} = \frac{3}{4} E_i.$$

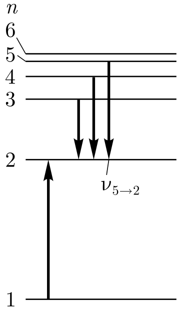
Ответ: 1) $E_i = 13{,}6$ эВ; 2) $E_{\lambda_{\max}} = 10{,}2$ эВ.

6.18. Основываясь только на том, что первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_1 = 10{,}2$ эВ, определите в электронвольтах энергию фотона, соответствующую третьей линии серии Бальмера.

Дано: $\varphi_1 = 10{,}2$ эВ; $m = 2$; $n = 5$.

Найти: $E_{5\to 2}$.

Решение. Первый потенциал возбуждения φ_1 — это наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при



столкновении с невозбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу электрона с уровня $n = 1$ на уровень $n = 2$ (см. рисунок).

Приравняем работу сил ускоряющего электрического поля $e\varphi_1$ кванту энергии $h\nu_{1\to2}$, поглощенному атомом при его переходе в первое возбужденное состояние, и, положив в обобщенной формуле Бальмера $m = 1$ и $n = 2$, получим

$$e\varphi_1 = h\nu_{1\to2} = hR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hR,$$

откуда

$$hR = \frac{4e\varphi_1}{3}. \qquad (1)$$

Третья линия серии Бальмера соответствует переходу электрона с пятого энергетического уровня ($n = 5$) на второй ($m = 2$), т.е.

$$E_{5\to2} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) = \frac{21}{100}hR. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомую энергию фотона, соответствующую третьей линии серии Бальмера:

$$E_{5\to2} = \frac{21}{100}\cdot\frac{4}{3}e\varphi_1,$$

где $e\varphi_1 = 10{,}2$ эВ.

Ответ: $E_{5\to2} = 2{,}86$ эВ.

Задачи для самостоятельного решения

6.19. Определите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с четвертого энергетического уровня на второй. [$E_{4\to2} = \dfrac{3}{16}hR = 2{,}56$ эВ]

6.20. Определите длину волны λ, соответствующую третьей, отсчитанной от головной, спектральной линии в серии Бальмера. [$\lambda = 433$ нм]

6.21. Определите длины волн, соответствующие: 1) границе серии Пашена; 2) границе серии Брэкета. [1) $\lambda_1 = 818$ нм (область инфракрасного излучения; 2) $\lambda_2 = 1{,}45$ мкм (область инфракрасного излучения)]

6.22. Определите самую длинноволновую линию: 1) в серии Бальмера; 2) в серии Пашена. [1) $\lambda = 654$ нм; 2) $\lambda = 1{,}87$ мкм]

6.23. Используя теорию Бора для атома водорода, определите радиус третьей орбиты атома водорода. [$r_3 = 9\dfrac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 475$ пм]

6.24. Определите потенциальную П, кинетическую T и полную E энергии электрона, находящегося на первой боровской орбите атома водорода. [П $= -27{,}2$ эВ; $T = 13{,}6$ эВ; $E = -13{,}6$ эВ]

6.25. Выведите выражение для полной энергии электрона, находящегося на n-й боровской орбите водородоподобного атома. $[E_n = -\dfrac{1}{n^2}\dfrac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}]$

6.26. Определите, на сколько изменилась энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 18{,}7 \cdot 10^{-7}$ м. $[\Delta E = 0{,}665$ эВ$]$

6.27. Орбитальный магнитный момент электрона p_m в атоме водорода равен $9{,}22 \cdot 10^{-24}$ А $\cdot$ м^2. Используя теорию Бора, определите, по какой орбите атома движется электрон. $[n = \dfrac{2m_e p_\mathrm{m}}{e\hbar} = 1]$

6.28. Используя постоянную Планка h, электрическую постоянную ε_0, массу m_e и заряд e электрона, составьте формулу для величины, имеющей размерность энергии. Что представляет собой эта величина?

6.29. Определите, в каких пределах должна быть энергия (в электронвольтах) бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода содержал только две спектральные линии. $[10{,}2$ эВ $\leqslant E \leqslant 12{,}8$ эВ$]$

6.30. Определите силу эквивалентного тока при вращении электрона по второй боровской орбите. $[I = \dfrac{m_e e^5}{4\varepsilon_0^2 h^3 n^3} = 0{,}131$ мА$]$

6.31. Определите частоту света, излучаемого возбужденным атомом водорода, при переходе электрона на вторую орбиту, если радиус орбиты электрона изменился в 9 раз. $[\nu = \dfrac{2}{9}R = 7{,}31 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}]$

6.32. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ, определите второй потенциал φ_2 возбуждения этого атома. $[\varphi_2 = \dfrac{8}{9}\dfrac{E_i}{e} = 12{,}1$ В$]$

6.33. Определив энергию ионизации атома водорода, найдите в электронвольтах энергию фотона, соответствующую самой коротковолновой линии серии Бальмера. $[E_{\text{Б}, \lambda_{\min}} = \dfrac{E_i}{4} = 3{,}4$ эВ$]$

6.34. Определите работу, которую надо совершить, чтобы удалить электрон с третьей боровской орбиты атома водорода за пределы притяжения его ядром. $[A = \dfrac{hR}{9} = 1{,}51$ эВ$]$

6.2. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Основные законы и формулы

• Связь между длиной волны де Бройля частицы и ее импульсом p

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

[h — постоянная Планка].

• Для нерелятивистской частицы ($v \ll c$)

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

[m — масса частицы; v — ее скорость; T — кинетическая энергия частицы].

• Для релятивистской частицы ($v \approx c$)

$$\lambda = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$$

[m — масса частицы; v — ее скорость; c — скорость распространения света в вакууме; T — кинетическая энергия частицы].

• Фазовая скорость волн де Бройля

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

[$E = \hbar\omega$ — энергия частицы (ω — циклическая частота); $p = \hbar k$ — импульс ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число), $\hbar = \frac{h}{2\pi}$].

• Групповая скорость волн де Бройля

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}.$$

• Соотношения неопределенностей:

• для координаты и импульса частицы

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar, \; \Delta y \Delta p_y \geqslant \hbar, \; \Delta z \Delta p_z \geqslant \hbar$$

[Δx, Δy, Δz — неопределенности координат; Δp_x, Δp_y, Δp_z — неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси координат];

• для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar$$

[ΔE — неопределенность энергии некоторого состояния системы; Δt — промежуток времени, в течение которого оно существует].

• Вероятность нахождения частицы в объеме dV

$$dW = \Psi\Psi^* dV = |\Psi|^2 dV$$

[$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; Ψ^* — функция, комплексно сопряженная с Ψ; $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ — квадрат модуля волновой функции].

• Для стационарных состояний

$$dW = \psi\psi^* dV = |\psi|^2 dV$$

[$\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная (амплитудная) часть волновой функции].

• Плотность вероятности

$$w = \frac{dW}{dV} = |\Psi|^2$$

[$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ — квадрат модуля волновой функции].

• Вероятность обнаружения частицы в объеме V

$$W = \int_V \mathrm{d}W = \int_V |\Psi|^2 \mathrm{d}V$$

[$\mathrm{d}W$ — вероятность обнаружения частицы в объеме $\mathrm{d}V$; $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы].

• Условие нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \mathrm{d}V = 1$$

[интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т.е. по координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$].

• Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x$$

[$\psi(x)$ — координатная часть волновой функции].

• Общее уравнение Шредингера (временно́е уравнение Шредингера)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(\vec{r}, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

[$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$; m — масса частицы; Δ — оператор Лапласа ($\Delta\Psi = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$); i — мнимая единица; $U(\vec{r}, t)$ — потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором частица движется].

• Уравнение Шредингера для стационарных состояний,

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

[$\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная часть волновой функции; $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}$; $U = U(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы; E — полная энергия частицы].

• Условие, которому подчиняется линейный оператор,

$$\hat{L}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1\hat{L}\varphi_1 + C_2\hat{L}\varphi_2$$

[φ_1 и φ_2 — произвольные функции; C_1 и C_2 — произвольные постоянные].

• Условие, которому подчиняется линейный самосопряженный (эрмитов) оператор,

$$\int \psi_1^* \hat{L}\psi_2 \mathrm{d}V = \int \psi_2 \hat{L}^* \psi_1^* \mathrm{d}V$$

[ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции (звездочка означает операцию комплексного сопряжения над соответствующей величиной); интегрирование производится по всей области изменения независимых переменных, совокупность дифференциалов которых обозначена $\mathrm{d}V$].

• Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ,

$$\langle L\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{L} \Psi \, \mathrm{d}V$$

[интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т. е. по координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$].

• Операторы важнейших физических величин

Оператор	Конкретный вид оператора
Координаты	$\hat{x} = x$
Проекции импульса соответственно на оси x, y, z	$\hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p}_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial z}$
Вектора импульса	$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{k} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{l}\right) = -i\hbar\nabla = \dfrac{\hbar}{i}\nabla$ [$\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{l}$ — единичные векторы координатных осей; $\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{k} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{l} = \nabla$ — набла-оператор]
Момента импульса	$\hat{\vec{L}} = -i\hbar[\vec{r}, \nabla] = \dfrac{\hbar}{i}[\vec{r}, \nabla]$
Проекций момента импульса на оси координат	$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = \dfrac{\hbar}{i}\left(y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = \dfrac{\hbar}{i}\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, $\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \dfrac{\hbar}{i}\left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$
Кинетической энергии	$\hat{T} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta$
Потенциальной энергии	$\hat{U}(x, y, z) = U(x, y, z)$
Полной энергии	$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$; $\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x, y, z)$

• Общее уравнение Шредингера (временно́е уравнение Шредингера) в операторной форме

$$\widehat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

[$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция; $\widehat{H}$ — оператор полной энергии; i — мнимая единица; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка].

• Стационарное уравнение Шредингера в операторной форме

$$\widehat{H}\psi = E\psi$$

[$\widehat{H}$ — оператор полной энергии; $\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная часть волновой функции $\Psi(x, y, z, t)$; E — полная энергия частицы].

• Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$\Psi(x, t) = A\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)}$$

[A — амплитуда волны де Бройля; $p_x = \hbar k$ — импульс частицы; $E = \hbar\omega$ — энергия частицы].

• Энергия свободно движущейся частицы

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m}$$

[$p_x = \hbar k$ — импульс частицы; m — масса частицы].

• Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками»,

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

[$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка; l — ширина ямы; m — масса частицы].

• Собственная волновая функция, соответствующая вышеприведенному собственному значению энергии,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

• Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l

$$D = D_0\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,l}$$

[D_0 — множитель, который можно приравнять к единице; U — высота потенциального барьера; E — энергия частицы].

• Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора в квантовой механике

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0$$

[$\frac{m\omega_0^2x^2}{2}=U$ — потенциальная энергия осциллятора; ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора; m — масса частицы].

• Собственные значения энергии гармонического осциллятора

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

[$\hbar$ — постоянная Планка; ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора].

• Энергия нулевых колебаний гармонического осциллятора

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega_0.$$

Примеры решения задач

6.35. Сравните длину волны де Бройля для шарика массой $m=0{,}2$ г и протона, имеющих одинаковые скорости.

Дано: $m=0{,}2$ г ($0{,}2\cdot10^{-3}$ кг); $m_p=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг; $v=v_p$.

Найти: $\frac{\lambda}{\lambda_p}$.

Решение. Любой частице, обладающей импульсом, сопоставляют волновой процесс с длиной волны λ, определяемой по формуле де Бройля:

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}, \tag{1}$$

где h — постоянная Планка; p — импульс частицы; m и v — соответственно ее масса и скорость.

Запишем формулу (1) для шарика и протона:

$$\lambda=\frac{h}{mv} \quad \text{и} \quad \lambda_p=\frac{h}{m_pv_p}.$$

Учитывая, что $v=v_p$, из этих формул найдем искомое отношение длины волны де Бройля для шарика и протона:

$$\frac{\lambda}{\lambda_p}=\frac{m_p}{m}.$$

Ответ: $\frac{\lambda}{\lambda_p}=8{,}35\cdot10^{-24}$.

6.36. Определите длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

Дано: $Z=1$; $n=1$.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля для электрона

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \qquad (1)$$

где h — постоянная Планка; $p = mv$ — импульс электрона (m и v — соответственно масса и скорость электрона).

Для электрона, движущегося по первой круговой орбите (по условию задачи атом водорода находится в основном состоянии, т. е. $n = 1$) под действием кулоновской силы,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}. \qquad (2)$$

Согласно теории Бора, момент импульса электрона, движущегося по первой орбите,

$$mvr = \hbar \qquad (n = 1).$$

Решая уравнения (1) и (2), найдем скорость электрона на первой боровской орбите:

$$v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомую длину волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{me^2}.$$

Ответ: $\lambda = 0{,}337$ нм.

6.37. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}03$ Тл по окружности радиусом $r = 10$ см. Определите дебройлевскую длину волны электрона.

Дано: $B = 0{,}03$ Тл; $r = 10$ см (0,1 м).

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \qquad (1)$$

где $p = mv$ — импульс электрона (m и v — масса и скорость электрона).

Движение электрона по окружности в однородном магнитном поле совершается под действием силы Лоренца $F_{\text{Л}} = evB\sin\alpha$, где e — заряд электрона; v — его скорость; α — угол между направлениями векторов скорости $\vec{v}$ и индукции $\vec{B}$ (по условию задачи $\vec{v} \perp \vec{B}$ и $\sin\alpha = 1$), т. е.

$$F_{\text{Л}} = evB.$$

Поскольку вектор силы Лоренца перпендикулярен скорости, то по второму закону Ньютона сообщает электрону нормальное ускорение a_n: $F = ma_n = m\dfrac{v^2}{r}$.

Тогда

$$evB = \frac{mv^2}{r},$$

откуда

$$v = \frac{eBr}{m}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), получим искомую длину волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{eBr}.$$

Ответ: $\lambda = 1{,}38$ пм.

6.38. Сравните длины волн де Бройля электрона (λ_e) и протона (λ_p), прошедших одинаковую ускоряющую разность потенциалов. Рассмотрите нерелятивистский и релятивистский случаи.

Дано: m_e; m_p; $U_1 = U_2 = U$.

Найти: $\frac{\lambda_e}{\lambda_p}$.

Решение. Длина волны де Бройля λ частицы зависит от ее импульса p:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{1}$$

Зная кинетическую энергию T частицы, можно определить ее импульс p:

$$p = \sqrt{2mT} \quad \text{(нерелятивистский случай, } T \ll E_0\text{)}, \tag{2}$$

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{c} \quad \text{(релятивистский случай, } T \gg E_0\text{)}, \tag{3}$$

где c — скорость распространения света в вакууме; $E_0 = mc^2$ — энергия покоя частицы; m — масса частицы.

Кинетическая энергия электрона и протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U (она по условию задачи одинакова),

$$T = eU. \tag{4}$$

Нерелятивистский случай. Подставив выражение (2) в формулу (1) с учетом (4), получим длину волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Тогда искомое отношение

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}.$$

Релятивистский случай. Подставив выражение (3) в формулу (1) с учетом (4), получим длину волны де Бройля

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{eU(2mc^2 + eU)}}.$$

Тогда искомое отношение

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{2m_p c^2 + eU}{2m_e c^2 + eU}}.$$

Ответ: $\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}$ (нерелятивистский случай); $\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{2m_p c^2 + eU}{2m_e c^2 + eU}}$ (релятивистский случай).

6.39. Определите длину волны де Бройля λ для электрона, обладающего кинетической энергией $T = 60$ эВ.

Дано: $T = 60$ эВ ($60 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{1}$$

т. е. задача практически сводится к выражению импульса p электрона через его кинетическую энергию. Так как по условию задачи кинетическая энергия электрона $T = 60$ эВ, то он является нерелятивистской частицей ($T \ll mc^2$, где $mc^2 = 0{,}512$ МэВ — энергия покоя электрона). Кинетическая энергия для нерелятивистской частицы $T = \frac{p^2}{2m}$, поэтому $p = \sqrt{2mT}$. Подставив это выражение в формулу (1), получим искомую длину волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 T}}.$$

Ответ: $\lambda = 158$ пм.

6.40. Определите длину волны де Бройля λ электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 700 кВ.

Дано: $U = 700$ кВ.

Найти: λ.

Решение. Связь длины волны де Бройля частицы с импульсом

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка, причем импульс выражается различным образом для нерелятивистского ($p = \sqrt{2mT}$) и релятивистского ($p = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{c}$) случаев, где m, T, E_0 — соответственно масса, кинетическая энергия, энергия покоя частицы.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U,

$$T = |e|U = 0{,}7 \text{ МэВ},$$

а энергия покоя электрона $E_0 = mc^2 = 0{,}512$ МэВ, т. е. в данном случае имеем дело с релятивистской частицей. Тогда искомая длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + T)T}} = \frac{hc}{\sqrt{(2mc^2 + |e|U)|e|U}},$$

где $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $\lambda = 1{,}13$ пм.

6.41. Определите длину волны де Бройля электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, если коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра $\lambda_{\min} = 2$ нм.

Дано: $\lambda_{\min} = 2$ нм ($2 \cdot 10^{-9}$ м).

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}, \tag{1}$$

где импульс p и кинетическая энергия T связаны соотношением $p = \sqrt{2mT}$, а кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, равна $T = eU$.

Согласно закону сохранения энергии, энергия рентгеновского фотона $h\nu_{\max} = \dfrac{hc}{\lambda_{\min}}$ не может быть больше кинетической энергии электрона eU, бомбардирующего анод рентгеновской трубки, т. е.

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = eU. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомую длину волны де Бройля:

$$\lambda = \sqrt{\frac{h\lambda_{\min}}{2mc}}.$$

Ответ: $\lambda = 49{,}2$ пм.

6.42. Определите, при каком числовом значении кинетической энергии T дебройлевская длина волны λ релятивистского электрона равна его комптоновской длине волны λ_C.

Дано: $\lambda = \lambda_C$; $\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: T.

Решение. По условию задачи

$$\lambda = \lambda_C,$$

где дебройлевская длина волны

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

а комптоновская длина волны

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}$$

(h — постоянная Планка; m — масса электрона; p — его импульс; c — скорость света в вакууме). Тогда

$$\frac{h}{p} = \frac{h}{mc}. \tag{1}$$

Связь между импульсом p и кинетической энергией T релятивистской частицы

$$p = \frac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{c}. \tag{2}$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), получим уравнение

$$T^2 + 2mc^2T - m^2c^4 = 0,$$

решение которого — искомая кинетическая энергия

$$T = mc^2(\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: $T = 0{,}212$ МэВ.

6.43. Моноэнергетический пучок нейтронов, получаемый в результате ядерной реакции, падает нормально на кристалл с периодом $d = 0{,}2$ нм. Определите скорость нейтронов, если максимальное отражение нейтронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка, наблюдается, когда угол скольжения $\vartheta = 30°$.

Дано: $d = 0{,}2$ нм ($2 \cdot 10^{-10}$ м); $k = 1$; $\vartheta = 30°$.

Найти: v.

Решение. Расчет дифракции нейтронов от кристалла производится согласно формуле Вульфа—Брэггов:

$$2d \sin\vartheta = k\lambda, \tag{1}$$

где d — период (расстояние между атомными плоскостями) кристалла; ϑ — угол скольжения; k — порядок дифракционного максимума; λ — длина волны де Бройля. Так как по условию задачи $k = 1$, то из формулы (1) получим

$$\lambda = 2d \sin\vartheta. \tag{2}$$

С другой стороны, длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

где m — масса нейтрона. Тогда

$$v = \frac{h}{m\lambda}. \tag{3}$$

Подставив в формулу (3) выражение (2), найдем искомую скорость нейтронов:

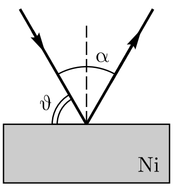
$$v = \frac{h}{2md\sin\vartheta}.$$

Ответ: $v = 1{,}98$ км/с.

6.44. В опыте Дэвиссона и Джермера, обнаруживших дифракционную картину при отражении пучка электронов от естественной дифракционной решетки — монокристалла никеля, оказалось, что в направлении, составляющем угол $\alpha = 55°$ с направлением падающего пучка, наблюдается максимум отражения четвертого порядка при кинетической энергии электронов $T = 180$ эВ. Определите расстояние d между атомными плоскостями в никеле.

Дано: $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $\alpha = 55°$; $k = 4$; $T = 180$ эВ ($180 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Найти: d.



Решение. Для нахождения расстояния d между атомными плоскостями никеля воспользуемся формулой Вульфа — Брэггов:

$$2d\sin\vartheta = k\lambda, \qquad (1)$$

где ϑ — угол скольжения, который, как следует из рисунка, равен

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

k — порядок спектра; λ — дебройлевская длина волны:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mT}}, \qquad (3)$$

где импульс $p = \sqrt{2mT}$ (на кристалл падает пучок нерелятивистских электронов).

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), получим искомое межплоскостное расстояние

$$d = \frac{kh}{2\sqrt{2mT}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{kh}{2\sqrt{2mT}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $d = 0{,}206$ нм.

6.45. Параллельный пучок нерелятивистских протонов падает нормально на узкую щель шириной $a = 1$ мкм. Учитывая волновые свойства протонов, определите их скорость, если на экране, отстоящем на расстоянии $l = 50$ см от щели, ширина центрального дифракционного максимума составляет $\Delta x = 0{,}4$ мм.

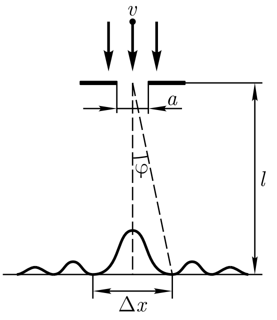
Дано: $k = 1$; $a = 1$ мкм (10^{-6} м); $l = 50$ см ($0{,}5$ м); $\Delta x = 0{,}4$ мм ($4 \cdot 10^{-4}$ м).

Найти: v.

Решение. Длина волны де Бройля, связанная с нерелятивистским протоном массой m, движущимся со скоростью v,

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \qquad (1)$$

Дифракционный минимум при дифракции на одной щели наблюдается при условии



$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} \ \ (k = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (2)$$

(k — порядок дифракционного минимума). По условию задачи, $k = 1$, поэтому из (2) получаем, что $\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{a}$. Из рисунка следует, что $\Delta x = 2l\,\mathrm{tg}\,\varphi \approx 2l\sin\varphi$ (так как угол φ мал). С учетом предыдущей формулы получим

$$\lambda = \frac{a\Delta x}{2l}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (1), найдем искомое выражение для скорости протонов:

$$v = \frac{2hl}{am\Delta x}.$$

Ответ: $v = 992$ м/с.

6.46. Определите связь между групповой и фазовой скоростями волны де Бройля.

Решение. Фазовая скорость волны де Бройля $v_ф = \dfrac{\omega}{k}$. Тогда $\omega = v_ф k$, где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число. Групповая скорость $u = \dfrac{d\omega}{dk}$. Следует учесть, что фазовая скорость есть функция длины волны (волнового числа), поэтому

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_ф k) = v_ф + k\frac{dv_ф}{dk}. \qquad (1)$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{dv_ф}{dk} = \frac{dv_ф}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda} = \frac{dv_ф}{d\lambda} : \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{dv_ф}{d\lambda}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, находим искомую связь между групповой и фазовой скоростями волны де Бройля:

$$u = v_ф - \lambda\frac{dv_ф}{d\lambda}.$$

Ответ: $u = v_ф - \lambda\dfrac{dv_ф}{d\lambda}$.

6.47. Показатель преломления вещества для малого интервала длин волн вдали от линий поглощения определяется формулой Коши: $n = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$, где A и B — эмпирические константы. Определите: 1) фазовую скорость; 2) групповую скорость.

Дано: $n = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$.
Найти: 1) v; 2) u.

Решение. Фазовая скорость $v = \dfrac{c}{n}$, откуда, согласно условию задачи,

$$v = \frac{c}{A + \dfrac{B}{\lambda^2}} = \frac{c\lambda^2}{A\lambda^2 + B}. \tag{1}$$

Групповая скорость $u = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$. Учитывая, что $v = \dfrac{\omega}{k}$, а $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ (k — волновое число), запишем:

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}(vk)}{\mathrm{d}k} = v + k\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k} = v + k\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} : \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\lambda}\right) = v + k\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right] = v - k\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{2}$$

Поскольку $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, получаем

$$u = v - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Учитывая формулу (1), имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda c B}{(A\lambda^2 + B)^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2), находим

$$u = \frac{c\lambda^2(A\lambda^2 - B)}{(A\lambda^2 + B)^2}.$$

Ответ: 1) $v = \dfrac{c\lambda^2}{A\lambda^2 + B}$; 2) $u = \dfrac{c\lambda^2(A\lambda^2 - B)}{(A\lambda^2 + B)^2}$.

6.48. Выведите закон дисперсии волн де Бройля от их длины волны в нерелятивистском и релятивистском случаях, т. е. $v_{\text{ф}} = f(\lambda)$.

Решение. Закон дисперсии волн де Бройля — зависимость фазовой скорости волн де Бройля от частоты (длины волны).

Нерелятивистский случай ($v \ll c$).

Согласно общей формуле

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} \tag{1}$$

[$\omega = \dfrac{E}{\hbar}$ — круговая частота; k — волновое число ($k = \dfrac{p}{\hbar}$)], можем записать

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{h}{2m\lambda}$$

(учли, что $E = \dfrac{p^2}{2m}$ и $\lambda = \dfrac{h}{p}$).

Релятивистский случай ($v \approx c$).

Используя формулу (1), получаем

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{E_0^2 + p^2c^2}}{p} = \sqrt{\frac{m^2c^4}{p^2} + c^2} = \sqrt{\frac{m^2c^4\lambda^2}{h^2} + c^2}$$

(учли, что в релятивистском случае $E^2 = E_0^2 + p^2c^2 = m^2c^4 + p^2c^2$; $E_0 = mc^2$ и $\lambda = \dfrac{h}{p}$).

В соответствии с современными представлениями фазовая скорость волн де Бройля имеет символическое значение, являясь принципиально ненаблюдаемой величиной.

Ответ: $v_ф = \dfrac{h}{2m\lambda}$; $v_ф = \sqrt{\dfrac{m^2c^4\lambda^2}{h^2} + c^2}$.

6.49. Рассматривая, что электрон находится внутри атома диаметром $d = 1$ нм, определите (в электронвольтах) неопределенность кинетической энергии данного электрона.

Дано: $d = 1$ нм (10^{-9} м).

Найти: ΔT.

Решение. Кинетическая энергия T и импульс p частицы массой m связаны соотношением

$$T = \frac{p^2}{2m}.$$

Тогда неопределенность кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{(\Delta p)^2}{2m}, \qquad (1)$$

где Δp — неопределенность импульса.

Согласно соотношению неопределенностей,

$$\Delta x \Delta p \geqslant \hbar,$$

где неопределенность координаты электрона $\Delta x = d$ (порядка размеров самого атома, т. е. тогда можно считать, что электрон принадлежит данному атому), имеем

$$\Delta p = \frac{\hbar}{d}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомую неопределенность кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{\hbar^2}{2md^2}.$$

Ответ: $\Delta T = 0{,}04$ эВ.

6.50. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ. Принимая, что неопределенность импульса равна 0,1 % от его числового значения, определите неопределенность координаты электрона.

Дано: $U = 0{,}5$ кВ (500 В); $\Delta p_x = 0{,}001 p_x$.

Найти: Δx.

Решение. Согласно соотношению неопределенностей,

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar, \qquad (1)$$

где Δx — неопределенность координаты электрона; Δp_x — неопределенность его импульса; $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, $T = |e|U = 0{,}5$ кэВ, а энергия покоя электрона $E_0 = mc^2 = 0{,}512$ МэВ, т. е. электрон при данных условиях является нерелятивистской частицей. Импульс электрона

$$p = \sqrt{2mT} = \sqrt{2m|e|U} = 1,24 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Согласно условию задачи, неопределенность импульса $\Delta p_x = 0{,}001 p_x = 1{,}24 \cdot 10^{-26}$ кг · м/с, т. е. $\Delta p_x \ll p_x$, и электрон при данных условиях является классической частицей. Из выражения (1) следует, что искомая неопределенность координаты электрона

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x}.$$

Ответ: $\Delta x = 8{,}46$ нм.

6.51. Исходя из соотношения неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar$, оцените размер атома водорода.

Дано: $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar$.

Найти: $r_{\min}$.

Решение. Полная энергия атома водорода — системы, состоящей из ядра (протона) и электрона в связанном состоянии, — складывается из кинетической энергии электрона $\left[\dfrac{p^2}{2m}\right]$ и потенциальной энергии взаимодействия электрона с протоном $\left[-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]$:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{1}$$

где p и m — импульс и масса электрона; ε_0 — электрическая постоянная; r — расстояние между электроном и протоном.

В состоянии с минимальной энергией электрон обладает минимальным (и небольшим) импульсом (электрон находится где-то вблизи ядра), поэтому неопределенности его координаты и импульса можно принять порядка самих величин, т. е. $\Delta r \simeq r$ и $\Delta p \simeq p$. Тогда, используя соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar$ и вышеприведенные оценки, можем записать

$$rp = \hbar, \text{ или } p = \frac{\hbar}{r}. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3) по r и приравняем производную нулю:

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0,$$

откуда

$$r_{\min} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}.$$

Полученное выражение совпадает с первым боровским радиусом атома водорода.

Ответ: $r_{\min} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$.

6.52. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии $\Delta t = 10$ нс. При переходе атома в нормальное состояние испускается фотон, средняя длина волны которого $\lambda = 500$ нм. Используя соотношение неопределенностей, оцените естественную ширину излучаемой спектральной линии.

Дано: $\Delta t = 10$ нс (10^{-8} с); $\lambda = 500$ нм ($5 \cdot 10^{-7}$ м).

Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. Согласно соотношению неопределенностей для энергии и времени, $\Delta E \Delta t \geqslant \hbar$, где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния (ширина энергетического уровня возбужденного состояния); Δt — время пребывания системы в этом состоянии (среднее время жизни атома в возбужденном состоянии). Следовательно, ширина энергетического уровня определяется выражением

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}. \tag{1}$$

Энергия фотона E связана с длиной волны λ соотношением $E = \dfrac{hc}{\lambda}$. Поэтому разбросу ΔE ($\Delta E \ll E$) энергии соответствует разброс $\Delta\lambda$ длин волн ($\Delta\lambda \ll \lambda$):

$$\Delta E = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

(знак «−» опустили). Разброс $\Delta\lambda$ и представляет собой естественную ширину спектральной линии

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta E}{hc}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомую естественную ширину излучаемой спектральной линии:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t}.$$

Ответ: $\Delta\lambda = 13{,}3$ фм.

6.53. Учитывая для движущейся вдоль оси x микрочастицы соотношение неопределенностей для Δx и Δp_x, найти аналогичное соотношение для ΔE и Δt, где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время, в течение которого оно существует.

Решение. Согласно соотношению неопределенностей для свободной микрочастицы, движущейся вдоль оси x,

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar. \tag{1}$$

Энергия микрочастицы, движущейся вдоль оси x,

$$E = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m},$$

откуда

$$\Delta E = \frac{2p_x \Delta p_x}{2m} = \frac{mv_x \Delta p_x}{m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta p_x$$

($p_x = mv_x$ и $v_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$). Из этого выражения получим, что

$$\Delta E \Delta t = \Delta x \Delta p_x. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомое соотношение неопределенностей для энергии и времени:

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar.$$

Ответ: $\Delta E \Delta t \geqslant \hbar$.

6.54. Состояние микрочастицы описывается волновой функцией $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, где $\psi(x, y, z)$ — координатная часть волновой функции. Определите плотность вероятности (вероятность нахождения частицы в единичном объеме).

Дано: $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$.
Найти: w.

Решение. Плотность вероятности, т. е. вероятность нахождения микрочастицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами x, y, z,

$$w = |\Psi(x, y, z, t)|^2 = \Psi(x, y, z, t)\Psi^*(x, y, z, t), \tag{1}$$

где $\Psi^*(x, y, z, t)$ — функция, комплексно сопряженная с Ψ.

Подставив в формулу (1) заданную волновую функцию $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ и комплексно сопряженную с ней $\Psi^*(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{\frac{i}{\hbar}Et}$, получим искомую плотность вероятности

$$w = |\psi(x, y, z)|^2,$$

т. е. она определяется квадратом модуля координатной части волновой функции и не зависит от времени.

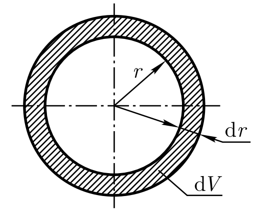
Ответ: $w = |\psi(x, y, z)|^2$.

6.55. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = A e^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A.

Дано: $\psi(r) = A e^{-\frac{r}{a}}$; $a = \text{const}$.
Найти: A.

Решение. Рассматриваемая волновая функция сферически симметрична, т. е. зависит только от r. Условие нормировки вероятностей

$$\int_0^\infty |\psi(r)|^2 \, \mathrm{d}V = 1, \quad (1)$$



где интеграл берется по той области, в которой $\psi(r)$ отлична от нуля.

В силу сферической симметрии ψ-функции вероятность обнаружить электрон на расстоянии r от ядра одинакова по всем направлениям, т.е. элемент объема, отвечающий одинаковой плотности вероятности, — сферический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$ (см. рисунок):

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r. \quad (2)$$

Согласно условию нормировки (1) с учетом (2),

$$1 = \int_0^\infty |\psi(r)|^2 \, \mathrm{d}V = \int_0^\infty A^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

или

$$1 = 4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} \mathrm{d}r = 4\pi A^3 \frac{2!}{(2/a)^3} = \pi A^2 a^3$$

(учли $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$), откуда искомый нормировочный коэффициент

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}.$$

Ответ: $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$.

6.56. Волновая функция, описывающая состояние некоторой частицы, имеет вид $\psi(r) = A\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a^2}}$, где r — расстояние частицы от силового центра; a — постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A.

Дано: $\psi(r) = A\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a^2}}$; $a = \mathrm{const}$.
Найти: A.
Решение. Условие нормировки вероятностей

$$\int_0^\infty |\psi(r)|^2 \, \mathrm{d}V = 1, \quad (1)$$

где интеграл берется по той области, в которой $\psi(r)$ отлична от нуля.

Благодаря сферической симметрии ψ-функции (заданная ψ-функция зависит только от r) вероятность обнаружить частицу на расстоянии r от силового центра одинакова по всем направлениям, т.е. элемент объема, отвечающий одинаковой плотности вероятности, — сферический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$ (см. рисунок к задаче 6.55):

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r. \quad (2)$$

Согласно условию нормировки (1) с учетом (2),

$$1=\int_0^\infty \left|\psi(r)\right|^2 \mathrm{d}V=\int_0^\infty A^2 \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{a^2}} 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

или

$$1=4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{a^2}} \mathrm{d}r=4\pi A^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3/2}=\pi^{3/2} A^2 a^3$$

(учли $\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\alpha^{-3/2}$), откуда искомый нормировочный коэффициент

$$A=\frac{1}{\sqrt{\pi^{3/2} a^3}}.$$

Ответ: $A=\frac{1}{\sqrt{\pi^{3/2} a^3}}$.

6.57. Волновая функция, описывающая поведение некоторой частицы, имеет вид $\psi(x)=A\sin\frac{2\pi x}{l}$, причем она определена только в области $0\leqslant x\leqslant l$. Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A.

Дано: $\psi(x)=A\sin\frac{2\pi x}{l}$; $0\leqslant x\leqslant l$.
Найти: A.
Решение. Условие нормировки вероятностей

$$\int_0^l \left|\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x=1, \tag{1}$$

где интеграл берется по той области ($0\leqslant x\leqslant l$), в которой функция $\psi(x)$ отлична от нуля.

Учитывая, что $\left|\psi(x)\right|^2=A^2\sin^2\frac{2\pi x}{l}$, из условия (1) получим

$$1=\int_0^l \left|\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x=\int_0^l A^2\sin^2\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}x=A^2\int_0^l \sin^2\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}x=A^2\int_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{A^2}{2}\int_0^l \mathrm{d}x-\frac{A^2}{2}\int_0^l \cos\frac{4\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{A^2}{2}x\Big|_0^l-\frac{A^2}{2}\frac{l}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{l}\Big|_0^l=\frac{A^2}{2}l,$$

откуда искомый нормировочный коэффициент

$$A=\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Ответ: $A=\sqrt{\frac{2}{l}}$.

6.58. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi(x)=$ $=\frac{A}{r}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{a^2}}$, где $A=\frac{1}{\sqrt{\pi a\sqrt{2\pi}}}$; r — расстояние частицы от силового центра; a — постоянная. Определите среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2\rangle$ частицы от силового центра.

Дано: $\psi(x) = \dfrac{A}{r}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{a^2}}$; $A = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a\sqrt{2\pi}}}$; $a = \mathrm{const}$.

Найти: $\langle r^2\rangle$.

Решение. Согласно определению, среднее значение физической величины

$$\langle r^2\rangle = \int_0^\infty r^2\left|\psi(r)\right|^2 \mathrm{d}V,$$

где интеграл берется по той области, в которой $\psi(x)$ отлична от нуля.

В силу сферической симметрии функции $\psi(x)$ (она зависит только от r) вероятность обнаружить частицу на расстоянии r от силового центра одинакова по всем направлениям, т. е. элемент объема, отвечающий одинаковой плотности вероятности, — сферический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$ (см. рисунок к задаче 6.55):

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r.$$

Учитывая это выражение, получаем

$$\langle r^2\rangle = \int_0^\infty r^2\,\frac{A^2}{r^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{a^2}}4\pi r^2\mathrm{d}r = 4\pi A^2\int_0^\infty r^2\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{a^2}}\mathrm{d}r = 4\pi A^2\,\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2}{a^2}\right)^{-3/2} = \frac{a^2}{4}.$$

Ответ: $\langle r^2\rangle = \dfrac{a^2}{4}$.

6.59. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = A\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, где A — нормировочный коэффициент, r — расстояние электрона от ядра, $a = \mathrm{const}$ — первый боровский радиус. Определите среднее значение модуля кулоновской силы, действующей на электрон.

Дано: $\psi(r) = A\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$; $a = \mathrm{const}$.

Найти: $\langle F\rangle$.

Решение. Модуль кулоновской силы, действующей на электрон в атоме водорода,

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Следовательно, его среднее значение

$$\langle F\rangle = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\langle r^2\rangle}. \qquad (1)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению среднего значения обратной величины квадрата расстояния $\left\langle \dfrac{1}{r^2}\right\rangle$ электрона от ядра в основном состоянии. Согласно определению,

$$\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{r^2}\,\psi^*\psi\mathrm{d}V = \int_0^\infty \frac{1}{r^2}\left|\psi\right|^2\mathrm{d}V. \qquad (2)$$

Чтобы найти $\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle$, определим сначала нормировочный коэффициент A заданной волновой функции, для чего используем условие нормировки:

$$\int_0^\infty |\psi|^2 \, \mathrm{d}V = 1. \qquad (3)$$

В силу сферической симметрии функции $\psi(r)$ элементарным объемом $\mathrm{d}V$, все точки которого удалены на расстояние r от ядра, будет сферический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$, т. е.

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r. \qquad (4)$$

Согласно условию нормировки (3) с учетом (4),

$$1 = \int_0^\infty |\psi|^2 \, \mathrm{d}V = \int_0^\infty A^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} \mathrm{d}r$$

или

$$1 = 4\pi A^2 \frac{2!}{(2/a)^3} = \pi A^2 a^3$$

(учли $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$),

откуда нормировочный коэффициент

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}},$$

а нормированная волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода,

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}. \qquad (5)$$

С учетом формул (5) и (4), согласно (2), получим, что

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{r^2} |\psi|^2 \, \mathrm{d}V = \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \frac{1}{\pi a^3} \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{a^3} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} \mathrm{d}r = \frac{4}{a^3} \left(-\frac{a}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} \Big|_0^\infty = \frac{2}{a^2}.$$

Подставив полученное выражение в формулу (1), найдем искомое среднее значение модуля кулоновской силы:

$$\langle F \rangle = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\langle r^2 \rangle} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{a^2} = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Ответ: $\langle F \rangle = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$.

6.60. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi(r) = Ae^{-\frac{r^2}{2a^2}}$, где r — расстояние частицы от силового центра; a — некоторая постоянная. Определите наиболее вероятное расстояние $r_в$ частицы от силового центра.

Дано: $\psi(r) = Ae^{-\frac{r^2}{2a^2}}$; $a = \text{const}$.
Найти: $r_в$.
Решение. Вероятность нахождения частицы в элементе объемом $\mathrm{d}V$ равна

$$\mathrm{d}W = \left|\psi(r)\right|^2 \mathrm{d}V,$$

где $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ — сферический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$, так как именно он (в силу сферической симметрии волновой функции) отвечает одинаковой вероятности обнаружить частицу на расстоянии r по всем направлениям от силового центра. Тогда, учитывая, что $\psi(r) = Ae^{-\frac{r^2}{2a^2}}$,

$$\mathrm{d}W = 4\pi A^2 r^2 e^{-\frac{r^2}{a^2}} \mathrm{d}r.$$

Плотность вероятности нахождения частицы

$$w(r) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} = 4\pi A^2 r^2 e^{-\frac{r^2}{a^2}}. \qquad (1)$$

Функция $w(r)$ имеет максимум при некотором расстоянии $r = r_в$, называемом наиболее вероятным. Для вычисления $r_в$ исследуем функцию (1) на экстремум, найдя $r_в$ из условия $\frac{\mathrm{d}w(r)}{\mathrm{d}r} = 0$. Произведя дифференцирование, получим

$$8\pi A^2 r e^{-\frac{r^2}{a^2}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = 0,$$

откуда искомое наиболее вероятное расстояние частицы от силового центра

$$r_в = a.$$

Ответ: $r_в = a$.

6.61. Найдите решение временно́го уравнения Шредингера для свободной частицы массой m, имеющей импульс p и движущейся в положительном направлении оси x.

Решение. Временно́е уравнение Шредингера — основное уравнение *нерелятивистской квантовой механики* имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; m — масса частицы; Δ — оператор Лапласа ($\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$); i — мнимая единица; $U(x, y, z, t)$ — потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором частица движется.

Согласно условию задачи, движение частицы *одномерное* (она движется вдоль оси x) и частица *свободная*, т. е. она движется в отсутствие внешних полей; потенциальная энергия частицы $U(x) = \mathrm{const}$ и ее можно принять равной нулю. При данных допущениях временно́е уравнение Шредингера примет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) будем искать методом разделения переменных, т. е. решение уравнения может быть представлено в виде функций, одна из которых есть функция только координат, другая — только времени:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot f(t). \tag{3}$$

Подставив (3) в (2) и продифференцировав, получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = i\hbar\psi\frac{\partial f}{\partial t}$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}{\psi} = i\hbar\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{f}. \tag{4}$$

Поскольку обе части уравнения (4) — функции независимых переменных x и t, то эти части должны быть равны одной и той же постоянной. Из сравнения уравнения (4) и уравнения Шредингера для стационарных состояний $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U\psi = E\psi$ ($U = 0$) следует, что эта постоянная есть E — полная энергия частицы ($E = \mathrm{const}$ в случае стационарного поля). Тогда

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E\psi; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0; \tag{5}$$

$$i\hbar\frac{\partial f}{\partial t} = Ef; \qquad \frac{\partial f}{\partial t} - i\frac{E}{\hbar}f = 0. \tag{6}$$

Решения уравнений (5) и (6) (в чем можно убедиться подстановкой)

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{ikx} \quad \text{и} \quad f(t) = A\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{7}$$

где $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar}$ и $\omega = \frac{E}{\hbar}$.

Искомое решение временно́го уравнения Шредингера для свободной частицы получим, подставив выражения (7) в формулу (3):

$$\Psi(x, t) = A\mathrm{e}^{i(kx - \omega t)} = A\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}.$$

Ответ: $\Psi(x, t) = A\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$.

6.62. Волновая функция основного состояния частицы в одномерном потенциальном поле $U(x) = \dfrac{m\omega_0^2 x^2}{2}$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, имеет вид $\psi(x) = A\mathrm{e}^{-ax^2}$ (A — нормировочный коэффициент, a — положительная постоянная). Используя уравнение Шредингера, определите постоянную a и энергию частицы в этом состоянии.

Дано: $U(x) = \dfrac{m\omega_0^2 x^2}{2}$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $\psi(x) = A\mathrm{e}^{-ax^2}$.

Найти: a; E.

Решение. Одномерное стационарное уравнение Шредингера с учетом функции $U(x) = \dfrac{m\omega_0^2 x^2}{2}$ запишем в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -2Aa\mathrm{e}^{-ax^2} + 4Aa^2x^2\mathrm{e}^{-ax^2}. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1):

$$(-2a + 4a^2x^2)A\mathrm{e}^{-ax^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)A\mathrm{e}^{-ax^2} = 0.$$

Сокращая на $A\mathrm{e}^{-ax^2}$ и группируя члены, получаем

$$\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - 2a\right) + \left(4a^2 - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2}\right)x^2 = 0.$$

Приравняем выражения в каждой из скобок уравнения нулю:

$$4a^2 - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} = 0, \quad \frac{2mE}{\hbar^2} - 2a = 0.$$

Тогда

$$a = \frac{m\omega_0}{2\hbar}, \quad E = \frac{\hbar^2 a}{m}.$$

Следовательно,

$$E = \frac{\hbar\omega_0}{2}, \text{ где } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ответ: $a = \dfrac{m\omega_0}{2\hbar}$; $E = \dfrac{\hbar\omega_0}{2}$.

6.63. Докажите, что собственные значения эрмитова оператора вещественны.

Решение. Операторы являются эрмитовыми, если для них выполняется условие

$$\int_{\infty} \psi_1^* \hat{L} \psi_2 \,\mathrm{d}V = \int_{\infty} \psi_2 \hat{L}^* \psi_1^* \,\mathrm{d}V, \tag{1}$$

где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции, а звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины. Для простоты примем, что $\psi_1 = \psi_2 = \psi$. Тогда соответственно левая и правая части условия (1):

$$\int\limits_{\infty} \psi^* \hat{L} \psi \, \mathrm{d}V = \int\limits_{\infty} \psi^* L \psi \, \mathrm{d}V = L \int\limits_{\infty} \psi^* \psi \, \mathrm{d}V = L, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\infty} \psi \hat{L}^* \psi^* \, \mathrm{d}V = \int\limits_{\infty} \psi L^* \psi^* \, \mathrm{d}V = L^* \int\limits_{\infty} \psi^* \psi \, \mathrm{d}V = L^* \tag{3}$$

(учли уравнения для собственных значений и собственных функций $\hat{L}\psi = L\psi$ и $\hat{L}^*\psi^* = L^*\psi^*$, а также условие нормировки $\int\limits_{\infty} \psi^*\psi \, \mathrm{d}V = 1$).

Из выражений (2) и (3) получаем, что $L = L^*$, а это возможно лишь тогда, когда собственное значение L оператора вещественно.

6.64. Докажите, что оператор $\hat{L} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ является самосопряженным оператором.

Решение. Линейный оператор $\hat{L}$ является самосопряженным, если выполняется условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{L} \psi_2 \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{L}^* \psi_1^* \mathrm{d}x, \tag{1}$$

где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции, а звездочка означает операцию комплексного сопряжения над соответствующей величиной. Комплексно-сопряженный оператор

$$\hat{L}^* = -\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Проинтегрируем левую часть выражения (1):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{L} \psi_2 \mathrm{d}x = \frac{1}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{i} \psi_1^* \psi_2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\psi_1^*}{\mathrm{d}x} \psi_2 \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{i} \frac{\mathrm{d}\psi_1^*}{\mathrm{d}x} \right) \psi_2 \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x} \right)^* \psi_2 \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{L}^* \psi_1^* \mathrm{d}x.$$

Получили правую часть выражения (1) (учли, что, по условию, функции ψ_1 и ψ_2 квадратично интегрируемы и обращаются в нуль на пределах интегрирования). Следовательно, оператор $\hat{L} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ удовлетворяет критерию самосопряженности.

6.65. Учитывая, что с движением свободной частицы, обладающей определенным импульсом, связывается плоская волна де Бройля, подтвердите, что оператор проекции импульса $\hat{p}_x$ действительно равен $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Решение. Плоская волна де Бройля для одномерного случая

$$\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)} = \psi_p(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \tag{1}$$

где $\psi_p(x) = A\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}p_x x}$ — координатная часть волновой функции (1). Запишем уравнение для собственных функций в виде

$$\hat{p}_x \psi_p(x) = p_x \psi_p(x), \tag{2}$$

где неизвестным является оператор $\hat{p}_x$. Приняв оператор $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, получим

$$\hat{p}_x \psi_p(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[A\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}p_x x}\right] = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{i}{\hbar}p_x\right)A\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}p_x x} = p_x \psi_p(x),$$

т. е. уравнение (2) действительно выполняется при заданном виде оператора.

6.66. Выведите выражение для оператора квадрата импульса.

Решение. Согласно принципу соответствия, между квантово-механическими операторами имеют место те же соотношения, что и между величинами классической физики.

Между квадратом импульса и квадратами его проекций в классической механике существует известная связь:

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

Поэтому оператор квадрата импульса

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\Delta,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Ответ: $\hat{p}^2 = -\hbar^2\Delta$.

6.67. Основываясь на правилах вычисления средних значений, подтвердите вывод о том, что оператор координаты есть действительно сама координата, т. е. $\hat{x} = x$.

Решение. Пусть состояние одномерного движения частицы описывается волновой функцией $\psi(x)$.

Квадрат модуля волновой функции $|\psi(x)|^2$ — плотность вероятности — определяет вероятность нахождения частицы в точке с координатой x. Согласно общим правилам, среднее значение координаты

$$\langle x\rangle = \int \psi^*(x)\psi(x)x\,\mathrm{d}x = \int \psi^*(x)x\psi(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

С другой стороны, среднее значение динамической переменной, которой сопоставляется оператор $\hat{L}$,

$$\langle L\rangle = \int \psi^*(x)\hat{L}\psi(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Сравнивая выражения (1) и (2), видим, что в качестве оператора координаты необходимо выбрать оператор умножения на эту координату, а именно применение оператора координаты $\hat{x}$ к функции $\psi(x)$ сводится к умножению этой функции на x:

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x),$$

т.е. оператор координаты есть действительно сама координата:

$$\hat{x} = x.$$

6.68. Определите среднее значение кинетической энергии частицы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2l}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}px}$, если волновая функция нормирована в интервале $-l < x < l$.

Дано: $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2l}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}px}$; $-l < x < l$.

Найти: $\langle T\rangle$.

Решение. Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией ψ,

$$\langle L\rangle = \int \psi^* \hat{L}\psi\, \mathrm{d}V, \tag{1}$$

где $\hat{L}$ — оператор, сопоставляемый данной физической величине, а интеграл берется по той области, в которой волновая функция отлична от нуля.

Оператор кинетической энергии в данном случае

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Согласно формуле (1) с учетом (2) и пределов интегрирования, получим искомое среднее значение кинетической энергии:

$$\langle T\rangle = \int_{-l}^{l}\psi^*\hat{T}\psi\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}px}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}px}\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{p^2}{\hbar^2}\,\mathrm{d}x = \frac{p^2}{2m}.$$

Ответ: $\langle T\rangle = \dfrac{p^2}{2m}$.

6.69. Покажите, что в сферических координатах оператор проекции момента импульса на полярную ось имеет вид $\hat{L}_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

Решение. Декартовы координаты x, y, z связаны со сферическими координатами r, ϑ, φ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi,\\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi,\\ z &= r\cos\vartheta.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Используя (1), представим производную $\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}r\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial y}r\sin\vartheta\cos\varphi = \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi.$$

Тогда, согласно формуле для оператора проекции момента импульса на ось z

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

получаем, что в сферических координатах оператор проекции момента импульса на полярную ось имеет вид

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

6.70. Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Записав уравнение Шредингера, найдите собственные значения энергии E_n частицы.

Дано: $0 \leqslant x \leqslant l$, $U = 0$; $x < 0$, $U \to \infty$; $x > l$, $U \to \infty$.

Найти: E_n.

Решение. Уравнение Шредингера для стационарных состояний в случае одномерной задачи

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

По условию задачи [бесконечно высокие стенки (см. рисунок)], частица не проникает за пределы ямы, поэтому вероятность ее обнаружения (а следовательно, и волновая функция) за пределами ямы равна нулю. На границах ямы (при $x = 0$ и $x = l$) непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль. Следовательно, граничные условия в данном случае имеют вид

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{1}$$

В пределах ямы ($0 \leqslant x \leqslant l$) уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$$

или

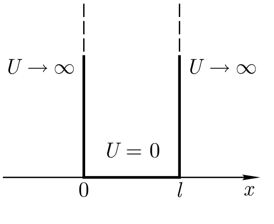
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0, \tag{2}$$

где

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \tag{3}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2)

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx.$$



Так как по (1) $\psi(0) = 0$, то $B = 0$. Тогда

$$\psi(x) = A\sin kx.$$

Условие (1) $\psi(l) = A\sin kl = 0$ выполняется только при $kl = n\pi$, где n — целые числа, т. е. необходимо, чтобы

$$k = \frac{n\pi}{l}. \tag{4}$$

Из выражений (3) и (4) следует, что

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

т. е. стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, удовлетворяется только при собственных значениях E_n, зависящих от целого числа n. Следовательно, энергия E_n частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками принимает лишь *определенные дискретные значения*, т. е. *квантуется*.

Ответ: $E_n = n^2\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

6.71. Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Определите нормированную собственную волновую функцию $\psi_n(x)$, описывающую состояние частицы при данных условиях.

Дано: $0 \leqslant x \leqslant l$, $U = 0$; $x < 0$, $U \to \infty$; $x > l$, $U \to \infty$.

Найти: $\psi_n(x)$.

Решение. Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеет вид (см. рисунок и решение предыдущей задачи):

$$\psi(x) = A\sin kx, \tag{1}$$

где $k = \dfrac{n\pi}{l}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Подставив это выражение в (1), получим собственную волновую функцию

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{2}$$

Постоянную A найдем из условия нормировки, которое для данного случая запишется [с учетом (2)] в виде:

$$\int_0^l \left|\psi_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x = A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 1.$$

В результате интегрирования получим

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Тогда искомая нормированная собственная волновая функция запишется в виде:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ответ: $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{n\pi}{l}x \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

6.72. Электрон находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Определите среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона.

Дано: l.

Найти: $\langle x \rangle$.

Решение. Согласно общему правилу нахождения среднего значения,

$$\langle x \rangle = \int\limits_0^l x \left|\psi_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x, \tag{1}$$

где интеграл берется в той области, где функция $\psi_n(x)$ отлична от нуля ($0 < x < l$).

Собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (см. предыдущую задачу),

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), после соответствующих преобразований найдем искомое среднее значение координаты

$$\langle x \rangle = \frac{2}{l} \int\limits_0^l x \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \int\limits_0^l x \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x = \frac{l}{2}.$$

Ответ: $\langle x \rangle = \dfrac{l}{2}$.

6.73. Докажите, что собственные функции $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \dfrac{n\pi}{l} x$ и $\psi_m(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \dfrac{m\pi}{l} x$, описывающие состояние частицы в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками, удовлетворяют условию ортогональности.

Решение. Собственные функции, отвечающие состояниям n и m, являются ортогональными, если выполняется условие

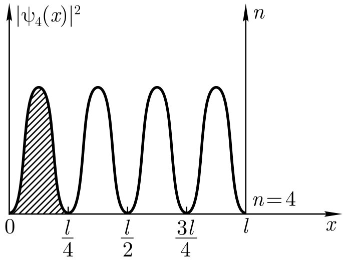
$$\int\limits_0^l \psi_n(x) \psi_m(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 \text{ при } n = m, \\ 0 \text{ при } n \neq m. \end{cases} \tag{1}$$

Согласно условию (1),

$$\int\limits_0^l \psi_n(x) \psi_m(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{l} \int\limits_0^l \frac{1}{2} \cos \frac{(n-m)\pi}{l} x \mathrm{d}x - \frac{2}{l} \int\limits_0^l \frac{1}{2} \cos \frac{(n+m)\pi}{l} x \mathrm{d}x.$$

Проанализируем полученное выражение. При $n = m$ первое слагаемое равно $\dfrac{2}{l} \cdot \dfrac{l}{2} = 1$, а второе — нулю. При $n \neq m$ оба интеграла (а следовательно, и оба слагаемых) обращаются в нуль. Таким образом, искомое условие ортогональности (1) доказано.



6.74. Электрон в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $l = 200$ пм с бесконечно высокими стенками находится в возбужденном состоянии ($n = 4$). Определите: 1) минимальную энергию электрона; 2) вероятность W обнаружения электрона в первой четверти «ямы».

Дано: $l = 200$ пм ($2 \cdot 10^{-10}$ м); $n = 4$; $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{l}{4}$.

Найти: 1) $E_{\min}$; 2) W.

Решение. Собственные значения энергии электрона, находящегося на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка. Минимальную энергию электрон имеет при минимальном n, т. е. при $n = 1$:

$$E_{\min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}.$$

Вероятность обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x, \tag{1}$$

где $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \dfrac{n\pi}{l} x$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) — нормированная собственная волновая функция, соответствующая данному состоянию.

Возбужденному состоянию $n = 4$ отвечает собственная функция

$$\psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{4\pi}{l} x \tag{2}$$

и плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии

$$\left|\psi_4(x)\right|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{4\pi}{l} x,$$

представленная на рисунке.

Согласно условию задачи, $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{l}{4}$. Поэтому, подставив (2) в (1), получим

$$W = \frac{2}{l} \int_0^{l/4} \sin^2 \frac{4\pi}{l} x \,\mathrm{d}x.$$

Заменив $\sin^2 \dfrac{4\pi x}{l} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos \dfrac{8\pi x}{l}\right)$, запишем

$$W = \frac{1}{l}\left[\int_0^{l/4} \mathrm{d}x - \int_0^{l/4} \cos \frac{8\pi x}{l} \mathrm{d}x\right] = \frac{1}{l}\left[x - \frac{l}{8\pi} \sin \frac{8\pi}{l} x \Big|_0^{l/4}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{8\pi}(\sin 2\pi - \sin 0).$$

Ответ: 1) $E_{\min} = 1{,}5 \cdot 10^{-18}$ Дж (9,37 эВ); 2) $W = 0{,}25$.

6.75. Электрон в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $l = 100$ пм с бесконечно высокими стенками находится в возбужденном состоянии ($n = 3$). Определите: 1) энергию электрона в возбужденном состоянии; 2) вероятность W обнаружения электрона в средней трети «ямы».

Дано: $l = 100$ пм (10^{-10} м); $x_1 = \dfrac{1}{3}l$; $x_2 = \dfrac{2}{3}l$; $n = 3$.

Найти: 1) E_3; 2) W.

Решение. Собственное значение энергии электрона, находящегося на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка.

При $n = 3$:

$$E_3 = 3^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}.$$

Вычисляя, получаем $E_3 = 5{,}37 \cdot 10^{-17}$ Дж (336 эВ).

Вероятность обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$

$$W = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left|\psi_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x, \tag{1}$$

где $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ — нормированная собственная функция, соответствующая данному состоянию. Возбужденному состоянию $n = 3$ отвечает собственная функция

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{3\pi x}{l}. \tag{2}$$

Согласно условию задачи, $x_1 = \dfrac{1}{3}l$; $x_2 = \dfrac{2}{3}l$, поэтому, подставив (2) в (1), получим

$$W = \frac{2}{l} \int\limits_{l/3}^{2l/3} \sin^2\frac{3\pi}{l}x\,\mathrm{d}x.$$

Заменив $\sin^2\dfrac{3\pi}{l}x = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{6\pi}{l}x\right)$, запишем

$$W = \frac{1}{l}\left[\int\limits_{l/3}^{2l/3} \mathrm{d}x - \int\limits_{l/3}^{2l/3} \cos\frac{6\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{l}\left[\frac{l}{3} - \frac{1}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\pi}(\sin 4\pi - \sin 2\pi).$$

Ответ: 1) $E_3 = 336$ эВ; 2) $W = 0{,}333$.

6.76. Определите длину волны фотона, испускаемого при переходе электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной $l = 0{,}2$ нм из состояния с $n = 2$ в состояние с наименьшей энергией.

Дано: $l = 0{,}2$ нм ($2 \cdot 10^{-10}$ м); $n = 2$; $m = 1$.

Найти: λ.

Решение. Согласно закону сохранения энергии, энергия фотона,

$$h\nu = E_n - E_m,$$

а длина волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E_n - E_m}. \qquad (1)$$

Энергия микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \qquad (2)$$

где m — масса электрона; l — ширина «ямы»; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

Поскольку по условию задачи переход происходит из состояния с $n = 2$ в состояние с наименьшей энергией, а наименьшая энергия отвечает $m = 1$, то

$$E_n - E_m = E_2 - E_1 = 4E_1 - E_1 = 3E_1. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (1) и учитывая (2), получим искомую длину волны фотона:

$$\lambda = \frac{ch}{3E_1} = \frac{2}{3}\frac{chml^2}{\pi^2\hbar^2} = \frac{8}{3}\frac{cml^2}{h}.$$

Ответ: $\lambda = 44$ нм.

6.77. Определите ширину l одномерной прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, при которой дискретность энергетического спектра электрона, находящегося в возбужденном состоянии ($n = 3$), вдвое меньше его средней кинетической энергии при температуре $T = 300$ К.

Дано: $2\Delta E_n = \langle E_к \rangle$; $n = 3$; $T = 300$ К.

Найти: l.

Решение. Собственные значения энергии E_n электрона, находящегося на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \qquad (1)$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка; l — ширина «ямы»; m — масса электрона.

Энергетический интервал между двумя соседними уровнями

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = (2n+1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \qquad (2)$$

[учли формулу (1)].

Согласно условию задачи,

$$2\Delta E_n = \langle E_{\text{к}} \rangle. \tag{3}$$

Средняя кинетическая энергия электрона

$$\langle E_{\text{к}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \tag{4}$$

где k — постоянная Больцмана.

Подставив в формулу (3) выражения (2) и (4), получим

$$2(2n+1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} = \frac{3}{2}kT,$$

откуда искомая ширина «ямы»

$$l = \pi\hbar\sqrt{\frac{(2n+1)}{3kmT}}.$$

Ответ: $l = 8{,}2$ нм.

6.78. Частица массой m движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы $E > U_0$ (см. рисунок). Запишите уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы, найдите его решения и определите коэффициенты отражения и прозрачности.

Решение. Рассматриваемый прямоугольный потенциальный порог конечной высоты описывается потенциальной энергией вида

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < \infty), \\ U_0 & (0 < x < \infty). \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы в поле бесконечно протяженного порога

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi = 0, \tag{2}$$

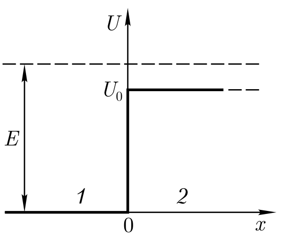
где потенциальная энергия $U(x)$ задается условием (1).

В случае $E > U_0$ (условие задачи) уравнение (2) примет вид:

для области 1

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0; \tag{3}$$

для области 2



$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = 0. \tag{4}$$

Если ввести обозначения

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \tag{5}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \tag{6}$$

(λ_1 и λ_2 — соответственно длины волн де Бройля в областях *1* и *2*), то уравнения (3) и (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k_1^2\psi_1 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + k_2^2\psi_2 = 0. \tag{8}$$

Общие решения уравнений (7) и (8) известны:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}, \tag{9}$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x}. \tag{10}$$

В приведенных решениях e^{ikx} соответствует плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси x (падающей волне), а e^{-ikx} — плоской волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси x (отраженной волне). Естественно, что о волнах может идти речь после умножения на временно́й множитель, поскольку ψ — координатная часть волновой функции.

В области *1* имеются как падающая, так и отраженная волны, поэтому в данном случае имеет смысл общее решение (9) в виде двух слагаемых:

$$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \tag{11}$$

(для простоты рассуждений амплитуду падающей волны примем за единицу, т. е. $A_1 = 1$).

В области *2* наблюдается только прошедшая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x. Поэтому в выражении (10) следует принять $B_2 = 0$ и тогда

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x}. \tag{12}$$

Для того чтобы функции и их первые производные были непрерывными, необходимо, чтобы на границе областей *1* и *2* (т. е. в точке $x = 0$) они плавно переходили друг в друга (без скачка). Эти требования приводят к следующим условиям непрерывности

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0). \tag{13}$$

Из этих соотношений можно найти коэффициенты B_1 и A_2. Условия (13) равносильны следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned} 1 + B_1 &= A_2, \\ k_1 - k_1B_1 &= k_2A_2 \end{aligned}\right\}$$

($A_1 = 1$), откуда

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \tag{14}$$

В квантовой теории, по аналогии с оптикой, вводятся коэффициенты отражения R и прозрачности D. Эти коэффициенты равны соответственно отношению плотности потока отраженных (n_1') и прошедших (n_2) частиц к плотности потока падающих (n_1) частиц. Учитывая, что (формулы приводятся без вывода)

$$n_1 = \frac{\hbar k_1}{m}|A_1|^2, \quad n_1' = \frac{\hbar k_1}{m}|B_1|^2, \quad n_2 = \frac{\hbar k_2}{m}|A_2|^2, \tag{15}$$

находим

$$R = \frac{n_1'}{n_1} = |B_1|^2 = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2, \tag{16}$$

$$D = \frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1}|A_2|^2 = \frac{4k_1k_2}{|k_1 + k_2|^2} \tag{17}$$

($A_1 = 1$; значения B_1 и A_2 [см. (14)]).

6.79. Частица массой $m = 10^{-19}$ кг, двигаясь в положительном направлении оси x со скоростью $v = 20$ м/с, встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой $U_0 = 100$ эВ. Определите коэффициенты отражения R и прозрачности D волн де Бройля для данного порога.

Дано: $m = 10^{-19}$ кг; $v = 20$ м/с; $U_0 = 100$ эВ.

Найти: R; D.

Решение. Частица движется как свободная, поэтому ее полная энергия равна кинетической:

$$E = T = \frac{mv^2}{2},$$

откуда, вычисляя, получаем, что энергия частицы $E = 125$ эВ, т. е. $E > U_0$ (энергия частицы больше высоты потенциального порога). Коэффициент отражения

$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2, \tag{1}$$

где $k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$ — волновые числа, отвечающие движению частицы в областях *1* и *2* (см. рисунок к предыдущей задаче).

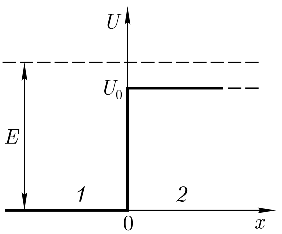
По условию задачи k_1 и k_2 — действительные числа, причем $k_1 > k_2$, поэтому знак модуля в формуле (1) можно опустить. Учитывая значения k_1 и k_2 и подставив их в выражение (1), получаем искомый коэффициент отражения

$$R = \left(\frac{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E - U_0)}}{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m(E - U_0)}}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{U_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{U_0}{E}}}\right)^2.$$

Согласно формуле, $R + D = 1$, поэтому

$$D = 1 - R.$$

Ответ: $R = 0{,}146$; $D = 0{,}854$.



6.80. Электрон с энергией $E = 1{,}2$ кэВ движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой $U_0 = 150$ эВ. Определите, во сколько раз изменится длина волны де Бройля при прохождении через этот потенциальный порог.

Дано: $E = 1{,}2$ кэВ ($1{,}2 \cdot 10^3$ эВ); $U_0 = 150$ эВ.

Найти: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Решение. Длины волн де Бройля, соответствующие областям *1* и *2* (см. рисунок),

$$\lambda_1 = \frac{h}{mv_1}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{mv_2},$$

где m — масса электрона; v_1 и v_2 — его скорость в областях *1* и *2*. Учитывая эти соотношения, получаем

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{1}$$

где

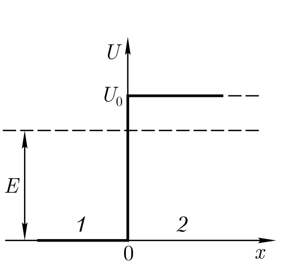
$$v_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2(E - U_0)}{m}} \tag{2}$$

[в области *1* кинетическая энергия равна полной энергии (так как $U_0 = 0$), а в области *2* она, согласно закону сохранения энергии, равна $E - U_0$]. Подставив выражения (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{E}{(E - U_0)}}.$$

Ответ: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}07$.

6.81. Частица массой m движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы $E < U_0$ (см. рисунок). Запишите уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы, найдите его решения и определите коэффициент отражения, а также вероятность найти частицу на единице длины.



Решение. Рассматриваемый прямоугольный потенциальный порог конечной высоты описывается потенциальной энергией вида

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < \infty), \\ U_0 & (0 < x < \infty). \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы в поле бесконечно протяженного порога

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-U(x)]\psi=0, \tag{2}$$

где потенциальная энергия $U(x)$ задается условием (1).

В случае $E < U_0$ (условие задачи) уравнение (2) примет вид *для области 1*

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k^2\psi_1=0 \quad \left(k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right); \tag{3}$$

для области 2

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-\beta^2\psi_2=0 \quad \left(\beta=\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}\right). \tag{4}$$

Общие решения уравнений (3) и (4):

$$\psi_1(x)=A_1\mathrm{e}^{ikx}+B_1\mathrm{e}^{-ikx}, \tag{5}$$

$$\psi_2(x)=A_2\mathrm{e}^{\beta x}+B_2\mathrm{e}^{-\beta x}. \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что при $x\to\infty$ $\psi_2(x)\to\infty$. Однако волновая функция по своему физическому смыслу должна оставаться конечной при всех значениях x. Следовательно, нужно принять $A_2=0$. Тогда решение имеет экспоненциальный характер:

$$\psi_2(x)=B_2\mathrm{e}^{-\beta x}. \tag{7}$$

Коэффициент отражения [см. (15) и (16) в задаче 6.78]

$$R=\frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}. \tag{8}$$

Воспользовавшись условиями непрерывности волновых функций и их первых производных на границе областей (в точке $x=0$),

$$\psi_1(0)=\psi_2(0), \quad \psi_1'(0)=\psi_2'(0),$$

из выражений (5) и (7) получим

$$A_1+B_1=B_2, \quad ik(A_1-B_1)=-\beta B_2. \tag{9}$$

Из формулы (9) следует, что

$$A_1-B_1=-\frac{\beta B_2}{ik}=\frac{i\beta B_2}{k}. \tag{10}$$

Тогда из выражений (9) и (10) получим

$$A_1=\frac{B_2}{2}\left(1+\frac{i\beta}{k}\right), \quad B_1=\frac{B_2}{2}\left(1-\frac{i\beta}{k}\right).$$

Следовательно, коэффициент отражения

$$R=\frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}=\left|\frac{k-i\beta}{k+i\beta}\right|^2=1.$$

Таким образом, при $E < U_0$ коэффициент отражения равен 1.

Вероятность найти частицу на единице длины

$$\left|\psi_2\right|^2 = \psi_2\psi_2^* = \psi_2^2 = B_2^2 \mathrm{e}^{-2\beta x} = B_2^2 \mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,x},$$

т.е. выводы квантовой механики приводят к заключению, что в случае $E < U_0$ (в случае высокого прямоугольного потенциального порога) хотя и наблюдается явление полного отражения, *имеется отличная от нуля вероятность найти частицу в области 2, правда, она экспоненциально убывает с увеличением x.* Таким образом, в отличие от классического случая *микрочастица благодаря своим волновым свойствам может проникать в области, «запрещенные» для классических частиц.*

6.82. Электрон с энергией $E = 30$ эВ встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой $U_0 = 31$ эВ (см. рисунок к задаче 6.81). Определите относительную плотность вероятности η пребывания электрона в области *2* на расстоянии $x = 100$ пм от границы областей (т.е. отношение плотности вероятности пребывания электрона в точке $x = 100$ пм к плотности вероятности его пребывания на границе областей при $x = 0$).

Дано: $E = 30$ эВ; $U_0 = 31$ эВ; $x = 100$ пм (10^{-10} м).

Найти: η.

Решение. Согласно условию задачи, относительная плотность вероятности пребывания электрона в области *2* на расстоянии x от границы областей

$$\eta = \frac{\left|\psi(x)\right|^2}{\left|\psi(0)\right|^2}. \tag{1}$$

Уравнение Шредингера для случая $E < U_0$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \beta^2\psi = 0, \tag{2}$$

где $\beta = \sqrt{\dfrac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$. Решение уравнения (2) представляется в виде

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{\beta x} + B\mathrm{e}^{-\beta x}.$$

Ввиду конечности волновой функции при всех значениях x необходимо принять $A = 0$. Тогда

$$\psi(x) = B\mathrm{e}^{-\beta x}. \tag{3}$$

Подставляя значение β в формулу (3), получаем

$$\psi(x) = B\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,x}.$$

Следовательно, плотность вероятности пребывания электрона в точке x

$$\left|\psi(x)\right|^2 = B^2\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,x}. \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в формулу (1) и учитывая, что $\left|\psi(0)\right|^2 = B^2$, находим искомую относительную плотность вероятности:

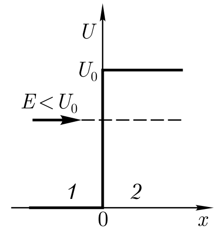
$$\eta = \mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,x}.$$

Ответ: $\eta = 0{,}359$.

6.83. Частица массой m с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы $E < U_0$ (см. рисунок). Определите плотность вероятности обнаружения частицы на расстоянии x от потенциального порога, принимая, что ψ-функция нормирована так, что $A_1 = 1$.

Дано: m; $E < U_0$; $A_1 = 1$.

Найти: $w(x)$.



Решение. Плотность вероятности обнаружения частицы на расстоянии x от потенциального порога

$$w(x) = |\psi_2(x)|^2.$$

Для случая $E < U_0$ (условие задачи) уравнение Шредингера для стационарных состояний и его решения для областей *1* и *2* запишутся в виде (см. решение задачи 6.78)

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0, \qquad \psi_1(x) = \mathrm{e}^{ik_1x} + B_1\mathrm{e}^{-ik_1x}, \qquad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi_2 = 0, \qquad \psi_2(x) = A_2\mathrm{e}^{ik_2x}, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}.$$

Воспользовавшись условиями непрерывности волновых функций и их первых производных на границе областей (в точке $x = 0$)

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0),$$

получим $1 + B_1 = A_2$; $k_1 - k_1B_1 = k_2A_2$, откуда

$$A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

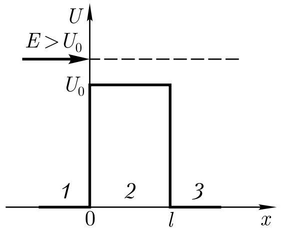
Тогда искомая плотность вероятности

$$w(x) = \left|\psi_2(x)\right|^2 = \left|A_2\mathrm{e}^{ik_2x}\right|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right|^2\mathrm{e}^{2ik_2x} = \left|\frac{2k_1}{k_1+i\beta}\right|^2\mathrm{e}^{-2\beta x},$$

где $k_2 = i\beta$, $\beta = \dfrac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$.

Ответ: $w(x) = \left|\dfrac{2k_1}{k_1+i\beta}\right|^2\mathrm{e}^{-2\beta x}$, где $k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$.

6.84. Частица массой m с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой



U_0 и шириной l. Энергия частицы $E > U_0$ (см. рисунок). Запишите уравнения Шредингера для стационарных состояний частицы и найдите их решения.

Решение. Рассматриваемый потенциальный барьер конечной ширины описывается потенциальной энергией вида

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0); \\ U_0 & (0 \leqslant x \leqslant l); \\ 0 & (x > l). \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi = 0,$$

где потенциальная энергия $U(x)$ задается условием (1).

В случае $E > U_0$ (условие задачи) уравнение Шредингера для стационарных состояний примет вид:
для областей 1, 3

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_{1,3} = 0; \tag{2}$$

для области 2

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = 0. \tag{3}$$

Обозначив

$$k_{1,3} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,3}}, \tag{4}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \tag{5}$$

где $\lambda_{1,3}$ и λ_2 — соответственно длины волн де Бройля в областях *1*, *3* и *2*, получим уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + k_{1,3}^2 \psi_{1,3} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0. \tag{7}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (6) и (7) для трех областей:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_{1,3}x} + B_1 e^{-ik_{1,3}x}, \tag{8}$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}, \tag{9}$$

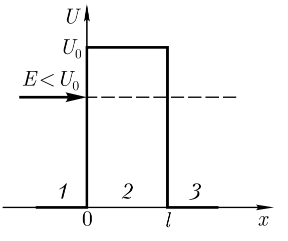
$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_{1,3}x} + B_3 e^{-ik_{1,3}x}. \tag{10}$$

Слагаемые вида $e^{\pm ikx}$ соответствуют плоским волнам, распространяющимся в положительном (e^{ikx}) и отрицательном (e^{-ikx}) направлениях оси x (о волне как таковой можно говорить после умножения координатной части волновой функции на временно́й множитель $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$).

Если в областях *1* и *2* имеются как падающая, так и отраженная волны [здесь смысл имеют общие решения (8) и (9) в виде двух слагаемых], то в области *3* имеется только волна, прошедшая сквозь барьер и распространяющаяся вдоль положительного направления оси x. Поэтому коэффициент B_3 в выражении (10) следует принять равным нулю. Тогда

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_{1,3}x}.$$

6.85. Частица массой m с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной l. Энергия частицы $E < U_0$ (см. рисунок). Запишите уравнения Шредингера для стационарных состояний частицы и найдите их решения.



Решение. Рассматриваемый потенциальный барьер конечной ширины описывается потенциальной энергией вида:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0); \\ U_0 & (0 \leqslant x \leqslant l); \\ 0 & (x > l). \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi = 0,$$

где потенциальная энергия $U(x)$ задается условием (1).

В случае $E < U_0$ (условие задачи) уравнение Шредингера для стационарных состояний примет вид:

для областей 1, 3

$$\frac{\partial^2\psi_{1,3}}{\partial x^2} + k^2\psi_{1,3} = 0 \quad \left(k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right); \tag{2}$$

для области 2

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \beta^2\psi_2 = 0 \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}\right). \tag{3}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (2) и (3) для трех областей:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, \tag{4}$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}, \tag{5}$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}. \tag{6}$$

Решение (6) содержит также волны (после умножения на временно́й множитель), распространяющиеся в обе стороны. Однако в области *3* имеется только волна, прошедшая сквозь барьер и распространяющаяся слева направо. Поэтому коэффициент B_3 в формуле (6) следует принять равным нулю.

Тогда

$$\psi_3(x) = A_3 \mathrm{e}^{ikx}.$$

Внутри барьера решение (5) уже не соответствует плоским волнам, распространяющимся в обе стороны, поскольку показатели экспонент не мнимые, а действительные. Однако теперь нельзя отбрасывать экспоненциально возрастающее решение, так как область, где $U_0 > E$, имеет конечные размеры. В случае $\beta l \gg 1$, т. е. при предположении, что показатели экспонент сильно изменяются от одной границы барьера к другой, можно доказать, что $B_2 \gg A_2$. Следовательно, на границе потенциального барьера, где $x = 0$, определяющим слагаемым волновой функции $\psi_3(x)$ является слагаемое, содержащее $B_2 \mathrm{e}^{-\beta x}$.

6.86. Две частицы, электрон и протон, обе с энергией $E = 5$ эВ, движутся в положительном направлении оси x, встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 1$ пм. Определите отношение вероятностей прохождения частицами этого барьера.

Дано: $E = 5$ эВ $(8 \cdot 10^{-19}$ Дж); $U = 10$ эВ $(16 \cdot 10^{-19}$ Дж); $l = 1$ пм $(10^{-12}$ м).

Найти: $\dfrac{W_e}{W_p}$.

Решение. Вероятность прохождения частицы сквозь потенциальный барьер определяется коэффициентом прозрачности: $W = D$,

$$D = D_0\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\, l}, \tag{1}$$

где $D_0 = 1$ (множитель, приравниваемый к единице); m — масса частицы; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

Исходя из формулы (1), искомое отношение вероятностей прохождения частицами барьера

$$\frac{W_e}{W_p} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_e(U-E)}\, l}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_p(U-E)}\, l}},$$

где $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Ответ: $\dfrac{W_e}{W_p} = 2{,}6$.

6.87. Протон и электрон, обладая одинаковой энергией, движутся в положительном направлении оси x и встречают на своем пути прямоугольный потенциальный барьер. Определите, во сколько раз надо сузить потенциальный барьер, чтобы вероятность прохождения его протоном была такая же, как для электрона.

Дано: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: $\dfrac{l}{l'}$.

Решение. Вероятность прохождения частицы сквозь потенциальный барьер по физическому содержанию равна коэффициенту прозрачности, т. е. $W = D$. Следовательно, вероятность того, что частица пройдет сквозь потенциальный барьер, определяется выражением

$$W = D = D_0\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,l},$$

где $D_0 = 1$; l — ширина барьера; m — масса частицы; U_0 — высота потенциального барьера; E — энергия частицы. Согласно условию задачи, вероятности прохождения барьеров электроном и протоном одинаковы, поэтому

$$D_0\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0-E)}\,l} = D_0\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_p(U_0-E)}\,l'}, \qquad (1)$$

где l и l' — соответственно (при равных вероятностях прохождения) ширина потенциального барьера для электрона и протона.

Из выражения (1) получим, что при одинаковых U_0 и E

$$\sqrt{m_e}\,l = \sqrt{m_p}\,l',$$

откуда искомое значение

$$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}.$$

Ответ: $\dfrac{l}{l'} = 42{,}8$; барьер надо сузить в 42,8 раза.

6.88. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}15$ нм. Определите в электронвольтах разность энергий $U_0 - E$, при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,4.

Дано: $l = 0{,}15$ нм $(0{,}15 \cdot 10^{-9}$ м); $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $W = 0{,}4$.

Найти: $U_0 - E$.

Решение. Вероятность прохождения электрона сквозь потенциальный барьер по физическому содержанию равна коэффициенту прозрачности, т. е. $W = D$. Следовательно, вероятность того, что электрон пройдет сквозь потенциальный барьер, определяется выражением

$$W = D = D_0\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,l}, \qquad (1)$$

где D_0 принимается при расчетах равным 1. Логарифмируя выражение (1), получаем

$$\ln W = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\,l.$$

Тогда искомая разность энергий

$$U_0 - E = \hbar^2 \frac{(\ln W)^2}{8ml^2}.$$

Ответ: $U_0 - E = 5{,}7 \cdot 10^{-20}$ Дж (0,356 эВ).

Задачи для самостоятельного решения

6.89. Определите импульс и энергию: 1) рентгеновского фотона; 2) протона, считая, что длина волны де Бройля в обоих случаях равна 1 нм. [1) $p = 6{,}63 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с; $E = 1{,}24$ кэВ; 2) $p = 6{,}63 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с; $E = 0{,}822$ мэВ]

6.90. Определите длину волны де Бройля λ для электрона, считая, что его скорость равна среднеквадратичной скорости электрона при $T = 300$ К. [$\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{3kmT}} = 6{,}23$ нм]

6.91. Протон движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $r = 1{,}4$ м. Какова индукция магнитного поля, если дебройлевская длина волны $\lambda = 1{,}97$ пм? [$B = \dfrac{h}{er\lambda} = 1{,}5$ мТл]

6.92. Выведите связь между длиной волны де Бройля λ релятивистской частицы и ее кинетической энергией T. [$\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}$]

6.93. Кинетическая энергия T электрона равна 500 эВ. Определите длину волны де Бройля. [$\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mT}} = 54{,}9$ пм]

6.94. Кинетическая энергия электрона равна 0,7 МэВ. Определите длину волны де Бройля. [$\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}} = 1{,}13$ пм]

6.95. На грань некоторого кристалла под углом $\alpha = 30°$ падает параллельный моноэнергетический пучок электронов. Расстояние между атомными плоскостями кристалла $d = 0{,}2$ нм. Определите скорость v электронов, если они испытывают брэгговское отражение первого порядка. [$v = \dfrac{h}{2dm \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 2{,}1$ Мм/с, m — масса электрона]

6.96. Параллельный пучок нерелятивистских электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 50$ В, падает нормально на две параллельные, лежащие в одной плоскости, щели. Определите расстояние d между щелями, если экран расположен от щелей на расстоянии $l = 1{,}5$ м, а расстояние b между центральным и первым дифракционным максимумами 10 мкм. [$d = \dfrac{hl}{b\sqrt{2meU}} = 26$ мкм]

6.97. Используя общую формулу для фазовой скорости, найдите выражения фазовой скорости волн де Бройля свободно движущейся с постоянной скоростью v частицы в нерелятивистском и релятивистском случаях. [$\dfrac{v}{2}$; $\dfrac{c^2}{v}$]

6.98. Используя общую формулу для групповой скорости, найдите выражения групповой скорости волн де Бройля в нерелятивистском и релятивистском случаях. [В обоих случаях равна скорости v частицы]

6.99. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 1$ кВ. Определите неопределенность координаты электрона, если неопределенность его скорости составляет 0,2 % от ее числового значения. Являются ли электроны при данных условиях квантовыми или классическими частицами? [$\Delta x = \dfrac{\hbar}{0{,}002\sqrt{2meU}} = 3{,}09$ нм; $\dfrac{\Delta v_x}{v_x} \ll 1$]

6.100. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar$, оцените минимально возможную полную энергию электрона в атоме водорода, приняв неопределенность координаты равной радиусу атома. [$E_{\min} = -\dfrac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -13{,}6$ эВ]

6.101. Оцените относительную ширину $\dfrac{\Delta\omega}{\omega}$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии ($\Delta t \approx 10^{-8}$ с) и длина волны излучаемого фотона ($\lambda = 550$ нм). [$\dfrac{\Delta\omega}{\omega} = \dfrac{\lambda}{2\pi c \Delta t} = 2{,}92 \cdot 10^{-8}$]

6.102. Состояние микрочастицы описывается волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$. Запишите выражение для вероятности нахождения частицы в области объема V.

6.103. Запишите условие нормировки волновой функции, пояснив физический смысл записанного выражения.

6.104. Волновая функция, описывающая состояние некоторой частицы, имеет вид $\psi(r) = \dfrac{A}{r} e^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A. [$A = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi a}}$]

6.105. Волновая функция, описывающая состояние некоторой частицы, имеет вид $\psi(r) = \dfrac{A}{r} e^{-\frac{r^2}{a^2}}$, где r — расстояние частицы до силового центра; a — постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A. [$A = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a \sqrt{2\pi}}}$]

6.106. Волновая функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \dfrac{A}{r} e^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — постоянная; A — нормировочный коэффициент. Определите среднее расстояние $\langle r \rangle$ частицы до силового центра. [$\langle r \rangle = \dfrac{a}{2}$]

6.107. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi = Ae^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определите среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона до ядра в основном состоянии. [$\langle r^2 \rangle = 3a^2$]

6.108. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi = Ae^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определите наиболее вероятное расстояние $r_{\text{в}}$ электрона до ядра. [$r_{\text{в}} = a$]

6.109. Записав уравнение Шредингера для стационарных состояний, описывающее движение свободной частицы массой m (импульс частицы p) в положительном направлении оси x, решите его, определив собственные значения энергии. [$E = \dfrac{p^2}{2m}$]

6.110. Определите собственное значение оператора $\hat{L} = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, удовлетворяющее собственной функции $\psi = \cos 2x$. [$L = 4$]

6.111. Принимая известными операторы проекций импульса на координатные оси, выведите выражение для оператора вектора импульса. [$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$]

6.112. Выведите выражение для оператора кинетической энергии. [$\hat{T} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta$]

6.113. Выведите выражение для оператора момента импульса. [$\hat{\vec{L}} = -i\hbar[\vec{r}, \nabla]$]

6.114. Используя полученное в предыдущей задаче выражение для оператора момента импульса, запишите, соответственно векторному произведению, операторы проекций момента импульса на оси координат.

6.115. Запишите общее (временно́е) уравнение Шредингера. Используя оператор полной энергии, представьте это уравнение в операторной форме.

6.116. Запишите стационарное уравнение Шредингера. Используя оператор полной энергии, представьте это уравнение в операторной форме.

6.117. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками находится в основном состоянии. Определите вероятность обнаружения частицы в области $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{4}$. [$W = 0{,}091$]

6.118. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Определите вероятность обнаружения частицы в левой половине ямы. [$W = 0{,}5$]

6.119. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Определите, в каких точках ямы ($0 \leqslant x \leqslant l$) плотность вероятности обнаружения частицы: 1) максимальна; 2) минимальна. Полученный результат поясните графически. [1) w максимальна при $x = \dfrac{l}{4}, \dfrac{3l}{4}$; 2) w минимальна при $x = \dfrac{l}{2}$]

6.120. Определите ширину l одномерной прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона со второго энергетического уровня ($n = 2$) на первый ($m = 1$) испускается фотон с энергией $E = 0{,}5$ эВ. [$l = \sqrt{\dfrac{(n^2 - m^2)\pi^2\hbar^2}{2mE}} = 1{,}5$ нм]

6.121. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $l = 1$ нм с бесконечно высокими стенками. Определите минимальную разность ΔE энергетических уровней электрона, выразив ее в электронвольтах. [$\Delta E = 3E_1 = \dfrac{3\pi^2\hbar^2}{2ml^2} = 1{,}12$ эВ]

6.122. Частица находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Определите отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n}$ к энергии частицы для случаев: 1) $n = 3$; 2) $n = 12$. Объясните физическую сущность полученного результата. [$\dfrac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n} = \dfrac{2n+1}{n^2}$. 1) 0,778; 2) 0,174]

6.123. Частица находится в возбужденном состоянии ($n = 3$) в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Найдите нормированную собственную волновую функцию, описывающую состояние частицы.

6.124. Частица с энергией $E = 100$ эВ, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой $U_0 = 36$ эВ. Определите коэффициент отражения частицы от этого порога. [$R = \dfrac{(\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0})^2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0})^2} = 0{,}012$]

6.125. Электрон с дебройлевской длиной волны $\lambda_1 = 0{,}1$ нм, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой $U_0 = 120$ эВ. Определите длину волны де Бройля λ_2 после прохождения порога. [$\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{1 - U_0/E}} = 221$ пм]

6.126. Электрон, обладая кинетической энергией $T = 500$ эВ, движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 100$ эВ. Во сколько раз при этом изменится дебройлевская длина волны? [$\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\dfrac{T}{T - U_0}} = 1{,}12$]

6.127. Протон с дебройлевской длиной волны $\lambda = 2{,}86$ пм, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути бесконечно протяженный потенциальный порог высотой $U_0 = 140$ эВ. Определите коэффициент отражения R волн де Бройля на границе потенциального барьера. [$R = \left|\dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}}\right|^2 = 1$]

6.128. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно протяженный прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы $E < U_0$ (см. рисунок к задаче 6.81). Определите плотность вероятности $|\psi_2(0)|^2$ обнаружения частицы в точке $x = 0$ области *2*, принимая, что ψ-функция нормирована так, что $A_1 = 1$. [$|\psi_2(0)|^2 = \dfrac{4E}{U_0}$]

6.129. Электрон с энергией $E = 4$ эВ движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 5$ эВ и шириной $l = 0{,}5$ нм. Определите коэффициент прозрачности D потенциального барьера. [$D = 0{,}006$]

6.130. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}15$ нм. Определите, при какой разности энергий $U_0 - E$ вероятность W прохождения электрона сквозь барьер равна 0,5. Вероятность прохождения частицы сквозь потенциальный барьер по физическому смыслу совпадает с коэффициентом прозрачности D, т. е. $W = D$. [$U_0 - E = \dfrac{\hbar^2 \left(\ln 1/W\right)^2}{8ml^2} = 0{,}202$ эВ]

6.131. Принимая, что волновая функция $\psi(x) = Ax\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера для гармонического осциллятора, масса которого m и постоянная квазиупругой силы k, определите собственное значение полной энергии осциллятора. [$E = \dfrac{3}{2}\hbar\omega_0$]

6.3. ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

Основные законы и формулы

• Потенциальная энергия $U(r)$ взаимодействия электрона с ядром в водородоподобном атоме

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

[r — расстояние электрона от ядра; Z — порядковый номер элемента].

• Собственное значение энергии E_n электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

• Энергия электрона в атоме водорода при квантово-механическом описании

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

• Энергия ионизации атома водорода

$$E_i = -E_1 = \frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

• Момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

[l — орбитальное квантовое число, принимающее при заданном n следующие значения: $l = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ (всего n значений)].

• Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l$$

[m_l — магнитное квантовое число, принимающее при заданном l следующие значения: $m_l = 0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm l$ (всего $2l+1$ значений)].

• Правила отбора для орбитального и магнитного квантовых чисел

$$\Delta l = \pm 1,\ \Delta m_l = 0,\ \pm 1.$$

• Нормированная волновая функция, отвечающая $1s$-состоянию (основному состоянию) электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$$

[$a = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ — величина, совпадающая с первым боровским радиусом].

• Вероятность обнаружить электрон в атоме водорода, находящемся в $1s$-состоянии, в интервале от r до $r + \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}W = |\psi_{100}|^2\mathrm{d}V = |\psi_{100}|^2\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

[$dV = 4\pi r^2\mathrm{d}r$ — элемент объема в виде сферического слоя радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$].

• Спин (собственный механический момент импульса) электрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$$

[s — спиновое квантовое число ($s = 1/2$); $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$].

• Проекция спина на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s$$

[m_s — магнитное спиновое квантовое число ($m_s = \pm 1/2$)].

• Полная энергия атома водорода в магнитном поле

$$E_{n,l,m_l} = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} + \mu_B m_l B$$

[n — главное квантовое число; m — масса электрона; e — элементарный заряд; h — постоянная Планка; ε_0 — электрическая постоянная; $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m}$ — магнетон Бора; m_l — магнитное квантовое число, принимающее при данном l следующие значения: $m_l = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$ (всего $2l+1$ значений); l — орбитальное квантовое число, принимающее при заданном n следующие значения: $l = 0, 1, \ldots, n-1$ (всего n значений)].

• Принцип Паули

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1$$

[$Z(n, l, m_l, m_s)$ — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел: n — главное, l — орбитальное, m_l — магнитное, m_s — магнитное спиновое].

Эти числа могут принимать следующие значения:

• главное $n = 1, 2, 3, \ldots$;
• орбитальное $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;
• магнитное $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$;
• магнитное спиновое $m_s = \pm 1/2$.

• Максимальное число электронов $Z(n)$, находящихся в состояниях, определяемых заданным главным квантовым числом n,

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

[l — орбитальное квантовое число].

• Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{ch}{eU}$$

[e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке].

• Закон Мозли, определяющий частоты спектральных линий характеристического рентгеновского излучения:

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

[R — постоянная Ридберга; Z — порядковый номер элемента в Периодической системе; σ — постоянная экранирования; m определяет рентгеновскую серию ($m = 1, 2, 3, \ldots$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m+1$, $m+2, \ldots$)].

• Закон Мозли для линии K_α ($\sigma = 1$)

$$\nu = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right).$$

• Еще одна запись закона Мозли

$$\sqrt{\nu} = a(Z-\sigma)$$

[a — постоянная, имеющая определенное значение для каждой линии; Z — порядковый номер в Периодической системе; σ — постоянная экранирования].

Примеры решения задач

6.132. Рассматривая атом водорода, запишите выражение для потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром, уравнение Шредингера для стационарных состояний, собственные значения энергии, удовлетворяющие уравнению.

Решение. Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром

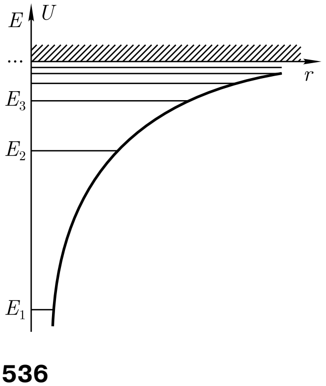
$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{1}$$

где r — расстояние электрона от ядра; e — элементарный заряд электрона; ε_0 — электрическая постоянная.

Графически функция $U(r)$ изображена на рисунке жирной кривой: $U(r)$ с уменьшением r (при приближении электрона к ядру) неограниченно убывает.

Состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией ψ, удовлетворяющей стационарному уравнению Шредингера, учитывающему значение (1)

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0, \tag{2}$$



где m — масса электрона; E — полная энергия электрона в атоме; Δ — оператор Лапласа.

Поле (1), в котором движется электрон, является центрально-симметричным, т. е. зависит только от r. Поэтому уравнение (2) целесообразно решать в сферических координатах r, ϑ, φ, считая, что $\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi)$. В сферической системе координат оператор Лапласа записывается в виде

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

Решение стационарного уравнения Шредингера для атома водорода в сферических координатах методом разделения переменных (см. последующие задачи) с учетом требований, налагаемых на волновую функцию (непрерывность, однозначность и конечность), приводит к собственным значениям энергии электрона в атоме водорода

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \;\; (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots), \tag{3}$$

в точности совпадающим со значениями модели атома водорода по Бору.

Дискретные энергетические уровни E_1, E_2, ..., E_n, определяемые формулой (3), показаны на рисунке в виде горизонтальных прямых.

6.133. Уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в водородоподобном атоме, в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0.$$

Покажите, что это уравнение можно разделить на три уравнения, каждое из которых зависит только от одной из переменных: r, ϑ и φ.

Решение. Уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0 \tag{1}$$

будем решать методом раздельных переменных. Искомую ψ-функцию вначале представим в виде

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,Y(\vartheta,\varphi), \tag{2}$$

где $R(r)$ — радиальная функция, зависящая только от r; $Y(\vartheta,\varphi)$ — угловая функция, зависящая только от ϑ и φ. Подставим (2) в (1):

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)RY = 0. \tag{3}$$

Умножив выражение (3) на $\dfrac{r^2}{RY}$ и разделив переменные, получим

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)r^2 = -\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{4}$$

Поскольку в левой части (4) стоит величина, зависящая только от r, а в правой — только от ϑ и φ, это равенство может выполняться только тогда, когда его левая и правая части равны одной и той же постоянной λ. После преобразования получим

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -\lambda\varphi^2. \tag{6}$$

Для решения (6) угловую функцию $Y(\vartheta, \varphi)$ представим в виде

$$Y(\vartheta, \varphi) = \theta(\vartheta)\Phi(\varphi), \qquad (7)$$

где $\theta(\vartheta)$ — функция, зависящая только от угла ϑ; $\Phi(\varphi)$ — функция, зависящая только от угла φ. Подставив (7) в (6) и перенеся в правую часть равенства переменные, зависящие от φ, получим

$$\frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\theta}{\partial\vartheta}\right)\right] + \lambda\sin^2\vartheta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \qquad (8)$$

Равенство (8)должно выполняться при любых θ и φ, что возможно только тогда, когда его и левая и правая части равны одной и той же постоянной, которая обычно обозначается m_l^2(ее физический смысл выяснен ранее). После перегруппировки слагаемых, зависящих от переменных θ и φ, получаем два уравнения:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\theta}{\partial\vartheta}\right) + \left(\lambda - \frac{m_l^2}{\sin^2\vartheta}\right) = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + m_l^2\Phi = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, искомые три уравнения, каждое из которых зависит только от одной из переменных (r, ϑ, φ), найдены — это уравнения (5), (9) и (10). Поскольку функции R, θ и Φ зависят только от одной переменной, в уравнениях (5), (9) и (10) частные производные можно заменить полными. Уравнения (9) и (10) являются соответственно *полярным и азимутальным волновыми уравнениями*.

6.134. Найдите нормированную волновую функцию, удовлетворяющую азимутальному волновому уравнению [см. задачу 6.133, формулу (10)].

Решение. Как показано в задаче 6.133, азимутальное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + m_l^2\Phi = 0, \qquad (1)$$

где функция Φ зависит только от азимутального угла φ.

Общим решением уравнения (1) является функция

$$\Phi(\varphi) = C\mathrm{e}^{im_l\varphi}, \qquad (2)$$

где C — произвольная постоянная. То, что функция (2) удовлетворяет уравнению (1), легко проверяется подстановкой (предоставляем это сделать читателю).

Функция $\Phi(\varphi)$ должна быть однозначной функцией угла φ; следовательно, она не должна изменяться в случае изменения угла φ на угол, кратный 2π. Таким образом, должно выполняться условие периодичности

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

или

$$C\mathrm{e}^{im_l\varphi} = C\mathrm{e}^{im_l(\varphi+2\pi)}. \qquad (3)$$

Условие (3) будет выполнено, если

$$m_l = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

(ранее показано, что $|m_l|$ не может быть больше, чем l). Постоянную C найдем из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 \, d\varphi = 1. \qquad (4)$$

Если подставить решение (2) в уравнение (4) и вычислить интеграл, то получим, что

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда искомая нормированная волновая функция

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}.$$

6.135. Электрон находится в атоме водорода в $1s$-состоянии. Записав стационарное уравнение Шредингера, определите собственное значение энергии, удовлетворяющее этому состоянию.

Решение. $1s$-состояние электрона в атоме водорода является сферически-симметричным, т. е. не зависит от углов ϑ и φ. Волновая функция электрона в этом состоянии определяется только расстоянием r электрона от ядра: $\psi = \psi_{100}(r)$, где цифры 100 соответственно указывают, что $n = 1$, $l = 0$ и $m_l = 0$. Тогда стационарное уравнение Шредингера в сферической системе координат (см. задачу 6.133)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0$$

для атома водорода примет вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0. \qquad (1)$$

Волновую функцию, описывающую $1s$-состояние электрона в атоме водорода, будем искать в виде

$$\psi = Ce^{-\frac{r}{a}}, \qquad (2)$$

где a — постоянная, имеющая размерность длины; C — некоторая постоянная, определяемая из условия нормировки. После подстановки ψ, $\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ и $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$ в уравнение (1), сокращения на $Ce^{-\frac{r}{a}}$ и перегруппировки членов получим

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Это уравнение должно тождественно удовлетворяться для любых значений r, поэтому

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}=0, \tag{3}$$

$$\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}-\frac{1}{a}=0. \tag{4}$$

Из выражения (4) следует, что

$$a=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}, \tag{5}$$

т. е. величина a совпадает с первым боровским радиусом для атома водорода. Подставив (5) в (3), найдем искомое собственное значение энергии

$$E=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2},$$

что совпадает со значением энергии основного состояния ($n=1$) атома водорода.

Ответ: $E=-\dfrac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$.

6.136. Учитывая, что функция $\psi_2=\left(1-\dfrac{r}{2a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}$ удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера для атома водорода, определите энергию E_2 соответствующего уровня.

Решение. Радиальное уравнение Шредингера для атома водорода:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0. \tag{1}$$

Найдем первую производную:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial r}=-\frac{1}{2a}\left(2-\frac{r}{2a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right)=-\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(2r^2-\frac{r^3}{2a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\right];$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right)=\left(-\frac{2}{ar}+\frac{5}{4a^2}-\frac{r}{8a^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}. \tag{2}$$

Подставив (2) и (1) и сокращая на $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}$, получим

$$-\frac{2}{ar}+\frac{5}{4a^2}-\frac{r}{8a^3}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\left(1-\frac{r}{2a}\right)=0,$$

или

$$-\frac{2}{ar}+\frac{5}{4a^2}-\frac{r}{8a^3}+\frac{2me^2}{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{2a}\right)-\frac{mEr}{a\hbar^2}=0.$$

После перегруппировки слагаемых находим

$$\frac{2}{r}\left(\frac{me^2}{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}-\frac{1}{a}\right)-r\left(\frac{1}{8a^3}+\frac{mE}{a\hbar^2}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)+\frac{5}{4a^2}=0. \quad (3)$$

Уравнение (3) должно тождественно удовлетворяться для любых r, поэтому, приравнивая друг к другу члены, содержащие r и $1/r$, получаем

$$-\frac{2}{a}=-\frac{2me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}, \quad (4)$$

$$-\frac{1}{8a^3}=\frac{mE}{a\hbar^2}. \quad (5)$$

Из выражения (4) следует, что

$$a=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}, \quad (6)$$

(первый боровский радиус). Подставляя (6) в (5), находим

$$E_2=-\frac{1}{8}\frac{me^4}{16\hbar^2\pi^2\varepsilon_0^2}=-\frac{1}{4}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}=-\frac{1}{4}E_1$$

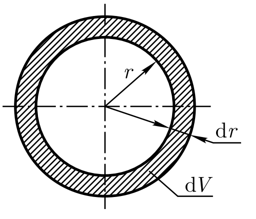
(учли, что $E_1=-\dfrac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$).

Ответ: $E_2=-\dfrac{1}{4}E_1$, где E_1 — энергия основного состояния (при $n=1$).

6.137. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определите среднее значение $\left\langle\dfrac{1}{r}\right\rangle$.

Решение. Согласно определению, среднее значение

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle=\int_0^\infty\frac{1}{r}\,\psi^*\psi\mathrm{d}V=\int_0^\infty\frac{1}{r}|\psi|^2\,\mathrm{d}V, \quad (1)$$



где интеграл берется по той области, в которой $\psi(r)$ отлична от нуля.

В силу сферической симметрии функции $\psi_{100}(r)$ (она зависит только от r) вероятность обнаружить электрон на расстоянии r от ядра одинакова по всем направлениям, т.е. элемент объема, отвечающий одинаковой плотности вероятности, — сферический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$ (см. рисунок):

$$dV=4\pi r^2\mathrm{d}r. \quad (2)$$

Подставив в формулу (1) $|\psi_{100}(r)|^2=\dfrac{1}{\pi a^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}$ и выражение (2), получим в результате вычислений

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle=\int_0^\infty\frac{1}{r}\frac{1}{\pi a^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{4}{a^3}\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}\mathrm{d}r=\frac{4}{a^3}\frac{1!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}.$$

Ответ: $\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle=\frac{1}{a}$.

6.138. Электрон в атоме водорода находится в $1s$-состоянии. Определите наиболее вероятное расстояние $r_{\text{в}}$ электрона от ядра.

Решение. $1s$-состояние электрона в атоме водорода описывается нормированной волновой функцией

$$\psi=\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}, \tag{1}$$

зависящей только от расстояния r до ядра (a — первый боровский радиус).

Вероятность нахождения электрона в элементе объема $\mathrm{d}V$ равна

$$\mathrm{d}W=|\psi(r)|^2\mathrm{d}V=|\psi(r)|^2 4\pi r^2\mathrm{d}r,$$

где в качестве элемента объема выбран сферический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$ (см. задачу 6.137) ($1s$-состояние электрона сферически симметрично, и вероятность обнаружения электрона на расстоянии r одинакова по всем направлениям). Величина $w(r)=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}$ представляет собой плотность вероятности

$$w(r)=4\pi r^2|\psi(r)|^2. \tag{2}$$

Подставив (1) в (2), найдем

$$w(r)=\frac{4r^2}{a^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}. \tag{3}$$

Функция (3) имеет максимум при некотором $r=r_{\text{в}}$. Чтобы $r_{\text{в}}$ вычислить, необходимо (3) продифференцировать по r и приравнять производную нулю:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{4r^2}{a^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}\right)=0,$$

или

$$\frac{8r}{a^3}\left(1-\frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}=0,$$

откуда искомое наиболее вероятное расстояние электрона от ядра

$$r_{\text{в}}=a.$$

Ответ: $r_{\text{в}}=a$.

6.139. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определите вероятность обнаружения электрона в атоме внутри сферы радиусом $r=0{,}01a$.

Дано: $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$; $r = 0{,}01a$.

Найти: W.

Решение. Вероятность обнаружить электрон в элементе объема $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}W = |\psi_{100}(r)|^2 \mathrm{d}V = \left|\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}\right|^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

(необходимость выбора элемента объема $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ обоснована в задаче 6.137). Вероятность W найдем, интегрируя $\mathrm{d}W$ в пределах от $r_1 = 0$ до $r_2 = 0{,}01a$:

$$W = \frac{4}{a^3} \int\limits_0^{0{,}01a} r^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} \mathrm{d}r. \tag{1}$$

По условию задачи, r мало ($r_{\max} = 0{,}01a$; $a = 52{,}8$ пм), поэтому сомножитель $\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}$ можно разложить в ряд

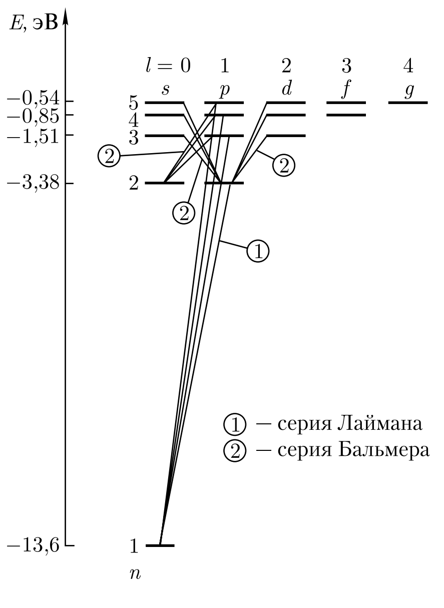
$$\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} = 1 - \frac{2r}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2r}{a}\right)^2 - \ldots . \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), пренебрегая в (2) членами второго порядка малости, получим

$$W = \frac{4}{a^3} \int\limits_0^{0{,}01a} r^2 \left(1 - \frac{2r}{a}\right) \mathrm{d}r = \frac{4}{a^3} \left[\int\limits_0^{0{,}01a} r^2 \mathrm{d}r - \frac{2}{a} \int\limits_0^{0{,}01a} r^3 \mathrm{d}r\right] = \frac{4}{a^3} \left[\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{0{,}01a} - \frac{2}{a}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{0{,}01a}\right] = 1{,}31 \cdot 10^{-6}.$$

Ответ: $W = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$.

6.140. Применяя правила отбора, представьте на энергетической диаграмме спектральные линии в спектре атома водорода, соответствующие сериям Лаймана и Бальмера.



Решение. В квантовой механике вводятся *правила отбора*, ограничивающие число возможных переходов электронов в атоме, связанных с испусканием и поглощением света. Осуществляются только такие переходы, для которых:

1) изменение орбитального квантового числа Δl удовлетворяет условию

$$\Delta l = \pm 1;$$

2) изменение магнитного квантового числа Δm_l удовлетворяет условию

$$\Delta m_l = 0, \pm 1. \tag{1}$$

Учитывая число возможных состояний, соответствующих данному n, и правило отбора (1), рассмотрим спектральные линии атома водорода (см. рисунок): серии Лаймана соответствуют переходы

$$np \to 1s\ (n = 2,\ 3,\ \ldots);$$

серии Бальмера —

$$np \to 2s,\ ns \to 2p,\ nd \to 2p\ (n = 3,\ 4,\ \ldots)$$

и т. д.

Переход электрона из основного состояния в возбужденное связан с увеличением энергии атома и может происходить только при сообщении атому энергии извне, например за счет поглощения атомом фотона. Так как поглощающий атом при нормальных условиях находится в основном состоянии, то спектр атома водорода должен состоять из линий, соответствующих переходам $1s \to np$ ($n = 2$, 3, …), что находится в полном согласии с опытом.

6.141. Электрон в атоме находится в *f*-состоянии. Определите: 1) момент импульса электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля.

Дано: *f*-состояние.

Найти: 1) L_l; 2) $(L_{lz})_{\max}$.

Решение. *f*-Состояние электрона характеризуется орбитальным квантовым числом $l = 3$, а момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где h — постоянная Планка.

Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l, \tag{1}$$

где $m_l = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm l$ — магнитное квантовое число. Выражение (1) максимально при $m_l = (m_l)_{\max}$:

$$(L_{lz})_{\max} = \hbar(m_l)_{\max},$$

где, по условию задачи, $(m_l)_{\max} = 3$.

Ответ: $L_l = 3{,}46\hbar$; $(L_{lz})_{\max} = 3\hbar$.

6.142. Определите возможные значения орбитального момента импульса L_l электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения $E_{\text{возб}} = 12{,}75$ эВ.

Дано: $Z = 1$; $E_{\text{возб}} = 12{,}75$ эВ.

Найти: L_l.

Решение. Момент импульса (механический орбитальный) электрона *квантуется*, т. е. не может быть произвольным, а принимает дискретные значения, определяемые формулой

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка; l — орбитальное квантовое число, которое при заданном n принимает значения

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

т. е. всего n значений (ряд возможных значений ограничен значением $n-1$).

Чтобы найти главное квантовое число n, запишем выражение для энергии электрона в атоме водорода

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -\frac{13,6}{n^2}\ \text{эВ}$$

(учли, что при $n = 1$ $E_1 = -\dfrac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -13{,}6$ эВ).

Энергия возбуждения $E_{\text{возб}}$ — энергия, которую надо сообщить атому, чтобы электрон из основного состояния ($n = 1$) совершил переход в возбужденное состояние n, т. е.

$$E_{\text{возб}} = E_n - E_1 \text{ или } -\frac{13,6}{n^2} + 13{,}6 = 12{,}75,$$

откуда $n = 4$.

Возможные значения L_l:

при $l = 0$ $L_l = 0$; при $l = 2$ $L_l = \hbar\sqrt{6}$;

при $l = 1$ $L_l = \hbar\sqrt{2}$; при $l = 3$ $L_l = \hbar\sqrt{12}$.

Ответ: $L_l = 0$; $\hbar\sqrt{2}$; $\hbar\sqrt{6}$; $\hbar\sqrt{12}$.

6.143. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3d$-состоянии. Определите изменение орбитального магнитного момента электрона при переходе атома в основное состояние.

Дано: $l_1 = 2$; $l_2 = 0$.

Найти: Δp_{m}.

Решение. Изменение орбитального магнитного момента

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = p_{\mathrm{m1}} - p_{\mathrm{m2}}, \tag{1}$$

где p_{m1} и p_{m2} — орбитальные магнитные моменты электрона в конечном (основном) и начальном (возбужденном) состояниях.

Модуль магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона,

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = \mu_{\mathrm{B}}\sqrt{l(l+1)}, \tag{2}$$

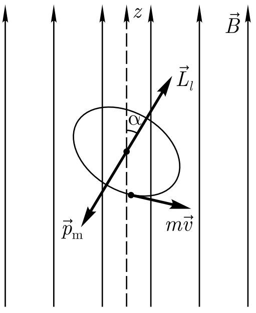
где $\mu_{\mathrm{B}} = \dfrac{e\hbar}{2m}$ — магнетон Бора; l — орбитальное квантовое число. Как следует из условия задачи, $l_1 = 2$ в возбужденном состоянии и $l_2 = 0$ в основном. Учитывая значения l и подставляя (2) в (1), получаем

$$p_{\mathrm{m}} = \mu_{\mathrm{B}}(0 - \sqrt{6}) = -\mu_{\mathrm{B}}\sqrt{6},$$

где знак «$-$» показывает, что орбитальный магнитный момент уменьшается.

Ответ: $\Delta p_{\mathrm{m}} = -2{,}27 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

6.144. Атом водорода помещен во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, причем орбитальный механический момент атома $\vec{L}_l$ направлен к индукции магнитного поля под углом α. Определите энергию взаимодействия магнитного момента с полем, если электрон в атоме водорода находится в d-состоянии.



Дано: $\vec{B}$; α; $l = 2$.

Найти: $U_{\rm B}$.

Решение. Атом, обладающий магнитным моментом, приобретает в магнитном поле дополнительную энергию

$$U_{\rm B} = -\vec{p}_{\rm m}\vec{B} = -p_{\rm m}B\cos(\pi - \alpha) = p_{\rm m}B\cos\alpha, \qquad (1)$$

где $\vec{p}_{\rm m}$ — магнитный момент атома (его направление показано на рисунке); $(\pi - \alpha)$ — угол между векторами $\vec{p}_{\rm m}$ и $\vec{B}$.

Модуль магнитного момента атома

$$p_{\rm m} = \frac{e\hbar}{2m}\sqrt{l(l+1)} = \mu_{\rm B}\sqrt{l(l+1)}, \qquad (2)$$

где l — орбитальное квантовое число (d-состояние характеризуется $l = 2$); $\mu_{\rm B} = \dfrac{e\hbar}{2m}$, $\mu_{\rm B} = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл — магнетон Бора.

Из рисунка следует, что $\cos\alpha = \dfrac{L_{lz}}{L_l}$, где L_{lz} — проекция механического момента на направление внешнего магнитного поля, которая квантуется по закону

$$L_{lz} = m_l\hbar,$$

а L_l — механический орбитальный момент импульса, который квантуется по закону

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где l — орбитальное квантовое число; m_l — магнитное квантовое число, принимающее при данном l значения $0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l$, т. е. всего $2l + 1$ значений (по условию, $l = 2$, поэтому m_l может принимать значения $0, \pm1, \pm2$).

Учитывая приведенные рассуждения, получаем, что

$$\cos\alpha = \frac{m_l\hbar}{\hbar\sqrt{l(l+1)}} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую энергию взаимодействия магнитного момента с внешним магнитным полем:

$$U_{\rm B} = \mu_{\rm B}\sqrt{l(l+1)}B\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}} = \mu_{\rm B}m_lB,$$

где m_l может принимать пять значений: $0, \pm1, \pm2$, что означает расщепление первоначального энергетического уровня на $2l + 1$ подуровней (на пять подуровней).

Ответ: $U_{\rm B} = \mu_{\rm B}m_lB$.

6.145. Спектральный прибор разрешает спектральные линии в видимой области спектра ($\lambda = 500$ нм), отличающиеся на $\Delta\lambda = 10$ пм. Определите индукцию B внешнего магнитного поля, необходимого для наблюдения нормального эффекта Зеемана.

Дано: $\lambda = 500$ нм $(5 \cdot 10^{-7}$ м); $\Delta\lambda = 10$ пм $(10^{-11}$ м).

Найти: B.

Решение. В случае нормального эффекта Зеемана разность энергий между любыми последовательными спектральными линиями постоянна:

$$\Delta E = \mu_{\text{B}} B, \tag{1}$$

где $\mu_{\text{B}} = \dfrac{e\hbar}{2m}$ — магнетон Бора. Тогда разность частот, равная

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\mu_{\text{B}} B}{h},$$

может быть представлена в виде

$$|\Delta\nu| = \left|\Delta\,\frac{c}{\lambda}\right| = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}. \tag{2}$$

Следовательно, из выражений (1) и (2) искомая индукция внешнего магнитного поля, необходимого для расщепления исходной спектральной линии на компоненты, которые разрешаются,

$$B = \frac{hc\Delta\lambda}{\mu_{\text{B}}\lambda^2}.$$

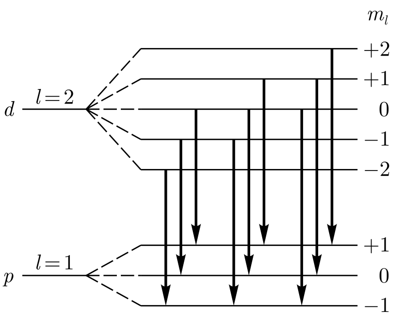
Ответ: $B = 0{,}86$ Тл.

6.146. Постройте диаграмму, иллюстрирующую расщепление энергетических уровней и спектральных линий при переходах между d- и p-состояниями.

Решение. d-Состояние характеризуется орбитальным квантовым числом $l = 2$, p-состояние — $l = 1$, поэтому изменение орбитального квантового числа Δl удовлетворяет правилу отбора

$$\Delta l = \pm 1,$$

т. е. между этими состояниями переходы возможны.



Состояние d в магнитном поле расщепляется на пять подуровней (при $l = 2$, $m_l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$), состояние p — на три подуровня (при $l = 1$, $m_l = 0,\ \pm 1$). Следует учесть, что между подуровнями, принадлежащими разным уровням, возможны только такие переходы (см. рисунок), при которых изменение магнитного квантового числа Δm_l удовлетворяет правилу отбора

$$\Delta m_l = 0,\ \pm 1.$$

Эти спектральные линии показаны на рисунке, т. е. в спектре появляется триплет, наблюдается *нормальный эффект Зеемана*. Отметим, что нормальный эффект Зеемана наблюдается в том случае, если исходные линии не обладают тонкой структурой (являются синглетами).

6.147. Пользуясь Периодической системой элементов, запишите электронную конфигурацию (распределение электронов по состояниям) атома брома, находящегося в основном состоянии.

Решение. Электронная конфигурация для атома брома

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3\mathrm{d}^{10} 4s^2 4p^5.$$

В данной записи цифры 1, 2, 3, 4 — главные квантовые числа, определяющие символ оболочки (соответственно K, L, M, N). Максимально возможное число электронов в k-оболочке 2, в L — 8, в M — 18, в N — 32.

Обозначения $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, ... определяют символ подоболочки, причем в s-состоянии может находиться 2 электрона; в p-состоянии — 6 электронов; в d-состоянии — 10 электронов.

K-оболочка ($n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ и $m_s = \pm{}^1\!/_2$) заполнена полностью и записывается как $1s^2$ (два $1s$-электрона). Также полностью заполнены L — ($2s^2 2p^6$ — два $2s$-электрона и шесть $2p$-электронов) и M — ($3s^2 3p^6 3d^{10}$ — два $3s$-электрона, шесть $3p$-электронов и десять $3d$-электронов). Оставшиеся 7 электронов (общее число электронов для атома брома 35 ($Z = 35$)) образуют незаполненную N-оболочку ($4s^2 4p^5$ — два $2s$-электрона и пять $4p$-электронов).

6.148. Сколько различных состояний может иметь электрон с главным квантовым числом $n = 4$?

Решение. При $n = 4$ орбитальное квантовое число l может принимать значения 0, 1, 2, 3. При $l = 0$ магнитное квантовое число m_l может быть равно только 0, поэтому существует только два разрешенных состояния, соответствующие магнитному спиновому квантовому числу: $m_s = +{}^1\!/_2$ и $m_s = -{}^1\!/_2$.

При $l = 1$ магнитное квантовое число m_l может принимать значения 1, 0, −1, что дает три различных состояния; в каждом из них магнитное спиновое квантовое число m_s может быть либо $+{}^1\!/_2$, либо $-{}^1\!/_2$. Поэтому при $l = 1$ электрон может находиться в $2 \cdot 3 = 6$ различных состояниях.

При $l = 2$ магнитное квантовое число может принимать значения 2, 1, 0, −1, −2, а так как m_s может быть либо $+{}^1\!/_2$, либо $-{}^1\!/_2$, то получается еще 10 разрешенных состояний. Наконец, при $l = 3$ магнитное квантовое число может принимать значения 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3. Поэтому существуют 14 разрешенных состояний, соответствующих магнитному спиновому квантовому числу $+{}^1\!/_2$ и $-{}^1\!/_2$.

Таким образом, общее число различных состояний, отвечающих $n = 4$, равно

$$2 + 6 + 10 + 14 = 32.$$

Ответ: 32.

6.149. Определите коротковолновую границу $\lambda_{\min}$ сплошного спектра рентгеновского излучения, если рентгеновская трубка работает под напряжением 60 кВ.

Дано: $U = 60$ кВ ($6 \cdot 10^4$ В).

Найти: $\lambda_{\min}$.

Решение. Согласно закону сохранения энергии, энергия рентгеновского фотона не может быть больше кинетической энергии электрона. Максимальная энергия фотона определяется равенством

$$h\nu_{\max} = eU, \tag{1}$$

где h — постоянная Планка; e — заряд электрона; $\nu_{\max}$ — максимальная частота, которая связана с коротковолновой границей соотношением

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}}, \tag{2}$$

где c — скорость распространения света в вакууме.

Из выражений (1) и (2) находим искомую границу сплошного спектра рентгеновского излучения

$$\lambda_{\min} = \frac{ch}{eU}.$$

Ответ: $\lambda_{\min} = 20{,}7$ пм.

6.150. Определите коротковолновую границу $\lambda_{\min}$ сплошного спектра рентгеновского излучения, если скорость электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, составляет $0{,}6c$.

Дано: $v = 0{,}6c$.

Найти: $\lambda_{\min}$.

Решение. Согласно закону сохранения энергии, энергия рентгеновского фотона не может быть больше кинетической энергии T электрона, т. е.

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = T, \tag{1}$$

где $E_{\max}$ — максимальная энергия фотона; $\nu_{\max}$ — максимальная частота фотона; h — постоянная Планка; c — скорость света в вакууме.

Поскольку скорость электрона сравнима со скоростью света в вакууме, то

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right), \tag{2}$$

где m — масса электрона.

Приравняв выражения (1) и (2)

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right),$$

получим искомую коротковолновую границу сплошного рентгеновского спектра:

$$\lambda_{\min} \frac{h}{mc\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right)}.$$

Ответ: $\lambda_{\min} = 9{,}7$ пм.

6.151. Определите наименьшее напряжение, которое надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии K-серии, если в качестве материала анода трубки служит молибден.

Дано: $Z = 42$; $\sigma = 1$.

Найти: U.

Решение. Линии K-серии, как впрочем и линии остальных серий, появятся при удалении электрона с K-оболочки атома. Для этого следует приложить напряжение, удовлетворяющее условию

$$eU = h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1}, \tag{1}$$

где λ_1 — длина волны, соответствующая переходу электрона с бесконечности ($n=\infty$) на K-оболочку, т. е. длина волны, определяющая границу K-серии.

Согласно закону Мозли, длина волны, определяющая границу K-серии ($\sigma = 1$, $n=\infty$, $m=1$),

$$\frac{1}{\lambda_1} = R'(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) = R'(Z-1)^2, \tag{2}$$

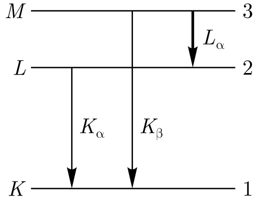
где $R' = 1{,}1\cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга; Z — порядковый номер в Периодической системе.

Подставив из формулы (2) λ_1 в выражение (1), получим искомое наименьшее напряжение

$$U = \frac{hc}{e}R'(Z-1)^2.$$

Ответ: $U = 23$ кВ.

6.152. Определите постоянную экранирования σ для L-серии рентгеновского излучения, если длина волны линии L_α для свинца равна 117 пм.



Дано: $Z = 82$; L_α; $\lambda = 117$ пм ($1{,}17\cdot 10^{-10}$ м).
Найти: σ.

Решение. Линия L_α соответствует переходу электрона в атоме с M-оболочки на L-оболочку (см. рисунок). Согласно закону Мозли, для линии L_α ($m=2$, $n=3$)

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right), \tag{1}$$

где $R' = 1{,}1\cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга.

Из формулы (1) получим, что $(Z-\sigma)^2 = \dfrac{36}{5R'\lambda}$, откуда искомая постоянная экранирования для L-серии

$$\sigma = Z - \sqrt{\frac{36}{5R'\lambda}}.$$

Ответ: $\sigma = 7{,}2$.

6.153. Определите напряжение на рентгеновской трубке с молибденовым анодом ($Z = 42$), если разность длин волн $\Delta\lambda$ между K_α-линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра равна 50 пм.

Дано: $Z = 42$; $\Delta\lambda = \lambda_\alpha - \lambda_{\min} = 50$ пм ($5\cdot 10^{-11}$ м).
Найти: U.

Решение. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{ch}{eU}, \tag{1}$$

где c — скорость распространения света в вакууме; h — постоянная Планка, e — заряд электрона; U — напряжение на рентгеновской трубке. По условию задачи, $\lambda_{\min} = \lambda_\alpha - \Delta\lambda$.

Согласно закону Мозли, для линии K_α ($\sigma = 1$, $m = 1$, $n = 2$)

$$\nu_\alpha = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}R(Z-1)^2,$$

откуда

$$\lambda_\alpha = \frac{c}{\nu_\alpha} = \frac{4c}{3R(Z-1)^2} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2},$$

где $R' = \dfrac{R}{c}$ — постоянная Ридберга. Тогда

$$\lambda_{\min} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \Delta\lambda. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое напряжение на рентгеновской трубке:

$$U = \frac{ch}{e\left(\dfrac{4}{3R'(Z-1)^2} - \Delta\lambda\right)}.$$

Ответ: $U = 56{,}2$ кВ.

Задачи для самостоятельного решения

6.154. Волновая функция $\psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi)$, описывающая атом водорода, определяется главным квантовым числом n, орбитальным квантовым числом l и магнитным квантовым числом m_l. Выведите формулу, определяющую число различных состояний, отвечающих данному n.

6.155. Волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = C\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определите нормированную волновую функцию, отвечающую этому состоянию. [$\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$]

6.156. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, где a — первый боровский радиус. Определите среднюю потенциальную энергию электрона в поле ядра. [$\langle U\rangle = -\dfrac{\mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a}$]

6.157. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, где a — первый боровский радиус. Определите: 1) вероятность $\mathrm{d}W$ обнаружения электрона на расстоянии от r до $r + \mathrm{d}r$ от ядра; 2) расстояния от ядра, на которых электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью. [1) $\mathrm{d}W = \frac{4}{a^3} r^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}} \mathrm{d}r$; 2) $r = a$]

6.158. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определите вероятность W обнаружения электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0{,}05a$. [$W = 1{,}54 \cdot 10^{-4}$]

6.159. Найдите возможные значения орбитального (l) и магнитного (m_l) квантовых чисел, если главное квантовое число $n = 5$.

6.160. Орбитальное квантовое число $l = 3$. Определите возможные значения магнитного квантового числа m_l.

6.161. Электрон в атоме находится в g-состоянии. Определите: 1) момент импульса (орбитальный) L_l электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса $(L_{lz})_{\max}$ на направление внешнего магнитного поля.

6.162. Определите, во сколько раз отличается орбитальный момент импульса L_l электронов в d- и g-состояниях.

6.163. Электрон в атоме водорода, находясь в основном состоянии, поглотил фотон с энергией 13,06 эВ и перешел в возбужденное состояние с максимально возможным орбитальным числом. Определите изменение момента импульса ΔL_l орбитального движения электрона. [$\Delta L_l = \hbar\sqrt{n(n-1)} = \sqrt{20}\hbar$]

6.164. Магнитный момент атома, равный по модулю трем магнетонам Бора, направлен под углом 30° к индукции магнитного поля, по модулю равной 2 Тл. Определите энергию взаимодействия магнитного момента с полем. [$U_{\mathrm{B}} = 3{,}01 \cdot 10^{-6}$ эВ]

6.165. Постройте и объясните расщепление энергетических уровней и спектральных линий (с учетом правил отбора) при переходах между p- и s-состояниями.

6.166. Пользуясь Периодической системой элементов, запишите электронную конфигурацию (распределение электронов по состояниям) атомов фосфора и германия, находящихся в основном состоянии.

6.167. Пользуясь Периодической системой элементов, запишите электронную конфигурацию атомов фтора и хлора, находящихся в основном состоянии.

6.168. Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$. Определите, что это за элемент.

6.169. Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2$. Определите, что это за элемент.

6.170. Пользуясь Периодической системой элементов, определите элемент, у которого заполнены K-, L-, M-оболочки, а также $4s$- и $4p$-подоболочки.

6.171. Заполненная электронная оболочка характеризуется главным квантовым числом $n = 4$. Определите число N электронов на этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_s = {}^1\!/_2$; 2) $m_l = 1$; 3) $m_l = 1$ и $m_s = {}^1\!/_2$.

6.172. Заполненная электронная оболочка характеризуется главным квантовым числом $n = 3$. Определите число N электронов на этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_l = 2$; 2) $m_s = {}^1\!/_2$ и $m = 1$; 3) $m_s = -{}^1\!/_2$; 4) $m_s = -{}^1\!/_2$ и $l = 1$.

6.173. Минимальная длина волны рентгеновского излучения, полученной от трубки, работающей при напряжении $U = 30$ кВ, равна 41,4 пм. Определите по этим данным постоянную Планка. [$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с]

6.174. Определите, при каком напряжении работает рентгеновская трубка, если коротковолновая граница $\lambda_{\min}$ сплошного спектра рентгеновского излучения составляет 12,4 пм. [$U = 100$ кВ]

6.175. Определите скорость электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы рентгеновского спектра составляет 16,6 пм. [74,9 кВ]

6.176. Какова скорость электронов (в единицах c, c — скорость распространения света в вакууме), бомбардирующих анод рентгеновской трубки, если коротковолновая граница сплошного спектра рентгеновского излучения составляет 3,64 пм? [$v = 0{,}8c$]

6.177. Определите порядковый номер элемента в Периодической системе элементов, если граничная частота K-серии характеристического рентгеновского излучения составляет $2{,}08 \cdot 10^{18}$ Гц. [$Z = 30$, цинк]

6.178. Определите напряжение на рентгеновской трубке с никелевым анодом ($Z = 28$), если разность длин волн $\Delta\lambda$ между K_α-линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра равна 84 пм. [$U = 15{,}1$ кВ]

6.179. Определите длину волны самой длинноволновой линии K-серии, если анод рентгеновской трубки изготовлен из серебра. Постоянную экранирования принять равной единице. [$\lambda = 57{,}3$ пм]

6.180. Длина волны K_α-линии платины равна $\lambda_1 = 20{,}5$ пм. Определите, какому элементу принадлежит K_α-линия с длиной волны $\lambda_2 = 57{,}4$ пм. [$Z_2 = 1 + (Z-1)\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}} = 47$]

6.181. В атоме железа электрон перешел с M-оболочки на L-оболочку. Принимая постоянную экранирования $\sigma = 5{,}7$, определите энергию испущенного фотона. [$E = 782$ эВ]

ГЛАВА 7

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Основные законы и формулы

• Радиус ядра атома

$$R = R_0 A^{1/3}$$

[$R_0 = (1{,}3 - 1{,}7)$ фм; A — массовое число].

• Энергия связи ядра атома

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2 = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2$$

[$m_p, m_n, m_{\text{я}}$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число; A — массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$ — масса атома водорода (^1_1H); m — масса атома].

• Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n] - m$$

[$m_p, m_n, m_{\text{я}}$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число; A — массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$ — масса атома водорода (^1_1H); m — масса атома].

• Удельная энергия связи

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}.$$

• Спин (собственный момент импульса) ядра

$$L_{\text{я}} = \hbar\sqrt{I(I+1)}$$

[$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка; I — спиновое ядерное квантовое число ($I = 0$, $1/2$, 1, $3/2$, ...)].

• Связь между магнитным моментом $\vec{p}_{m\text{я}}$ и собственным моментом импульса (спином) $\vec{L}_{\text{я}}$ ядра

$$\vec{p}_{m\text{я}} = g_{\text{я}}\vec{L}_{\text{я}}$$

[$g_{\text{я}}$ — ядерное гиромагнитное отношение].

• Ядерный магнетон

$$\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

[e — заряд электрона; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка; m_p — масса протона].

• Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + \mathrm{d}t$,

$$dN = -\lambda N dt$$

[N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t; λ — постоянная радиоактивного распада].

• Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

[N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t; N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ — постоянная радиоактивного распада].

• Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}).$$

• Связь между периодом полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного распада λ

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

• Связь между средним временем жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

• Активность нуклида

$$A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \lambda N.$$

• Правила смещения:

• для α-распада

$${}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{Y} + {}_2^4\mathrm{He};$$

• для β^--распада

$${}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z+1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + {}_{-1}^{\;\;0}e;$$

• для β^+-распада

$${}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + {}_{+1}^{\;\;0}e$$

[${}_Z^A\mathrm{X}$ — материнское ядро; Y — символ дочернего ядра; ${}_2^4\mathrm{He}$ — ядро гелия (α-частица); ${}_{-1}^{\;\;0}e$ — символическое обозначение электрона (зарядовое число равно -1, а массовое число — нулю); ${}_{+1}^{\;\;0}e$ — символическое обозначение позитрона (зарядовое число равно $+1$, а массовое число — нулю)].

• Схема электронного захвата

$${}_Z^A\mathrm{X} + {}_{-1}^{\;\;0}e \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + {}_0^0\nu_e$$

[${}_0^0\nu_e$ — нейтрино].

• Символическая запись ядерной реакции

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + a \to {}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} + b \quad \text{или} \quad {}^{A}_{Z}\mathrm{X}(a,b)\,{}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} $$

[${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ и ${}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y}$ — исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A'; a и b — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы].

• Энергия ядерной реакции

$$ Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2 $$

[m_1 и m_2 — масса покоя ядра-мишени и масса бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ — сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

Если $Q > 0$ — экзотермическая реакция, то $Q < 0$ — эндотермическая реакция].

• Скорость нарастания цепной реакции

$$ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{N(k-1)}{T}, $$

откуда

$$ N = N_0 \mathrm{e}^{\frac{(k-1)t}{T}} $$

[N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; N — число нейтронов в момент времени t; T — среднее время жизни одного поколения; k — коэффициент размножения нейтронов].

Примеры решения задач

7.1. Определите: 1) плотность ядерной материи; 2) радиус Земли, если бы она со своей реальной массой ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг) имела плотность ядерной материи. Массу нуклона принять равной $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг; $m_{\text{н}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: 1) ρ; 2) R.

Решение. Считая форму атомного ядра сферической, плотность ядерной материи

$$ \rho = \frac{m_{\text{н}} A}{{}^4\!/_3 \pi R^3}, \qquad (1) $$

где $m_{\text{н}}$ — масса нуклона; A — массовое число; $R = R_0 A^{1/3}$ — радиус ядра (для расчета примем $R_0 = 1{,}3$ фм $= 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м). Подставив выражение для радиуса ядра в формулу (1), получим искомую плотность ядерной материи:

$$ \rho = \frac{3m_{\text{н}}}{4\pi R_0^3}. $$

Масса Земли

$$ M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3, \qquad (2) $$

где ρ — ее плотность (по условию задачи она должна быть принята равной плотности ядерной материи); R — радиус Земли.

Искомый радиус Земли при заданных условиях

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}.$$

Ответ: 1) $\rho = 1{,}82 \cdot 10^{17}$ кг/м^3; 2) $R = 199$ м.

7.2. Длина волны линии K_α ниобия ($Z_1 = 41$) равна $\lambda_1 = 76$ пм. Определите, какому элементу принадлежит линия K_α с длиной волны $\lambda_2 = 251$ пм.

Дано: $Z_1 = 41$; $\lambda_1 = 76$ пм ($7{,}6 \cdot 10^{-11}$ м); $\lambda_2 = 251$ пм ($2{,}51 \cdot 10^{-10}$ м).

Найти: Z_2.

Решение. Согласно закону Мозли, частота линии K_α связана с порядковым номером Z химического элемента соотношением

$$\sqrt{\nu} = a(Z-1),$$

где постоянная экранирования для линии K_α равна 1. Так как $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, то

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(\frac{Z_2-1}{Z_1-1}\right)^2,$$

откуда искомый порядковый номер химического элемента

$$Z_2 = 1 + (Z_1 - 1)\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

Ответ: $Z_2 = 23$, ванадий.

7.3. Зная постоянную Авогадро, определите массу нейтрального атома $_9$Fe.

Дано: $_9$Fe; $N_\text{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Найти: m.

Решение. Масса нейтрального атома

$$m = \frac{M}{N_\text{A}},$$

где M — молярная масса (согласно Периодической системе элементов для $_9$Fe $M = 19 \cdot 10^{-3}$ кг/моль); N_A — постоянная Авогадро.

Ответ: $m = 3{,}16 \cdot 10^{-26}$ кг.

7.4. При бомбардировке изотопа лития $^6_3$Li дейтронами $^2_1$H ($m_{^2_1\text{H}} = 3{,}3446 \cdot 10^{-27}$ кг) образуются две α-частицы $^4_2$He ($m_{^4_2\text{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг) и выделяется энергия $\Delta E =$ $= 22{,}3$ МэВ. Определите массу изотопа лития.

Дано: $^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \to 2\,^4_2\text{He} + \Delta E$; $\Delta E = 22{,}3$ МэВ ($35{,}68 \cdot 10^{-13}$ Дж); $m_{^4_2\text{He}} =$ $= 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_{^2_1\text{H}} = 3{,}3446 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: $m_{^6_3\text{Li}}$.

Решение. Дефект массы ядра

$$\Delta m = (m_{^6_3\text{Li}} + m_{^2_1\text{H}}) - 2m_{^4_2\text{He}}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}, \tag{2}$$

где c — скорость распространения света в вакууме. Из выражений (1) и (2) искомая масса изотопа лития

$$m_{^6_3\mathrm{Li}} = \frac{\Delta E}{c^2} + 2m_{^4_2\mathrm{He}} - m_{^2_1\mathrm{H}}.$$

Ответ: $m_{^6_3\mathrm{Li}} = 9{,}9884 \cdot 10^{-27}$ кг.

7.5. Определите энергию связи ядра атома кислорода $^{16}_{8}\mathrm{O}$. Масса нейтрального атома кислорода равна $2{,}6552 \cdot 10^{-26}$ кг.

Дано: $^{16}_{8}\mathrm{O}$; $m_{^{16}_8\mathrm{O}} = 2{,}6552 \cdot 10^{-26}$ кг.

Найти: $E_{\text{св}}$.

Решение. Энергия связи ядра определяется соотношением

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2, \tag{1}$$

где c — скорость распространения света в вакууме; Δm — дефект массы:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}, \tag{2}$$

где m_p, m_n, $m_{\text{я}}$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра. В таблицах обычно приводятся не массы $m_{\text{я}}$ ядер, а массы m атомов. Поэтому пользуются формулой

$$\Delta m = Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m, \tag{3}$$

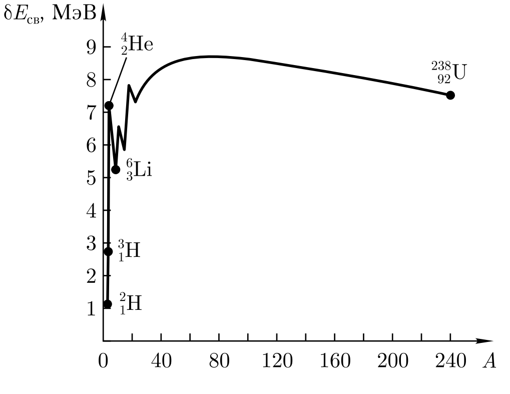
где m_{H} — масса атома водорода. Так как m_{H} больше m_p на величину m_e, то первое слагаемое правой части формулы включает массу Z электронов. Но так как масса атома m отличается от массы ядра $m_{\text{я}}$ как раз на массу Z электронов, то вычисления по формулам (2) и (3) приводят к одинаковым результатам.

Подставив выражение (3) в формулу (1), найдем искомую энергию связи

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2,$$

где $m_{\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг; зарядовое число Z, согласно условию задачи, равно 8; A (массовое число) = 16.

Ответ: $E_{\text{св}} = 2{,}1312 \cdot 10^{-11}$ Дж (133,2 МэВ).



7.6. Ядро урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$ делится на два осколка приблизительно одинаковой массы, расположенные в середине Периодической системы элементов. Пользуясь кривой зависимости удельной энергии связи от массовых чисел (см. рисунок), оцените освободившуюся при этом энергию.

Дано: $^{238}_{92}\mathrm{U}$.

Найти: ΔE.

Решение. В результате деления ядра урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$ полное число нуклонов, а оно равно 238, остается постоянным. Как следует из рисунка, удельная энергия связи до деления равна 7,6 МэВ/нуклон, а после деления — 8,5 МэВ/нуклон. При делении освобождается энергия

$$\Delta E = 238 \cdot 8{,}5 - 238 \cdot 7{,}6 = 214 \text{ (МэВ)}.$$

Ответ: $\Delta E = 214$ МэВ.

7.7. Определите энергию E, которую необходимо затратить, чтобы оторвать нейтрон от ядра $^{10}_{4}\mathrm{Be}$. Масса нейтрального атома $^{10}_{4}\mathrm{Be}$ равна $16{,}6225 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано: $^{10}_{4}\mathrm{Be}$; $m_{^{10}_{4}\mathrm{Be}} = 16{,}6225 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: E.

Решение. В результате отрыва нейтрона число нуклонов A в ядре уменьшится на единицу, а число протонов Z останется прежним, т. е. образуется ядро $^{9}_{4}\mathrm{Be}$.

Ядро $^{10}_{4}\mathrm{Be}$ можно считать образующимся в результате захвата свободного нейтрона ядром $^{9}_{4}\mathrm{Be}$. Энергия отрыва нейтрона от ядра $^{10}_{4}\mathrm{Be}$ равна энергии связи нейтрона с ядром $^{9}_{4}\mathrm{Be}$, т. е. $E = E_{\text{св}}$.

Энергия связи ядра атома

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2 = (m_{^{9}_{4}\mathrm{Be}} + m_n - m_{^{10}_{4}\mathrm{Be}})c^2,$$

где массы ядер заменены массами нейтральных атомов. Масса нейтрального атома $^{9}_{4}\mathrm{Be}$ равна $14{,}9602 \cdot 10^{-27}$ кг; масса нейтрона $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $E = 7{,}14$ МэВ.

7.8. Энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона, равна 7,72 МэВ. Определите массу m нейтрального атома с этим ядром.

Дано: $E_{\text{св}} = 7{,}72$ МэВ ($1{,}235 \cdot 10^{-12}$ Дж); $Z = 2$; $N = 1$.

Найти: m.

Решение. Согласно условию задачи, число протонов в ядре $Z = 2$, а число нейтронов $N = 1$. Массовое число ядра $A = Z + N = 3$. Следовательно, имеем ядро $^{3}_{2}\mathrm{He}$.

Энергия связи ядра атома

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2, \tag{1}$$

где $m_{\mathrm{H}} = m_p + m_e$ — масса атома водорода $^{1}_{1}\mathrm{H}$ ($m_{\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг); m_n и m — массы нейтрона ($m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг) и атома; Z — зарядовое число; A — массовое число; c — скорость света в вакууме.

Из выражения (1) искомая масса атома

$$m = Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - \frac{E_{\text{св}}}{c^2}.$$

Ответ: $m_{^{3}_{2}\mathrm{He}} = 5{,}008 \cdot 10^{-27}$ кг.

7.9. Определите долю кинетической энергии, которую теряет нейтрон при упругом столкновении с покоящимся ядром гелия $^{4}_{2}\mathrm{He}$, если после столкновения частицы движутся вдоль одной прямой. Массу нейтрального атома гелия принять равной $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано: n; $^{4}_{2}\mathrm{He}$; $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_{\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: $\dfrac{\Delta T}{T}$.

Решение. При абсолютно упругом столкновении нейтрона с покоящимся ядром выполняются законы сохранения импульса и энергии:

$$m_n v_n = m_n v_n' + m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}'; \tag{1}$$

$$\frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_n v_n'^2}{2} + \frac{m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}'^2}{2}, \tag{2}$$

где v_n — скорость нейтрона до удара; v_n' и v_{He}' — соответственно скорости нейтрона и ядра после удара. Согласно условию задачи, после столкновения частицы движутся вдоль одной прямой (удар прямой и центральный), поэтому проекции векторов скорости на эту прямую заменены модулями скоростей.

Решая уравнения (1) и (2), получим

$$v_n' = \frac{m_n - m_{\mathrm{He}}}{m_n + m_{\mathrm{He}}} v_n; \quad v_{\mathrm{He}}' = \frac{2m_n v_n}{m_n + m_{\mathrm{He}}}. \tag{3}$$

Потеря кинетической энергии нейтроном

$$\Delta T = T - T',$$

где T и T' — соответственно кинетическая энергия нейтрона до и после столкновения $\left(T = \dfrac{m_n v_n^2}{2};\ T' = \dfrac{m_n v_n'^2}{2}\right)$. Тогда

$$\Delta T = \frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_n v_n'^2}{2} = \frac{m_n}{2}(v_n^2 - v_n'^2) = \frac{2m_n^2 m_{\mathrm{He}}}{(m_n + m_{\mathrm{He}})^2} v_n^2 = \frac{m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}'^2}{2}.$$

Искомая доля кинетической энергии, которую потерял нейтрон при столкновении с покоящимся ядром,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}'^2}{m_n v_n^2} = \frac{m_{\mathrm{He}}}{m_n}\left(\frac{2m_n}{m_n + m_{\mathrm{He}}}\right)^2 = \frac{4m_n m_{\mathrm{He}}}{(m_n + m_{\mathrm{He}})^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\Delta T}{T} = 0{,}643.$

7.10. Определите, во сколько раз магнетон Бора больше ядерного магнетона, т. е. найдите $\dfrac{\mu_{\mathrm{B}}}{\mu_{\text{я}}}$.

Решение. Магнетон Бора — единица магнитного момента электрона

$$\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e\hbar}{2m_e}, \tag{1}$$

где e — элементарный заряд; m_e — масса электрона; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

Ядерный магнетон — единица магнитного момента ядра

$$\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p}, \tag{2}$$

где m_p — масса протона.

Из выражений (1) и (2) найдем искомое отношение

$$\frac{\mu_{\text{В}}}{\mu_{\text{я}}} = \frac{m_p}{m_e},$$

где $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $\dfrac{\mu_{\text{В}}}{\mu_{\text{я}}} = 1833.$

7.11. Считая постоянную λ радиоактивного распада известной, выведите выражение для периода полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного ядра.

Дано: λ.

Найти: $T_{1/2}$.

Решение. Согласно закону радиоактивного распада,

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

где N_0 — начальное число *нераспавшихся* ядер (в момент времени $t = 0$); N — число *нераспавшихся* ядер в момент времени t; λ — постоянная радиоактивного распада.

Период полураспада $T_{1/2}$ — время, за которое исходное число радиоактивных ядер *в среднем* уменьшается вдвое. Тогда, согласно (1),

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

откуда искомое выражение для периода полураспада

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Ответ: $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}.$

7.12. Считая постоянную λ радиоактивного распада известной, выведите выражение для среднего времени жизни τ радиоактивного ядра.

Дано: λ.

Найти: τ.

Решение. Радиоактивный распад является спонтанным процессом, подчиняющимся законам статистики. Так как отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга, то можно считать, что число ядер dN, распавшихся в среднем за интервал времени от t до $t + dt$, пропорционально промежутку времени dt и числу N нераспавшихся ядер к моменту времени t:

$$dN = -\lambda N dt,$$

где λ — постоянная радиоактивного распада; знак «–» указывает на то, что общее число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается.

Суммарная продолжительность жизни dN ядер равна $t|dN| = \lambda N t dt$. Проинтегрировав это выражение по всем возможным t (т.е. от 0 до ∞) и разделив на начальное число ядер N_0, получим среднее время жизни τ радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} \lambda N t dt = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} \lambda N_0 t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

(учли закон радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$).

Ответ: $\tau = \dfrac{1}{\lambda}.$

7.13. Выведите закон изменения массы радиоактивного препарата со временем.

Решение. Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

где N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); N — число нераспавшихся ядер в момент времени t; λ — постоянная радиоактивного распада.

Умножив обе части уравнения (1) на m_0 — массу одного атома, получим

$$Nm_0 = N_0 m_0 e^{-\lambda t},$$

откуда

$$M = M_0 e^{-\lambda t}$$

— искомый закон изменения массы радиоактивного препарата со временем, где $M = Nm_0$ — масса препарата в момент времени t; $M_0 = N_0 m_0$ — масса препарата в начальный момент времени $t = 0$.

7.14. Какая доля начального количества радиоактивного изотопа распадется за время, равное средней продолжительности жизни этого изотопа?

Дано: $t = \tau$.

Найти: k.

Решение. Если N_0 — начальное число нераспавшихся ядер в момент времени $t = 0$; N — число нераспавшихся ядер в момент времени t, то за время t доля распавшихся ядер

$$k = \frac{N_0 - N}{N_0}. \quad (1)$$

Согласно закону радиоактивного распада, $N = N_0 e^{-\lambda t}$, где λ — постоянная распада. Среднее время жизни $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$. По условию задачи, $t = \tau$, тогда $N = N_0 e^{-1}$. Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$k = 1 - e^{-1}.$$

Ответ: $k = 0{,}632$.

7.15. Определите период полураспада радиоактивного изотопа, если $^3/_8$ начального количества ядер этого изотопа распалось за время $t = 407$ с.

Дано: $t = 407$ с; $\dfrac{\Delta N}{N_0} = \dfrac{3}{8}$.

Найти: $T_{1/2}$.

Решение. Период полураспада радиоактивного изотопа

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad (1)$$

где λ — постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N, \quad (2)$$

где N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); N — число нераспавшихся ядер в момент времени t, которое, согласно закону радиоактивного распада,

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

Доля распавшихся ядер за время t с учетом (2) и (3):

$$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Согласно условию задачи,

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{3}{8},$$

откуда $\lambda = \dfrac{\ln\frac{8}{5}}{t}$. Подставив значение λ в формулу (1), получим искомый период полураспада радиоактивного изотопа

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\ln\frac{8}{5}}\, t.$$

Ответ: $T_{1/2} = 600$ с (10 мин).

7.16. Постоянная λ радиоактивного распада изотопа кобальта ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ равна $4{,}14 \cdot 10^{-9}$ с$^{-1}$. Определите время, за которое распадется $^1/_6$ начального количества ядер этого радиоактивного изотопа.

Дано: ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$; $\lambda = 4{,}14 \cdot 10^{-9}$ с$^{-1}$; $\dfrac{\Delta N}{N_0} = \dfrac{1}{6}$.

Найти: t.

Решение. Доля распавшихся ядер за время t

$$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t},$$

где N_0 — начальное число нераспавшихся ядер; N — число нераспавшихся ядер в момент времени t ($N = N_0 e^{-\lambda t}$); $N_0 - N = \Delta N$ — число ядер, распавшихся за время t; λ — постоянная радиоактивного распада.

Согласно условию задачи,

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{6}; \;\; \lambda t = \ln\frac{6}{5} = \ln 1{,}2,$$

откуда

$$t = \frac{\ln 1{,}2}{\lambda}.$$

Ответ: $t = 4{,}4 \cdot 10^7$ с.

7.17. Первоначальная масса радиоактивного изотопа натрия $^{25}_{11}\mathrm{Na}$ (период полураспада $T_{1/2} = 62$ с) равна 0,3 мг. Определите начальную активность изотопа и его активность через 5 мин.

Дано: $^{25}_{11}\mathrm{Na}$; $T_{1/2} = 62$ с; $m_0 = 0{,}3$ мг $(0{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг); $t = 5$ мин (300 с).

Найти: A_0; A.

Решение. Начальная активность изотопа

$$A_0 = \lambda N_0, \qquad (1)$$

где $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — постоянная радиоактивного распада; N_0 — число ядер изотопа в начальный момент времени: $N_0 = \dfrac{m_0 N_\mathrm{A}}{M}$ ($M = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса натрия; $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро). Подставив приведенные выражения в формулу (1), получим искомую начальную активность изотопа

$$A_0 = \frac{m_0\, N_\mathrm{A} \ln 2}{M T_{1/2}}.$$

Активность изотопа $A = \lambda N$, где, согласно закону радиоактивного распада, $N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ — число нераспавшихся ядер в момент времени t. Так как $A_0 = \lambda N_0$, то активность нуклида со временем уменьшается по закону

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = A_0 \mathrm{e}^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}.$$

Ответ: $A_0 = 8{,}78 \cdot 10^{19}$ Бк; $A = 3{,}13 \cdot 10^{15}$ Бк.

7.18. Начальная активность 1 мкг изотопа йода $^{131}_{53}\mathrm{I}$ равна 4,61 ТБк. Определите период полураспада этого изотопа.

Дано: $^{131}_{53}\mathrm{I}$; $A_0 = 4{,}61$ ТБк $(4{,}61 \cdot 10^{12}$ Бк); $m_0 = 1$ мкг $(10^{-6}$ кг).

Найти: $T_{1/2}$.

Решение. Начальная активность изотопа

$$A_0 = \lambda N_0, \qquad (1)$$

где λ — постоянная радиоактивного распада; N_0 — число ядер изотопа в начальный момент времени.

Связь между постоянной радиоактивного распада λ и периодом полураспада $T_{1/2}$:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \qquad (2)$$

Начальное число атомов (ядер), содержащихся в радиоактивном изотопе,

$$N_0 = m_0 \frac{N_\mathrm{A}}{M}, \qquad (3)$$

где m_0 — начальная масса изотопа; $M = 131 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса изотопа $^{131}_{53}\mathrm{I}$; $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро.

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m_0 N_\mathrm{A}}{M},$$

откуда искомый период полураспада

$$T_{1/2} = \frac{m_0 N_\text{A} \ln 2}{A_0 M}.$$

Ответ: $T_{1/2} = 8$ сут.

7.19. Активность радиоактивного изотопа магния $^{27}_{12}\text{Mg}$ уменьшается за $t = 44{,}4$ с на $\eta = 5\,\%$. Определите среднее время жизни радионуклида.

Дано: $^{27}_{12}\text{Mg}$; $t = 44{,}4$ с; $\eta = 0{,}05$.

Найти: τ.

Решение. Активность радиоактивного изотопа уменьшается со временем по тому же закону, что и число радиоактивных ядер ($A = \lambda N$):

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{1}$$

где A_0 — начальная активность; λ — постоянная радиоактивного распада.

Согласно условию задачи,

$$\eta = \frac{A_0 - A}{A_0} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

[учли формулу (1)], откуда

$$\ln(1 - \eta) = -\lambda t. \tag{2}$$

Постоянная радиоактивного распада λ и среднее время жизни τ радиоактивного ядра связаны соотношением

$$\lambda = \frac{1}{\tau}.$$

Тогда выражение (2) запишется в виде

$$\ln(1 - \eta) = -\frac{t}{\tau},$$

откуда искомое время жизни радионуклида

$$\tau = -\frac{t}{\ln(1 - \eta)}.$$

Ответ: $\tau = 866$ с.

7.20. Зная, что период полураспада радиоактивного изотопа магния $^{27}_{12}\text{Mg}$ равен 10 мин, определите удельную (массовую) активность α этого нуклида.

Дано: $^{27}_{12}\text{Mg}$; $T_{1/2} = 10$ мин (600 с).

Найти: α.

Решение. Удельная (массовая) активность радиоактивного источника — число распадов в 1 с на 1 кг вещества

$$\alpha = \frac{A}{m}, \tag{1}$$

где A — активность нуклида (число распадов, происходящих с ядрами образца в 1 с); m — масса изотопа.

Активность

$$A = \lambda N, \tag{2}$$

где λ — постоянная радиоактивного распада; N — число нераспавшихся ядер в момент времени t. Учитывая формулу (2), удельная активность

$$\alpha = \frac{\lambda N}{m}.$$

Если учесть, что $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $N = \dfrac{m}{M} N_\text{A}$ ($M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса изотопа ${}^{27}_{12}\text{Mg}$; $N_\text{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро), то искомая удельная активность нуклида

$$\alpha = \frac{N_\text{A} \ln 2}{M T_{1/2}}.$$

Ответ: $\alpha = 2{,}58 \cdot 10^{22}$ Бк/кг.

7.21. Определите, какой изотоп образуется из изотопа урана ${}^{238}_{92}\text{U}$ в результате трех α-распадов и двух β^--распадов. Представьте общую схему распада.

Дано: ${}^{238}_{92}\text{U}$; 3 α-распада; 2 β^--распада.

Решение. α- и β^--распады протекают согласно следующим правилам смещения:

$${}^{A}_{Z}\text{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + {}^{4}_{2}\text{He},$$

$${}^{A}_{Z}\text{X} \xrightarrow{\beta^-} {}_{Z+1}^{\;\;\;A}\text{Y} + {}^{\;\;0}_{-1}e,$$

т. е. в результате α-распада массовое число дочернего ядра уменьшается на 4, а зарядовое число — на 2 единицы, в результате β^--распада массовое число дочернего ядра не изменяется, а зарядовое число увеличивается на единицу. Тогда общая схема распада:

$${}^{238}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{торий}}}{{}^{234}_{90}\text{Th}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{радий}}}{{}^{230}_{88}\text{Ra}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{радон}}}{{}^{226}_{86}\text{Rn}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{франций}}}{{}^{226}_{87}\text{Fr}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{радий}}}{{}^{226}_{88}\text{Ra}}.$$

Ответ: в результате указанных распадов образуется изотоп радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$.

7.22. Радиоактивный изотоп урана ${}^{233}_{92}\text{U}$ претерпевает шесть α- и три β^--распадов. Пользуясь Периодической системой элементов и правилами смещения, определите конечный продукт деления. Представьте общую схему распада.

Дано: ${}^{233}_{92}\text{U}$; 6 α-распадов; 3 β^--распада.

Решение. α- и β^--распады протекают согласно правилам смещения:

$${}^{A}_{Z}\text{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + {}^{4}_{2}\text{He},$$

$${}^{A}_{Z}\text{X} \xrightarrow{\beta^-} {}^{A}_{Z+1}\text{Y} + {}^{\;\;0}_{-1}e,$$

т. е. в результате α-распада массовое число дочернего ядра уменьшается на 4, а зарядовое число — на 2 единицы, в результате β^--распада массовое число дочернего ядра не изменяется, а зарядовое число увеличивается на единицу.

Тогда общая схема распада:

$$\underset{}{{}^{233}_{92}\mathrm{U}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow\\\text{торий}}}{{}^{229}_{90}\mathrm{Th}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow\\\text{радий}}}{{}^{225}_{88}\mathrm{Ra}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow\\\text{радон}}}{{}^{221}_{86}\mathrm{Rn}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow\\\text{полоний}}}{{}^{217}_{84}\mathrm{Po}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow\\\text{свинец}}}{{}^{213}_{82}\mathrm{Pb}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\substack{\uparrow\\\text{ртуть}}}{{}^{209}_{80}\mathrm{Hg}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\substack{\uparrow\\\text{таллий}}}{{}^{209}_{81}\mathrm{Tl}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\substack{\uparrow\\\text{свинец}}}{{}^{209}_{82}\mathrm{Pb}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\substack{\uparrow\\\text{висмут}}}{{}^{209}_{83}\mathrm{Bi}}.$$

Ответ: в результате указанных распадов образуется изотоп висмута ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$.

7.23. Докажите, что выделяющаяся при α-распаде энергия практически полностью уносится α-частицей.

Дано: ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Найти: $\Delta E \approx T_\alpha$.

Решение. Согласно закону сохранения энергии, для α-распада

$$m_\mathrm{X}c^2 = m_\mathrm{Y}c^2 + m_\alpha c^2 + T_\mathrm{Y} + T_\alpha,$$

где T_Y и T_α — соответственно кинетическая энергия дочернего ядра и α-частицы (кинетическая энергия материнского ядра принимается равной нулю, так как оно до реакции покоилось).

В системе центра масс полная энергия, выделяющаяся при распаде,

$$\Delta E = [m_\mathrm{X} - (m_\mathrm{Y} + m_\alpha)]c^2 = T_\mathrm{Y} + T_\alpha. \tag{1}$$

Согласно закону сохранения импульса,

$$m_\alpha v_\alpha = m_\mathrm{Y} v_\mathrm{Y},$$

или

$$\frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{2} = \frac{m_\mathrm{Y}^2 v_\mathrm{Y}^2}{2},$$

откуда

$$m_\alpha T_\alpha = m_\mathrm{Y} T_\mathrm{Y}. \tag{2}$$

Учитывая, что массовое число для α-частицы равно 4, а для дочернего ядра равно $A - 4$, можем выражение (2) записать в виде

$$4T_\alpha = (A-4)T_\mathrm{Y},$$

откуда

$$T_\mathrm{Y} = \frac{4T_\alpha}{A-4}. \tag{3}$$

Согласно выражениям (1) и (3),

$$\Delta E = T_\mathrm{Y} + T_\alpha = \frac{4T_\alpha}{A-4} + T_\alpha = \frac{AT_\alpha}{A-4},$$

откуда кинетическая энергия α-частицы

$$T_\alpha = \frac{(A-4)\Delta E}{A}. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3), получим выражение для кинетической энергии дочернего ядра:

$$T_\mathrm{Y} = \frac{4\Delta E}{A}. \tag{5}$$

Для тяжелых ядер A велико, поэтому $A-4 \approx A$, и из формул (4) и (5) получаем

$$T_\alpha \approx \Delta E \quad \text{и} \quad T_\gamma \approx 0.$$

7.24. Радиоактивное ядро $^{23}_{12}\mathrm{Mg}$ претерпело β^+-распад. Определите энергию Q β^+-распада. Масса нейтрального атома магния равна $3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг.

Дано: $^{23}_{12}\mathrm{Mg}$; β^+-распад; $m_{\mathrm{Mg}} = 3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг.

Найти: Q.

Решение. Схема β^+-распада изотопа $^{23}_{12}\mathrm{Mg}$:

$$^{23}_{12}\mathrm{Mg} \xrightarrow{\beta^+} {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{\ 0}_{+1}e + {}^0_0\nu_e,$$

где ${}^{\ 0}_{+1}e$ — символическое обозначение позитрона (его зарядовое число равно $+1$, а массовое число — нулю); ${}^0_0\nu_e$ — электронное нейтрино, масса которого считается равной нулю.

Согласно закону сохранения релятивистской полной энергии,

$$m_{\text{я}\,\mathrm{Mg}}c^2 = m_{\text{я}\,\mathrm{Na}}c^2 + T_{\mathrm{Na}} + m_{{}^{\ 0}_{+1}e}c^2 + T_{{}^{\ 0}_{+1}e} + T_{{}^0_0\nu},$$

где $m_{\text{я}\,\mathrm{Mg}}$, $m_{\text{я}\,\mathrm{Na}}$ — соответственно массы ядер магния и натрия; $m_{{}^{\ 0}_{+1}e}$ — масса позитрона; T_{Na}, $T_{{}^{\ 0}_{+1}e}$, $T_{{}^0_0\nu}$ — кинетические энергии атома натрия, позитрона и нейтрино (последняя равна нулю).

Энергия распада

$$Q = T_{\mathrm{Na}} + T_{{}^{\ 0}_{+1}e} = (m_{\text{я}\,\mathrm{Mg}} - m_{\text{я}\,\mathrm{Na}} - m_{{}^{\ 0}_{+1}e})c^2$$

или

$$Q = [(m_{\mathrm{Mg}} - 12m_e) - (m_{\mathrm{Na}} - 11m_e) - m_{{}^{\ 0}_{+1}e}]c^2 \qquad (1)$$

[учли, что массы ядер магния и натрия через массы соответствующих нейтральных атомов равны: $m_{\text{я}\,\mathrm{Mg}} = m_{\mathrm{Mg}} - 12m_e$, $m_{\text{я}\,\mathrm{Na}} = m_{\mathrm{Na}} - 11m_e$ (m_e — масса электрона)]. Поскольку массы электрона и позитрона равны, то после элементарных преобразований искомая энергия β^+-распада

$$Q = (m_{\mathrm{Mg}} - m_{\mathrm{Na}} - 2m_e)c^2,$$

где $m_{\mathrm{Na}} = 3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг.

Ответ: $Q = 2{,}91$ МэВ.

7.25. В результате столкновения нейтрона с ядром $^{10}_{5}\mathrm{B}$ наблюдается испускание α-частицы. Ядро какого элемента возникает в результате реакции?

Решение. Столкновение приводит к ядерной реакции

$$^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^1_0n \to ? + {}^4_2\mathrm{He}.$$

Массовое число (общее число нуклонов) первоначально равно $10 + 1 = 11$, зарядовое число — $5 + 0 = 5$. Согласно законам сохранения массовых чисел и зарядовых чисел, число нуклонов и зарядовое число в правой части уравнения должны иметь те же значения. Следовательно, у образовавшегося в результате реакции ядра $Z = 3$, $A = 7$. В Периодической системе элементов они соответствуют $^7_3\mathrm{Li}$. Таким образом, реакция запишется в виде

$$^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^1_0n \to {}^7_3\mathrm{Li} + {}^4_2\mathrm{He}.$$

Ответ: $^7_3\mathrm{Li}$, литий.

7.26. В результате соударения дейтрона с ядром бериллия $^{9}_{4}\mathrm{Be}$ образовались новое ядро и нейтрон. Определите порядковый номер и массовое число образовавшегося ядра, запишите ядерную реакцию и определите ее энергетический эффект.

Дано: $^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \to ^{A}_{Z}\mathrm{X} + ^{1}_{0}n$.

Найти: Z; A; Q.

Решение. Из законов сохранения зарядовых и массовых чисел следует, что $Z = 5$, а $A = 10$, т. е. образовавшееся в результате ядерной реакции ядро — изотоп бора $^{10}_{5}\mathrm{B}$. Поэтому ядерную реакцию можно записать в виде

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \to ^{10}_{5}\mathrm{B} + ^{1}_{0}n.$$

Энергетический эффект ядерной реакции

$$Q = [(m_{^{9}_{4}\mathrm{Be}} + m_{^{2}_{1}\mathrm{H}}) - (m_{^{10}_{5}\mathrm{B}} + m_n)]c^2, \qquad (1)$$

где в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых — массы ядер продуктов реакции. При расчетах вместо масс ядер используют массы нейтральных атомов, так как, согласно закону сохранения зарядовых чисел, в ядерной реакции (а зарядовое число Z нейтрального атома равно числу электронов в его оболочке) получаются одинаковые результаты.

Массы нейтральных атомов в выражении (1):

$$m_{^{9}_{4}\mathrm{Be}} = 1{,}4966 \cdot 10^{-26}\ \text{кг},\ m_{^{2}_{1}\mathrm{H}} = 3{,}3446 \cdot 10^{-27}\ \text{кг},\ m_{^{10}_{5}\mathrm{B}} = 1{,}6627 \cdot 10^{-26}\ \text{кг},$$
$$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Вычисляя, получим $Q = 4{,}84$ МэВ; энергетический эффект положителен; реакция экзотермическая.

Ответ: $Z = 5$; $A = 10$; $Q = 4{,}84$ МэВ.

7.27. Найдите кинетические энергии продуктов реакции $^{9}_{5}\mathrm{B}(n, \alpha)^{6}_{3}\mathrm{Li}$, протекающей в результате взаимодействия весьма медленных нейтронов с покоящимися ядрами бора, если энергия этой реакции составляет 2,8 МэВ.

Дано: $^{9}_{5}\mathrm{B}(n, \alpha)^{6}_{3}\mathrm{Li}$; $Q = 2{,}8$ МэВ.

Найти: $T_{^{7}_{3}\mathrm{Li}}$; $T_{^{4}_{2}\mathrm{He}}$.

Решение. Запись реакции в развернутом виде

$$^{9}_{5}\mathrm{B} + ^{1}_{0}n \to ^{6}_{3}\mathrm{Li} + ^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Закон сохранения энергии применительно к условию задачи (ядро — мишень покоится, нейтроны весьма медленные):

$$Q = T_{^{6}_{3}\mathrm{Li}} + T_{^{4}_{2}\mathrm{He}}. \qquad (1)$$

Для определения кинетических энергий воспользуемся законом сохранения импульса, считая, что суммарный импульс частиц до реакции (и после реакции тоже) равен нулю:

$$\vec{p}_{^{6}_{3}\mathrm{Li}} + \vec{p}_{^{4}_{2}\mathrm{He}} = 0,$$

откуда для модулей импульсов

$$p_{^{6}_{3}\mathrm{Li}} = p_{^{4}_{2}\mathrm{He}}. \qquad (2)$$

Так как кинетические энергии ядер по условию задачи много меньше энергии покоя этих ядер (энергия реакции 2,8 МэВ), можно воспользоваться классической формулой

$$p^2 = 2mT. \tag{3}$$

Тогда, переходя от импульсов к их кинетическим энергиям [подставив (3) в (2)], получим

$$m_{{}^6_3\mathrm{Li}}T_{{}^6_3\mathrm{Li}} = m_{{}^4_2\mathrm{He}}T_{{}^4_2\mathrm{He}}. \tag{4}$$

Решив совместно (1) и (4), найдем

$$T_{{}^6_3\mathrm{Li}} = \frac{Qm_{{}^4_2\mathrm{He}}}{m_{{}^6_3\mathrm{Li}} + m_{{}^4_2\mathrm{He}}};$$

$$T_{{}^4_2\mathrm{He}} = \frac{Qm_{{}^6_3\mathrm{Li}}}{m_{{}^6_3\mathrm{Li}} + m_{{}^4_2\mathrm{He}}}.$$

Массы нейтральных атомов

$$m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}\ \text{кг},\ m_{{}^6_3\mathrm{Li}} = 9{,}9887 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Ответ: $T_{{}^6_3\mathrm{Li}} = 1{,}119$ МэВ; $T_{{}^4_2\mathrm{He}} = 1{,}681$ МэВ.

7.28. Определите энергию Q ядерной реакции ${}^{14}_7\mathrm{N}\,(n,p)\,{}^{14}_6\mathrm{C}$, если энергия связи ядра ${}^{14}_7\mathrm{N}$ равна 104,66 МэВ, а ядра ${}^{14}_6\mathrm{C}$ — 105,29 МэВ.

Дано: ${}^{14}_7\mathrm{N}\,(n,p)\,{}^{14}_6\mathrm{C}$; $E_\mathrm{N} = 104{,}66$ МэВ; $E_\mathrm{C} = 105{,}29$ МэВ.

Найти: Q.

Решение. Запись реакции в развернутом виде:

$${}^{14}_7\mathrm{N} + {}^1_0n \to {}^{14}_6\mathrm{C} + {}^1_1p.$$

Энергия реакции

$$Q = [(m_\mathrm{N} + m_n) - (m_\mathrm{C} + m_p)]c^2, \tag{1}$$

где m_N и m_C — соответственно массы ядер азота и углерода; m_n и m_p — массы нейтрона и протона.

Согласно формуле для энергии связи

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m]c^2$$

(Z — зарядовое число; A — массовое число; m — масса ядра), для масс ядер азота ${}^{14}_7\mathrm{N}$ и углерода ${}^{14}_6\mathrm{C}$ получим (индекс «св» для простоты опускаем):

$$m_\mathrm{N} = 7m_p + 7m_n - \frac{E_\mathrm{N}}{c^2},$$

$$m_\mathrm{C} = 6m_p + 8m_n - \frac{E_\mathrm{C}}{c^2}.$$

После подстановки этих выражений в формулу (1) и элементарных преобразований получим

$$Q = E_{\mathrm{N}} - E_{\mathrm{C}}.$$

Ответ: $Q = -0{,}63$ МэВ. Энергетический эффект отрицателен, реакция эндотермическая.

7.29. Определите зарядовое число Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи ядерной реакции: 1) ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{10}_{5}\mathrm{B} + x$; 2) ${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$; 3) ${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + x$.

Решение. Для нахождения в записанных реакциях зарядового числа Z и массового числа A воспользуемся законами сохранения зарядовых и массовых чисел:

1) ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{10}_{5}\mathrm{B} + x$; $Z = 0$; $A = 1$: ${}^{1}_{0}n$ (нейтрон);

2) ${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$; $Z = 0$; $A = 1$: ${}^{1}_{0}n$ (нейтрон);

3) ${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + x$; $Z = 1$; $A = 1$: ${}^{1}_{1}p$ (протон).

Ответ: 1) ${}^{1}_{0}n$; 2) ${}^{1}_{0}n$; 3) ${}^{1}_{1}p$.

7.30. Фотон с энергией $\varepsilon = 3{,}02$ МэВ в поле тяжелого ядра превратился в пару электрон—позитрон. Принимая, что кинетическая энергия электрона и позитрона одинакова, определите кинетическую энергию каждой частицы.

Дано: $\varepsilon = 3{,}02$ МэВ; $\gamma \to {}^{\;\,0}_{-1}e + {}^{\;\,0}_{+1}e$; $T_1 = T_2 = T$.

Найти: T.

Решение. Согласно закону сохранения энергии,

$$\varepsilon = 2mc^2 + 2T, \tag{1}$$

где mc^2 — энергия покоя каждой из частиц (масса электрона равна массе позитрона); $2T$ — суммарная кинетическая энергия позитрона и электрона в момент их возникновения (по условию задачи $T_1 = T_2 = T$).

Из формулы (1) искомая кинетическая энергия электрона (позитрона)

$$T = \frac{\varepsilon - 2mc^2}{2},$$

где $2mc^2 = 1{,}02$ МэВ ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Ответ: $T = 1$ МэВ.

7.31. При достаточно больших энергиях нейтронов (≈ 10 МэВ) на ядре урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ идет ядерная реакция типа $(n, 2n)$, в результате которой образуется искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^--распад. Запишите указанные процессы.

Дано: ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$; $(n, 2n)$; β^--распад.

Решение. Ядерная реакция $(n, 2n)$ на ядре ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ запишется в виде:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{236}_{92}\mathrm{U} + 2{}^{1}_{0}n,$$

причем ядро ${}^{236}_{92}\mathrm{U}$ претерпевает β^--распад по схеме:

$${}^{236}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{236}_{93}\mathrm{Np} + {}^{\;\,0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e.$$

7.32. При захвате теплового нейтрона ядром урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ образуются два осколка деления и два нейтрона. Определите зарядовое число Z и массовое число A одного из осколков, если другим осколком является ядро стронция $^{95}_{38}\mathrm{Sr}$. Первый из осколков претерпевает три β^--распада. Запишите реакцию деления и цепочку β^--распадов.

Дано: $^{235}_{92}\mathrm{U}$; $2n$; $^{95}_{38}\mathrm{Sr}$; 3 β^--распада.

Найти: $^{A}_{Z}\mathrm{Y}$.

Решение. Согласно условию задачи,

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{A}_{Z}\mathrm{Y} + {}^{95}_{38}\mathrm{Sr} + 2\,{}^{1}_{0}n.$$

В левой части уравнения массовое число (общее число нуклонов) равно $235 + 1 = 236$, зарядовое число $92 + 0 = 92$. Согласно законам сохранения массовых и зарядовых чисел, число нуклонов и суммарное зарядовое число в правой части уравнения должны иметь те же значения. Следовательно, у образовавшегося в результате реакции первого осколка $A = 236 - 95 - 2 = 139$; $Z = 92 - 38 = 54$. В Периодической системе элементов они соответствуют $^{139}_{54}\mathrm{Xe}$.

Таким образом, реакция запишется в виде

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{95}_{38}\mathrm{Sr} + 2\,{}^{1}_{0}n.$$

β^--Распад протекает согласно правилу смещения

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}_{Z+1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + {}^{\;\;0}_{-1}e.$$

Тогда цепочку трех β^--распадов можно представить в виде

$$\underset{\text{ксенон}}{\underset{\uparrow}{^{139}_{54}\mathrm{Xe}}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\text{цезий}}{\underset{\uparrow}{^{139}_{55}\mathrm{Cs}}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\text{барий}}{\underset{\uparrow}{^{139}_{56}\mathrm{Ba}}} \xrightarrow{\beta^-} \underset{\text{лантан}}{\underset{\uparrow}{^{139}_{57}\mathrm{La}}}.$$

Ответ: $^{139}_{54}\mathrm{Xe}$; $^{139}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{57}\mathrm{La}$.

7.33. Определите суточный расход чистого урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ атомной электростанцией мощностью $P = 300$ МВт, если при делении $^{235}_{92}\mathrm{U}$ за один акт деления выделяется 200 МэВ энергии.

Дано: $t = 24$ ч $(24 \cdot 3600$ с$)$; $P = 300$ МВт $(3 \cdot 10^8$ Вт$)$; $E_{1\,\text{дел}} = 200$ МэВ $(3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж$)$.

Найти: m.

Решение. Энергия, выделяемая при сжигании 1 кг топлива,

$$E_{1\,\text{кг}} = \frac{N_\text{A}}{M} E_{1\,\text{дел}}, \tag{1}$$

где $N_\text{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро; $M = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса.

Мощность

$$P = \frac{E_{1\,\text{кг}} m}{t},$$

откуда

$$m = \frac{Pt}{E_{1\,\text{кг}}}. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) выражение (1), получим искомый суточный расход урана:

$$m = \frac{MPt}{N_{\text{А}} E_{1\,\text{дел}}}.$$

Ответ: $m = 316$ г.

7.34. Определите, во сколько раз увеличится количество нейтронов в ядерном реакторе за время $t = 1$ мин, если среднее время жизни нейтронов $T = 90$ мс, а коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}003$.

Дано: $t = 1$ мин (60 с); $T = 90$ мс ($9 \cdot 10^{-2}$ с); $k = 1{,}003$.

Найти: $\dfrac{N}{N_0}$.

Решение. Пусть T — среднее время жизни одного поколения, а N — число нейтронов в данном поколении. В следующем поколении их число равно kN, т. е. прирост числа нейтронов за одно поколение $\mathrm{d}N = kN - N = N(k-1)$. Прирост же числа нейтронов за единицу времени, т. е. скорость нарастания цепной реакции,

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{N(k-1)}{T}. \qquad (1)$$

Интегрируя (1), получим

$$N = N_0 \mathrm{e}^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

где N_0 — число нейтронов в начальный момент времени, а N — их число в момент времени t.

Тогда искомое

$$\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{\frac{(k-1)t}{T}}.$$

Ответ: $\dfrac{N}{N_0} = 7{,}389$.

7.35. Покоящийся π^--мезон распался на мюон и антинейтрино. Определите кинетическую энергию мюона.

Решение. Схема распада, согласно условию задачи,

$$\pi^- \to \mu^- + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu,$$

где ${}^0_0\tilde{\nu}_\mu$ — мюонное антинейтрино.

Энергия распада

$$Q = m_\pi c^2 - m_\mu c^2 \qquad (1)$$

(учтено, что масса антинейтрино равна нулю), где Q — суммарная кинетическая энергия мюона и антинейтрино:

$$Q = T_\mu + T_{\tilde{\nu}}.$$

Суммарный импульс системы равен нулю, следовательно,

$$p_\mu = p_{\tilde{\nu}}.$$

Тогда

$$Q = T_\mu + p_{\tilde{\nu}}c = T_\mu + p_\mu c = T_\mu + \sqrt{T_\mu(T_\mu + 2m_\mu c^2)} \tag{2}$$

(учли формулу релятивистской динамики $pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}$, где p — релятивистский импульс).

Из формулы (2) получаем, что

$$T_\mu = \frac{Q^2}{Q + m_\mu c^2}. \tag{3}$$

Подставив в формулу (3) выражение (2), найдем искомую кинетическую энергию мюона:

$$T_\mu = \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2}{m_\pi c^2}.$$

7.36. Релятивистский позитрон с кинетической энергией $T = 0{,}8$ МэВ аннигилирует на покоящемся свободном электроне, в результате возникают два γ-кванта с одинаковыми энергиями. Определите, под каким углом друг к другу они разлетаются.

Дано: $T = 0{,}8$ МэВ; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Найти: ϑ.

Решение. Процесс аннигиляции электрона ${}^{\,0}_{-1}e$ и позитрона ${}^{\,0}_{+1}e$, согласно условию задачи, происходит по схеме:

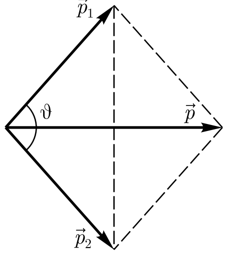
$${}^{\,0}_{-1}e + {}^{\,0}_{+1}e \rightarrow 2\gamma$$

и подчиняется законам сохранения энергии и импульса.

Согласно закону сохранения импульса, импульс позитрона $\vec{p}$ равен (см. рисунок) векторной сумме импульсов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ γ-квантов (импульс электрона равен нулю).

$$p_1 = p_2 = \frac{\varepsilon}{c}, \tag{1}$$

где ε — энергия каждого γ-кванта (по условию задачи энергии γ-квантов одинаковы); c — скорость распространения света в вакууме.



Из рисунка следует, что

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{p}{2p_1} = \frac{pc}{2\varepsilon} \tag{2}$$

[учли формулу (1)]. Импульс позитрона как релятивистской частицы определяется выражением

$$pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}, \quad p = \frac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{c}. \tag{3}$$

Согласно закону сохранения полной энергии,

$$T + 2mc^2 = 2\varepsilon \tag{4}$$

(масса покоя фотонов равна нулю, и полная энергия фотонов есть их кинетическая энергия).

Подставив в (2) выражение (3) и значение 2ε, согласно формуле (4), получим

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{T+2mc^2} = \sqrt{\frac{T}{T+2mc^2}}.$$

Учитывая, что $mc^2 = 0{,}511$ МэВ, получим $\cos\dfrac{\vartheta}{2} = 0{,}663$; $\vartheta = 96{,}9°$.

Ответ: $\vartheta = 96{,}9°$.

7.37. При столкновении нейтрона и антинейтрона происходит их аннигиляция, в результате чего возникают два γ-кванта, а энергия частиц переходит в энергию γ-квантов. Определите энергию каждого из возникших γ-квантов, принимая, что кинетическая энергия нейтрона и антинейтрона до их столкновения пренебрежимо мала.

Дано: $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: ε.

Решение. Процесс аннигиляции нейтрона ${}_0^1n$ и антинейтрона ${}_0^1\tilde{n}$, согласно условию задачи, происходит по схеме

$${}_0^1n + {}_0^1\tilde{n} \to 2\gamma.$$

Учитывая, что кинетическая энергия нейтрона и антинейтрона пренебрежимо мала (условие задачи), полная энергия

$$E = 2m_nc^2,$$

где m_nc^2 — энергия нейтрона (антинейтрона).

Согласно закону сохранения энергии,

$$2m_nc^2 = 2\varepsilon,$$

откуда энергия γ-кванта

$$\varepsilon = m_nc^2.$$

Ответ: $\varepsilon = 942$ МэВ.

7.38. Принимая энергию E релятивистских мюонов в космическом излучении равной 3 ГэВ, определите расстояние, которое сможет пройти мюон в атмосфере за время его жизни, если собственное время жизни мюона $t_0 = 2{,}2$ мкс, а энергия покоя $E_0 = 100$ МэВ.

Дано: $E = 3$ ГэВ ($3 \cdot 10^9$ эВ); $t_0 = 2{,}2$ мкс ($2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с); $E_0 = 100$ МэВ (10^8 эВ).

Найти: l.

Решение. Расстояние, которое сможет пройти мюон,

$$l = vt, \tag{1}$$

где v — скорость мюона; t — время жизни движущегося мюона по лабораторным часам:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Полная энергия релятивистской частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3}$$

где $E_0 = mc^2$ — энергия покоя частицы (m — масса частицы, c — скорость света в вакууме); v — скорость частицы. Из формулы (3) следует, что

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}. \tag{4}$$

Из сравнения формул (2) и (3) вытекает, что

$$t = \frac{E}{E_0} t_0. \tag{5}$$

Подставив выражения (4) и (5) в формулу (1), найдем искомое расстояние

$$l = ct_0\sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1}.$$

Ответ: $l = 19{,}8$ км.

7.39. Продукты распада заряженных пионов испытывают дальнейший распад. Запишите цепочку распадов π^+- и π^--мезонов.

Решение. Все π-мезоны (пионы) нестабильны (время жизни заряженных пионов составляет $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с). Распад заряженных пионов происходит в основном по схемам:

$$\pi^+ \to \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu,$$

$$\pi^- \to \mu^- + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu,$$

где мюоны испытывают дальнейший распад:

$$\mu^+ \to {}^{\;0}_{+1}e + {}^0_0\nu_e + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu,$$

$$\mu^- \to {}^{\;0}_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^0_0\nu_\mu.$$

В приведенных цепочках распадов выполняются: закон сохранения спина (для π^+: $0 = -1/2 + 1/2$; для μ^+: $-1/2 = -1/2 + 1/2 - 1/2$; для π^-: $0 = 1/2 - 1/2$; для μ^-: $1/2 = 1/2 - 1/2 + 1/2$); закон сохранения лептонного числа (для π^+: $0 = -1 + 1$; для μ^+: $-1 = -1 + 1 - 1$; для π^-: $0 = 1 - 1$; для μ^-: $1 = 1 - 1 + 1$); законы сохранения зарядовых и массовых чисел (это предоставляем проверить читателю), а также другие законы сохранения (энергии, импульса и т. д.).

7.40. Какие схемы мюонного распада возможны и почему: 1) $\mu^- \to {}^{\;0}_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e$; 2) $\mu^- \to {}^{\;0}_{-1}e + {}^0_0\nu_e$; 3) $\mu^- \to {}^{\;0}_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^0_0\nu_\mu$?

Решение. 1) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_0^0\tilde{\nu}_e$: у μ^--мюона лептонное число $L = 1$, у электрона — $L = 1$, у ${}_0^0\tilde{\nu}_e$ лептонное число $L = -1$. Таким образом, в приведенном распаде лептонное число не сохраняется $(1 \neq 1 - 1)$, и такой распад невозможен.

2) $\mu^- \to {}_{+1}^{0}e + {}_0^0\nu_e$: у μ^--мюона лептонное число $L = 1$, у электрона — $L = 1$, у ${}_0^0\nu_e$ $L = 1$. Таким образом, в приведенном распаде лептонное число не сохраняется $(1 \neq 1 + 1)$, и такой распад невозможен.

В рассмотренных процессах 1) и 2) также не выполняется закон сохранения спина [каждая из записанных частиц имеет спин $^1/_2$ (в единицах $\hbar$)].

3) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_0^0\tilde{\nu}_e + {}_0^0\nu_\mu$: у μ^--мюона лептонное число $L = 1$, у электрона — $L = 1$, у электронного антинейтрино ${}_0^0\tilde{\nu}_e$ лептонное число $L = -1$, у мюонного нейтрино ${}_0^0\nu_\mu$ $L = 1$. Таким образом, в приведенном распаде лептонное число сохраняется $(1 = 1 - 1 + 1)$, и такой распад возможен. Кроме того, он возможен и в силу сохранения спина (следует учесть, что спины у нейтрино и антинейтрино направлены противоположно).

7.41. Определите, какие из приведенных ниже процессов разрешены законами сохранения лептонного и барионного чисел: 1) $K^+ \to {}_{+1}^{0}e + \pi^0 + {}_0^0\nu_e$; 2) $\mu^+ \to {}_{+1}^{0}e + {}_0^0\tilde{\nu}_e + {}_0^0\nu_\mu$; 3) $K^- + {}_1^1p \to \Sigma^+ + \pi^-$.

Решение. 1) $K^+ \to {}_{+1}^{0}e + \pi^0 + {}_0^0\nu_e$, процесс разрешен, поскольку лептонное число сохраняется $(0 = +1 + 0 - 1)$ (барионное число этим частицам не приписывается).

2) $\mu^+ \to {}_{-1}^{0}e + {}_0^0\tilde{\nu}_e + {}_0^0\nu_\mu$, процесс невозможен, поскольку не сохраняется лептонное число $(0 \neq -1 - 1 + 1)$ (барионное число этим частицам не приписывается).

3) $K^- + {}_1^1p \to \Sigma^+ + \pi^-$, процесс возможен, поскольку барионное число сохраняется $(0 + 1 = +1 + 0)$ (лептонное число этим частицам не приписывается).

7.42. Определите, какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения странности: 1) ${}_0^1n + \pi^- \to \Xi^- + K^+ + K^-$; 2) ${}_1^1p + \pi^- \to K^- + K^+ + {}_0^1n$; 3) ${}_1^1p + \Sigma^- \to \Lambda^0 + {}_0^1n$.

Решение. 1) ${}_0^1n + \pi^- \to \Xi^- + K^+ + K^-$, процесс запрещен, поскольку странность не сохраняется $(0 + 0 \neq -1 + 1 + 1)$.

2) ${}_1^1p + \pi^- \to K^- + K^+ + {}_0^1n$, процесс разрешен, поскольку странность сохраняется $(0 + 0 = -1 + 1 + 0)$.

3) ${}_1^1p + \Sigma^- \to \Lambda^0 + {}_0^1n$, процесс разрешен, поскольку странность сохраняется $(0 + 1 = +1 + 0)$.

Задачи для самостоятельного решения

7.43. Определите, какие из перечисленных нуклидов являются изотопами, изобарами, изотонами: ${}_6^{14}\mathrm{C}$, ${}_7^{15}\mathrm{N}$, ${}_8^{16}\mathrm{O}$; ${}_{12}^{24}\mathrm{Mg}$, ${}_{12}^{25}\mathrm{Mg}$, ${}_{12}^{26}\mathrm{Mg}$; ${}_{18}^{40}\mathrm{Ar}$, ${}_{19}^{40}\mathrm{K}$, ${}_{20}^{40}\mathrm{Ca}$.

7.44. Определите, какую часть массы нейтрального атома ${}_9^{19}\mathrm{F}$ ($m = 3{,}1537 \cdot 10^{-26}$ кг) составляет масса его электронной оболочки.

7.45. Определите число протонов и нейтронов, входящих в состав трех изотопов урана: 1) ${}_{92}^{233}\mathrm{U}$; 2) ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$; 3) ${}_{92}^{238}\mathrm{U}$.

7.46. Пользуясь Периодической системой элементов, определите число нейтронов и протонов в атомах циркония и свинца.

7.47. Определите зарядовые числа, массовые числа и символы ядер, если в ядрах ${}_8^{17}\mathrm{O}$, ${}_{11}^{23}\mathrm{Na}$, ${}_{24}^{52}\mathrm{Cr}$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны — протонами.

7.48. Определите энергию связи $E_{св}$ ядра атома натрия ($^{23}_{11}$Na). Масса нейтрального атома кислорода равна $38{,}163 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_{\text{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг и $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг. [$E_{св} = 195$ МэВ]

7.49. Определите удельную энергию связи $\delta E_{св}$ (энергию связи, отнесенную к одному нуклону) для ядер: 1) $^{7}_{3}$Li; 2) $^{30}_{13}$Al. Массы нейтральных атомов лития и алюминия соответственно равны $1{,}1646 \cdot 10^{-26}$ кг и $4{,}9797 \cdot 10^{-26}$ кг; $m_{\text{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг и $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг. [1) $\delta E_{св} = 5{,}96$ МэВ; 2) $\delta E_{св} = 8{,}15$ МэВ]

7.50. Какую энергию следует затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра гелия $^{4}_{2}$He? Массы нейтральных атомов $^{4}_{2}$He и $^{3}_{2}$He соответственно равны $6{,}6467 \times$ $\times\, 10^{-27}$ кг и $5{,}0084 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса нейтрона $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг. [$E_{св} = 20{,}64$ МэВ]

7.51. Определите постоянную λ радиоактивного распада для изотопов: 1) йода $^{131}_{53}$I; 2) радия $^{219}_{88}$Ra; 3) стронция $^{90}_{38}$Sr. Периоды полураспада этих изотопов соответственно равны: 1) 8 сут; 2) 10^{-3} с; 3) 28 лет. [1) $\lambda = 10^{-6}$ с$^{-1}$; 2) $\lambda = 693$ с$^{-1}$; 3) $\lambda =$ $= 7{,}83 \cdot 10^{-10}$ с$^{-1}$]

7.52. Определите, что (и во сколько раз) продолжительнее — пять периодов полураспада или шесть средних времен жизни радиоактивного ядра.

7.53. Определите, во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за четыре года, если за один год оно уменьшилось в пять раз. [В 625 раз]

7.54. Определите, какая часть первоначального количества ядер радиоактивного изотопа распадется за время t, равное трем периодам полураспада. [$\dfrac{\Delta N}{N} = 0{,}875$]

7.55. Определите, какая часть начального количества ядер радиоактивного изотопа останется нераспавшейся по истечении времени t, равного трем средним временам жизни τ радиоактивного ядра. [$\dfrac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-3} = 0{,}05$]

7.56. Определите время t, за которое распадется $2/3$ начального количества ядер радия $^{219}_{88}$Ra, если его период $T_{1/2}$ полураспада составляет 10^{-3} с. [$t = 0{,}74$ мс]

7.57. Выведите формулу для активности A (интенсивности, определяемой числом ядер, распадающихся в единицу времени) радиоактивного распада через период полураспада $T_{1/2}$ и начальное число N_0 радиоактивных ядер. [$A = N_0 \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \mathrm{e}^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}$]

7.58. Первоначальная масса радиоактивного изотопа радона $^{222}_{86}$Rn (период полураспада $T_{1/2} = 3{,}82$ сут) равна 1,5 г. Определите: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 5 сут. [1) $A_0 = \dfrac{m_0 N_{\text{A}} \ln 2}{M T_{1/2}} = 8{,}54 \cdot 10^{15}$ Бк; 2) $A = A_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} =$ $= 3{,}45 \cdot 10^{15}$ Бк]

7.59. Определите активность некоторого радиоактивного изотопа через промежуток времени, равный половине периода полураспада, если начальная активность A_0 изотопа составляла 10 кБк. [$A = 7{,}07$ кБк]

7.60. Определите активность A радиоактивного изотопа $^{27}_{12}$Mg массой $m_0 =$ $= 0{,}2$ мкг по истечении времени $t = 1$ ч. Период полураспада $T_{1/2}$ этого нуклида равен 10 мин. [$A = \dfrac{m_0 N_{\text{A}}}{M T_{1/2}} \ln 2\, \mathrm{e}^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}} = \dfrac{m_0 N_{\text{A}} \ln 2}{M T_{1/2}} 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = 80{,}4$ ГБк]

7.61. Определите период полураспада $T_{1/2}$ некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за двое суток уменьшилась в три раза. [$T_{1/2} = 1{,}26$ сут]

7.62. Запишите: 1) α-распад $^{210}_{84}$Po; 2) β^--распад $^{214}_{82}$Pb; β^+-распад $^{22}_{11}$Na и $^{30}_{15}$P.

7.63. Радиоактивный изотоп урана $^{238}_{92}$U претерпевает три α- и два β^--распада. Пользуясь Периодической системой элементов и правилами смещения, определите конечный продукт деления. [$^{226}_{88}$Ra]

7.64. Радиоактивный изотоп тория $^{232}_{90}$Th претерпевает последовательно α-распад, два β^--распада и α-распад. Пользуясь Периодической системой элементов и правилами смещения, определите конечный продукт деления. [$^{224}_{88}$Ra]

7.65. Определите, сколько β^-- и α-частиц выбрасывается при превращении изотопа радия $^{225}_{88}$Ra в изотоп свинца $^{209}_{82}$Pb. Запишите схему распада. [$N_\alpha = 4$; $N_{\beta^-} = 2$]

7.66. Радиоактивный изотоп таллия $^{210}_{81}$Tl претерпевает три β^--распада и один α-распад. Определите для конечного продукта деления: 1) зарядовое число Z; 2) массовое число A.

7.67. Определите, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции $^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \to ^{1}_{1}\mathrm{H} + ^{17}_{8}\mathrm{O}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{^{14}_{7}\mathrm{N}} = 2{,}3253 \cdot 10^{-26}$ кг, $m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{^{17}_{8}\mathrm{O}} = 2{,}8229 \cdot 10^{-27}$ кг.

7.68. Определите, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции $^{44}_{20}\mathrm{Ca} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \to ^{41}_{19}\mathrm{K} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{^{44}_{20}\mathrm{Ca}} = 7{,}2992 \cdot 10^{-26}$ кг, $m_{^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{^{41}_{19}\mathrm{K}} = 6{,}8021 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

7.69. Определите зарядовое число Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи ядерной реакции: 1) $^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \to ^{17}_{8}\mathrm{O} + x$; 2) $^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \to ^{12}_{6}\mathrm{C} + x$; 3) $^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to ^{3}_{1}\mathrm{H} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$.

7.70. Запишите недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях, после чего запишите реакции в развернутом виде: 1) $^{19}_{9}\mathrm{F}(p, x)^{16}_{8}\mathrm{O}$; 2) $^{27}_{13}\mathrm{Al}(\alpha, p)\,x$; 3) $x(p,\alpha)^{22}_{11}\mathrm{Na}$; 4) $^{55}_{25}\mathrm{Mn}(x, n)^{55}_{26}\mathrm{Fe}$; 5) $^{3}_{2}\mathrm{He}(x, p)^{3}_{1}\mathrm{H}$.

7.71. Дополните недостающее обозначение x в следующих ядерных реакциях:

1) $^{235}_{x}\mathrm{U} + ^{1}_{0}n \to ^{145}_{57}\mathrm{La} + x + 4^{1}_{0}n$;

2) $^{235}_{x}\mathrm{U} + ^{1}_{0}n \to ^{99}_{x}\mathrm{Zr} + ^{135}_{x}\mathrm{Te} + x^{1}_{0}n$;

3) $^{232}_{x}\mathrm{Th} + ^{1}_{0}n \to x + ^{140}_{x}\mathrm{Xe} + 3^{1}_{0}n$;

4) $^{x}_{x}\mathrm{Pu} + ^{1}_{0}n \to ^{80}_{x}\mathrm{Se} + ^{157}_{x}\mathrm{Nd} + 3^{1}_{0}n$.

7.72. Ядро лития $^{7}_{3}$Li, захватив элементарную частицу, делится, образуя две α-частицы. Запишите ядерную реакцию, определив элементарную частицу, которую захватывает ядро лития.

7.73. При столкновении позитрона и электрона происходит их аннигиляция, в процессе которой электронно-позитронная пара превращается в два γ-кванта, а энергия пары переходит в энергию фотонов. Определите энергию каждого из возникших фотонов, принимая, что кинетическая энергия электрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала. [$\varepsilon = 0{,}51$ МэВ]

7.74. Ядро урана $^{235}_{92}$U, захватывая тепловой нейтрон, делится на два осколка с массовыми числами 95 и 139, второй из которых, являясь радиоактивным, претерпевает три β^--распада. Запишите реакцию деления, а также цепочку β^--распадов.

7.75. Ядро урана $^{235}_{92}$U, захватывая тепловой нейтрон, делится на изотопы стронция и ксенона с массовыми числами 95 и 139, второй из которых, являясь радиоактивным, претерпевает три β^--распада. Запишите реакцию деления, а также цепочку β^--распадов.

7.76. Определите энергию (в электронвольтах), которую можно получить при расщеплении 1 г урана $^{235}_{92}U$, если при делении каждого ядра $^{235}_{92}U$ выделяется энергия 200 МэВ. [$\varepsilon = 5{,}12 \cdot 10^{23}$ МэВ]

7.77. В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни T одного поколения нейтронов составляет 80 мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}002$, определите период τ реактора, т.е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов в реакторе возрастает в e раз. [$\tau = \dfrac{T}{k-1} = 40$ с]

7.78. Известно, что в углеродно-азотном, или углеродном, цикле число ядер углерода остается неизменным. В результате этого цикла четыре ядра водорода ^1_1H (протона) превращаются в ядро гелия ^4_2He, а также образуются три γ-кванта, два позитрона и два нейтрино. Записав реакцию, определите выделяющуюся в этом процессе энергию. В расчетах принять $m_{^1_1H} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_{^4_2He} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_{^{\ 0}_{+1}e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. [$Q = 25{,}8$ МэВ]

7.79. Запишите схемы распада положительного и отрицательного мюонов.

7.80. При захвате протоном отрицательного мюона образуются нейтрон и еще одна частица. Запишите эту реакцию и определите, что это за частица.

7.81. При соударении высокоэнергетического положительного мюона и электрона образуются два нейтрино. Запишите эту реакцию и объясните, какой тип нейтрино образуется.

7.82. Покоящийся π^0-мезон распадается на два γ-кванта. Учитывая, что масса пиона равна $264{,}1m_e$ (m_e — масса электрона), определите энергию каждого из возникших γ-квантов. [$\varepsilon = 67{,}7$ МэВ]

7.83. Покоящийся K^+-мезон распадается на два пиона по схеме: $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$. Учитывая, что масса каона равна $966{,}2m_e$ (m_e — масса электрона), и пренебрегая разностью масс заряженного и нейтрального пионов, определите энергию каждого из возникших пионов. [$\varepsilon = 247{,}5$ МэВ]

7.84. Выбрав из четырех типов нейтрино ($\nu_e, \tilde{\nu}_e, \nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu$) правильное, напишите недостающие обозначения (x) в каждой из приведенных реакций:

1) $x + {}^1_1p \to {}^1_0n + {}^{\ 0}_{+1}e$;

2) $x + {}^1_0n \to {}^1_1p + {}^{\ 0}_{-1}e$;

3) $x + {}^1_0n \to {}^1_1p + \mu^-$.

7.85. К какой группе элементарных частиц (и почему) относятся: 1) Λ^0-гиперон; 2) таонное нейтрино; 3) π^+-мезон; 4) фотон?

7.86. К какой группе элементарных частиц (и почему) относятся: 1) Σ^+-гиперон; 2) нейтрон; 3) τ-лептон; 4) K^+-мезон?

7.87. Определите, какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения лептонного числа: 1) $\pi^+ \to \mu^+ + {}^{\ 0}_{-1}e + {}^{\ 0}_{+1}e$; 2) ${}^0_0\tilde{\nu}_\mu + {}^1p \to {}^1_0n + \mu^+$; 3) $K^- \to \mu^- + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu$; 4) $\pi^- + {}^1_0n \to K^- + K^0$.

7.88. Определите, какие из приведенных ниже распадов возможны: 1) $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma + \gamma$; 2) $\Omega^- \to \Sigma^0 + \pi^- + {}^0_0\nu_e$; 3) $\Xi^0 \to \Sigma^+ + \pi^-$. Для запрещенных распадов укажите, какому (каким) закону сохранения они противоречат.

7.89. Ниже приведены запрещенные процессы: 1) $\pi^- \to \mu^- + {}^{\ 0}_{+1}e + {}^{\ 0}_{-1}e$; 2) ${}^1_0n + K^- \to \Omega^- + K^+ + K^0$; 3) ${}^1_1p + \pi^- \to K^- + \Sigma^+$. Используя таблицу элементарных частиц, определите, какие законы сохранения нарушаются для каждого из этих процессов.

7.90. Ниже приведены запрещенные процессы: 1) ${}_{0}^{1}n + \pi^{-} \to \Lambda^{0} + K^{-}$; 2) ${}_{1}^{1}p + {}_{0}^{1}n \to \Lambda^{0} + \Sigma^{+}$; 3) ${}_{1}^{1}p + {}_{1}^{1}p \to {}_{1}^{1}p + \pi^{+}$. Используя таблицу элементарных частиц, определите, какие законы сохранения нарушаются для каждого из этих процессов.

7.91. Исследование взаимопревращаемости элементарных частиц привело к открытию нового свойства симметрии — операции зарядового сопряжения, заключающееся в том, что при замене частицы на античастицу в уравнении данной реакции получается новая реакция. Примените операцию зарядового сопряжения к следующим процессам: 1) $\Sigma^{+} \to p + \pi^{0}$; 2) $p + \tilde{p} \to \Sigma^{-} + \tilde{\Lambda}^{0} + K^{0} + K^{-}$.

7.92. Запишите, какие комбинации известных в настоящее время кварков воспроизводят свойства: 1) нейтрона; 2) протона; 3) π^{+}-мезона; 4) π^{-}-мезона; 5) Σ^{0}-гиперона.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные единицы СИ

Метр (м) — длина пути, проходимого светом в вакууме за $1/299\,792\,458$ с.

Килограмм (кг) — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

Секунда (с) — время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер (А) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин (К) — $1/273{,}16$ термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль (моль) — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде ^{12}C массой 0,012 кг.

Кандела (кд) — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $\frac{1}{683}$ Вт/ср.

Дополнительные единицы СИ

Радиан (рад) — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан (ср) — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Производные единицы физических величин

Наименование величины	Единица		
	определяющее уравнение	обозначение	наименование и определение
Единицы геометрических и механических величин			
Площадь	$S = l^2$	м^2	*Квадратный метр* равен площади квадрата со сторонами, длины которых равны 1 м
Объем	$V = l^3$	м^3	*Кубический метр* равен объему куба с ребрами, длины которых равны 1 м
Скорость	$v = \dfrac{s}{t}$	м/с	*Метр в секунду* равен скорости равномерного и прямолинейного движения, при котором точка за 1 с перемещается на расстояние 1 м
Ускорение	$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	м/с^2	*Метр на секунду в квадрате* равен ускорению прямолинейного ускоренного движения точки, при котором за 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с

Наименование величины	Единица: определяющее уравнение	обозначение	наименование и определение
Угловая скорость	$\omega = \dfrac{\varphi}{t}$	рад/с	*Радиан в секунду* равен угловой скорости равномерно вращающегося тела, все точки которого за 1 с поворачиваются на угол 1 рад
Угловое ускорение	$\varepsilon = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$	рад/с^2	*Радиан на секунду в квадрате* равен угловому ускорению равноускоренно вращающегося тела, при котором оно за 1 с изменит угловую скорость на 1 рад/с
Частота периодического процесса	$\nu = \dfrac{1}{T}$	Гц	*Герц* равен частоте периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса
Плотность	$\rho = \dfrac{m}{V}$	кг/м^3	*Килограмм на кубический метр* равен плотности однородного вещества, масса которого при объеме 1 м^3 равна 1 кг
Сила	$F = ma$	Н	*Ньютон* равен силе, сообщающей телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы: $1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2$
Импульс	$p = mv$	кг · м/с	*Килограмм-метр на секунду* равен импульсу материальной точки массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с
Давление	$p = \dfrac{F}{S}$	Па	*Паскаль* равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2: $1\ \text{Па} = 1\ \text{Н/м}^2$
Работа, энергия	$A = Fs$	Дж	*Джоуль* равен работе, совершаемой силой 1 Н на пути 1 м: $1\ \text{Дж} = 1\ \text{Н}\cdot\text{м}$
Мощность	$N = \dfrac{A}{t}$	Вт	*Ватт* равен мощности, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж: $1\ \text{Вт} = 1\ \text{Дж/с}$
Момент инерции	$J = mr^2$	кг · м^2	*Килограмм-метр в квадрате* равен моменту инерции материальной точки массой 1 кг, находящейся от оси вращения на расстоянии 1 м
Момент силы	$M = Fl$	Н · м	*Ньютон-метр* равен моменту силы, равной 1 Н, относительно точки, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы
Момент импульса	$L = mvr$	кг · м^2/с	*Килограмм-метр в квадрате на секунду* равен моменту импульса материальной точки, движущейся по окружности радиусом 1 м и имеющей импульс 1 кг · м/с

Наименование величины	Единица		
	определяющее уравнение	обозначение	наименование и определение
Градиент скорости	$\left\|\frac{\Delta v}{\Delta x}\right\|$	$с^{-1}$	*Секунда в минус первой степени* равна градиенту скорости, при котором скорости слоев жидкости (газа), отстоящих друг от друга на расстоянии 1 м, отличаются на 1 м/с
Динамическая вязкость	$\eta = \frac{F}{S\left\|\frac{\Delta v}{\Delta x}\right\|}$	Па · с	*Паскаль-секунда* равен динамической вязкости среды, касательное напряжение в которой при ламинарном течении и градиенте скоростей слоев, находящихся на расстоянии 1 м по нормали направлению скорости, равной 1 м/с: $1\ \text{Па} \cdot \text{с} = 1\ \text{Н} \cdot \text{с/м}^2$
Кинематическая вязкость	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	$м^2/с$	*Квадратный метр на секунду* равен кинематической вязкости среды с динамической вязкостью 1 Па · с и плотностью 1 $кг/м^3$
Единицы тепловых величин			
Количество теплоты, внутренняя энергия	Q	Дж	*Джоуль* равен количеству теплоты, эквивалентному работе 1 Дж
Тепловой поток (тепловая мощность)	Φ	Вт	*Ватт* равен тепловому потоку, эквивалентному механической мощности 1 Вт
Градиент температуры	$\left\|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right\|$	К/м	*Кельвин на метр* равен температурному градиенту поля, в котором на участке длиной 1 м в направлении градиента температура изменяется на 1 К
Теплопроводность	$\lambda = \frac{Q}{\left\|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right\|}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	*Ватт на метр-кельвин* равен теплопроводности вещества, в котором при стационарном режиме с поверхностной плотностью потока 1 $Вт/м^2$ устанавливается температурный градиент 1 К/м
Теплоемкость системы	$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$	Дж/К	*Джоуль на кельвин* равен теплоемкости системы, температура которой повышается на 1 К при подведении к системе количества теплоты 1 Дж
Удельная теплоемкость	$c = \frac{\mathrm{d}Q}{m\mathrm{d}t}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	*Джоуль на килограмм-кельвин* равен удельной теплоемкости вещества, имеющего при массе 1 кг теплоемкость 1 Дж/К
Молярная теплоемкость	$C_{\text{m}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\nu\mathrm{d}t}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	*Джоуль на моль-кельвин* равен молярной теплоемкости вещества, имеющего при количестве вещества 1 моль теплоемкость 1 Дж/К
Энтропия	$\frac{\delta Q}{T}$	Дж/К	*Джоуль на кельвин* равен изменению энтропии системы, которой при температуре n К в изотермическом процессе сообщается количество теплоты n Дж

Наименование величины	Единица		
	определяющее уравнение	обозначение	наименование и определение
Поверхностное натяжение	$\sigma = \frac{F}{l}$	$\frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$	*Ньютон на метр* равен поверхностному натяжению жидкости, создаваемому силой 1 Н, приложенной к участку контура свободной поверхности длиной 1 м и действующей нормально к контуру и по касательной к поверхности
Единицы электрических и магнитных величин			
Электрический заряд (количество электричества)	$Q = It$	Кл	*Кулон* равен электрическому заряду, проходящему сквозь поперечное сечение проводника при силе постоянного тока 1 А за время 1 с
Объемная плотность электрического заряда	$\rho = \frac{Q}{V}$	Кл/м^3	*Кулон на кубический метр* равен объемной плотности электрического заряда, при которой в объеме 1 м^3 равномерно распределен заряд 1 Кл
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = \frac{Q}{S}$	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен поверхностной плотности электрического заряда, при которой заряд, равномерно распределенный по поверхности площадью 1 м^2, равен 1 Кл
Линейная плотность электрического заряда	$\tau = \frac{Q}{l}$	Кл/м	*Кулон на метр* равен линейной плотности электрического заряда, при которой заряд, равномерно распределенный по нити длиной 1 м, равен 1 Кл
Напряженность электрического поля	$E = \frac{E}{Q_0}$	$\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$	*Ньютон на кулон* равен напряженности электрического поля в точке поля, в которой на точечный электрический заряд 1 Кл поле действует с силой 1 Н. *Вольт на метр* равен напряженности однородного электрического поля, создаваемого разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности поля
Электрическое смещение	D	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен электрическому смещению, при котором поток электрического смещения сквозь поперечное сечение площадью 1 м^2 равен 1 Кл
Поток электрического смещения	$\oint_S \vec{D} \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$	Кл	*Кулон* равен потоку электрического смещения, связанному с суммарным свободным зарядом 1 Кл
Электрический потенциал	$\varphi = \frac{A}{Q_0}$	В	*Вольт* равен потенциалу такой точки поля, в которой заряд 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж: 1 В = 1 Дж/Кл

Наименование величины	Единица		
	определяющее уравнение	обозначение	наименование и определение
Электрическая емкость	$C = \dfrac{Q}{\varphi}$	Ф	*Фарад* равен электрической емкости такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл
Электрический момент диполя	$p = \|Q\| l$	Кл · м	*Кулон-метр* равен электрическому моменту диполя, заряды которого, равные каждый 1 Кл, расположены на расстоянии 1 м один от другого
Поляризованность	$\vec{P} = \dfrac{\vec{p}}{V}$	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен поляризованности диэлектрика, при которой диэлектрик объемом 1 м^3 имеет электрический момент 1 Кл · м
Плотность электрического тока	$j = \dfrac{I}{S}$	А/м^2	*Ампер на квадратный метр* равен плотности электрического тока, при которой сила тока, равномерно распределенного по поперечному сечению проводника площадью 1 м^2, равна 1 А
Электрическое сопротивление	$R = \dfrac{U}{I}$	Ом	*Ом* равен сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А
Электрическая проводимость	$G = \dfrac{1}{R}$	См	*Сименс* равен проводимости участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = \dfrac{RS}{l}$	Ом · м	*Ом-метр* равен удельному электрическому сопротивлению проводника площадью поперечного сечения 1 м^2 и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом
Удельная электрическая проводимость	$\sigma = \dfrac{1}{\rho}$	См/м	*Сименс на метр* равен удельной электрической проводимости проводника, который при площади поперечного сечения 1 м^2 и длине 1 м имеет электрическую проводимость 1 См
Магнитная индукция	$B = \dfrac{F}{Il}$	Тл	*Тесла* равен магнитной индукции такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А: $$1\ \text{Тл} = \frac{1\ \text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$$
Магнитный поток	$\Phi = BS$	Вб	*Вебер* равен магнитному потоку, проходящему сквозь плоскую поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл: $$1\ \text{Вб} = 1\ \text{Тл} \cdot \text{м}^2$$

Окончание табл.

Наименование величины	Единица		
	определяющее уравнение	обозначение	наименование и определение
Напряженность магнитного поля	$H = \dfrac{B}{\mu_0}$	А/м	*Ампер на метр* равен напряженности такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл
Магнитный момент контура с током	$P = IS$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$	*Ампер-квадратный метр* равен моменту контура площадью 1 м^2, если по нему течет ток 1 А
Индуктивность	$L = \dfrac{\Phi}{I}$	Гн	*Генри* равен индуктивности такого контура, магнитный поток которого при токе 1 А равен 1 Вб: $$1\ \text{Гн} = 1\ \text{Вб/А}$$
Намагниченность	$J = \dfrac{\sum p_a}{V}$	А/м	*Ампер на метр* равен намагниченности, при которой вещество объемом 1 м^3 имеет магнитный момент 1 $\text{А} \cdot \text{м}^2$

Основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	$N_\text{А} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль^{-1}
Молярная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная Вина	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с^{-1}
	$R' = 1{,}10 \cdot 10^7$ м^{-1}
Первый боровский радиус	$a_0 = 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_\text{C} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_\text{B} = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
	$1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Масса изотопа ${}^1_1\text{H}$	$m_\text{H} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})	к — кило (10^3)	м — милли (10^{-3})	п — пико (10^{-12})
Г — гига (10^9)	д — деци (10^{-1})	мк — микро (10^{-6})	ф — фемто (10^{-15})
М — мега (10^6)	с — санти (10^{-2})	н — нано (10^{-9})	а — атто (10^{-18})

Некоторые внесистемные величины

1 сут $= 86\,400$ с	$1^\circ = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад	1 мм рт. ст. $= 133{,}3$ Па
1 год $= 365{,}25$ сут $=$ $= 3{,}16 \cdot 10^7$ с	$1' = 1{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад	1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
	$1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад	

Астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ м	Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг	Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^8$ м	Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг	Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^8$ м

Некоторые математические формулы

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad \int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^n + 1}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x \qquad \int e^x dx = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1) \qquad \int\limits_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^n + 1}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Греческий алфавит

Α, α	— альфа	Ι, ι	— йота	Ρ, ρ	— ро
Β, β	— бета	Κ, $\varkappa$	— каппа	Σ, σ	— сигма
Γ, γ	— гамма	Λ, λ	— ламбда	Τ, τ	— тау
Δ, δ	— дельта	Μ, μ	— мю	Υ, υ	— ипсилон
Ε, ε	— эпсилон	Ν, ν	— ню	Φ, φ	— фи
Ζ, ζ	— дзэта	Ξ, ξ	— кси	Χ, χ	— хи
Η, η	— эта	Ο, ο	— омикрон	Ψ, ψ	— пси
Θ, θ, ϑ	— тхэта	Π, π	— пи	Ω, ω	— омега

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Трофимова Таисия Ивановна,
Фирсов Александр Викторович

Курс физики. Задачи и решения

Учебное пособие

Редактор *Л.В.Честная*
Технический редактор *Е.Ф.Коржуева*
Компьютерная верстка: *Д.В.Федотов*
Корректоры *Г.Н.Петрова*, *В.А.Жилкина*

Изд. № 104116143. Подписано в печать 12.08.2011. Формат 70×100/16.
Гарнитура «Петербург». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 48,1.
Тираж 1 500 экз. Заказ №

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
125252, Москва, ул. Зорге, д. 15, корп. 1, пом. 26б.
Адрес для корреспонденции: 129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1, а/я 48.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. AE51. Н 14964 от 21.12.2010.

Отпечатано в ОАО «Тверской полиграфический комбинат».
170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5. Телефон: (4822) 44-42-15.
Интернет / Home page — www.twerpk.ru. Электронная почта (E-mail) — sales@tverpk.ru.