

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



Министерство образования и науки
Российской Федерации

Казанский государственный технологический университет

**Ю.М. ДАНИЛОВ, Л.Н. ЖУРБЕНКО, Г.А. НИКОНОВА,
Н.В. НИКОНОВА, С.Н. НУРИЕВА**

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Под редакцией
Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой

*Допущено
Министерством образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по техническим специальностям*

Москва
ИНФРА-М
2009

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М 34

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой общей математики КГУ *Н.Г. Гурьянов*;
д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики КГАСА *Б.А. Кац*;
Заслуженный работник высшего образования РФ,
д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой специальной математики КГТУ *К.Г. Гараев*

М 34 **Математика:** Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. — М.: ИНФРА-М, 2009. — 496 с. — (Высшее образование).

ISBN 5-16-002673-8

Учебное пособие для студентов технических высших учебных заведений, обучающихся по программе бакалавров в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 5-16-002673-8 © Коллектив авторов, 2006
© ИНФРА-М, 2006

Редактор *Г.Н. Багдасарова*
Корректор *Н.Д. Фадеева*

Оригинал-макет подготовлен Издательским Домом «ИНФРА-М»
Сдано в набор 21.03.2005. Подписано в печать 26.01.2006.
Формат 60×90/16. Гарнитура Newton. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 31,0. Уч.-изд. л. 30,91. Тираж 3000 экз.
Заказ № Цена свободная.

ЛР № 070824 от 21.01.93

Издательский Дом «ИНФРА-М». 127282, Москва, Полярная, 31в.
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43; Факс: (495) 363-92-12.
E-mail: books@infra-m.ru. <http://www.infra-m.ru>

Отдел «Книга — почтой»: (495) 363-42-60 (доб. 246, 247)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии представлен материал, позволяющий студенту получить тот объем знаний, который соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для бакалавров технического направления.

Основной принцип, который использован авторами при написании учебного пособия, можно сформулировать так: учебное пособие должно выступать в роли «организатора» систематической познавательной деятельности студента, «компаса в море» учебной информации, накопленной человечеством.

При отборе материала для включения в учебное пособие авторы придерживались условия минимальности объема при достаточности информации, содержащейся в нем. Весь материал разбит на четыре части, 13 глав. Первые две части изучаются в течение первого года, третья и четвертая части — в течение второго года обучения в вузе. Материал рассчитан на объем 250–300 аудиторных часов. Авторы придерживаются принципов модульной технологии обучения, главы являются теоретической частью обучающих модулей, а их разделы — подмодулями (законченными по своему содержанию информационными дозами). Каждый подмодуль снабжен помещенным в его начале опорным конспектом, который отражает в сжатой форме основной смысл подмодуля и содержит необходимые сведения для практического применения материала подмодуля. Опорные конспекты позволяют получить целостное представление о содержании всего модуля, если читатель возвращается к ним после изучения соответствующего подмодуля и затем всего модуля. Применение опорных конспектов позволило также, по мнению авторов, более компактно и удобно для запоминания преподнести материал подмодулей. Предусмотрено рас-

ширение объема подмодулей за счет отсылок к доступным библиографическим источникам.

Основу учебного пособия составляет математический анализ (главы 2—4, 6, 8, 10) и его прикладные вопросы (главы 7, 9, 11). Первая глава посвящена линейной алгебре и аналитической геометрии и может излагаться в первом семестре параллельно дифференциальному исчислению. Понятия комплексных чисел, функций комплексных переменных даются в главе 5 второй части перед изложением интегрального исчисления. Теория вероятностей и математическая статистика содержатся в главе 12 четвертой части.

Авторы при изложении материала придерживались дидактического принципа «от простого к сложному». Так, в подмодуле 2 изучение векторов начинается с пространств \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , с которыми студенты знакомились в школе, а затем переходит к пространству \mathbf{R}^n . Понятия прямой и плоскости (подмодуль 3) также переносятся на пространство \mathbf{R}^n . Следует отметить, что аналитическая геометрия дается как приложение векторной алгебры, и прямая на плоскости, в основном, — как частный случай прямой и плоскости в пространстве. Это позволило объединить данные подмодули в один модуль. Изложение дифференциального исчисления (главы 3, 4), интегрального исчисления (главы 6, 8, 9) и дифференциальных уравнений (главы 7, 11) построено на переходе от одной переменной к нескольким переменным. В теории вероятностей (глава 12) рассматриваются сначала одномерные, а затем многомерные случайные величины. В главе 6 после изучения интеграла Римана приводятся его обобщения — интегралы Римана–Стилтьеса и Лебега.

Авторы стремились вводить математические понятия не формально, а предварительно рассматривая приводящие к ним физические и геометрические задачи или давая приложения введенных понятий. Рассматривается применение математических методов в математическом моделировании.

Пособие содержит необходимое количество задач и упражнений, позволяющих читателю получить навыки правильного использования изученного материала и иллюстрирующих связь математики с другими дисциплинами.

В подборе материала главы 12 принимал участие доцент Н.К. Нуриев, в подготовке учебного пособия к изданию — доцент О.М. Дегтярева. Авторы выражают им свою глубокую благодарность.

СПИСОК ИСПОЛЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

\Leftrightarrow	—	равносильность (эквивалентность)
\wedge	—	и (конъюнкция)
\vee	—	или (дизъюнкция)
\forall	—	любой
\exists	—	существует
$\exists!$	—	существует и единственно
\nexists	—	не существует
\Rightarrow	—	следует
:	—	такое что
\rightarrow	—	стремится выполнять равенство
$\uparrow\uparrow$	—	параллельны и одинаково направлены
$\uparrow\downarrow$	—	параллельны и противоположно направлены
\perp	—	перпендикулярность
Δ, \det	—	определитель
∞	—	бесконечность, бесконечное множество
$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	—	множества натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел соответственно
\mathbf{R}^n	—	n -мерное векторное пространство с положительными значениями элементов
\mathbf{R}_+	—	множество неотрицательных действительных чисел
\equiv	—	тождественно
\sim	—	эквивалентно
\subset	—	включает
\subseteq	—	включает или равно
\in	—	принадлежит
\notin	—	не принадлежит
\emptyset	—	пустое множество
\cup	—	объединение множеств
\cap	—	пересечение множеств
\setminus	—	разность множеств
\rightarrow	—	отображение множеств, соответствие
\Leftrightarrow	—	взаимно-однозначное соответствие

O: ...	—	определение
T: ...■	—	теорема
L: ...◆	—	лемма
□	—	начало доказательства
⊠	—	конец доказательства
◀	—	начало решения
▶	—	конец решения
т.	—	точка
г.м.т.	—	геометрическое место точек
1^0	—	свойство 1
[]	—	целая часть числа
{ }	—	дробная часть числа, элементы множества
—	—	неопределенность
$1, n$	—	все значения от 1 до n
б.м.	—	бесконечно малая функция
б.б.	—	бесконечно большая функция
э.	—	экстремум
$\alpha = o(\beta)$	—	б.м. более высокого порядка малости по сравнению с β
$D(f)$	—	область определения функции
$E(f)$	—	область допустимых значений функции
$U_\delta(a)$	—	дельта-окрестность т. a , $\check{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$
$C[X]$	—	класс функций, непрерывных на множестве X
$C_{[a,b]}$	—	класс функций, непрерывных на отрезке $[a, \tilde{b}]$
M	—	наибольшее значение функции на множестве
m	—	наименьшее значение функции на множестве
$f \circ \varphi$	—	суперпозиция функций f и φ
т.р.	—	точка разрыва
т.п.	—	точка перегиба
↗	—	возрастает
↘	—	убывает
∩	—	выпуклый вверх (выпуклый)
∪	—	выпуклый вниз (вогнутый)
λ	—	диаметр ограниченной фигуры (тела)
Re	—	действительная часть числа
Σ	—	сумма
!	—	факториал
grad U	—	градиент скалярного поля U
div \vec{a}	—	дивергенция векторного поля \vec{a}

Часть 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Излагаются основные вопросы теории определителей, матриц, систем линейных уравнений, векторной алгебры, линейных операторов, квадратичных форм. Включены основные сведения о прямой и плоскости, кривых и поверхностях II порядка. Излагается дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Опорный конспект № 1

1.1. Определители, их свойства

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — квадратная матрица II порядка

$\Delta \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ — определитель II порядка

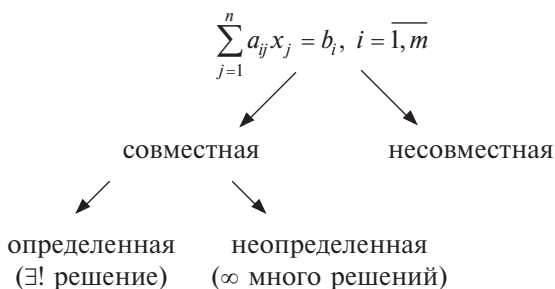
$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ —

определитель III порядка

Свойства:

- 1⁰. Транспонирование
- 2⁰. Разложение по \forall ряду: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$,
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — алгебраическое дополнение;
 M_{ij} — минор элемента a_{ij}
- 3⁰. Перестановка двух строк (столбцов) \Rightarrow смена знака Δ
- 4⁰. Условия равенства $\Delta = 0$
- 5⁰. Вынесение общего множителя ряда за знак Δ
- 6⁰. Прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число $k \neq 0$, не меняет Δ

1.2. Системы линейных уравнений. Методы Гаусса и Крамера



Метод Гаусса — последовательное исключение неизвестных
Расширенная матрица

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \sim \text{матрице ступенчатого вида,}$$

число ее ненулевых строк = $\text{rang}(A|B)$.

Формулы Крамера: $m = n$,

$$\Delta \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

Δ_j получается из Δ заменой j -го столбца столбцом свободных членов.

1.3. Действия над матрицами. Матричный способ решения СЛАУ

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

Сложение матриц: $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Умножение матрицы на число μ : $B = \mu A = (\mu a_{ij})$

Умножение матриц: A — размерности $m \times p$, B — размерности $p \times n$

$$C = A \cdot B = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}),$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (AB \neq BA)$$

$$E = \begin{pmatrix} 100\dots 0 \\ 010\dots 0 \\ \dots \\ 000\dots 1 \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}), i, j = \overline{1, n} \Rightarrow AE = EA = A$$

A^{-1} — обратная к $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n} \Leftrightarrow AA^{-1} = E$

T: $A = (a_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

A_{ij} — алгебраическое дополнение a_{ij} ■

Матричная форма записи СЛАУ:

$$AX = B, \quad A = (a_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$X = (x_j), \quad B = (b_{ij}) \text{ — матрицы-столбцы,} \quad \det A \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}B$$

1.1. Определители, их свойства

О: Квадратной матрицей n -го порядка называется таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Числа (a_{ij}) , $i, j = \overline{1, n}$ — элементы матрицы; i — номер строки; j — номер столбца.

Определителем (детерминантом) n порядка, соответствующим квадратной матрице n порядка, называется число, обозначаемое символом

$$\Delta \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по правилу $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$.

Определителем n порядка, соответствующим квадратной матрице n порядка, называется число, вычисляемое по правилу

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Примеры:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 = 13.$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= 3(-2 + 0) + 2(4 - 6) + 1(0 - 2) = -12.
 \end{aligned}$$

О: Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i -й строки и j -го столбца. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Например, для определителя III порядка (1.1)

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = -M_{21}.$$

Свойства определителей следуют из определения (1.1).

1⁰. Транспонирование: определитель не изменится, если все его строки заменить на соответствующие столбцы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2⁰. Разложение определителя по любому ряду (строке или столбцу):

определитель равен сумме произведения элементов любого ряда на их алгебраические дополнения. Например, для определителя (1.1) разложение по второму столбцу:

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}.$$

3⁰. Перестановка двух строк (столбцов) определителя равносильна умножению его на (-1) .

4⁰. Определитель $\Delta = 0$, если:

- 1) все элементы какого-нибудь ряда равны нулю;
- 2) соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны (в частности, равны).

5⁰. Общий множитель всех элементов ряда можно вынести за знак определителя.

6⁰. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Аналогично определению определителя III порядка вводится определение определителя n -го порядка, соответствующего квадратной матрице n -го порядка.

Например, определителем IV порядка называется число, вычисляемое по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Свойства 1⁰–6⁰ сохраняются для определителей любого порядка. При вычислении определителей IV и выше порядков удобно, используя свойство 6⁰, преобразовать его так, чтобы все элементы (кроме одного) какого-нибудь ряда были нулями, затем разложить его по этому ряду.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 \\ -1 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 13 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 23 & 8 & -9 \\ 0 & 27 & 14 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 13 & 1 \\ 23 & 8 & -9 \\ 27 & 14 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 13 & 1 \\ 9 & -5 & -10 \\ 13 & 1 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 13 & 1 \\ -1 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} + (-13) \begin{vmatrix} 15 & 13 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 1(-150 + 1) - 13(-75 + 13) = 149 + 806 = 955.$$

Здесь вторую строку последовательно умножаем на 2, 3, 5 и складываем соответственно с 1-й, 3-й, 4-й строками.

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений, их совместность, определенность. Методы Гаусса и Крамера

О: Системой m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными будем называть следующую систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $x_j, j = \overline{1, n}$, — неизвестные; $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, — коэффициенты при неизвестных; $b_j, j = \overline{1, m}$, — свободные члены. При $b_i = 0, i = \overline{1, m}$, система называется однородной

О: Решением системы (1.2) называется такая совокупность чисел $x_j^*, j = \overline{1, n}$, которая при подстановке x_j^* вместо $x_j, j = \overline{1, n}$, в каждое уравнение системы обращает его в тождество.

О: СЛАУ называется совместной, если она имеет решение, несовместной — если решения нет.

Однородная система всегда совместна, так как имеет нулевое решение.

О: Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если решений бесконечное множество.

О: Две совместные системы называются равносильными, если все их решения совпадают.

Система (1.2) переходит в равносильную, если:

- а) поменять местами два уравнения;
- б) умножить любое уравнение на число $\lambda \neq 0$;
- в) прибавить к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженные на любое число.

Назовем такие преобразования системы элементарными. Коэффициенты при неизвестных в системе составляют прямоугольную таблицу — матрицу из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Она называется основной матрицей системы, а матрица $(A|B)$ — расширенной:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Преобразования со строками расширенной матрицы системы, соответствующие элементарным преобразованиям системы, будем тоже называть элементарными, а матрицы, полученные при элементарных преобразованиях, — эквивалентными.

Обозначим i -ю строку матрицы A через $a_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$.

O: Строки a_1, a_2, \dots, a_m называют линейно зависимыми, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2 \neq 0$, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = 0$. В противном случае строки называют линейно независимыми.

O: Рангом матрицы A (обозначается $\text{rang } A$) называется максимальное число линейно независимых строк матрицы.

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

T: (Кронекера–Капелли) Система (1.2) совместна тогда, когда $\text{rang } A = \text{rang } (A|B)$ ■ Доказательство см. в [1. С.97].

Для решения системы (1.2) применяется **метод Гаусса** — метод последовательного исключения неизвестных из уравнений системы путем элементарных преобразований.

Все преобразования проводятся с расширенной матрицей. Пусть $a_{11} \neq 0$. Тогда умножением первой строки последовательно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и сложением соответственно со 2-й, ..., m -й строками получаем матрицу

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right).$$

Аналогичные преобразования производим с матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right).$$

Процесс продолжаем, пока не получим матрицу ступенчатого вида

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2,r-1} & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{rr} & \dots & a''_{rn} & b''_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

причем $\text{rang}(A|B)$ равен числу ненулевых строк в ступенчатой матрице.

Возможны три случая:

1) Получилась строка $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ b_k'')$, $b_k'' \neq 0$, ей соответствует уравнение $0 = b_k''$ — система несовместна ($\text{rang } A \neq \text{rang}(A|B)$).

2) Число ненулевых строк r меньше числа неизвестных, тогда система имеет бесчисленное множество решений. Последней ненулевой строке соответствует уравнение

$$a''_{rr}x_r + \dots + a''_{rn}x_n = b''_r,$$

из которого находим неизвестное x_r через $n - r$ так называемых свободных неизвестных: x_{r+1}, \dots, x_n . Из уравнений, соответствующих

ших другим строкам, последовательно находим x_1, \dots, x_{r-1} также через свободные неизвестные.

3) Если $r = n$, решение системы единственно. Последней ненулевой строке соответствует уравнение $a_{nn}''x_n = b_n''$, из которого находим неизвестное x_n , а далее последовательно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_3 = 4, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3 = ?$$

$$\leftarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\text{rang } A = \text{rang } (A|B) = 2.$$

Для получения матрицы, эквивалентной расширенной, умножаем первую строку последовательно на (-2) , (-3) и складываем соответственно со 2-й и 3-й строками. Затем в полученной матрице вторую строку умножаем на (-1) и складываем с третьей, приходим к матрице ступенчатого вида. Второй строке соответствует уравнение $-3x_2 + 7x_3 = 1$, из которого находим $x_2 = (7x_3 - 1)/3$. Подставляем x_2 в первое уравнение системы: $x_1 + (7x_3 - 1)/3 - x_3 = 1$ и находим $x_1 = -4/3 \cdot (x_3 - 1)$, где x_3 — свободное неизвестное ►

Если $m = n$, то матрица A — квадратная и ее определитель — главный определитель системы.

При $\Delta \equiv \det A \neq 0$ решение системы единственно и находится по **формулам Крамера**: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1, n}$. В них определитель Δ_j

называется определителем неизвестного x_j и получается из определителя Δ заменой j -го столбца столбцом свободных членов.

Выведем формулы Крамера, например, для системы трех уравнений с тремя неизвестными. Для этого умножаем 1-е, 2-е и 3-е уравнения системы соответственно на алгебраические дополнения A_{11} , A_{21} и A_{31} , затем складываем их:

$$(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})x_2 + \\ + (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})x_3 = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3.$$

Множитель при x_1 — разложенный по 1-му столбцу определитель Δ , множители при x_2 , x_3 и правая часть соответственно — определители:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$ или $x_1 = \Delta_1/\Delta$. Формулы для x_2 , x_3 выводятся аналогично.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_3 - 2x_3 = 4. \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3 = ?$$

◀ Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1(-7) - 2(-10) + 11 = 14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42.$$

Отсюда

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 14/14 = 1, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 28/14 = 2, \\ x_3 = \Delta_3/\Delta = 42/14 = 3 \quad \blacktriangleright$$

1.3. Действия над матрицами. Матричный способ решения СЛАУ

Матрица (1.3) кратко записывается в виде $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, и называется прямоугольной матрицей размернос-

ти $m \times n$. Две матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности $m \times n$ называются равными, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Сложение матриц. Суммой матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $C = (a_{ij} + b_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам: $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Матрица, все элементы которой нули, называется нуль-матрицей, обозначается 0 ; $A + 0 = A$.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число μ называется матрица $B = \mu A = (\mu a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Умножение матриц. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m \times p$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размерности $p \times n$ (число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B) называется матрица $C = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Произведение матриц в общем случае не подчиняется переместительному закону: $AB \neq BA$.

Сочетательный и распределительный законы справедливы:

$$A(BC) = (AB)C, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Примеры:

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3A + B = ?$$

$$\blacktriangleleft 3A + B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 15 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 15 & 5 & 13 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = ?$$

$$\blacktriangleleft AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -3 \\ 14 & -4 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

Для квадратных матриц одинакового порядка умножение всегда возможно. Особое значение при таком умножении имеет еди-

ничная матрица E , у которой по главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы — нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что определитель единичной матрицы $\det E = 1$. Легко проверяется, что $AE = EA = A$.

Если матрица $C = AB$ для квадратных матриц A и B , то $\det C = \det A \cdot \det B$. Для квадратной матрицы вводится понятие обратной матрицы.

О: Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A , если

$$AA^{-1} = E. \quad (1.4)$$

Если выполняется равенство (1.4), то справедливо

$$A^{-1}A = E.$$

Т: Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\det A = \Delta \neq 0$ ■

Доказательство см. в [1. С.76]. В процессе доказательства получен вид матрицы A^{-1} для квадратной матрицы A порядка n :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, — алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

◀ **Определитель**

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому обратная матрица существует и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

Используя действия над матрицами, СЛАУ (1.2) в случае $m = n$ можно записать в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

и решить при $\det A \neq 0$ так называемым матричным способом

$$X = A^{-1}B. \quad (1.6)$$

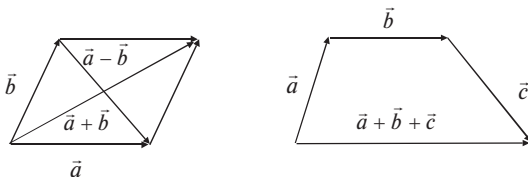
Равенство (1.6) получаем, умножая обе части (1.5) слева на матрицу A^{-1} .

Литература: [1. С. 35–47, 71–100]; [2. С. 320–336];
[5. С. 24–30]; [7. С. 247–272].

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

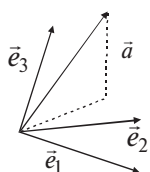
Опорный конспект № 2

2.1. Векторы и линейные операции



$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \vec{b}: |\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|; \quad \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}, \lambda > 0; \quad \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a}, \lambda < 0$$

2.2. Базис в пространстве — \forall три некопланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$



$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3,$$

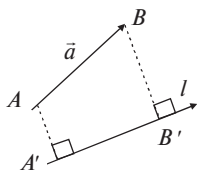
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ — координаты \vec{a} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,

$$\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3\}$$

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3\}$$

Базис на плоскости — $\forall \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$

2.3. Проекция вектора \vec{a} на ось l ($\text{пр}_l \vec{a}$), свойства



$$\text{пр}_l \overline{AB} = \pm |\overline{A'B'}|,$$

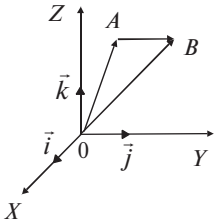
(+), если $\overline{A'B'} \uparrow \uparrow l$, (-), если $\overline{A'B'} \uparrow \downarrow l$

$$1^0. \text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, l})$$

$$2^0. \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$$

$$3^0. \text{пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_l \vec{a}$$

2.4. Прямоугольная система координат



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортонормированный базис,

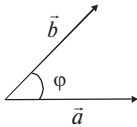
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad B(x_B, y_B, z_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A, \}$$

2.5. Скалярное произведение



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b};$$

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Свойства:

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

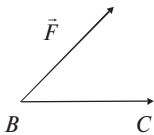
$$2^0. (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$3^0. \vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

$$4^0. \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2;$$

$$5^0. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Основные приложения:

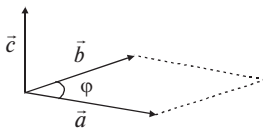


$$\text{Работа: } A = \vec{F} \cdot \overline{BC}$$

$$\text{Угол } \varphi \text{ между } \vec{a} \text{ и } \vec{b}: \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\text{Проекция пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

2.6. Векторное произведение



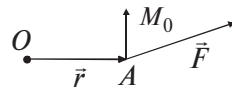
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b} \\ 2) |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \\ 3) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка} \end{cases}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Свойства:

- 1⁰. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- 2⁰. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
- 3⁰. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- 4⁰. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\square}$, $S_{\Delta} = |\vec{a} \times \vec{b}|/2$;
- 5⁰. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z$

Момент: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$



2. 7. Смешанное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства:

- 1⁰. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;
- 2⁰. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$;
- 3⁰. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}$;
- 4⁰. Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:
 $V_{\text{пар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$, $V_{\text{Дпир}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|/6$;
- 5⁰. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарны $\Leftrightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$

2.8. Линейное пространство. Евклидово пространство \mathbf{R}^n

$\mathbf{R}^n = \{\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}; \alpha_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}\}$ — n -мерное векторное пространство

$$\Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\},$$

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n\}; \lambda \in \mathbf{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$$

Базис в \mathbf{R}^n — \forall линейно независимые $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in \mathbf{R}^n$

Пусть базис

$$\bar{e}_1 = \{1, 0, \dots, 0\}, \bar{e}_2 = \{0, 1, \dots, 0\}, \dots, \bar{e}_n = \{0, 0, \dots, 1\},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n \Leftrightarrow \mathbf{R}^n \text{ — } n\text{-мерное евклидово}$$

$$\text{пространство, } |\bar{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

2.9. Линейные преобразования. Собственные значения и собственные векторы. Квадратичные формы в \mathbf{R}^n

A — линейное преобразование в $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \bar{x}' = A\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}' \in \mathbf{R}^n$,
 $A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}$, $A(\lambda\bar{x}) = \lambda A\bar{x} \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ — базис в $\mathbf{R}^n \Rightarrow A = (a_{ij}), i, j = \overline{1, n}$.

\bar{x} — собственный вектор $A \Leftrightarrow A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ — собственное значение.

$\det(A - \lambda E) = 0$ — характеристическое уравнение A .

A — самосопряженный в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow A\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot A\bar{y} \Rightarrow$ в ортонормированном базисе $A = (a_{ij}) = (a_{ji}), i, j = \overline{1, n} \Rightarrow \exists$ ортонормированный базис из собственных векторов: матрица оператора A имеет диагональную форму.

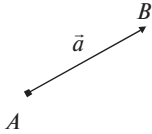
Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j, a_{ij} = a_{ji}$,

$A = (a_{ij}), i, j = \overline{1, n}$, — ее матрица, λ_i — собственные значения A приводится к каноническому виду $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

2.1. Векторы и линейные операции над ними

О: Вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок прямой, характеризующийся длиной и направлением (рис. 2.1).

Из двух граничных точек этого отрезка одна является началом, а другая — концом. Вектор обозначается \bar{a} или \overline{AB} , где A — начало,



B — конец вектора; длина вектора (модуль) обозначается символом $|\vec{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Нуль-вектором называют вектор, конец которого совпадает с началом.

Рис. 2.1

- О:** Коллинеарными называют векторы, расположенные на параллельных (в частности, на одной) прямых, а компланарными — векторы, расположенные в параллельных плоскостях.
- О:** Равными считаются векторы, которые: 1) коллинеарны; 2) одинаково направлены (сонаправлены — $\uparrow\uparrow$); 3) имеют равные модули.

Отсюда следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, перемещая начало A в любую другую точку. Такие векторы называются свободными.

Линейные операции над векторами: операции сложения, вычитания и умножения на число.

2.1.1. Сложение векторов

Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ векторов \vec{a} и \vec{b} при условии, что конец вектора \vec{a} совмещен с началом \vec{b} , называется вектор \vec{c} , соединяющий начало вектора \vec{a} с концом \vec{b} (рис. 2.2, а).

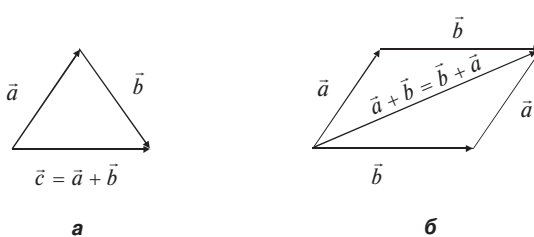


Рис. 2.2

Свойства сложения:

1⁰. Переместительный закон (коммутативность):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Доказательство следует из рис. 2.2, б. Здесь же дано правило параллелограмма сложения векторов \vec{a} и \vec{b} : если их начала совмещены, суммой $\vec{a} + \vec{b}$ является вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, выходящей из общего начала векторов.

2⁰. Сочетательный закон:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Доказательство следует из рис. 2.3. Здесь же представлено правило сложения нескольких векторов, когда начало последующего вектора совмещено с концом предыдущего. Сумма есть вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом последнего.

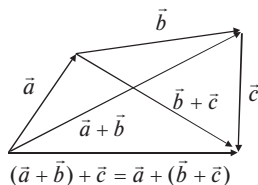


Рис. 2.3

2.1.2. Вычитание векторов

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , для которого $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Из определения получаем правило построения вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, если начала векторов \vec{a} и \vec{b} совмещены: нужно соединить конец вычитаемого вектора \vec{b} с концом уменьшаемого вектора \vec{a} (рис. 2.4).

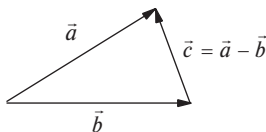


Рис. 2.4

2.1.3. Умножение вектора на число

Произведением $\lambda \vec{a}$ вектора \vec{a} на число λ называется вектор \vec{b} такой, что: 1) $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$; 2) \vec{b} коллинеарен вектору \vec{a} и направлен

в ту же сторону при $\lambda > 0$ ($\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$) и в противоположную сторону при $\lambda < 0$ ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$).

Свойства умножения вектора на число:

1⁰. Сочетательное свойство (ассоциативность):

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}).$$

2⁰. Распределительное свойство (дистрибутивность):

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b},$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

Свойства легко проверяются геометрически.

2.2. Базис в пространстве и на плоскости

О: Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется вектор

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k\vec{a}_k, \quad (2.1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ — линейно зависимы, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$, что линейная комбинация (2.1) равна нулю, в противном случае — линейно независимы.

Рассмотрим линейную зависимость векторов на плоскости и в пространстве.

Т.1: Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы ■

□ Так как по условию \vec{a}, \vec{b} — коллинеарны $\Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} - \lambda\vec{a} = 0$, то векторы \vec{a}, \vec{b} — линейно зависимы ($\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -\lambda$) ☒

С л е д с т в и е: Два неколлинеарных вектора линейно независимы.

Т.2: Пусть \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, тогда любой компланарный с ними вектор \vec{c} представляется единственным образом как их линейная комбинация ■

□ Помещаем начала векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в одну т. О и строим параллелограмм с диагональю, совпадающей с вектором \vec{c} , и сторона-

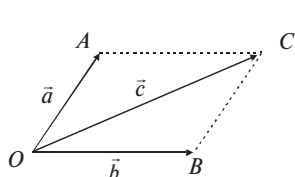


Рис. 2.5

ми в направлении векторов \vec{a} и \vec{b} (рис. 2.5). Тогда $\overline{OA} = \lambda \vec{a}$, $\overline{OB} = \mu \vec{b}$, $\vec{c} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$. Предположим, что найдутся λ_1, μ_1 , для которых тоже $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b}$. По свойствам линейных операций имеем тогда $(\lambda - \lambda_1) \vec{a} + (\mu - \mu_1) \vec{b} = 0$, откуда в силу следствия Т. 1 $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$ \square

Из Т.2 и ее доказательства получаем следствие.

Следствие. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Таким образом, любые три некопланарных вектора линейно независимы.

Т.3: Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некопланарны, тогда любой вектор \vec{d} в пространстве единственным образом представляется как их линейная комбинация \blacksquare

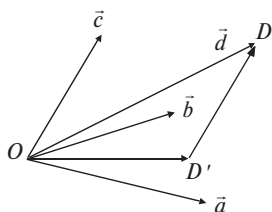


Рис. 2.6

\square Поместим начала векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в т. O , проведем из конца D вектора $\overline{OD} = \vec{d}$ прямую $DD' \parallel \vec{c}$, пересекающую плоскость векторов \vec{a} и \vec{b} в т. D' (рис. 2.6). Тогда по Т. 2 вектор $\overline{OD'} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ и $\overline{OD} = \overline{OD'} + \overline{D'D} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$ \square

Следствие: Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

О: Базисом на плоскости и пространстве называется максимальная линейно независимая на плоскости или в пространстве система векторов (добавление к системе еще одного вектора делает ее линейно зависимой).

Таким образом, базисом на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора, взятых в определенном порядке, а базисом в пространстве — любые три некопланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис в пространстве, тогда по Т. 3 любой вектор \vec{a} пространства разлагается единственным образом по базисным векторам: $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$. Коэффициенты разложения называются координатами вектора \vec{a} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Запись линейных операций над векторами через координаты:
а) сложение и вычитание:

$$\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ — базис}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \pm \vec{b} = \{\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \alpha_3 \pm \beta_3\};$$

б) умножение на число $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \Rightarrow \lambda \vec{a} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3\}.$$

Формулы следуют из свойства линейных операций.

Задача. $\vec{a} = \{-2, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{0, 2, 1\}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Найти координаты $\vec{c} = 2\vec{b} - \vec{a}$ в том же базисе.

$$\leftarrow \vec{c} = \{2 \cdot 0 + 2, \quad 2 \cdot 2 - 2, \quad 1 \cdot 2 - 3\} = \{2, 2, -1\} \rightarrow$$

Отметим, что если векторы $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ коллинеарны, т.е. $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, то координаты векторов \vec{a} и \vec{b} , пропорциональны: $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = \alpha_3/\beta_3$ и наоборот.

2.3. Проекция вектора на ось и ее свойства

Под осью l будем понимать направленную прямую.

О: Проекцией т. A на ось l называется основание перпендикуляра AA' , опущенного из т. A на l : $\text{пр}_l A = A'$. Составляющей вектора \overline{AB} по оси l называется вектор $\overline{A'B'}$, где $A' = \text{пр}_l A$, $B' = \text{пр}_l B$ (рис. 2.7). Проекцией вектора \overline{AB} на l называется число $\text{пр}_l \overline{AB} = \pm |\overline{A'B'}|$. Знак (+) берется, если $\overline{A'B'} \uparrow l$, знак (-) — если $\overline{A'B'} \downarrow l$. Если \vec{e} — единичный вектор (т.е. $|\vec{e}| = 1$) в направлении l , то $\overline{A'B'} = \text{пр}_l \overline{AB} \cdot \vec{e}$.

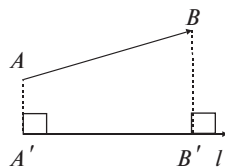


Рис. 2.7

Свойства проекций:

$$1^0. \text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad \text{где } \varphi = (\vec{a}, l).$$

Если $0 < \varphi < \pi/2$, тогда из $\triangle ABK$ имеем $AK = |\overline{A'B'}| = \text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$ (рис. 2.8).

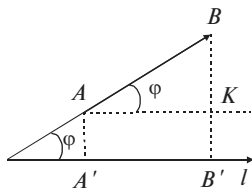


Рис. 2.8

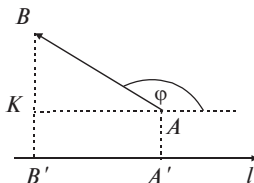


Рис. 2.9

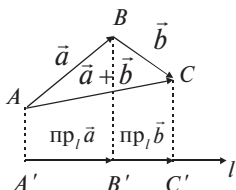


Рис. 2.10

Если $\pi/2 < \varphi < \pi$, тогда $KA = -\text{пр}_l \vec{a} = -|\vec{a}| \cos \varphi$ (рис. 2.9).

2⁰. Проекция суммы векторов на ось l равна сумме проекций векторов на l .

Доказательство геометрическое (рис. 2.10).

3⁰. $\text{пр}_l k\vec{a} = k \text{пр}_l \vec{a}$, $k = \text{const}$. Доказательство проводится с помощью свойства 1⁰.

2.4. Прямоугольная система координат. Координаты вектора и точки

О: Прямоугольной декартовой системой координат (ПСК) называется совокупность т. O и ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. такого базиса, в котором векторы единичны (имеют длины, равные 1) и взаимно перпендикулярны. Три взаимно перпендикулярные прямые в направлении базисных векторов называются осями координат: оси абсцисс, ординат, аппликат (рис. 2.11).

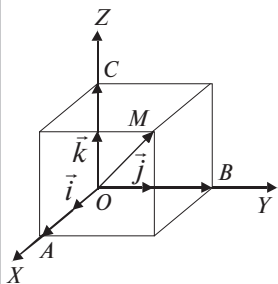


Рис. 2.11

Обычно рассматривается правая система координат, т.е. такая, что из конца вектора \vec{k} кратчайший поворот от \vec{i} к \vec{j} виден против часовой стрелки. Точке M в пространстве соответствует радиус-вектор. Координатами т. M назовем координаты вектора $\overline{OM} : \overline{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$, т.е. $M(x_M, y_M, z_M)$. Выясним геометрический смысл координат. Из рис. 2.11 видно, что $\overline{OM} = \overline{OA} +$

$+\overline{OB} + \overline{OC} = \text{пр}_{Ox} \overline{OM} \cdot \vec{i} + \text{пр}_{Oy} \overline{OM} \cdot \vec{j} + \text{пр}_{Oz} \overline{OM} \cdot \vec{k}$, а из единственности разложения \overline{OM} имеем:

$$x_M = \text{пр}_{Ox} \overline{OM}, \quad y_M = \text{пр}_{Oy} \overline{OM}, \quad z_M = \text{пр}_{Oz} \overline{OM},$$

Длина \overline{OM} — диагональ прямоугольного параллелепипеда — вычисляется как

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}.$$

Если вектор \vec{a} расположен произвольно, то

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пусть $A(x_A, y_A, z_A)$ — его начало, $B(x_B, y_B, z_B)$ — его конец, тогда (рис. 2.12)

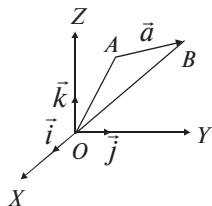


Рис. 2.12

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\},$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Можно вычислить направляющие косинусы \vec{a} , т.е. косинусы углов, образуемых с координатными осями, учитывая свойство проекций 1^0 :

$$\cos \alpha = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = a_x / |\vec{a}|,$$

$$\cos \beta = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = a_y / |\vec{a}|,$$

$$\cos \gamma = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = a_z / |\vec{a}|,$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Таким образом,

$\vec{a}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ — единичный вектор.

Задача. Найти модуль и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

◀ По вышеприведенным формулам

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3, \quad \cos \alpha = 2/3, \quad \cos \beta = 1/3, \quad \cos \gamma = -2/3 \blacktriangleright$$

2.5. Скалярное произведение векторов

О: Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Если обозначить скалярное произведение через (\vec{a}, \vec{b}) или $\vec{a} \cdot \vec{b}$, то (рис. 2.13)

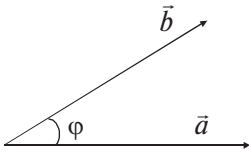


Рис. 2.13

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Используя свойство 1^0 проекции вектора на ось, имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Свойства скалярного произведения:

1^0 . Переместительный закон: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — следствие определения.

2^0 . Сочетательный закон: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

$$\square (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \lambda \vec{a} = |\vec{b}| \lambda \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \boxtimes$$

3^0 . Распределительный закон: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

$$\square \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \boxtimes$$

4^0 . Скалярный квадрат \vec{a}^2 вектора \vec{a} равен квадрату его длины: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$.

Данное свойство является следствием определения, так как $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = 1$.

5^0 . Необходимым и достаточным условием перпендикулярности ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} является равенство нулю их скалярного произведения.

Свойство следует из определения скалярного произведения, так как $\cos \pi/2 = 0$.

Из свойств $1^0 - 3^0$ следует, что при скалярном умножении можно раскрывать скобки так же, как при умножении многочленов.

Задача. Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1/2$.

Найти $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft (\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) - 2|\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot 1/2 - 2 \cdot 4 = -8 \blacktriangleright \end{aligned}$$

Выразим скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ через координаты векторов \vec{a} и \vec{b} . Пусть заданы координаты векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Используем, что $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ и перемножим скалярно $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$. Получим формулу

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Основные приложения скалярного умножения:

1) вычисление работы A силы \vec{F} при перемещении из т. B в т. C (рис. 2.14)

$$A = \vec{F} \cdot \overline{BC};$$

2) вычисление угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|};$$

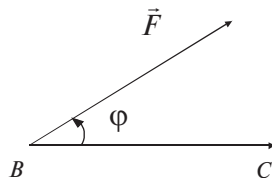


Рис. 2.14

3) вычисление проекции одного вектора на другой:

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Задача. Найти работу A силы $\vec{F} = \{2, 3, 5\}$ при перемещении из т. B в т. C , если $B(-1, 0, -2)$, $C(0, 2, 1)$. \blacktriangleleft Находим координаты $\overline{BC} = \{1, 2, 3\}$, работа $A = \vec{F} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 23$ ед. работы \blacktriangleright

2.6. Векторное произведение векторов

Рассмотрим другой вид умножения векторов.

О: Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , определяемый следующим образом:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi$, $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$;
- 3) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют правую тройку (рис. 2.15).

Векторное произведение обозначается символами $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

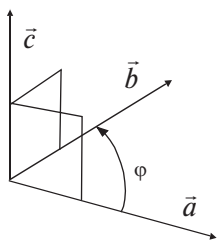


Рис. 2.15

Свойства векторного произведения:

1⁰. Антипереместительный закон:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

□ Векторы $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}^* = \vec{b} \times \vec{a}$ в силу определения векторного произведения имеют одинаковые длины, коллинеарны, но направлены в разные стороны, поэтому $\vec{c} = -\vec{c}^*$ ☒

2⁰. Сочетательный закон: $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

3⁰. Распределительный закон: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Доказательства свойств 2⁰ и 3⁰ см. в [7. С. 29].

4⁰. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} : $S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, а площадь треугольника $S_{\Delta} = |\vec{a} \times \vec{b}|/2$.

Свойства следуют из определения векторного произведения.

5⁰. Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} является равенство нулю их векторного произведения.

Свойство следует из определения, так как $\sin \varphi = 0$ для коллинеарных векторов.

Выразим векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ через координаты векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$.

Для базисных векторов $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ (рис. 2.16).

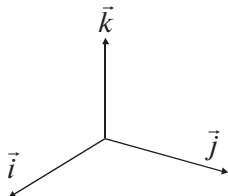


Рис. 2.16

Тогда, пользуясь свойствами 1^0-3^0 векторного произведения, получаем

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_y b_x (-\vec{k}) + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} + a_z b_y (-\vec{i}) + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_z \vec{i} = \\ &= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Используя определители III порядка, можно записать векторное произведение в виде определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Основные приложения векторного умножения:

1) вычисление площади параллелограмма и площади треугольника (свойство 4^0);

2) вычисление момента \vec{M}_0 силы \vec{F} , приложенной к т. A , относительно т. O : $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r} = \vec{OA}$ (рис. 2.17, а);

3) вычисление скорости \vec{v} т. M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью $\vec{\omega}$: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{r} = \vec{OM}$, вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения (рис. 2.17, б).

Задача. Даны вершины треугольника: $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(1, 1, 1)$. Найти его площадь.

◀ Так как $S_{\triangle ABC} = |\vec{AB} \times \vec{AC}| / 2$, а векторное произведение векторов $\vec{AB} = \{2, 2, -1\}$ и $\vec{AC} = \{2, 1, 0\}$ находится по формуле

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k},$$

то $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \frac{3}{2}$ ед.² ▶

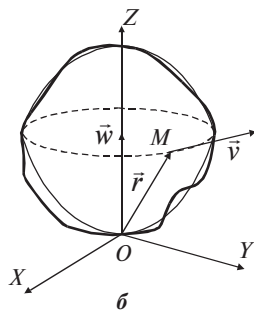
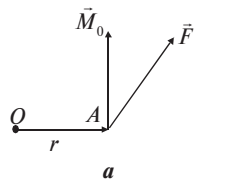


Рис. 2.17

2.7. Смешанное (векторно-скалярное) произведение трех векторов

Рассмотрим умножение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

О: Смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется произведение $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Геометрический смысл. Смешанное произведение $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$.

Произведение имеет знак (+), если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая (см. определение векторного произведения), знак (-), если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая.

□ Предположим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некопланарны, построим на них параллелепипед. Имеем $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ пр}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}$.

В данном равенстве $|\vec{a} \times \vec{b}|$ есть площадь параллелограмма, построенного на \vec{a} и \vec{b} , т.е. площадь основания параллелепипеда $S_{\text{осн}}$, а $\text{пр}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = \pm H$, где H — высота параллелепипеда. Таким образом, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S_{\text{осн}}(\pm H) = \pm V$ ☒

Свойства смешанного произведения:

1⁰. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Свойство следует из геометрического смысла смешанного произведения и дает возможность ввести обозначение $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

2⁰. При перестановке в смешанном произведении двух векторов его знак меняется на противоположный. Например, $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$.

Свойство следует из противоположной ориентации троек $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$.

3⁰. При круговой перестановке векторов в смешанном произведении знак не меняется, т.е. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}$.

Свойство следует из одинаковой ориентации данных троек векторов.

4⁰. Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $V_{\text{пар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$, а объем треугольной пирамиды $V_{\text{пир}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|/6$.

5⁰. Необходимым и достаточным условием компланарности трех ненулевых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения, т.е. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Свойства $4^0, 5^0$ следуют из геометрического смысла смешанного произведения.

Выразим смешанное произведение $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ через координаты векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$. Согласно его определению и формулам для вычисления векторного и скалярного произведений через координаты, имеем

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z. \end{aligned}$$

Записывая последнюю формулу в виде определителя, получаем

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения обусловлены свойствами $4^0, 5^0$.

Задача. На векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 2\vec{k}$ построен параллелепипед. Найти его объем.

◀ По свойству 4^0 $V_{\text{пар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$, находим

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$V_{\text{пар}} = 1 \text{ ед.}^3 \blacktriangleright$$

2.8. Линейное пространство. Евклидово пространство R^n

По аналогии с множеством векторов на плоскости и в пространстве вводится n -мерное векторное пространство.

O: Упорядоченная система n действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется n -мерным вектором \vec{a} , а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — его координатами. Обозначение $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

O: Суммой векторов $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и $\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\}$, разностью — вектор $\vec{a} - \vec{b} = \{\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_n - \beta_n\}$.

Произведением вектора \vec{a} на число λ называется вектор

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n\}.$$

Линейные операции над n -мерными векторами обладают теми же свойствами, что и линейные операции над векторами на плоскости и в пространстве.

O: Множество всех n -мерных векторов $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i=1, n$, для которых определены операции сложения и умножения на число, называется арифметическим n -мерным векторным пространством \mathbf{R}^n .

В частности, \mathbf{R}^2 — множество векторов на плоскости, \mathbf{R}^3 — множество векторов в пространстве.

Для пространства \mathbf{R}^n сохраняются определения линейной комбинации и линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

T.1: В пространстве \mathbf{R}^n существуют n линейно независимых векторов ■

□ Возьмем

$$\vec{e}_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}, \vec{e}_2 = \{0, 1, 0, \dots, 0\}, \dots, \vec{e}_n = \{0, 0, 0, \dots, 1\}$$

и запишем равенство $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = 0$ для координат векторов:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 = 0, \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot 0 = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — линейно независимы ☒

О: Линейным векторным пространством \mathbf{L} называется множество элементов a, b, c, \dots любой природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие свойствам сложения и умножения на число в \mathbf{R}^n . Элементы линейного пространства называются векторами.

Например, множество многочленов $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ степени $\leq n$ является линейным векторным пространством размерности $n + 1$, так как базисом в нем является $x^0 = 1, x, x^2, \dots, x^n$.

Пусть в пространстве \mathbf{R}^n выбран базис

$$\vec{e}_1 = \{1, 0, \dots, 0\}, \vec{e}_2 = \{0, 1, \dots, 0\}, \dots, \vec{e}_n = \{0, 0, \dots, 1\}. \quad (2.2)$$

О: Скалярным произведением векторов

$\vec{a} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \vec{b} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Скалярное произведение обладает свойствами 1^0 – 3^0 скалярного произведения в \mathbf{R}^2 и \mathbf{R}^3 (см. 2.5).

Так как $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ ($\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ только при $\vec{a} = 0$), вводится понятие длины вектора $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

В силу справедливости неравенства $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$, называемого неравенством Коши—Буняковского [1. С.95], в \mathbf{R}^n можно ввести понятие косинуса угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad \cos \varphi \leq 1.$$

О: n -мерным евклидовым пространством называется пространство \mathbf{R}^n , если в нем введено скалярное произведение.

Среди базисов евклидова пространства \mathbf{R}^n особое значение имеют так называемые ортогональные базисы.

О: Векторы \vec{a} и \vec{b} называются ортогональными (перпендикулярными), если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

О: Базис $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называется ортогональным, если векторы в нем попарно ортогональны.

Базис называется ортонормированным, если векторы попарно ортогональны и единичны.

Так, базис (2.2) является ортонормированным вследствие

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Аналогично \mathbf{R}^3 , в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n вводится прямоугольная система координат и координаты точки M определяются как координаты радиуса-вектора \overline{OM} (т. O — начало координат).

2.9. Линейные преобразования.

Собственные значения и собственные векторы.

Квадратичные формы в \mathbf{R}^n

О: Линейным преобразованием A линейного пространства L называется закон, по которому каждому вектору $\bar{x} \in L$ ставится в соответствие вектор $\bar{x}' \in L$: $\bar{x}' = A\bar{x}$, причем $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L$ справедливо

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}, \quad A(\lambda\bar{x}) = \lambda A(\bar{x}), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Линейное преобразование A называют также линейным оператором A .

О: Матрицей линейного оператора A в пространстве \mathbf{R}^n с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

столбцы которой являются координатами образов базисных векторов

$$A\bar{e}_j = a_{1j}\bar{e}_1 + a_{2j}\bar{e}_2 + \dots + a_{nj}\bar{e}_n, \quad j = \overline{1, n}.$$

Равенство $\bar{x}' = A\bar{x}$ записывается в \mathbf{R}^n в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В разных базисах линейное преобразование задается различными матрицами [8. С. 198]. Пусть A — матрица линейного оператора в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, A' — в базисе $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n$. Если $T = (\tau_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, — матрица перехода от первого базиса ко второму, матрица оператора A' в базисе $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n$: $A' = T^{-1}AT$ [1. С. 106]; [8. С. 198].

Пример:

В базисе \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \bar{e}'_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_2 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \end{cases}$. Найти матрицу A'

оператора A в базисе \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 .

$$\blacktriangleleft \quad T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 & -1,8 \\ 2,2 & 0,4 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

О: Невырожденным называется линейное преобразование, имеющее невырожденную матрицу.

Невырожденное преобразование A обладает обратным: $\bar{x} = A^{-1}\bar{x}'$.

Если $\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}'' = B\bar{x}$, $\bar{x}'' = BA\bar{x}$, то $\bar{x}'' = BA\bar{x}$. BA называется произведением линейных преобразований.

О: Собственным вектором преобразования A называется всякий ненулевой вектор, удовлетворяющий условию $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, а число λ называется собственным значением A .

Пусть преобразование A в пространстве \mathbf{R}^n с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ задается матрицей (2.3). Тогда, используя (2.4), запишем $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ в виде системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Она имеет нетривиальное (ненулевое) решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение относительно λ , которое записывается через матрицу A и единичную матрицу E в виде $\det(A - \lambda E) = 0$ и называется характеристическим уравнением матрицы A . Оно является уравнением n -й степени и имеет не более n корней.

Матрицы преобразования A в различных базисах имеют одни и те же собственные значения.

Подставляя найденное собственное значение λ в систему (2.5), получаем систему для определения соответствующего собственного вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

О: Линейный оператор A в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n называется симметрическим, или самосопряженным, если $A\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot A\vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$.

Для матрицы самосопряженного оператора A в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, справедливо $A = (a_{ij}) = (a_{ji}), ij = \overline{1, n}$ (Такая матрица A называется симметрической.) Действительно,

$$A\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i = a_{ij}, \quad \vec{e}_j \cdot A\vec{e}_i = \vec{e}_j \cdot \sum_{k=1}^n a_{ki} \vec{e}_k = a_{ji} \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}.$$

Если оператор A имеет n линейно независимых собственных векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, то в базисе из этих векторов его матрица имеет диагональную форму:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, — собственные значения матрицы A .

Для самосопряженного оператора A собственные векторы, отвечающие различным λ_i , ортогональны. Более того, существует ортонормированный базис из собственных векторов и $A = U^T D U$. Здесь матрица U такая, что столбцы ее есть координаты ортонормированного базиса, U^T — матрица транспонированная по отношению к матрице U (все строки матрицы заменены на соответствующие столбцы) [8. С.225].

Пример:

Найти диагональную форму матрицы A и новый базис, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft \text{Матрица } A \text{ — симметрическая, поэтому ее}$$

можно диагонализировать. Находим собственные значения

матрицы A :
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ((\lambda-1)^2(\lambda-10)) = 0.$$
 Отсю-

да $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$. При $\lambda_{1,2} = 1$ имеем следующую систему для

определения собственного вектора:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 + 2x_3.$$

Решением системы является вектор $\vec{u}_1 = (-2x_2 + 2x_3, x_2, x_3) \forall x_2, x_3$.

При $\lambda_3 = 10$ для определения собственного вектора имеем

систему
$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{2}, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Решение этой системы — вектор $\bar{u}_2 = (\frac{-x_3}{2}, -x_3, x_3) \forall x_3$.

Положим для \bar{u}_1 сначала $x_2 = 1, x_3 = 0$, потом $x_2 = 0, x_3 = 1$, получим $\bar{e}_1 = (-2, 1, 0), \bar{e}_2 = (2, 0, 1)$. Возьмем для \bar{u}_2 $x_3 = -2$, тогда $\bar{e}_3 = (1, 2, -2)$. Векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ образуют базис, которому со-

ответствует диагональная форма матрицы A : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Чтобы получить ортонормированный базис, выбираем x_2, x_3 для \bar{e}_2 так, чтобы $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$. Пусть $x_3 = 1$, тогда $x_2 = \frac{4}{5}$, $\bar{e}'_1 = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)$. Векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}_3$ попарно ортогональны. Ортонормированный базис

$$\bar{e}_1^* (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0), \bar{e}_2^* (2/(3\sqrt{5}), 4/(3\sqrt{5}), 5/(3\sqrt{5})),$$

$$\bar{e}_3^* (1/3, 2/3, -2/3) \blacktriangleright$$

О: Квадратичной формой f от n неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n называется $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, a_{ij} — числовые коэффициенты, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрицей квадратичной формы называется матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, ее ранг называется рангом квадратичной формы.

Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то справедливо равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X. \text{ В частности, } f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}; f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 +$$

$$+ 2a_{23}x_2x_3, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

О: Каноническим видом квадратичной формы называется

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2. \quad (2.6)$$

Так как матрица A квадратичной формы симметрическая, то всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду (2.6).

Коэффициенты λ_i — собственные значения матрицы A . Ранг квадратичной формы при этом не меняется.

О: Квадратичная форма называется положительно определенной, если в (2.6) все $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, отрицательно определенной, если $\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n}$.

Пример:

Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$ к каноническому виду.

◀ Находим собственные значения матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (9 - \lambda)(6 - \lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10.$$

Собственные векторы получаем из систем:

$$\begin{cases} 4u_1 - 2u_2 = 0, \\ -2u_1 + u_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -u_1 - 2u_2 = 0, \\ -2u_1 - 4u_2 = 0. \end{cases}$$

Решение первой — $(u_1, 2u_1) \forall u_1$, второй — $(u_1, -u_1/2) \forall u_1$. Ортогональный базис $(1, 2), (1, -1/2)$, ортонормированный — $\bar{e}'_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), \bar{e}'_2 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Квадратичная форма положительно определенная и преоб-

разованием $\begin{cases} x_1 = \frac{x'_1}{\sqrt{5}} + \frac{2x'_2}{\sqrt{5}}, \\ x_2 = \frac{2x'_1}{\sqrt{5}} - \frac{x'_2}{\sqrt{5}} \end{cases}$ приводится к каноническому виду

$$f(x_1, x_2) = 5x_1'^2 + 10x_2'^2 \blacktriangleright$$

2.10. Применение методов алгебры в математическом моделировании

Вопросы о роли математики в современном мире, о необходимости формирования культуры математического мышления специалиста любой отрасли знаний связаны с методом математического моделирования как методом изучения объектов реальной действительности.

Модель — это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая способна замещать объект таким образом, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте.

По форме представления модели можно разделить на физические, символические, смешанные. К символическим моделям относятся математические модели.

Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений, объектов внешнего мира, выраженное с помощью математических понятий и символики.

Прежде всего математические модели делятся на образные (чертежи, графики, схемы и т.д.) и знаково-символические (уравнения, формулы и т.д.).

Знаково-символические модели бывают следующих видов:

1) оптимизационные (в частности, экономико-математические) модели, в которых введен критерий оптимальности, определяющий смысловое содержание построенной целевой функции, связывающей факторы модели (например, задача о расходе сырья);

2) функциональные модели, в которых по значениям одной переменной можно определить значения другой. К ним относятся динамические модели, когда в качестве переменной участвует время t , например $s = v \cdot t$ (зависимость пути s от времени t и скорости v), и статические модели, например $S = xy$ (зависимость площади прямоугольника от его длины и ширины).

Кроме того, математические модели можно разделить на детерминистские и стохастические. Детерминистские модели выражаются формулой, уравнением, в которые входят достоверные величины, а в стохастических (вероятностных или статистических) моделях участвуют случайные величины.

С позиции непрерывности математические модели делятся также на непрерывные и дискретные модели, например, дискретные и непрерывные случайные величины.

Следует заметить, что базисные математические понятия, являющиеся каркасом математической теории, представляют из себя модели реально существующих объектов. Это число, множество, функция, длина, площадь, объем, вектор, матрица, производная, дифференциал, первообразная, определенный интеграл, дифференциальное уравнение, событие, вероятности, случайная величина и др.

Если математическая модель построена, то ее исследование ведется средствами математики без привлечения содержательных соображений. Процесс математического моделирования (построения и исследования математической модели) разбивается на следующие этапы:

1) Построение математической модели: отбрасывание второстепенных факторов, построение описательной модели объекта и переводение ее на математический язык.

2) Изучение построенной математической модели с помощью математических методов.

3) Проверка адекватности построенной модели опытным данным.

4) В случае несоответствия опытным данным — уточнение математической модели или ее замена другой моделью.

Многие задачи физики, химии, экономики, технические и технологические задачи приводят к математическим моделям, записываемым или в виде системы уравнений, или в векторной форме. Часто таким образом представляются статические модели, когда процесс рассматривается вне зависимости от времени.

2.10.1. Статические модели физики

Статическими моделями занимается статика — часть механики, в которой рассматриваются задачи на равновесие твердых тел и преобразования одной системы сил в другую, ей эквивалентную.

Уравнения равновесия твердого тела, на которое действуют несколько сил, записываются из условия

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0.$$

В проекциях на выбранные оси координат имеем

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \end{cases}$$

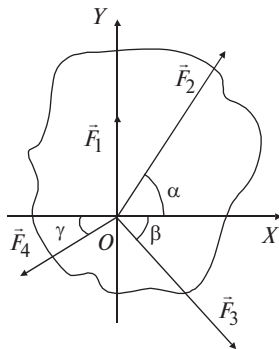


Рис. 2.18

Например, на рис. 2.18 изображены четыре силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 , приложенные к твердому телу в т. O и лежащие в одной плоскости. Необходимо определить модуль и направление силы \vec{F}_5 , приложенной в т. O и уравновешивающей положение тела.

Уравнения равновесия в проекциях на OX и OY имеют вид

$$\begin{cases} F_2 \cos \alpha + F_3 \cos \beta - F_4 \cos \gamma + F_{5x} = 0, \\ F_1 + F_2 \sin \alpha - F_3 \sin \beta - F_4 \sin \gamma + F_{5y} = 0. \end{cases}$$

Задача статически определенная, так как число неизвестных равно числу уравнений. Найдя F_{5x} , F_{5y} из уравнений, определяем

$$F_5 = \sqrt{F_{5x}^2 + F_{5y}^2}.$$

2.10.2. Статические модели химии

Пусть даны n веществ A_1, A_2, \dots, A_n и m реакций, протекающих по схеме

Например,

$$\begin{pmatrix} \text{CO}_2 \\ \text{H}_2\text{O} \\ \text{H}_2\text{CO}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{H} \\ \text{O} \\ \text{C} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\alpha A = 0$, получаем, что $\beta B = 0$. Поскольку B — единичная матрица, то отсюда следует, что $\alpha\beta = 0$. Атомная матрица β известна, стехиометрическая матрица α является искомой.

2.10.3. Статические модели экономики

Рассмотрим задачи балансового анализа. Цель балансового анализа — ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике: каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли, причем каждая отрасль выступает как производитель некоторой продукции, а с другой стороны, как потребитель и своей, и чужой продукции. Математическая модель такой задачи разработана в 1934 г. Леонтьевым.

Пусть x_i — общий (валовой) объем продукции i -й отрасли ($i = \overline{1, n}$), x_j — объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью в процессе производства ($j = \overline{1, n}$), y_i — объем конечного продукта i -й отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовой объем продукции любой i -й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Эти уравнения называют соотношениями баланса.

Рассмотрим стоимостный межотраслевой баланс и введем коэффициенты прямых затрат $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, ($i, j = \overline{1, n}$), покрывающие затраты продукции i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли.

При предположении $a_{ij} = \text{const}$ соотношения баланса примут вид

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

В матричном виде $X = AY + Y$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор валового выпуска, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ — вектор конечного продукта, $A = (a_{ij})$,

$i, j = \overline{1, n}$, — матрица прямых затрат.

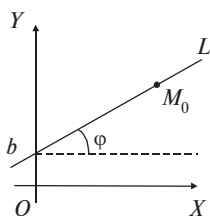
Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого вектора валового выпуска X , который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y .

Литература: [7. С. 9–35; 189–230]; [9. С. 42, 72–130]; [16. С. 222–241; 259–275].

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ: ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Опорный конспект № 3

3.1. Прямая на плоскости



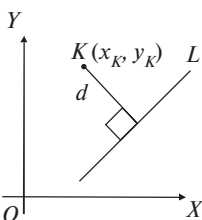
$$k = \operatorname{tg} \varphi, b \Leftrightarrow y = kx + b, M_0(x_0, y_0) \in L \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$\theta = (\widehat{L_1, L_2}), \operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_2 = k_1, L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$$

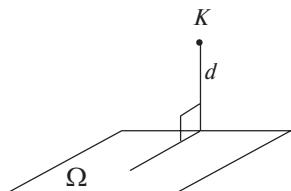
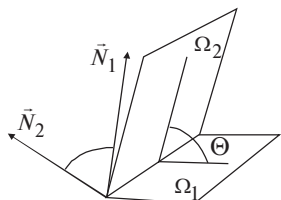
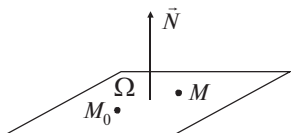
$Ax + By + C = 0$ — общее уравнение L
 $(A^2 + B^2 \neq 0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in L \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



$$d = \frac{|Ax_K + By_K + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3.2. Плоскость в пространстве



$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega, M(x, y, z) \in \Omega,$$

$$\vec{N} = \{A, B, C\}, \overline{M_0M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение Ω

$$\cos \Theta = \cos(\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$$

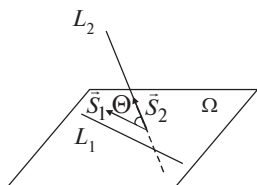
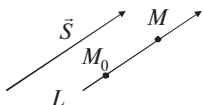
$$\Omega_1 \perp \Omega_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

$$\Omega_1 \parallel \Omega_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$d = \frac{|Ax_K + By_K + Cz_K + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3.3 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости



$$\vec{S} = \{m, n, p\} \parallel L, M_0(x_0, y_0, z_0) \in L,$$

$$\overline{M_0M} \parallel \vec{S} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

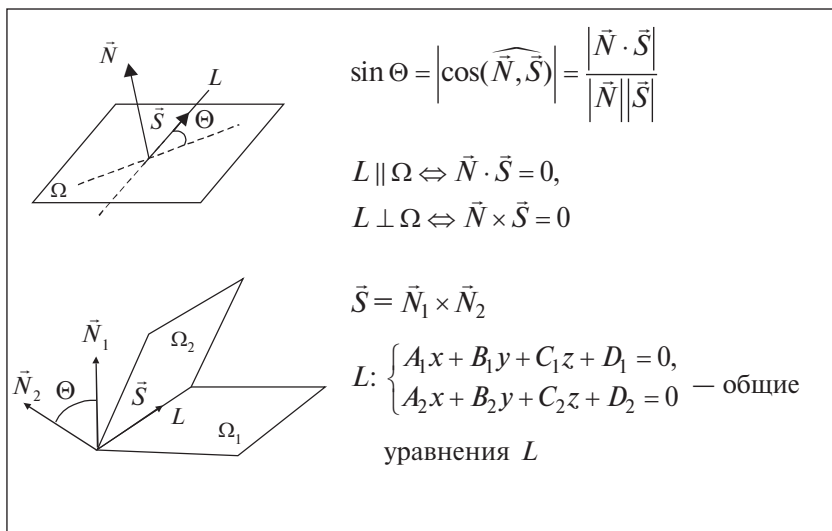
$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \in L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \overline{M_1M_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

$$L_1 \in \Omega, L_2 \notin \Omega, \vec{S}_1 \parallel L_1 \Rightarrow$$

$$\cos \Theta = \cos(\widehat{\vec{S}_1, \vec{S}_2}) = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|}$$



3.1. Прямая на плоскости

3.1.1. Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат.

О: Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением линии на плоскости, если ему удовлетворяют координаты (x, y) каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней.

Часто линия на плоскости задается характерными геометрическими свойствами, по которым находится ее уравнение. Координаты произвольной точки линии являются текущими координатами этой точки.

В качестве примера рассмотрим вывод уравнения окружности.

О: Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной т. $C(x_0, y_0)$ — центра окружности.

Пусть $M(x, y)$ — точка с текущими координатами, лежащая на окружности, R — расстояние от т. M до центра C , тогда

$$|CM| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Нормальное уравнение окружности получаем, возводя обе части равенства в квадрат: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Уравнение прямой на плоскости получим в различных формах в зависимости от исходных данных.

3.1.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим на плоскости XOY произвольную прямую L , не параллельную OY . Ее положение вполне определяется углом $\varphi = (\overline{OX}, \overline{L})$ между прямой L и осью OX и отрезком b , отсекаемым прямой L на оси OY . Отметим, что под углом φ понимается наименьший неотрицательный, т.е. отсчитываемый против хода часовой стрелки от OX к L , угол. Составим уравнение этой прямой. Обозначим через $M(x, y)$ точку с текущими координатами на прямой L (рис. 3.1), $B(0, b)$, тогда

$$\overline{BM} = \{x, y - b\}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - b}{x},$$

т.е. $y = x \operatorname{tg} \varphi + b$. Обозначив $k = \operatorname{tg} \varphi$, получим уравнение $y = kx + b$, называемое уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

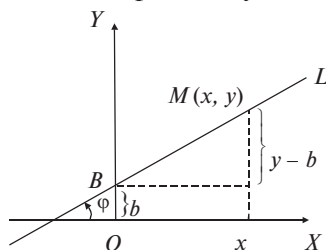


Рис. 3.1

3.1.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (уравнение пучка прямых)

Положение прямой L , не параллельной оси OY , на плоскости вполне определяется заданием угла $\varphi = (\overline{OX}, \overline{L})$ и т. $M_0(x_0, y_0) \in L$. Составим уравнение этой прямой. Подставим координаты т. M_0 в уравнение прямой L с угловым коэффициентом, где слагаемое b пока не известно. Получим $y_0 = kx_0 + b$. Вычтем теперь данное ра-

венство из уравнения $y = kx + b$. Получим так называемое уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 : $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Если угловой коэффициент k не задан, то уравнение определит пучок прямых, проходящих через т. M_0 .

Часто употребляемые при решении задач общее уравнение прямой и уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, будут выведены далее как частные случаи общего уравнения плоскости и уравнений прямой в пространстве соответственно.

3.1.4. Угол между двумя прямыми на плоскости.

Условия параллельности и перпендикулярности

О: Углом θ между двумя прямыми L_1 и L_2 на плоскости будем называть наименьший угол, на который нужно повернуть прямую L_1 в положительном направлении так, чтобы она совпала с прямой L_2 .

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$L_1: y = k_1x + b_1, k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad L_2: y = k_2x + b_2, k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Из рис. 3.2 видно, что $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$,

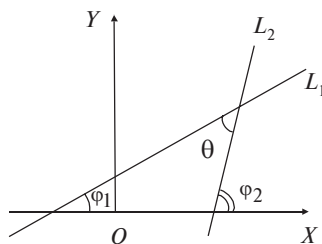


Рис. 3.3

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}. \quad \text{Окончательно} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Прямые L_1 и L_2 параллельны в том и только том случае, когда $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$, т.е. $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$. В случае перпендикулярности прямых $\operatorname{tg} \theta$ не существует, т.е. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

Задача. Найти уравнение прямой L , проходящей через т. $M_0(-1, 2)$ и перпендикулярной к прямой $L_1: 3x - 4y + 5 = 0$.

◀ Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через т. M_0 : $y - 2 = k(x + 1)$. Угловой коэффициент k находим из условия перпендикулярности $L \perp L_1$. Так как уравнение L_1 можно переписать в виде $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, то ее угловой коэффициент $k_1 = 3/4$. Теперь ис-

пользуем формулу $k_1 k = -1$, тогда $k = -4/3$. Подставим найденный угловой коэффициент в уравнение пучка:

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x + 1) \text{ или } 4x + 3y - 2 = 0 \blacktriangleright$$

3.2. Плоскость в пространстве

3.2.1. Уравнение поверхности

Пусть в пространстве выбрана прямоугольная система координат XYZ .

О: Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности, если ему удовлетворяют координаты (x, y, z) каждой точки данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней.

Аналогично линиям на плоскости, поверхности могут быть заданы характерными геометрическими свойствами, по которым находятся их уравнения. Так, сферой называется гмт, равноудаленных от заданной т. $C(x_0, y_0, z_0)$ — центра сферы. Обозначим через $M(x, y, z)$ точку с текущими координатами на сфере, R — расстояние от т. M до центра C . Тогда (рис. 3.3)

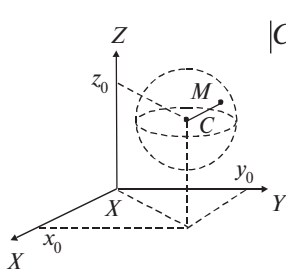


Рис. 3.3

$$|CM| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R.$$

Нормальное уравнение сферы получим, возведя обе части равенства в квадрат:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

3.2.2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (уравнение связи плоскостей)

Положение плоскости Ω в пространстве вполне определяется заданием вектора $\vec{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярного к плоскости (нормальный вектор), и т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Найдем уравнение этой плоскости. Пусть т. $M(x, y, z) \in \Omega$ — точка с текущими координатами. Тогда $\overline{M_0M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$ (рис. 3.4). Записав условия перпендикулярности через координаты, получим уравнение плоскости, проходящей через заданную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Если координаты вектора \vec{N} заранее не заданы, то мы имеем уравнение связи плоскостей.

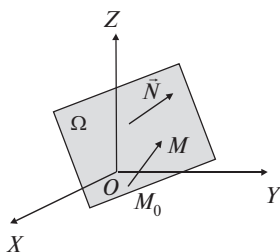


Рис. 3.4

Задача. Найти уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(-1, 2, 3)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_0K}$, где $K(0, -1, 2)$.

◀ Уравнение связи плоскостей, проходящих через т. M_0 : $A(x + 1) + B(y - 2) + C(z - 3) = 0$. Нормальный вектор $\vec{N} = \overline{M_0K} = \{1, -3, -1\}$. Таким образом, $1(x + 1) - 3(y - 2) - 1(z - 3) = 0$ или $x - 3y - z + 10 = 0$ есть искомое уравнение плоскости. Чтобы построить эту плоскость, строим три точки плоскости, лежащие на осях координат (рис. 3.5): $M_1(-10, 0, 0)$, $M_2(0, 10/3, 0)$, $M_3(0, 0, 10)$, затем их последовательно соединяем отрезками прямых,

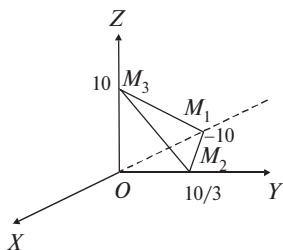


Рис. 3.5

лежащих в координатных плоскостях ▶

3.2.3. Общее уравнение плоскости, его частные случаи

Из п. 3.1.2 следует, что плоскость определяется уравнением I степени относительно текущих координат. Справедливо и обратное.

Т: Всякое невырожденное уравнение I степени относительно текущих координат

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (3.1)$$

определяет плоскость в пространстве и называется общим уравнением плоскости ■

□ Возьмем т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют данному уравнению. Тогда

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3.2)$$

Вычитая из уравнения (3.1) равенство (3.2), получаем уравнение плоскости, проходящей через заданную точку: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. На плоскости XOY ($z = 0$) уравнение (3.1) дает общее уравнение прямой $Ax + By + D = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) ☒

Рассмотрим частные случаи общего уравнения плоскости:

- а) $D = 0 \Rightarrow \Omega: Ax + By + Cz = 0 \Rightarrow$ т. $O(0, 0, 0) \in \Omega$;
- б) $A = 0 \Rightarrow \Omega: By + Cz + D = 0 \Rightarrow \Omega \parallel OX$;
- в) $A = B = 0 \Rightarrow \Omega: Cz + D = 0 \Rightarrow \Omega \parallel XOY$;
- г) $A = D = 0 \Rightarrow \Omega: By + Cz = 0 \Rightarrow OX \subset \Omega$.

В евклидовом пространстве \mathbf{R}^n с ортонормированным базисом вводится понятие гиперплоскости.

Ее общее уравнение

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + B = 0, \quad A_i, B \in \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, n},$$

$\vec{N} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ — нормальный вектор гиперплоскости.

3.2.4. Угол между плоскостями.

Условия параллельности и перпендикулярности

|| **О:** Углом Θ между двумя плоскостями называется один из двух смежных двугранных углов между этими плоскостями.

Пусть заданы нормальные векторы

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \quad \text{и} \quad \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

плоскостей Ω_1 и Ω_2 соответственно, тогда (рис. 3.6)

$$\cos \Theta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}.$$

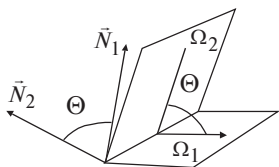


Рис. 3.6

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей получим, рассматривая расположение их нормальных векторов:

$$\begin{aligned} \Omega_1 \parallel \Omega_2 &\Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \end{aligned}$$

$$\Omega_1 \perp \Omega_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

3.2.5. Расстояние от точки до плоскости

Найдем расстояние d от т. $K(x_K, y_K, z_K) \notin \Omega$ до плоскости Ω . Пусть известны т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ и нормальный вектор $\vec{N} = \{A, B, C\}$ плоскости Ω . Тогда (рис 3.7)

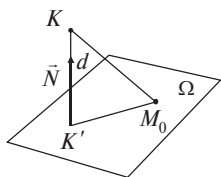


Рис. 3.7

$$\begin{aligned} d = \overline{K'K} &= \left| \text{пр}_{\vec{N}} \overline{M_0K} \right| = \left| \frac{\overline{M_0K} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|} \right| = \\ &= \frac{|A(x_K - x_0) + B(y_K - y_0) + C(z_K - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Если дано общее уравнение Ω :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то

$$d = \frac{|Ax_K + By_K + Cz_K + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В частности, на плоскости XOY получаем формулу для вычисления расстояния d от т. $K(x_K, y_K)$ до прямой $L: Ax + By + C = 0$,

$$d = \frac{|Ax_K + By_K + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задача. Найти расстояние между параллельными плоскостями $\Omega_1: x - 2y + 3z + 2 = 0$ и $\Omega_2: 2x - 4y + 6z - 9 = 0$.

◀ На плоскости Ω_1 выбираем произвольную т. K и находим расстояние от нее до плоскости Ω_2 . Так, $K(-2, 0, 0) \in \Omega_1$,

$$d = \frac{|-4 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{13}{\sqrt{56}} = \frac{13\sqrt{14}}{28} \blacktriangleright$$

3.3. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

3.3.1. Уравнения линий в пространстве

Линию в пространстве можно всегда определить как линию пересечения двух поверхностей. Если они заданы уравнениями $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, то система этих уравнений задает уравнения линии пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Например, уравнения осей координат:

$$OX: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad OY: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad OZ: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Перейдем к изучению прямой в пространстве.

3.3.2. Канонические и параметрические уравнения прямой

Положение прямой L в пространстве вполне определяется заданием т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ (опорная точка) и вектора $\vec{S} = \{m, n, p\}$ (направляющий вектор). Составим уравнения прямой L .

Обозначим через $M(x, y, z)$ точку с текущими координатами на L (рис.3.8).

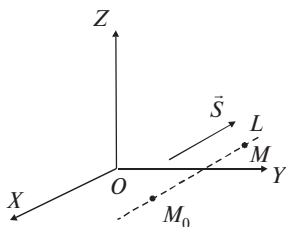


Рис. 3.8

Тогда

$$\overline{M_0M} \parallel \vec{S} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \times \vec{S} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Полученные уравнения прямой L называют каноническими. Если приравнять

отношения параметру t и найти x, y, z через t , то получим параметрические уравнения прямой:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt. \quad (3.3)$$

В евклидовом пространстве \mathbf{R}^n с ортонормированным базисом канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x_1 - x_{10}}{m_1} = \frac{x_2 - x_{20}}{m_2} = \dots = \frac{x_n - x_{n0}}{m_n},$$

$\vec{S} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ — направляющий вектор.

Пусть заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой L . Тогда $\vec{S} = \overline{M_1M_2}$, получаем уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

В частности, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

3.3.3. Общие уравнения прямой

Рассмотрим систему двух уравнений I степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Каждое из уравнений системы определяет плоскость в пространстве, а система в целом, если плоскости не параллельны, — прямую, по которой они пересекаются. Эти уравнения называют общими уравнениями прямой. Направляющий вектор такой прямой находится по формуле $\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, где \vec{N}_1, \vec{N}_2 — нормальные векторы плоскостей.

Задача. Известны общие уравнения прямой L :

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0, \\ x + 2y + z - 7 = 0. \end{cases}$$

Найти ее канонические уравнения.

◀ Находим направляющий вектор

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}.$$

Для определения координат опорной т. M_0 полагаем $z_0 = 0$ и, подставляя z_0 в общие уравнения L , получаем систему для определения x_0, y_0 :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - 4 = 0, \\ x_0 + 2y_0 - 7 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 4 = 0, \\ -3y_0 = -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 = 4, \\ y_0 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, канонические уравнения прямой L следующие:

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \blacktriangleright$$

3.3.4. Угол между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности

Под углом Θ между двумя прямыми в пространстве будем понимать угол между их направляющими векторами \vec{S}_1 и \vec{S}_2 , т.е.

$$\cos \Theta = \cos(\widehat{\vec{S}_1, \vec{S}_2}) = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых следуют из условий параллельности векторов \vec{S}_1 и \vec{S}_2 :

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = 0; \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0.$$

3.3.5. Угол между прямой и плоскостью

О: Углом Θ между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть заданы направляющий вектор прямой $\vec{S} = \{m, n, p\}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{N} = \{A, B, C\}$. Тогда (рис. 3.9)

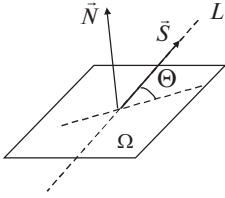


Рис. 3.9

$$\sin \Theta = \left| \cos(\widehat{\vec{N}, \vec{S}}) \right| = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{S}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{S}\|}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой имеют вид

$$L \parallel \Omega \Leftrightarrow \vec{S} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{S} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0,$$

$$L \perp \Omega \Leftrightarrow \vec{S} \parallel \vec{N} \Leftrightarrow \vec{S} \times \vec{N} = 0 \Leftrightarrow A/m = B/n = C/p.$$

3.3.6. Точка пересечения прямой и плоскости

Если заданы канонические уравнения прямой и общее уравнение плоскости, то для нахождения точки пересечения необходимо решить систему их уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

Приравниваем каждое из отношений канонических уравнений параметру t и подставляем (3.3) в уравнение плоскости:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Если точка пересечения существует, т.е. $Am + Bn + Cp \neq 0$, то находим t :

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp},$$

а затем из (3.3) — координаты точки пересечения.

Задача. Найти т. P пересечения $\Omega: x - 2y + 3z - 4 = 0$

и $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$.

◀ Имеем $x = 2t + 1, y = t, z = 4t - 1 \Rightarrow (2t + 1) - 2t + 3(4t - 1) - 4 = 0 \Rightarrow 12t = 6 \Rightarrow t = 0,5 \Rightarrow P(2; 0,5; 1)$ ▶

Литература: [5. С. 41–50; 61–72;]; [7. С. 4–73]; [16. С. 34–69].

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ: КРИВЫЕ 2-го ПОРЯДКА

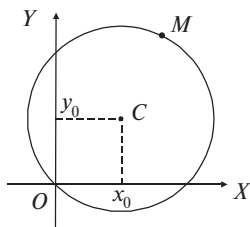
Опорный конспект № 4

4.1. Общее уравнение кр. 2п

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0).$$

Частный случай — **окружность** — гмт M : $|CM| = R$,
 $C(x_0, y_0)$ — центр, R — радиус. Нормальное уравнение окружности



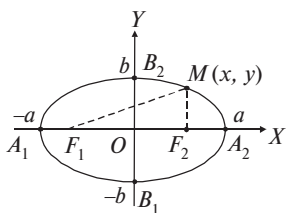
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

В общем уравнении кр. 2п в случае окружности $A = C$, $B = 0$

Каноническое уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = R^2$$

4.2. Эллипс — гмт M : $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a$,



$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы, $2c < 2a$
 Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2,$$

где a , b — большая и малая полуоси
 A_1, A_2, B_1, B_2 — вершины эллипса
 $c/a = \varepsilon < 1$ — эксцентриситет

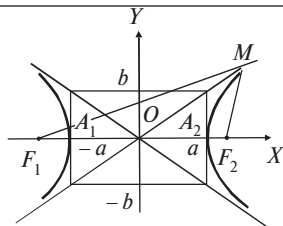
4.3. Гипербола — гмт M : $|\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| = 2a$,

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы, $2c > 2a$

Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2,$$

где a , b — действительная и мнимая полуоси

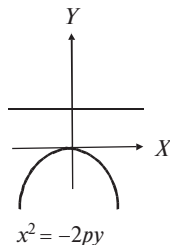
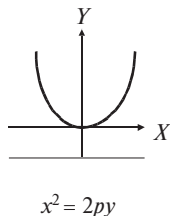
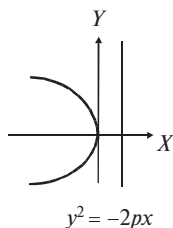
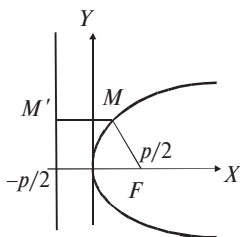


Асимптоты $y = \pm \frac{b}{a}x$ — прямые, к которым приближаются

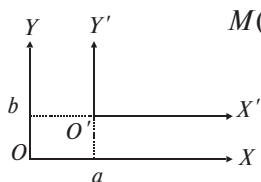
ветви гиперболы при $M \rightarrow \infty$

A_1, A_2 — вершины, $c/a = \varepsilon > 1$ — эксцентриситет

4.4. Парабола — гмт M : $|FM| = |M'M|$, $F(p/2, 0)$ — фокус, $|M'M|$ — расстояние от т. M до заданной прямой (директрисы); p — расстояние от т. F до директрисы
 Каноническое уравнение: $y^2 = 2px$,
 уравнение директрисы: $x = -p/2$.
 Другие случаи:

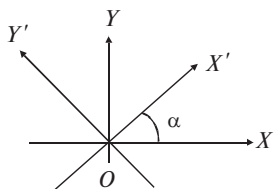


4.5. Преобразования параллельного переноса и поворота системы координат



$M(x, y) \in XOY$; $O'(a, b)$, $M'(x', y') \in X'O'Y'$:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$



$M(x, y) \in XOY$; $M'(x', y') \in X'OY'$:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

4.1. Общее уравнение кривой 2-го порядка. Окружность

О: Общим уравнением кривой 2-го порядка (кр. 2п) называется уравнение II степени относительно текущих координат:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \\ (A, B, C, D, E, F) \in \mathbf{R}. \quad (4.1)$$

Частным случаем уравнения кр. 2п является уравнение окружности (п. 3.1.1): $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где (x_0, y_0) — центр; R — радиус.

Рассмотрим теперь общее уравнение кр. 2п, в котором $A = C$, $B = 0$.

Без ограничения общности будем считать, что $A = C = 1$.

Дополним члены, содержащие x , и члены, содержащие y , до полных квадратов:

$$(x^2 + 2Dx + D^2) + (y^2 + 2Ey + E^2) = D^2 + E^2 - F \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + D)^2 + (y + E)^2 = D^2 + E^2 - F.$$

Возможны три случая:

1) $D^2 + E^2 - F > 0$ — имеем уравнение окружности, т. $C(-D, -E)$ — центр, $R = \sqrt{D^2 + E^2 - F}$;

2) $D^2 + E^2 - F = 0$ — имеем одну точку $C(-D, -E)$;

3) $D^2 + E^2 - F < 0$ — уравнение не определяет кривой.

Пример:

Уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 9 = 0$ является уравнением окружности. Путем выделения полных квадратов для членов, содержащих x , и членов, содержащих y , это уравнение приводим к виду $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$, т.е. центр данной окружности в т. $C(1, -2)$, $R = 2$.

4.2. Эллипс

О: Эллипсом называют гмт, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$. Если фокальное расстояние $|F_1F_2| = 2c$, то $2c < 2a$.

Выберем прямоугольную систему координат, чтобы $F_1F_2 \in OX$, а начало координат совпало с серединой F_1F_2 , $OY \perp F_1F_2$.

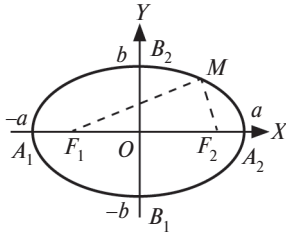


Рис. 4.1

Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ (рис. 4.1).

Выведем уравнение эллипса.

Пусть $M(x, y) \in$ эллипсу. Из определения эллипса $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Так как $\overline{F_1M} = \{x+c, y\}$, $\overline{F_2M} = \{x-c, y\}$, то

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad -$$

уравнение эллипса. Упростим его.

Перенесем второе слагаемое левой части вправо и возведем обе части в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Обе части полученного после упрощений последнего уравнения снова возводим в квадрат:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Обозначим $a^2 - c^2 = b^2$ и разделим обе части полученного уравнения на a^2b^2 , в результате получим так называемое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Исследуем форму эллипса:

— эллипс симметричен относительно осей координат, так как уравнение содержит четные степени x и y ;

— в I четверти уравнение имеет вид $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$;

— при возрастании x от 0 до a y убывает от b до 0;

— строим кривую в I четверти и симметрично продолжаем в остальные четверти (см. рис. 4.1).

Оси симметрии эллипса являются его осями, точка их пересечения — центром эллипса.

Ось, на которой расположены фокусы, называется фокальной. Числа a и b являются соответственно большей и малой полуосями эллипса, точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ — вершинами эллипса.

Форму эллипса характеризует отношение $c/a = \varepsilon < 1$, называемое эксцентриситетом эллипса. Действительно,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2, \text{ поэтому, чем меньше эксцентриситет, тем}$$

меньше вытянут эллипс вдоль фокальной оси. В предельном случае при $\varepsilon = 0$ эллипс переходит в окружность.

4.3. Гипербола

О: Гиперболой называется гмт, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$. Если фокальное расстояние $|F_1F_2| = 2c$, то $2c > 2a$.

Расположим ПСК XOY так же, как в случае эллипса. Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, и для любой т. $M(x, y)$ гиперболы согласно определению (рис. 4.2) $\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a$. Таким образом, имеем уравнение

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После аналогичных упрощений (см. п. 4.2) оно принимает вид $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

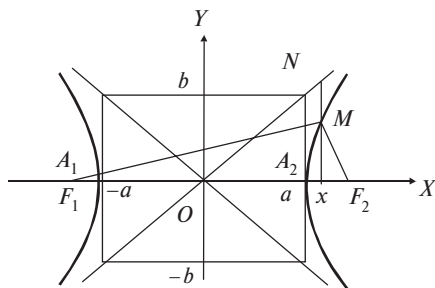


Рис. 4.2

Обозначим $c^2 - a^2 = b^2$, разделим обе части на $a^2 b^2$, тогда получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, которое называется каноническим уравнением гиперболы.

Гипербола, как и эллипс, симметрична относительно осей координат. В I четверти уравнение гиперболы имеет вид $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, т.е. при возрастании x от a до $+\infty$ возрастает от 0 до $+\infty$.

Покажем, что точки гиперболы при удалении их по графику в ∞ приближаются к прямым $y = \pm \frac{b}{a} x$, называемым асимптотами гиперболы. Для этого возьмем точки $M(x, y)$ на гиперболе и $N(x, y_1)$ на $y = \frac{b}{a} x$ (см. рис. 4.2), составим

$$y_1 - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} =$$

$$= \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Так как знаменатель дроби неограниченно увеличивается с возрастанием x , а числитель — величина постоянная, то $y_1 - y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. т. M и т. N неограниченно сближаются.

Для построения гиперболы сначала строят прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$, затем проводят его диагонали, которые совпадают с асимптотами гиперболы (см. рис. 4.2).

Числа a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы, точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ — вершина гиперболы.

Форму гиперболы характеризует эксцентриситет $c/a = \varepsilon > 1$.

Действительно, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1$, поэтому чем меньше экс-

центриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник в направлении фокальной оси.

Уравнение $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяет гиперболу с действительной полуосью b и мнимой полуосью a , вершины которой $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ находятся на оси OY .

Задача. Найти каноническое уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

◀ Для эллипса имеем $a_э = 5$, $b_э = 3$, $c_э = \sqrt{a_э^2 - b_э^2} = 4$. Тогда для гиперболы $a_г = c_э = 4$, $c_г = a_э = 5$, $b_г = \sqrt{c_г^2 - a_г^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Получаем уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ▶

4.4. Парабола

О: Параболой называется гмт, равноудаленных от т. F , называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой (т. $F \notin$ директрисе).

Расстояние от т. F до директрисы обозначим через p (параметр параболы). Для вывода канонического уравнения параболы ось OX проведем через фокус F перпендикулярно к директрисе, начало координат совместим с серединой расстояния FB от т. F до директрисы (рис. 4.3). Тогда $F(p/2, 0)$, уравнение директрисы $x = -p/2$. Если $M(x, y)$ — точка параболы, то $|FM| = |MM'|$, $MM' \perp$ директрисе. Отсюда имеем уравнение

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

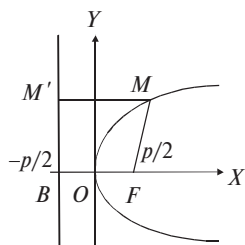


Рис. 4.3

Возведя обе части в квадрат и упрощая, приводим его к виду, который называется каноническим: $y^2 = 2px$.

Исследуем форму параболы. Так как в уравнении y содержится в четной степени, то ось OX является осью симметрии параболы, причем $x \geq 0$, и график располагается справа от оси OY . В первой четверти $y = \sqrt{2px}$, т.е. с возрастанием x от 0 до $+\infty$ ордината y возрастает от 0 до $+\infty$ (см. рис. 4.3). Точка $O(0, 0)$ называется вершиной параболы.

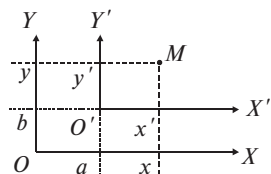
Задача. Найти каноническое уравнение параболы, проходящей через т. $M(-1, 2)$, симметричной относительно оси OX и имеющей вершину в т. $O(0, 0)$.

◀ Данная парабола должна быть расположена слева от оси OY , т.е. каноническое уравнение имеет вид $y^2 = -2px$. Подставляя в него координаты т. M , находим $p: 4 = -2p(-1) \Leftrightarrow p = 2$. Получим уравнение $y^2 = -4x$ ▶

4.5. Преобразования параллельного переноса и поворота системы координат. Упрощение уравнений кривых 2-го порядка

Иногда при решении задач удобно вместо данной системы XOY использовать другую $X'O'Y'$, определенным образом ориентированную относительно данной системы.

Пусть новая система $X'O'Y'$ получена из старой XOY **параллельным переносом** осей координат, т.е. оси новой системы параллельны осям старой и имеют одинаковое с ними направление (рис. 4.4). Пусть начало O' новой системы имеет координаты (a, b) в старой системе.



Возьмем т. M на плоскости и найдем зависимость между ее координатами (x, y) в старой системе и (x', y') в новой. Из рис. 4.4 ясно, что

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Рис. 4.4

Если уравнение кр. 2п (4.1) не содержит члена с произведением координат ($B = 0$), то с помощью параллельного переноса оно приводится к каноническому виду. Для этого необходимо в случае $A \neq 0$, $C \neq 0$ выделить полные квадраты для членов, содержащих y , и членов, содержащих x , затем для полученных полных квадратов вида $(x - a)^2$, $(y - b)^2$ обозначить через новые переменные $x' = x - a$, $y' = y - b$.

Пример:

$$2x^2 - y^2 - 4x - 4y - 6 = 0.$$

$$\blacktriangleleft 2(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) = 2 - 4 + 6 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2 - (y + 2)^2 = 4.$$

Введем новые переменные $\begin{cases} x - 1 = x', \\ y + 2 = y' \end{cases}$ и новое начало координат $O'(1, -2)$.

Тогда, разделив обе части уравнения на 4, получим каноническое уравнение гиперболы $\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{4} = 1$, действительная полуось $a = \sqrt{2}$, мнимая $b = 2$.

Построим эту гиперболу в системе координат $X'O'Y'$ (рис. 4.5) \blacktriangleright

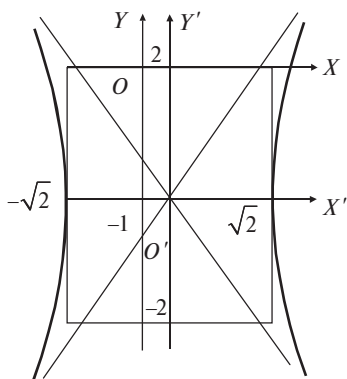


Рис. 4.5

Если $B \neq 0$ в общем уравнении кр. 2п (4.1), то первые три слагаемых образуют квадратичную форму от двух переменных

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \text{ с матрицей } P = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}.$$

Приводя ее к каноническому виду, получим $f(x,y) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, где λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы P , x', y' — новые координаты в системе $X'O'Y'$.

Пусть \vec{i}, \vec{j} — старый ортонормированный базис, \vec{i}', \vec{j}' — новый. Выразим формулы преобразования координат через угол $\varphi = (\vec{i}, \vec{i}')$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от \vec{i} к \vec{i}' . Имеем (рис. 4.6)

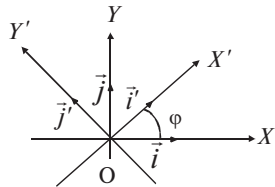


Рис. 4.6

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \\ \vec{j}' = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})\vec{j}. \end{cases}$$

Следовательно, формулы преобразования координат, которые называются **преобразованием поворота системы координат** на угол φ , запишутся в виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{cases}$$

Подставляя их в общее уравнение кр. 2п, получим уравнение, не содержащее слагаемого с произведением $xу$, затем применяем преобразование параллельного переноса.

Пример:

Привести к каноническому виду уравнение $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

◀ Квадратическая форма $f(x,y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$ имеет матрицу $\begin{Bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{Bmatrix}$, собственные значения которой $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$. Система

для определения собственных векторов $\begin{cases} (5 - \lambda)u_1 + 2u_2 = 0, \\ 2u_1 + (8 - \lambda)u_2 = 0. \end{cases}$ При $\lambda_1 = 4$ собственный вектор $\vec{a}_1 = u_2(-2, 1)$,

при $\lambda_2 = 9$ — $\vec{a}_2 = u_2(\frac{1}{2}, 1)$, ортогональный базис $(2, -1), (1, 2)$,

ортонормированный $\vec{i}' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \vec{j}' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Преобразование поворота системы координат имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases} \text{ В новой системе координат } X'O'Y'$$

квадратичная форма $f(x,y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 = 4x'^2 + 9y'^2$,
а остальные члены преобразуются к виду

$$-32x - 56y + 80 = -32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80.$$

В результате получаем уравнение

$$4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Выделяем полные квадраты

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 0.$$

Производим параллельный перенос системы координат $X'O'Y'$:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ y'' = y' - \frac{8}{\sqrt{5}}, \end{cases} \quad O'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right) \text{ — новое начало координат.}$$

Каноническое уравнение имеет вид $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$ и является

уравнением эллипса ►

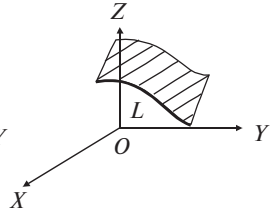
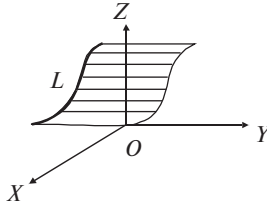
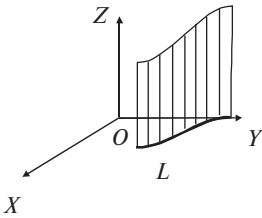
Может оказаться, что общее уравнение кр. 2п (4.1) определяет так называемую вырожденную кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых). Если же определяемая уравнением кривая является невырожденной, то это эллипс (частный случай — окружность), гипербола или парабола.

Литература: [5. С. 51–61]; [6. С. 87–107]; [7. С. 73–96].

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ: ПОВЕРХНОСТИ 2-го ПОРЯДКА

Опорный конспект № 5

5.1. Цилиндрические поверхности



Направляющая L :

образующие $\parallel OZ$

$$\begin{cases} z = 0, \\ F(x, y) = 0, \end{cases}$$

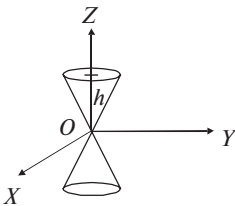
образующие $\parallel OY$

$$L: \begin{cases} y = 0, \\ F(x, z) = 0, \end{cases}$$

образующие $\parallel OX$

$$L: \begin{cases} x = 0, \\ F(y, z) = 0, \end{cases}$$

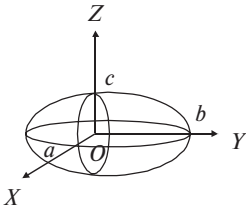
5.2. Конус 2-го порядка



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \text{ — прямые}$$

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \end{cases} \text{ — эллипсы}$$



5.3. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

В сечениях $x = h$, $y = h$, $z = h$ — эллипсы.

Частный случай — сфера:

$C(x_0, y_0, z_0)$ — центр,

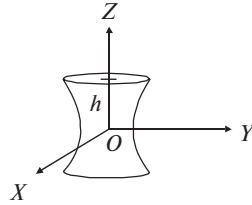
R — радиус \Rightarrow

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

5.4. Гиперboloиды

Однополостный: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

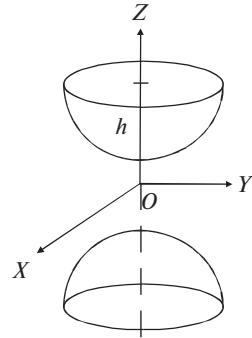
$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \text{ — гипербола}$$



$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2} \end{cases} \text{ — эллипсы}$$

Двухполостный: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \text{ — гипербола}$$

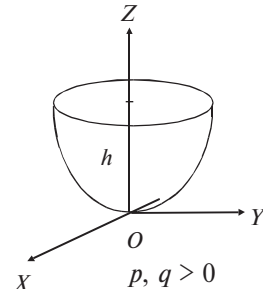


$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \end{cases} \text{ — эллипсы}$$

5.5. Параболоиды

Эллиптический: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$,

p, q — одного знака



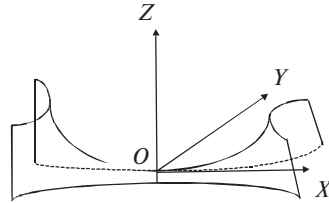
$$\begin{cases} x=0, \\ y^2 = 2qz \end{cases} \text{ — парабола, } \begin{cases} z=h, \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \end{cases} \text{ — эллипсы}$$

Гиперболический: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$

p, q — одного знака

$$\begin{cases} y=0, \\ x^2 = 2pz; \end{cases} \begin{cases} x=h, \\ y^2 = q\left(\frac{h^2}{p} - 2z\right) \end{cases} \text{ — параболы}$$

$$\begin{cases} z=h, \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \end{cases} \text{ — гиперболы}$$



5.1. Цилиндрические поверхности

О: Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная прямыми: параллельными данному направлению (образующими) и пересекающими некоторую данную линию L (направляющую) (рис.5.1).

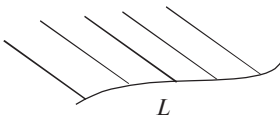


Рис. 5.1

Рассмотрим цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны осям координат, а направляющие лежат в координатных плоскостях. Направляющая задается уравнениями $L: \begin{cases} z=0, \\ F(x, y) = 0, \end{cases}$ обра-

зующие параллельны оси OZ . Найдем уравнение цилиндрической поверхности.

Пусть $M(x, y, z)$ — точка на ней, ее проекция $N(x, y, 0) \in L$, следовательно, координаты т. M удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0, \quad (5.1)$$

которое является искомым (рис.5.2).

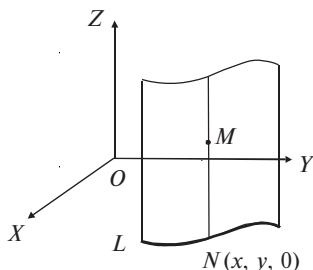


Рис. 5.2

Аналогично (5.1) уравнения $F(x, z) = 0$ и $F(y, z) = 0$ определяют цилиндрические поверхности с направляющими $\begin{cases} y = 0, \\ F(x, z) = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0, \\ F(y, z) = 0 \end{cases}$ и образующими, параллельными OY и OX соответственно.

Если в качестве направляющих берутся кривые 2-го порядка, лежащие в координатных плоскостях, то получаем цилиндрические поверхности 2-го порядка. Например, если направляющая $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то получим эллиптический цилиндр (аналогично гиперболический и параболический цилиндры).

5.2. Конус 2-го порядка

О: Конической поверхностью называется поверхность, образованная прямыми (образующими), которые проходят через данную т. P (вершину) и пересекают данную линию L (направляющую).

Конусом 2-го порядка является поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

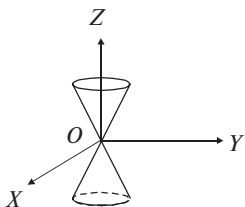


Рис. 5.3

Иследуем форму поверхности методом параллельных сечений, т.е. будем пересекать эту поверхность плоскостями, параллельными координатным. В сечении плоскостью $x = 0$ имеем пару прямых, проходящих через начало координат:

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm \frac{b}{c} z. \end{cases}$$

В сечении $z = h$ имеем эллипсы:

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2 c^2}{a^2 h^2} + \frac{y^2 c^2}{b^2 h^2} = 1. \end{cases}$$

С помощью этих сечений можно построить конус (рис. 5.3).

5.3. Эллипсоид

О: Эллипсоид — поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

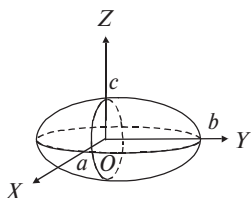


Рис. 5.4

В плоскостях $x = h$ ($|h| < a$), $y = h$ ($|h| < b$), $z = h$ ($|h| < c$) имеем эллипсы (рис. 5.4), на-

$$\text{пример: } x = h, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{h^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{h^2}{a^2})} = 1.$$

В частном случае $a = b = c = R$ получаем уравнение сферы с центром в начале координат: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Уравнение сферы с центром в т. $C(x_0, y_0, z_0)$ приводилось в п. 3.2.1.

5.4. Гиперboloиды

5.4.1. Однополостный гиперboloид

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

В сечении плоскостью $x = 0$ имеем гиперболоу $\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \end{cases}$

в сечении $z = h$ — эллипсы

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1. \end{cases} \end{cases}$$

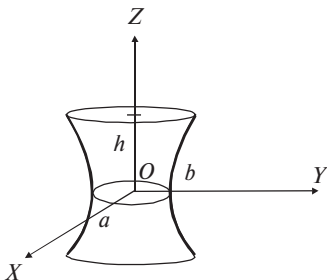


Рис. 5.5

Строим поверхность (рис.5.5).

5.4.2. Двухполостный гиперboloид

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

В сечении плоскостью $x = 0$ — гипербола $\begin{cases} x = 0, \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \end{cases}$

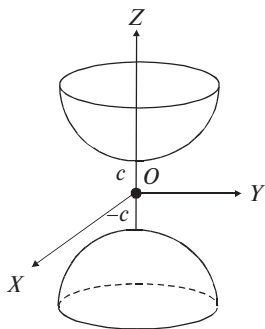


Рис. 5.6

В сечении $z = h$ ($|h| > c$) — эллипсы

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} = 1. \end{cases}$$

Получаем поверхность (рис.5.6).

5.5. Параболоиды

5.5.1. Эллиптический параболоид

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, p, q — одного знака.

В сечении плоскостью $x = 0$ имеем параболу $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 2qz. \end{cases}$

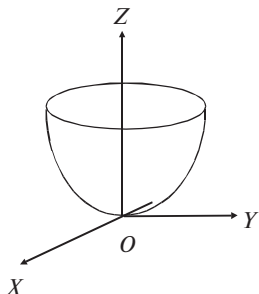


Рис. 5.7

В сечении $z = h$ — эллипсы

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \end{cases} \quad \text{где } \begin{cases} h > 0 \text{ при } p > 0, q > 0; \\ h < 0 \text{ при } p < 0, q < 0. \end{cases}$$

При $p > 0, q > 0$ поверхность имеет вид, указанный на рис. 5.7.

5.5.2. Гиперболический параболоид

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, p, q — одного знака.

В сечении плоскостью $y = 0$ имеем параболу $\begin{cases} y = 0, \\ x^2 = 2pz; \end{cases}$

сечения плоскостями $x = h$ — параболы:

$$\begin{cases} x = h, \\ \frac{y^2}{q} = \frac{h^2}{p} - 2z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2q \left(z - \frac{h^2}{2p} \right); \end{cases}$$

плоскостями $z = h$ ($h \neq 0$) — гиперболы:

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1. \end{cases}$$

Построим гиперболический параболоид для случая $p, q > 0$ (рис. 5.8). Отметим, что гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную движением параболы в плоскости $x = h$ при изменении h так, что ее вершина движется по параболе в плоскости $y = 0$.

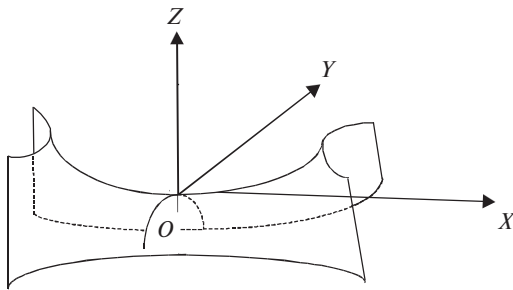


Рис. 5.8

Литература: [5. С. 72–83]; [6. С. 104–143; 159–163]; [7. С. 96–106].

Глава 2

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

6. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Опорный конспект № 6

6.1. Элементы теории множеств

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$B \subset A \Rightarrow A \setminus B = \bar{B}$$

6.2. Функции

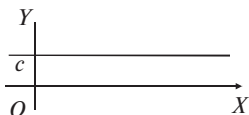
$y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y \Leftrightarrow X \rightarrow Y: \forall x \in X \exists! y \in Y$, $X = D(f)$ — область определения, $Y = E(f)$ — область значений, x — независимая переменная (аргумент), y — зависимая переменная (функция), $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$

6.3. Основные элементарные функции. Элементарные функции

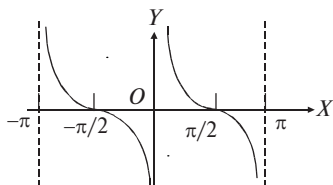
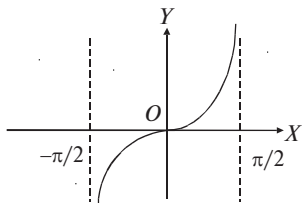
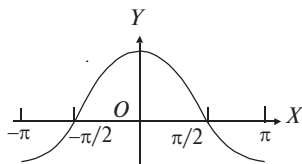
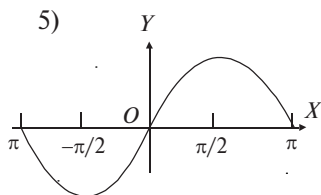
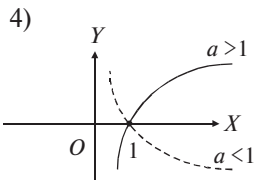
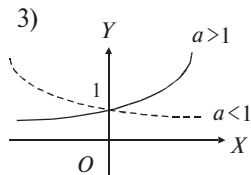
1)

1) $y = c$, $c = \text{const}$

2) $y = x^n$, $n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ — степенная, $E(f)$ зависит от n



3) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ — показательная, $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $E(f) = (0, +\infty)$



4) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ — логарифмическая, $D(f) = (0, +\infty)$, $E(f) = (-\infty, +\infty)$

5) Тригонометрические:

$y = \sin x$, $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $E(f) = [-1, +1]$

$y = \cos x$, $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $E(f) = [-1, +1]$

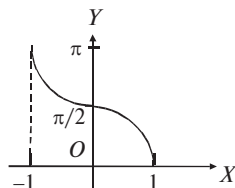
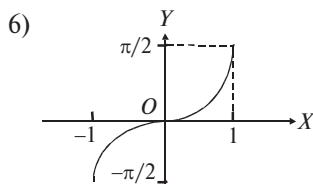
$y = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $E(f) = (-\infty, +\infty)$

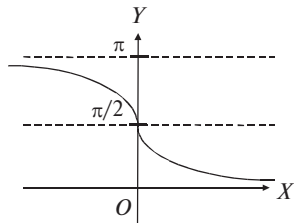
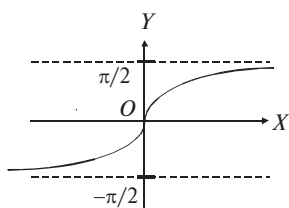
$y = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $E(f) = (-\infty, +\infty)$

6) Обратные тригонометрические:

$y = \arcsin x$, $D(f) = [-1, +1]$, гл. значение $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$y = \arccos x$, $D(f) = [-1, +1]$, гл. значение $y \in [0, \pi]$





$y = \operatorname{arctg} x$, $D(f) = (-\infty, +\infty)$, гл. значение $y \in (-\pi/2, \pi/2)$

$y = \operatorname{arccstg} x$, $D(f) = (-\infty, +\infty)$, гл. значение $y \in (0, \pi)$

Сложная функция (суперпозиция функций) $y = \varphi[\psi(x)] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = \varphi(z)$, $z = \psi(x)$, $x \in X$, $z \in Z$, $y \in Y$.

Элементарные функции (э.ф.) — записанные одной формулой, составленной из основных э.ф. с помощью символов (+), (−), (×), (:) и операции суперпозиции

6.1. Элементы теории множеств. Символика математической логики. Топология числовой прямой

Понятие множества, совокупности объектов, элементов является первоначальным, неопределяемым. Например, X — множество студентов данной аудитории, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел. Будем обозначать множества заглавными буквами X, Y, A, B ; их элементы — строчными x, y, a, b ; $x \in X$ означает, что элемент x принадлежит множеству X , $x \notin X$ — не принадлежит; $A \subset B$ — множество A состоит из части элементов множества B , т.е. является подмножеством B .

Множества A и B называют равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

О: Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих или в A , или в B ; пересечением $A \cap B$ называется множество, состоящее из элементов, входящих в A и в B ; разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется подмножество множества A элементов, не входящих в B . Если $B \subset A$, то $\bar{B} = A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A .

Примеры:

1) $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$;

2) $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$;

3) $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$;

4) $\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \{1\} = \overline{\{2, 3, 4\}}$ ►

Пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента) обозначается символом \emptyset .

Если $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ и $A_k \cap A_j = \emptyset$ (такие множества называются дизъюнктивными), то для их объединения применяется обозначение $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k$.

Подмножества любого множества A с введенными операциями \cup, \cap, \setminus образуют своеобразный математический объект — алгебру множеств, называемую **булевой алгеброй**.

Считают, что между множествами X и Y установлено соответствие (обозначение $X \rightarrow Y$), если для любого $x \in X$ указаны соответствующие ему $y \in Y$.

О: Соответствие между X и Y называется взаимно однозначным, если для любого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$ и наоборот, для любого $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$ (обозначение $X \leftrightarrow Y$).

О: Два множества X и Y называются эквивалентными, или имеющими одинаковую мощность ($X \sim Y$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел \mathbb{N} , называется счетным.

Для сокращения записи математических высказываний употребляется символика математической логики. Пусть α, β — некоторые высказывания, относительно которых можно сказать, истинны они или ложны.

Запись $\bar{\alpha}$ означает «не α », т.е. отрицание α ;

$\alpha \Rightarrow \beta$ — «из α следует β » (\Rightarrow — символ импликации);

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ — « α эквивалентно β » (\Leftrightarrow — символ эквивалентности);

$\alpha \wedge \beta$ — « α и β » (\wedge — символ конъюнкции);

$\alpha \vee \beta$ — « α или β » (\vee — символ дизъюнкции);

$\forall x \in A$ — «для любого $x \in A$ » (\forall — квантор всеобщности);

$\exists y \in B$ — «существует $y \in B$ » (\exists — квантор существования);

$\forall x \in A: \alpha$ — «для любого x из A имеет место α »;

$\exists! x \in X$ — «существует единственный x из X ».

Запишем эквивалентность X и Y , используя логическую символику:

$$X \sim Y \Leftrightarrow \forall x \in X \exists! y \in Y \wedge \forall y \in Y \exists! x \in X.$$

В дальнейшем в основном рассматривается множество действительных чисел \mathbf{R} , состоящее из рациональных и иррациональных чисел, и его подмножества.

Действительные числа изображаются точками числовой оси OX . т.е. прямой, на которой выбраны начальная точка O , положительное направление и единица масштаба. К множеству действительных чисел присоединяют два символа $-\infty, +\infty$

со свойством: $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow -\infty < x < +\infty$.

Таким образом, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Интервалы $(a, b) = \{x: a < x < b\}$, промежутки $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$, $(a, b]$, $[a, b)$ и их объединения являются подмножествами множества \mathbf{R} .

O: δ — окрестностью $U_\delta(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$ называется интервал $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, $\delta \in \mathbf{R}$. Проколотой δ -окрестностью $\dot{U}_\delta(a)$ называется множество $U_\delta(a) \setminus \{a\}$.

O: Точка $a \in A$ называется внутренней точкой множества A , если $\exists \delta > 0: U_\delta(a) \subset A$. Множество A называется открытым, если оно состоит из внутренних точек.

Пустое множество \emptyset — открытое множество.

Объединение и пересечение конечного числа открытых множеств — открытые множества.

O: Множество всех открытых множеств числовой оси называется топологией числовой прямой.

6.2. Функции. Область определения. Способы задания

O: Функцией $y = f(x)$, определенной на множестве X и принимающей значения на множестве Y , называется такое соответствие между этими множествами, при котором для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$:

$$y = f(x), x \in X, y \in Y \Leftrightarrow X \rightarrow Y: \forall x \in X \exists! y \in Y.$$

Множество $X = D(f)$ — область определения функции; $Y = E(f)$ — область значений функции; x — независимая переменная (аргумент); y — зависимая переменная (функция).

На языке геометрии функция f отображает множество X на множество Y : $X \xrightarrow{f} Y$, тогда y — образ x , x — прообраз y .

Пример: Функция $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in [0, +\infty)$.

Если каждому значению $x \in X$ соответствует несколько или бесконечно много значений $y \in Y$, то считают, что задана многозначная функция. При исследовании таких функций выбирают промежутки, где они однозначны. Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, графический, табличный.

При аналитическом способе функция задается одной или несколькими формулами, действующими на непересекающихся частях области определения.

При графическом способе функция задается кривой (графиком) в плоскости XOY , причем любая прямая, параллельная оси OY , пересекает кривую не более чем в одной точке.

Если функция задана аналитически, то ее график можно построить. Например,

функция $y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ имеет график, изображенный на рис.6.1.

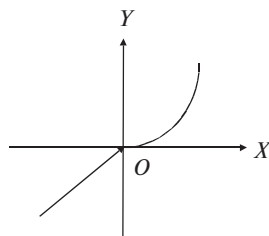


Рис. 6.1

При табличном способе задания имеется таблица значений аргумента и соответствующих значений функции.

О: Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на $[a, b]$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции: $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; убывающей на $[a, b]$, если $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Функция только возрастающая или убывающая на $[a, b]$ называется монотонной.

Например, $y = x^2$ возрастает на $[0, +\infty)$ и убывает на $(-\infty, 0]$.

О: Функция $y = f(x)$, $x \in [-a, a]$, называется четной, если $f(-x) = f(x)$, нечетной при $f(-x) = -f(x) \forall x$.

Например, $y = x^2$ — четная, $y = x^3$ — нечетная функции.

О: Функция $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется периодической с периодом $T > 0$, если $f(x + T) = f(x) \forall x$.

Например, $y = \sin x$ — периодическая с периодом 2π .

О: Функция $x = f^{-1}(y)$ называется обратной к функции $y = f(x)$, устанавливающей взаимно однозначное соответствие между $X = D(f)$ и $Y = E(f)$ ($X \xleftarrow{f} Y$), если $x = f^{-1}(y)$ выражает то же соответствие, причем $Y = D(f^{-1})$, $X = E(f^{-1})$.

Например, $x = \sqrt{y}$ обратная к $y^2 = x$ при $x \in [0, +\infty)$, $y \in [0, +\infty)$.

6.3. Основные элементарные функции. Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

- 1) постоянная $y = c$, $c = \text{const} \in \mathbf{R}$;
- 2) степенная $y = x^n$, $n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, n задано;
- 3) показательная $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 4) логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;
- 5) тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg } x$, $y = \text{ctg } x$;
- 6) обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \text{arctg } x$, $y = \text{arcctg } x$.

Области определения, значения этих функций и их графики приведены в опорном конспекте № 6.

Отметим только, что обратные тригонометрические функции являются многозначными (бесконечно значными), при действиях с ними берутся их так называемые главные значения, заключенные в указанных в опорном конспекте № 6 интервалах.

О: Сложной функцией $y = \varphi[\psi(x)]$ (или суперпозицией) называется такая функция, для которой $y = \varphi(z)$, $y \in Y$, $z \in Z$, $z = \psi(x)$, $x \in X$, $z \in Z \Rightarrow y = (\varphi \circ \psi)x$.

Например, $y = z^2$, $z = \sin x \Leftrightarrow y = \sin^2 x$.

Пользуясь понятием сложной функции, дадим определение элементарной функции.

О: Элементарной функцией называется функция, записанная одной формулой и составленная из основных элементарных функций с помощью символов четырех арифметических действий $+$, $-$, \times , $:$ и операции суперпозиции функций.

Например, $y = \frac{2^{\cos x}}{1 + \log_2 x}$ — элементарная функция.

Мы в основном будем изучать элементарные функции.

Литература: [1. С. 4–8, 18–30]; [2. С. 77–108]; [3. С. 16–28]; [5. С. 84–100, 104–125].

7. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Опорный конспект № 7

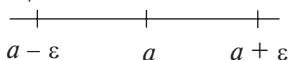
7.1. Предел последовательности

$$x_n = f(n), n \in \mathbf{N}, \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Геометрически:

$$n > N \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



7.2. Предел функции в точке

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Геометрически:



$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

7.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

$$\alpha(x) \text{ — б.м., } x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0,$$

$$f(x) \text{ — б.б., } x \rightarrow a \text{ (} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta = \delta(M): |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$
 СВЯЗЬ б.м. и б.б.: $1/0 = \infty, 1/\infty = 0$

7.4. Леммы о б.м.

Л.1: α, β, γ — б.м., $x \rightarrow a \Rightarrow$

$(\alpha + \beta - \gamma)$ — б.м., $x \rightarrow a$

Л.2: $|f(x)| < M, \alpha(x)$ — б.м., $x \rightarrow a \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)\alpha(x)$ — б.м., $x \rightarrow a$

7.5. Теоремы о пределах

Т.1: $\lim_{x \rightarrow a} c = c, c — \text{const}$

Т.2: (о связи функции с ее lim)

$f(x) = b + \alpha(x), \alpha(x)$ — б.м., $x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Т.3: $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$

Т.4: $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$

Т.5: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$

7.6. Неопределенности

$\left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \{1^\infty\}$

I замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = 1$

II замечательный предел:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \{1^\infty\} = \lim_{n \rightarrow 0} (1 + n)^{1/n} = e$

7.7. Сравнение б.м.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \alpha = o(\beta), x \rightarrow a \\ A \neq 0, \infty \Leftrightarrow \alpha, \beta — \text{одного порядка} \\ 1 \Leftrightarrow \alpha \sim \beta \\ \not\exists \Leftrightarrow \alpha, \beta — \text{несравнимы} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Т.: } & \alpha(x) \sim \alpha'(x), \beta(x) \sim \beta'(x), x \rightarrow a \Rightarrow \\ \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} \end{aligned}$$

7.1. Предел последовательности

О: Последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве \mathbf{N} натуральных чисел, т.е. $x_n = f(n)$.

Пример: $x_n = 1/n, n \in \mathbf{N}; x_n = n^2, n \in \mathbf{N}$.

О: Число a называется пределом последовательности x_n при неограниченном возрастании n ($a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N , зависящий только от ε и такой, что при $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Символическая запись определения:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Пример: Интуитивно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

◀ Докажем это, т.е. что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется $|1/n - 0| < \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $n > 1/\varepsilon$, т.е. $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon]$ ▶

Введем геометрическое истолкование определения предела последовательности, используя понятие окрестности точки.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т.е. начиная с некоторого $N(\varepsilon)$, члены последовательности находятся в ε -окрестности т. a : $U_\varepsilon(a)$.

7.2. Предел функции в точке

Введем понятие предела функции $f(x)$, когда независимая переменная x приближается к т. a .

О: Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ , зависящее только от ε , что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Символическая запись определения:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon): \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Дадим геометрическое истолкование предела функции в точке. Имеем $0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus a$, $|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, т.е. если x содержится в δ -окрестности т. a , то график функции находится в полосе между $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 7.1). Отметим, что если функция имеет предел при $x \rightarrow a$, то он единственен. Действительно, в силу определения функции при наличии двух пределов b_1 и b_2 при $x \rightarrow a$ график функции не мог бы находиться сразу внутри двух полос: $f(x) \in (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon)$, $f(x) \in (b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon)$, если $\varepsilon < (b_1 + b_2)/2$.

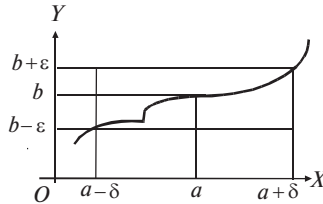


Рис. 7.1

Аналогично определению предела последовательности вводится и предел функции при $x \rightarrow \infty$.

7.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Важную роль в математическом анализе играет понятие бесконечно малых (б.м.) функций.

О: Функция $y = \alpha(x)$ называется б.м. при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Функция $y=f(x)$ называется б.б. при $x \rightarrow a$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$),

если для любого числа $M > 0$ существует такое число δ , зависящее только от M , что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| > M$.

Символическая запись определения:

$f(x)$ — б.б., $x \rightarrow a \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta = \delta(M): 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$.

Между б.м. и б.б. функциями существует тесная связь.

Т: Функция, обратная к бесконечно малой, является б.б. и наоборот: $\alpha(x)$ — б.м., $x \rightarrow a \Leftrightarrow 1/\alpha(x)$ — б.б., $x \rightarrow a$ ($\alpha(x) \neq 0$ в $\tilde{U}(a)$) ■

□ Пусть $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \rightarrow 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$. Из последнего неравенства имеем, что в той же δ -окрестности т. a : $|1/\alpha(x)| > 1/\varepsilon$.

Обозначая $1/\varepsilon = M$, по определению б.б. функции имеем: $1/\alpha(x)$ — б.б., $x \rightarrow a$. ☒

Примеры: 1) Функция $(x-1)^2$ — б.м. при $x \rightarrow 1$, а $1/(x-1)^2$ — б.б.

2) Последовательность $1/n^2$ — б.м. при $n \rightarrow \infty$, а n^2 — б.б.

7.4. Леммы о бесконечно малых

Установим важные вспомогательные теоремы.

Л.1: Алгебраическая сумма конечного числа б.м. при $x \rightarrow a$ является б.м. ◆

□ Пусть $U(x) = \alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$. Тогда для любого числа $\varepsilon/3 > 0$ найдется (по определению б.м. и предела функции) такая δ -окрестность т. a , в которой $|\alpha(x)| < \varepsilon/3$, $|\beta(x)| < \varepsilon/3$, $|\gamma(x)| < \varepsilon/3$. Используя неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$, имеем

$$\begin{aligned} |U(x)| &= |\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда по определению предела функции $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = 0$ ☒

Прежде чем сформулировать следующую лемму, дадим определение ограниченной функции.

О: Функция $y = f(x)$ называется ограниченной в окрестности т. a , если существует число $M > 0$, такое что $|f(x)| < M$ в этой окрестности ($\exists M > 0: |f(x)| < M \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$).

Отметим, что функция $f(x)$, имеющая предел при $x \rightarrow a$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$), ограничена в окрестности т. a . Действительно, в δ -окрестности т. a используем определение предела функции, имеем

$$|f(x)| = |f(x) - b + b| \leq |f(x) - b| + |b| \leq \varepsilon + |b|.$$

Обратное не верно, т.е. ограниченная функция может не иметь предела. Например, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \nexists$, хотя $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Но для монотонной последовательности $\{x_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, имеет место теорема.

Т: Ограниченная монотонно возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел. Доказательство см. в [10. С. 48]. ■

Л.2: Произведение ограниченной в окрестности т. a функции на б.м. при $x \rightarrow a$ является б.м. ◆

□ Обозначим $\beta(x) = f(x)\alpha(x)$, где $|f(x)| < M$ в окрестности т. a , $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Согласно определению предела функции для любого числа $\varepsilon/M > 0$ найдется δ -окрестность т. a , в которой $|\alpha(x)| < \varepsilon/M$. Имеем $|\beta(x)| = |f(x)||\alpha(x)| < M\varepsilon/M = \varepsilon$, откуда по определению предела функции $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$ ☒

С л е д с т в и е. Произведение конечного числа б.м. при $x \rightarrow a$ является б.м.

Следствие вытекает из леммы 2 и ограниченности функции, имеющей предел.

7.5. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы о правилах предельного перехода.

Т.1: Предел постоянной равен самой постоянной ■

Доказательство следует из определения предела функции, так как $|c - c| = 0$, если $c = \text{const}$.

Т.2: (о связи функции с ее пределом). Для того чтобы

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \text{ необходимо и достаточно выполнение равен-$$

$$\text{ства } f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ — б.м. при } x \rightarrow a \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x), \alpha(x) \text{ — б.м., } x \rightarrow a) \blacksquare$$

□ Запишем цепочку равносильных утверждений, следующих из определения предела функции и определения б.м.:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon) \Leftrightarrow f(x) - b = \alpha(x):$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x), \alpha(x) \text{ — б.м., } x \rightarrow a \quad \square$$

Т.3: Предел суммы конечного числа функций, имеющих пределы при $x \rightarrow a$, равен сумме их пределов ■

□ Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$, тогда по теореме 2 име-

ем $f_1(x) = b_1 + \alpha_1(x), f_2(x) = b_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$, следовательно, $f_1(x) + f_2(x) = (b_1 + b_2) + (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))$. Используя лемму 1 о б.м., заключаем, что $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$, и по теореме 2 получаем равенство $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x)] = b_1 + b_2 \quad \square$

Т.4: Предел произведения конечного числа функций, имеющих пределы при $x \rightarrow a$, равен произведению пределов ■

Методика доказательства аналогична доказательству Т.3.

С л е д с т в и е. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Т.5: Предел отношения двух функций, имеющих пределы при $x \rightarrow a$, равен отношению их пределов (если предел знаменателя не нуль), т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad \blacksquare$$

□ Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$, тогда, используя Т.2, аналогично доказательству Т.3 запишем

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1 + \alpha_1(x)}{b_2 + \alpha_2(x)} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2\alpha_1(x) - b_1\alpha_2(x)}{b_2^2 + b_2\alpha_2(x)},$$

где $\lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha_2(x) = 0$. Числитель последней дроби по леммам о б.м. является б.м. Покажем, что $(b_2^2 + b_2\alpha_2(x))^{-1}$ является функцией ограниченной, тогда дробь по лемме 2 о б.м. является б.м., и по Т.2: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b_1}{b_2}$.

Имеем в некоторой δ -окрестности т. a для любого $\varepsilon > 0$ вследствие справедливости $|a - b| \geq |a| - |b|$:

$$\frac{1}{b_2^2 + b_2\alpha_2(x)} \leq \frac{1}{b_2^2 - |b_2\alpha_2(x)|} < \frac{1}{b_2^2 - \varepsilon},$$

т.е. ограниченность $(b_2^2 + b_2\alpha_2(x))^{-1}$ доказана \square

7.6. Понятие о неопределенностях. I и II замечательные пределы

Основные теоремы о пределах облегчают нахождение пределов. В простейших случаях оказывается достаточным подставить в функцию предельное значение аргумента. Если же при такой подстановке получается неопределенное выражение вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \{1^\infty\}$, то нахождение предела для таких случаев называют раскрытием неопределенности.

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x + 2} = \frac{0}{4} = 0;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2.$$

Рассмотрим, как раскрываются неопределенности в так называемых I и II замечательных пределах. Предварительно сформулируем теорему о пределе промежуточной функции.

Т: Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ в окрестности т. a и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = b$, то и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ■

□ По определению предела функции для любого $\varepsilon > 0$ в некоторой δ -окрестности т. a : $|\varphi(x) - b| < \varepsilon$, $|\psi(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $|f(x) - b| \leq \min(|\varphi(x) - b|, |\psi(x) - b|) < \varepsilon$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ☒

I замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = 1$.

□ Пусть $0 < x < \pi/2$, построим в тригонометрическом круге радиусом $R = 1$ угол $x = \widehat{AOB}$ и в т. A проведем касательную до пересечения ее с радиусом OB (рис. 7.2). Очевидно, что выполняются неравенства для площадей $\triangle OAB$, сектора OAB и $\triangle OAC$: $S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектора } OAB} < S_{\triangle OAC}$.

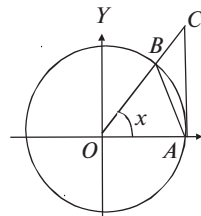


Рис. 7.2

Так как $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| \sin x = \frac{\sin x}{2}$, $S_{\text{сектора } OAB} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{x}{2}$,

$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} |OA| |AC| = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, то неравенство принимает вид

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Если $-\pi/2 < x < 0$, то в силу равенств $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x)/(-x) = (\sin x)/x$ неравенство сохраняется. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то по теореме о промежуточной функции получим доказываемое равенство. (Справедливость параллельного перехода $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ следует из непрерывности функции $y = \cos x$, см. ниже п.8.1.) ☒

Прежде чем перейти ко II замечательному пределу, введем понятие натурального логарифма.

О: Касательной к графику функции $y = f(x)$ в т. $M(x, y)$ называется прямая, занимающая предельное положение секущей MN , когда т. $N \rightarrow$ т. M по графику $y = f(x)$ (рис. 7.3).

Обозначим буквой e основание a той логарифмической функции $y = \log_a x$, для которой касательная к ее графику в т. $M(1, 0)$ образует угол $\alpha = 45^\circ$ с осью OX (рис. 7.4).

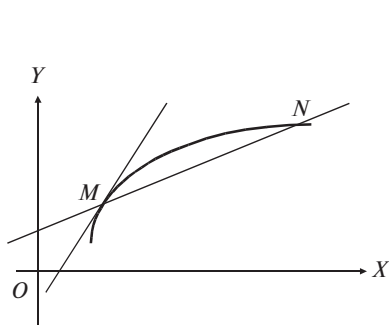


Рис. 7.3

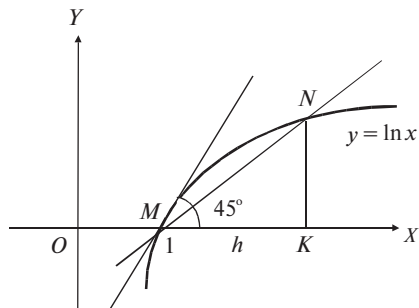


Рис. 7.4

Значение e подсчитано: оно заключено между 2 и 3 и $e \approx 2,71828\dots$ Логарифмы чисел по основанию e обозначаются $\ln x$ и называются натуральными логарифмами.

II замечательный предел: $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = \{1^\infty\} = e.$

□ Построим на графике $y = \ln x$ (рис. 7.4) секущую MN , для которой $N(1 + h, \ln(1 + h))$. Тогда $\operatorname{tg} \widehat{NMK} = \frac{\ln(1 + h)}{h}$. При $h \rightarrow 0$

$N \rightarrow M$, $\operatorname{tg} \widehat{NMK} \rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, и следовательно, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1$. Ис-

пользуем далее равенство $e^{\ln y} = y$. Тогда

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln(1+h)^{1/h}} = e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h}} = e.$$

Здесь мы применили предельный переход $\lim e^y = e^{\lim y}$, справедливость которого следует из непрерывности показательной функции (см. ниже п.8.1) ☒

Отметим, что при замене $h = 1/x$, где $x \rightarrow \infty$, получаем другую запись II замечательного предела: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \{1^\infty\} = e.$

7.7. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые

Сравним характер стремления б.м. к нулю, рассматривая их отношения.

О: Бесконечно малая $\beta(x)$ называется: а) б.м. высшего порядка малости по сравнению с б.м. $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ ($\beta = o(\alpha)$),

если
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0;$$

б) одного порядка малости с $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A \neq 0, \infty;$$

в) несравнимой с $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не существует. Б.м. $\alpha(x)$ и б.м. $\beta(x)$ называются эквивалентными

при $x \rightarrow a$ ($\alpha \sim \beta$), если
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Примеры: 1) Пусть $\alpha(n) = 1/n^3$, $\beta(n) = 1/n^2$, $n \rightarrow \infty$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(n)}{\alpha(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \text{ т.е. } \alpha = o(\beta).$$

2) Если $\alpha(x) = x^2 - x$, $\beta(x) = x$, $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 1} = -1,$$

т.е. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости.

3) Б.м. $\beta(n) = \frac{1}{n} \sin n$, $\alpha(n) = \frac{1}{n}$, $n \rightarrow \infty$, несравнимы, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(n)}{\alpha(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n \nexists.$$

Имеем $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \blacktriangleright$$

Справедливы следующие теоремы.

Т.1: Разность двух эквивалентных б.м. функций $\alpha(x) - \beta(x)$, $x \rightarrow a$ является б.м. более высокого порядка по сравнению с каждой из них ■

□ Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \quad x \rightarrow a \quad \boxtimes$$

Т.2: Если для б.м. справедливо: $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x)$, $\beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$, $x \rightarrow a$

и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$ существует, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$ ■

□ Действительно, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\tilde{\alpha}(x)} \cdot \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)} \cdot \frac{\tilde{\beta}(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \boxtimes$$

Т.3: Сумма конечного числа б.м. различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка малости ■

□ Пусть в сумме б.м. $\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)$ при $x \rightarrow a$ слагаемое $\alpha(x)$ низшего порядка, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 \quad \boxtimes$$

Теоремы применяются при нахождении пределов.

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \operatorname{arctg} x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0 \\ \operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot x} = 1.$$

Литература: [4. С. 40–97]; [5. С. 125–147]; [10. С. 34–122]; [16. С. 69–84].

8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Опорный конспект № 8

8.1. Определения непрерывности

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение $f(x)$ в точке x_0

О.1: $f(x)$ непрерывна в т. $x_0 \Leftrightarrow$

1) $f(x)$ определена в т. x_0 и ее окрестности,

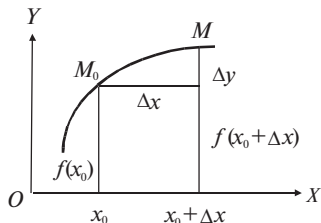
2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

О.2: В О.1 вместо 2)

условие 2') $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

О.1 ~ О.2

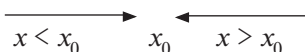
($x_0 + \Delta x = x$)



8.2. Точки разрыва (т.р.) — точки, в которых нарушается опр. непрерывности

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ — \lim слева, $x < x_0$;

$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ — \lim справа, $x > x_0$;

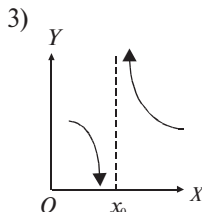
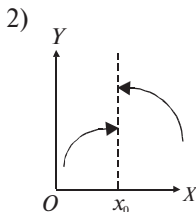
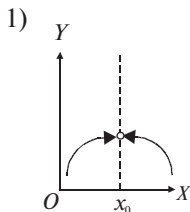


Классификация т.р.:

1) устранимая т.р.: $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, но $f(x_0) \neq$;

2) т.р. 1-го рода: $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$;

3) т.р. 2-го рода — остальные т.р.



8.3. Свойства функций, непрерывных в т. x_0

1⁰. $\varphi(x), \psi(x)$ — непрерывны в т. x_0

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x), \\ \varphi(x) \cdot \psi(x), \\ \varphi(x)/\psi(x), \psi(x) \neq 0, \end{cases} \quad \text{— непрерывны в т. } x_0$$

2⁰. $y = \varphi(z)$ непрерывна в т. z_0 , $z = \psi(x)$ непрерывна в т. x_0 ,

$z_0 = \psi(x_0) \Rightarrow \varphi[\psi(x)]$ непрерывна в т. x_0

Следствие. Элементарные функции непрерывны в областях определения.

8.4. Свойства функций, непрерывных на $[a, b]$

(множество $C_{[a,b]}$)

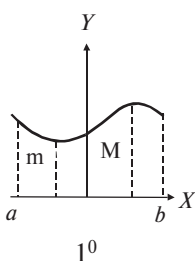
m — наименьшее, M — наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$

$\Leftrightarrow m \leq f(x) \leq M$

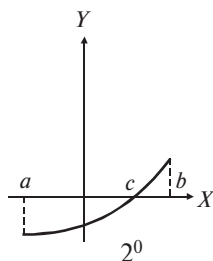
1⁰. $f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a, b]: f(x_1) = m, f(x_2) = M$

2⁰. $f(x) \in C_{[a,b]}, f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b]: f(c) = 0$.

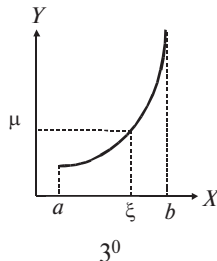
3⁰. $f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow \forall \mu$ между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \mu$



1⁰



2⁰



3⁰

8.1. Определения непрерывности

Пусть функция $y = f(x)$ определена в т. x_0 и ее окрестности: $y_0 = f(x_0)$. Если аргумент x получит приращение Δx в т. x_0 , т.е. $x = x_0 + \Delta x$ — новое значение, то и функция получит приращение Δy . Новое значение функции будет $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, а приращение функции в т. x_0 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 8.1).

О.1: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в т. x_0 , если:

1) она определена в т. x_0 и ее окрестности;

2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

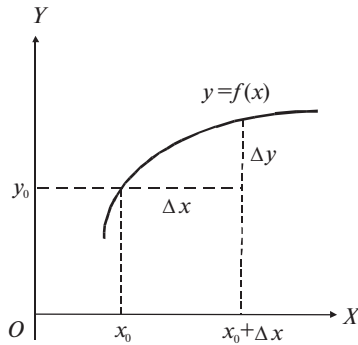


Рис. 8.1

Пользуясь данным определением, можно доказать, что все основные элементарные функции непрерывны в точках, в которых они определены.

Например, $y = x^2$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, так как

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 0.$$

О.2: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в т. x_0 , если:

1) она определена в т. x_0 и ее окрестности;

$$2') \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Таким образом, О.2 отличается от О.1 пунктом 2). Эквивалентность О.1 и О.2 (пунктов 2) следует из $x = x_0 + \Delta x$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0.$$

Условие 2') можно записать иначе. Поскольку $f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, что дает возможность переходить к пределу под знаком непрерывной функции.

О: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве X , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Множество функций, непрерывных на X , объединяют в класс и обозначают $C[X]$ (или $C^0[X]$).

8.2. Точки разрыва

О: Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если функция не является непрерывной в т. x_0 .

Для классификации точек разрыва введем определения односторонних пределов.

О: Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, если $x \rightarrow x_0$, оставаясь меньше x_0 , называется левосторонним пределом и обозначается

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$. Предел при $x \rightarrow x_0$, $x > x_0$, называется

правосторонним пределом и обозначается

$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Очевидно, что в определениях непрерывности условия п. 2) и п. 2') эквивалентны условию

$$2'') f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Классификация точек разрыва:

1) x_0 — устранимая т.р. $\Leftrightarrow \exists f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ и они конечны, но $f(x_0) \neq$.

Например $y = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, но $f(x_0) \neq$

(рис. 8.2); другая функция $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна в т. $x_0 = 0$.

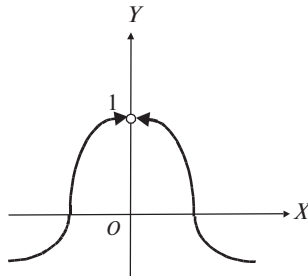


Рис. 8.2

2) x_0 — т.р. 1-го рода: $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ — конечны, но $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$.

Например, $f(x) = |x|/x, x_0 = 0, f(x_0 + 0) = 1, f(x_0 - 0) = -1$ (рис.8.3).

3) x_0 — т.р. 2-го рода: все остальные т.р., в частности, точки бесконечного разрыва. Например, $y = 1/x, x_0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ (рис.8.4).

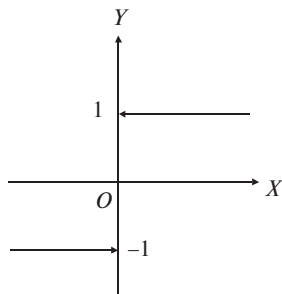


Рис. 8.3

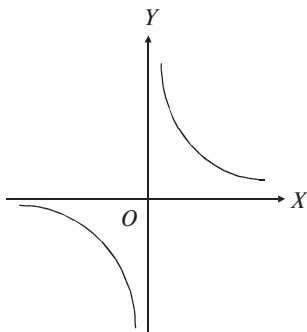


Рис. 8.4

8.3. Свойства функций, непрерывных в т. x_0

1⁰. Непрерывность суммы, произведения, частного непрерывных в т. x_0 функций: если $\varphi(x), \psi(x)$ непрерывны в т. x_0 , то функции $\varphi(x) + \psi(x), \varphi(x) \cdot \psi(x), \varphi(x)/\psi(x)$ при $\psi(x) \neq 0$ непрерывны в т. x_0 .

Доказательство проводится с помощью определения непрерывности и основных теорем о пределах. Например,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\varphi(x) + \psi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \varphi(x_0) + \psi(x_0).$$

2⁰. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций: если функция $y = \varphi(z)$ непрерывна в т. z_0 , а $z = \psi(x)$ непрерывна в т. x_0 , причем $z_0 = \psi(x_0)$, то сложная функция $\varphi(\psi(x))$ непрерывна в т. x_0 .

□ Так как согласно О.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = z_0, \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(\psi(x)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) = \varphi(\psi(x_0))$, и имеем непрерывность $\varphi(\psi(x))$ в т. x_0

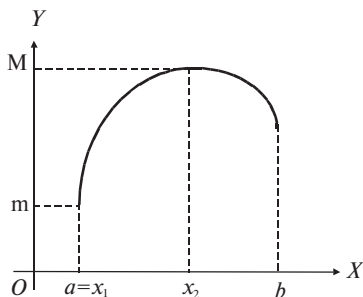


Рис. 8.5

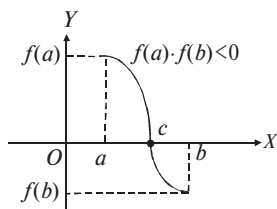


Рис. 8.6

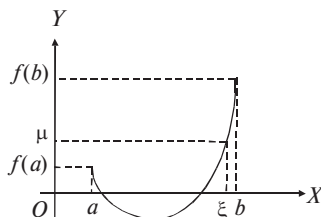


Рис. 8.7

С л е д с т в и е. Элементарные функции непрерывны в своих областях определения.

8.4. Свойства функций, непрерывных на $[a, b]$

Определим непрерывность $f(x)$ на концах промежутка $[a, b]$ следующим образом: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$. Обозначим

множество функций, непрерывных на $[a, b]$, через $C_{[a, b]}$. Это множество обладает следующими свойствами.

1⁰. Если функция $f(x) \in C_{[a, b]}$, то она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений ($m \leq f(x) \leq M$).

Свойство означает, что найдутся такие $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = m, f(x_2) = M$. Оно наглядно иллюстрируется на рис. 8.5. Дозакательства свойства не приводим.

С л е д с т в и е. Непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена на $[a, b]$.

2⁰. Если функция $f(x) \in C_{[a, b]}$ и на концах $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то \exists т. $c \in [a, b]$, в которой $f(c) = 0$ (рис. 8.6). Геометрически ясно, что график функции должен хотя бы раз пересечь ось OX .

3⁰. Если $f(x) \in C_{[a, b]}$, $f(a) \neq f(b)$, то для любого числа μ между $f(a)$ и $f(b)$ найдется т. $\xi \in (a, b)$, в которой $f(\xi) = \mu$. Геометрически свойство является очевидным (рис. 8.7).

Таким образом, непрерывная функция на $[a, b]$ принимает все свои промежуточные значения.

Литература: [3. С. 54–60]; [4. С. 98–136]; [5. С. 148–159]; [7. С. 86–127].

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

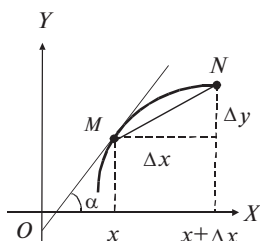
9. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Опорный конспект № 9

9.1. Определение производной, ее физический смысл

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$s = s(t)$ — закон неравномерного прямолинейного движения \Rightarrow скорость $v = s'(t)$



9.2. Геометрический смысл y'

$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$ — угловой коэффициент касательной в т. $M(x, y)$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ — касательная в т. $M_0(x_0, y_0)$

9.3. Существование производной и непрерывность

$\exists f'(x) \Rightarrow f(x)$ — непрерывна

9.4. Свойства операции дифференцирования

- 1) $(c)' = 0, c = \text{const}$;
- 2) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;
- 3) $(uv)' = u'v + uv', (cu)' = cu'$;
- 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, v \neq 0$

9.5. Производная сложной функции

$$(\varphi[\psi(x)])' = \varphi'[\psi(x)]\psi'(x)$$

Логарифмическая производная $(\ln y)' = y'/y$

Производная показательной-степенной функции:

$$[u(x)^{v(x)}]' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$$

9.6. Производные основных элементарных функций

$$(x^n)' = nx^{n-1}, (a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln x)' = 1/x,$$

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x, (\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

9.7. Дифференциал

$dy = f'(x)dx$ или $dy = f'(x)dx$, где $dx = \Delta x$ — обозначение

$dy \sim \Delta y, \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$

Свойства дифференциала:

1⁰. $dc = 0, c = \text{const}$;

2⁰. $d(u + v) = du + dv$;

3⁰. $d(uv) = vdu + udv$;

4⁰. $d(cu) = cdu$;

5⁰. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0$;

6⁰. $d\varphi[\psi(x)] = \varphi'[\psi(x)]d\psi(x)$ — инвариантность формы dy

9.8. Производные и дифференциалы высших порядков

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad d^n y = d[d^{n-1}y] = f^{(n)}(x)dx^n$$

9.9. Производные параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad y''_x = \frac{(y'_x)'}{x'(t)}$$

9.1. Определение производной, ее физический смысл

Рассмотрим задачу об определении скорости движения точки. Пусть материальная точка совершает неравномерное прямолинейное движение по закону $s = s(t)$, где t обозначено время, s — путь. Средняя скорость движения за время Δt будет

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt , тем точнее $v_{\text{ср}}$ будет характеризовать скорость в момент времени t , поэтому скорость в момент времени t называют

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (9.1)$$

Перейдем теперь к основному понятию высшей математики — понятию производной.

О: Пусть $f(x)$ определена в окрестности т. х. Тогда, если

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \neq \infty, \text{ то он называется про-}$$

изводной функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$. Операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

Другие обозначения производной: y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$.

О: Функцию, имеющую производную в каждой точке интервала (a, b) , называют дифференцируемой на интервале (a, b) .

Сравнивая формулу (9.1) скорости движения точки и определение производной, получаем физический смысл производной:

$$v(t) = s'(t),$$

т.е. скорость прямолинейного неравномерного движения равна производной от пути по времени.

Примеры: Пользуясь определением, найти производную функций: 1) $y = \log_a x$, 2) $y = 1/x$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft 1) y' = (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \\ &= \log_a \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \right) = \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Используя II замечательный предел для выражения в квадратных скобках, получаем $(\log_a x)' = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = 1/x$.

$$\begin{aligned} 2) y' = (1/x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - \Delta x - x}{\Delta x \cdot x(x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2} \blacktriangleright \end{aligned}$$

9.2. Геометрический смысл производной

Пусть график непрерывной функции $y = f(x)$ имеет касательную в т. $M(x, y)$, образующую угол $\alpha \neq \pi/2$ с осью OX (рис. 9.1). Проведем секущую MN , где $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Тогда

$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \widehat{NMR} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($MR \parallel OX$). В силу непрерывности $y = f(x)$ при

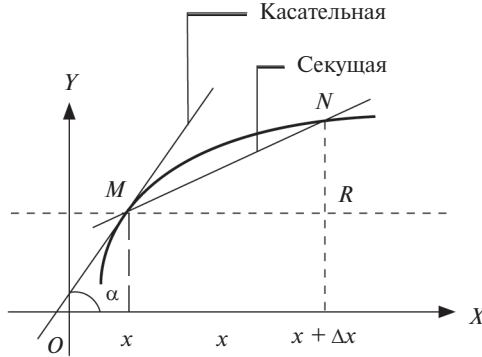


Рис. 9.1

$\Delta x \rightarrow 0$: $\Delta y \rightarrow 0$ и $M \rightarrow N$ по графику. При этом секущая MN приближается к касательной и $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$.

Получаем формулу

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, производная функции $f(x)$ в т. x равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x . Найдем уравнение касательной и уравнение нормали (прямой, перпендикулярной к касательной) в т. $M_0(x_0, y_0)$. Так как уравнение пучка прямых, проходящих через т. M_0 , имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, то уравнение касательной запишется как $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, а уравнение нормали в силу условия перпендикулярности:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример: Найти уравнение касательной и нормали к графику $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = e$.

◀ Так как $y' = (\ln x)' = 1/x$, $y'(e) = 1/e$, $y(e) = 1$, то уравнение касательной $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, уравнение нормали $y - 1 = -e(x - e)$ ▶

9.3. Существование производной и непрерывность

Т: Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в т. x , то она непрерывна в этой точке ■

□ Докажем выполнение условия 2) из О.1 (п. 8.1):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0 \quad \square$$

С л е д с т в и е. В точке разрыва функция не может иметь производную. Обратное к теореме утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции $f(x)$ в т. x не следует существование производной в т. x . Например, $y = |x|$ непрерывна в т. $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке с абсциссой $x = 0$ и функция не дифференцируема в т. $x = 0$ (рис. 9.2).

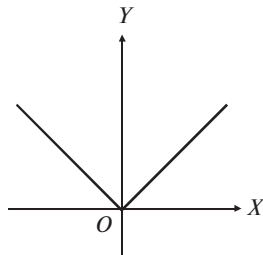


Рис. 9.2

9.4. Свойства операции дифференцирования

Установим правила для нахождения производной суммы, произведения, частного:

1) $c = \text{const}$, $(c)' = 0$ следует из определения производной;

2) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

□ Обозначим $y = u + v - w$, тогда $\Delta y = [(u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)] - (u + v - w) = \Delta u + \Delta v - \Delta w$. Используя определение производной и теоремы о пределах, имеем

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v - \Delta w}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v' - w' \quad \square \end{aligned}$$

3) $(uv)' = u'v + v'u$. Доказательство аналогично 2).

С л е д с т в и е. $(cu)' = c(u)'$, если $c = \text{const}$;

$$4) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

□ Обозначим $y = \frac{u}{v}$, тогда $\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - \Delta v \cdot u}{v(v + \Delta v)}$.

По определению производной, используя теоремы о пределах и непрерывность дифференцируемой функции, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v)} = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} \quad \square$$

9.5. Производная сложной функции. Логарифмическая производная

Т: Если функция $y = \varphi(z)$ дифференцируема в т. z , а $z = \psi(x)$ дифференцируема в т. x , то функция $y = \varphi[\psi(x)]$ дифференцируема в т. x и $y' = \varphi'[\psi(x)]\psi'(x)$ или $y' = \varphi'_z z'_x$ ■

□ По определению производной, используя теорему о пределе произведения, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

В силу непрерывности дифференцируемой функции при $\Delta x \rightarrow 0$ по определению непрерывности О.1 приращение $\Delta z \rightarrow 0$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi'[\psi(x)] \cdot \psi'(x) \quad \square$$

Пример: $y = \sin z$, $z = x^2 + e^x$.

$$\blacktriangleleft y' = (\sin z)'(x^2 + e^x)' = \cos z \cdot (2x + e^x). \blacktriangleright$$

Если при $\Delta x \rightarrow 0$ в некоторых точках $\Delta z = 0$, то теорема остается верной [3. С. 82].

Частным случаем полученной формулы является так называемая логарифмическая производная $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$, $y \neq 0$.

С помощью логарифмического дифференцирования получим производные степенной и показательной функций:

а) $y = x^n$, $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$;

□ Действительно, пусть $x > 0$, тогда $(\ln y)' = (n \ln x)'$, т.е.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = y \cdot n \frac{1}{x} = x^n \cdot n \frac{1}{x} = nx^{n-1} \quad (\text{формула сохраняется и}$$

при $x < 0$, если $\exists x^n)$ □

б) $y = a^x$, $y' = (a^x)' = a^x \ln a$

□ Действительно, $(\ln y)' = (x \ln a)'$, т.е. $y'/y = \ln a \Leftrightarrow y' = y \ln a = a^x \ln a$ (в частности, $(e^x)' = e^x$ □)

Выведем тем же методом формулу для вычисления производной показательной-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, основание и показатель степени которой являются функциями от x . Возьмем логарифмическую производную от обеих частей: $(\ln y)' = (v(x) \ln u(x))' \Leftrightarrow y'/y = v'(x) \ln u(x) + v(x) u'(x)/u(x) \Leftrightarrow y' = u(x)^{v(x)} (v'(x) \ln u(x) + v(x) u'(x)/u(x)) \Leftrightarrow y' = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x)$.

Примеры: 1) $(2^{x/\ln x})' = 2^{x/\ln x} \ln 2 \cdot (x/\ln x)' =$
 $= 2^{x/\ln x} \ln 2 \frac{1 \cdot \ln x - x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 2^{x/\ln x} \ln 2 \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},$

2) $[(x^2 + 1)^{\log_2 x}]' = (x^2 + 1)^{\log_2 x} \ln(x^2 + 1) (\log_2 x)' +$
 $+ \log_2 x \cdot (x^2 + 1)^{\log_2 x - 1} (x^2 + 1)' =$
 $= (x^2 + 1)^{\log_2 x} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x \ln 2} + 2x \log_2 x \cdot (x^2 + 1)^{\log_2 x - 1}.$

9.6. Производные основных элементарных функций

Производные степенной, показательной, логарифмических функций получены в пп. 9.1 и 9.5.

Производные тригонометрических функций $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$.

Производную $y = \sin x$ найдем с помощью определения производной и I замечательного предела:

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Производная $y = \cos x$ находится с помощью формул приведения и производной функции: $y' = (\cos x)' = (\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) \cdot 1 = -\sin x$.

Производные $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ могут быть найдены как производные частного. Например,

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производные обратных тригонометрических функций:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Т: Пусть функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на $[a, b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, дифференцируема внутри промежутка и $f'(x) \neq 0$. Тогда существует возрастающая (убывающая) на $[\alpha, \beta]$ дифференцируемая обратная к $f(x)$ функция $x=f^{-1}(y)$, причем $[f^{-1}(y)]' = 1/f'(x)$ ■

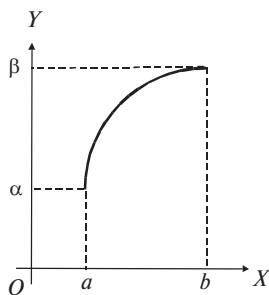


Рис. 9.3

□ Первая часть теоремы о существовании непрерывной функции $x=f^{-1}(y)$ геометрически очевидна (рис.9.3).

Выведем формулу для производной. По определению

$$\begin{aligned}
 [f^{-1}(y)]' &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \\
 &= \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)} \quad \square
 \end{aligned}$$

В цепочке равенств использовали $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x \rightarrow 0$ ($x=f^{-1}(y)$ — непрерывна).

Получим теперь формулу для производной функции $y = \arcsin x$. Рассмотрим главное значение функции: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Она является обратной к $x = \sin y$, которая возрастает и дифференцируема на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, причем $x' = (\sin y)' = \cos y \neq 0$. По теореме об обратной функции имеем

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Найдем формулу для производной $y = \text{arctg } x$, главное значение которой $y \in (-\pi/2; \pi/2)$. Пользуясь теоремой об обратной функции, получаем

$$y'_x = (\text{arctg } x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\text{tg } y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Для функций $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arccot} x$ производим аналогичные действия.

9.7. Дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в т. x , т.е. существует $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ в т. x . По Т.2 (п. 7.5) о связи функции с ее пределом $\Delta y / \Delta x = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) — б.м., \Delta x \rightarrow 0$ или $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

Первое слагаемое одного порядка малости, а второе имеет более высокий порядок малости по сравнению с Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0$. Приращение функции Δy является эквивалентным слагаемому $f'(x)\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

О: Дифференциалом функции $y = f(x)$ в т. x называется главная часть приращения функции, линейная относительно Δx , т.е. $dy = f'(x)\Delta x$.

Найдем dy для функции $y = x$: $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Таким образом, если положить $dx = \Delta x$, то это не противоречит определению дифференциала. Получаем формулу $dy = f'(x)dx$, откуда для производной функции получаем $f'(x) = dy/dx$.

Пример: $y = \ln \sin x$.

$$\blacktriangleleft dy = \frac{1}{\sin x} \cos x \cdot dx = \operatorname{ctg} x \cdot dx \blacktriangleright$$

Эквивалентность dy и Δy при $\Delta x \rightarrow 0$ используют в приближенных вычислениях.

Пусть известно значение функции в точке x и необходимо найти значение в точке $x + \Delta x$, близкой к т. x .

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$ при малых Δx , то справедлива приближенная формула $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Пример: Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1,1}$.

◀ В этом случае $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 0,1$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$,

т.е. $\sqrt[3]{1,1} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot 0,1 = 1 + \frac{0,1}{3} = 1,033$ ▶

Свойства дифференциала:

1⁰. $d(c) = 0$, $c = \text{const}$;

2⁰. $d(u + v) = du + dv$;

3⁰. $d(u \cdot v) = vdu + udv$;

4⁰. $d(cu) = cdu$, $c = \text{const}$;

5⁰. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$;

6⁰. $d[\varphi(\psi(x))] = \varphi'[\psi(x)] \cdot d\psi(x)$.

Свойства 1⁰–5⁰ доказываются с помощью определения дифференциала и основных правил дифференцирования. Например,

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + udv.$$

Свойство 6⁰ называется инвариантностью формы дифференциала. Форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.

Действительно, по определению дифференциала и производной сложной функции

$$dy = (\varphi[\psi(x)])'dx = \varphi'[\psi(x)] \cdot \psi'(x)dx = \varphi'[\psi(x)] \cdot d\psi(x).$$

9.8. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть производная $f'(x)$ также является дифференцируемой функцией, тогда можно найти $(f'(x))'$.

|| **О:** Производной второго порядка называется производная от производной: $y'' = (f'(x))'$.

Производной n -го порядка называется производная от производной $(n - 1)$ -го порядка: $y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$.

Пример: $y = (2x + 3)^5$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft y' &= 5(2x + 3)^4 \cdot 2 = 10(2x + 3)^4, y'' = 10 \cdot 4(2x + 3)^3 \cdot 2 = \\ &= 80(2x + 3)^3, y''' = 80 \cdot 3(2x + 3)^2 \cdot 2 = 480(2x + 3)^2, \\ y^{(4)} &= 480 \cdot 2(2x + 3) \cdot 2 = 1920(2x + 3), y^{(5)} = 3840 \blacktriangleright \end{aligned}$$

Физический смысл производной второго порядка

Пусть $s = s(t)$ — закон неравномерного прямолинейного движения. Скорость в момент времени вычисляется как $v(t) = s'(t)$.

Среднее ускорение за время Δt равно $w_{\text{cp}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = w(t)$

называется ускорением в момент времени t . Используя определение производных первого и второго порядков, получим формулу

$$w(t) = v'(t) = s''(t).$$

Дифференциал $dy = f'(x)dx$ является функцией от x . Если она дифференцируема, то можно найти $d(dy)$.

О: Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала: $d^2y = d(dy)$. Дифференциалом n -го порядка называется дифференциал от дифференциала $(n - 1)$ -го порядка: $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Найдем выражение d^2y через $f''(x)$: $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)dx) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)dx^2$.

Таким образом, $d^2y = f''(x)dx^2$ и $f'(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично устанавливается справедливость формулы $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Следовательно, $f^{(n)}x = \frac{d^n y}{dx^n}$.

9.9. Производные параметрически заданной функции

Часто, особенно в механике, рассматривается так называемый параметрический способ задания функций и линий на плоскости, при котором координаты x и y рассматриваются как функции третьей переменной — параметра t :

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Например, $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$, являются параметрически-

ми уравнениями эллипса (рис. 9.4). Действительно, находим

$$\begin{cases} \cos t = \frac{x}{a}, \\ \sin t = \frac{y}{b} \end{cases} \text{ и, возводя в квадрат и складывая, получаем } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

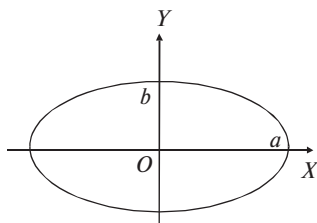


Рис. 9.4

Часто в таких случаях исключение параметра t практически невозможно. Поэтому выведем формулы для вычисления производных параметрически заданных функций.

Найдем y'_x : $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Полученная производная является функцией от t , поэтому

$$y''_{x^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t dt}{x'(t)dt} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)}.$$

Таким образом, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$; $y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Пример: Найдем y'_x , y''_{x^2} от функции $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$

$$\blacktriangleleft y'_x = \frac{(b \sin t)'_t}{(a \cos t)'_t} = \frac{b \cos t}{a - \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t,$$

$$y''_{x_2} = \frac{\left(-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t\right)'}{(a \cos t)'} = \frac{b \frac{1}{\sin^2 t}}{a^2 - \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t} \blacktriangleright$$

Литература: [3. С. 66–123]; [4. С. 137–163]; [5. С. 160–180; 201–204]; [7. С. 127–155]; [16. С. 104–125].

10. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

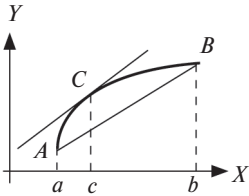
Опорный конспект № 10

10.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Т. Лагранжа:

$f(x) \in C_{[a, b]}, \exists f'(x) \forall x \in (a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b):$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Геометрическое истолкование:

$$k_{\text{кас. в т. C}} = k_{AB}$$

Т. Коши: $f(x), g(x) \in C_{[a, b]}, \exists f'(x), g'(x) \forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b):$

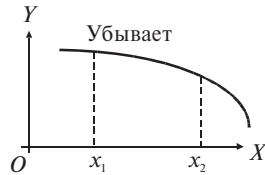
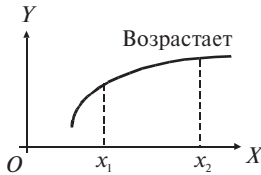
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

10.2. Правило Лопиталья

Выполняются условия теоремы Коши в окрестности т. $a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \infty \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ 0 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

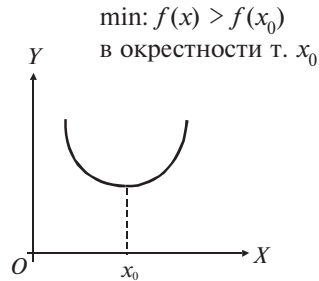
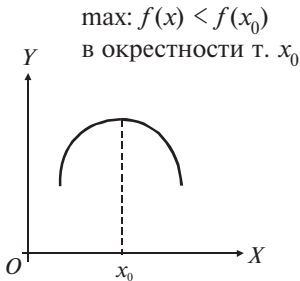
10.3. Монотонность



Достаточный признак:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 \text{ на } (a, b) \Rightarrow f(x) \nearrow, \\ < 0 \text{ на } (a, b) \Rightarrow f(x) \searrow \end{cases}$$

10.4. Экстремумы (э.)



x_0 — подозрительная на э. $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \vee \exists$

Достаточный признак э. I:

$f(x) \in C_{[a, b]}$, $x_0 \in (a, b)$ — подозрительная на э.,

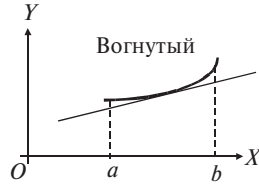
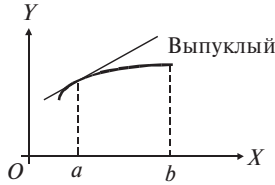
$$f'(x): \begin{array}{c} + \\ \hline - \quad | \quad + \\ x_0 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow f(x_0) = y_{\max} \\ \Rightarrow f(x_0) = y_{\min} \end{array}$$

10.5. Достаточный признак экстремума, использующий вторую производную

Достаточный признак э. II: $f'(x_0) = 0$,

$$f''(x_0) \begin{cases} < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — т. max,} \\ > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — т. min} \end{cases}$$

10.6. Выпуклость, вогнутость



Достаточный признак:

$$f''(x) \begin{cases} < 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow \cap \\ > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow \cup \end{cases}$$

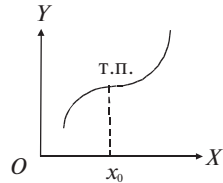
10.7. Точки перегиба (т.п.)

т. x_0 — подозрительная на перегиб \Rightarrow

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \nabla \neq \emptyset$$

Достаточный признак: $f(x) \in C_{[a, b]}$,

$x_0 \in (a, b)$ — подозрительная на перегиб,



$$f''(x): \begin{array}{c} + \\ - \quad \quad \quad - \\ \hline - \quad \quad \quad + \\ \quad \quad \quad x_0 \quad \quad \quad \end{array} \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ — т.п.}$$

10.8. Асимптоты

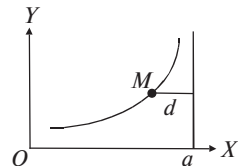
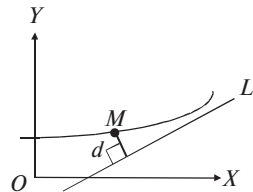
Асимптота \Leftrightarrow прямая $L: d(M, L) \rightarrow 0$
при $M \rightarrow \infty$ по графику.

Вертикальная асимптота: $x = a$. Необходимое и достаточное условие

$$\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \infty$$

Наклонная асимптота: $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow a \pm 0} [f(x) - kx]$$



10.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

10.1.1. Теорема Ферма

Пусть функция $f(x) \in C_{[a, b]}$, $\exists f'(c)$, $f(c) = M$ или $f(c) = m$ в т. $c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$ ■

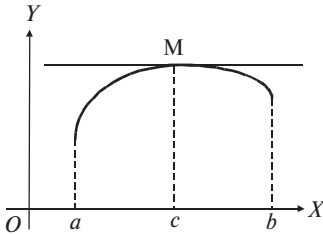


Рис. 10.1

□ Предположим для определенности, что $f(c) = M$ (рис.10.1), тогда $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$ при $\Delta x \gtrless 0$ и

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \begin{cases} > 0, \Delta x < 0, \\ < 0, \Delta x > 0. \end{cases}$$

По определению производной имеем

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{cases} \geq 0, \Delta x < 0, \\ \leq 0, \Delta x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(c) = 0 \quad \boxtimes$$

Геометрическое истолкование теоремы следует из геометрического смысла производной: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$ параллельна оси OX .

10.1.2. Теорема Ролля

Пусть функция $f(x) \in C_{[a, b]}$, $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$, $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$: $f'(c) = 0$ ■

□ Из условия $f(x) \in C_{[a, b]}$ следует по свойству 1^0 непрерывных на $[a, b]$ функций, что $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$: $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

Имеем две возможности:

1) $m = M \Rightarrow f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$;

2) $m < M \Rightarrow x_1 \in (a, b) \vee x_2 \in (a, b)$ в силу $f(a) = f(b)$.

Пусть $x_1 \in (a, b)$, тогда по теореме Ферма $f'(x_1) = 0$ □

Теорема имеет такое же геометрическое истолкование, как и теорема Ферма.

10.1.3. Теорема Лагранжа

Пусть функция $f(x) \in C_{[a, b]}$, $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \blacksquare$$

□ Введем на $[a, b]$ вспомогательную функцию $F(x) = f(x) + \lambda x$, для которой выполняются условия теоремы Ролля: $F(a) = F(b)$ или $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \Rightarrow \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Тогда $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$.

По т. Ролля $\exists c \in (a, b)$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \boxtimes$$

Геометрическое истолкование теоремы Лагранжа. Построим график функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ (рис.10.2), $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. Угловой коэффициент хорды AB : $k_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, угловой коэффициент касательной в т. C : $k_{\text{кас}} = f'(c)$. Таким образом, на графике функции $y = f(x) \exists C(c, f(c))$, $c \in (a, b)$: $k_{\text{кас}} = k_{AB}$.

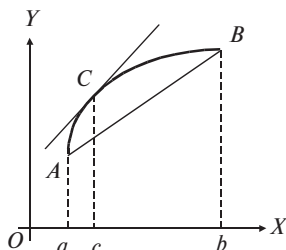


Рис. 10.2

10.1.4. Теорема Коши

Пусть функции $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$, $\exists f'(x), g'(x) \forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a, b)$: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ ■

В формуле $g(b) \neq g(a)$. В противном случае по теореме Ролля $\exists c \in (a, b)$: $g'(c) = 0$.

□ Введем $\Phi(x) = f(x) + \lambda g(x)$. Подберем λ так, чтобы $\Phi(a) = \Phi(b)$: $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \Rightarrow f(b) - f(a) = -\lambda(g(b) - g(a)) \Rightarrow \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Тогда $\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$. По теоре-

ме Ролля $\exists c$: $\Phi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \boxtimes$$

Теорема Коши обобщает теорему Лагранжа, для которой $g(x) = x$.

10.2. Правило Лопиталя

С помощью теоремы Коши может быть получено правило для нахождения предела отношения двух бесконечно малых функций, т.е. для раскрытия неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$.

Теорема Лопиталя. Пусть для функций $f(x)$, $g(x)$ в окрестности т. a выполняются условия теоремы Коши, причем $f(a) = g(a) = 0$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ■

□ По теореме Коши $\exists c \in (a, x)$, что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, отсюда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \boxtimes$$

Замечание 1. Если $f'(a) = g'(a) = 0$ и $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют в окрестности т. a условиям теоремы Коши, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Замечание 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ и в окрестности

т. $a \exists f'(x)$, $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(1+2x)} = \frac{2}{3}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

В случаях неопределенностей других видов выражение преобразуют так, чтобы получить неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ или $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, к которым применимо правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot \psi(x) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^{-1}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)^{\psi(x)} = \{1^\infty \vee 0^0 \vee \infty^0\} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln \varphi(x) \psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \ln \psi(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \ln \varphi(x) = \{0 \cdot \infty\} \text{ (случай а).}$$

$$\text{Пример: } \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \{0^0\} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-x^{-2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = e^0 = 1.$$

10.3. Монотонность

Определение монотонной на (a, b) функции дано в разд. 6.2. Установим необходимое и достаточное условия монотонности.

Т: (необходимое условие монотонности). Если дифференцируемая на (a, b) функция $y = \varphi(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a, b) ■

Метод доказательства аналогичен доказательству теоремы Ферма (п. 10.1.1).

Т: (достаточное условие монотонности) Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b) , то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b) ■

□ Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Применим формулу Лагранжа для $[x_1, x_2]$: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $x_1 < c < x_2$. Если $f'(x) > 0$ на (a, b) , то $f'(c) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и $f(x)$ возрастает. Аналогично для $f'(x) < 0$ ☒

10.4. Экстремумы

О: Функция $y = f(x)$ имеет максимум (max) в т. x_0 , если в окрестности т. x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, минимум (min), если $f(x) > f(x_0)$. Максимумы и минимумы называются ее экстремумами (рис. 10.3). Понятия носят локальный характер.

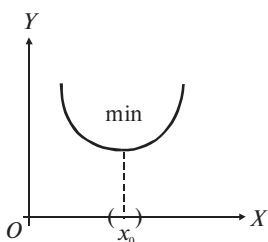
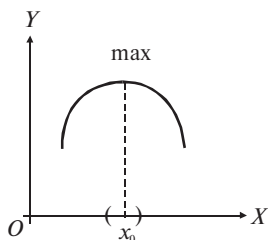


Рис. 10.3

Т: (необходимое условие экстремума) Если дифференцируемая в т. x_0 функция имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$ ■

Необходимое условие экстремума является следствием теоремы Ферма. Данное условие не является достаточным. Например, для функции $y = x^3$ производная $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но экстремума в этой точке нет (рис. 10.4). Если $f'(x_0) \neq 0$, то в т. x_0 может быть экстремум, а может и не быть.

Примеры:

1) $y = |x|$, $y' \nexists$, при $x_0 = 0$, из рис.10.5 видно, что в т. $x_0 = 0$ — min;

2) $y = \sqrt[3]{x}$, $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} \nexists$, при $x_0 = 0$, из

рис. 10.6 видно, что в т. x_0 экстремума нет.

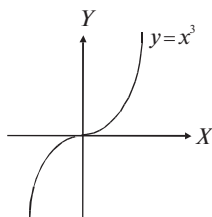


Рис. 10.4

Точки, в которых $f'(x) = 0 \vee \nexists$, называются подозрительными на экстремум (критическими), точки, в которых $f'(x) = 0$ — стационарными.

Т: (достаточный признак э.I) Пусть функция $f(x) \in C_{[a,b]}$ и т. $x_0 \in (a, b)$ — критическая. Если при переходе т. x_0 в направлении возрастания x производная меняет знак с (+) на (-), то в т. x_0 функция имеет max, если с (-) на (+) — то min ■

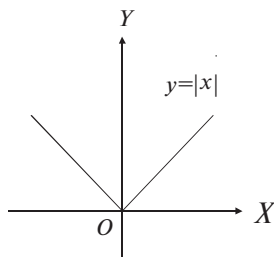


Рис. 10.5

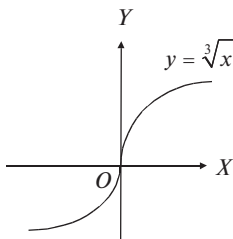


Рис. 10.6

□ Рассмотрим первую часть теоремы.

Запишем формулу Лагранжа для точек x_0, x_1 , где x_1 лежит в окрестности x_0 : ($x_1 \in U_{\delta[x_0]}$): $f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$;

Возможны два случая:

а) $x_1 < x_0 \Rightarrow x_1 < c < x_0, f'(c) > 0, x_1 - x_0 < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0)$;

б) $x_0 < x_1 \Rightarrow x_0 < c < x_1, f'(c) < 0, x_1 - x_0 > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0)$.

Таким образом, $\forall x \in U_{\delta[x_0]}$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, и по определению в т. x_0 функция имеет max. Аналогично доказывается и вторая часть теоремы (для min) ☒

Используя достаточные признаки монотонности и экстремума, получаем следующую схему исследования функции на монотонность, экстремумы:

1) находим $D(f)$;

2) находим точки, подозрительные на экстремумы, и разбиваем этими точками $D(f)$ на интервалы монотонности;

3) проверяем знак $f'(x)$ в полученных интервалах (достаточно проверить знак в одной точке интервала).

Результаты исследования удобно занести в таблицу.

Пример: $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$.

$$1) D(f) = \mathbf{R}; \quad 2) y' = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}};$$

$$\left. \begin{array}{l} y' = 0 \text{ при } x_1 = 0 \\ y' \neq 0 \text{ при } x_2, x_3 = \pm 1 \end{array} \right\} \text{— точки, подозрительные на экстремум.}$$

Получаем интервалы монотонности: $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1),$

$(1, +\infty)$;

3) результаты заносим в таблицу.

x	$-\infty, -1$	-1	$-1, 0$	0	$0, 1$	1	$1, +\infty$
y	\searrow	$y_{\min}=0$	\nearrow	$y_{\max}=1$	\searrow	$y_{\min}=0$	\nearrow
y'	$-$	\neq	$+$	0	$-$	\neq	$+$

По результатам исследований можно приблизительно построить график (рис. 10.7).

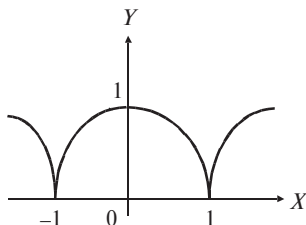


Рис. 10.7

10.5. Достаточный признак экстремума, использующий вторую производную. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

Т: (достаточный признак экстремума II) Пусть $f'(x_0) = 0$, а $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности т. x_0 . Если $f''(x_0) < 0$, то функция имеет \max в т. x_0 , если $f''(x_0) > 0$, то функция имеет \min в т. x_0 ■

□ Пусть $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ сохраняет знак всюду в окрестности т. x_0 , по достаточному признаку монотонности $f'(x) \searrow$ в окрестности т. x_0 , но $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ при $x < x_0, f'(x) < 0$ при $x > x_0$ (рис.10.8). По достаточному признаку экстремума I в т. x_0 функция имеет \max .

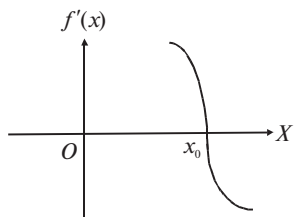


Рис. 10.8

Аналогичные рассуждения для случая $f''(x_0) > 0$ ☒

Достаточный признак экстремума II применим только для случая $f'(x_0) = 0$, т.е. для стационарных точек x_0 .

Пример: $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$

$$\blacktriangleleft y' = x^2 - 2x - 3 = 0, x_1 = -1, x_2 = 3, y'' = 2x - 2, \\ y''(-1) < 0 \Rightarrow f(-1) = y_{\max}, y''(3) > 0 \Rightarrow f(3) = y_{\min} \blacktriangleright$$

Применим сведения об экстремумах для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть $f(x) \in C_{[a,b]}$ и дифференцируема на (a, b) за исключением, быть может, конечного числа точек. Она достигает своего наименьшего и наибольшего значений (свойство 1^0 непрерывных на $[a, b]$ функций), которые могут находиться или в точках экстремума, или на концах отрезка.

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, необходимо:

- 1) найти точки на $[a, b]$, подозрительные на экстремум;
- 2) найти значения функции в этих точках и на концах промежутка $[a, b]$, выбрать из них наименьшее и наибольшее значения.

Пример: $y = x^3 - 3x + 7, x \in [0, 2]$.

1) $y' = 3x^2 - 3 = 0$ при $x = \pm 1, x = 1 \in [0, 2]$,

2) $y(1) = 5 = y_{\text{наим}}, y(0) = 7, y(2) = 9 = y_{\text{наиб}}$.

10.6. Выпуклость, вогнутость

О: График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым (выпуклым вверх) на (a, b) , если он расположен на (a, b) ниже касательной, проведенной в любой его точке; вогнутым (выпуклым вниз), если он расположен выше любой своей касательной (рис. 10.9).

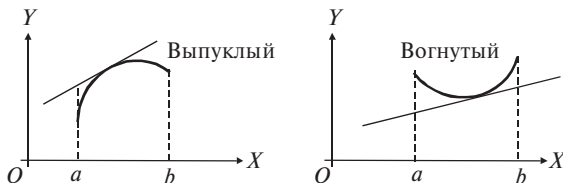


Рис. 10.9

Т: (достаточный признак выпуклости, вогнутости) Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b) . Если $f''(x) < 0$ на (a, b) , то график $f(x)$ — выпуклый, $f''(x) > 0$ — вогнутый ■

□ Пусть $f''(x) < 0$ на (a, b) . Сравним при значении x ординату y кривой $y = f(x)$ с ординатой \bar{y} ее касательной, проведенной в некоторой т. $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Если $\bar{y} > y$, то по определению график выпуклый на (a, b) (рис. 10.10). Подставим в уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ координаты (x, \bar{y}) и найдем \bar{y} : $\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

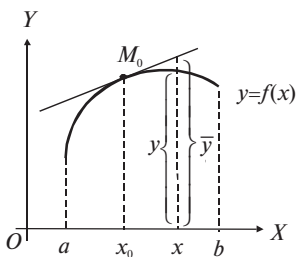


Рис. 10.10

Составим разность

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Разность $f(x) - f(x_0)$ преобразуем по формуле Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x),$$

тогда $y - \bar{y} = (x - x_0)(f'(c) - f'(x_0))$.

Применим формулу Лагранжа к разности $f'(c) - f'(x_0)$:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(\xi)(c - x_0), \quad \text{где } \xi \text{ заключено между } c \text{ и } x_0.$$

Тогда $y - \bar{y} = f''(\xi)(c - x_0)(x - x_0)$. Произведение $(c - x_0)(x - x_0) > 0$, $f''(x) < 0$ по условию, т.е. $y - \bar{y} < 0 \Leftrightarrow \bar{y} > y$. Аналогично доказывается вторая часть теоремы ☒

10.7. Точка перегиба

О: Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка, в которой меняется направление выпуклости графика (рис. 10.11).

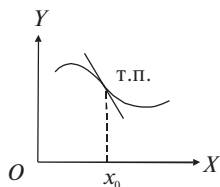


Рис. 10.11

Очевидно, что касательная в точке перегиба, если она существует, пересекает график.

Т: (необходимый признак т.п.) Пусть функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности т. x_0 и в т. $(x_0, f(x_0))$ имеет точку перегиба. Тогда $f''(x_0) = 0$ ■

□ Предположим противное, т.е. что $f''(x_0) \neq 0$, для определенности $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ знак сохраняется всюду в окрестности т. x_0 , т.е. по достаточному признаку выпуклости, вогнутости график вогнутый в окрестности т. x_0 . Полученное противоречие с условием теоремы доказывает, что $f''(x_0) = 0$ ☒

Условие $f''(x_0) = 0$ не является достаточным. Например, для функции $y = x^4$ вторая производная $y'' = 12x^2 = 0$ при $x = 0$, но в

данной точке функция имеет \min , а не перегиб (рис.10.12). Если $f''(x_0) \exists$, то $t.(x_0, f(x_0))$ может являться т.п. Например, для

$$y = \sqrt[3]{x^5} \quad \text{вторая производная} \quad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} \quad \nexists$$

при $x = 0$, до $t.(0, 0)$ при $x > 0$ график по достаточному признаку выпуклости, вогнутости является выпуклым, после $t.(0, 0)$ при $x < 0$ — вогнутым, т.е. $t.(0, 0)$ — точка перегиба (рис.10.13).

Точку x_0 , в которой $f''(x) = 0 \vee \nexists$, назовем подозрительной на перегиб.

Т: (достаточный признак т.п.) Пусть $f(x) \in C_{[a,b]}$ и $x_0 \in (a, b)$ — подозрительная на перегиб. Если при переходе через $t. x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак на противоположный, то $(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба ■

□ Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $x < x_0$, $f''(x) < 0$ при $x > x_0$. Тогда по достаточному признаку выпуклости, вогнутости график вогнутый до $t.(x_0, f(x_0))$, а после нее — выпуклый, т.е. при $x = x_0$ перегиб ☒

Исследование функции на выпуклость, вогнутость точки перегиба производится по следующей схеме:

- 1) находим $D(f)$;
 - 2) находим точки, подозрительные на перегиб, и разбиваем $D(f)$ этими точками на интервалы выпуклости, вогнутости;
 - 3) проверяем знак $f''(x)$ в полученных интервалах.
- Результаты исследования удобно занести в таблицу.

Пример: $y = e^{-x^2}$ — кривая Гаусса.

◀ 1) $D(f) = \mathbf{R}$;

2) $y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$, $y'' = 0$ при $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ — точки, подозрительные на перегиб. Получаем интервалы выпуклости, вогнутости:

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right);$$

3) заполняем таблицу.

По результатам исследования можно построить график (рис.10.14).

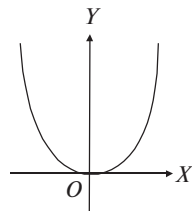


Рис. 10.12

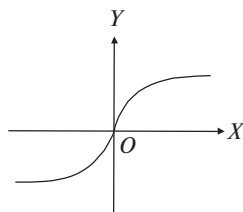


Рис. 10.13

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
y	\cup	$y_{\text{т.п.}} = e^{-1/2}$	\cap	$y_{\text{т.п.}} = e^{-1/2}$	\cup
y''	$+$	0	$-$	0	$+$

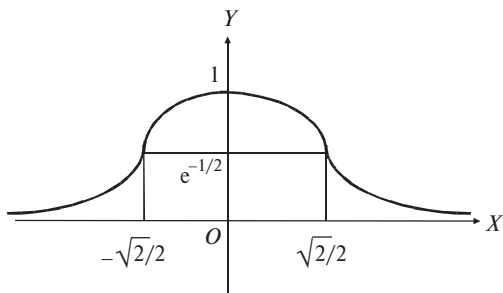


Рис. 10.14

10.8. Асимптоты

О: Прямая называется асимптотой графика $y = f(x)$, если расстояние d от переменной точки M графика до этой прямой при удалении т. M в ∞ стремится к нулю.

Асимптоты делятся на вертикальные и наклонные.

10.8.1. Вертикальные асимптоты

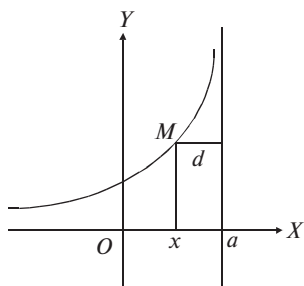


Рис. 10.15

Асимптоты $x = a$, параллельные оси OY (рис.10.15). Необходимым и достаточным условием существования асимптоты $x = a$ для функции $y = f(x)$ является

$$\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \infty. \quad (10.1)$$

Действительно, для асимптоты $x = a$, если $M(x, f(x))$ удаляется в ∞ , т.е. $f(x) \rightarrow \infty$, то по определению $d = |x - a| \rightarrow 0$, т.е. $x \rightarrow a + 0$ или $x \rightarrow a - 0$, получаем

указанное условие (10.1). Справедливо и обратное: из условия (10.1) $d = |x - a| \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$, т.е. $x = a$ — асимптота.

10.8.2. Наклонные асимптоты

Асимптоты $y = kx + b$.

Найдем k и b через функцию $y = f(x)$. Расстояние d от $M(x, f(x))$ до прямой $y = kx + b$ находится по формуле

$$d = \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Из определения асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ имеем: $d \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0. \text{ Обозначим } f(x) - kx - b = \delta, \text{ тогда } k = \frac{f(x)}{x} -$$

$$-\frac{b}{x} - \frac{\delta}{x}. \text{ Переходя к пределу при } x \rightarrow \pm\infty, \text{ получим } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} -$$

$$-\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{x} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}. \text{ Найдем } b = f(x) - kx - \delta \text{ и перейдем}$$

к пределу при $x \rightarrow \pm\infty$, тогда

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Таким образом, если наклонная асимптота существует, то k и b находятся по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Заметим, что в частном случае при $k = 0$ получаем горизонтальную асимптоту $y = b$.

Если вертикальных асимптот у графика функции может быть любое конечное число (ищем их в точках разрыва функции), то наклонных может быть не более двух: одна при $x \rightarrow +\infty$, другая — при $x \rightarrow -\infty$.

Пример: $y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x + 1)}.$

◀ Т.р.: $x = 0, x = -1$, проверяем условие (10.1):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x + 1)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x + 1)} = \infty,$$

т.е. $x = 0$, $x = -1$ — вертикальные асимптоты.

Проверим, имеется ли наклонная асимптота $y = kx + b$.

Находим

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x+1)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 1}{x(x+1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -1,$$

т.е. $y = x - 1$ — уравнение асимптоты ►

10.9. Общая схема исследования функции и построение графика

Чтобы построить график функции, рекомендуется исследовать ее по следующей схеме:

- 1) найти область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрыва;
- 2) найти асимптоты графика функции;
- 3) проверить симметрию графика, периодичность;
- 4) найти интервалы монотонности, экстремумы;
- 5) найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба;
- 6) найти точки пересечения с осями координат;
- 7) провести в случае необходимости исследование на концах области определения;
- 8) построить график функции.

Замечание. В п. 3 проверяется симметрия графика относительно оси OY , которая имеет место в случае четной функции $f(x)$ ($f(-x) = f(x)$), или симметрия относительно начала координат для нечетной функции $f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Пример: $y = \frac{x}{\ln x}$.

1) $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x = 1$ — т.р.;

2) находим $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln x} = \infty \Rightarrow x = 1$ — вертикальная асимптота.

Для асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \ln x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty,$$

т.е. наклонной асимптоты нет;

3) график симметрией, периодичностью не обладает;

4) находим $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, $y' = 0$ при $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ — подо-

зрительная на экстремум, $y' \neq 0$ в точках, которые не входят в $D(f)$.

Имеем таблицу:

x	$(0, 1)$	$(1, e)$	e	$(e, +\infty)$
y	\searrow	\searrow	$y_{\min} = e$	\nearrow
y'	-	-	0	+

(Поскольку на $(0, 1)$: $y'(1/e) < 0$, то $y \searrow$; на $(1, e)$: $y'(\sqrt{e}) < 0$; $y \searrow$; на $(e, +\infty)$: $y'(e^2) > 0$ и $y \nearrow$);

5) находим $y'' = \frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x}$, $y'' = 0$ при $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ — по-

дозрительная на перегиб, $y'' \neq 0$ в точках, которые не входят в $D(f)$.

Составим таблицу:

x	$(0, 1)$	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
y	\cap	\cup	$y_{\text{т.п.}} = e^2/2$	\cap
y'	-	+	0	-

(Поскольку на $(0, 1)$: $y''(1/e) < 0$, то $y \cap$; на $(1, e^2)$: $y''(e) > 0$, $y \cup$; на $(e^2, +\infty)$: $y''(e^3) < 0$, $y \cap$);

6) точек пересечения с осями координат нет;

7) исследуем поведение функции при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\ln x} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0;$$

8) строим график функции (рис.10.16) ►

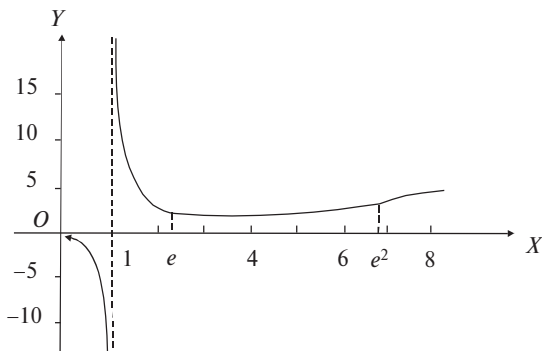


Рис. 10.16

10.10. Применение методов дифференциального исчисления в математическом моделировании

Методы дифференциального исчисления — переход к пределу, дифференцирование, исследование на экстремум — применяются при построении и исследовании непрерывных, в частности, динамических, и оптимизационных моделей.

10.10.1. Непрерывные и динамические модели физики

Кроме физического смысла производной как скорости неравномерного прямолинейного движения $v(t) = s'(t)$, второй производной — как ускорения $w(t) = s''(t)$ известны и другие приложения производной в физике.

а) Сила тока $I(t)$ в момент времени t при известном количестве электричества $Q(t)$, проходящем за время t через поперечное сечение проводника, вычисляется по формуле

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = Q'(t).$$

Это динамическая модель распространения электричества в проводнике.

б) Линейная плотность стержня $\rho(x)$ в точке x при известной массе стержня $m(x)$ находится как

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'(x).$$

в) Теплоемкость $c(\tau)$ тела при известном количестве тепла $q(\tau)$, сообщенном телу при нагревании его до температуры τ :

$$c(\tau) = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = q'(\tau).$$

10.10.2. Динамические модели химии

а) Закон Вант-Гоффа для полимерных растворов имеет вид

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{p}{g} = \frac{RT}{\mu_N^*},$$

где p — осмотическое давление, μ_N^* — среднечисленный молекулярный вес, R — универсальная газовая постоянная, T — абсолютная температура, g — концентрация раствора.

При малых концентрациях g измерения осмотического давления p дают возможность определения μ_N^* .

б) Если m — количество химического вещества, вступившего в реакцию к моменту времени t ($m = m(t)$, а $\Delta m = m(t + \Delta t)$), то скорость реакции в момент времени t определяется как

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m'(t).$$

Это определение является основой кинетики химических реакций.

Один из фундаментальных ее разделов — теория скоростей химических реакций. Скорость молекулярной реакции $A \rightarrow$ продукты обычно пропорциональна концентрации N_A реагента A :

$$\frac{dN_A}{dt} = -kN_A,$$

где k — константа скорости реакции. Скорость бимолекулярной реакции $A + B \rightarrow$ продукты пропорциональна числу столкновений молекул A и B , и следовательно, произведению концентрации реагентов:

$$\frac{dN_A}{dt} = -kN_A N_B.$$

Эти соотношения называются законом действующих масс, вывод которого был дан Вант-Гоффом в 1877 г. Цель теории скоростей химических реакций — выяснить, от каких параметров и как зависит константа скорости реакции. Современная теория скоростей химических реакций основана на законах квантовой механики и статистической физики.

10.10.3. Оптимизационные модели

В математике, физике, химии, экономике, технических науках довольно распространенными и важными являются задачи, в которых требуется найти наибольшее и наименьшее значения некоторых функций. Это задачи оптимизации.

Общая схема построения математической модели и ее исследования состоит в следующем:

1 этап: выявляют оптимизируемую величину, обозначают ее, например y , а одну из неизвестных величин — x ;

2 этап: исходя из условий задачи строят зависимость $y(x)$ и определяет промежуток, в котором изменяется x ;

3 этап: полученная функция исследуется на экстремум или по схеме исследования на наибольшее и наименьшее значения функции;

4 этап: полученный результат интерпретируют для рассматриваемой задачи.

Рассмотрим задачу из химической технологии. Процессы сульфирования и хлорирования органических соединений часто осуществляются с применением света. На какой высоте над круговой площадкой радиусом a следует поместить источник света, чтобы освещенность границы площадки была максимальной? Площадка не перпендикулярна лучам (рис.10.17).

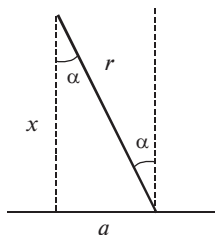


Рис. 10.17

Решение. Известно, что освещенность выражается формулой

$$E = \frac{k}{r^2} \cos \alpha,$$

где α — угол падения световых лучей, r — расстояние площадки от источника света. Обозначим через x искомую высоту, тогда

$$r = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

и зависимость $E(x)$ выражается формулой

$$E(x) = \frac{kx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}, \quad x > 0.$$

Находим

$$E'(x) = k(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 - 3x^2(a^2 + x^2)^{-1} \right] = \frac{k(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{(a^2 + x^2)^5}},$$

$E'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — критическая точка, удовлетворяющая

$x > 0$. При $0 < x < \frac{a}{\sqrt{2}}$ имеем $E'(x) > 0$, а при $x > \frac{a}{\sqrt{2}}$ получаем

$E'(x) < 0$, т.е. $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — искомая высота.

Литература: [4. С. 164–209]; [5. С. 181–200]; [7. С. 178–193]; [16. С. 127–159].

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

11. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Опорный конспект № 11

11.1. Понятие функции нескольких переменных.

Элементы топологии в \mathbb{R}^n

O: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n, y \in Y \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D \xrightarrow{\cdot} Y: \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \exists! y \in Y \subset \mathbb{R}.$

$z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ — функция двух переменных;

$f(x, y) = c, c = \text{const}$ — линии уровня

O: $U_\delta(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 : |\overline{MM_0}| < \delta\}$ — δ -окрестность т. $M_0(x_0, y_0)$.

D — открытая область $\Leftrightarrow \forall M \in D \exists \delta > 0 : U_\delta(M) \subset D.$

11.2. Предел и непрерывность функций нескольких переменных

O: $A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : M \in U_\delta(M_0) \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon.$

O: $z = f(x, y)$ непрерывна в т. $M_0(x_0, y_0) \Leftrightarrow$

1) $f(x, y)$ определена в $U_\delta(M_0)$; 2) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$

11.3. Частные приращения и частные производные

На примере $z = f(x, y)$:

О: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ — частные приращения по x и y .

О: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ — частные производные по x и y .

11.4. Полное приращение и полный дифференциал, применение в приближенных вычислениях.

О: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ — полное приращение функции $z = f(x, y)$.

О: $z = f(x, y)$ дифференцируема в т. $M(x, y) \Leftrightarrow \Delta Z = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)$, $\omega = o(\Delta\rho)$

при $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$,

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ — полный дифференциал ($dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$).

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ — применение диф-

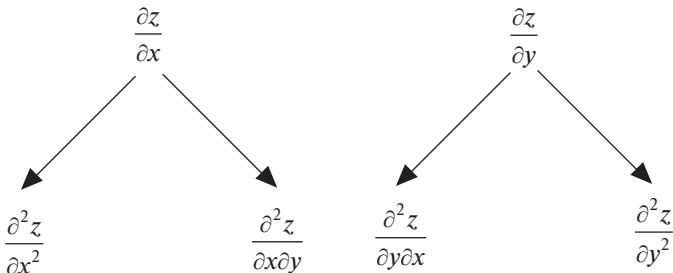
ференциала к приближенным вычислениям

11.5. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков

В случае непрерывности $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$d^2 = d(dz)$ — дифференциал 2-го порядка,

$d^n z = d(d^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$



11.6. Производные сложных функций

$$1) z = f(x, y), x = x(t), y = y(t): \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt};$$

$$2) z = f(x, y), y = y(x): \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx};$$

$$3) z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v):$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

11.7. Неявные функции, их дифференцирование

$$1. F(x, y) = 0 \text{ задает неявно } y = y(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$$

$$2. F(x, y, z) = 0 \text{ задает неявно } z = z(x, y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}$$

11.1. Понятие функции нескольких переменных. Элементы топологии в \mathbf{R}^n

Во многих задачах геометрии, физики, химической технологии приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных.

Примеры: 1) Площадь прямоугольника с основанием x и высотой y есть функция двух переменных x и y , определенная в области: \mathbf{R}_+^2 : $S = xy$.

2) Температура тела T является обычно переменной величиной, зависящей от t . $M(x, y, z)$, в которой она измеряется, и от момента времени t , в который проводится измерение: $T = f(x, y, z, t)$, т.е. температура есть функция переменных x, y, z и t . Переменные x, y, z, t являются независимыми и могут принимать любые допустимые значения.

3) Скорость образования химического соединения c зависит от концентраций веществ-компонентов c_i ($i = \overline{1, N}$) и условий протекания химической реакции (температуры T , давления p). Поэтому $c = f(c_1, c_2, \dots, c_N, p, T)$, т.е. c — функция $N + 2$ переменных.

О: Функцией n переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенной на множестве $D \subset \mathbf{R}^n$ и принимающей значения на множестве $Y \subset \mathbf{R}$, называется такое соответствие между множествами D и Y , при котором для любой точки $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ существует единственный элемент $y \in Y$ ($D \rightarrow Y: \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n \exists! y \in Y \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n, y \in Y \subset \mathbf{R}$).

Множество D называется областью определения функции (ООФ), Y — областью значений функции. Так, функция двух переменных $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $z \in Z \subset \mathbf{R} \Leftrightarrow D \rightarrow Z: \forall (x, y) \in D \exists! z \in Z$, D — множество точек плоскости.

Примеры:

1) $z = 2x - y$, $D = \mathbf{R}^2$.

2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

$D: 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ — круг радиусом 1 с центром в т. $O(0, 0)$ вместе с границей (рис.11.1, а).

3) $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$, $D: -1 \leq x^2 + y^2 - 2 \leq 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ (рис.11.1, б).

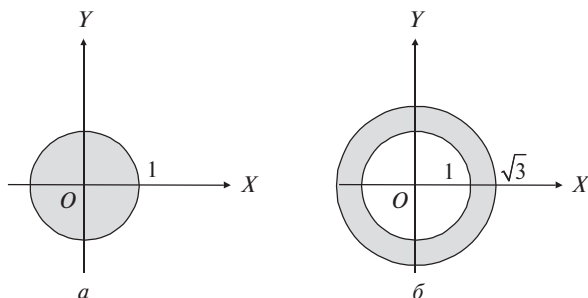


Рис. 11.1

Геометрическим изображением, т.е. графиком функции двух переменных, является поверхность в пространстве (в прямоугольной декартовой системе координат $OXYZ$). Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ имеет графиком полусферу радиусом 1 (рис.11.2).

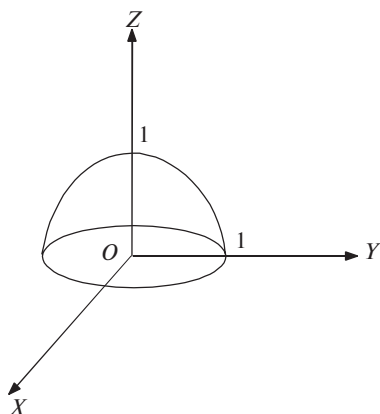


Рис. 11.2

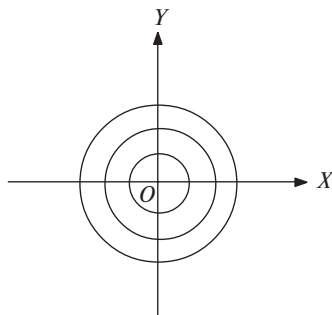


Рис. 11.3

Для изучения характера функции двух переменных $z = f(x, y)$ удобно рассматривать так называемые линии уровня с уравнением $f(x, y) = c$, $c = \text{const}$. Например, для $z = x^2 + y^2$ линиями уровня являются $x^2 + y^2 = c$, $c = \text{const}$ — семейство концентрических окружностей (рис.11.3).

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ область определения D является множеством точек в пространстве, в частности некоторым телом в пространстве, но изобразить графически функцию трех переменных уже невозможно. Для изучения характера ее изменения рассматриваются поверхности уровня с уравнениями $f(x, y, z) = c$, $c = \text{const}$.

Примеры:

1) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, $D: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ — шар единичного радиуса с центром в т. $O(0, 0, 0)$.

2) $u = x^2 + y^2 + z^2$, $D = \mathbb{R}^3$. Поверхности уровня $x^2 + y^2 + z^2 = c$, $c = \text{const}$ — семейство сфер с центром в т. $O(0, 0, 0)$.

Изучать функции нескольких переменных удобно, рассматривая функции двух переменных $z = f(x, y)$ вследствие их геометри-

ческой наглядности. Получаемые при этом результаты могут быть обобщены на случай большого числа независимых переменных.

Введем топологию в \mathbb{R}^2 . Определения иллюстрируются рис. 11.4.

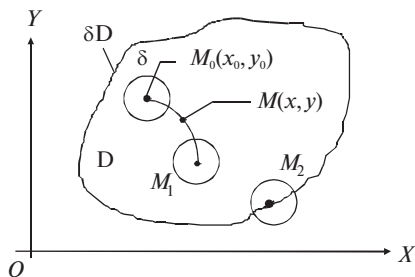


Рис. 11.4

- О: δ -окрестностью т. $M_0(x_0, y_0)$ ($U_\delta(M_0)$) называется совокупность всех точек $M(x, y)$, лежащих внутри круга радиусом δ с центром в т. $M_0(x_0, y_0)$: $|MM_0| < \delta$. $\dot{U}_\delta(M_0)$ — проколотая окрестность т. M_0 .
- О: Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется внутренней точкой множества D , если $\exists \delta > 0: U_\delta(M_0) \subset D$.
- О: Множество D называется областью, если:
 - 1⁰. Любая т. $M \in D$ является его внутренней точкой (свойство открытости).
 - 2⁰. Любые две точки множества D можно соединить ломаной линией, состоящей из точек множества D (свойство связности).
- О: Граничными точками области D называются такие точки, в окрестности которых содержатся как точки, принадлежащие области D , так и точки, ей не принадлежащие. Множество всех граничных точек образует границу области ∂D . Если к области присоединить ее границу, то полученное множество называется замкнутой областью $\bar{D} = D \cup \partial D$. Область D называется открытой областью.
- О: Область D называется ограниченной, если для нее можно подобрать круг, полностью ее покрывающий. Область $D(\bar{D})$ называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит $D(\bar{D})$.

Область на рис.11.1, *a* односвязная, а область на рис.11.1, *б* не является односвязной.

Для пространства \mathbf{R}^n топология вводится аналогично. Приведем лишь определение δ -окрестности т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$.

О: δ -окрестностью т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется шар с центром в т. M_0 радиусом δ :

$$U_\delta(M_0) = \{M \in \mathbf{R}^n: |\overline{M_0M}| < \delta\}, \quad |\overline{M_0M}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}.$$

11.2. Предел и непрерывность функций нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области D плоскости HOY , а т. $M_0(x_0, y_0)$ лежит в области D (см. рис. 11.4).

О: Число A называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении т. $M(x, y)$ к т. $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех т. $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$ за исключением, быть может, т. M_0 , справедливо неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

$$(A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$M \in \check{U}_\delta(M_0) \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon).$$

Основные теоремы о пределах функции одной переменной (см. разд. 7.5) справедливы и для функций двух и большего числа переменных.

О: Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в т. $M_0(x_0, y_0)$, если: 1) она определена в т. M_0 и ее окрестности,

$$2) \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

О: Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной на некотором множестве $E \subset D$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

О: Точка M_0 называется точкой разрыва функции $f(M)$, если в ней нарушено хотя бы одно из условий 1), 2). Точки разрыва могут быть изолированными, могут образовывать линии разрыва.

Примеры: 1) $z = \frac{xy}{x-y}$.

◀ Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль $\Rightarrow y = x$ — линия разрыва ▶

2) $z = \frac{1}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$.

◀ $(x-1)^2 + (y+2)^2 \neq 0 \Rightarrow$ т. $M_0(1, -2)$ — точка разрыва ▶

Для функции трех и более переменных определения предела и непрерывности аналогичны.

О: Число A называется пределом функции $y = f(M)$ при стремлении т. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$0 < \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2} < \delta (M \in \check{U}_\delta(M_0))$$

следует $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$

$$(A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{x_i \rightarrow x_i^0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$

$$M \in \check{U}_\delta(M_0) \Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon).$$

11.3. Частные приращения и частные производные

О: Частным приращением функции $z = f(x, y)$ по x называется разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, частным приращением по y — $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

О: Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении последнего к нулю: $z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Другие обозначения: $f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$. Аналогично и для перемен-

ной y : $z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \quad (f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

Заметив, что $\Delta_x z$ определяется при неизменном y , а $\Delta_y z$ — при неизменном x , можно сформулировать правило: частная производная по x от функции $z = f(x, y)$ есть обычная производная по x , вычисленная в предположении, что $y = \text{const}$. Аналогично для вычисления частной производной по y надо считать $x = \text{const}$. Таким образом, правила вычисления частных производных те же, что и в случае функции одной переменной.

Примеры:

1) $z = x^2 \sin y, \quad z'_x = 2x \sin y, \quad z'_y = x^2 \cos y;$

2) $z = x^y, \quad z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x.$

Частные производные функции нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяются аналогично:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Выясним геометрический смысл частных производных для $z = f(x, y)$. С этой целью построим поверхность, являющуюся графиком $z = f(x, y)$, и рассмотрим кривую $L_x: z = f(x, y), y = \text{const}$ (рис. 11.5).

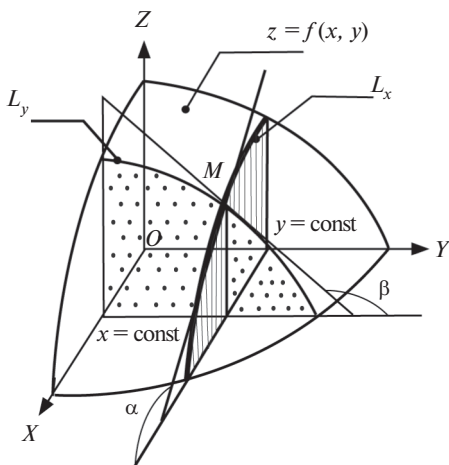


Рис. 11.5

Из геометрического смысла производной функции одной переменной имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{y=\text{const}} = \text{tg } \alpha$, где α — угол наклона касательной к L_x в т. $M(x, y, z)$ к оси OX . Аналогично для z'_y .

Пример: Найти угловые коэффициенты касательных к L_x , L_y поверхности $z = x^2 + y^2$ в т. $A(2, 3)$.

$$\blacktriangleleft z'_x = 2x, k_1 = \text{tg } \alpha = 4, z'_y = 2y, k_2 = \text{tg } \beta = 6 \blacktriangleright$$

11.4. Полное приращение и полный дифференциал, применение в приближенных вычислениях

О: Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Замечание. В общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$. Пусть, например, $z = xy$, $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x$, $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y$, $\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta x\Delta y$.

Аналогично полное приращение функций $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$: $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

О: Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в т. $M(x, y)$, если ее полное приращение Δz представимо в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)$, где A, B не зависят от $\Delta x, \Delta y$, а функция $\omega(\Delta x, \Delta y)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с

$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ при $\Delta \rho \rightarrow 0$. Полным дифференциалом дифференцируемой функции в т. $M(x, y)$ называется $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Докажем необходимое условие дифференцируемости функции.

Т: Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в т. $M(x, y)$, то в этой точке существуют частные производные по x и y ,

$$\text{причем } \frac{\partial z}{\partial x} = A, \frac{\partial z}{\partial y} = B \blacksquare$$

□ Выразим A и B через $z = f(x, y)$. Пусть $\Delta y = 0$, тогда $\Delta z = A\Delta x + \omega(\Delta x, 0) = \Delta_x z$, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \omega(\Delta x, 0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \rho = |\Delta x| \rightarrow 0 \\ \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right\} =$$

$$= A + \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x, 0)}{\Delta\rho} = A \Rightarrow A = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично

$$B = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \square$$

Поэтому

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где обозначены $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Можно показать, что обратное утверждение в общем случае неверно. Однако имеет место следующая теорема (достаточные условия дифференцируемости функции):

Т: Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в т. $M(x, y)$,

то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке ■

Аналогично для функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вводится понятие дифференцируемости и полного дифференциала

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n.$$

Пример: Найти Δz и dz для функции $z = xy$ в т. $M(2, 3)$ при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$.

$$\blacktriangleleft \Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y =$$

$$= 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72;$$

$$dz = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7 \quad \blacktriangleright$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в т. (x, y) . Найдем $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, откуда и $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$. Поскольку можно считать при малых $\Delta x, \Delta y$, что $\Delta z \approx dz$, то верно

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \quad (11.1)$$

с точностью до б.м. высшего порядка малости относительно Δx и Δy . Формулой (11.1) можно пользоваться для приближенных вычислений значений функции двух переменных в т. $M(x + \Delta x, y +$

+ Δy), близкой к т. $M(x, y)$, если известны значения функции и ее частных производных в самой т. M .

Пример: Скорость истечения газа, находящегося под высоким давлением p_0 в сосуде, через отверстие в стенке вычисляются по формуле

$$w = \sqrt{kRT_0 \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right)},$$

где k, R — величины, зависящие от химического состава газа, T_0, p_0 — температура и давление в сосуде, p_1 — давление в окружающей среде. Пусть значения $k = 1,5, R = 294, p_1 = 0,1, p_0 = 100, T_0 = 617, w_0 = 500$.

Найти скорость истечения газа при изменениях p_0 до 108, T_0 до 600, R до 300.

$$\blacktriangleleft w \approx w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial p_0} \right) \Delta p_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial T_0} \right) \Delta T_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial R} \right) \Delta R.$$

Находим производные. Они равны соответственно:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial p_0} \right)_0 = \frac{1}{2w_0} \left(kRT_0 \left(\frac{k-1}{k} \right) \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}-1} \right) \left(\frac{p_1}{p_0^2} \right) = 0,0817,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial T_0} \right)_0 = \frac{1}{2w_0} \left(kR \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right) \right) = 0,397,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial R} \right)_0 = \frac{1}{2w_0} \left(kT_0 \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right) \right) = 0,833,$$

$\Delta p_0 = 8, \Delta T_0 = -17, \Delta R = 6$. Тогда $w = 500 + 0,0817 \cdot 8 + 0,397 \cdot (-17) + 0,833 \cdot 6 = 498,89$. Непосредственное вычисление дает $w = 494$ \blacktriangleright

11.5. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ функции

$z = f(x, y)$ в общем случае являются функциями от x и y . Если они дифференцируемы, то \exists четыре частных производные, называемые частными производными второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Аналогично вводятся частные производные третьего, ..., n -го порядка.

О: Частной производной n -го порядка называется частная производная первого порядка от частной производной $(n - 1)$ -го порядка.

Примеры: 1) $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$, $z'''_{xxy} = ?$

$$\blacktriangleleft z'_x = y^2 e^x + 2xy^3, \quad z''_{xx} = (y^2 e^x + 2xy^3)'_x = y^2 e^x + 2y^3,$$

$$z'''_{xxy} = (y^2 e^x + 2y^3)'_y = 2ye^x + 6xy^2 \blacktriangleright$$

2) $z = x^2 y + y^3$, z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yx} , $z''_{yy} = ?$

$$\blacktriangleleft z'_x = 2xy, \quad z'_y = x^2 + 3y^2, \quad z''_{xx} = 2y,$$

$$z''_{xy} = (2xy)'_y = 2x, \quad z''_{yx} = (x^2 + 3y^2)'_x = 2x, \quad z''_{yy} = 6y \blacktriangleright$$

Отметим, что смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} , отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой. Для таких производных имеет место теорема.

Т: Если частные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, непрерывны в т. $M(x, y)$, то они равны между собой в этой точке ■

Например,

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y), \quad f'''_{xxy}(x, y) = f'''_{xyx}(x, y) = f'''_{yxx}(x, y).$$

Доказательство приведено в [3. С. 270].

О: Дифференциалом второго порядка d^2z функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее дифференциала первого порядка, рассматриваемого как функция переменных x и y при фиксированных значениях dx и dy : $d^2z = d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы третьего, ..., n -го порядка [11. С. 410]:

$$d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z.$$

Выражение в скобках формально раскрывается по биномиальному закону. Например,

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

11.6. Производные сложных функций

Пусть для функции $z = f(x, y)$ переменные x и y являются функциями переменной t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ является сложной функцией переменной t .

Т: Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы в т. t , а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в т. $M(x(t), y(t))$, то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ также дифференцируема в т. t , причем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \blacksquare \quad (11.2)$$

□ Воспользуемся определением дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\Delta \rho} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta \rho} = \left\{ \Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0 \right\} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta \rho} = 0,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

то последнее слагаемое обращается в нуль. Имеем формулу (11.2) \square

Пример: $z = e^{x^3 y^2}, \quad x = \sin t^2, \quad y = \cos t^2, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \frac{dz}{dt} &= \left(e^{x^3 y^2} \right)'_x (\sin t^2)'_t + \left(e^{x^3 y^2} \right)'_y (\cos t^2)'_t = \\ &= e^{x^3 y^2} \cdot 3x^2 y^2 \cos t^2 \cdot 2t + e^{x^3 y^2} \cdot 2x^3 y (-\sin t^2) \cdot 2t \blacktriangleright \end{aligned}$$

Формула (11.2) обобщается и на случай большего числа переменных. Так, для $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Из формулы (11.2) следуют и формулы дифференцирования для других форм задания сложных функций (см. ОК № 11).

Предположим, что $w = f(x, y, z), x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$.

Тогда частные производные $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

В первой формуле роль переменной t играет u (производную $\frac{\partial w}{\partial u}$ находим, считая $v = \text{const}$), во второй — v , обыкновенные производные заменяются частными.

11.7. Неявные функции, их дифференцирование

Т.: (существования и дифференцируемости неявной функции)

Пусть функция одной переменной $y = f(x)$ и независимая переменная x связаны уравнением $F(x, y) = 0$, $F(x, y)$ непрерывна в окрестности т. $M_0(x_0, y_0)$ и имеет там непрерыв-

ные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, причем $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} \neq 0$,

$F(x_0, y_0) = 0$. Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в окрестности т. M_0 функцию $y = y(x)$, которая имеет непрерывную производную ■

Доказательство дано в [11. С. 449, 452].

Выведем при условиях теоремы формулу для нахождения производной неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}. \quad (11.3)$$

□ По правилу дифференцирования сложной функции про- дифференцируем $F(x, y)$: $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$, откуда следует (11.3) □

Пример: $e^y - e^x + xy = 0$, $y'_x = ?$

$$\leftarrow y'_x = -\frac{(e^y - e^x + xy)'_x}{(e^y - e^x + xy)'_y} = -\frac{y - e^x}{e^y + x} \rightarrow$$

Формулы для нахождения производных функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, приведены в ОК № 11.

Пример: $z^2 e^x + x^{yz} + y \ln x = 0$, z'_x , $z'_y = ?$

$$\leftarrow z'_x = -\frac{z^2 e^x + yz x^{yz-1} + y/x}{2z e^x + x^{yz} y \ln x}, \quad z'_y = -\frac{x^{yz} z \ln x + \ln x}{2z e^x + x^{yz} y \ln x} \rightarrow$$

Литература: [7. С. 305–332]; [13. С. 283–298]; [16. С. 275–293].

12. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

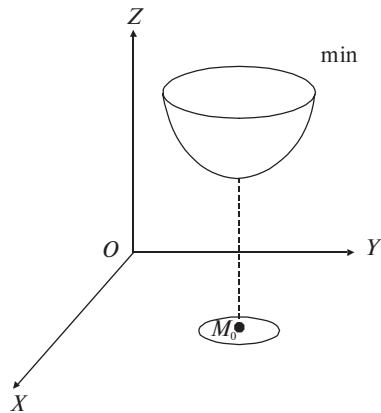
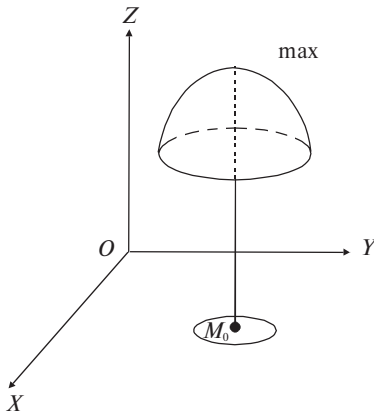
Опорный конспект № 12

12.1. Экстремумы функции нескольких переменных

O: $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \Rightarrow \text{т. } M_0 \text{ — точка max} \quad \left| \quad f(x_0, y_0) < f(x, y) \Rightarrow \text{т. } M_0 \text{ — точка min} \right.$$

$$\forall (x, y) \in U_\delta(M_0)$$



T: (необходимые условия экстремума)

$$\exists \text{ экстремум } z = f(x, y) \text{ в т. } M_0 \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{M_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{M_0} = 0 \vee \nexists$$

T: (достаточные условия экстремума)

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

$$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{cases} > 0, A_{M_0} < 0 \Rightarrow \text{max,} \\ > 0, A_{M_0} > 0 \Rightarrow \text{min,} \\ < 0 \Rightarrow \text{экстремума нет,} \\ = 0 \Rightarrow \text{требуется} \\ \text{дополнительные исследования} \end{cases}$$

12.2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

O: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, $F(x, y) = 0$ задает $L \subset D$,

$M_0(x_0, y_0) \in L$ — т. усл. max (min) $f(x, y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x, y) < f(x_0, y_0) (> f(x_0, y_0)) \forall (x, y) \in U_\delta(M_0) \cap L$.

Необходимые условия условного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = F(x, y) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$ — функция Лагранжа, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Достаточные условия условного экстремума:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & F'_x(M_0) & F'_y(M_0) \\ F'_x(M_0) & \Phi''_{xx}(M_0, \lambda_0) & \Phi''_{yx}(M_0, \lambda_0) \\ F'_y(M_0) & \Phi''_{yx}(M_0, \lambda_0) & \Phi''_{yy}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{т. } M_0 \text{ — т. усл. max,} \\ > 0 \Rightarrow \text{т. } M_0 \text{ — т. усл. min} \end{cases}$$

$M_0(x_0, y_0)$, λ_0 — любое из решений (1)

12.3. Уравнения касательной плоскости и нормали

к поверхности. Линии как пересечение двух поверхностей

$F(x, y, z) = 0$ в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{M_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{M_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{M_0} (z - z_0) = 0 -$$

уравнение касательной плоскости

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{M_0}} \quad \text{— уравнение нормали}$$

$L: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ — линия пересечения двух поверхностей

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{M_0} \quad \text{— направляющий вектор}$$

касательной к L

12.1. Экстремумы функции нескольких переменных

О: Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $f(x, y)$, если $\exists \delta > 0: f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$) $\forall M(x, y) \in U_\delta(M_0)$. Максимумы и минимумы функции называются ее экстремумами (рис. 12.1).

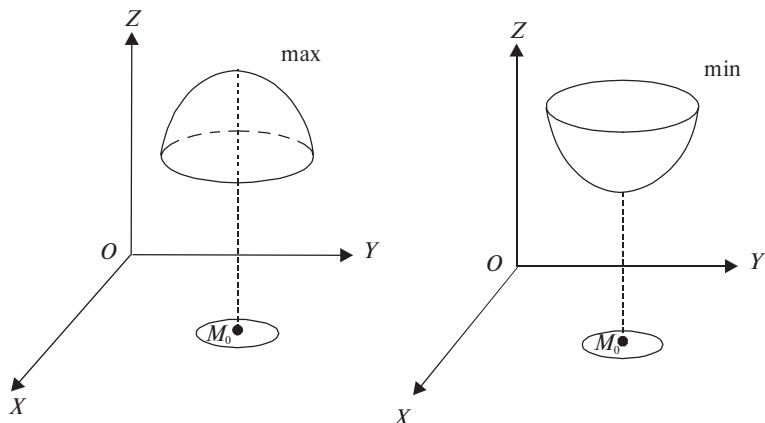


Рис. 12.1

Примеры: 1) $z = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$.

◀ Очевидно т. (1, 2) является т. min, так как все остальные значения x и y дадут $z > -1$ ▶

2) $z = 0,5 - \sin(x^2 + y^2)$. ◀ В данном случае т. $M_0(0, 0)$ является т. max, так как $\forall (x, y) \in U_\delta(M_0), \delta < \pi: z < 0,5$ ▶

Т: (необходимое условие экстремума)

Если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в т. M_0 , то

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}$ или обращаются в нуль, или не существуют ■

■

□ Пусть $y = y_0$, тогда $f(x, y_0) = \varphi(x)$ — функция одной переменной. Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум, то

$$\varphi'(x_0) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 0 \vee \nexists.$$

Доказательство при $x = x_0$ аналогично □

Эти условия не являются достаточными.

Пример: $z = xy$, $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ обращаются в нуль в т. $O(0,0)$,

но $xy > 0$ при $x > 0, y > 0$, $xy < 0$ при $x < 0, y > 0$, т.е. определение экстремума не выполняется.

Приведем достаточные условия экстремума для стационарных

т. M_0 , в которых $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 0$.

Т: (достаточные условия экстремума) Пусть в некоторой области, содержащей т. $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно и эта точка является стационарной.

Пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B$.

Тогда

$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}_{M_0}$	=	{	$> 0, A_{M_0} < 0 \Rightarrow$	функция имеет максимум в т. M_0
			$> 0, A_{M_0} > 0 \Rightarrow$	функция имеет минимум в т. M_0
			$< 0 \Rightarrow$	экстремума нет
			$= 0 \Rightarrow$	требуется дополнительное исследование ■

Доказательство см. в [11. С. 419].

Пример: Исследовать на экстремум $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \quad z'_y = 2xy + 2y = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_1(0, 0), \quad M_2(-\frac{5}{3}, 0), \quad M_3(-1, -2), \quad M_4(-1, 2) \text{ — стационарные} \\ \text{точки,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = 12x + 10, \quad C = 2x + 2, \quad B = 2y, \quad AC - B^2 = \\ = (12x + 10)(2x + 2) - (2y)^2. \end{aligned}$$

- 1) $(AC - B^2)_{M_1} = 20 > 0, \quad A_{M_1} = 10 > 0 \Rightarrow$ т. M_1 — точка минимума,
- 2) $(AC - B^2)_{M_2} = 40/3 > 0, \quad A_{M_2} = -10 < 0 \Rightarrow$ т. M_2 — точка максимума,
- 3) $(AC - B^2)_{M_3} = -16 < 0 \Rightarrow$ экстремума нет,
- 4) $(AC - B^2)_{M_4} = -16 < 0 \Rightarrow$ экстремума нет \blacktriangleright

Для функции n переменных ($n \geq 3$) определение экстремума и необходимые условия сохраняются. Необходимое условие в случае дифференцируемой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кратко запишется в виде: $df(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Сформулируем достаточные условия экстремума.

Т: Если в стационарной т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ второй дифференциал

$$d^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k, \quad a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, то M_0 — точка \min (\max) \blacksquare

Доказательство см. в [11. С. 424].

Сформулированные ранее достаточные условия экстремума для функции $z = f(x, y)$ являются следствием данной теоремы.

12.2. Условный экстремум функции нескольких переменных

Часто приходится решать задачу о нахождении экстремума функции нескольких переменных при наличии некоторых дополнительных условий.

Примеры: 1) Найти длины сторон прямоугольника, имеющего наибольшую площадь $S = xy$ при заданной величине его периметра $P = 2x + 2y$.

2) Решить ту же задачу при условии, что $x - y > a$, $a = \text{const}$.

Задача 1) имеет дополнительное условие в виде равенства, а задача 2) еще имеет условие в виде неравенства. Мы будем рассматривать задачи вида 1), которые называются задачами на условный экстремум. Задачи вида 2) называются задачами линейного (нелинейного, динамического) программирования и рассматриваются в специальных курсах.

Для функции двух переменных имеем:

О: Пусть $z = f(x, y)$ определена на множестве D . Пусть также $L \subset D$ — подмножество, заданное условием $F(x, y) = 0$. Точка $M_0(x_0, y_0) \in L$ называется точкой условного максимума (минимума) для $f(x, y)$, если $\exists \delta > 0$ такое, что в $U_\delta(M_0)$ для $\forall (x, y) \in L$ выполнено $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) > f(x_0, y_0)$)

Условные максимум и минимум называются условными экстремумами.

Для функции двух переменных задачу о нахождении точек условного экстремума решают одним из следующих двух способов.

1. Если это возможно, из уравнения связи $F(x, y) = 0$ находят $y = \varphi(x)$ и затем подставляют в функцию $z = f(x, y)$. В результате $z = f(x, \varphi(x))$ становится функцией одной переменной x , для которой задача решается известными методами.

В противном случае для нахождения точек экстремума применяется метод множителей Лагранжа [3. С. 288], который заключается в следующем.

2. Составляют функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y), \quad (12.1)$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$ — множитель Лагранжа. Очевидно, что на множестве L второе слагаемое обращается в нуль вследствие выполнения условия $F(x, y) = 0$. Таким образом, на L выполнено $\Phi(x, y, \lambda) = f[x, \varphi(x)]$ и поэтому задача в случае функции двух переменных, как и в п. 1, сводится к поиску экстремума функции одной переменной x .

Формально процедура решения такова. Приравниваем к нулю все частные производные функции Лагранжа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} &= F(x, y) = 0\end{aligned}$$

и отсюда находим решение $\{x_0, y_0, \lambda_0\}$.

Пусть $M_0(x_0, y_0), \lambda_0$ — любое из решений этой системы.

Подставляя в $d^2\Phi = \Phi''_{xx}dx^2 + 2\Phi''_{yx}dxdy + \Phi''_{yy}dy^2$ найденный из уравнения связи дифференциал $dy = -(F'_x/F'_y)dx$ и обозначая $\Delta_0 = (\Phi''_{xx}(F'_y)^2 - 2\Phi''_{yx}F'_xF'_y + \Phi''_{yy}(F'_x)^2)_{M_0, \lambda_0}$ (в опорном конспекте № 12 Δ_0 записано в виде определителя), получаем $(d^2\Phi)_0 = \Delta_0 dx^2 / (F'_y)^2_{M_0}$. Тогда, если $\Delta_0 < 0 \Rightarrow z = f(x, y)$ имеет в т. $M_0(x_0, y_0)$ условный максимум, если $\Delta_0 > 0$ — то условный минимум.

Пример: Найти точки экстремума функции $z = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y$, если уравнение связи $y - x = 0$.

◀ Рассмотрим оба способа решения.

1. Из аналитической геометрии известно, что любое уравнение 2-го порядка определяет в пространстве поверхность второго порядка (см. гл. 1). Выделим в заданном уравнении полные квадраты x и y : $z = 4 - (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 5 = 9 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$ — уравнение параболоида вращения с вершиной в т. $N(1, 2, 9)$ (рис. 12.3); $y = x$ — уравнение плоскости. Подставляя уравнение связи в исходную функцию, получаем $z = 9 - (x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 4 - 2x^2 + 6x$.

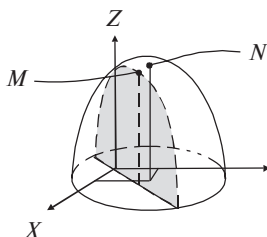


Рис. 12.3

Иследуем на экстремум:

$$z'_x = 6 - 4x = 0, \quad x = 1,5, \quad z''_{xx} = -4 < 0 \quad \text{— максимум в т. } M(1,5; 1,5).$$

Функция $z = 4 - 2x^2 + 2x - y^2 + 4y$ имеет условный экстремум $z_{\max} = 4 - 2 \cdot 2,25 + 6 \cdot 1,5 = 13 - 4,5 = 8,5$.

2. Составим $\Phi(x, y, \lambda) = 4 - (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 5 + \lambda(y - x)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2x + 2 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y + 4 + \lambda, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = y - x = 0 \Rightarrow$$

линейная система уравнений. Используя метод Крамера, получим: $\Delta = 4$, $\Delta_x = 6$, $\Delta_y = 6$, $\Delta_\lambda = -4$ и $x_0 = 1,5$; $y_0 = 1,5$; $\lambda_0 = 1$, $\Phi''_{xx} = -2$, $\Phi''_{yy} = -2$, $\Phi''_{xy} = \Phi''_{yx} = 0$, $F'_x = -1$, $F'_y = 1$, $\Delta_0 = -2 - 2 =$

$= -4 < 0 \Rightarrow$ т. $M_0(1,5; 1,5)$ — т. условного максимума ►

Для функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии m уравнений связи $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $i = \overline{1, m}$, функция Лагранжа будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой $(n + m)$ уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.2)$$

12.3. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Линии как пересечение двух поверхностей

12.3.1. Уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой в R^3

Каждой т. $M(x, y, z)$ кривой L в пространстве соответствует радиус-вектор $\overline{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (рис. 12.4). Пусть проекции век-

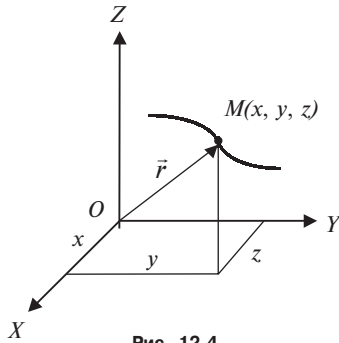


Рис. 12.4

тора \vec{r} являются функциями параметра t : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, тогда $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

О: Параметрическими уравнениями линии L в пространстве называются $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, векторным уравнением — $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r}(t)$ называется векторной функцией от скалярного аргумента t . Линия L , описываемая концом радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$, называется годографом вектора $\vec{r}(t)$.

О: $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ называется пределом $\vec{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$

$$\left(\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \right), \text{ если } \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0.$$

Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной в т. $t = t_0$, если она определена в ее окрестности и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

О: Производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ по аргументу t называ-

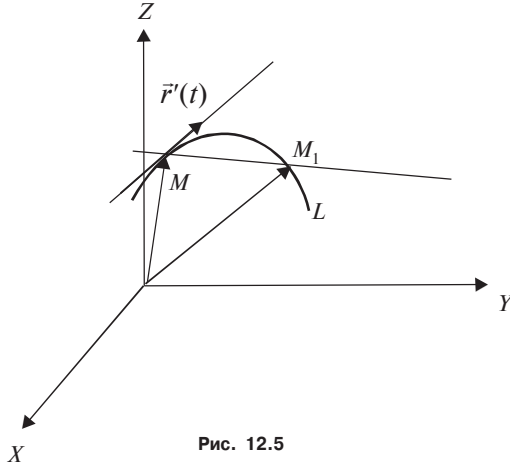
$$\text{ется } \vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Справедливы формулы [3. С. 308]:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k},$$

$$\vec{r}''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}.$$

Выясним направление вектора $\vec{r}'(t)$. Так как при $\Delta t \rightarrow 0$ т. $M_1(\vec{r}(t + \Delta t))$ приближается к т. $M(\vec{r}(t))$, то направление секу-



шей MM_1 в пределе дает направление касательной (рис. 12.5). Следовательно, вектор $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к кривой L в т. M .

Запишем канонические уравнения касательной к L , проходящей через т. M_0 , учитывая, что ее направляющий вектор $\vec{s} = \vec{r}'(t_0)$:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Нормалей к L в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно провести бесчисленное множество. Все они лежат в плоскости, перпендикулярной к касательной прямой, которая называется нормальной плоскостью. Уравнение нормальной плоскости запишется как уравнение плоскости, проходящей через т. M_0 перпендикулярно вектору $\vec{r}'(t_0)$: $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$.

Пример: Написать уравнение касательной к винтовой линии L : $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t/\pi$ при $t = \pi/2$.

$$\leftarrow x'(t) = -2\sin t, \quad y'(t) = 2\cos t, \quad z'(t) = 1/\pi,$$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{-2, 0, \frac{1}{\pi}\right\}, M_0\left(0, 2, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-0,5}{1/\pi} \text{ — уравнение}$$

искомой касательной \blacktriangleright

О: Касательной плоскостью к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в т. $M(x, y, z)$ называется плоскость, в которой расположены касательные ко всем линиям, лежащим на поверхности и проходящим через т. M .

Т: Если в т. M поверхности с уравнением $F(x, y, z) = 0$ существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$,

причем $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \neq 0$, то в т. M существует ка-

сательная плоскость ■

□ Пусть линия L , определяемая параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$: $L \subset \Omega$ и т. $M \in L$. Запишем уравнение L в векторной форме: $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Тогда вектор $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ направлен по касательной к линии L в т. M (рис. 12.6). ☒

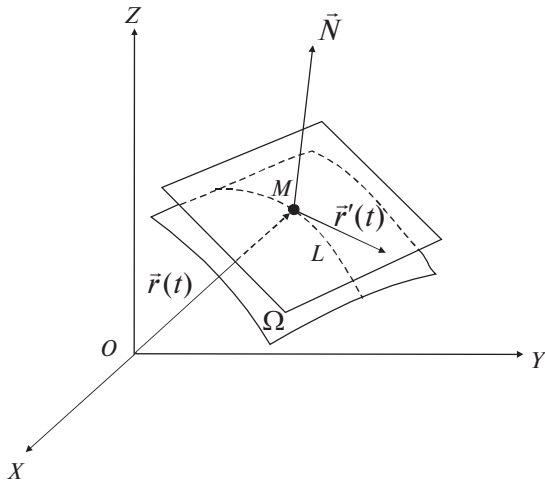


Рис. 12.6

Для сложной функции $F(x(t), y(t), z(t))$ в силу того, что L лежит на поверхности Ω , $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = 0$. Такое равенство является условием перпендикулярности векторов

$$\vec{r}'(t) \text{ и } \vec{N} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\}.$$

Таким образом, все касательные к кривым, проходящим через т. M и лежащим на поверхности, будут перпендикулярны вектору \vec{N} , т.е. будут лежать в одной плоскости. \square

Используя уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, из доказательства теоремы получаем, что уравнение касательной плоскости, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{M_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{M_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{M_0} (z - z_0) = 0.$$

Уравнения нормали, т.е. прямой, перпендикулярной к касательной плоскости в т. M_0 :

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{M_0}}.$$

Пример: Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\Omega: x^2 - y^2 - z = 0$ в т. $M_0(1, 1, 2)$.

$$\left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{M_0} = (2x)_{M_0} = 2, \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{M_0} = (-2y)_{M_0} = -2, \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{M_0} = -1. \right.$$

Уравнение касательной плоскости $2(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 2) = 0$.

$$\text{Уравнение нормали } \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 2}{-1} \blacktriangleright$$

Пусть линия L в пространстве задана как пересечение двух поверхностей, т.е. ее уравнения
$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Касательной к линии L в т. M_0 в данном случае будет прямая пересечения касательных плоскостей к данным поверхностям в т. M_0 . Направляющий вектор \vec{S} вычисляется по формуле

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{M_0} & \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_{M_0} & \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_{M_0} \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{M_0} & \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_{M_0} & \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_{M_0} \end{vmatrix}.$$

Литература: [3. С. 243–332]; [4. С. 236–288]; [5. С. 322–341]; [10. С. 347–376]; [16. С. 291–304].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ПЕРВОЙ ЧАСТИ

1. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. — М.: Высш.школа, 1978. Т.1. — 384 с.
2. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. — М.: Наука, 1988. — 816 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1978. Т.1. — 456 с.
4. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988. — 816 с.
5. Высшая математика / Под ред. Г.М. Яковлева. — М.: Промсвещение, 1988. — 431 с.
6. Виноградов И.М. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1986. — 176 с.
7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 431 с.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1984. — 180 с.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1988. — 432 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. Т.1. — 607 с.
12. Данилов Ю.М., Журбенко Л.И., Никонова Г.А. Высшая математика. Учеб. пособие. — Казань: КГУ, 2000. — 380 с.
13. Баврин И.И. Высшая математика. — М.: Высш. школа, 2001. — 616 с.
14. Гусак А.А. Высшая математика. — Мн.: «ТетраСистемс», 2003. Т. 1. — 543 с.
15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. — М.: Высш. школа, 1998. Т. 1. — 686 с.
16. Щипачев В.С. Высшая математика. — М.: Высш. школа, 2003. — 479 с.

Часть 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваются интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных, элементы теории функций и функционального анализа, обыкновенные дифференциальные уравнения. Содержатся сведения о комплексных числах (к.ч.)

Глава 5

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

13. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Опорный конспект № 13

13.1. Алгебраическая форма к.ч.

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, $i = \sqrt{-1}$, ($i^2 = -1$) — мнимая единица,

$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ — действительная и мнимая части

Равенство к.ч.: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$

$\bar{z} = x - iy$ — комплексно-со-

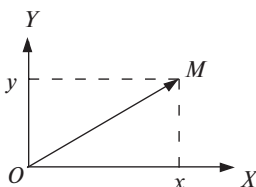
пряженное к z

На комплексной плоскости:

z — точка $M(x, y)$ или \overline{OM}

OX — действительная ось,

OY — мнимая ось



13.2. Действия над к.ч. в алгебраической форме

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$1) z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

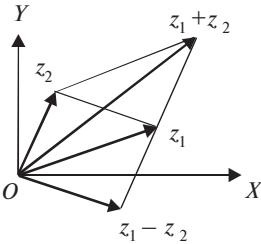
$$2) z_1 - z_2 = z \Leftrightarrow z + z_2 = z_1$$

3) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (по правилу умножения многочленов, $i^2 = -1$)

$$4) \frac{z_1}{z_2} = z \Leftrightarrow z z_2 = z_1$$

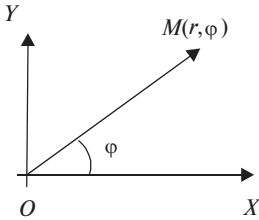
Правило:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{z_2 \overline{z_2}}, \quad z_2 \overline{z_2} = x_2^2 + y_2^2$$



13.3. Тригонометрическая и показательная форма к.ч.

$$r = |\overline{OM}| = |z|, \quad \varphi = (\overline{OX}, \overline{OM}) = \text{Arg } z$$



Главное значение:

$$\arg z \in [0, 2\pi) \text{ или } \arg z \in (-\pi, \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \text{ — формула Эйлера } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = r e^{i\varphi} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|,$$

$$\text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2 + 2k\pi.$$

13.4. Умножение и деление в тригонометрической и показательной формах

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

$$1) z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

13.5. Возведение в степень n ($n \in \mathbb{N}$) и извлечение корня степени n из к.ч.

$$1) \underbrace{z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\begin{aligned}
 2) \sqrt[n]{z} = w &\Leftrightarrow w^n = z, \quad w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \\
 &= \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi/n + 2k\pi/n)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \\
 k &= 0, n-1
 \end{aligned}$$

13.1. Алгебраическая форма к.ч., его изображение на комплексной плоскости

К понятию комплексного числа приходят при рассмотрении уравнения $z^2 + 1 = 0$. Отсутствие действительных чисел, ему удовлетворяющих, приводит к необходимости введения нового условного числа — мнимой единицы i , определяемой равенством $i^2 = -1$. Тогда $z = \pm i$ — решения уравнения.

О: Комплексным числом называют выражение $x + iy$, где $x, y \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1$, i — мнимая единица.

Такая форма называется алгебраической формой записи к.ч., x — действительной (Re), y — мнимой (Im) частями к.ч. Обозначим $x + iy = z$. Тогда $x = \operatorname{Re}z$, $y = \operatorname{Im}z$. К.ч. $z = yi$ (при $x = 0$) называется чисто мнимым. Множество всех комплексных чисел обозначают $\mathbf{C} = \{z: z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}\}$ ($\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$).

Равенство к.ч. $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

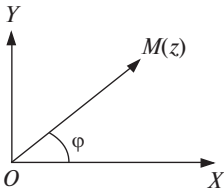


Рис. 13.1

Нулем называется к.ч. $z = x + iy = 0$ при $x = y = 0$. Изображается к.ч. $z = x + iy$ точкой $M(x, y)$ плоскости XOY или радиус-вектором \overline{OM} т. M (рис. 13.1). Такая плоскость называется комплексной, OX — действительной, OY — мнимой осями.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются комплексно-сопряженными.

Например, $z = -3 + 2i$ и $\bar{z} = -3 - 2i$.

13.2. Действия над к.ч. в алгебраической форме

1) Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Сложение к.ч.: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2) Вычитание к.ч.: $z = z_1 - z_2 \Leftrightarrow z + z_2 = z_1$.

Используя сложение к.ч., имеем $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Сумму и разность к.ч. можно изобразить геометрически на комплексной плоскости, используя правило сложения и вычитания векторов (рис.13.2):

$$\vec{OM} = \{z_1 + z_2\} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2,$$

$$\vec{ON} = \{z_1 - z_2\} = \vec{OM}_1 - \vec{OM}_2.$$

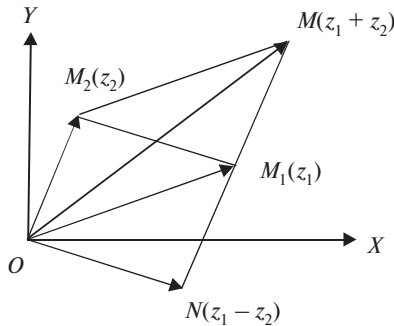


Рис. 13.2

3) Умножение к.ч.: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Таким образом, при умножении к.ч. скобки раскрываются по правилу умножения многочленов.

Пример:

$$(3 - 5i)(2 + 3i) = 6 + 9i - 10i - 15i^2 = (6 + 15) - i = 21 - i.$$

4) Деление к.ч.: $z = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z z_2 = z_1$, $z_2 \neq 0$. Умножим $z z_2 = z_1$ на \bar{z}_2 , затем поделим на действительное число $z_2 \bar{z}_2 = x_2^2 + y_2^2$, тогда

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}.$$

Пример:

$$\frac{3-5i}{2+3i} = \frac{(3-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i-10i+15i^2}{4+9} = \frac{-9-19i}{13} = -\frac{9}{13} - \frac{19}{13}i.$$

13.3. Тригонометрическая и показательная формы к.ч.

Изобразим к.ч. $z = x + iy$ радиус-вектором \overrightarrow{OM} на комплексной плоскости (см. рис.13.1). Назовем $|\overrightarrow{OM}| = r = |z|$ модулем к.ч., угол между осью OX и радиус-вектором OM , отсчитываемый в положительном направлении, $\varphi = (\widehat{OX, \overrightarrow{OM}}) = \text{Arg } z$ — аргументом к.ч. Очевидно, что $\text{Arg } z$ определяется неоднозначно. Главным значением $\text{Arg } z$ назовем $\arg z$, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ или $-\pi \leq \arg z \leq \pi$. Тогда $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что для $z = 0$ аргумент не определен. Из $\triangle OMN$ (см. рис. 13.1) имеем:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (13.1)$$

т.е. $z = x + iy$ представляется в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Такая форма записи называется тригонометрической формой к.ч.

При переходе от алгебраической к тригонометрической форме используем формулы (13.1) и соотношения $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$.

Пример: $z = 1 - i$ записать в тригонометрической форме.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft r &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}, \quad r = \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

(Для нахождения φ можно также использовать равенства $\text{tg } \varphi = -1$ и $z = 1 - i$) \blacktriangleright

Введем обозначение, называемое формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Тогда получим показательную форму записи к.ч.: $z = r e^{i\varphi}$. В примере $z = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Очевидно, что два комплексных числа в тригонометрической или показательной форме $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ равны тогда и только тогда, когда $|z_1| = |z_2|$, $\text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.4. Умножение и деление к.ч. в тригонометрической и показательной формах

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

1) Умножение к.ч.:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (13.2)$$

□ Используя умножение к.ч. в алгебраической форме, т.е. раскрывая скобки по правилу умножения многочленов, имеем

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad \square \end{aligned}$$

2) Деление к.ч.:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

$$\begin{aligned} \square \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad \square \end{aligned}$$

Умножение и деление к.ч. в показательной форме:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

13.5. Возведение в целую положительную степень и извлечение корня n -й степени из к.ч.

|| **O:** $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n, n \in \mathbb{N}$

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi}$, тогда из формулы умножения (13.2) имеем

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}. \quad (13.3)$$

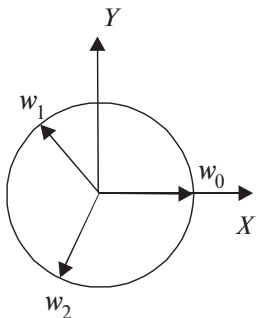
|| **O:** $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi}$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, тогда из формулы (13.3) возведения к.ч. в степень следует, что $z = \rho^n e^{in\theta}$. Используя равенство к.ч., получим

$$z = \rho^n \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = 2k\pi = n\theta \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Окончательно $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi/n + 2k\pi/n)}$.

При $k = \overline{0, n-1}$ будем иметь различные значения $\sqrt[n]{z}$, при $k = n$ получим $w_n = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{2\pi i} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} = w_0$.



Таким образом, $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений, которые располагаются на комплексной плоскости w на окружности радиусом $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат и делят ее на n равных частей. Для $\sqrt[n]{0}$ имеем одно значение 0.

Пример: Найти все значения (действительные и мнимые) $w = \sqrt[3]{1}$.

$$\leftarrow \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{i \cdot 0}} = e^{i(0 + \frac{2k\pi}{3})} = e^{i \frac{2k\pi}{3}}, \quad w_0 = e^{i \cdot 0} = 1,$$

$$w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{рис.13.3}) \blacktriangleright$$

Литература: [5. С. 312–318]; [7. С. 402–404]; [15. С. 214–218].

14. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Опорный конспект № 14

14.1. Области и линии на комплексной плоскости Z . Понятие ФКП

Комплексная плоскость вместе с $z = \infty$ — расширенная комплексная плоскость Z

O: Окрестность $U_\delta(z_0) \Leftrightarrow z: |z - z_0| < \delta$

O: $w = f(z)$, $z \in D \subset Z$, $w \in G \subset W \Leftrightarrow D \xrightarrow{f} G: \forall z \in D \exists w \in G$

$W = f(z)$ — однозначная или многозначная ФКП

$W = f(z): D \Leftrightarrow G \Leftrightarrow f(z)$ — однолистка

$z = x + iy$, $w = u + iv \Rightarrow w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$,
 $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$

$z = r e^{i\varphi} \Rightarrow w = f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$

14.2. Предел и непрерывность ФКП

O: $a = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon.$

T: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a_1,$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = a_2 \quad (a = a_1 + ia_2).$

O: $w = f(z)$ непрерывна в т. $z_0 \Leftrightarrow$

1) $f(z)$ определена в $U_\delta(z_0)$;

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$

Непрерывность $f(z)$ в т. $z_0 \Leftrightarrow$

непрерывность $u(x, y)$, $v(x, y)$ в т. (x_0, y_0)

14.3. Производная ФКП. Условия Коши – Римана

О: $w = f(z)$ – однозначная ФКП,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Т: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – дифференцируема

в т. $z = x + iy \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (условия Коши – Римана)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

14.4. Понятие аналитической функции. Сопряженные гармонические функции

О: Однозначная функция $w = f(z)$ аналитическая в т. $z = z_0 \Leftrightarrow f(z)$ дифференцируема в $U_\delta(z_0)$

Однозначные функции $w = z^n, n \in \mathbf{N}, z \neq 0, w = e^z, w = \sin z, w = \cos z$ аналитичны в Z

О: $u(x, y), (x, y) \in D$, – гармоническая в $D \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

непрерывны и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Т: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в $D \Leftrightarrow u(x, y), v(x, y)$ – гармонические в D

О: $u(x, y), v(x, y)$ – сопряженные гармонические функции при выполнении условий Коши – Римана

Т: $u(x, y)$ – гармоническая в $D \Rightarrow \exists$ сопряженная к ней гармоническая функция $v(x, y)$ такая, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в D

14.1. Области и линии на комплексной плоскости. Понятие функции комплексного переменного

Введем топологию комплексной плоскости.

О: Окрестностью $U_\delta(z_0)$ точки z_0 на комплексной плоскости Z называется множество точек z , удовлетворяющих неравенству: $|z - z_0| < \delta, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$.

Определения открытого множества, области и ее границы на комплексной плоскости совпадают с соответствующими определениями в \mathbf{R}^2 (см. разд. 11).

Области на комплексной плоскости Z в простейших случаях задаются неравенствами, содержащими комплексную переменную $z = x + iy$.

Примеры:

1. Область $D: |z - z_0| < R$ — множество точек круга радиусом R с центром в т. z_0 .

2. Область $D: \operatorname{Re} z > 0$ — множество точек правой полуплоскости ($x > 0$).

Уравнение кривой L на комплексной плоскости может быть задано в параметрическом виде $z(t) = x(t) + iy(t)$ или в виде $F(x, y) = 0$. Во втором случае заменой $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ оно приводится к виду $F^*(z, \bar{z}) = 0$.

Примеры:

1. $L: z = Re^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$ — окружность с центром в т. O радиусом R , так как $z = R(\cos t + i \sin t) \Leftrightarrow x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Другая запись этого уравнения окружности $|z| = R$.

2. $L: z(i + 1) + \bar{z}(i - 1) - 2 = 0$ — прямая, так как при подстановке $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ имеем $x + y - 1 = 0$.

Для нужд теории функций комплексного переменного к конечным (называемым еще собственными) комплексным числам добавляют бесконечность ∞ (так называемое несобственное комплексное число). Комплексная плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой называется расширенной комплексной плоскостью. Окрестность $U_R(\infty)$ бесконечно удаленной точки задается неравенством $|z| > R$.

Пусть даны две расширенные комплексные плоскости: Z комплексных чисел $z = x + iy$, W комплексных чисел $w = u + iv$ и D, G — множества точек плоскостей Z, W соответственно.

О: Функцией комплексного переменного (ФКП) $w = f(z)$, $z \in D$, $w \in G$, называется соответствие между множествами D и G , при котором для каждого $z \in D$ существует одно или несколько $w \in G$. В первом случае $w = f(z)$ — однозначная,

во втором — многозначная функция ($w = f(z)$, $z \in D$, $w \in G \Leftrightarrow D \xrightarrow{\exists} G: \forall z \in D \exists w \in G$). Множество D называется областью определения, G — областью значений функции.

Для функции $w = f(z)$ можно выделить действительную и мнимую части. Подставляя $z = x + iy$, $w = u + iv$, имеем $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. При тригонометрической форме к.ч. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ имеем:

$$w = f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi).$$

Пример: $w = z^2$, $z \in \mathbf{Z}$ — однозначная ФКП.

$$\text{Так как } z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy, \text{ то } w = z^2 = \begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = xy. \end{cases}$$

В геометрическом смысле ФКП $w = f(z)$ называют отображением множества D в G , w — образом, z — прообразом.

О: Отображение $w = f(z)$ множества D в G называется однолистным, если между множествами D и G установлено взаимно однозначное соответствие.

Основные элементарные ФКП являются естественным распространением в комплексную область основных элементарных функций действительного переменного. Рассмотрим наиболее важные из них.

1. Показательная ФКП: $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Она удовлетворяет следующим свойствам:

$$1^0. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

$$2^0. e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}.$$

$$3^0. e^{z+2\pi i} = e^z,$$

т.е. показательная функция периодическая с периодом $2\pi i$.

2. Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ — обратная к $z = e^w$, $z \neq 0, \infty$. Получим формулу для вычисления $\operatorname{Ln} z$. Положим $w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$, тогда $re^{i\varphi} = e^u e^{iv} \Leftrightarrow r = e^u$, $v = \varphi + 2k\pi$ (см. разд. 13). Отсюда $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ или $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq \arg z < 2\pi$ ($-\pi \leq \arg z < \pi$). Таким образом, $\operatorname{Ln} z$ — бесконечнозначная функция. Значение при фиксирован-

ном k называется ветвью $\text{Ln } z$. Главное значение (главная ветвь)
 $\text{Ln } z = \ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Пример: Найти $\text{Ln}(-2)$.

$$\leftarrow -2 = 2e^{i\pi} \Rightarrow \text{Ln}(-2) = \ln 2 + i\pi + 2\pi ki \rightarrow$$

3. Тригонометрические функции. Они определяются через показательную функцию из формулы Эйлера $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Так как $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$, то

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Естественно определить для к.ч. $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \text{tg } z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & \text{ctg } z &= \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ определены во всей комплексной плоскости Z ($z \neq \infty$) и принимают любые значения w ($w \neq \infty$). Для $w = \text{tg } z$, $w = \text{ctg } z$ имеем $z \neq \pi/2 + k\pi$, $z \neq k\pi$ соответственно ($k \in \mathbf{Z}$). Для тригонометрических ФКП справедливы те же свойства и формулы, что и для аналогичных функций действительного переменного.

14.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть дана последовательность комплексных чисел

$$\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}.$$

О: Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется пределом z_n при неограниченном возрастании n ($z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, что для $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Т: Для того чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, необходимо и достаточно вы-

полнения $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ ■

Доказательство в [18. С. 66].

Пусть $w = f(z)$ — однозначная функция, определенная в D за исключением, быть может, $z = z_0$.

О: Число a называется пределом $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ ($a = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$),

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - a| < \varepsilon$.

Т: Для существования $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ необходимо и достаточно,

чтобы

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a_1, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = a_2,$$

если $a = a_1 + ia_2$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ■

Доказательство теоремы в [18. С. 77]. Она позволяет перенести основные теоремы о пределах функций действительного переменного на ФКП.

О: Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в т. z_0 , если

1) $f(z)$ определена в т. z_0 и ее окрестности;

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Из вышеприведенной теоремы следует, что последнее равенство эквивалентно двум равенствам $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$,

$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$, т.е. непрерывность $f(z)$ в т. z_0 экви-

валентна непрерывности ее действительной и мнимой частей $u(x, y)$, $v(x, y)$ в т. (x_0, y_0) . Отсюда следует, что для $f(z)$, $g(z)$, как и для функций действительного переменного, сумма, разность, произведение, частное (при $g(z_0) \neq 0$) этих функций непрерывны в т. z_0 .

14.3. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана

Понятие производной вводится для однозначной в D функции $w = f(z)$.

О: Приращением функции $w = f(z)$ в т. z называется

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Производной $f'(z)$ функции $w = f(z)$ в т. z называется

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \text{ если предел существует и конечен при лю-}$$

бом способе стремления Δz к 0. Функция, имеющая производную в т. z , называется дифференцируемой в этой точке.

Для дифференцирования многозначной функции необходимо выделить ее однозначную ветвь.

Как и для функции действительного переменного, дифференцируемая в т. z функция $f(z)$ является непрерывной в т. z . Сохраняются основные правила дифференцирования, что следует из определения производной, правил алгебраических действий и справедливости теорем о пределах.

Т: Пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в т. z . Для того чтобы однозначная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в т. $z = x + iy$, необходимо и достаточно выполнения условий Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \blacksquare \quad (14.2)$$

Доказательство теоремы приведено в [18. С. 99].

Используя условия Коши—Римана (14.2), для $f'(z)$ имеем следующие формулы:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (14.3)$$

Однозначные основные элементарные ФКП и однозначные ветви многозначных ФКП дифференцируемы в своих областях

определения. Производные $f'(z)$ вычисляются по тем же формулам, что и функции действительного переменного.

14.4. Понятие аналитической функции. Сопряженные гармонические функции

О: Однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической (регулярной, голоморфной) в т. $z = z_0$, если она дифференцируема в некоторой окрестности $U_\delta(z_0)$ точки z_0 . Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области D , если она аналитическая в каждой точке D .

Однозначные основные элементарные функции $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = z^n$ ($n \in \mathbf{N}$), $z \neq 0$ являются аналитическими в Z ($z \neq \infty$).

Примером дифференцируемой, но не аналитической в точке функции является $w = \bar{z}^2$. Действительно,

$$u + iv = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y,$$

т.е. условия Коши–Римана выполняются для $w = \bar{z}^2$ только в т. $z = 0$. Таким образом, она в этой точке дифференцируема, но не аналитическая.

Отметим, что аналитическая в D функция $w = f(z)$ имеет в D производные любого порядка [18. С. 125].

О: Функция двух переменных $u(x, y)$, $(x, y) \in D$, называется гармонической в D , если имеет в D непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет

$$\text{уравнению Лапласа: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\Delta u = 0).$$

Т: Действительная и мнимая части аналитической в D функции $f(z)$ являются гармоническими функциями ■

□ Для аналитической функции выполняются условия Коши–Римана (14.2). Продифференцируем первое равенство условий

по x , второе — по y : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$. Частные произ-

водные второго порядка существуют и непрерывны в силу существования производных любого порядка для аналитической функции, поэтому

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$. По определению $u(x, y)$ —

гармоническая функция. Аналогично доказывается гармоничность $v(x, y)$ \boxtimes

О: Две гармонические функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ называются сопряженными гармоническими, если они связаны условиями Коши–Римана (14.2).

Т: Для всякой гармонической функции $u(x, y)$, заданной в односвязной области D , существует единственная, с точностью до произвольной постоянной, сопряженная к ней функция $v(x, y)$ такая, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая в D \blacksquare

Если z_0 — точка аналитичности $f(z)$, то по известной гармонической функции $u(x, y)$ можно найти $f(z)$, пользуясь формулой

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - u(x_0, y_0) + iC,$$

C — действительная постоянная.

Пример: $u = y^3 - 3x^2y$ — гармоническая в Z . Найти $f(z)$.

◀ Пусть $z_0 = (0, 0)$. Тогда

$$f(z) = 2\left(\left(\frac{z}{2i}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{z}{2i}\right) + iC = 2\left(\frac{z^3}{-8i} - \frac{3z^3}{8i}\right) + iC = i(z^3 + C) \blacktriangleright$$

Литература: [2. С. 351–413]; [18. С. 62–127].

Глава 6

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

15. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Опорный конспект № 15

15.1. Понятие первообразной и н.и.

$\int f(x) dx = F(x) + c$ — совокупность первообразных,
 $F'(x) = f(x)$, $c = \text{const}$

15.2. Свойства н.и.

1⁰. $(\int f(x) dx)' = f(x)$

2⁰. $\int dF(x) = F(x) + c$

3⁰. $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$

4⁰. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$

5⁰. $\int f[\varphi(t)] d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + c$

Частный случай $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$

15.3. Таблица интегралов

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$,

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$,

3) $\int \sin x dx = -\cos x + c$,

4) $\int \cos x dx = \sin x + c$,

$$5) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$$

$$6) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$7) \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + c,$$

$$8) \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + c,$$

$$9) \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

$$10) \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c,$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c,$$

$$13) \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c,$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c,$$

$$15) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,$$

$$16) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

15.4. Методы интегрирования

15.4.1. Метод разложения (3^0 , 4^0)

15.4.2. Метод замены переменной

$$\int f(x) dx = \left. \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

15.4.3. Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Применяется для:

$$1) \int P(x) \begin{cases} a^x \\ e^{kx} \end{cases} dx, \quad P(x) \text{ — многочлен,}$$

$$\int P(x) \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} dx, \quad P(x) = u;$$

$$2) \int P(x) \log_a x dx, \int P(x) \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcctg} x \end{cases} dx,$$

$$P(x)dx = dv$$

$$3) \int e^{ax} \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases} dx$$

15.1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла

Рассмотрим задачу, обратную задаче нахождения производной от заданной дифференцируемой функции: найти $F(x)$, если известны ее производная $F'(x) = f(x)$ или дифференциал $dF(x) = f(x)dx$. Физический смысл такой задачи можно пояснить следующим примером: по заданной скорости неравномерного прямолинейного движения найти его закон $s(t)$.

О: Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на открытом или закрытом промежутке X , если $F'(x) = f(x) \forall x \in X$.

Пример: $f(x) = x^2$, $F(x) = x^3/3$.

Т.1: (теорема существования) Любая непрерывная на X функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на X : $f(x) \in C[X] \Rightarrow \exists F(x)$, $\forall x \in X: F'(x) = f(x)$ ■

Функция $f(x)$ на X может иметь бесконечно много первообразных. Так, для $f(x) = x^2$ первообразной является $F(x) = x^3/3 + c$, $\forall c = \text{const}$.

Т.2: Если $F(x)$ и $F_1(x)$ — две первообразные для $f(x)$ на X , то разность между ними равна постоянной ■

□ Обозначим $F(x) - F_1(x) = \varphi(x)$, тогда $\varphi'(x) = F'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0 \forall x \in X$. Пусть $x_1, x_2 \in X$. Применим теорему Лагранжа для $\varphi(x)$ на $[x_1, x_2]$: $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \xi < x_2$, откуда $\varphi(x_2) = \varphi(x_1) \forall x_1, x_2 \in X \Rightarrow \varphi(x) = \text{const}$ на X □

Следствие. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на X , то $F(x) + c$, $c = \text{const}$ — множество всех первообразных для $f(x)$.

О: Неопределенным интегралом (н.и.) от функции $f(x) \forall x \in X$ называется совокупность всех первообразных этой функции.

Обозначение н.и.: $\int f(x) dx = F(x) + c$.

Функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, нахождение н.и. от функции $f(x)$ — интегрированием $f(x)$.

Геометрический смысл н.и. следует из геометрического смысла производной: уравнение $y = F(x) + c$ на плоскости XOY определяет семейство кривых (называемых интегральными кривыми), для которых в точке с абсциссой x угловой коэффициент касательных равен $f(x)$ (рис.15.1). Физический смысл н.и.: $\int v(t) dt = s(t) + c$, т.е. н.и. от скорости неравномерного прямолинейного движения дает зависимость пути от времени.

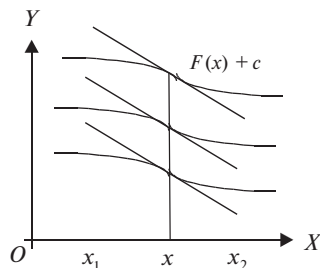


Рис. 15.1

15.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1⁰. Производная от н.и. равна подынтегральной функции, а дифференциал — подынтегральному выражению: $(\int f(x) dx)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2⁰. $\int dF(x) = F(x) + c$, в частности, $\int dx = x + c$.

Свойства 1⁰, 2⁰ следуют из определения н.и.

3⁰. Н.и. от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме н.и. от каждого слагаемого.

□ Докажем, что $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$. (Равенство понимается с точностью до постоянного слагаемого.) Дей-

ствительно, по 1⁰: $(\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx)' = f_1(x) \pm f_2(x)$, $(\int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx)' = (\int f_1(x) dx)' \pm (\int f_2(x) dx)' = f_1(x) \pm f_2(x)$. Таким образом, левая и правая части имеют одинаковые производные и могут отличаться лишь постоянной \square

4⁰. Постоянный множитель можно выносить за знак н.и.:

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, c = \text{const.}$$

5⁰. Независимость вида н.и. от выбора аргумента (инвариантность формы интеграла): $\int f[\varphi(t)] d\varphi = F[\varphi(t)] + c$, где $F'(x) = f(x)$, $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную.

\square Действительно, по свойству инвариантности формы дифференциала: $d[F[\varphi(t)] + c] = F'[\varphi(t)]d\varphi(t) = f[\varphi(t)]d\varphi(t)$ \square

Частным случаем 5⁰ является $\int f(ax + b)d(ax + b) = F(ax + b) + c$.

Очевидно, учитывая, что $d(ax + b) = a dx$, получаем формулу

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

15.3. Таблица неопределенных интегралов

Используя определение н.и. и таблицу производных (разд. 9.6), можно записать таблицу н.и. (см. опорный конспект № 15). Все формулы таблицы могут быть проверены нахождением производной от правой части — она равна подынтегральной функции.

15.4. Методы интегрирования

15.4.1. Метод разложения

Основан на разложении подынтегральной функции на сумму функций и дальнейшем использовании свойств 3⁰ и 4⁰. Применяется, если интегралы от слагаемых являются табличными или если известен метод их нахождения.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x^2 e^x - 3}{x^2} dx &= \int \left(x + e^x - \frac{3}{x^2} \right) dx = \\ &= \int x dx + \int e^x dx - 3 \int \frac{dx}{x^2} = \frac{x^2}{2} + e^x + \frac{3}{x} + c. \end{aligned}$$

15.4.2. Метод замены переменной (подстановки)

Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную, тогда $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$.

Формула следует из свойства 5⁰ для н.и. Она может быть использована в следующем виде:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(x), \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right\} = \int f(t) dt.$$

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int \operatorname{tg} x \, dx &= \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + c = -\ln |\cos x| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{1}{a} dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t, \\ \frac{1}{a} dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c. \end{aligned}$$

В этих примерах методом подстановки получены табличные интегралы 7, 15, см. ОК № 15.

15.4.3. Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные, тогда $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ — формула интегрирования по частям. Она применяется, если $\int v \, du$ более прост для интегрирования, чем $\int u \, dv$ (см. ОК № 15).

□ $d(uv) = v \, du + u \, dv \Rightarrow \int u \, dv = \int d(uv) - \int v \, du = uv - \int v \, du$ (см. свойство 2⁰) ☒

Примеры:

$$1) \quad \int x \sin 3x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u, \, du = dx, \\ \sin 3x \, dx = dv, \, v = \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx = -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + c.$$

$$2) \int \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = u, \, du = \frac{dx}{x}, \\ dx = dv, \, v = \int dx = x \end{array} \right\} =$$

$$= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

$$3) \int e^{2x} \sin 3x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{2x} = u, \, du = 2e^{2x} dx, \\ \sin 3x \, dx = dv, \, v = \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{2x} = u, \, du = 2e^{2x} dx \\ \cos 3x \, dx = dv, \, v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x \, dx \right).$$

Обозначим $\int e^{2x} \sin 3x \, dx = I$, тогда

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13}{9} I = \frac{e^{2x}}{9} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + c.$$

Литература: [2. С.289–302]; [4. С. 242–254]; [5. С. 289–298]; [6. С. 159–166]; [8. С. 214–222].

16. КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Опорный конспект № 16

16.1. Интегрирование рациональных дробей

$$\text{О: } R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n} \Rightarrow \begin{cases} \text{неправильная,} \\ \text{если } m \geq n \\ \text{правильная,} \\ \text{если } m < n \end{cases}$$

$$\text{Неправильная } R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_l(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

Правильная $R(x) = \Sigma$ простейших дробей 1–4 типов:

$$1 \text{ тип: } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c,$$

$$2 \text{ тип: } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c,$$

$$3 \text{ тип: } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \begin{cases} t = \frac{1}{2}(x^2+px+q)' = x + \frac{p}{2} \\ x^2+px+q = t^2+q - \frac{p^2}{4} \end{cases},$$

$$4 \text{ тип: } \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx$$

Пусть $Q_n(x) = (x-a_1) \dots (x-a_l)(x-b)^k(x^2+px+q) \Rightarrow$

$$\text{правильная } R(x) = \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_l}{x-a_l} + \frac{B_k}{(x-b)^k} +$$

$$+ \frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

16.2. Интегрирование тригонометрических функций

$$1. \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R^*(t) dt,$$

если $\operatorname{tg}(x/2) = t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \geq 0$, целые

а) $m = 2p + 1 \Rightarrow \cos x = t$

$$n = 2q + 1 \Rightarrow \sin x = t$$

б) $m = 2p$, $n = 2q \Rightarrow \sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$

3. $\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R^*(t) dt$,

если $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

16.3. Интегрирование иррациональных функций

1. $\int R(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_l]{(ax+b)^{m_l}}) dx = \int R^*(t) dt$,

если $ax + b = t^k$, k — общий знаменатель $\frac{m_j}{n_j}$, $j = \overline{1, l}$,

$$x = \frac{1}{a}(t^k - b), \quad dx = \frac{1}{a} k t^{k-1} dt$$

2. $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, замена $t = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right)' = x + \frac{b}{2a}$,

$$ax^2 + bx + c = at^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

3. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, замена $x = a \sin t$,

$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, замена $x = a \operatorname{tg} t$,

$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, замена $x = a/\cos t$

16.1. Интегрирование рациональных дробей

16.1.1. Понятие рациональной дроби

О: Рациональной дробью называется функция

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n},$$

где B_j, A_i — заданные коэффициенты, $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$. Рациональная дробь называется правильной, если $m < n$, неправильной, если $m \geq n$.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Действительно, пусть $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель, получим

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_k(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)}, k < n$, где $L_k(x)$ и остаток $r_k(x)$ — многочлены, а $\frac{r_k(x)}{Q_n(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Пример:

$$R(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2} = \left\{ \begin{array}{l} -x^3 \qquad \qquad \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 - x - 2 \\ x + 1 \end{array} \right. \\ \hline x^3 - x^2 - 2x \\ -x^2 + 2x \\ \hline -x^2 - x - 2 \\ \hline 3x + 2 = r(x) \text{ — остаток} \end{array} \right\} =$$

$$= x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2}.$$

Таким образом, $\int R(x) dx = \int L_l(x) dx + \int \frac{r_k(x)}{Q_n(x)} dx$, $r_k(x)$ — остаток.

Первый из этих интегралов легко вычисляется. Для того чтобы вычислить второй интеграл, надо подынтегральную функцию представить в виде суммы так называемых простейших рациональных дробей, а затем их проинтегрировать. Для этого рассмотрим простейшие рациональные дроби.

16.1.2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

1 тип.

$$\frac{A}{x-a}, \quad A, a \text{ — заданные числа } \in \mathbf{R}: \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c.$$

2 тип.

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \text{ — заданные числа } \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}:$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c.$$

3 тип. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, A, B, p, q — заданные числа $\in \mathbf{R}$. Квадратный

трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Интегрирование проводится путем выделения полного квадрата в знаменателе:

$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ и последующей заменой

$x + \frac{p}{2} = t$, т.е.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \\ x = t - \frac{p}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{A(t - \frac{p}{2}) + B}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt = A \int \frac{t dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}.$$

Первый интеграл при помощи замены $t^2 + q - p^2/4 = z$ приводится к табличному (ОК № 15, формула 2), второй является табличным (формула 15).

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5} &= \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4, \\ x+1 = t, \quad x = t-1, \quad dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t-1}{t^2+4} dt = \\ &= \int \frac{t dt}{t^2+4} - \int \frac{dt}{t^2+4} = \left\{ \begin{array}{l} t^2 + 4 = z, \\ 2t dt = dz \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \ln |z| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c. \end{aligned}$$

4 тип. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, A, B, p, q — заданные числа $\in \mathbf{R}$, x^2+px+q

не имеет действительных корней.

Интегрирование этой рациональной дроби содержится в [3. С.350].

16.1.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Пусть знаменатель правильной рациональной дроби

$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ может быть представлен в виде $Q_n(x) = (x - a_1) \dots \times (x - a_r)(x - b)^k(x^2 + px + q)$ (множителей вида $(x - b)^k$, $(x^2 + px + q)$ может быть несколько), где a_1, \dots, a_r, b, q, p — заданные числа $\in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Тогда $R(x)$ представляется в виде суммы простейших дробей 1–3 типов:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_l}{x-a_l} + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \\ &+ \frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \end{aligned}$$

где $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_k, M, N$ — неизвестные коэффициенты, которые находятся путем приведения суммы справа к общему знаменателю и последующего приравнивания полученного числителя к $P_m(x)$. Доказательство представлено в [3. С.354].

Примеры:

$$1) \frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$

$$2) \frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x-2},$$

$$3) \frac{x}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Два метода нахождения коэффициентов в разложении рассмотрим на примере.

Пример:

$$I = \int \frac{x^3}{x^2-x-2} dx.$$

◀ Поскольку $\frac{x^3}{x^2-x-2} = x+1 + \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}$ (см. пример в

п. 16.1.1), то

$$I = \int (x+1) dx + \int \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} dx.$$

Правильную рациональную дробь под интегралом представим в виде суммы простейших:

$$\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)},$$

$$3x+2 = A(x-2) + B(x+1). \quad (16.1)$$

Первый метод — метод неопределенных коэффициентов — заключается в приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях x в (16.1):

$$\begin{aligned} x: A + B = 3 \\ x^0: -2A + B = 2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 3 \\ 3A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = 2\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Второй метод — метод частных значений — заключается в подстановке значений x в (16.1), в первую очередь, корней знаменателя:

$$\begin{aligned} x = -1: -3A = -1 \\ x = 2: 3B = 8 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = 2\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{8}{3} \ln|x-2| + c \blacktriangleright$$

16.2. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$ (рациональной функцией $R(u, v)$ называется зависимость, связывающая переменные u и v с помощью четырех арифметических операций).

Интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби $R(t)$ путем так называемой универсальной подстановки $\operatorname{tg}(x/2) = t$,

$x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$. Найдем, используя тригонометрические

формулы, выражения для $\sin x$ и $\cos x$ через t :

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример: $\int \frac{dx}{\sin x} = \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$

Укажем случаи, когда более выгодными являются другие подстановки.

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \geq 0$, целые числа.

а) $m = 2p + 1 \Rightarrow \cos x = t$; $n = 2q + 1 \Rightarrow \sin x = t$. Действительно,
 $\int \sin^{2p+1} x \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p \cos^n x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x d\cos x =$
 $= \{\cos x = t\} = -\int (1 - t^2)^p t^n dt.$

Аналогично для $n = 2q + 1$.

б) $m = 2p$, $n = 2q \Rightarrow \sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.
 Переход к удвоенному аргументу приводит к понижению степени.

Пример:

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{dx}{4} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c.$$

3. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$. Замена вида $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$,
 $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводит к интегралу от рациональной функции $R^*(t)$.

Пример:

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \left\{ \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} =$$

$$= \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int (t^2 - 1) dt + \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + c = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + c.$$

16.3. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интеграл $\int R(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_l]{(ax+b)^{m_l}}) dx$,

$m_j, n_j, j = \overline{1, l}$ — целые числа. Замена вида $ax + b = t^k$,

$dx = \frac{1}{a} kt^{k-1} dt$, где k — общий знаменатель $\frac{m_j}{n_j}$, $j = \overline{1, l}$, приводит

к интегралу от рациональной функции $R^*(t)$.

Пример:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{(\sqrt[3]{x} + 1)\sqrt[3]{x^4}} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{(t^2 + 1)t^8} =$$

$$= 6 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 6 \operatorname{arctg} t + c = 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + c.$$

Аналогично поступаем, если вместо линейной функции $ax + b$ стоит дробно-линейная $\frac{ax+b}{cx+d}$. Интегрирование некоторых других иррациональностей см. в ОК № 16.

Примеры:

$$1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \left\{ \begin{array}{l} x+1 = t, \quad x = t-1 \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{(t-1) dt}{\sqrt{t^2 + 1}} =$$

$$= \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + 1}} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \sqrt{t^2 + 1} - \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + c =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + c.$$

$$2) \int \sqrt{4 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t \end{array} \right\} = \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt =$$

$$= \int 4 \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + c = 2t + 2 \sin t \cos t + c =$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + c.$$

Замечание. В 16.1–16.3 рассмотрены классы интегрируемых функций. Но можно привести многочисленные примеры интегралов от элементарных функций, которые существуют, но не выражаются через элементарные функции. Например,

$\int e^{-x^2} dx$ — интеграл Пуассона,

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ — интегральный синус,

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ — интегральный косинус,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм,

$\int \sin^2 x dx$ — } интегралы
 $\int \cos^2 x dx$ — } Френеля,

$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \quad k \neq 0; 1.$

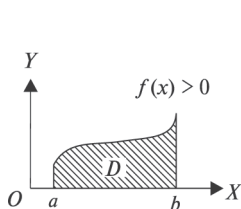
Для их решения можно воспользоваться, например, разложением подынтегральной функции в ряд.

Литература: [1. С. 203–227]; [5. С. 255–262]; [6. С. 309–329]; [7. С. 167–176].

17. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Опорный конспект № 17

17.1. Задачи о площади, работе. Понятие о.и.



$$\text{О: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

$$S_D = \int_a^b f(x) dx$$

$A = \int_a^b f(x) dx$ — работа силы $|\overline{F}| = f(x)$, направление которой

совпадает с OX , на $[a, b]$

17.2. Свойства о.и.

$$1^0. \int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx$$

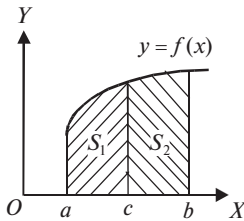
$$2^0. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k = \text{const}$$

$$3^0. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$4^0. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$5^0. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

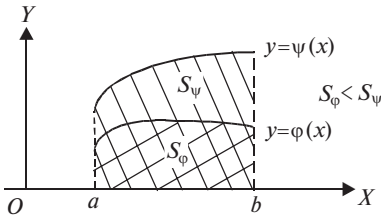
Геометрический смысл



$$(f(x) > 0) \\ S = S_1 + S_2$$

$$6^0. \varphi(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$$

Геометрический смысл

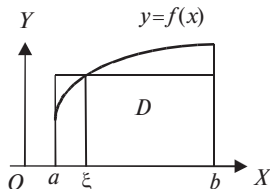


7⁰. Теорема о среднем
 $f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]:$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Геометрический смысл

$$S_D = S_{\square}$$



17.3. Формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad F'(x) = f(x)$$

17.4. Интегрирование заменой переменной и по частям в о.и.

1) Замена переменной:

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$$

2) Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

17.5. Несобственные интегралы (нс.и.)

17.5.1. Нс.и. с бесконечными пределами интегрирования

$$\text{О: } \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{— сходящиеся,}$$

если $\lim \exists$, конечен;

расходящиеся, если $\lim \nexists$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

17.5.2. Нс.и. от разрывных функций

$$\text{О: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx,$$

если $f(x) \in C_{[a,b]}$ и имеет разрыв 2-го рода при $x = b$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx,$$

если $f(x) \in C_{[a,b]}$ и имеет разрыв 2-го рода при $x = a$

17.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

17.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

О: Криволинейной трапецией называется фигура D с границей

$$\partial D: \begin{cases} y = f(x), & f(x) > 0, \\ x = a, & x = b \quad (a < b), \\ y = 0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ непрерывна (рис.17.1).

Найдем площадь криволинейной трапеции. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ точками $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b\}$ на n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Обозначим $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, выберем произвольные точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и построим ступенчатую фигуру из прямоугольников с высотами $f(\xi_i)$ и основаниями Δx_i . Площадь ступенчатой фигуры $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ и дает приближенное значение

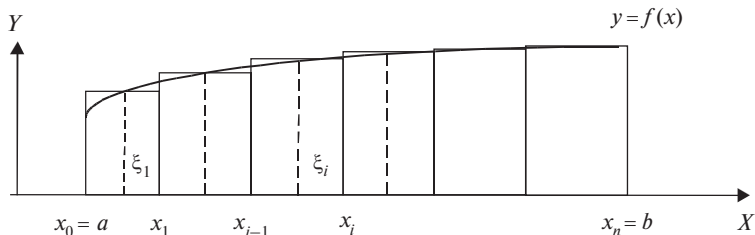


Рис. 17.1

ние площади криволинейной трапеции. За точное значение площади естественно принять $S_D = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

17.1.2. Задача о работе переменной силы

Найдем работу переменной силы $\vec{F}(x)$ с постоянным направлением, под действием которой материальная точка перемещается из положения $x = a$ в $x = b$ по прямой, направленной вдоль линии действия силы (рис. 17.2).

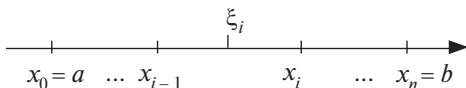


Рис. 17.2

Проведем разбиение, аналогично п. 17.1.1: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Будем считать, что на Δx_i , $i = \overline{1, n}$, величина силы имеет постоянное значение и равна $F(\xi_i)$, тогда работа силы на $[x_{i-1}, x_i]$ равна $F(\xi_i) \Delta x_i$,

а приближенное значение работы на всем пути $A \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i$ ($F = |\vec{F}|$). За точное значение принимаем $A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i$.

17.1.3. Понятие определенного интеграла

Пусть на $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Аналогично пункту 17.1.1 разобьем $[a, b]$ на n частей $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, выберем произвольные точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (17.1)$$

которая называется интегральной суммой.

О: Определенным интегралом (о. и.) от функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется предел ее интегральной суммы (17.1) при $\max \Delta x_i \geq 0$, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и от выбора $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Обозначение:
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Числа a и b называют нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией. Если для $f(x)$ на $[a, b]$ выполнены условия определения о.и., то $f(x)$ называют интегрируемой (по Риману) на $[a, b]$.

Т. существования: Если $f(x) \in C_{[a, b]}$, то она интегрируема на $[a, b]$ ■

Доказательство см. в [1. С. 259].

Из определения о.и. следует, что интеграл зависит от вида $f(x)$, пределов a, b , но не зависит от того, какой буквой обозначена переменная x , т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt. \tag{17.2}$$

Из п. 17.1.1 и 17.1.2 и определения о.и. получаем формулы

площади криволинейной трапеции: $S_D = \int_a^b f(x) dx$, работы силы

$$|\vec{F}| = f(x) \text{ на } [a, b]: A = \int_a^b f(x) dx.$$

17.2. Свойства определенного интеграла

$$1^0. \int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx.$$

□ По определению о.и. и теореме о пределе суммы

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm \varphi(\xi_i)] \Delta x_i =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta x_i = \\
&= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

$$2^0. \text{ Если } k = \text{const}, \text{ то } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство аналогично 1⁰.

$$3^0. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Свойство следует из смены знака Δx_i , $i = \overline{1, n}$, в интегральной сумме для $f(x)$.

$$4^0. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Свойство следует из 3⁰.

$$5^0. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b.$$

Доказательство следует из определения интеграла и теоремы о пределе суммы, если точку c выбрать точкой деления при составлении интегральной суммы для $f(x)$.

Свойство справедливо и при другом расположении точек a , b , c , если интегралы существуют. Из него следует интегрируемость непрерывной за исключением конечного числа разрывов 1-го рода на $[a, b]$ функции $f(x)$.

$$6^0. f(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

$$\square \quad \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)] \Delta x_i \leq 0 \quad \boxtimes$$

7⁰. Т. о среднем:

$$f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow \exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \blacksquare$$

□ $f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow f(x)$ принимает на $[a,b]$ наибольшее M и наименьшее m значения \Rightarrow по 6⁰ $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$. Используем 2⁰

$$\text{и } \int_a^b m dx = m \lim_{\max \Delta x_i} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a), \text{ тогда } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \Leftrightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu, m \leq \mu \leq M.$$

$$\text{Так как } f(x) \in C_{[a,b]}, \text{ то } \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \mu, \text{ т.е. } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \boxtimes$$

Теорема имеет наглядную геометрическую иллюстрацию при $f(x) > 0$ на $[a,b]$: $S_D = f(\xi)(b-a)$ — площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$ (рис. 17.3).

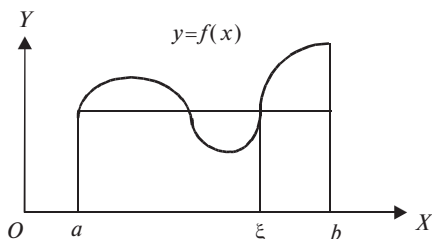


Рис. 17.3

17.3. Формула Ньютона—Лейбница

Вычисление о.и. по определению как предела интегральной суммы сопряжено с громоздкими выкладками и часто затруднительно. Вычисления значительно упрощаются, если использовать

формулу Ньютона—Лейбница. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq t \leq x.$$

Т.1: $f(x) \in C_{[a,b]}$, $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \Phi'(x) = f(x)$ ■

$$\begin{aligned} \square \quad \Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (f(\xi) \Delta x) = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in [x, x + \Delta x] \\ \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow x \end{array} \right\} = f(x). \end{aligned}$$

В цепочке равенств используются свойства 5⁰, 7⁰ ☒

Из Т.1 следует, что если $f(x) \in C_{[a,b]}$, то $f(x)$ имеет первообразную $\Phi(x)$, т.е. $\int_a^x f(t) dt$ (Т.1, разд. 15.1 доказана).

Т.2: Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется формулой Ньютона—Лейбница ■

☐ Так как наряду с $F(x)$ по Т.1 функция $f(x)$ имеет первообразную $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, то $\Phi(x) = F(x) + c$, $c = \text{const}$. При $x = a$ имеем

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + c = 0 \Rightarrow c = -F(a).$$

Таким образом, $\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$.

При $x = b$ получим $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

или по формуле (17.2) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ \square

Формула Ньютона—Лейбница дает метод вычисления определенных интегралов в случае, когда первообразная для $f(x)$ известна.

Пример: $\int_1^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} (2^2 - 2) = \frac{2}{\ln 2}$.

17.4. Интегрирование заменой переменных и по частям в определенных интегралах

1. *Замена переменной.* Пусть $f(x) \in C_{[a,b]}$, функция $x = \varphi(t)$, переводящая $[\alpha, \beta]$ в $[a, b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt.$$

\square По свойству 5⁰ инвариантности формы определенного интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt &= F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \end{aligned}$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ \square

Пример:

$$\int_0^{3,5} \frac{x \, dx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = t^3, \quad x = \frac{t^3-1}{2}, \\ dx = \frac{3}{2} t^2 \, dt, \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3,5 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_1^2 \frac{\frac{t^3-1}{2} \cdot \frac{3}{2} t^2 \, dt}{t} = \frac{3}{4} \int_1^2 (t^4 - t) \, dt = \frac{3}{4} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{32}{5} - 2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{141}{40}.$$

2. *Интегрирование по частям.* Формула $\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$ следует из формулы интегрирования по частям неопределенного интеграла.

Пример:

$$\int_1^e (3x^2 + x) \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = u, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ (3x^2 + x) \, dx = dv, \quad v = \int (3x^2 + x) \, dx = x^3 + \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{x} \, dx = e^3 + \frac{e^2}{2} - \int_1^e \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) \, dx =$$

$$= e^3 + \frac{e^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{2}{3} e^3 + \frac{e^2}{4} + \frac{7}{12}.$$

17.5. Несобственный интеграл

17.5.1. Нс.и. с бесконечными пределами интегрирования

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$. Тогда функция $\Phi(b) = \int_a^b f(x) \, dx$ является непрерывной функцией от b при $b \in (a, \infty)$.

О: Несобственным интегралом (нс. и.) $\int_a^{\infty} f(x) dx$ от непрерыв-

ной на $[a, \infty)$ ($(-\infty, b]$) функции $f(x)$ называется

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \left(\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \right).$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то интегралы называются сходящимися, в противном случае — расходящимися.

Обозначим $F(+\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$, тогда $\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a)$,

$F'(x) = f(x)$ — обобщенная формула Ньютона—Лейбница.

Пример: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} \Big|_1^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$

О: Несобственным интегралом от непрерывной на $(-\infty, \infty)$

функции $f(x)$ называется $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx.$

Он сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них. Геометрический смысл

сходящегося несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x) dx$ при $f(x) > 0$ за-

ключается в том, что его можно трактовать как площадь бесконечной криволинейной трапеции с границей $\partial D: y = f(x), x = a, y = 0$ (рис. 17.4).

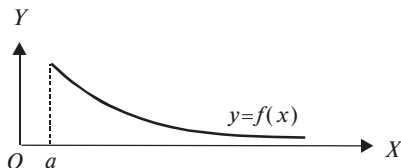


Рис. 17.4

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится ли данный интеграл. Такой вопрос решается применением признаков сходимости. Приведем без доказательства признак сравнения для неотрицательной функции.

Т: Пусть для всех $x \geq a$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Тогда

а) если сходится $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;

б) если расходится $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то расходится и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ ■

Пример: Исследовать на сходимость $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{2+x^{16}}}$.

◀ Так как $\frac{1}{\sqrt[4]{2+x^{16}}} < \frac{1}{x^4}$ при $x \geq 1$, а $\int_a^{+\infty} x^{-4} dx$ сходится (см.

предыдущий пример), то и данный интеграл — сходящийся ▶

Для $f(x)$, принимающей при $x \geq a$ значения разных знаков, применяется следующий признак сходимости.

Теорема: Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ■

Признаки переносятся и на $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

17.5.2. Несобственный интеграл от разрывных функций

Если функция $f(x)$ непрерывна на (a, b) , а при $x = b$ имеет разрыв 2-го рода, то ранее данное определение определенного интеграла неприменимо.

О: Несобственным интегралом от функции $f(x) \in C_{[a,b]}$, имеющей разрыв 2-го рода при $x = b$, называется

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx. \quad \text{Несобственным интегралом от}$$

функции $f(x)$, непрерывной на (a, b) и имеющей разрыв 2-

$$\text{го рода при } x = a, \text{ называется } \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx.$$

Если пределы существуют и конечны, то интегралы называются сходящимися, в противном случае — расходящимися.

О: Несобственным интегралом от функции $f(x)$, непрерывной на $[a, x_0)$, $(x_0, b]$ и имеющей разрыв 2-го рода при $x = x_0$, на-

$$\text{зывается } \int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx.$$

Интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них.

Пример:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{c \rightarrow 1-0} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{c \rightarrow 1+0} \int_c^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \\ &= \lim_{c \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2(x-1)^2} \right) \Big|_0^c + \lim_{c \rightarrow 1+0} \left(-\frac{1}{2(x-1)^2} \right) \Big|_c^2 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 1-0} \left(-\frac{1}{2(c-1)^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{c \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(c-1)^2} \right) = \infty, \end{aligned}$$

т.е. интеграл расходится. Расходимость может иметь место лишь в случае нс.и. от неограниченной функции.

Литература: [1. С. 232–272]; [5. С. 266–283]; [6. С. 330–359]; [7. С. 177–196].

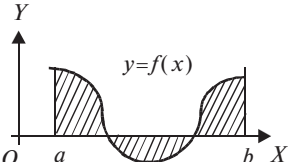
18. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Опорный конспект № 18

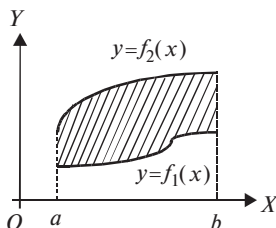
18.1. Вычисление площади плоской фигуры (S_D)

18.1.1. S_D в декартовых координатах

а) $\partial D: \begin{cases} y = f(x), \\ x = a \\ x = b \\ y = 0 \end{cases} \quad S_D = \int_a^b |f(x)| dx;$



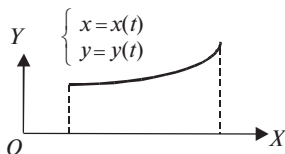
б) $\partial D: \begin{cases} y = f_1(x), \\ y = f_2(x), \\ x = a, \\ x = b \end{cases} \quad S_D = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx, \quad f_1(x) \leq f_2(x)$



18.1.2. Площадь криволинейной трапеции при параметрическом задании кривой

$\partial D: \begin{cases} x = x(t), & y = y(t), & x(\alpha) = a, & x(\beta) = b \\ x = a, & x = b & (a < b), & y = 0 \end{cases}$

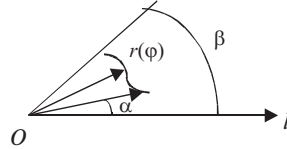
$$S_D = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'_t dt$$



18.1.3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

$$\partial D: r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi$$

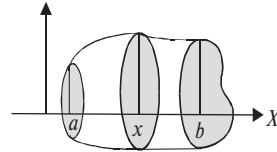


18.2. Вычисление объемов тел

18.2.1. Объем тела Ω по известным площадям поперечных сечений

Известны площади сечений $S(x)$ тела Ω плоскостями

$$\perp OX, a \leq x \leq b \Rightarrow V_D = \int_a^b S(x) dx$$

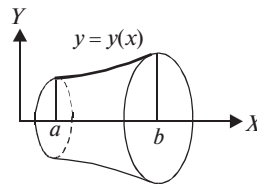


18.2.2. Объем тела вращения

Криволинейная трапеция D ,

$\partial D: y = y(x), x = a, x = b (a < b), y = 0$, вращается вокруг оси $OX \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(x) = \pi[y(x)]^2, V_x = \pi \int_a^b [y(x)]^2 dx$$

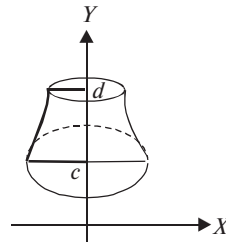


Криволинейная трапеция D ,

$\partial D: x = x(y), y = c, y = d (c < d), x = 0$

вращается вокруг оси $OY \Rightarrow$

$$S(y) = \pi[x(y)]^2, V_y = \pi \int_c^d [x(y)]^2 dy$$



18.3. Вычисление длины дуги кривой L

18.3.1. Длина дуги в прямоугольной системе координат

$$L: y = y(x), x \in [a, b], y'(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

18.3.2. Длина дуги при параметрическом задании L

$$L: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta], x'(t), y'(t) \in C_{[\alpha, \beta]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

18.3.2. Длина дуги в полярных координатах

$$L: r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta], r'(\varphi) \in C_{[\alpha, \beta]} \Rightarrow l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

18.1. Вычисление площади плоской фигуры

18.1.1. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

а) Пусть фигура D имеет границу $\partial D: y = f(x), x = a, x = b$ ($a < b$), $f(x) \in C_{[a,b]}$.

Если $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то D — криволинейная трапеция и

$$S_D = \int_a^b f(x) dx.$$

При $f(x) < 0$ на $[a, b]$ D расположена ниже оси OX и

$$S_D = \int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx. \text{ Отсюда следует, что если } f(x) \text{ конеч-}$$

ное число раз меняет знак на $[a, b]$ (рис. 18.1), то $S_D = \int_a^b |f(x)| dx$.

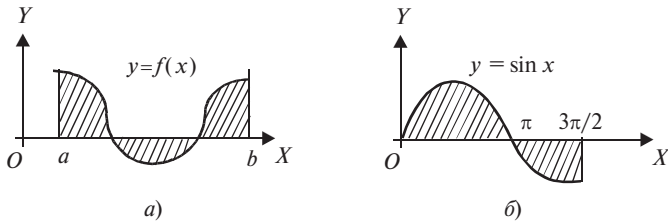


Рис. 18.1

Пример: $\partial D: y = \sin x, x = 0, x = 3\pi/2, y = 0$ (рис. 18.1, б). $S_D = ?$

$$\begin{aligned} \leftarrow S_D &= \int_0^{3\pi/2} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \\ &+ \cos x \Big|_{\pi}^{3\pi/2} = 3 \text{ (кв. ед.)}. \rightarrow \end{aligned}$$

б) Пусть фигура D имеет границу $\partial D: y = f_1(x), y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$), $x = a, x = b$ ($a < b$). Площадь $S_D = S_{aCDb} - S_{aABb}$ (рис. 18.2, а),

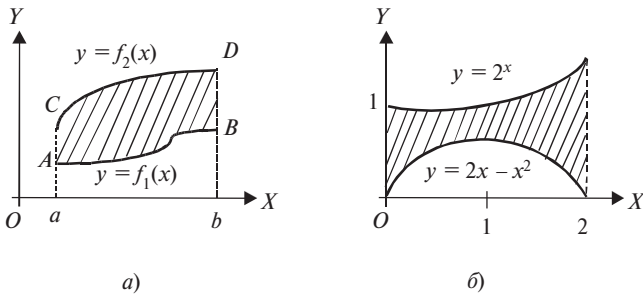


Рис. 18.2

поэтому имеем формулу $S_D = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.

В общем случае площадь вычисляется по формуле

$$S_D = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx.$$

Пример: $\partial D: y = 2^x, y = 2x - x^2, x = 0, x = 2, S_D = ?$ (рис. 18.2, б).

$$\blacktriangleleft S_D = \int_0^2 (2^x - 2x + x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^2 - x^2 \Big|_0^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} \blacktriangleright$$

18.1.2. Площадь криволинейной трапеции при параметрическом задании кривой

Пусть криволинейная трапеция D имеет границу $\partial D: x = \varphi(t), y = \psi(t), x = a, x = b, y = 0$ ($y > 0, a < b$); $\varphi'(t) \in C_{[\alpha, \beta]}$, $\psi(t) \in C_{[\alpha, \beta]}$. Тогда методом подстановки получаем формулу

$$S_D = \int_a^b y dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \psi(t), \quad x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \quad \frac{x|a|b}{t|\alpha|\beta} \end{array} \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Пример: $\partial D: y = b \sin t, x = a \cos t$ (рис. 18.3), $S_D = ?$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft S_D &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= 2abt \Big|_0^{\pi/2} - 2ab \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab \blacktriangleright \end{aligned}$$

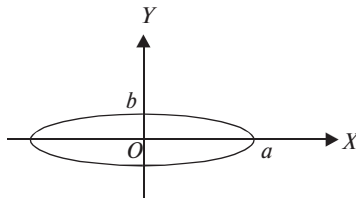


Рис. 18.3

18.1.3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

О: Полярной системой координат называется совокупность т. O (полюса) и выходящей из этой точки направленной полу-прямой l (полярной оси). Полярными координатами т. M называются числа $r = |\overline{OM}|$ (полярный радиус) и $\varphi = (\overline{OM}, l)$ (полярный угол) (рис. 18.4, а).



Рис. 18.4

Если считать, что $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$), то между точками плоскости и парами чисел (r, φ) устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть начало прямоугольной системы координат XOY совпадает с полюсом, а положительная часть оси OX — с полярной осью. Тогда зависимость между координатами т. M в декартовой и полярной системах определяется формулами (рис. 18.4, б).

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (18.1)$$

При нахождении φ необходимо учитывать, в какой четверти находится т. M , так как формулы (18.1) дают два значения полярного угла от 0 до 2π .

Линия в полярной системе координат определяется уравнением $r = r(\varphi)$. Например, $r = a$, $a = \text{const}$ — уравнение окружности с центром в полюсе и радиусом a (рис. 18.5, а); $r = a \cos 3\varphi$ — уравнение так называемой трехлепестковой розы (рис. 18.5, б).

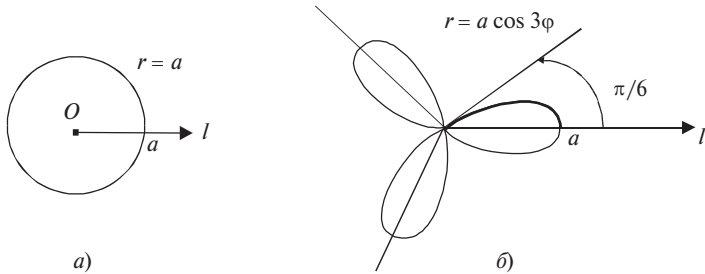


Рис. 18.5

О: Криволинейным сектором в полярной системе координат называется фигура D с границей $\partial D: r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) (рис. 18.6, а).

Для вычисления площади криволинейного сектора разобьем его на n частей лучами $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n = \beta$. Пусть $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, $r_i^* = r(\eta_i)$ — длина некоторого радиус-вектора, расположенного в $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ (рис. 18.6, б).

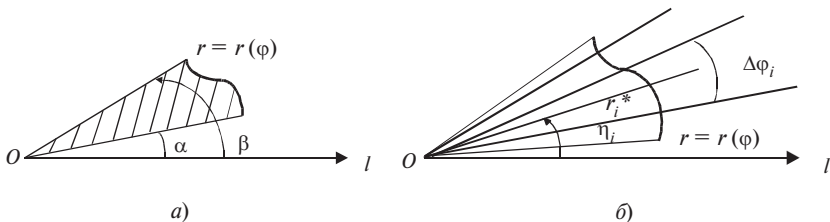


Рис. 18.6

Площадь «ступенчатого» сектора, состоящего из n круговых секторов с центральными углами $\Delta\varphi_i$ и радиусами $r_i^* = r(\eta_i)$, $i = \overline{1, n}$, равна $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [r(\eta_i)]^2 \Delta\varphi_i$.

За площадь криволинейного сектора естественно принять

$$S_D = \lim_{\max \Delta\varphi_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [r(\varphi)]^2 \Delta\varphi_i.$$

Так как в правой части этого уравнения стоит интегральная сумма для функции $[r(\varphi)]^2/2$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то окончательно

$$\text{имеем } S_D = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Пример: Вычислить площадь, ограниченную трехлепестковой розой $r = a \cos 3\varphi$ (см. рис. 18.5, б).

◀ Достаточно вычислить площадь половины одного лепестка при $0 \leq \varphi \leq \pi/6$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} S_D &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{a^2 \pi/6}{4} \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{a^2 \pi}{24} \Rightarrow S_D = \frac{a^2 \pi}{4} \blacktriangleright \end{aligned}$$

18.2. Вычисление объемов тел

18.2.1. Объем тела по известным площадям поперечных сечений

Пусть известны площади $S(x)$ сечений тела Ω плоскостями, перпендикулярными оси OX , $a \leq x \leq b$ (рис. 18.7, а). Требуется найти его объем V_{Ω} .

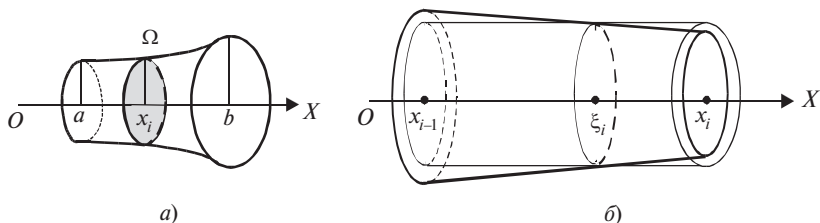


Рис. 18.7

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n = b\}$, выберем произвольные точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ и построим цилиндры с площадями оснований $S(\xi_i)$ и высотами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (рис. 18.7, б).

Объем ступенчатого тела, состоящего из этих цилиндров, равен $\sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i$, поэтому за объем тела Ω принимается

$$V_D = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i.$$

В правой части стоит интегральная сумма для функции $S(x)$, поэтому $V_D = \int_a^b S(x) dx$.

Пример: Найти объем V тела Ω , ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

◀ В сечении тела Ω плоскостью $x = \text{const}$ получим эллипс

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \text{ поэтому площадь } S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

(см. п. 18.1.2) и $V = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc$ ▶

18.2.2. Объем тела вращения

Пусть криволинейная трапеция D с границей $\partial D: y = y(x), x = a, x = b$ ($a < b$), $y = 0$ вращается вокруг оси OX . Поперечными сечениями являются круги с радиусами $y(x)$, поэтому $S(x) = \pi [y(x)]^2$

$$\text{и } V_x = \pi \int_a^b [y(x)]^2 dx.$$

Пусть криволинейная трапеция D с границей $\partial D: x = x(y), y = c, y = d$ ($c < d$), $x = 0$ вращается вокруг оси OY , тогда $S(y) = \pi [x(y)]^2$,

$$V_y = \pi \int_c^d [x(y)]^2 dy.$$

Пример: Определить объем тела, образованного вращением фигуры D с границей $\partial D: y^2 = 4 - x, x = 0$: а) вокруг оси OX ;

б) вокруг оси OY .

◀ При вращении фигуры D вокруг оси OX получим параболоид (рис. 18.8, а), объем которого

$$V_x = \pi \int_0^4 (4-x) dx = \pi \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 8\pi.$$

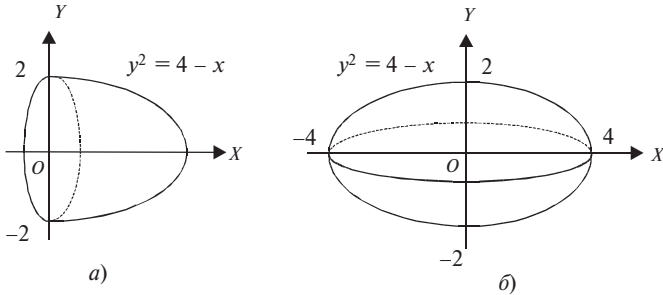


Рис. 18.8

При вращении фигуры D вокруг оси OY получаем тело, изображенное на рис. 18.8, б. Его объем

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^2 (4-y^2)^2 dy = 2\pi \int_0^2 (16-8y^2+y^4) dy = 2\pi \left(16y - 8\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{896\pi}{15} \blacktriangleright \end{aligned}$$

18.3. Вычисление длины дуги кривой

18.3.1. Длина дуги в прямоугольной системе координат

О: Длиной дуги l кривой L называется предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной, когда длина наибольшего ее звена стремится к нулю.

Пусть кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, причем $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$. Разобьем ее на n частей точками с абсциссами $\{a_0 = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ и про-

ведем хорды через эти точки (рис. 18.9, а). Получим вписанную ломаную, причем длина Δl_i ее i -го звена равна

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. По теореме Лагранжа $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, а длина всей ломаной, вписанной в кривую L , равна $\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [y'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$. Из определения длины дуги имеем

$l = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [y'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$. Так как правая часть есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + [y'(x)]^2}$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (18.1)$$

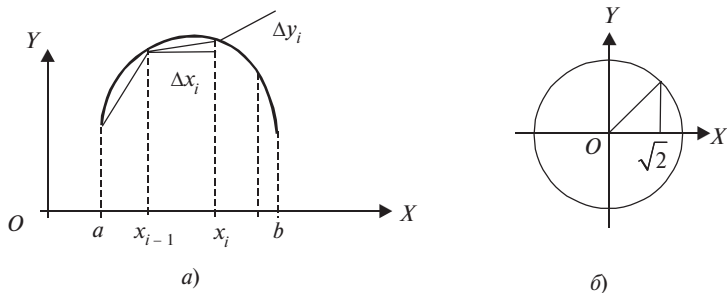


Рис. 18.9

Пример: Определить длину дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$ при $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ (рис. 18.9, б).

$$\begin{aligned} \leftarrow l &= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)'\right)^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \end{aligned}$$

18.3.2. Длина дуги кривой в параметрической форме

Пусть уравнение кривой L задано в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, причем $x'(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad dx = x'(t) dt$$

и

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Пример: Найти длину окружности, заданной параметрическими уравнениями $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при $0 \leq t \leq \pi/4$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft l &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\left((2\cos t)'\right)^2 + \left((2\sin t)'\right)^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = 2t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} \blacktriangleright \end{aligned}$$

18.3.3. Длина дуги в полярных координатах

Пусть уравнение кривой L в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, причем функция $r = r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Используя формулы перехода от полярных координат к декартовым и принимая за параметр угол φ , имеем параметрические уравнения кривой L : $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[(r\cos\varphi)'\right]^2 + \left[(r\sin\varphi)'\right]^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Пример: Вычислить длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ ($a > 0$), $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (рис. 18.10).

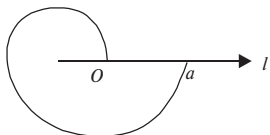


Рис. 18.10

$$\begin{aligned} \leftarrow l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} \, d\varphi = \\ &= a\sqrt{1+m^2} \int_0^{2\pi} e^{m\varphi} \, d\varphi = \\ &= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} (e^{2m\pi} - 1) \rightarrow \end{aligned}$$

18.3.4. Формула дифференциала дуги

Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, для $l(x) = \int_a^x \sqrt{1+[y'(x)]^2} \, dx$ имеем

$l'(x) = \sqrt{1+[y'(x)]^2}$, $a \leq x \leq b$. Отсюда получаем формулу для дифференциала дуги $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2} \, dx$.

При параметрическом задании кривой L

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt.$$

Дифференциал дуги может быть записан и через dx и dy :

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Литература: [1. С. 275–300]; [5. С. 291–310]; [6. С. 360–405]; [7. С. 197–214].

19. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Опорный конспект № 19

19.1. Мера Лебега. Измеримые множества

$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, $A \in \mathbf{R}$

O: $M(m)$ — верхняя (нижняя) грань $\Leftrightarrow a \leq M$ ($a \geq m$) $\forall a \in A$.
 $M^* = \sup A$ ($m^* = \inf A$) — точная верхняя (нижняя) грань A .

$\mathfrak{I} = [a, b] \vee (a, b) \vee [a, b) \vee (a, b]$.

O: $\{\mathfrak{I}\} \subset \mathbf{R}$ — покрытие $A \Leftrightarrow \forall c \in A \exists \mathfrak{I}: c \in \mathfrak{I}$.

O: Мера $\mathfrak{I} \Leftrightarrow \mu(\mathfrak{I}) = b - a$.

O: Внешняя мера A , $A \subset [a, b] \Leftrightarrow \mu^*(A) = \inf_{\cup \mathfrak{I}_k \supset A} \sum_k \mu(\mathfrak{I}_k)$.

Внутренняя мера $A \Leftrightarrow \mu_*(A) = (b - a) - \mu^*(\bar{A})$, $\bar{A} = [a, b] \setminus A$.

O: Ограниченное множе.тво A измеримо с мерой $\mu(A) \Leftrightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.

19.2. Измеримые функции. Интеграл Лебега

O: $f(x)$, $x \in A$ — измерима $\Leftrightarrow A$ измеримо $\wedge \forall$ конечного $c \in \mathbf{R}$ измеримо $A(f(x) > c)$.

T. (Лузина): $f(x)$ — измерима и почти всюду конечна на $[a, b] \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists \varphi(x) \in C_{[a, b]}: \mu A(f(x) \neq \varphi(x)) < \delta$ ■

O: $\int_E f(x) d\mu = \lim_{\max \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \eta_i \mu(E_i)$ — интеграл Лебега, где $f(x)$

измерима на измеримом E , $m = \inf_{x \in E} f(x)$, $M = \sup_{x \in E} f(x)$,

$[m, M]$ разбивают на $[y_{i-1}, y_i]$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$,

$\eta_i \in [y_i - y_{i-1})$, $E_i = E(y_{i-1} \leq f(x) < y_i)$.

T: $\exists \int_a^b f(x) dx = J$ (Римана) $\Rightarrow \int_a^b f(x) d\mu = J$ ■

19.3. Функции с ограниченным изменением (ФОИ). Интеграл Стильбеса

O: $f(x)$, $x \in [a, b]$, ФОИ $\Leftrightarrow \exists c > 0: \forall \mathfrak{I}_n(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c$; $V_q^b[f] = \sup_{\mathfrak{I}_n} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.

$$\text{О: } \int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] \quad \text{— интеграл}$$

Римана—Стильеса, где $f(x) \in C_{[a,b]}$, $g(x)$ — ФОИ на $[a, b]$, $[a, b]$ разбивается на $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

19.1. Мера Лебега. Измеримые множества

Пусть $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ и множество точек (чисел) $A \subset \mathbf{R}$. Например, множество рациональных точек \mathbf{Q} или множество иррациональных точек $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Рассмотрим классификацию множеств A в зависимости от входящих в них точек.

О: Точка $a \in A$ называется:

- а) предельной точкой A , если $U_\delta(a) \forall \delta$ содержит точки множества A , отличные от a ;
- б) внутренней точкой A , если $\exists \delta > 0: U_\delta(a) \subset A$;
- в) граничной точкой A , если a не является внутренней точкой A и $\overline{A} = \mathbf{R} \setminus A$;
- г) изолированной точкой A , если $\exists \delta > 0: U_\delta(a) \notin A$.

Внутренние и граничные точки A являются его предельными точками.

О: Множество A называется:

- а) открытым, если оно состоит только из внутренних точек;
- б) замкнутым, если содержит все свои предельные точки;
- в) дискретным, если содержит только изолированные точки;
- г) ограниченным, если $\exists [a, b]: A \subset [a, b]$;
- д) конечным, если оно состоит из конечного числа точек.

Конечное множество дискретно и замкнуто. Если A — открытое множество, то $\overline{A} = \mathbf{R} \setminus A$ замкнуто.

Понятие меры множества A является обобщением понятия длины отрезка. Чтобы его сформулировать, введем некоторые определения.

О: Действительное число $M(m)$ называется верхней (нижней) гранью множества $A \subset \mathbf{R}$, если $a \leq M$ ($a \geq m$) $\forall a \in A$.

Каждое непустое множество $A \subset \mathbf{R}$, имеющее верхнюю (нижнюю) грань, имеет наименьшую верхнюю M^* (наибольшую нижнюю m^*) грань, которая называется точной верхней $M^* = \sup A$ (точной нижней $m^* = \inf A$) гранью A .

Пусть $\mathfrak{I} = [a, b] \vee (a, b) \vee [a, b) \vee (a, b]$.

О: Множество интервалов $\{\mathfrak{I}\} \subset \mathbf{R}$ называется покрытием множества A , если $\forall c \in A$ существует интервал \mathfrak{I} , содержащий точку c .

Любое ограниченное множество A может быть покрыто конечной или счетной системой интервалов $\{\mathfrak{I}_k\}$ [15. С.48].

О: Мерой промежутка \mathfrak{I} называется число $\mu(\mathfrak{I}) = b - a$.

Для $\mu(\mathfrak{I})$ выполняются свойства:

1⁰. $\mu(\mathfrak{I}) \geq 0$ ($\mu(\emptyset) = 0$);

2⁰. $\mathfrak{I} = \sum_{k=1}^n \mathfrak{I}_k \Rightarrow \mu(\mathfrak{I}) = \sum_{k=1}^n \mu(\mathfrak{I}_k)$.

О: Внешней мерой $\mu^*(A)$ ограниченного множества A называется точная нижняя граница суммы $\sum_k \mu(\mathfrak{I}_k)$ по всевозможным его покрытиям $\{\mathfrak{I}_k\}$: $\mu^*(A) = \inf_{\cup \mathfrak{I}_k \supset A} \sum_k \mu(\mathfrak{I}_k)$. Внутренней мерой $\mu_*(A)$ ограниченного множества A называется $\mu_*(A) = (b - a) - \mu^*(\bar{A})$, где $A \subset [a, b]$, $\bar{A} = [a, b] \setminus A$.

О: Ограниченное множество A называется измеримым по Лебегу с мерой $\mu(A)$, если $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.

Свойства 1⁰, 2⁰ для $\mu(A)$ сохраняются. Открытое и замкнутое ограниченные множества измеримы. Множества, состоящие из конечного или счетного множества точек, измеримы и их меры равны нулю.

Примеры: Множество рациональных точек $\mathbf{Q}^* \subset [0, 1]$ измеримо. Так как оно счетно, то $\mu(\mathbf{Q}^*) = 0$.

Множество иррациональных точек $\bar{\mathbf{Q}}^* = [0, 1] \setminus \mathbf{Q}^*$ тоже измеримо и $\mu(\bar{\mathbf{Q}}^*) = 1 - \mu(\mathbf{Q}^*) = 1$.

Аналогично можно ввести меру для любого множества точек $A \subset \mathbf{R}^2$ или $A \subset \mathbf{R}^3$, обобщающую понятия площади плоской фигуры и объема пространственного тела.

19.2. Измеримые функции. Интеграл Лебега

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве A . Обозначим через $A(f(x) > c)$ множество точек $x \in A$, для которых $f(x) > c$.

О: Функция $f(x)$, заданная на множестве A , называется измеримой, если измеримы множество A и при любом конечном $c \in \mathbf{R}$ множество $A(f(x) > c)$.

Разность, сумма, произведение и частное (если делитель $\neq 0$) измеримых функций измеримы.

Если хотя бы одно из множеств $A(f(x) \leq c)$, $A(f(x) \geq c)$, $A(f(x) < c)$ измеримо $\forall c$, то $f(x)$ измерима на измеримом множестве A , поэтому в определении измеримой функции можно взять любое из этих множеств вместо $A(f(x) > c)$.

О: Некоторое свойство называется выполнимым почти всюду на множестве A , если мера множества точек из A , где оно не выполняется, равна нулю.

Основное структурное свойство измеримой функции выражается следующей теоремой.

Т. (Лузина): Пусть $f(x)$ — измеримая и почти всюду конечная на $[a, b]$ функция. Тогда для любого числа $\delta > 0$ существует непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, что $\mu A(f(x) \neq \varphi(x)) < \delta$ ■

Доказательство в [15. С. 102].

Таким образом, измеримая и почти везде конечная на $[a, b]$ функция $f(x)$ становится непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Введем интеграл, который существует для измеримых на измеримом множестве функций.

Пусть на измеримом множестве E задана измеримая ограниченная функция $f(x)$, причем $m = \inf_{x \in E} f(x)$, $M = \sup_{x \in E} f(x)$. Разобьем отрезок $[m, M]$ на n частей точками $y_0 = m < y_1 < y_2 < \dots < y_n = M$ и выберем $\eta_i \in [y_{i-1}, y_i)$. Обозначим $E_i = E(y_{i-1} \geq f(x) < y_i)$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \mu(E_i), \quad (19.1)$$

которая называется интегральной суммой Лебега.

О: Интегралом Лебега от измеримой ограниченной функции $f(x)$ по измеримому множеству E называется предел интегральной суммы (19.1) при $\max \Delta y_i \rightarrow 0$, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения $[m, M]$ на части $[y_i - y_{i-1})$ и от выбора промежуточных точек η_i .

Обозначение:
$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{\max \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \eta_i \mu(E_i).$$

Если множество $E = [a, b]$, то интеграл Лебега обозначается:

$$\int_a^b f(x) d\mu.$$

Т. (существования): Интеграл Лебега $\int_E f(x) d\mu$ от измеримой ограниченной функции $f(x)$, определенной на измеримом множестве E , существует ■

Доказательство в [15. С.113].

Свойства интеграла Лебега аналогичны свойствам определенного интеграла (Римана).

Отметим следующие:

$$1^0. \quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f(x) d\mu = 0;$$

$$2^0. \quad E = \sum_{i=1}^n E_i \Rightarrow \int_E f(x) d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f(x) d\mu.$$

T: Если существует определенный интеграл (Римана)

$$J = \int_a^b f(x) dx, \text{ то } f(x) \text{ интегрируема на } [a, b] \text{ по Лебегу и}$$

$$\int_a^b f(x) d\mu = J \blacksquare$$

Доказательство в [16. С.289].

Приведем пример ограниченной на $[a, b]$ функции, интегрируемой по Лебегу и неинтегрируемой по Риману. Функция Дирихле на $[0, 1]$:

$$\varphi(x) \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально } (x \in \mathbf{Q}^*), \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально } (x \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}^*) \end{cases}$$

не интегрируема по Риману, но

$$\int_0^1 \varphi(x) d\mu = \int_{\mathbf{Q}^*} 1 \cdot d\mu + \int_{[0, 1] \setminus \mathbf{Q}^*} 0 \cdot d\mu = 0.$$

Необходимое и достаточное условия интегрируемости $f(x)$ по Риману устанавливаются следующей теоремой.

T. (Лебега): Для интегрируемости по Риману измеримой ограниченной на $[a, b]$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она была на $[a, b]$ непрерывна почти всюду \blacksquare

Доказательство в [15. С.125].

19.3. Функции с ограниченным изменением. Интеграл Стильеса

O: Функция $f(x)$, $x \in [a, b]$ называется функцией с ограниченным изменением, если $\exists C > 0$, что для \forall разбиения \mathfrak{S}_n отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ выполняется

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C. \text{ Полным изменением функции}$$

$f(x)$, $x \in [a, b]$, с ограниченным изменением называется

$$V_a^b[f] = \sup_{\mathfrak{S}_n} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Всякая монотонная функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение, так как для нее при любом разбиении

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |f(b) - f(a)|.$$

Линейная комбинация функций с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ есть снова функция с ограниченным изменением, т.е. они образуют линейное пространство.

Структура функций с ограниченным изменением определяется следующей теоремой.

Т: Всякая функция с ограниченным изменением может быть представлена как разность двух монотонно неубывающих функций и имеет почти всюду конечную производную ■

Доказательство в [16. С.316].

Таким образом, функция с ограниченным изменением ограничена и имеет не более, чем счетное множество разрывов 1-го рода.

Введем интеграл Римана—Стилтьеса, обобщающий интеграл Римана. Пусть $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ — функция с ограниченным изменением на $[a, b]$.

Разобьем $[a, b]$ на n частей точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, выберем точки $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$, $i = \overline{1, n}$, и составим сумму

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$, которая называется интегральной суммой

Стилтьеса.

О: Интегралом Римана—Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на $[a, b]$ называется

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

если предел существует и не зависит от способа разбиения $[a, b]$ на n частей и от выбора промежуточных точек ξ_i , $i = \overline{1, n}$.

Т: Если $f(x) \in C_{[a, b]}$, а $g(x)$ — функция с ограниченным изменением на $[a, b]$, то интеграл Римана—Стилтьеса существует ■

Доказательство в [15. С.216].

При $g(x) = x$ интеграл Римана—Стилтьеса является интегралом Римана. Свойства интеграла Римана—Стилтьеса аналогичны свойствам интеграла Римана. Справедлива следующая оценка:

$$\int_a^b f(x) dg(x) \leq M V_a^b[g],$$

где M — наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$. Если $g(x)$ имеет в каждой точке $[a, b]$ производную $g'(x)$, интегрируемую по Риману (на-

пример, $g'(x)$ непрерывна), то $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x) dx$.

Аналогично несобственным интегралам Римана определяются и несобственные интегралы Римана—Стилтьеса.

Можно обобщить также интеграл Лебега, вводя меру и интеграл Лебега—Стилтьеса [16. С.335].

Литература: [15. С. 56–129, 191–226]; [16. С. 235–351].

Глава 7

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

20. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Опорный конспект № 20

20.1. Основные понятия

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ — ОДУ n -го порядка
 $y = \varphi(x)$ — решение ОДУ $\Leftrightarrow F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$

20.2. ОДУ 1-го порядка

$F(x, y, y') = 0$ — ОДУ 1-го порядка

$y' = f(x, y)$ — разрешенное отн. y' ,

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ — другой вид

Задача Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

T: $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ — непрерывны в окрестности т. $M_0(x_0, y_0) \Rightarrow$
 \Rightarrow решение задачи Коши $\exists!$ в окрестности т. x_0 .

Общее решение ОДУ при непрерывности $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$
в D — функция $y = \varphi(x, c)$, $c = \text{const}$, если:

1) $y = \varphi(x, c)$ — решение ОДУ $\forall c$;

2) $\forall y(x_0) = y_0 \exists! c = c_0: y = \varphi(x, c_0)$ — решение задачи Коши,
 $(x_0, y_0) \in D$

20.3. ДУ с разделяющимися переменными

ОДУ, приводящиеся к виду $f_2(y)dy = f_1(x)dx$

$$a) y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \quad (\times f_2(y)dx, \text{ интегрируем}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f_2(y) dy = \int f_1(x) dx + c;$$

$$б) P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$$

($\div P_2(y)Q_1(x)$, интегрируем) \Rightarrow

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx = -\int \frac{P_2(y)}{Q_2(y)} dy + c$$

20.4. Однородные ДУ 1-го порядка

О: $f(x,y)$ — однородная функция n -го измерения \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \text{ для } \forall \lambda$$

$$y' = f(x,y) \text{ — однородное ДУ } \Leftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y) \Leftrightarrow f(x,y) = f^*(y/x)$$

Замена $y/x = u$, $y = xu \Rightarrow u + xu' = f^*(u)$

$$\text{ОДУ с разделяющимися переменными } \Leftrightarrow \frac{du}{f^*(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

20.5. Линейные ДУ 1-го порядка

$$y' + p(x)y = q(x). \text{ Замена } y = uv. y' = u'v + uv' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

1) $v' + p(x)v = 0$ — ОДУ с разделяющимися переменными, ищем \forall частное решение $v = v(x)$.

2) $u'v = q(x)$ — ОДУ с разделяющимися переменными, ищем общее решение

20.1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях

Решение многих технических задач, в том числе и задач химической технологии, приводит к уравнениям, в которые входят как неизвестные величины (искомые функции), так и скорости изменения этих величин (производные искомым функций).

Примеры: 1) Экспериментальным путем установлено, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количе-

ству нераспавшегося вещества. Считая, что начальное количество нераспавшегося вещества в момент времени $t = 0$ равно M_0 , найти зависимость между количеством нераспавшегося вещества M и временем t .

◀ Так как $v = \frac{dM}{dt} = -kM$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, то искомая функция $M(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dM}{dt} = -kM. \quad (20.1)$$

Необходимо найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $M(0) = M_0$ ▶

2) С некоторой высоты сброшено тело массой m . Найти зависимость скорости падения этого тела v от времени t , если на него, кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости v .

◀ По второму закону Ньютона $m \frac{dv}{dt} = F$, где $\frac{dv}{dt}$ — ускорение движущегося тела, F — сила, действующая на тело в направлении движения, т.е. $F = mg - kv$, где mg — сила тяжести, k — коэффициент пропорциональности, $(-kv)$ — сила сопротивления воздуха. Искомая функция $v = v(t)$ должна удовлетворять уравнению $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$ ▶

О: Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, искомую функцию и ее производные. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным (ОДУ).

Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то дифференциальное уравнение содержит частные производные, поэтому называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в него.

Символическая запись ОДУ n -го порядка: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Примерами ОДУ 1-го порядка являются рассмотренные выше

примеры 1, 2. Уравнение вида $y'' + ay' + by + \sin x = 0$ является ОДУ 2-го порядка.

О: Решением ОДУ называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая в некоторой области изменения x при подстановке в ОДУ обращает его в тождество.

Пример: Решением ОДУ (20.1) является функция $M = ce^{-kt}$, $t \in \mathbb{R}_+$, c — произвольная постоянная.

20.2. ОДУ 1-го порядка. Задача Коши. Общее решение

ОДУ 1-го порядка в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (20.2)$$

Если его можно разрешить относительно y' , то получим ОДУ вида

$$y' = f(x, y). \quad (20.3)$$

Другая форма записи последнего $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$.

Простейшим ОДУ 1-го порядка является $y' = f(x)$, решение которого имеет вид $y = \int f(x) dx + c$, где c — произвольная постоянная, т.е. уравнение имеет бесконечное множество решений.

О: Задача нахождения решения ОДУ (20.3), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ (такая запись равносильна $y|_{x=x_0} = y_0$) называется задачей Коши.

Т. (существования и единственности задачи Коши): Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная f'_y непрерывны в окрестности т. $M_0(x_0, y_0)$, существует единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ в окрестности т. x_0 ■
Доказательство см. в [6. С. 314].

О: Общим решением ОДУ 1-го порядка (20.3) называется функция $y = \varphi(x, c)$, $c = \text{const}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) функция $y = \varphi(x, c)$ является решением (20.3) $\forall c$;
- 2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, существует такое значение $c = c_0$, при котором $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию. Точка $(x_0, y_0) \in D$ — области, в которой выполняются условия существования и единственности решения.

Пример: $M = ce^{-kt}$ — общее решение ОДУ (20.1). Используя начальное условие $M(0) = M_0$, находим $M_0 = ce^0$, т.е. $M = M_0e^{-kt}$ — решение задачи Коши в области

$$D: \begin{cases} 0 < M \leq M_0, \\ 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. В некоторых случаях общее решение ОДУ (20.2) или (20.3) получается в неявном виде $\Phi(x, y, c) = 0$, тогда оно называется общим интегралом.

О: Частным решением ОДУ 1-го порядка называется функция $y = \varphi(x, c_0)$, которая получается из его общего решения $y = \varphi(x, c)$ при определенном значении $c = c_0$.

Геометрически общее решение представляет собой семейство кривых на плоскости XOY , зависящее от c . Эти кривые называются интегральными кривыми данного ОДУ 1-го порядка. При задании ОДУ в виде (20.3) известен угловой коэффициент касательных к интегральным кривым в каждой точке (x, y) : $k = y' = f(x, y)$.

Примеры: 1) На рис. 20.1 изображены интегральные кривые дифференциального уравнения $xy' - 2y = 0$, имеющего общее решение $y = cx^2$.

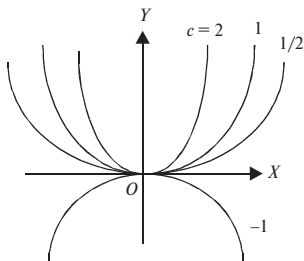


Рис. 20.1

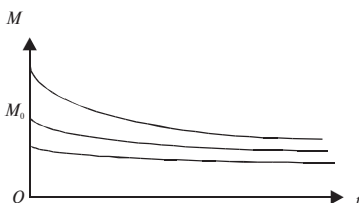


Рис. 20.2

2) На рис. 20.2 изображены интегральные кривые дифференциального уравнения (20.1) с решением $M = ce^{-kt}$.

20.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

О: Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются ОДУ 1-го порядка, которые приводятся к виду $f_1(x)dx = f_2(y)dy$ (ДУ с разделенными переменными).

Таковыми уравнениями являются:

а) $y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$,

б) $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$.

В опорном конспекте № 20 показано, как решаются такие уравнения.

Примеры: 1) ДУ (20.1), возникающее в задаче о радиоактивном распаде, является уравнением с разделяющимися переменными, оно равносильно дифференциальному уравнению

$$\frac{dM}{M} = -kt \Rightarrow \int \frac{dM}{M} = -k \int dt + \ln|c| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|M| = -kt + \ln|c| \Rightarrow M = ce^{-kt}.$$

2) $(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = c \Rightarrow \ln|x| + x + \ln|y| - y = c.$$

20.4. Однородные ДУ 1-го порядка

О: Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n -го измерения относительно переменных x и y , если при любом λ справедливо тождество $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Примеры: 1) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ – однородная функция первого измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y)$.

2) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ – однородная функция нулевого измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = f(x, y)$.

О: ОДУ 1-го порядка (20.3) называется однородным относительно x и y , если функция $y = f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y .

Однородное уравнение может быть записано в виде $y' = f^*(y/x)$, так как $f(x, y) = f(x/x, y/x) = f(1, y/x) = f^*(y/x)$. Поэтому заменой $u = y/x$, где $u = u(x)$, оно сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными (см. ОК № 20).

Пример:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{xy}{x^2 - y^2}, \quad \frac{y}{x} = u(x), \quad u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + \ln |c| \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{x^2}{2y^2} - \ln |yc| = 0 \quad \text{— общий интеграл.} \end{aligned}$$

Замечание. Уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ будет однородным только в том случае, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одного измерения.

20.5. Линейные ОДУ 1-го порядка

О: Линейным ОДУ 1-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (20.4)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные непрерывные функции от x или постоянные.

Решение линейного уравнения (20.4) можно искать методом подстановки $y = uv$ (см. ОК № 20) или методом вариации произвольной постоянной. При решении вторым методом находим общее решение однородного уравнения, соответствующего (20.4):

$$y'' + p(x)y = 0. \quad (20.5)$$

Уравнение (20.5) является уравнением с разделяющимися переменными и приводится к виду

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx,$$

откуда получаем общее решение уравнения (20.5):

$$y = Ce^{-\int p(x) dx}. \quad (20.6)$$

Тогда общее решение уравнения (20.4) будем искать в виде (20.6), в котором $C(x)$ — неизвестная функция:

$$y = C(x)e^{-\int p(x) dx}. \quad (20.7)$$

Подставляем (20.7) в уравнение (20.4) и определяем $C(x)$.

Пример: Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

◀ Однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1} \Leftrightarrow \ln y = 2\ln|x+1| + \ln|C|.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y = C(x+1)^2.$$

Ищем общее решение данного уравнения в виде

$$y = C(x)(x+1)^2.$$

Подставим его в данное уравнение:

$$C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - 2C(x)(x+1) = (x+1)^3,$$

тогда

$$C'(x) = (x+1) \Leftrightarrow C(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + C^*.$$

Окончательно имеем общее решение

$$y = (x+1)^2 \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C^* \right) \blacktriangleright$$

Литература: [2. С. 9–53]; [4. С. 13–58]; [5. С. 459–475]; [7. С. 417–430].

21. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Опорный конспект № 21

21.1. Основные понятия об ОДУ 2-го порядка

О: $F(x, y, y', y'') = 0$ — общий вид ОДУ 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$ — ДУ, разрешенное относительно y'' .

Задача Коши: $y'' = f(x, y, y')$, $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$

Общее решение ОДУ 2-го порядка — функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 = \text{const}$ при условиях:

1) $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ — решение ДУ при $\forall c_1, c_2$;

2) $\forall y|_{x=x_0} = y_0, \forall y'|_{x=x_0} = y'_0, \exists! c_{10}, \exists! c_{20}: y = \varphi(x, c_{10}, c_{20})$ —

решение задачи Коши, $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ — области $\exists!$ решения

21.2. ДУ 2-го порядка, допускающие понижение порядка

$y'' = f(x, y')$ не содержит явно y .

Замена: $y' = p(x)$, $y'' = p' \Rightarrow p' = f(x, p)$ — ОДУ 1-го порядка.

Пусть $p = \varphi(x, c_1)$ — его общее решение $\Rightarrow y' = \varphi(x, c_1)$ — ДУ с разделяющимися переменными.

$y'' = f(y, y')$ не содержит явно x .

Замена: $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'$; $p'p = f(y, p)$ — ОДУ 1-го по-

рядка. Пусть $p = \varphi(y, c_1)$ — его общее решение $\Rightarrow y' = \varphi(y, c_1)$ — ДУ с разделяющимися переменными

21.3. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

21.3.1. Линейное однородное ДУ 2-го порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (*)$$

Общее решение (*) $y = c_1y_1 + c_2y_2$; $y_1(x), y_2(x)$ — фундамен-

тальная система решений (*), т.е. $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ на (α, β)

21.3.2. Общее решение линейного однородного ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q = \text{const}$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$

Корни $k^2 + pk + q = 0$	$k_1 \neq k_2 (\in \mathbf{R})$	$k_1 = k_2 = k$ ($\in \mathbf{R}$)	$k_1 = z, k_2 = \bar{z},$ $z \in \mathbf{C},$ $z = \alpha + i\beta$
Общее решение $y'' + py' + qy = 0,$ $p, q = \text{const}$	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

21.3.3. Линейное неоднородное ДУ 2-го порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x). \quad (**)$$

Общее решение(**) $y = y^* + \bar{y}$, где y^* — общее решение (*), \bar{y} — частное решение (**)

21.3.4. Подбор \bar{y} для линейного неоднородного ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Вид $f(x)$	$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$	$P_n(x)e^{mx}$	$M \cos mx + N \sin mx$
Выбор \bar{y}	$\bar{y} = x^r Q_n(x) = x^r (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n),$ $r = \begin{cases} 0, & k_{1,2} \neq 0, \\ 1, & k_1 = 0. \end{cases}$	$\bar{y} = x^r Q_n(x)e^{mx},$ $r = \begin{cases} 0, & k_{1,2} \neq m, \\ 1, & k_1 = m, \\ 2, & k_{1,2} = m. \end{cases}$	$\bar{y} = x^r (A \cos mx + B \sin mx),$ $r = \begin{cases} 0, & k_1 \neq m, \\ 1, & k_1 = m. \end{cases}$

21.3.5. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения \bar{y}

$y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow \bar{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$, где $c_1(x)$, $c_2(x)$ определяются из системы $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$, $c_1' y_1' + c_2' y_2' = b(x)$

21.1. Основные понятия об ОДУ 2-го порядка

ОДУ 2-го порядка в общем виде записывают так:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (21.1)$$

Если уравнение (21.1) можно разрешить относительно y'' , то оно имеет вид

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (21.2)$$

О: Задача нахождения решения уравнения (21.2), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, называется задачей Коши.

Т. (существования и единственности решения ОДУ 2-го порядка): Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $f_y'(x, y, y')$, $f_{y_1}'(x, y, y')$ непрерывны в окрестности т. $M_0(x_0, y_0, y_0')$ в пространстве переменных (x, y, y') , то в окрестности т. x_0 существует единственное решение задачи Коши: $y'' = f(x, y, y')$, $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y_0'$ ■

Теорему приводим без доказательства.

О: Общим решением дифференциального уравнения (21.2) называется функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных c_1, c_2 при следующих условиях:

- 1) она является решением (21.2) при любых значениях c_1, c_2 ;
- 2) при любых начальных условиях $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y_0'$

существуют единственные значения $c_1 = c_{10}$, $c_2 = c_{20}$, что $y = \varphi(x, c_{10}, c_{20})$ удовлетворяет данным начальным условиям, т. $(x_0, y_0, y_0') \in D$ — области $\exists!$ решения.

Условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, которые используются для нахождения постоянных c_{10} , c_{20} в общем решении ОДУ 2-го порядка, можно задать и по-другому.

Пусть, например, решение уравнения ищется на отрезке $x \in [a, b]$.

Тогда для определения c_{10} и c_{20} можно задать $y|_{x=a} = y_a$, $y|_{x=b} = y_b$, т.е. задачу для ОДУ 2-го порядка можно сформулировать следующим образом: на отрезке $[a, b]$ найти решение ОДУ 2-го порядка, удовлетворяющее условиям, заданным на концах отрезка:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Такая задача называется краевой задачей для ОДУ 2-го порядка. Более подробно об этом можно узнать, например, из [12. С. 311].

21.2. ДУ 2-го порядка, допускающие понижение порядка

О: ДУ 2-го порядка, допускающими понижение порядка, называются уравнения, решение которых можно путем замены переменных свести к решению уравнений 1-го порядка.

К ним относятся: а) $y'' = f(x, y')$, б) $y'' = f(y, y')$.

(Уравнения вида $y'' = f(x)$ являются частным случаем уравнения $y'' = f(x, y')$.) Они в явном виде не содержат переменной y в случае а) и x в случае б), поэтому в случае а) делают замену $y' = p$,

$p = p(x)$, $y'' = p'$, а в случае б) $y' = p$, $p = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p$ (см.

ОК № 21).

Примеры: 1) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$.

◀ Замена $y' = p$, $p = p(x)$, $y'' = p' \Rightarrow (1 + x^2)p' - 2xp = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными \Rightarrow

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x dx}{1 + x^2} \Rightarrow \ln |p| = \ln |1 + x^2| + \ln |c_1| \Rightarrow p = c_1(1 + x^2);$$

$$y' = c_1(1 + x^2) \Rightarrow dy = c_1(1 + x^2)dx \Rightarrow y = c_1(x + x^3/3) + c_2 \blacktriangleright$$

2) $1 + y'^2 = 2yy''$.

◀ Замена $y' = p$, $p = p(y)$, $y'' = p'p$, $1 + p^2 = 2yp p'$ — уравнение с разделяющимися переменными \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{2p dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |1 + p^2| = \ln |y| + \ln |c_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + p^2 = c_1 y, \quad p = \pm \sqrt{c_1 y - 1} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{c_1 y - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\pm \sqrt{c_1 y - 1}} = dx \Rightarrow x + c_2 = \pm \frac{2}{c_1} \sqrt{c_1 y - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + c_2)^2 = \frac{4c_1 y - 1}{c_1^2} \Rightarrow y = \frac{c_1^2(x + c_2) + 4}{4c_1} \blacktriangleright$$

21.3. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

21.3.1. Линейные однородные ДУ 2-го порядка.

Структура общего решения

О: ЛДУ 2-го порядка называется ДУ 2-го порядка, линейное относительно y , y' , y'' , т.е.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x). \quad (21.3)$$

Дифференциальное уравнение

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (21.4)$$

получающееся из (21.3) при $b(x) = 0$, называется линейным однородным ДУ 2-го порядка (ЛОДУ 2п). Если $b(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным (ЛНДУ 2п).

Из теоремы Коши следует, что при непрерывности функций $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$ в окрестности т. x_0 при $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ уравнение (21.3) имеет в окрестности т. x_0 единственное решение.

Т. (о линейной комбинации решений): Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (21.4), $x \in (\alpha, \beta)$, то их линейная комбинация $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ также является его решением ■

□ Подставим функцию $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ и ее первую и вторую производные в левую часть уравнения (21.4):

$$\begin{aligned} a_0(x)(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + a_1(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= \\ &= c_1(a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + \\ &+ c_2(a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) = 0. \end{aligned}$$

Выражения в круглых скобках равны нулю, так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения (21.4) ☒

О: Решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, образуют фундаментальную систему решений, если определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ на интервале } (\alpha, \beta).$$

Т. (о структуре общего решения): Пусть $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ непрерывны на (α, β) . Если решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения (21.4) образуют фундаментальную систему решений, $x \in (\alpha, \beta)$, то $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ является общим решением уравнения (21.4) на (α, β) ■

□ Проверим выполнение условий из определения общего решения. По теореме о линейной комбинации решений $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ является решением уравнения (21.4). Возьмем начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Подставляя их в $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ для определения c_1 и c_2 , получаем систему

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0), \\ y_0' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0). \end{cases} \quad (21.5)$$

Ее определитель $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$ является определите-

лем Вронского, вычисленным в т. x_0 . Он не равен нулю по условию теоремы, поэтому система имеет единственное решение $c_1 = c_{10}$, $c_2 = c_{20}$, которое может быть записано по формулам Крамера. Таким образом, выполнены оба условия определения общего решения ☒

21.3.2. ЛОДУ $2n$ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ (21.4), в котором a_0 , a_1 , a_2 постоянны, $a_0 \neq 0$. Поделив (21.4) на a_0 , получим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q = \text{const}. \quad (21.6)$$

Найдем для этого уравнения фундаментальную систему решений. Будем искать частное решение в виде $y = e^{kx}$. Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Подставляя y, y', y'' в (21.6), имеем $k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$, $e^{kx} \neq 0 \Rightarrow$

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (21.7)$$

Таким образом, для того чтобы y было решением (21.6), необходимо, чтобы k удовлетворяло уравнению (21.7).

|| **О:** Алгебраическое уравнение (21.7) называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (21.6).

В зависимости от дискриминанта D характеристического уравнения возможны следующие случаи.

1. $D = p^2 - 4q > 0$, уравнение (21.7) имеет два различных действительных корня $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. В этом случае уравнение

(21.6) имеет два частных решения $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$, которые образуют фундаментальную систему, так как

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение имеет вид $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$.

2. $D = 0$, уравнение (21.7) имеет один действительный корень $k = -p/2$, кратности 2. Тогда уравнение (21.6) имеет одно частное решение $y_1 = e^{kx}$. Покажем, что $y_2 = xe^{kx}$ тоже является решением (21.6). Действительно, $y_2' = e^{kx}(1 + kx)$, $y_2'' = e^{kx}(2k + k^2x)$, $y_2'' + py_2' + qy_2 = e^{kx}(2k + k^2x) + pe^{kx}(1 + kx) + qe^{kx} = e^{kx}[x(k^2 + pk + q) + (2k + p)]$. Так как $k^2 + pk + q = 0$ (k – корень характеристического уравнения), $2k + p = 0$ ($k = -p/2$), то $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$. Решения $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему в силу

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}(1 + kx) \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0,$$

поэтому $y = c_1e^{kx} + c_2xe^{kx}$ или $y = ce^{kx}(c_1 + c_2x)$ — общее решение уравнения (21.6).

3. $D = p^2 - 4q < 0$, характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -p/2$,

$\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Частные решения имеют вид $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} =$

$= e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$, $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$. Заменяем эти комплексные решения на действительные: $\bar{y}_1 = (y_1 + y_2)/2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $\bar{y}_2 = (y_1 - y_2)/2i = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Они образуют фундаментальную систему решений, так как можно показать, что

$W(x) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}'_1 & \bar{y}'_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Таким образом, общее решение $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x +$

$+ c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ или $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$. В ОК № 21 все три случая сведены в таблицу.

Примеры: 1) $y'' + 5y' + 6y = 0 \Rightarrow k^2 + 5k + 6 = 0$, $k_1 = -2$,

$k_2 = -3 \Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$.

2) $y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_{1,2} = 1 \Rightarrow y = e^x (c_1 + c_2 x)$.

3) $y'' + 4y' + 13y = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 13 = 0$, $k_{1,2} = -2 \pm 3i \Rightarrow$

$\Rightarrow y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

21.3.3. Структура общего решения ЛНДУ 2п

Рассмотрим уравнение (21.3) при $b(x) \neq 0$.

Т. (о структуре общего решения): Общим решением уравнения (21.3) с непрерывными $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $b(x)$ на (α, β) , является $y = y^* + \bar{y}$, где y^* – общее решение соответствующего однородного уравнения (21.4), \bar{y} – любое частное решение уравнения (21.3) ■

□ Проверим выполнение первого условия определения общего решения. Подставим y в левую часть (21.3):

$$\begin{aligned} & a_0(y^{*''} + \bar{y}''') + a_1(y^{*'} + \bar{y}') + a_2(y^* + \bar{y}) = \\ & = (a_0 y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) + (a_0 \bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}). \end{aligned}$$

По условиям теоремы $a_0 y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^* = 0$ и $a_0 \bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y} = b(x)$, т.е. $y = y^* + \bar{y}$ является решением уравнения (21.3). Проверим выполнение второго условия определения общего решения. Возьмем начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$,

$x_0 \in (\alpha, \beta)$. Для определения c_1, c_2 , учитывая запись $y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где y_1, y_2 — фундаментальная система решений (21.4), получаем

$$\text{систему } \begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \bar{y}(x_0), \\ y'_0 = c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) + \bar{y}'(x_0). \end{cases} \quad \text{Ее определитель}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \text{ является определителем Вронского,}$$

который не равен нулю в силу фундаментальности системы $y_1(x), y_2(x)$. Таким образом, система имеет единственное решение $c_1 = c_{10}, c_2 = c_{20}$ и второе условие определения общего решения выполнено \square

21.3.4. Метод подбора частного решения ЛНДУ 2н

Из теоремы о структуре общего решения уравнения (21.3) следует, что для его нахождения необходимо знать общее решение y^* соответствующего однородного уравнения и частное решение \bar{y} неоднородного. Пусть ДУ имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q = \text{const.} \quad (21.8)$$

Общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами найти можно (см. п. 21.3.2). Для нахождения частного решения неоднородного уравнения в случаях специального вида правой части уравнения (21.8) — многочлен $f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, произведение многочлена на показательную функцию $f(x) = P_n(x)e^{mx}$, $m = \text{const}$, гармоника $f(x) = M \cos mx + N \sin mx$ либо линейная комбинация перечисленных функций — частное решение может быть выбрано в виде, указанном в таблице ОК № 21 (п. 21.3), либо в виде линейной комбинации соответствующих решений из таблицы. Коэффициенты A_0, A_1, \dots, A_n в таблице не известны и находятся путем подстановки в уравнение (21.8) (метод неопределенных коэффициентов).

Примеры: 1) $y'' + y' = 5x + 3$. ◀Ищем решение в виде $y = y^* + \bar{y}$.

а) y^* — общее решение уравнения $y'' + y' = 0$, его характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$, т.е. $k_1 = 0, k_2 = -1 \Rightarrow y^* = c_1 + c_2 e^{-x}$;

б) \bar{y} — частное решение уравнения $y'' + y' = 5x + 3$ — ищем в виде $\bar{y} = (Ax + B)x$, так как правая часть уравнения — многочлен первой степени и $k_1 = 0$. Подставим \bar{y} в уравнение:

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \quad \bar{y}'' = 2A \Rightarrow 2A + 2Ax + B = 5x + 3 \Rightarrow 2A = 5,$$

$$2A + B = 3 \Rightarrow A = 5/2, B = -2.$$

Таким образом, $y = c_1 + c_2 e^{-x} + 5x^2/2 - 2x$ ▶

$$2) y'' - 2y' - 3y = (x + 2)e^{3x}.$$

◀ Ищем общее решение в виде $y = y^* + \bar{y}$.

а) y^* — общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$, его характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$, т.е. $k_1 = -1, k_2 = 3$
 $\Rightarrow y^* = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$;

$$б) \bar{y} = x(Ax + B)e^{3x},$$

$$\bar{y}' = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx)e^{3x} = e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B),$$

$$\bar{y}'' = 3e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B) + e^{3x}(6Ax + 2A + 3B) = e^{3x}(9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 6B) \Rightarrow (8Ax + 2A + 4B)e^{3x} = (x + 2)e^{3x} \Rightarrow 8A = 1, 2A + 4B = 2 \Rightarrow A = 1/8, B = 7/16.$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + (x^2/8 + 7x/16)e^{3x} \blacktriangleright$$

$$3) y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x.$$

◀ Ищем решение в виде $y = y^* + \bar{y}$.

а) y^* — общее решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 0$, его характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 5 = 0$, т.е. $k_{1,2} = -2 \pm i \Rightarrow y^* = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$;

$$б) \bar{y} = A \cos x + B \sin x, \bar{y}' = -A \sin x + B \cos x, \bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = 2\cos x - \sin x, 4A + 4B = 2, 4B - 4A = -1 \Rightarrow A = 3/8, B = 1/8 \Rightarrow y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 3/8 \cos x + 1/8 \sin x \blacktriangleright$$

21.3.5. Решение ЛНДУ 2n методом вариации произвольных постоянных

Пусть найдено общее решение $y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ЛОДУ, соответствующего уравнению (21.8), в котором p, q могут быть и функциями от x . Функции $y_1(x), y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Будем искать частное решение \bar{y} уравнения (21.8) в виде $\bar{y} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$, где $c_1(x), c_2(x)$ — пока не известные функции. Для их определения составим систему уравнений. Имеем $\bar{y}' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2$. Положим $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$, тогда $\bar{y}' = c_1 y_1' + c_2 y_2', \bar{y}'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$.

Подставим $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в уравнение (21.8), сгруппируем слагаемые с $c_1(x)$ и $c_2(x)$: $c_1(x)(y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2(x)(y_2'' + p y_2' + q y_2) + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x)$.

Выражения в круглых скобках равны нулю, так как $y_1(x), y_2(x)$ — решения однородного уравнения. Поэтому для определе-

ния $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ получаем систему
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, так как ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0. \text{ Интегрируя полученные } c_1'(x) \text{ и } c_2'(x),$$

найдем $c_1(x)$ и $c_2(x)$, т.е. частное решение \bar{y} .

Пример: $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$

◀ Ищем общее решение в виде $y = y^* + \bar{y}$.

а) y^* — общее решение уравнения $y'' + 4y = 0$, характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$, $k_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow y^* = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

б) $\bar{y} = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2c_1'(x) \sin 2x + 2c_2'(x) \cos 2x = \frac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} 2x, \quad c_1(x) = -\frac{1}{2} \int \operatorname{tg} 2x \, dx = \frac{\ln|\cos 2x|}{4},$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} x \Rightarrow y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x \blacktriangleright$$

Литература: [2. С. 55–90]; [4. С. 70–93]; [5. С. 477–495]; [7. С. 431–454].

22. ПОНЯТИЕ О РЕШЕНИИ ОДУ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Опорный конспект № 22

22.1. Линейные ДУ n -го порядка

О: $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x)$ (*). Общее решение ЛОДУ n -го порядка: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$, где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – система фундаментальных решений.

Общее решение ЛНДУ (*):

$$y = y^* + \bar{y} \quad (\text{см. п. 21.3.3})$$

22.2. Нормальные системы ОДУ

О: $y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), i = \overline{1, n}$.

Т. Коши: $f_i(t, x, y, z), i = 1, 2, 3, \frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}$ — непрерывны

в $D \supset (t_0, x_0, y_0, z_0) \Rightarrow \exists!$ решение $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ задачи Коши $y_i' = f_i(t, x, y, z), i = 1, 2, 3, x|_{t=t_0} = x_0, y|_{t=t_0} = y_0, z|_{t=t_0} = z_0$

22.3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), x \in [a, b], y(x_0) = y_0$$

Метод Эйлера: $h = \frac{b - x_0}{n}, y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})h$.

Метод Рунге–Кутты:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)h, k_2^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2})h,$$

$$k_3^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2})h, k_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})h$$

22.1. Линейные ДУ n -го порядка

О: ОДУ n -го порядка называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции и всех ее производных:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \quad (22.1)$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{0, n}$, $b(x)$ непрерывны на некотором интервале (α, β) .

Если $b(x) \equiv 0$, то (22.1) называется линейным однородным, в противном случае — линейным неоднородным уравнением.

Общее решение ЛОДУ n -го порядка имеет вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

где c_i , $i = \overline{1, n}$ — произвольные постоянные, а $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений, т.е. определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Общее решение ЛНДУ (21.1) имеет ту же структуру, что и при $n = 2$.

Наиболее простым является случай уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$, его общее решение можно найти последовательным n -кратным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int [\int f(x) dx + c_1] dx + c_2 = \int dx \int f(x) dx + c_1 x + c_2,$$

.....

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + c_1 \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!} + \dots + c_n$$

$$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n).$$

22.2. Нормальные системы ОДУ и их интегрирование методом исключения

О: Совокупность дифференциальных уравнений, связывающая между собой несколько функций, называется системой ДУ.

Пример: Движение тел в пространстве под действием силы \vec{F} . Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — радиус-вектор движущейся материальной точки:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k},$$

$$\vec{w}(t) = \vec{v}(t) = \vec{r}''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k},$$

$$\vec{F}(t) = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F} = m\vec{w} \quad \text{или} \quad \begin{cases} mx'' = F_x, \\ my'' = F_y, \\ mz'' = F_z \end{cases} \quad \text{— три дифференциальных уравне-}$$

ния движения, или система трех уравнений 2-го порядка.

О: Порядком системы ДУ называется наивысший из порядков уравнений, входящих в нее.

Далее ограничимся системами первого порядка относительно $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

О: $y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, нормальная система ОДУ 1-го порядка, правые части уравнений этой системы не содержат производных искомых функций.

О: Решением системы ДУ называется совокупность функций $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющая каждому из уравнений этой системы.

Рассмотрим нормальную систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x, y, z), \\ y' = f_2(t, x, y, z), \\ z' = f_3(t, x, y, z). \end{cases}$$

Для нее теорема Коши о существовании и единственности решения формулируется следующим образом.

Т: Пусть функции $f_i(t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, непрерывны по всем переменным в некоторой области D и имеют в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z}$. Тогда какова бы

ни была точка $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in D$, существует единственное решение системы ДУ: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$ ■

Для интегрирования системы можно применить метод, с помощью которого эта система из трех уравнений 1-го порядка сведется к одному уравнению 3-го порядка относительно одной функции. Такой метод называется методом исключения.

Пример:
$$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

◀ Дифференцируя первое уравнение по t , получим $x'' = -7x' + y' + y'$, y' подставим из второго уравнения: $x'' = -7x' - 2x - 5y$, а y — из первого: $x'' = -7x - 2x - 5(x' + 7x)$ или $x'' + 12x' + 37x = 0$. Решим его характеристическое уравнение: $k^2 + 12k + 37 = 0$, $k_{1,2} = -6 \pm i \Rightarrow x = e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$,
 $x' = -6e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^{-6t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = x' + 7x = e^{-6t}[(c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t] \blacktriangleright$

22.3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Большинство дифференциальных уравнений не могут быть решены точными методами. Разработано много различных численных методов, позволяющих получить результаты высокой точности. Простейшим является метод ломаных Эйлера, основанный на использовании приближенной формулы $y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(x_0) = y_0.$$

Разделим $[x_0, b]$ на n равных частей точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, и обозначим $x_i - x_{i-1} = h, i = \overline{1, n}$, т.е. $h = \frac{b - x_0}{n}$. Тогда $x_i = x_0 + ih$.

Найдем формулу для нахождения $y_i = \varphi(x_i)$ приближенного решения $y = \varphi(x)$ поставленной задачи Коши. Уравнение заменяем приближенным равенством $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow \Delta y = f(x, y)\Delta x$.

$$\text{Отсюда } y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h \Rightarrow y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Полученное значение y_1 позволяет далее вычислить y_2 :

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h \Rightarrow y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

Таким образом, получаем рекуррентную формулу:

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})h.$$

Соединяя последовательно на плоскости найденные приближенно точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, получим приближенное изображение интегральной кривой в виде ломаной (ломаная Эйлера).

Пример: $y' = x - y, y(0) = 2$.

◀ Данное уравнение может быть решено точно:

$y = x - 1 + ce^{-x}$ — общее решение, $y = 3e^{-x} + x - 1$ — решение задачи Коши. Решим его приближенно методом Эйлера при $x \in [0, 1], h = 0,2$ и занесем данные в таблицу, где также приведены для сравнения точные значения y_i :

n	x_n	y_n	$y_n^{\text{точное}}$
0	0,00	2,0000	2,0000
1	0,20	1,6600	1,6563
2	0,40	1,4100	1,4109
3	0,60	1,2482	1,2464
4	0,80	1,1515	1,1479
5	1,00	1,1082	1,1037

Ошибка метода Эйлера имеет порядок 10^{-2} ▶

Поскольку метод Эйлера обладает малой точностью и дает удовлетворительные результаты лишь для малых интервалов, раз-

работан ряд приемов уточнения метода Эйлера. Одним из таких методов, используемых при вычислениях на компьютере, является метод Рунге–Кутта. В нем последовательные приближенные вычисления y_i проводятся по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)h, \quad k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)h,$$

$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)h, \quad k_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})h.$$

Существуют хорошо разработанные вычислительные схемы метода Рунге–Кутта не только для уравнений 1-го порядка, но и для уравнений 2, 3, 4-го порядков.

Пример: $y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1.$

Таблица решения задачи Коши для данного дифференциального уравнения при $h = 0,2$ имеет следующий вид:

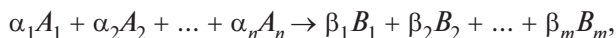
x	y	$x + \frac{h}{2}$	k_1	$y + \frac{k_1}{2}$	k_2	$y + \frac{k_2}{2}$	k_3	$y + k_3$	k_4	Δy
0,0	1,0000	0,1	0,2000	1,1000	0,1836	1,0918	0,1819	1,1819	0,1687	0,1833
0,2	1,1833	0,3	0,1691	1,2679	0,1589	1,2628	0,1574	1,3408	0,1488	0,1584
0,4	1,3417	0,5	0,1491	1,4162	0,1420	1,4127	0,1410	1,4827	0,1347	0,1416
0,6	1,4833	0,7	0,1349	1,5507	0,1296	1,5481	0,1288	1,6121	0,1239	0,1292
0,8	1,6125	0,9	0,1240	1,6745	0,1199	1,6725	0,1193	1,7318	0,1154	0,1196
1,0	1,7321									

22.4. Дифференциальная модель химических реакций

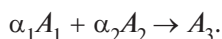
Дифференциальной моделью называют дифференциальное уравнение вместе с начальными условиями (задачу Коши), полу-

ченное в результате исследования некоторого реального процесса. Ясно, что дифференциальные модели являются частным случаем математических моделей. Они относятся к динамическим моделям, причем в процессе их построения важное значение имеет знание законов той области науки, с которой связана природа изучаемой задачи.

В общем случае уравнение химической реакции записывается в виде



где A_i , $i = \overline{1, n}$, — молекулы взаимодействующих веществ; B_i , $i = \overline{1, m}$, — молекулы получившихся в результате реакций веществ, α_i , β_i — коэффициенты реакции, указывающие на число молекул, принимающих участие в реакции. Порядок химической реакции равен общему числу молекул, входящих в левую часть уравнения. Например, химическая реакция второго порядка может иметь вид



Если $x_i(t)$ — концентрация вещества A_i в момент t и реакция идет только в одну сторону, т.е. обратной реакции нет, то $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в результате реакции убывают, а $x_3(t)$ — растет. Скорость этого роста назовем скоростью реакции и обозначим через V^+ . Известно, что скорость химической реакции пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции в соответствующих степенях α_i , т.е.

$$V^+ = k^+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

где k^+ — коэффициент пропорциональности, зависящий от температуры.

Зная, сколько молекул A_3 образуется в единицу времени и сколько молекул A_1 и A_2 расходуется на образование молекул A_3 , получаем уравнения для скоростей x_i :

$$\begin{cases} x_1' = -\alpha_1 V^+ = -\alpha_1 k^+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \\ x_2' = -\alpha_2 V^+ = -\alpha_2 k^+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \\ x_3' = V^+ = k^+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}. \end{cases}$$

Таким образом, вектор концентраций $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ определится из решения данной системы ОДУ.

Данная модель может далее усложняться. Так, может синтезироваться не одна, а β молекул A_3 , причем вместе с прямой протекает и обратная реакция со скоростью V^- . Тогда схема выглядит следующим образом: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \leftrightarrow \beta A_3$.

Скорость реакции в данном случае определяется как

$$V = V^+ - V^-, \text{ причем } V^- = k^- x_3^\beta.$$

Получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = -\alpha_1 (k^+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - k^- x_3^\beta), \\ x_2' = -\alpha_2 (k^+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - k^- x_3^\beta), \\ x_3' = \beta (k^+ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - k^- x_3^\beta). \end{cases}$$

Дальнейшее усложнение модели происходит, если идет одновременно несколько пар прямых и обратных реакций.

Конкретную задачу рассмотрим для модели с одним ОДУ.

Задача. Два жидких химических вещества A и B объемом 10 и 20 литров соответственно в процессе химической реакции образуют новое жидкое вещество C . Считая, что температура в процессе реакции не меняется и что из каждых двух объемов вещества A и одного объема вещества B образуются три объема вещества C , определить количество вещества C в произвольный момент времени t , если за 20 мин его образуется 6 литров.

Решение. Пусть $x(t)$ — объем в литрах вещества C , образовавшегося к моменту времени t (в часах). Тогда к этому моменту в реакцию вступило $\frac{2x}{3}$ литров вещества A и $\frac{x}{3}$ литров вещества B ,

что приводит к уравнению

$$\frac{dx}{dt} = k \left(10 - \frac{2x}{3}\right) \left(20 - \frac{x}{3}\right).$$

Его можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x) \left(\frac{2k}{9} \rightarrow k\right),$$

причем $x(0) = 0$, $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$.

В данном уравнении разделяем переменные и интегрируем:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{(15-x)(60-x)} &= k dt \Rightarrow \frac{1}{45} \left(\int \frac{dx}{15-2x} - \int \frac{dx}{60-x} \right) = \\ &= \int k dt + c \Rightarrow \frac{1}{45} \ln \left| \frac{60-x}{15-x} \right| = kt + c.\end{aligned}$$

Используем условие $x(0) = 0$, тогда

$$c = \frac{1}{45} \ln 4 \Rightarrow \ln \frac{1}{4} \left| \frac{60-x}{15-x} \right| = 45kt \Rightarrow \frac{60-x}{15-x} = 4e^{45kt}.$$

Используем $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$, тогда

$$\frac{60-6}{15-6} = 4e^{15kt} \Rightarrow e^{15kt} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{60-x}{15-x} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t} \Rightarrow x = \frac{60\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{3t}\right)}{1 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}}.$$

Литература: [2. С. 60–114]; [4. С. 96–148]; [14. С. 190–220].

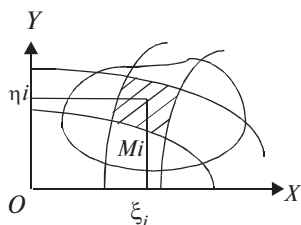
Глава 8

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

23. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Опорный конспект № 23

23.1. Определение ДИ



D разбивается на $\Delta D_i, i = \overline{1, n}$, с площадями $\Delta s_i, \Delta D_i \cap \Delta D_j = 0, i \neq j, M_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i \Rightarrow$

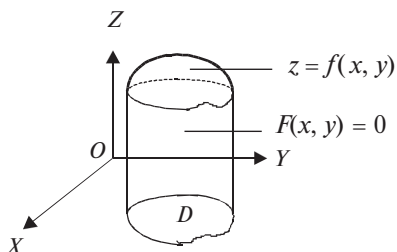
$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

$$\lambda = \max \text{diam } \Delta D_i$$

Т.: $f(x, y)$ непр. в $\bar{D} \Rightarrow$ ДИ \exists ■

Цилиндрическое тело $\Omega \Leftrightarrow \partial\Omega: z = f(x, y), z = 0, F(x, y) = 0 \Rightarrow$

$$V = \iint_D f(x, y) ds$$



23.2. Свойства ДИ

$$1^0. \iint_D [f(x, y) + \varphi(x, y)] ds = \iint_D f(x, y) ds + \iint_D \varphi(x, y) ds;$$

$$2^0. \iint_D cf(x, y) ds = c \iint_D f(x, y) ds, \quad c = \text{const};$$

$$3^0. \quad D = D_1 + D_2 \Rightarrow \\ \iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds;$$

$$4^0. \iint_D ds = S \quad \text{— площадь } D;$$

$$5^0. \quad \varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \text{в } D \Rightarrow \iint_D \varphi(x, y) ds \leq \iint_D \psi(x, y) ds;$$

$$6^0. \text{ Теорема о среднем: } f(x, y) \text{ непр. в } \bar{D} \Rightarrow \exists M(\xi, \eta) \in \bar{D}: \\ \iint_D f(x, y) ds = f(\xi, \eta)S.$$

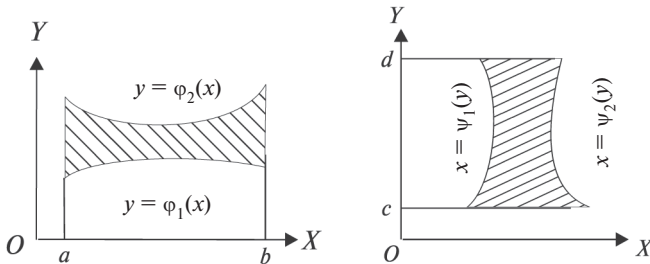
23.3. Вычисление ДИ

$$\partial D: y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x) \quad (\varphi_1(x) < \varphi_2(x)), \quad x = a, x = b \quad (a < b) \Rightarrow$$

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

$$\partial D: x = \psi_1(y), x = \psi_2(y) \quad (\psi_1(y) < \psi_2(y)), \quad y = c, y = d \quad (c < d) \Rightarrow$$

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$



23.4. ДИ в полярных координатах

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} D^* \leftrightarrow D \Rightarrow$$

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D^*} f^*(u, v) |J| du dv$$

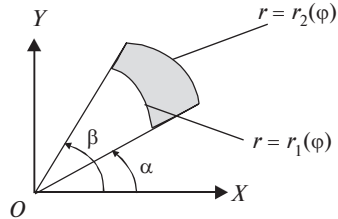
$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \text{ — якобиан}$$

$$\partial D: r = r_1(\varphi),$$

$$r = r_2(\varphi),$$

$$(r_1(\varphi) < r_2(\varphi))$$

$$\varphi = \alpha, \varphi = \beta \ (\alpha < \beta) \Rightarrow$$



$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

23.5. Приложения ДИ

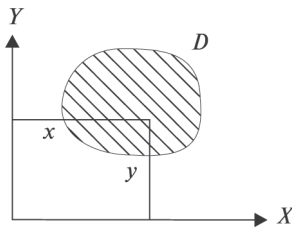
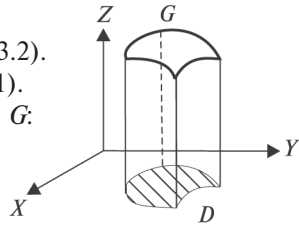
23.5.1. Геометрические приложения

Вычисления площадей (см. разд. 23.2).

Вычисление объемов (см. разд. 23.1).

Вычисление площади поверхности G :

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} ds.$$



23.5.2. Физические приложения

Статические моменты плоской пластины D :

$$\mu_x = \iint_D y\rho(x, y) ds, \quad \mu_y = \iint_D x\rho(x, y) ds,$$

ρ — поверхностная плотность.

Координаты центра масс D :

$$x_c = \frac{\mu_y}{m}, \quad y_c = \frac{\mu_x}{m}, \quad m = \iint_D \rho(x, y) ds \text{ — масса } D.$$

23.1. Определение двойного интеграла

В разд. 17 для нахождения площади криволинейной трапеции было введено понятие интегральной суммы, пределом которой является определенный интеграл (см. разд. 17.1.3). Решая задачу об определении объема тела и массы плоской пластинки, приходим к понятию двумерной интегральной суммы, предел которой называется двойным интегралом (ДИ).

Задача об объеме. Пусть задано тело (рис. 23.1), ограниченное сверху поверхностью $z=f(x,y)$ ($f(x,y) \geq 0$), снизу — конечной замкнутой областью $\bar{D} \subset XOY$ и с боков — цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси OZ , а направляющей является граница ∂D .

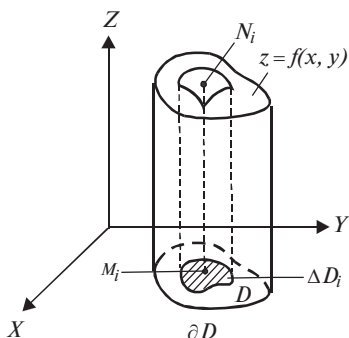


Рис. 23.1

Пусть $f(x,y)$ непрерывна в \bar{D} . Найдем объем этого тела. Будем называть его цилиндрическим. Разобьем основание D на конечное число элементарных частей (элементов) ΔD_i , $i = \overline{1, n}$, в каждой из этих частей выберем т. $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и построим элементарное цилиндрическое тело с основанием ΔD_i и высотой $M_i N_i = f(\xi_i, \eta_i)$, равной аппликате поверхности в выбранной точке. Объем такого «столбика», очевидно, равен $f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь элемента ΔD_i . Сумма объемов этих цилиндрических «столбиков» представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего данное тело:

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (23.1)$$

С помощью формулы (23.1) можно найти объем V с любой степенью точности, если число частей ΔD_i достаточно велико, а их линейные размеры малы.

О: Диаметром ограниченной замкнутой фигуры ΔD называется длина ее наибольшей хорды AB , $A \in \partial\Delta D$, $B \in \partial\Delta D$ (рис. 23.2). Обозначим его λ .

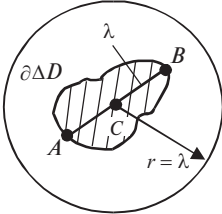


Рис. 23.2

Из определения следует, что фигура ΔD , имеющая диаметр λ , целиком помещается внутри круга радиусом λ , описанного из любой т. $C \in \Delta D$, как из центра. При $\lambda \rightarrow 0$ фигура ΔD стягивается в точку. Аналогично определяется диаметр пространственного тела.

Пусть $\lambda = \max \lambda_i$ — наибольший из диаметров частей ΔD_i , $i = \overline{1, n}$. Предполагая, что в формуле (23.1) число частей n неограниченно возрастает ($n \rightarrow \infty$), причем диаметр наибольшей из них становится сколь угодно малым ($\lambda \rightarrow 0$), получим точную формулу для объема тела:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i. \quad (23.2)$$

Задача о массе тонкой пластинки. Пусть задана тонкая пластинка D площадью S с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$. Если пластинка однородная, т.е. $\rho = \rho_0 = \text{const}$, то ее масса определяется как $m = \rho_0 S$. Разбивая пластинку на n произвольных частей ΔD_i , $i = \overline{1, n}$, с площадью Δs_i и принимая внутри каждой части ΔD_i плотность постоянной $\rho = \rho(\xi_i, \eta_i)$, можно записать $\Delta m \approx \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$. Суммируя и переходя к пределу при

$$\lambda = \max \lambda_i \rightarrow 0, \text{ получим } m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

Обе задачи привели нас к рассмотрению сумм определенного вида. Сопоставление их связано с некоторой областью $D \subset XOY$ и с заданной в ней непрерывной функцией. Суммы вида (23.1) будем называть двумерными интегральными суммами. К нахождению предела таких сумм приводят многочисленные практические задачи.

Пусть в области D задана функция $f(x, y)$. Разобьем D на части ΔD_i с площадями ΔS_i , $i = \overline{1, n}$, выберем $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i. \quad (23.3)$$

О: Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел суммы (23.3) при $\lambda \rightarrow 0$, если предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения D на части ΔD_i , $i = \overline{1, n}$, и от выбора в них точек M_i .

Обозначение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \iint_D f(x, y) ds, \quad (23.4)$$

где ds — элемент площади; D — область интегрирования; $f(x, y)$ — подынтегральная функция; $f(x, y) ds$ — подынтегральное выражение.

Функция, для которой двойной интеграл существует, называется интегрируемой.

Возвращаясь к задачам об объеме тела и массе пластины, можно сделать вывод, что объем цилиндрического тела V численно равен двойному интегралу от $z = f(x, y) \geq 0$, взятому по области D :

$V = \iint_D f(x, y) ds$ (в этом состоит геометрический смысл двойного

интеграла), а масса тонкой пластины $m = \iint_D \rho(x, y) ds$. Заметим, что

при $f(x, y) \equiv 1$ значение двойного интеграла численно равно пло-

щади области интегрирования D : $\iint_D ds = S$.

Т: (существования двойного интеграла) Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области \bar{D} , имеющей площадь S , то двойной интеграл $\iint_D f(x, y) ds$ существует ■

Так как значение двойного интеграла от $f(x, y)$, непрерывной в \bar{D} , не зависит от вида частей ΔD_i , то разобьем D на малые прямоугольники со сторонами Δx_i и Δy_i прямыми, параллельными осям координат. При этом $\Delta s_i = \Delta x_i \Delta y_i$, $i = \overline{1, n}$. Выбирая затем в каждом прямоугольнике т. $M_i(\xi_i, \eta_i)$, можно записать

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

где $ds = dx dy$ — элемент площади. При составлении интегральной суммы площадки ΔD_i , прилегающие к границе области D , не везде имеют формы прямоугольников. Однако можно доказать, что ошибки от замены таких площадок прямоугольниками с площадями $\Delta x_i \Delta y_i$ в пределе сведутся к нулю.

23.2. Свойства двойных интегралов

Определение двойного интеграла конструктивно аналогично определению определенного интеграла, поэтому двойной интеграл обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл. Свойства приведены в ОК № 23.

23.3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

О: Область D называется правильной в направлении оси OY (OX), если любая прямая, параллельная оси OY (OX) и проходящая через внутреннюю точку области D , пересекает ее границу в двух точках.

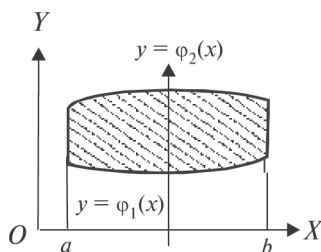


Рис. 23.3

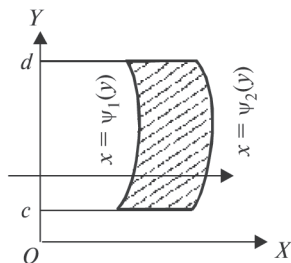


Рис. 23.4

Граница области D , правильной в направлении оси OY (рис. 23.3), может быть задана уравнениями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, ($\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$), $x = a$, $x = b$ ($a < b$), и двойной интеграл в этом случае вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) \, ds = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy, \quad (23.5)$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy$,

в котором x считается постоянной. Выражение справа в (23.5) называется повторным, или двукратным интегралом.

Граница области D , правильной в направлении оси OX (рис. 23.4), может быть задана уравнениями: $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ ($\psi_1(y) < \psi_2(y)$), $y = c$, $y = d$ ($c < d$). Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx. \quad (23.6)$$

Если область D правильная в направлении OX и OY (правильная область), то применимы обе формулы.

Рассмотрим геометрический смысл формулы (23.5), для формулы (23.6) рассуждения аналогичные (вывод формул приведен в [6. С. 310]).

Предположим, что $f(x, y) \geq 0$ и граница области D является правильной в направлении оси OY . Из разд. 23.1 $\iint_D f(x, y) \, ds = V$.

Подсчитаем теперь объем V методом поперечных сечений (см. п.18.2.1):

$$V = \int_a^b S(x) \, dx. \quad (23.7)$$

Проводя через т. $(x, 0, 0)$ плоскость перпендикулярно оси OX , получим в сечении криволинейную трапецию $C_1M_1M_2C_2$

(рис. 23.5), с площадью $S_{C_1M_1M_2C_2} = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} z \, dy$, где $z = f(x, y)$ для то-

чек линии M_1M_2 при постоянном x зависит только от y :

$$y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)], \text{ тогда } S(x) = S_{C_1M_1M_2C_2} = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \quad (23.8)$$

площадь поперечного сечения цилиндрического тела. Подставляя (23.8) в (23.7), получаем

$$V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) \, dy \right\} dx.$$

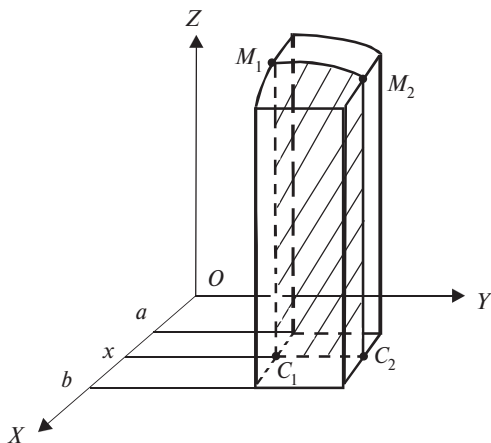


Рис. 23.5

Таким образом, в формуле (23.7) слева и справа имеем объем цилиндрического тела.

Формулы (23.5) и (23.6) выведены в предположении, что область имеет специальный вид.

В общем случае область D разбивают на конечное число частей, являющихся правильными, и вычисляют для каждой из частей интеграл по формуле (23.5) или (23.6). Интеграл по всей области (свойство 3^0) равен сумме полученных интегралов.

Если область $D: x \in [a, b], y \in [c, d]$, то формулы (23.5) и (23.6) примут вид

$$\iint_D f(x, y) \, ds = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Пример: $\iint_D x \, dx \, dy = ? \quad \partial D: y = 0, y = x^2, x + y = 2.$

◀ Решение разбивается на три этапа:

- 1) построение области D ;
- 2) переход к повторному интегралу, расстановка пределов интегрирования;
- 3) вычисление повторного интеграла.

Решая систему $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases}$ находим т. пересечения параболы

и прямой $(1, 1), (-2, 4)$. Строим область, $(-2, 4) \notin \partial D$ (рис. 23.6). Так как область правильная, то можно воспользоваться формулами (23.5) и (23.6).

При решении по (23.5) область придется разбить на две: OBC и CBA , так как линия OBA задается разными уравнениями:

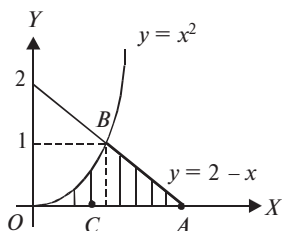


Рис. 23.6

$$J = \iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x \, dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} x \, dy.$$

При вычислении по формуле (23.6) приходим к одному повторному интегралу

$$J = \iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} x \, dx.$$

Закончим решение, пользуясь последней формулой:

$$\int_{\sqrt{y}}^{2-y} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \frac{1}{2} (4 - 4y + y^2 - y) = \frac{1}{2} (4 - 5y + y^2);$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (4 - 5y + y^2) \, dy = \frac{1}{2} \left(4y - \frac{5y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{12} \blacktriangleright$$

23.4. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) ds$ требуется перейти к новым переменным u, v по формулам $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in D^*$. Функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывны в D^* вместе со своими частными производными и осуществляют взаимнооднозначное отображение D^* на D , т.е. существуют обратные функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Если область D^* в плоскости UO^*V разделена на n прямоугольников, то с помощью преобразования $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ прямоугольная сетка перейдет в криволинейную в плоскости XOY , делящую область D на криволинейные параллелограммы. Выделим на плоскости UO^*V бесконечно малый прямоугольник $A^*B^*C^*E^*$ со сторонами $A^*B^* = dv$, $A^*E^* = du$, который переходит в криволинейный параллелограмм $ABCE$ в плоскости XOY (рис. 23.7).

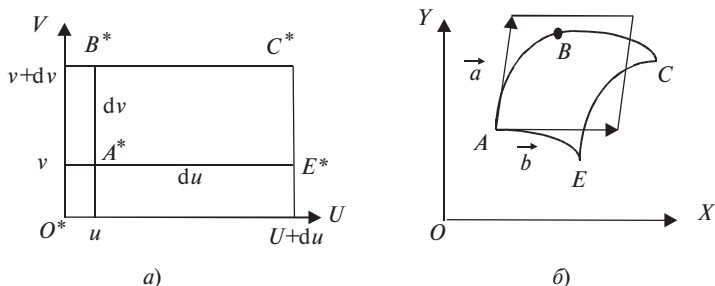


Рис. 23.7

Так как параметрические уравнения кривой AB : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $u = \text{const}$; кривой AE : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $v = \text{const}$, то вектор $\left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right\}$ направлен по касательной к AB , вектор $\left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right\}$ — по касательной к AE в т. $A(x, y)$ (см. п. 12.1). С точностью до б.м. высшего порядка по сравнению с du , dv можно заменить криволинейный параллелограмм $ABCE$ параллелограммом, построенным на

векторах $\vec{a} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv \right\}$, $\vec{b} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial v} du \right\}$. Тогда, считая

третью координату равной 0, воспользуемся формулой, выражающей площадь параллелограмма через модуль векторного произведения:

$$ds = |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{vmatrix} = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv \right|.$$

Обозначим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = J, \quad du dv = ds^*.$$

Таким образом, элемент площади ds в системе координат XOY переводится в элемент площади ds^* в системе координат UO^*V по формуле

$$ds = |J| ds^*. \quad (23.9)$$

Формула замены переменной в двойном интеграле имеет вид

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J| ds^*,$$

где D^* — образ D в системе UO^*V . Определитель J называют якобианом преобразования координат. Если якобиан не равен нулю, то преобразование $D \leftrightarrow D^*$ имеет смысл (в таком случае говорят, что оно невырожденное).

Заметим, что формула (23.9) распространяется и на случай n -мерного пространства.

Рассмотрим частный случай. Пусть нужно записать двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в полярной системе координат, если по-

лярная ось l совмещена с осью OX , а полюс — с началом координат, т.е.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (23.10)$$

В этом случае $u = r$, $v = \varphi$, $J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0$ и

$ds = r dr d\varphi$ — элемент площади в полярных координатах. Тогда

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (23.11)$$

Пусть область D имеет границу ∂D : $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) < r_2(\varphi)$), $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) (рис. 23.8). Тогда по аналогии с прямоугольными координатами заменяем двойной интеграл повторным:

$$\iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f^*(r, \varphi) r dr, \quad (23.12)$$

$$f^*(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Пример: $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds = ?$ ∂D : $x^2 + y^2 = 4$.

◀ С помощью формулы (23.10) записываем уравнение границы ∂D в полярных координатах: $r = 2$. Используя (23.12), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds = \\ & = \iint_D \sqrt{4 - (r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} r dr d\varphi = \\ & = \iint_D \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4 - r^2} r dr = \\ & = - \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right)^{3/2} \frac{1}{3} \Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\varphi = \frac{16\pi}{3} \blacktriangleright \end{aligned}$$

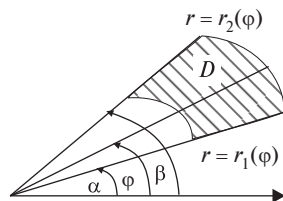


Рис. 23.8

Если вычислять данный интеграл в декартовых координатах, то решение будет более громоздким.

23.5. Приложения двойных интегралов

23.5.1. Геометрические приложения

Вычисление площадей плоских фигур $S_D = \iint_D ds$.

Пример: $\partial D: y = 2 - x^2, y = x, S = ?$

◀ Определим точки пересечения кривых: $x = 2 - x^2, x^2 + x - 2 = 0, x_{1,2} = -2; 1; M_1(-2, -2), M_2(1, 1)$ (рис. 23.9).

$$S = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x} dy = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{27}{6} \blacktriangleright$$

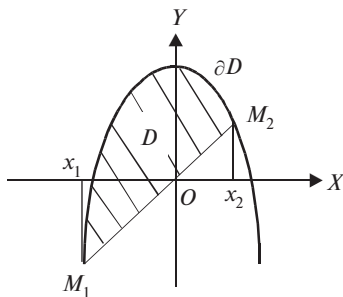


Рис. 23.9

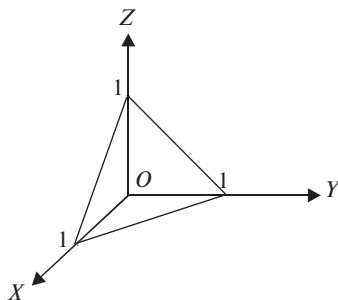


Рис. 23.10

Вычисление объемов цилиндрических тел

$$V_{\Omega} = \iint_D f(x, y) ds \quad (\text{см. разд. 23.1}).$$

Пример: $\partial\Omega: x = 0, y = 0, x + y + z = 1, z = 0$ (рис. 23.11). $V = ?$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft V &= \iint_D (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - 0,5y^2 \right] \Big|_0^{1-x} dx = 0,5 \int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{(1-x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание. Если тело, объем которого нужно найти, ограничено сверху поверхностью $z = f_2(x, y)$, а снизу $z = f_1(x, y)$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость XOY является область D , то объем V этого тела (рис. 23.11) вычисляется по формуле

$$V_{\Omega} = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) \, ds.$$

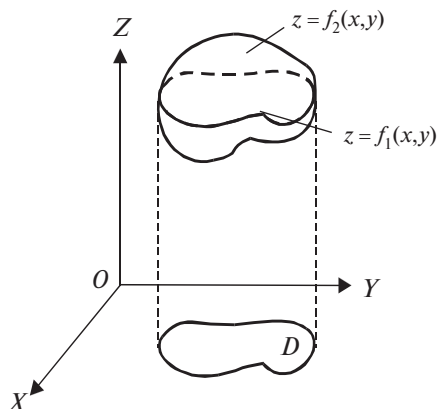


Рис. 23.11

Вычисление площади криволинейной поверхности

Л: Пусть плоская фигура G , ограниченная замкнутой линией ∂G , имеет площадь σ , а D — проекция фигуры G на некоторую плоскость, имеющая площадь S . Тогда

$$S = \sigma \cos \varphi, \quad (23.13)$$

где φ — острый угол между плоскостью проекции и плоскостью фигуры (рис. 23.12) ◆

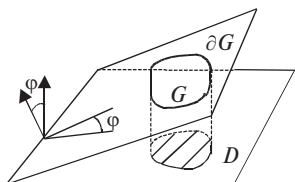


Рис. 23.12

□ Известно, что формула $S = \sigma \cos \varphi$ справедлива для треугольников. Так как любой плоский многоугольник можно разбить на несколько треугольников, то формула остается справедливой и для плоских многоугольников. Тогда площадь σ является пределом площадей вписанных в нее многоугольников, и формула будет справедлива в пределе ☐

Вычислим площадь поверхности G , заданной уравнением $z = f(x, y)$. Будем считать, что функция и ее частные производные первого порядка непрерывны в области $D \subset XOY$, в которую проектируется поверхность G (рис. 23.13). Разобьем область D на n частей ΔD_i , $i = \overline{1, n}$, через ΔG_i обозначим часть поверхности G , которая проектируется на площадку ΔD_i (рис. 23.14): $\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i$ ($\Delta \sigma_i$ —

площадь ΔG_i).

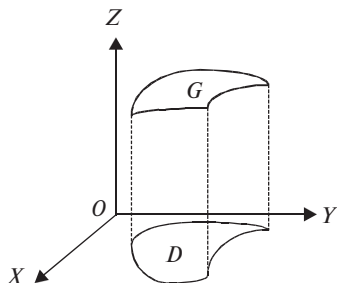


Рис. 23.13

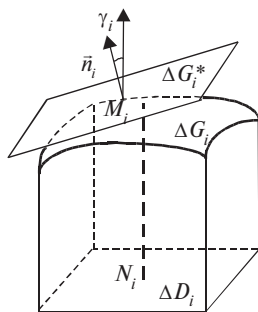


Рис. 23.14

В каждой площадке ΔD_i выберем т. $N_i(\xi_i, \eta_i)$, которой соответствует на поверхности G т. M_i с аппликатой $z_i = f(N_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Проведем в т. M_i касательную плоскость и рассмотрим ее часть ΔG_i^* , которая проектируется в площадку ΔD_i . Площадь ΔG_i^* обозначим через $\Delta \sigma_i^*$ и примем за приближенное значение площади $\Delta \sigma_i$.

Тогда $\sigma \approx \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i^*$. За точное значение площади поверхности при-

мем $\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i^*$. Используя формулу (23.13) леммы, имеем

$\Delta \sigma_i^* = \frac{\Delta S_i}{\cos \gamma_i}$, где γ_i — угол между ΔG_i^* и ΔD_i . Поскольку $\gamma_i = (\vec{n}_i, OZ)$

(рис. 23.15), а $\vec{n}_i = \langle -f'_x(\xi_i, \eta_i), -f'_y(\xi_i, \eta_i), 1 \rangle$ (см. п. 12.3.3), то

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{|\vec{n}_i|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i, \eta_i))^2}}.$$

Следовательно,

$$\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \Delta s_i,$$

и, используя определение двойного интеграла,

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (23.14)$$

Пример: Вычислить площадь части поверхности конуса

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостью $z = 2$.

◀ Так как $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

то по (23.14)

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy.$$

Поверхность имеет вид, изображенный на рис. 23.15, область D в плоскости XOY — круг с границей ∂D : $x^2 + y^2 = 4$, поэтому для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint_D \sqrt{2} r dr d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^2 = 2\sqrt{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\pi \blacktriangleright \end{aligned}$$

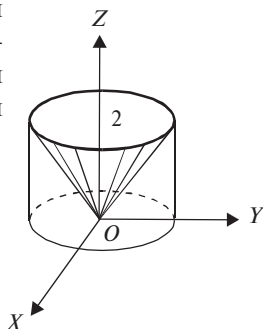


Рис. 23.15

23.5.2. Физические приложения

Вычисление статических моментов и координат центра масс плоской пластины D

О: Статическим моментом μ_x относительно OX материальной т. $M(x, y) \in XOY$ и имеющей массу m , называется произведение массы точки на ее ординату: $\mu_x = my$. Аналогично $\mu_y = mx$.

Рассмотрим dm (элементарную массу) как массу материальной точки, удаленной от осей координат OX и OY на расстояние y и x соответственно (рис. 23.16), получим элементарные статические моменты пластинки ds относительно координатных осей: $d\mu_x = y dm$, $d\mu_y = x dm$ и статические моменты пластинки D (см. разд. 23.1)

$$\mu_x = \iint_D y \rho(x, y) ds, \quad \mu_y = \iint_D x \rho(x, y) ds. \quad *$$

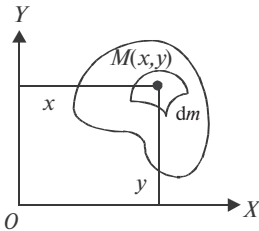


Рис. 23.16

В механике доказывается, что статический момент пластинки относительно какой-нибудь оси совпадает со статическим моментом точечной массы, равной массе пластинки, сосредоточенной в ее центре масс, относительно той же оси. Обозначая через x_c, y_c координаты центра масс пластинки D , можно записать: $\mu_y = mx_c, \mu_x = my_c$ и

$$x_c = \frac{\mu_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) ds = \frac{\iint_D x \rho(x, y) ds}{\iint_D \rho(x, y) ds},$$

$$y_c = \frac{\mu_x}{m} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) ds}{\iint_D \rho(x, y) ds}, \quad (23.15)$$

где $m = \iint_D \rho(x, y) ds$.

* Такой метод получения искомых величин в виде интегралов называется методом дифференциала в отличие от рассмотренного в разд. 18, 23.1 метода интегральных сумм.

Если пластина однородная, то $\rho(x,y) = \rho_0 = \text{const}$ и формулы (23.15) запишутся в виде

$$x_c = \frac{\iint_D x \, ds}{s}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \, ds}{s}.$$

Пример: Определить координаты центра тяжести квадратной пластинки $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$, если плотность $\rho(x, y) = x + y$.

◀ Воспользуемся формулами (23.15):

$$\begin{aligned} m &= \iint_D (x + y) \, dx \, dy = \int_0^2 dx \int_0^2 (x + y) \, dy = \int_0^2 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \int_0^2 (2x + 2) \, dx = x^2 + 2y \Big|_0^2 = 8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{8} \iint_D (x + y)x \, dx \, dy = \frac{1}{8} \int_0^2 dx \int_0^2 (x^2 + xy) \, dy = \frac{1}{8} \int_0^2 dx \left(x^2 y + x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 (2x^2 + 2x) \, dx = \frac{1}{8} \left(2 \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{7}{6}; \end{aligned}$$

$$y_c = \frac{1}{8} \iint_D (x + y)y \, dx \, dy = \frac{1}{8} \int_0^2 dy \int_0^2 (xy + y^2) \, dx = \frac{7}{6} \blacktriangleright$$

Вычисление моментов инерции плоской пластины

О: Моментом инерции материальной точки массой m относительно оси называется произведение массы на квадрат ее расстояния до оси.

Для элементарных моментов инерции пластинки ds относительно осей координат OX и OY имеем выражения: $dJ_x = y^2 dm$, $dJ_y = x^2 dm$.

После интегрирования по области D получим моменты инерции пластинки D относительно координатных осей:

$$J_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) \, ds, \quad J_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) \, ds.$$

Пример: Найти момент инерции однородной пластинки с $\rho_0 = 1$, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и осью OX , относительно оси OY .

$$\leftarrow J_x = \iint_D x^2 \rho \, ds = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} x^2 \, dy = \int_{-2}^2 x^2 (4 - x^2) \, dx = \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{128}{15} \rightarrow$$

Литература: [2. С. 136–189]; [4. С. 160–195]; [5. С. 474–500]; [6. С. 307–323].

24. ТРОЙНЫЕ И n -КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

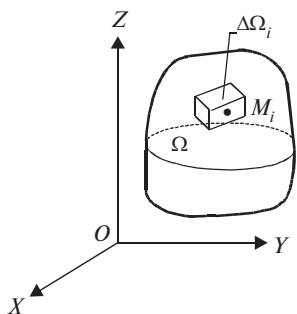
Опорный конспект № 24

24.1. Понятие ТИ

Ω разбивается на $\Delta\Omega_i$, $i = \overline{1, n}$, с объемами ΔV_i ,

$\Delta\Omega_i \cap \Delta\Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\Omega_i \Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i,$$



$\lambda = \max \text{diam } \Delta\Omega_i$

T: $f(x, y, z)$ непр. в $\bar{\Omega} \Rightarrow$ ТИ \exists ■

$\rho(x, y, z)$ — плотность в т. $M(x, y, z) \in \Omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = \iiint_{\Omega} \rho \, dv \text{ — масса } \Omega.$$

24.2. Свойства ТИ

$$1^0. \iint_{\Omega} (f(x, y, z) + \varphi(x, y, z)) dv = \iint_{\Omega} f dv + \iint_{\Omega} \varphi dv;$$

$$2^0. \iint_{\Omega} cf dv = c \iint_{\Omega} f dv, \quad c = \text{const};$$

$$3^0. \Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \Rightarrow \iint_{\Omega} f dv = \iint_{\Omega_1} f dv + \iint_{\Omega_2} f dv;$$

$$4^0. \iint_{\Omega} dv = V \quad \text{— объем } \Omega;$$

$$5^0. \varphi(x, y, z) \leq \psi(x, y, z) \text{ в } \Omega \Rightarrow \iint_{\Omega} \varphi dv \leq \iint_{\Omega} \psi dv;$$

6⁰. Теорема о среднем:

$f(x, y, z)$ непр. в $\bar{\Omega} \Rightarrow \exists M(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$:

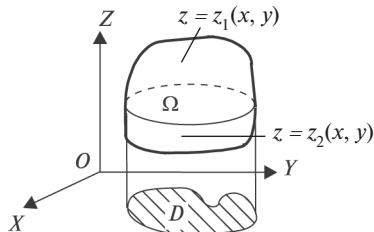
$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta)V \quad \blacksquare$$

24.3. Вычисление ТИ

В прямоугольных координатах: Ω правильная, проектируется в D .

$$\partial D: \begin{cases} y = \varphi_1(x), & y = \varphi_2(x), \\ (\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)), \\ x = a, & x = b \quad (a < b), \end{cases} \Rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$$

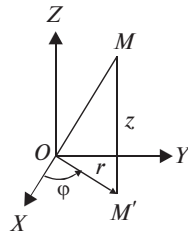
$$= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$



В цилиндрических координатах:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \partial D: \begin{cases} r = r_1(\varphi), \\ r = r_2(\varphi), \\ (r_1 < r_2) \\ \varphi = \alpha, \quad \varphi = \beta \end{cases}$$

$$r = |\overline{OM'}|, \quad \varphi = (\overline{OM'}, \overline{OX}).$$

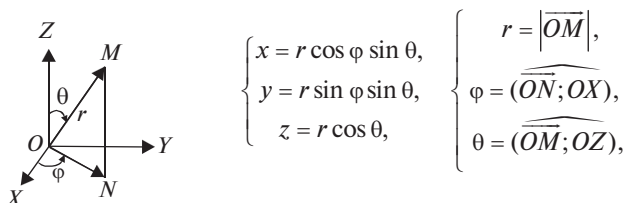


$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \iint_D r \, dr \, d\varphi \int_{z_1^*}^{z_2^*} f^*(r, \varphi, z) \, dz =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \int_{z_1^*}^{z_2^*} f^*(r, \varphi, z) \, dz, \quad z_i^*(r, \varphi) = z_i^* =$$

$$= z_i(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad i = 1, 2, \quad f^*(r, \varphi, z) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

В сферических координатах:



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \iiint_{\Omega} f^*(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

24.4. Приложения ТИ

24.4.1. Объем тела Ω (см. 24.2)

24.4.2. Физические приложения

а) Статические моменты:

$$\mu_{xy} = \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) \, dv, \quad \mu_{yz} = \iiint_{\Omega} \rho x \, dv, \quad \mu_{xz} = \iiint_{\Omega} \rho y \, dv;$$

б) Координаты центра масс Ω :

$$x_c = \frac{\mu_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{\mu_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{\mu_{xy}}{m}.$$

ρ — плотность, m — масса Ω

24.1. Понятия тройного и n -кратного интеграла

Рассмотрим задачу о массе тела $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Пусть в каждой точке тела задана плотность $\rho = \rho(x, y, z)$, непрерывная в $\bar{\Omega}$. Требуется найти массу m тела Ω . Если плотность постоянна, то $m = \rho V$, где V — объем Ω . Разобьем тело Ω на n частей $\Delta\Omega_i$ ($\Delta\Omega_i \cap \Delta\Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$) (рис. 24.1) с объемами Δv_i . Выберем произвольные точки $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\Omega_i$ и будем считать, что плотность в $\Delta\Omega_i$ постоянна

и равна $\rho(M_i)$, тогда $m \approx \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta v_i$. За точное значение m есте-

ственно принять

$$m \approx \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i, \quad (24.1)$$

где $\lambda = \max \lambda_i$ — максимальный диаметр $\Delta\Omega_i$.

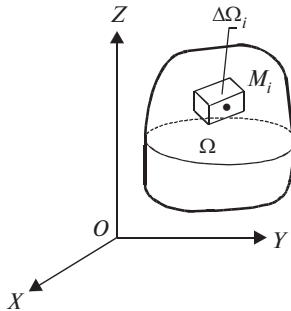


Рис. 24.1

Пусть теперь в трехмерной области Ω задана произвольная непрерывная функция $u = f(x, y, z)$ ($u = f(M)$). Разобьем Ω на n частей аналогично рассмотренному выше и составим суммы

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i, \quad (24.2)$$

которая называется трехмерной интегральной суммой для $f(x, y, z)$ в Ω .

О: Тройным интегралом (ТИ) от $u = f(x, y, z)$ по области Ω называется предел интегральной суммы (24.2) при $\lambda \rightarrow 0$, если он существует и не зависит от способа разбиения Ω на $\Delta\Omega_i$, $i = \overline{1, n}$, и от выбора точек $M_i \in \Delta\Omega_i$, т.е.

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i. \quad (24.3)$$

Из формул (24.1) и (24.3) получаем формулу для вычисления массы тела Ω :

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dv. \quad (24.4)$$

Так же как двойной интеграл, тройной интеграл существует при непрерывности $f(x, y, z)$ в $\overline{\Omega}$, имеющей объем V . В этом случае в качестве поверхностей, разбивающих Ω на $\Delta\Omega_i$, $i = \overline{1, n}$, можно взять плоскости $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ и

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Определим по аналогии с двойным и тройным интегралами n -кратный интеграл. Для этого нужно ввести понятие меры n -мерной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, обобщающее понятия площади двумерной области D и объема трехмерной Ω . В трехмерном случае объем (площадь в двумерном случае) существует для области Ω с так называемой кусочно-гладкой границей.

О: Поверхность называется гладкой, если в любой ее точке можно провести касательную плоскость, положение которой непрерывно изменяется при перемещении точки по поверхности. Поверхность называется кусочно-гладкой, если ее можно составить из конечного числа гладких кусков.

Для гладкой поверхности с уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в \overline{D} .

Аналогично определяется гладкость кривой L на плоскости, причем если уравнение $L: y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то $y(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$.

Введем определение гладкой поверхности $G \subset \mathbf{R}^n$.

О: Гладкой поверхностью $G \subset \mathbf{R}^n$ называется множество точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих уравнению $x_j = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, если φ непрерывно дифференцируема в $(n-1)$ -мерной области \bar{G}^* точек $P(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Определим n -мерный прямоугольный параллелепипед.

О: Прямоугольным параллелепипедом $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ называется множество точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых определяются неравенствами: $a_j \leq x_j \leq b_j$ ($j = \overline{1, n}$, $a_j < b_j$). Мера (объем) прямоугольного параллелепипеда Π

$$\mu(\Pi) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n). \quad (24.5)$$

Дадим теперь определение меры произвольной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

О: Мерой Жордана области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ называется число $\mu(\Omega) > 0$ со свойствами:

- 1⁰. Если Ω — прямоугольный параллелепипед, то мера $\mu(\Omega)$ вычисляется по формуле (24.5).
- 2⁰. Если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, то $\mu(\Omega_1) \leq \mu(\Omega_2)$.
- 3⁰. Если область Ω разделена на части Ω_1 и Ω_2 кусочно-гладкими поверхностями: $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, то $\mu(\Omega) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2)$.

Введем определение n -кратного интеграла. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Разобьем Ω на m частей $\Delta\Omega_i$, $i = \overline{1, m}$, с кусочно-гладкими границами, причем $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$. Выберем произвольно т. $M_i(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_n^i) \in \Delta\Omega_i$ и составим сумму $\sum_{i=1}^m f(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_n^i) \mu(\Delta\Omega_i)$, которую назовем интегральной суммой

Римана функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по области Ω .

О: n -кратным интегралом от функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ называется

$$\overbrace{\iint \dots \int}^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \lim_{\max \text{diam} \Delta \Omega_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_n^i) \mu(\Delta \Omega_i),$$

если предел конечен и не зависит от способа разбиения области Ω на $\Delta \Omega_i$, $i = \overline{1, m}$, и от выбора промежуточных точек $M_i \in \Delta \Omega_i$.

Так же как двойной и тройной интегралы, n -кратный интеграл существует, если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей.

24.2. Свойства тройного интеграла

Свойства ТИ полностью повторяют свойства двойного интеграла (см. ОК № 24).

24.3. Вычисление тройного интеграла

24.3.1. ТИ в декартовых координатах

Предположим, что пространственная (трехмерная) область Ω , ограниченная замкнутой поверхностью $\partial \Omega$, обладает следующими свойствами:

1⁰. Всякая прямая, параллельная оси OZ , проведенная через внутреннюю (т.е. не лежащую на границе $\partial \Omega$) точку области Ω , пересекает $\partial \Omega$ в двух точках.

2⁰. Область Ω проектируется на плоскость XOY в правильную двумерную область D .

3⁰. Любая часть области Ω , отсеченная плоскостью, параллельной координатной плоскости (XOY , XOZ , YOZ), обладает свойствами 1⁰ и 2⁰.

О: Область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, обладающая указанными свойствами 1⁰–3⁰, называется правильной трехмерной областью.

Вычисление ТИ сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов. Рассмотрим правильную область, ограниченную снизу $z = z_1(x, y)$, сверху $z = z_2(x, y)$ (рис. 24.2).

Пусть эта область проектируется на плоскость XOY в площадь D , ∂D : $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$), $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Про-

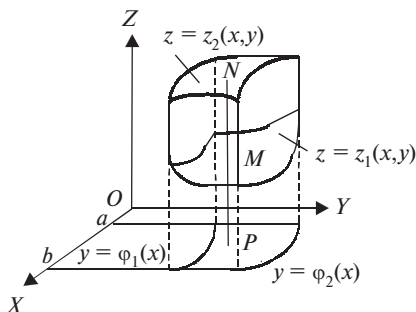


Рис. 24.2

ведем через т. $P(x, y, 0) \in D$ прямую, параллельную OZ . Эта прямая пересечет $z = z_1(x, y)$ в т. M (точка входа), а $z = z_2(x, y)$ в т. N (точка выхода). Тогда, если $f(x, y, z)$ — непрерывная функция в области Ω , то можно доказать, что значение ТИ вычисляется по формуле [3б. С.201]

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Используя формулу (23.5), имеем

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (24.6)$$

Если область Ω более сложная, чем рассмотренная, то ее разбивают на конечное число областей указанного вида и к каждой из них применяют формулу (24.6).

Пример:

$$\iiint_{\Omega} z dv = ? \quad \partial\Omega: x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1$$

(см. рис. 23.11).

◀ Ω — пирамида, $\partial D: x = 0, y = 0, x + y = 1, 0 \leq z \leq 1 - x - y, a = 0, b = 1, \varphi_1(x) = 0$ и $\varphi_2(x) = 1 - x$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = -\frac{(1-x)^4}{24} \Big|_0^1 = \frac{1}{24} \blacktriangleright \end{aligned}$$

Формула, аналогичная (24.6), имеет место и для n -кратного интеграла для областей $\Omega \subset \mathbf{R}^n$: $x_1^* \leq x_1 \leq x_1^{**}$, $x_2^*(x_1) \leq x_2 \leq x_2^{**}(x_1)$, ..., $x_n^*(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq x_n^{**}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

24.3.2. ТИ в цилиндрических координатах

Формула замены переменных для тройного интеграла запишется в виде

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \iiint_{\Omega^*} f^*(u, v, w) |J| \, dv^*, \quad (24.7)$$

где $f^*(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, функции $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ непрерывно дифференцируемы в Ω^* и устанавливают взаимно-однозначное соответствие между точками областей Ω^* и Ω ,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Аналогичная формула замены переменных имеет место и для n -кратного интеграла [10. С.342, 389].

О: Цилиндрическими координатами т. $M(x, y, z)$ называются ее аппликата z и полярные координаты т. $M' = \text{пр}_{XOY} M$.

Пусть в плоскости XOY полярная ось l совпадает с осью OX , полюс — с началом координат, $r = |\overline{OM'}|$, $\varphi = (\overline{OM}, \overline{OX})$, причем $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ (рис. 24.3).

Тогда имеем:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$$

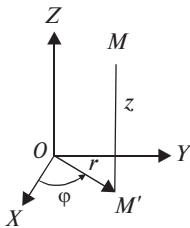


Рис. 24.3

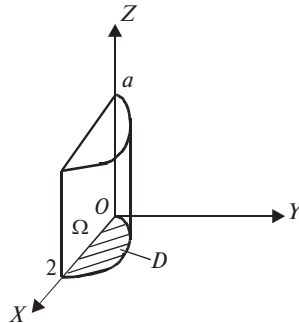


Рис. 24.4

и $dv = r dr d\varphi dz$.

$$\text{Если } \partial D: \begin{cases} r = r_1(\varphi), \\ r = r_2(\varphi), \\ (r_1 < r_2) \\ \varphi = \alpha, \varphi = \beta, \end{cases} \text{ то из (24.7)}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} f^*(r, \varphi, z) dz. \quad (24.8)$$

Пример: $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = ?$

$\partial\Omega: y = 0, y = \sqrt{2x - x^2}, z = 0, z = a$ (рис. 24.4).

◀ Так как уравнение $y = \sqrt{2x - x^2}$ в цилиндрических координатах принимает вид $r = 2\cos \varphi, \varphi \in [0, \pi/2]$, то по формуле (24.8)

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{\Omega} r^2 z dz dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos \varphi} r^2 dr \int_0^a z dz = \frac{8}{9} a^2 \blacktriangleright$$

24.3.3. ТИ в сферических координатах

О: Сферическими координатами т. $M(x,y,z)$ называются числа $r = |\overline{OM}|$, $\theta = (\overline{OM}, \overline{OZ})$, $\varphi = (\overline{OM'}, \overline{OX})$, $M' = \text{пр}_{XOY}M$, причем $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi)$ (рис. 24.5).

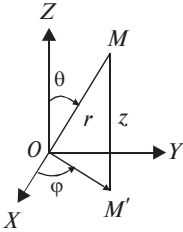


Рис. 24.5

Рассматривая $\triangle OMM'$, можно записать: $x = OM' \cos \varphi$, $y = OM' \sin \varphi$, $OM' = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, т.е. формулы перехода от прямоугольных координат к сферическим $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $J = r^2 \sin \theta$. Тогда $dv = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$ и из (24.7)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv &= \iiint_{\Omega} f^*(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f^*(r, \theta, \varphi) r^2 dr, \end{aligned} \quad (24.9)$$

где $f^*(r, \theta, \varphi) = f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$.

Пример: $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = ?$

Ω : полушар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$.

◀ Для области Ω пределы изменения сферических координат есть $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq R$. По формуле (24.9) имеем:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} r^2 \cos^2 \theta r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi R^5}{15} \blacktriangleright \end{aligned}$$

24.4. Приложения тройных интегралов

24.4.1. Вычисление объемов тел

Если в формуле (24.3) $f(x,y,z) \equiv 1$, то получим формулу для вычисления объема тела $V = \iiint_{\Omega} dv$.

Пример: Вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(см. п.18.2.1).

$$\blacktriangleleft z_1(x,y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad z_2(x,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

$$\varphi_1(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad \varphi_2(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

$$-a \leq x \leq a, \text{ по (24.6) } V = \int_{-a}^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz =$$

$$= 2c \int_{-a}^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin t, \quad y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad t = -\pi/2, \\ dy = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cos t dt, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad t = \pi/2 \end{array} \right\} =$$

$$= 2cb \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{cb\pi}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4\pi abc}{3}.$$

При $a = b = c = R$ получаем формулу для объема шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \blacktriangleright$$

24.4.2. Физические приложения ТИ

Принципы, лежащие в основе применения тройных интегралов к решению физических задач, аналогичны принципам применения двойных интегралов.

О: Статическим моментом материальной точки массой m относительно плоскости XOY называется произведение ее массы на аппликату точки: $\mu_{xy} = mz$. Аналогично, $\mu_{yz} = mx$, $\mu_{xz} = my$.

Рассматривая dm как материальную точку, получим элементарные статические моменты $d\mu_{xy} = zdm = z\rho(x, y, z)dv$, $d\mu_{yz} = x\rho(x, y, z)dv$, $d\mu_{xz} = y\rho(x, y, z)dv$, если в области Ω задана плотность $\rho = \rho(x, y, z)$. Интегрируя эти выражения по области Ω , получаем

$$\begin{aligned}\mu_{xy} &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) z \, dv, & \mu_{yz} &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) x \, dv, \\ \mu_{xz} &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) y \, dv.\end{aligned}$$

Аналогично двойному интегралу, для координат центра масс тела имеем формулы:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\mu_{yz}}{m} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) \, dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dv}, & y_c &= \frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) \, dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dv}, \\ z_c &= \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z) \, dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dv}.\end{aligned}\tag{24.10}$$

Если тело однородное, т.е. $\rho(x, y, z) = \rho_0 = \text{const}$, то формулы (24.10) запишутся в виде

$$x_c = \frac{\iiint_{\Omega} x \, dv}{V}, \quad y_c = \frac{\iiint_{\Omega} y \, dv}{V}, \quad z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dv}{V}.$$

Пример: Определить координаты центра масс тела, ограниченного параболоидом вращения $2z = 4 - x^2 - y^2$ и $z = 0$.

◀ В силу симметрии (рис. 24.6)

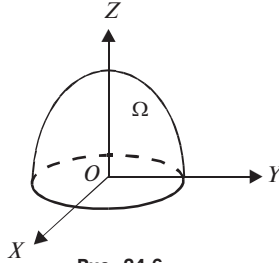


Рис. 24.6

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dv}{V}.$$

$$V = \iint_D ds \int_0^{2-r^2/2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4-r^2)r \, dr = 4\pi,$$

$$\iiint_{\Omega} z \, dv = \iint_D ds \int_0^{2-r^2/2} z \, dz = \frac{1}{8} \iint_D (4-r^2)^2 \, ds = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4-r^2)^2 r \, dr =$$

$$= -\frac{1}{48} \int_0^{2\pi} (4-r^2)^3 \Big|_0^2 d\varphi = \frac{8}{3} \pi, \quad z_c = \frac{2}{3}, \quad C(0, 0, \frac{2}{3}) \text{ — центр масс } \blacktriangleright$$

О: Моментом инерции J_x материальной точки массой m относительно оси OX называется произведение массы точки на квадрат ее расстояния до оси: $J_x = (y^2 + z^2)m$. Аналогично, $J_y = (x^2 + z^2)m$, $J_z = (x^2 + y^2)m$.

Для элементарных моментов инерции тела dV относительно осей координат OX , OY и OZ можно записать:

$$dJ_x = (y^2 + z^2)dm = (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv,$$

$$dJ_y = (x^2 + z^2)\rho dv, \quad dJ_z = (x^2 + y^2)\rho dv.$$

После интегрирования по области Ω получим моменты инерции тела Ω относительно координатных осей:

$$J_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dv, \quad J_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho \, dv,$$
$$J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho \, dv. \quad (24.11)$$

Пример: Определить момент инерции относительно оси OZ однородной пирамиды ($\rho = 3$) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

◀ По формуле (24.11)

$$J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \cdot 3 \, dv = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2) \, dz =$$
$$= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2)(1-x-y) \, dy = \frac{1}{10} \blacktriangleright$$

Литература: [2. С. 136–189]; [4. С. 198–211]; [5. С. 501–522]; [6. С. 346–352]; [7. С. 346–353].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ КО ВТОРОЙ ЧАСТИ

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1988. — 432 с.
2. *Бугров Я.С., Никольский С.Н.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1985. — 448 с.
3. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1978. Т.1. — 456 с.
4. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1978. Т.2. — 576 с.
5. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989. — 656 с.
6. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988. — 816 с.
7. *Щипачев В.С.* Высшая математика. — М.: Высш.школа, 2003. — 479 с.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. Т.1. — 607 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. Т.2. — 800 с.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. Т.3. — 656 с.
11. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. — М.: Высш. школа, 1998. Т. 2. — 584 с.
12. *Вержбицкий В.М.* Численные методы. — М.: ООО «Изд. Дом ОНИКС 21 век», 2005. — 400 с.
13. *Шерстнев А.Н.* Конспект лекций по математическому анализу. — Казань: Изд-во КГУ, 1991. — 296 с.
14. *Гусак А.А.* Высшая математика. — Мн.: ТетраСистемс, 2001. Т.2. — 448 с.
15. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 496 с.
17. *Баврин И.И.* Высшая математика. — М.: Высш. школа, 2000. — 611 с.
18. *Ершова В.В.* Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. — Мн.: Высш. школа, 1986.— 256 с.
19. *Данилов Ю.М., Журбенко Л.Н., Никонова Г.А.* Высшая математика. — Казань: Изд-во КГУ, 2000. — 380 с.

Часть 3. ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА

В третьей части учебного пособия рассмотрены криволинейные и поверхностные интегралы I и II родов, элементы теории поля, числовые и функциональные ряды. Приведены сведения из теории рядов Фурье и уравнений математической физики.

Глава 9 ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

25. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ДЛИНЕ ДУГИ (I рода)

Опорный конспект № 25

25.1. Понятие КИ I р

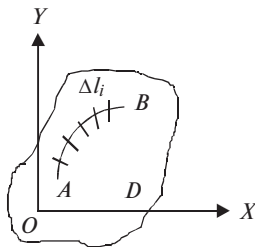
О: $f(x, y)$ непр. в D ,
 $AB \subset D$, AB разбивается
на $A_{i-1} \cup A_i$ длиной Δl_i ,

$i = \overline{1, n}$, $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta l_i \Rightarrow$

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

$\rho(x, y)$ — линейная плотность $\overset{\cup}{AB} \Rightarrow$

$$m = \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell \quad \text{— масса } AB$$



25.2. Свойства КИ Ир

$$1^0. \int_{\overset{\cup}{AB}} (f_1(x, y) + f_2(x, y)) d\ell = \int_{\overset{\cup}{AB}} f_1 d\ell + \int_{\overset{\cup}{AB}} f_2 d\ell;$$

$$2^0. \int_{\overset{\cup}{AB}} c f(x, y) d\ell = c \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell, \quad c = \text{const};$$

$$3^0. L = L_1 + L_2 \Rightarrow \int_L f(x, y) d\ell = \int_{L_1} f d\ell + \int_{L_2} f d\ell;$$

$$4^0. \int_L d\ell = \ell \quad \text{— длина } L;$$

$$5^0. \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell = \int_{\overset{\cup}{BA}} f(x, y) d\ell$$

25.3. Вычисление КИ Ир

а) $\overset{\cup}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$ — непр. дифф. на $[\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt;$$

б) $\overset{\cup}{AB}$: $y = y(x)$ — непр. дифф. на $[a, b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

25.1. Кривые в \mathbf{R}^n . Задача о массе кривой. Понятие криволинейного интеграла I рода

О: Кривой L в \mathbf{R}^n будем называть множество точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, координаты которых x_1, x_2, \dots, x_n заданы как функции некоторого параметра $t \in \mathbf{R}$: $L = \{M \in \mathbf{R}^n: x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)\}$.

Каждой т. $M \subset L$ соответствует радиус-вектор $r(M) = \{x_1(t_M), x_2(t_M), \dots, x_n(t_M)\}$.

Пример: Траектория AB движения материальной точки в трехмерном пространстве в зависимости от времени t задается параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_A \leq t \leq t_B$.

В качестве параметра t обычно выбирается переменная, строго возрастающая при движении по кривой, тогда началу кривой соответствует наименьшее, концу — наибольшее значение параметра t . Такие кривые называют ориентированными.

О: Кривая $L: x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [\alpha, \beta]$, называется непрерывной, если $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны на $[\alpha, \beta]$; гладкой, если $x_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ и $\sum_{i=1}^n [x'_i(t)]^2 \neq 0$. Кривая L называется кусочно-гладкой, если состоит из конечного числа гладких кривых. Кривая L называется замкнутой, если конец совпадает с началом ($x_i(\alpha) = x_i(\beta)$, $i = \overline{1, n}$).

Длина кривой $\overset{\cup}{AB}$ определена в п. 12.3.2.

Рассмотрим в плоскости XOY кривую $\overset{\cup}{AB}$ длиной l и предположим, что вдоль этой кривой распределена масса с линейной плотностью $\rho(M) = f(x, y)$. Требуется определить массу кривой $\overset{\cup}{AB}$. Разобьем $\overset{\cup}{AB}$ на n частей точками $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ (рис. 25.1). Обозначим через Δm_i массу дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ длиной Δl_i , тогда $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$. Подсчитаем приблизительно массу дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$.

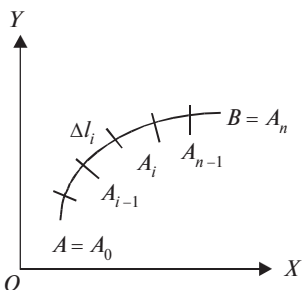


Рис. 25.1

Пусть $M_i(\xi_i, \eta_i)$ — произвольная точка дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$. Считая, что плотность в каждой точке дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ такая же, как в т. M_i , получаем: $\Delta m_i \approx \rho(M_i) \Delta l_i = \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$. Суммируя, найдем

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

За точное значение массы кривой $\overset{\cup}{AB}$ примем предел этой суммы при условии, что $\max \Delta \ell_i \rightarrow 0$. Итак,

$$m = \lim_{\max \Delta \ell_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta \ell_i. \quad (25.1)$$

К подобного рода суммам и их пределам приводят и другие задачи. Отвлекаясь от конкретного содержания приведенной задачи, рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$, определенную в точках дуги $\overset{\cup}{AB}$. Составленная для нее сумма

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \ell_i \quad (25.2)$$

называется интегральной.

О: Криволинейным интегралом $\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell$ от функции $f(x, y)$ по

длине $\overset{\cup}{AB}$ называется предел интегральной суммы (25.2), если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения $\overset{\cup}{AB}$ на части $A_{i-1}A_i$, $i = \overline{1, n}$, и от выбора в них точек M_i , т.е.

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell = \lim_{\max \Delta \ell_i} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \ell_i. \quad (25.3)$$

Сравнивая (25.1) и (25.3), делаем вывод, что $m = \int_{\overset{\cup}{AB}} \rho(x, y) d\ell$.

Аналогично определяется криволинейный интеграл $\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\ell$ от функции n переменных по длине $\overset{\cup}{AB} \subset \mathbf{R}^n$.

25.2. Свойства криволинейного интеграла I рода

Свойства криволинейного интеграла I рода (КИ Iр) приведены в ОК № 25 и доказываются аналогично свойствам определенного интеграла с использованием (25.3). Специфическим по сравнению с определенным интегралом является свойство 5^0 неизменности КИ Iр при перемене ориентации кривой ($\Delta \ell_i \geq 0$ в (25.3) независимо от ориентации).

25.3. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Криволинейный интеграл $\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell$ легко сводится к определенному интегралу. Примем за параметр длину дуги l , отсчитываемую от точки A по кривой $\overset{\cup}{AB}$, получим параметрическое представление кривой $\overset{\cup}{AB}$: $x = x(\ell)$, $y = y(\ell)$, $0 \leq \ell \leq \ell^*$, где ℓ^* — длина дуги $\overset{\cup}{AB}$. Пусть в (25.3) промежуточным точкам $M_i(\xi_i, \eta_i)$ соответствует $\ell = \ell_i^*$, т.е. $\xi_i = x(\ell_i^*)$, $\eta_i = y(\ell_i^*)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \ell_i = \sum_{i=1}^n f[x(\ell_i^*), y(\ell_i^*)] \Delta \ell_i.$$

Последняя сумма является интегральной для определения интеграла $\int_0^{\ell^*} f[x(\ell), y(\ell)] d\ell$, т.е.

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell = \int_0^{\ell^*} f[x(\ell), y(\ell)] d\ell. \quad (25.4)$$

Эта формула доказывает существование криволинейного интеграла I рода от функции $f(x, y)$, непрерывной в D , если $\overset{\cup}{AB} \subset D$ — непрерывная кусочно-гладкая кривая.

Рассмотрим формулы для вычислений криволинейного интеграла в следующих случаях:

а) $\overset{\cup}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, тогда (см. разд. 18.3)

$$d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

т.е. из (25.4) имеем

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Формула может быть обобщена на пространственный случай, т.е. если $\overset{\cup}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $f(x, y, z)$ непрерывна в D , $\overset{\cup}{AB} \subset D$, тогда

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Аналогично записывается формула для большего числа переменных.

Пример:

$$\int_L (x^2 + y^2) d\ell = ? \quad L: \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\blacktriangleleft \int_L (x^2 + y^2) d\ell = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = a^3 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^3 \blacktriangleright$$

б) $\overset{\cup}{AB}$: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, где $y(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда

$$d\ell = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (\text{см. разд. 18.3})$$

$$\text{и } \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dx = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Пример: Найти массу кривой $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, если линейная плотность $\rho(x, y) = x^2$.

$$\blacktriangleleft m = \int_{\overset{\cup}{AB}} x^2 d\ell = \int_1^2 x \sqrt{1 + x^2} dx = 0,5 \int_1^2 (1 + x^2)^{1/2} d(1 + x^2) =$$

$$= 0,5 \cdot \frac{2}{3} (1 + x^2)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) \blacktriangleright$$

Литература: [3. С. 205–210]; [6. С. 324–345]; [10. С. 493–495].

26. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАМ (II РОДА)

Опорный конспект № 26

26.1. Определение КИ Пр. Задача о работе

$$\vec{a} = \{P(x,y), Q(x,y)\}$$

$$P(x,y), Q(x,y) —$$

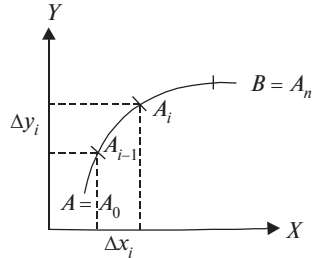
непр. в D , $AB \subset D$

AB разбивается

на $A_{i-1}A_i$, $i = \overline{1, n}$,

$$A_{i-1} \rightarrow A_i = \{\Delta x_i, \Delta y_i\},$$

$$M(\xi_i, \eta_i) \in A_{i-1}A_i,$$



$$\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} P dx + Q dy =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i, \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{(i)} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

$$W = \int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} — \text{ работа силы } \vec{F} = \{P(x,y), Q(x,y)\}$$

$$\text{на } AB, d\vec{r} = \{dx, dy\}$$

26.2. Свойства КИ Пр

$$1^0. \int_{AB} P dx + Q dy = - \int_{BA} P dx + Q dy ;$$

$$2^0. \overset{\cup}{AB} = \overset{\cup}{AC} + \overset{\cup}{CB} \Rightarrow \int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AC} P dx + Q dy + \int_{CB} P dx + Q dy;$$

$$3^0. D = D_1 + D_2, \partial D_1 = L_1, \partial D_2 = L_2, \partial D = L \Rightarrow$$

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_{L_1} + \oint_{L_2}$$

26.3. Вычисление КИ Пр

1) $\int_{AB} P dx + Q dy$: $x = x(t), y = y(t)$ — непр. дифф. на $[\alpha, \beta]$

$$\Rightarrow \int_{AB} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

2) $\int_{AB} P dx + Q dy$: $y = y(x)$ — непр. дифф. на $[a, b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{AB} P dx + Q dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)) dx$$

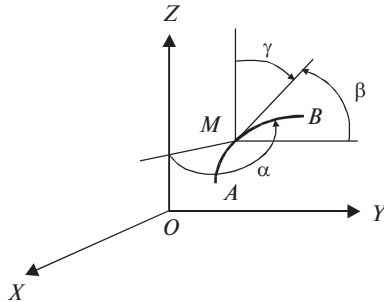
26.4. Связь между КИ Ир и Пр

L_M — касательная к AB в т. M ,

$$\alpha = (\widehat{L_M, OX}), \beta = (\widehat{L_M, OY}), \gamma = (\widehat{L_M, OZ}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

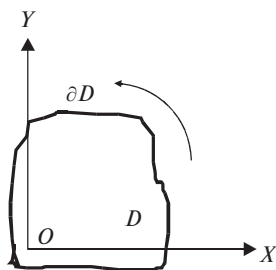
$$= \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\ell$$



26.5. Формула Грина

$P(x, y), Q(x, y)$ непр. в D вместе с $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$,

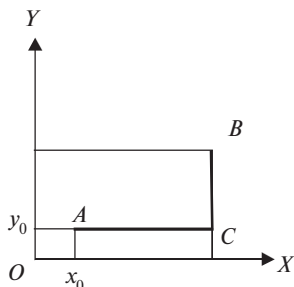
$$L = \partial D \Rightarrow \oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



26.6. Условия независимости КИ Пр от контура интегрирования

1. $\int_{L^*} P dx + Q dy = 0 \quad \forall L^* \subset D \Leftrightarrow$
2. $\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от $AB \subset D \Leftrightarrow$
3. $P dx + Q dy = du, \quad u = u(x, y), \quad (x, y) \in D \Leftrightarrow$
4. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в D

26.7. Интегрирование полных дифференциалов



$$\begin{aligned}
 P dx + Q dy &= du \Rightarrow \\
 u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + c = \\
 &= \int_{AC} + \int_{CB} + c = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + c
 \end{aligned}$$

26.1. Определение криволинейного интеграла II рода

Рассмотрим задачу о работе переменной силы. Пусть материальная точка под действием силы $\vec{F} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ перемещается вдоль кусочно-гладкой кривой AB . Найти работу W силы \vec{F} при перемещении точки из A в B (рис. 26.1). Для решения задачи

разобьем кривую $\overset{\cup}{AB}$ на n частей точками $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$. Заменяем приближенно на дуге $A_{i-1}A_i$ силу \vec{F} значением ее в т. $M_i(\xi_i, \eta_i) \in A_{i-1}A_i$, а движение по $A_{i-1}A_i$ — движением по отрезку $\overline{A_{i-1}A_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$. Тогда приближенное значение работы на $\overset{\cup}{AB}$ в силу справедливости формулы $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (скалярное произведение) для $|\vec{F}| = \text{const}$ и перемещения \vec{s} находится по формуле

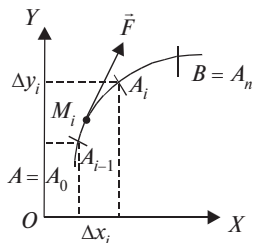


Рис. 26.1

$$W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^n (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i).$$

За точное значение работы естественно принять

$$W = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i). \quad (26.1)$$

Нахождение пределов сумм рассмотренного вида встречается и в других задачах.

Рассмотрим теперь вектор $\vec{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, $(x, y) \in D$. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны в D , $\overset{\cup}{AB} \subset D$. Разобьем кривую $\overset{\cup}{AB}$ на n частей и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i). \quad (26.2)$$

О: Криволинейным интегралом II рода (КИ IIр) по координатам от функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ по $\overset{\cup}{AB} \int P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ — (обозначение) называется предел интегральной суммы (26.2) при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, $\max \Delta y_i \rightarrow 0$, если он не зависит от способа разбиения $\overset{\cup}{AB}$ на части и от выбора промежуточных точек M_i , т.е.

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i). \quad (26.3)$$

КИ II рода также называют интегралом от вектора по кривой и обозначают $\int_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$, $d\vec{r} = \{dx, dy\}$.

Из формул (26.1), (26.2) виден физический смысл криволинейного интеграла II рода:

$$W = \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\overset{\cup}{AB}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}.$$

Если кривая L является замкнутой, ограничивающей некоторую область D ($L = \partial D$), то криволинейный интеграл по замкнутому контуру называют циркуляцией и обозначают $\oint_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$, причем положительным направлением обхода по L считается то, при котором область D остается слева.

Аналогично определяется криволинейный интеграл $\int_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$, если $\vec{a} = (a_{x_1}, a_{x_2}, \dots, a_{x_n})$, $\overset{\cup}{AB} \subset \mathbf{R}^n$, $a_{x_i} = a_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$.

26.2. Свойства криволинейного интеграла II рода

КИ II рода имеет свойства, аналогичные свойствам определенного интеграла. Наиболее важными из них являются:

$$1^0. \quad \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{\overset{\cup}{BA}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

$$2^0. \quad \int_{\overset{\cup}{AB}} P dx + Q dy = \int_{\overset{\cup}{AC}} P dx + Q dy + \int_{\overset{\cup}{CB}} P dx + Q dy.$$

3⁰. Пусть кривая L является замкнутой, ограничивающей некоторую область D . Если $D = D_1 + D_2$ (рис. 26.2), $\partial D_1 = L_1$, $\partial D_2 = L_2$, то

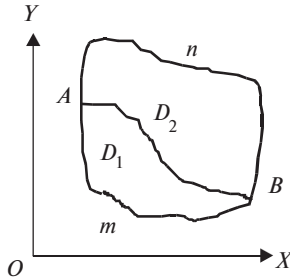


Рис. 26.2

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_{L_1} P dx + Q dy + \oint_{L_2} P dx + Q dy. \quad (26.4)$$

□ В силу свойства 2⁰

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{\overset{\cup}{AmB}} P dx + Q dy + \int_{\overset{\cup}{BA}} P dx + Q dy,$$

$$\oint_{L_2} P dx + Q dy = \int_{\overset{\cup}{BnA}} P dx + Q dy + \int_{\overset{\cup}{AB}} P dx + Q dy,$$

складывая и учитывая 1⁰, получаем (26.4) □

26.3. Вычисление криволинейного интеграла II рода

1) Пусть $\overset{\cup}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, т.е. $x(t)$, $y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt. \end{aligned} \quad (26.5)$$

□ Рассмотрим $\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$. По теореме Лагранжа $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(t_i^*) \Delta t_i$, $t_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$. Выберем

$$\xi_i = x(t_i^*), \eta_i = y(t_i^*), \text{ тогда } \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P(x(t_i), y(t_i)) x'(t_i^*) \Delta t_i.$$

В правой части полученного равенства — интегральная сумма для определенного интеграла от функции $P(x(t), y(t))x'(t)$. Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, получаем формулу (26.5) \square

Из вывода формулы (26.5) \Rightarrow для существования КИ Пр достаточно непрерывности $f(x, y)$ в D и гладкости $\overset{\cup}{AB}$.

Формула (26.5) может быть обобщена на случай $\overset{\cup}{AB} \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$, когда $\vec{a} = \{a_{x_1}, a_{x_2}, \dots, a_{x_n}\}$, а проекции вектор-функции $a_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, a_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывны в Ω и уравнения, задающие $\overset{\cup}{AB}: x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, — непрерывно дифференцируемые функции при $\alpha \leq t \leq \beta$.

В частности, при $n = 3$, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, a_{x_1} \equiv P, a_{x_2} \equiv Q, a_{x_3} \equiv R$):

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

2) Пусть $\overset{\cup}{AB}$ задана на плоскости: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, причем $y = y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Тогда, считая x параметром, из (26.5) получаем

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx.$$

Примеры: 1. Найти работу силы $\vec{F} = \{-y, x, z\}$ по перемещению материальной точки вдоль винтовой линии L :

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft W &= \int_L -y dx + x dy + z dz = \int_0^{2\pi} [-a \sin t (-a \sin t) + a \cos t (a \cos t) + btb] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t) dt = 2\pi(a^2 + \pi b^2) \blacktriangleright \end{aligned}$$

2. Вычислить $\int_{\overset{\cup}{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$, $A(1, 0), B(0, 2)$, $\overset{\cup}{AB}: 2x + y = 2$.

$$\begin{aligned} \int_{AB} (xy - 1)dx + x^2 y dy &= \int_1^0 [x(2 - 2x) - 1] + x^2(2 - 2x)(-2) dx = \\ &= (x^4 - 2x^3 + x^2 - x) \Big|_1^0 = 1 \end{aligned}$$

26.4. Связь между криволинейными интегралами I и II рода

Рассмотрим пространственный случай. Обозначим через $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ углы, образованные касательной к кривой AB в т. $M(x, y, z)$ с осями OX , OY , OZ соответственно (рис. 26.3).

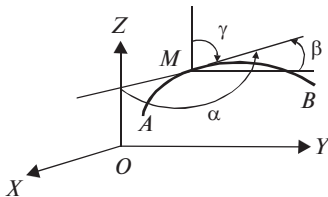


Рис. 26.3

Вектор $d\vec{r}$ (dx, dy, dz) направлен по касательной

$$\text{к } AB \text{ в т. } M \text{ (см. разд. 12.1) и } \cos \alpha = \frac{dx}{|d\vec{r}|}, \cos \beta = \frac{dy}{|d\vec{r}|}, \cos \gamma = \frac{dz}{|d\vec{r}|}.$$

Учитывая, что $|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = dl$, имеем $dx = \cos \alpha \cdot dl$,

$dy = \cos \beta \cdot dl$, $dz = \cos \gamma \cdot dl$. Поэтому

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)dl.$$

Эта формула выражает связь между криволинейными интегралами I и II рода.

26.5. Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом II рода и двойным интегралом.

T: Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — правильная область, ограниченная гладкой кривой $L = \partial D$. Функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны в D вместе

с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула Грина:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

причем кривая L обходится в положительном направлении ■

□ Рассмотрим $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$. Пусть $y = \varphi_1(x)$ — уравнение кривой $\overset{\cup}{ACB}$, $y = \varphi_2(x)$ — уравнение кривой $\overset{\cup}{AEB}$, $a \leq x \leq b$ (рис. 26.4). Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx (P(x, y)) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \\ &= \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx = \\ &= - \int_{\overset{\cup}{BEA}} P(x, y) dx - \int_{\overset{\cup}{ACB}} P(x, y) dx = - \oint_{\partial D} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Аналогично, рассматривая кривые $\overset{\cup}{CAE}$ и $\overset{\cup}{CBE}$, будем иметь

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} Q(x, y) dy.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, получим формулу Грина ☒

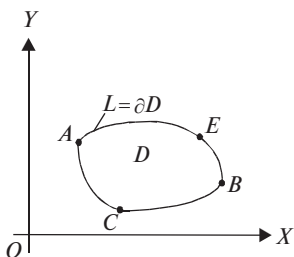


Рис. 26.4

Замечание. Если область D не является правильной, то формула остается справедливой, так как D можно разбить на правильные части, применить формулу Грина к каждой из них и затем воспользоваться свойствами 3^0 для двойных интегралов и криволинейных интегралов II рода.

26.6. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

В некоторых случаях величина КИ Пр не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной и конечной точек A и B . Выясним, при каких условиях это справедливо.

Будем рассматривать односвязные области $D \subset \mathbf{R}^2$, т.е. такие, в которых для любого замкнутого контура L^* , лежащего внутри D , ограниченная L^* часть плоскости состоит целиком из внутренних точек D .

Т: Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области D . Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1. Для любой замкнутой гладкой кривой справедливо

$$\int_{L^*} P dx + Q dy = 0.$$

2. Для любых точек $A, B \in D$ значение $\int_{\overset{\cup}{AB}} P dx + Q dy$ не зависит от пути $\overset{\cup}{AB} \subset D$.

3. $Pdx + Qdy = du$, $u = u(x,y)$, $(x,y) \in D$.

4. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в D ■

□ Достаточно доказать, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$: Используя свойства 1^0 , 2^0 КИ Пр, имеем (рис. 26.5)

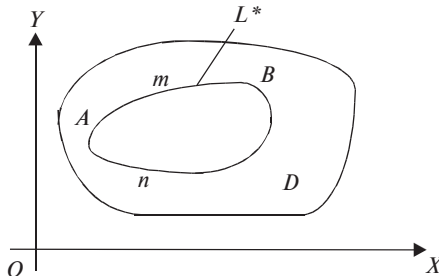


Рис. 26.5

$$\int_{L^*} P dx + Q dy = 0 \Leftrightarrow \int_{\underbrace{A \rightarrow B}} P dx + Q dy - \int_{\underbrace{A \rightarrow B}} P dx + Q dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\underbrace{A \rightarrow B}} P dx + Q dy = \int_{\underbrace{A \rightarrow B}} P dx + Q dy.$$

2 \Rightarrow 3: Пусть $A(x_0, y_0)$, $B(x, y) \in D$, тогда $\int_{\underbrace{A \rightarrow B}} P dx + Q dy$ является

функцией от x, y , т.е. $u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$.

Чтобы показать дифференцируемость $u(x, y)$, т.е. $du = P dx + Q dy$, достаточно доказать существование для $\forall (x, y) \in D$ частных производных $\frac{\partial u}{\partial y} = P$, $\frac{\partial u}{\partial x} = Q$. По определению частной производной

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{\underbrace{A \rightarrow C}} P dx + Q dy - \int_{\underbrace{A \rightarrow B}} P dx + Q dy}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{\underbrace{B \rightarrow C}} P dx + Q dy}{\Delta x},$$

где т. $C(x + \Delta x, y)$, причем в силу условия эквивалентности 2-й путь от B до C можно взять прямолинейным: $y = \text{const}$ (рис. 26.6). Тогда

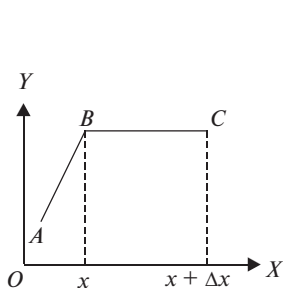


Рис. 26.6

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} P(x, y) dx}{\Delta x}$$

и по теореме о среднем для определенно-го интеграла получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\xi, y) \Delta x}{\Delta x} = \left\{ \begin{array}{l} x < \xi < x + \Delta x \\ \xi \rightarrow x \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y).$$

Аналогично доказывается равенство $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

3 \Rightarrow 4: Из условия 3 следует, что по теореме о равенстве частных производных высших порядков, отличающихся порядком

дифференцирования, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

4 \Rightarrow 1: Пусть гладкая замкнутая кривая $L^* \subset D$ ограничивает область $D^* \subset D$ (в силу односвязности D). Тогда по формуле Грина

$$\int_{L^*} P dx + Q dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \square$$

26.7. Интегрирование полных дифференциалов

Пусть выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Из доказательства условий

независимости криволинейного интеграла $\int_{AB} P dx + Q dy$ от выбо-

ра пути $\overset{\cup}{AB}$ следует, что множество функций, удовлетворяющих условию $du = P dx + Q dy$, есть

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + c.$$

Чтобы найти функцию $u(x, y)$, можно выбрать в качестве пути интегрирования наиболее простой, например, ACB , где AC и CB — отрезки, параллельные осям координат (рис. 26.7). Тогда

$$u(x, y) = \int_{AC} P dx + Q dy + \int_{CB} P dx + Q dy + c.$$

Поскольку AC : $y = y_0$, $dy = 0$, $x_0 \leq x \leq (x = \text{const})$; CB : $x = \text{const}$, $dx = 0$, $y_0 \leq y \leq (y = \text{const})$, то

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + c. \quad (26.6)$$

Примеры: 1) Проверить, является ли выражение $2xy dx + (x^2 + 2y)dy$ полным дифференциалом du . Если является, то найти $u(x,y)$.

$$\leftarrow P = 2xy, Q = x^2 + 2y, \frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

т.е. $2xy dx + (x^2 + 2y)dy = du$. По (26.5) имеем

$$u = \int_{(0;0)}^{(x;y)} 2xy dx + (x^2 + 2y)dy = \int_0^x 0 dx + \int_0^y (x^2 + 2y)dy + c = x^2 y + y^2 + c \blacktriangleright$$

2) Вычислить $\int_{(0;1)}^{(2;2)} (ye^x + 1)dx + e^x dy$.

◀ Выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом du , так как $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, если $P = ye^x + 1$, $Q = e^x$. Берем путь интегрирования от $A(0; 1)$ до $B(2; 2)$ в виде ломаной ACB (рис. 26.8). Тогда AC : $y = 1$, $dy = 0$, $0 \leq x \leq 2$, CB : $x = 2$, $dx = 0$, $1 \leq y \leq 2$.

$$\int_{(0;1)}^{(2;2)} (ye^x + 1)dx + e^x dy = \int_{AC} + \int_{CB} =$$

$$= \int_0^2 (e^x + 1)dx + \int_1^2 e^2 dy = (e^x + x) \Big|_0^2 + e^2 y \Big|_1^2 = e^2 + 2 - 1 + 2e^2 - e^2 = 2e^2 + 1 \blacktriangleright$$

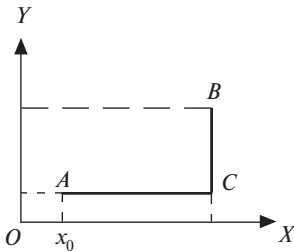


Рис. 26.7

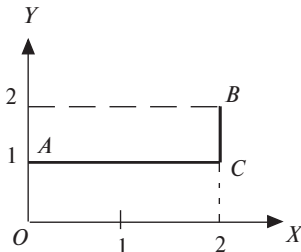


Рис. 26.8

26.8. Уравнения в полных дифференциалах

О: Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du$.

Из определения следует, что общий интеграл такого дифференциального уравнения записывается в виде $u(x,y) = c$.

Используем формулу (26.6) для нахождения функции $u(x,y)$. Таким образом, для уравнения в полных дифференциалах решение может быть получено в виде

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = c. \quad (26.7)$$

Пример:

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

◀ $P(x,y) = \frac{2x}{y^3}$, $Q = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
В качестве т. (x_0, y_0) возьмем $(0; 1)$. Тогда по (26.7)

$$\int_0^x 2x dx + \int_1^y \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = c \Rightarrow x^2 \Big|_0^x + \left(-\frac{1}{y} + 3x^2 \frac{1}{3y^3} \right) \Big|_1^y = c \Rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c \blacktriangleright$$

Литература: [3. С. 210–229]; [6. С. 332–345]; [10. С. 473–492]; [11. С. 217–228].

27. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Опорный конспект № 27

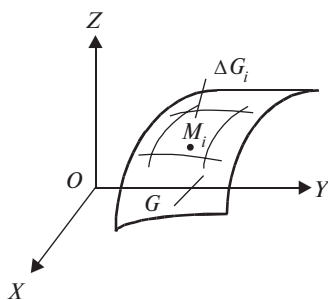
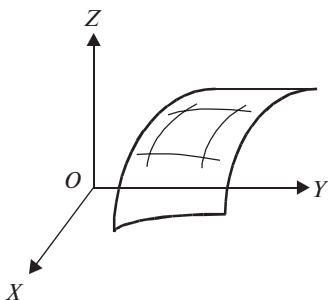
27.1. Поверхности в \mathbb{R}^3

$G: z = z(x, y), M(x, y) \in \mathbb{R}^2, z(x, y), z'_x, z'_y$ — непрерывны в $D \Leftrightarrow G$ — гладкая поверхность, являющаяся двусторонней.

Единичный вектор нормали $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$,

$$\alpha = (\vec{n}, \vec{i}), \beta = (\vec{n}, \vec{j}), \gamma = (\vec{n}, \vec{k}),$$

$\vec{n}(M)$ — непрерывная функция т. M



27.2. ПИ Γ_p

27.2.1. Определение ПИ Γ_p

$f(x, y, z)$ непрерывна в $\Omega, G \subset \Omega, G_i \cap G_j = \emptyset, G = \bigcup_{i=1}^n \Delta G_i, \Delta \sigma_i$ — площадь ΔG_i ,

$$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta G_i \Rightarrow \iint_G f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i),$$

$\lambda = \max \text{diam } \Delta G_i, \mu(M)$ — поверхностная плотность $G \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = \iint_G \mu(x, y, z) d\sigma \text{ — масса } G$$

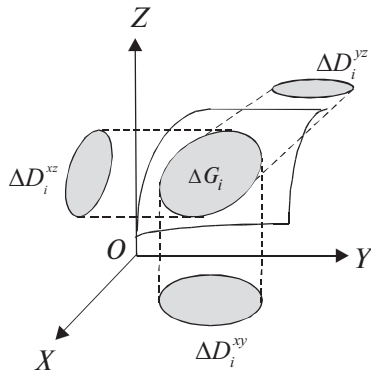
27.2.2. Вычисление ПИ Γ_p

$G: z = z(x, y), (x, y) \in D$ — гладкая поверхность \Rightarrow

$$\Rightarrow \iint_G f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d\sigma$$

27.3. ПИ Ир

27.3.1. Определение ПИ Ир



$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $G \subset \Omega$ — двусторонняя ориентированная поверхность, $\Delta D_i^{xy} = \text{пр}_{XOY} \Delta G_i$, $\Delta D_i^{xz} = \text{пр}_{XOZ} \Delta G_i$, $\Delta D_i^{yz} = \text{пр}_{YOZ} \Delta G_i$, $i = 1, n$; ΔS_i^{xy} , ΔS_i^{yz} , ΔS_i^{xz} — (\pm) площади ΔD_i^{xy} , ΔD_i^{yz} , ΔD_i^{xz} , $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta G_i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \iint_G P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dy \, dx = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta S_i^{yz} + Q(M_i) \Delta S_i^{xz} + R(M_i) \Delta S_i^{xy}. \end{aligned}$$

Связь ПИ Ир и ПИ Ир:

$$\iint_G P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dy \, dx = \iint_G (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, d\sigma.$$

$\vec{v}(x,y,z) = \{P, Q, R\}$ — скорость жидкости, протекающей через $G \Rightarrow$ поток жидкости

$$\Pi_G = \iint_G P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dy \, dx = \iint_G \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

27.3.2. Вычисление ПИ Ир

$$D_{xy} = \text{пр}_{XOY} G, \quad D_{xz} = \text{пр}_{XOZ} G, \quad D_{yz} = \text{пр}_{YOZ} G,$$

$$G: z = z(x,y) \vee y = y(x,z) \vee x = x(y,z) \Rightarrow$$

$$\iint_G P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) \, dy \, dz \pm$$

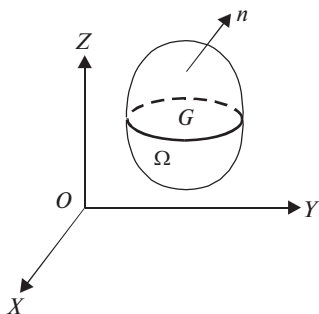
$$\pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) \, dx \, dz \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy,$$

где (+) — для острых углов $(\widehat{\vec{n}, \vec{i}})$, $(\widehat{\vec{n}, \vec{j}})$, $(\widehat{\vec{n}, \vec{k}})$, (-) — для тупых

27.4. Формула Остроградского–Гаусса

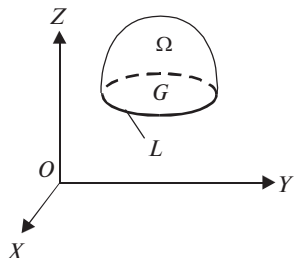
$P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ — непрерывны вместе с частными производными в Ω , $\partial\Omega = G$ — ориентированная поверхность \Rightarrow

$$\iiint_G P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz$$



27.5. Формула Стокса

$P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ — непрерывные вместе с частными производными на ориентированной поверхности G , $L = \partial G$ — гладкая \Rightarrow



$$\oint_L P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \, dy \, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \, dx \, dz$$

27.1. Поверхности в \mathbf{R}^3

Пусть поверхность G задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. В п. 12.3.3 было показано, что если в окрестности т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ частные производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны и одновременно не равны нулю, то в т. M_0 существует касательная плоскость к поверхности. Такая т. M_0 называется обыкновенной точкой поверхности G . Если, например, $F'_z \neq 0$, то на основании теоремы о неявной функции [5. С. 357] в окрестности т. M_0 уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$ можно записать в явном виде $z = f(x, y)$. Такой кусок поверхности G является гладким куском. Точки, в которых $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ — особые точки поверхности, в них касательная плоскость может не существовать. Например, поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (сфера) не имеет особых точек. Ее можно задать и параметрическими уравнениями $x = R \cos \varphi \sin \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \theta$ (рис. 27.1).

В общем случае поверхность G может быть задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, или векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{\varphi, \psi, \chi\}$. Если $\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$ непрерывны в D со своими частными производными (∂D предполагается кусочно-гладкой) и поверхность не имеет особых точек, т.е. в D

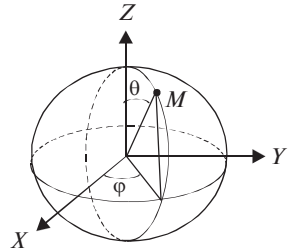


Рис. 27.1

$$\left| \begin{array}{cc} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \varphi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \chi'_v \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \chi'_u & \psi'_u \\ \chi'_v & \psi'_v \end{array} \right|^2 \neq 0$$

$$\left(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \right.$$

то поверхность является гладкой. Отметим, что в случае замкнутой поверхности (например, сферической) при параметрическом задании неизбежно наличие точек, получающихся при нескольких значениях параметров (u, v) — кратных точек поверхности.

Точки, соответствующие одному набору значений параметров, называются простыми.

Частным случаем параметрического задания поверхности G является задание ее явным уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. Если функция $z(x, y)$ непрерывна в \bar{D} вместе со своими частными производными, то G — гладкая поверхность.

Пусть G — гладкая поверхность. Тогда в каждой т. $M \in G$ можно выбрать одно из двух возможных направлений нормали, зафиксировав определенный единичный вектор нормали:

$$\vec{n}(M) = \{\cos\alpha(M), \cos\beta(M), \cos\gamma(M)\},$$

где $\alpha = (\vec{n}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{n}, \vec{j})$, $\gamma = (\vec{n}, \vec{k})$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортонормированный базис в \mathbb{R}^3 (рис. 27.2).

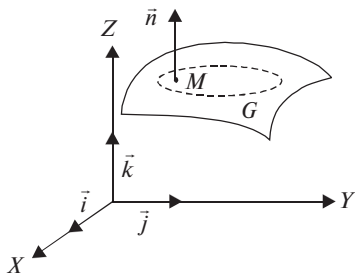


Рис. 27.2

О: Гладкая поверхность G называется двусторонней, если направление нормали $\vec{n}(M) \forall$ т. $M \in G$ при обходе по любому замкнутому контуру $L: M \in L \subset G$, при возвращении в т. M совпадает с исходным. Если после обхода L направление $\vec{n}(M)$ противоположно исходному, то поверхность G называется односторонней.

Например, сфера — двусторонняя поверхность. Примером односторонней поверхности является так называемый лист Мебиуса (рис. 27.3, а), который получается склейкой сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ так, что т. A совмещается с т. D , а т. B — с т. C (рис. 27.3, б).

Будем рассматривать только двусторонние поверхности, причем выбирать определенную их сторону, т.е. задавать ориентацию поверхности (см. рис. 27.2). В каждой точке такой поверхности $\vec{n}(M)$ зависит от т. M непрерывно.

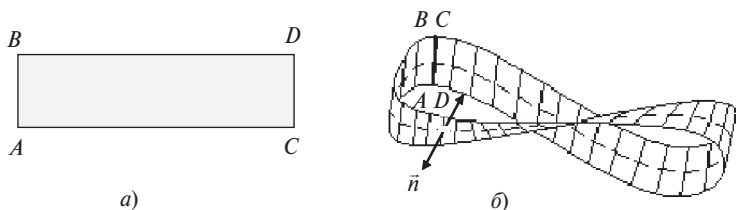


Рис. 27.3

Пусть гладкая поверхность G задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. Она является двусторонней. Действительно, вектор $\vec{n}(M) = \{-z'_x, -z'_y, 1\}$ направлен по нормали в т. M и

$$\cos \alpha(M) = -\frac{z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}},$$

$$\cos \beta(M) = -\frac{z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}},$$

$$\cos \gamma(M) = \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$$

являются непрерывными функциями в области D и определяют ориентацию $\vec{n}(M)$.

27.2. Поверхностный интеграл I рода

27.2.1. Задача о массе поверхности G .

Определение ПИ I_p

Пусть на поверхности G распределена масса с поверхностной плотностью $\mu(x, y, z)$. Найдем массу поверхности G .

Разобьем G на n частей ΔG_i , $i = \overline{1, n}$, с площадями $\Delta \sigma_i$ (рис. 27.4), выберем произвольно $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta G_i$ и будем считать, что плотность ΔG_i постоянна и равна $\mu(M_i)$. Тогда $m \approx \sum_{i=1}^n \mu(M_i) \Delta \sigma_i$.

За точное значение массы естественно принять

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(M_i) \Delta \sigma_i, \quad (27.1)$$

где $\lambda = \max \text{diam} \Delta G_i$, $i = \overline{1, n}$.

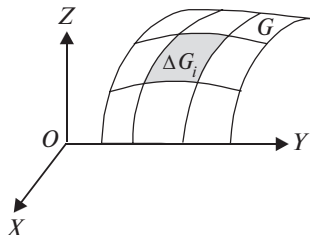


Рис. 27.4

Введем понятие интеграла, соответствующего формуле (27.1). Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна в пространственной области Ω , которой принадлежит гладкая поверхность G . Проведем для G описанные выше построения и составим

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i. \quad (27.2)$$

О: Поверхностным интегралом I рода (ПИ Ip) $\iint_G f(x, y, z) d\sigma$ от функции $f(x, y, z)$ по поверхности G называется предел интегральной суммы (27.2), когда $\lambda = \max \text{diam} \Delta G_i \rightarrow 0$, если он существует, конечен и не зависит как от способа разделения G на ΔG_i , так и от выбора промежуточных т. $M_i \in \Delta G_i$, т.е.

$$\iint_G f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i.$$

Аналогично определяется ПИ Ip $\iint_G f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\sigma$ от функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по гладкой поверхности $G \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$.

ПИ Ip обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл, так как его определение аналогично определению двойного интеграла. Из формулы (27.1) и определения ПИ Ip следует, что масса m поверхности G

$$m = \iint_G \mu(x, y, z) d\sigma. \quad (27.3)$$

В частности, при $\mu \equiv 1$ формула (27.3) дает площадь поверхности G :

$$\sigma_G = \iint_G d\sigma.$$

27.2.2. Вычисление ПИ I_p

Вычисление ПИ I_p сводится к вычислению двойного интеграла. Пусть гладкая поверхность G задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, $D = \text{пр}_{XOY}G$. Воспользуемся определением ПИ I_p , причем в интегральной сумме (27.2) выразим $\Delta\sigma_i$ через ΔS_i — площадь $\Delta D_i = \text{пр}_{XOY}\Delta G_i$ (рис. 27.5).

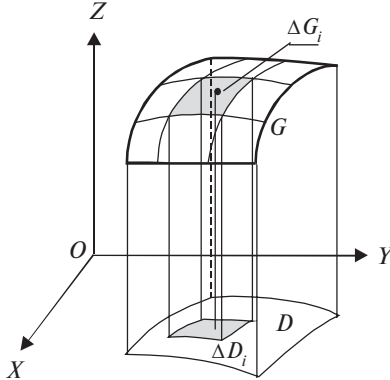


Рис. 27.5

По формуле площади поверхности и теореме о среднем для двойного интеграла (см. разд. 23)

$$\Delta\sigma_i = \iint_{\Delta D_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dS = \sqrt{1 + (z'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (z'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \Delta S_i,$$

$P_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta \bar{D}_i$. Выберем промежуточные т. M_i такими, что

$P_i = \text{пр}_{XOY}M_i$, тогда

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, z(P_i)) \sqrt{1 + (z'_x(P_i))^2 + (z'_y(P_i))^2} \Delta S_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \iint_G f(x, y, z) d\sigma = \\ & = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dS. \end{aligned} \quad (27.4)$$

Если область G проектируется на другие координатные плоскости, то получаются формулы, аналогичные (27.4). Из формулы (27.4) и теоремы существования двойного интеграла получаем условия существования ПИ Γ_r : непрерывность $f(x, y, z)$ в Ω , $G \subset \Omega$, непрерывность вместе с частными производными функции $z = z(x, y)$, задающей поверхность G в $D = \text{пр}_{XOY}G$.

Пример: Вычислить массу m части G параболоида с уравнением $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$, если плотность $\mu = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ (рис. 27.6).

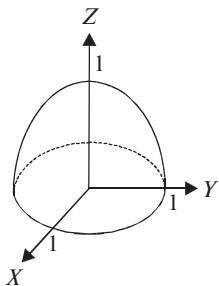


Рис. 27.6

◀ По формулам (27.3), (27.4)

$$\begin{aligned} m &= \iint_G \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma = \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dx dy = \\ &= \iint_D (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Так как $\bar{D}: x^2 + y^2 \leq 1$, то переходя к полярным координатам,

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4r^2) r dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + r^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = 3\pi \blacktriangleright$$

27.3. Поверхностный интеграл II рода

27.3.1. Поток жидкости через поверхность.

Определение ПИИ Пр

Решим задачу о потоке жидкости. Пусть через двустороннюю поверхность $G \subset \mathbf{R}^3$ стационарно (независимо от времени) движется жидкость с плотностью $\mu = 1$ со скоростью

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Найти поток жидкости через поверхность G , т.е. количество жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени.

Разобьем G на n частей ΔG_i с площадями $\Delta\sigma_i$, выберем $M(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta G_i$ (рис. 27.7) и будем считать, что в пределах ΔG_i скорость постоянна и равна $\vec{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.

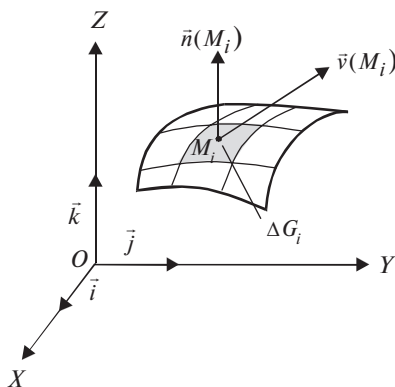


Рис. 27.7

Если $\vec{n}(M_i) = \cos \alpha(M_i)\vec{i} + \cos \beta(M_i)\vec{j} + \cos \gamma(M_i)\vec{k}$ — единичный вектор нормали в т. M_i , то приближенно поток Π_G через G равен

$$\Pi_G \approx \sum_{i=1}^n \vec{v}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta\sigma_i,$$

где $\vec{v} \cdot \vec{n}$ — скалярное произведение векторов \vec{v} , \vec{n} . За точное значение потока принимаем

$$\begin{aligned} \Pi_G &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{v}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta\sigma_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(M_i) \cos \alpha(M_i) + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + \\ &\quad + R(M_i) \cos \gamma(M_i)) \Delta\sigma_i. \end{aligned} \quad (27.5)$$

Введем понятие интеграла, соответствующего формуле (27.5).

Пусть в пространственной области Ω заданы непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, т.е. вектор $\vec{a}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$, двусторонняя ориентированная поверхность $G \subset \Omega$. Проведем вышеописанное разбиение области G и составим

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i^{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i^{xz} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i^{xy}, \quad (27.6)$$

где ΔS_i^{yz} , ΔS_i^{xz} , ΔS_i^{xy} — площади проекций ΔD_i^{yz} , ΔD_i^{xz} , ΔD_i^{xy} областей ΔG_i , $i = \overline{1, n}$ на плоскости YOZ , XOZ , XOY , соответственно, взятые с определенным знаком (так, $\Delta S_i^{yz} > 0$, если $\gamma(M_i) = (\vec{n}, \vec{k})$ — острый угол, $\Delta S_i^{xy} < 0$, если $\gamma(M_i)$ — тупой для $M_i \in \Delta G_i$, аналогично для ΔS_i^{yz} , ΔS_i^{xz}) (рис. 27.8).

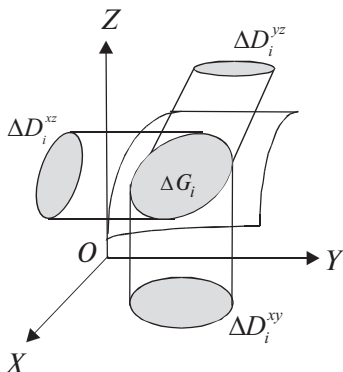


Рис. 27.8

О: Поверхностным интегралом II рода от функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ по двусторонней ориентированной области G называется предел интегральной суммы (27.6) при $\lambda \rightarrow 0$, если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения G на части ΔG_i и от выбора т. $M_i \in \Delta G_i$.

Так как при выполнении условий существования поверхностного интеграла можно считать

$$\Delta S_i^{xy} = \Delta x_i \Delta y_i, \Delta S_i^{yz} = \Delta y_i \Delta z_i, \Delta S_i^{xz} = \Delta x_i \Delta z_i,$$

то ПИ Пр обозначается

$$\iint_G P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dx.$$

В силу справедливости равенств $dx dy = ds^{xy} = d\sigma \cos \gamma(M)$, $dy dz = ds^{yz} = d\sigma \cos \alpha(M)$, $dx dz = ds^{xz} = d\sigma \cos \beta(M)$, получаем формулу, связывающую ПИ I и II рода:

$$\begin{aligned} \iint_G P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dx = \\ = \iint_G (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iint_G \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma. \end{aligned} \quad (27.7)$$

Из формул (27.5), (27.7) следует, что поток жидкости через поверхность G записывается поверхностным интегралом

$$\Pi_G = \iint_G P dy dz + Q dx dz + R dy dx = \iint_G \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Из (27.7) следует, что ПИ Пр имеет такие же свойства, как и ПИ Пр, но в отличие от последнего меняет знак на противоположный при переориентации поверхности G .

27.3.2. Вычисление ПИ Пр

Вычисление ПИ Пр сводится к вычислению двойных интегралов. Если $D_{xy} = \text{пр}_{xOy} G$, $D_{xz} = \text{пр}_{xOz} G$, $D_{yz} = \text{пр}_{yOz} G$, а двусторонняя поверхность такова, что ее уравнение можно записать как

$$z = z(x, y) \vee y = y(x, z) \vee x = x(y, z),$$

то

$$\begin{aligned} \iint_G P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \\ \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \end{aligned} \quad (27.8)$$

где знак (+) берется, если $\alpha(M)$ для первого интеграла, $\beta(M)$ для второго интеграла, $G(M)$ для третьего интеграла — острые углы, знак (-), если углы тупые.

□ Действительно, по определению ПИ Пр

$$\begin{aligned} \iint_G R(x, y, z) dx dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i^{xy} = \\ &= \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \Delta x_i \Delta y_i = \pm \iint_G R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Аналогично для функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ☒

Пример: Вычислить $\iint_G z dx dy + x dy dz$, если G — внешняя сторона нижней части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (рис. 27.9, а).

◀ Воспользуемся формулой (27.8):

$$\partial D_{xy}: x^2 + y^2 = 1, z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (\text{рис. 27.9, б}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_G z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

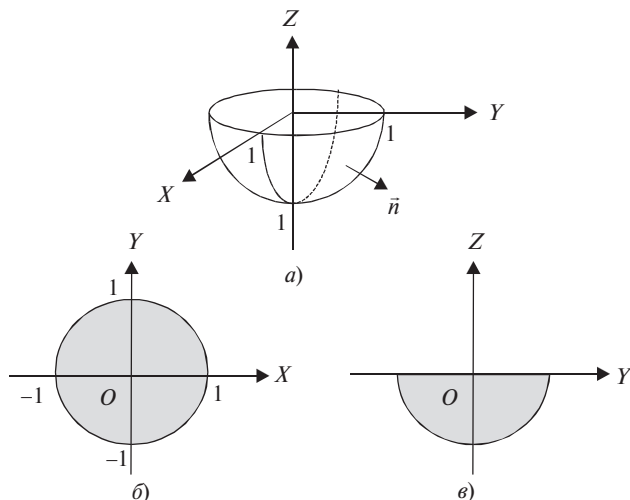


Рис. 27.9

$$\partial D_{yz}: y^2 + z^2 = 1 \text{ (рис. 27.9, в), } y = 0 \text{ (} y < 0 \text{), } x = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2},$$

$$\beta: \begin{cases} \text{острый при } x > 0, \\ \text{тупой при } x < 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_G x \, dy \, dz = 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2} \, dy \, dz = 2 \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r \, dr = \frac{2\pi}{3};$$

$$\text{т.е. } \iint_G z \, dx \, dy + x \, dy \, dz = \frac{4\pi}{3} \blacktriangleright$$

Вычисление ПИ Пр можно провести также по формулам (27.7), (27.4).

27.4. Формула Остроградского—Гаусса

Формула Остроградского—Гаусса устанавливает связь между поверхностным интегралом по замкнутой ориентированной поверхности G и тройным интегралом по пространственной области Ω , $\partial\Omega = G$, и обобщает формулу Грина на пространственный случай.

Т: Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в ограниченной замкнутой области Ω , $\partial\Omega = G$ — гладкая ориентированная поверхность. Тогда справедлива формула

$$\oiint_G P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz, \quad (27.9)$$

причем поверхностный интеграл берется по внешней стороне G ■

Формула (27.9) и носит название формулы Остроградского—Гаусса.

□ Предположим, что Ω — простая область, т.е. $G = \partial\Omega$ пересекается с любой прямой, параллельной осям координат, не более чем в двух точках (рис. 27.10). Если Ω не является простой, то ее необходимо разбить на конечное число простых областей. Пусть $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ — уравнения нижней G_1 и верхней G_2 поверхностей G , $D = \text{пр}_{xOy} G$. Тогда, используя (27.8), имеем

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz =$$

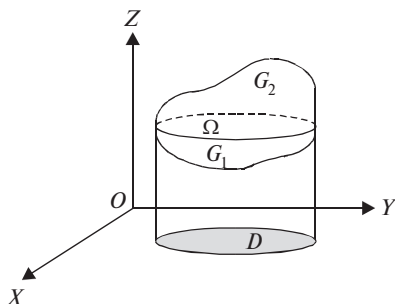


Рис. 27.10

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \\
 &= \iint_{G_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{G_1} R(x, y, z) dx dy = \iint_G R(x, y, z) dx dy.
 \end{aligned}$$

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_G P dy dz, \quad \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_G Q dz dy.$$

Складывая почленно, имеем (27.9) \square

27.5. Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностным и криволинейным интегралами, а также обобщает формулу Грина на пространственный случай.

Т: Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными на гладкой ориентированной поверхности G , ограниченной гладкой замкнутой кривой L . Тогда

$$\begin{aligned}
 \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\
 &+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz \quad \blacksquare \quad (27.10)
 \end{aligned}$$

Формула (27.10) называется формулой Стокса.

Если сторона поверхности выбрана, то направление обхода контура L берется положительным, т.е. таким, что при обходе контура по выбранной стороне поверхности G она остается слева (рис. 27.11). Доказательство см. в [6. С. 365].

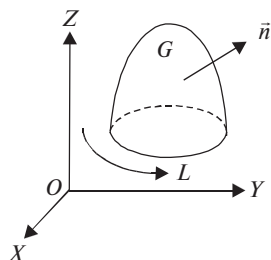


Рис. 27.11

Из формулы Стокса следует, что если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (27.11)$$

то криволинейный интеграл по любой пространственной замкнутой кривой L равен нулю:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0, \quad L \subset \Omega.$$

Как и в случае плоской кривой $\overset{\cup}{AB}$, условия (27.11) являются необходимыми и достаточными для независимости криволинейного интеграла II рода $\int_{\overset{\cup}{AB}} P dx + Q dy + R dz$ от пути интегрирования. При их выполнении подынтегральное выражение — полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$: $P dx + Q dy + R dz = du$,

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + c, \quad c = \text{const.}$$

Доказательство аналогично плоскому случаю.

Литература: [3. С. 234–264]; [6. С. 353–365]; [10. С. 103–129]; [11. С. 233–248].

28. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЯ

Опорный конспект № 28

28.1. Скалярное поле (СП)

28.1.1. Определение СП. Линии и поверхности уровня

$u(M)$, $M(x,y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$ или $M(x,y,z) \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3$

$u(x,y) = c$, $c = \text{const}$ — линии уровня,

$u(x,y,z) = c$ — поверхности уровня

28.1.2. Производная по направлению СП

$\vec{\ell} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ || прямой L , т. M , $M_1 \in L \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

28.1.3. Градиент СП

О: $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \nabla u$

Т: $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \text{grad } u \cdot \vec{\ell}$ ■ $(\text{grad } u)_{M_0}$ направлен по нормали к по-

верхности уровня $u(x,y,z) = c$

28.2. Векторное поле (ВП)

28.2.1. Определение ВП. Векторные линии

ВП: $\vec{v}(M) = \{v_x(M), v_y(M), v_z(M)\}$,

$M \in \Omega \subset \mathbf{R}^2 \vee M \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$.

Векторные линии ВП $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$ — кривые L : касательные к L в т. M совпадают с $\vec{v}(M)$, их уравнения

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

28.2.2. Поток и дивергенция ВП

О: Поток ВП $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$:

$$П_G = \iint_G \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma$$

О: Дивергенция ВП $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$:

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Pi_G}{V}, \quad \text{где } M \in \Omega^* \subset \Omega,$$

$G = \partial\Omega^*$, V – объем Ω^*

$$\mathbf{T:} \operatorname{div} \vec{v}(M) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \vec{v}(M) \quad \blacksquare$$

Векторная запись формулы Остроградского–Гаусса:

$$\oiint_G \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{v}(M) dv$$

28.2.3. Циркуляция и ротор ВП

О: Циркуляция $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, по L :

$$\Pi_L = \oint_L \vec{v}(M) d\vec{r} = \oint_L v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

О: Ротор $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$:

$$\operatorname{rot} \vec{v}(M) = \nabla \times \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Векторная запись формулы Стокса:

$$\Pi_L = \oint_L \vec{v}(M) \cdot d\vec{r} = \iint_G \operatorname{rot} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma$$

28.2.4. Простейшие ВП

а) **О:** Трубчатое (соленоидальное) ВП $\Leftrightarrow \vec{v}(M)$,
 $M \in \Omega$: $\operatorname{div} \vec{v}(M) = 0$.

б) **О:** Потенциальное (безвихревое) ВП $\Leftrightarrow \vec{v}(M)$,
 $M \in \Omega$, $\exists u(M)$: $\vec{v}(M) = \operatorname{grad} u(M)$.

в) **О:** Гармоническое ВП $\Leftrightarrow \vec{v}(M)$,
 $M \in \Omega$: $\operatorname{rot} \vec{v}(M) = 0$, $\operatorname{div} \vec{v}(M) = 0$.

Для гармонического ВП $\exists u(M)$: $\Delta u = 0$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{— оператор Лапласа}$$

28.1. Скалярное поле и его характеристики

28.1.1. Определение СП. Линии и поверхности уровня

Рассмотрим функцию $u(M)$, где $M(x,y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$ или $M(x,y,z) \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3$.

О: Множество D точек M пространства \mathbf{R}^2 (или \mathbf{R}^3) вместе с соответствующими этим точкам числами, которые определяются функцией $u(M)$, называется скалярным полем (СП), а функция $u(M)$ — функцией поля.

Если $D \subseteq \mathbf{R}^2$, то СП является плоским, если $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ — пространственным.

Примерами СП являются поле распределения температуры в данном теле, поле распределения электрического потенциала в пространстве вокруг электрического заряда и т.п.

СП функции $u(M)$, $M \in D$, не зависит от времени t . Такое поле называется стационарным. Геометрически СП изображается на плоскости линиями уровня $u(M) = u(x,y) = c$, где c — значение $u(x,y)$, в пространстве — поверхностями уровня $u(x,y,z) = c$.

Примеры: 1) $u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$, $D: x^2 + y^2 \geq 1$, уравнения линий уровня: $x^2 + y^2 = 1 + c^2$, $\forall c \geq 0$ (рис. 28.1).

2) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, $D \subseteq \mathbf{R}^3$, уравнения поверхностей уровня: $x^2 + y^2 = z + c$, $\forall c \in \mathbf{R}$ — семейство параболоидов вращения с осью вращения OZ и вершинами, расположенными на OZ (рис. 28.2).

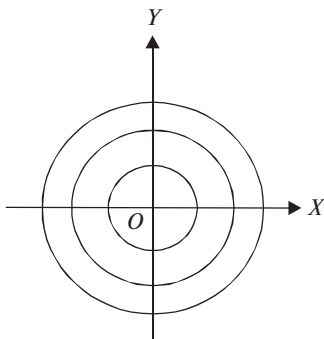


Рис. 28.1

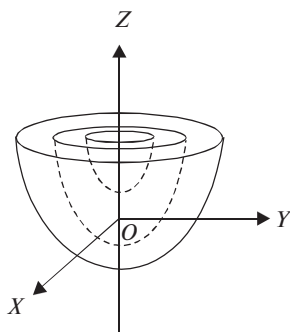


Рис. 28.2

28.1.2. Производная по направлению СП

Рассмотрим пространственное СП функции $u(x, y, z)$, $M(x, y, z) \in \Omega$. Определим величину, характеризующую скорость изменения этого поля в т. M в направлении единичного вектора $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, расположенного на прямой L . Пусть т. $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$ (рис. 28.3).

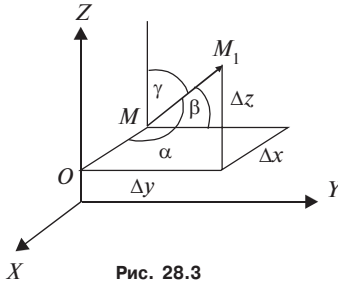


Рис. 28.3

О: Производной СП $u(x, y, z)$ в т. $M(x, y, z)$ по направлению \vec{l} называется

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{|MM_1|}.$$

Обозначается производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$.

Т: Если функция СП $u(x, y, z)$ дифференцируема в Ω и $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad \blacksquare$$

□ Пусть $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$, вектор \vec{l} направлен вдоль прямой L , $|MM_1| = \rho \Rightarrow M_1(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma)$. По определению дифференцируемой функции

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \omega(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta \rho} = 0,$$

$$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Вдоль прямой L имеем $\Delta x = \rho \cos \alpha$, $\Delta y = \rho \cos \beta$, $\Delta z = \rho \cos \gamma$, $\Delta \rho = \rho$, поэтому

$$u(M_1) - u(M) = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \rho \cos \gamma + \omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad \square$$

Пример: Вычислить производную СП $u(M) = x^2y - xz^2 + 1$ в т. $M(1; -2; 1)$ в направлении $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = (2xy - z^3) \Big|_M = -5, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = x^2 \Big|_M = 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -3xz^2 \Big|_M = -3, \quad |\vec{a}| = 21,$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -5 \frac{2}{\sqrt{21}} + 1 \left(\frac{-4}{\sqrt{21}} \right) + \left(-3 \frac{1}{\sqrt{21}} \right) = -\frac{17}{\sqrt{21}}.$$

Знак (-) указывает на то, что СП $u(M)$ в направлении вектора \vec{a} убывает ►

28.1.3. Градиент СП

Пусть функция СП $u(x, y, z)$ дифференцируема в Ω .

О: Градиентом поля $u(M)$ в т. $M \in \Omega$ называется вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Т: Пусть функция СП $u(x, y, z)$ дифференцируема в Ω . Тогда производная по данному направлению равна скалярному произведению $\text{grad } u$ на единичный вектор \vec{l} этого направления, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l} \quad \blacksquare \quad (28.1)$$

$$\begin{aligned} \square \quad \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) = \text{grad } u \cdot \vec{l} \quad \square \end{aligned}$$

Используем определение скалярного произведения, тогда из (28.1)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot |\vec{l}| \cos \varphi = |\text{grad } u| \cos \varphi, \quad \varphi = \widehat{(\text{grad } u, \vec{l})} \quad (\text{рис. 28.4}).$$

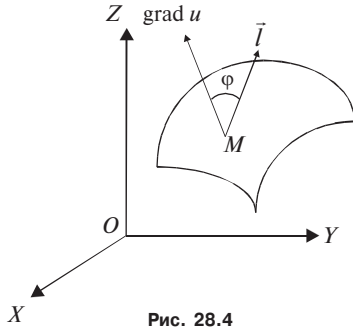


Рис. 28.4

Таким образом, $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет наибольшее значение в т. M , если

$$\cos \varphi = 1, \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\text{наиб}} = |\text{grad } u|.$$

Это значит, что $\text{grad } u$ указывает направление наибольшего возрастания поля в т. M и имеет модуль, равный скорости этого возрастания.

Если рассматривается поверхность уровня $G: u(x, y, z) = c$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$, то используя уравнение касательной к поверхности в точке M_0

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{M_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{M_0} (z - z_0) = 0,$$

выясняем, что $(\text{grad } u)_{M_0}$ направлен по нормали к поверхности уровня $u(x, y, z) = c$.

Пример: $u(M) = xy^2 + z^2$. Найти $\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\text{наиб}}$ в т. $M(2; 1; -1)$.

$$\blacktriangleleft \quad \text{grad } u = y^2 \vec{i} + 2xy \vec{j} + 2z \vec{k}, \quad (\text{grad } u)_{M_0} = \vec{i} + 4 \vec{j} - 2 \vec{k},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\text{наиб}} = |\text{grad } u|_{M_0} = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21} \quad \blacktriangleright$$

Для обозначения $\text{grad } u$ применяется векторный дифференциальный оператор, называемый оператором Гамильтона (набла-оператор):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \Rightarrow \text{grad } u = \nabla u.$$

28.2. Векторное поле и его характеристики

28.2.1. Определение ВП. Векторные линии

Пусть в каждой т. $M(x, y, z) \in \Omega$ задан вектор $\vec{v} = v_x(M)\vec{i} + v_y(M)\vec{j} + v_z(M)\vec{k}$.

О: Векторным полем (ВП) функции $\vec{v}(M)$ называется множество Ω т. M пространства \mathbf{R}^3 вместе с соотнесенными к этим точкам векторами $\vec{v}(M)$. Если функция $\vec{v}(M)$ не зависит от времени, такое поле называется стационарным.

Примерами векторных полей являются:

- 1) стационарное гравитационное поле силы тяжести $\vec{F}(M)$;
- 2) стационарное поле скоростей $\vec{v}(M)$ жидкости, текущей в пространственной области Ω ;
- 3) электрическое и электромагнитное поля на плоскости;
- 4) векторное поле $\text{grad } u$ скалярного поля дифференцируемой функции $u(M)$, $M \in \Omega$.

О: Векторными линиями поля $\vec{v}(M)$ называются такие кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с $\vec{v}(M)$ (рис. 28.5).

В силу определения вектор $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ коллинеарен в т. M вектору $\vec{v}(M) = \{v_x(M), v_y(M), v_z(M)\}$, т.е.

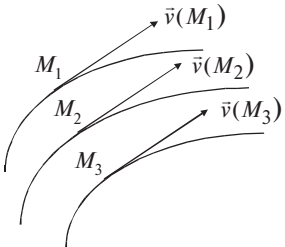

$$\frac{dx}{v_x(M)} = \frac{dy}{v_y(M)} = \frac{dz}{v_z(M)}. \quad (28.2)$$

Рис. 28.5

Система (28.2) является системой двух дифференциальных уравнений для определения векторных линий поля $\vec{v}(M)$.

Векторные линии характеризуют ВП геометрически и дают информацию о структуре этого поля.

Пример: Найти векторные линии ВП $\vec{v}(M) = x\vec{i} - y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

◀ По формуле (28.2) получаем систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-2z} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \\ \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = c_1, \\ y^2 = c_2z, \end{cases}$$

это уравнения векторных линий, являющихся линиями пересечения гиперболических и параболических цилиндров ▶

28.2.2. Поток и дивергенция ВП

Рассмотрим ВП функции $\vec{v}(M) = \{v_x(M), v_y(M), v_z(M)\}$, $M \in \Omega$.

Пусть двусторонняя ориентированная поверхность $G \subset \Omega$, $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha(M), \cos\beta(M), \cos\gamma(M)\}$ — единичный вектор нормали в т. M .

О: Поток ВП $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, через поверхность G называется

$$\Pi_G = \iint_G \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = \iint_G v_x dy dz + v_y dx dz + v_z dx dy. \quad (28.3)$$

Окружим т. $M \in \Omega$ замкнутой поверхностью $G \subset \Omega$, внутри которой заключен объем V (рис. 28.6).

О: Дивергенцией $\operatorname{div} \vec{v}(M)$, или расходимостью ВП $\vec{v}(M)$ в т. $M \in \Omega$ называется

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \lim_{\substack{V \rightarrow 0 \\ G \rightarrow M}} \frac{\Pi_G}{V}. \quad (28.4)$$

Рассмотрим гидродинамическую интерпретацию, т.е. будем считать, что $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, — стационарное поле скоростей несжимаемой жидкости. Течение жидкости может быть обусловлено существованием в Ω источников (точек, производящих жидкость) и стоков (точек, поглощающих жидкость). Для замкнутой поверхности G величина Π_G характеризует количество жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны G на вне-

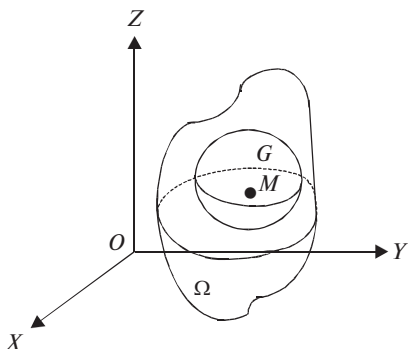


Рис. 28.6

шнюю (положительную) сторону, и равна суммарной мощности источников внутри G . Тогда (28.4) является формулой для плотности мощности источников в т. $M \in \Omega$. Если $\operatorname{div} \vec{v}(M) > 0$, то в т. M — источник, если $\operatorname{div} \vec{v}(M) < 0$, то в т. M — сток.

В электростатическом поле, созданном электрическими зарядами, распределенными в Ω , дивергенция является плотностью распределения зарядов в т. $M \in \Omega$.

Т: Если $v_x(M)$, $v_y(M)$, $v_z(M)$ непрерывны в Ω вместе со своими частными производными, то для ВП $\vec{v}(M) = \{v_x(M), v_y(M), v_z(M)\}$ в Ω справедлива формула

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \vec{v}(M) \quad \blacksquare \quad (28.5)$$

□ По формуле Остроградского—Гаусса (27.9) и теореме о среднем для тройного интеграла поток в (28.4)

$$\begin{aligned} \Pi_G &= \oiint_G v_x dy dz + v_y dx dz + v_z dx dy = \\ &= \iiint_{\Omega^*} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_{M^*} V, \end{aligned}$$

$\partial\Omega^* = G$, V — объем Ω^* , $M \in \bar{\Omega}^*$. При $G \rightarrow M$ имеем $M^* \rightarrow M$,

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \lim_{M^* \rightarrow M} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Big|_{M^*} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \boxtimes$$

С помощью (28.3) и (28.5) формулу Остроградского–Гаусса можно переписать в векторной форме:

$$\Pi_G = \oint\!\!\!\oint_G \vec{v}(M) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{v}(M) \, dv, \quad \partial\Omega = G.$$

Пример: Найти поток и дивергенцию ВП радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\blacktriangleleft \operatorname{div} \vec{r} = (x)'_x + (y)'_y + (z)'_z = 3,$$

$$\Pi_G = \iiint_G x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy = \iiint_\Omega 3 \, dx \, dy \, dz = 3V,$$

V — объем Ω , $G = \partial\Omega$ \blacktriangleright

28.2.3. Циркуляция и ротор ВП

Для ВП функции $\vec{v}(M) = v_x(M)\vec{i} + v_y(M)\vec{j} + v_z(M)\vec{k}$, $M \in \Omega$, рассмотрим криволинейный интеграл $\oint_L \vec{v}(M) \cdot d\vec{r}$, $L \subset \Omega$, где вектор $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ направлен по касательной к L .

О: Циркуляцией Π_L векторного поля $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, по замкнутому контуру $L \subset \Omega$ называется

$$\Pi_L = \oint_L \vec{v}(M) \cdot d\vec{r} = \oint_L v_x \, dx + v_y \, dy + v_z \, dz. \quad (28.6)$$

О: Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{v}(M) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (28.7)$$

Используя оператор Гамильтона, формулу (28.7) можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{v}(M) = \nabla \times \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (28.8)$$

(векторное произведение символического вектора набла ∇ на вектор \vec{v}).

Пример: Вычислить $\text{rot } \vec{v}(M)$, если $\vec{v}(M) = 2x^2y\vec{i} - yz^2\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$, $M_0(-1; 1; 2)$.

◀ По формуле (28.8) имеем

$$\text{rot } \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & -yz^2 & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{x}{y^2} + 2yz \right) \vec{i} - \frac{1}{y} \vec{j} + (-2x^2) \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{v}(M_0) = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \blacktriangleright$$

Вектор $\text{rot } \vec{v}(M)$ в гидродинамической интерпретации характеризует интенсивность вращательного движения жидкости в т. $M \in \Omega$ (или завихренность) [9. С. 25].

Пользуясь введенными понятиями, формулу Стокса (27.10) можно записать в векторной форме. Пусть G — гладкая ориентированная поверхность ($G \subset \Omega$), натянутая на гладкую замкнутую

$$\text{кривую } L (L \subset \Omega) \Rightarrow \Pi_L = \oint_L \vec{v}(M) \cdot d\vec{r} = \iint_G \text{rot } \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma.$$

28.2.4. Простейшие ВП

О: Трубочатым, или соленоидальным, ВП называется векторное поле $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, для которого $\text{div } \vec{v}(M) = 0$.

В гидродинамической интерпретации это поле без источников. Выясним смысл названия. Возьмем замкнутую кривую $L \subset \Omega$ и проведем через каждую ее точку векторные линии. Они ограничивают часть Ω , называемую векторной трубкой. Рассмотрим часть трубки между двумя плоскими сечениями D_0 , $\partial D_0 = L$ и D_1 . Пусть G^* — боковая поверхность трубки (рис. 28.7), $\vec{n}(M)$ — внешняя нормаль. Так как $\text{div } \vec{v}(M) = 0$, то по формуле Остроградского – Гаусса поток через замкнутую поверхность $G = D_0 \cup D_1 \cup G^*$ равен нулю, т.е.

$$\iint_{D_0} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma + \iint_{D_1} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma + \iint_{G^*} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = 0.$$

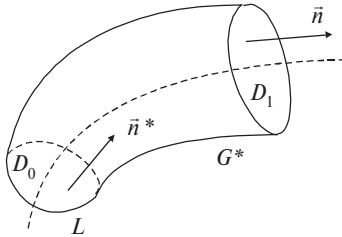


Рис. 28.7

На G^* нормаль $\vec{n}(M) \perp \vec{v}(M)$ и $\iint_{G^*} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = 0$, поэтому

$$\iint_{D_0} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = -\iint_{D_1} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = \iint_{D_1} \vec{v}(M) \cdot \vec{n}^*(M) d\sigma,$$

где \vec{n}^* — внутренняя нормаль. Это значит, что в поле без источников через каждое сечение векторной трубки протекает одно и то же количество жидкости.

О: Потенциальным, или безвихревым, ВП называется векторное поле $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, для которого существует такая скалярная функция $u(M)$, что во всех точках Ω выполняется равенство $\vec{v}(M) = \text{grad } u(M)$. Функция $u(M)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{v}(M)$.

Если $\vec{v}(M) = \{v_x(M), v_y(M), v_z(M)\}$, то из определений потенциального поля и градиента следуют равенства:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Т: Для того чтобы ВП функции $\vec{v}(M)$, имеющей в Ω непрерывные частные производные, было потенциальным, необходимо и достаточно выполнения равенства $\text{rot } \vec{v}(M) = 0$ ■

□ Необходимость:

$$\vec{v}(M) = \text{grad } u(M) \Leftrightarrow v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, v_z = \frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \vec{k} = 0.$$

Достаточность:

$$\operatorname{rot} \vec{v}(M) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_x dx + v_y dy + v_z dz = du$ — полный дифференциал некоторой функции $u(M)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = v_z \Leftrightarrow \vec{v}(M) = \operatorname{grad} u(M) \quad \square$$

Из теоремы и формулы Стокса следует, что в потенциальном ВП циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. При гидродинамической интерпретации это означает, что в потоке нет замкнутых струй жидкости, т.е. нет «водоворотов».

Из теоремы далее следует, что криволинейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования $\overset{\cup}{AB}$, т.е.

работа в силовом потенциальном поле

$$W = \int_{\overset{\cup}{AB}} v_x dx + v_y dy + v_z dz = u(B) - u(A).$$

О: Гармоническим векторным полем называется векторное поле $\vec{v}(M)$, $M \in \Omega$, которое является одновременно и соленоидальным и потенциальным, т.е. $\operatorname{rot} \vec{v}(M) = 0$, $\operatorname{div} \vec{v}(M) = 0$.

Из условия потенциальности следует, что $\vec{v}(M) = \text{grad } u(M)$. Тогда условие соленоидальности приводит к соотношению $\text{div grad } u(M) = 0$ или

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla u) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.\end{aligned}$$

Применяя дифференциальный оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, последнее равенство можно записать в виде $\Delta u = 0$. Уравнение $\Delta u = 0$ называется уравнением Лапласа, а функции, ему удовлетворяющие, — гармоническими функциями.

Литература: [3. С. 247–267]; [6. С. 367–379]; [9. С. 5–62].

Глава 10

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

29. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Опорный конспект № 29

29.1 Понятие ч.р. и его суммы

О: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ — n -я частичная сумма

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \neq \infty \Leftrightarrow$ ч.р. сходящийся, S — его сумма; $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \vee \nexists$
 \Leftrightarrow ч.р. расходящийся

Примеры: 1. Геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{сходится, } |q| < 1, \\ \text{расходится, } |q| \geq 1 \end{cases}$$

2. Обобщенный гармонический ряд ($p > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{сходится, } p > 1, \\ \text{расходится, } p \leq 1 \end{cases}$$

29.2. Свойства сходящихся ч.р.

$$1^0. \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} u_n \text{ сходится}$$

$$2^0. \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится, } S \text{ — его сумма} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} cu_n \text{ — сходится}$$

($c = \text{const}$), cS — сумма

3⁰. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, S , σ — суммы $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ сходится, $S + \sigma$ — сумма

29.3. Необходимый признак сходимости ч.р.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Следствие: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

29.4. Достаточные признаки сходимости знакоположительных ч.р.

ных ч.р.

29.4.1. Признаки сравнения

Пр.1: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $0 \leq u_n \leq v_n, \forall n$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится

Пр.2: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $u_n \geq 0, v_n \geq 0, \forall n$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0 \vee \infty \Rightarrow$ ч.р. сходятся одновременно

29.4.2. Признак Даламбера

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0, \forall n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

$\ell \begin{cases} < 1 \Rightarrow \text{ч.р. сходитя,} \\ > 1 \Rightarrow \text{ч.р. расходится,} \\ = 1 \Rightarrow \text{сомнительный случай} \end{cases}$

29.4.3. Интегральный признак

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0, f(x) > 0: f(n) = u(n)$,

непрерывна на $[1, \infty)$,

$$\int_1^{\infty} f(x) \begin{cases} \text{сходится} \Rightarrow \text{ч.р. сходится,} \\ \text{расходится} \Rightarrow \text{ч.р. расходится} \end{cases}$$

29.5. Знакопередающиеся ч.р. Признак Лейбница

$$\text{О: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

$$\text{Признак Лейбница: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad u_n > 0, \forall n,$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ч.р. сходится,} \\ S - \text{сумма, } 0 < S \leq u_1 \end{array} \right.$$

29.6. Знакопередающиеся ряды. Абсолютная и условная сходимости

$$\text{О: } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0$$

Т: (признак абсолютной сходимости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится.}$$

$$\text{О: } \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{абсолютно сходящийся} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{условно сходящийся} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ расходится,}$$

$$\text{хотя } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится}$$

Мы уже встречались с примерами, когда интересующая нас функция не является элементарной (разд. 16.3). В подобных случаях целесообразно заменить ее такой функцией, которая, являясь достаточно простой и удобной для вычислений, «хорошо» в некотором смысле заменяет или аппроксимирует ее на заданном множестве X . Например, на отрезке $[0, 2]$ значения функции $f(x) = e^x$ и

$P(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ отличаются не более чем на 5%. Это зна-

чит, что e^x может быть на указанном отрезке аппроксимирована функцией $P(x)$ с погрешностью, не превышающей 5%.

Для конструирования аппроксимирующих функций $P(x)$ используют так называемые системы функций, удобные для вычислений, например

$$\{x^i\}_{i=1}^n \text{ или } \{1, \sin kx, \cos kx\}_{k=1}^n, n \in \mathbb{N}.$$

Теория рядов, к изучению которой мы приступаем, позволяет указывать способы нахождения аппроксимирующих функций.

29.1. Понятие числового ряда и его суммы

О: Числовым рядом (ч. р.) называется выражение, полученное последовательным сложением членов числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, т.е. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, n -й частичной суммой ряда называется $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, являющийся суммой ряда; расходящимся, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ~~или~~.

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — члены ряда, u_n — n -й или общий член.

Коротко ряд записывают $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Примеры: 1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический ряд;

2. $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ — геометрическая прогрессия, где q — знаменатель прогрессии.

Выясним сходимость геометрической прогрессии. Из курса элементарной математики известно, что $S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} (1 - q^n) = \begin{cases} \frac{a}{1 - q}, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

При $q = 1$ ряд принимает вид $a + a + \dots + a + \dots$, $S_n = na$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$, при $q = -1$ геометрическая прогрессия имеет вид $a - a + a - a + \dots + a - a + \dots$, т.е. $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ при n нечетном. Таким образом, по определению, геометрическая прогрессия сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

29.2. Основные свойства сходящихся числовых рядов

1⁰. Отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ч.р.

□ Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$. Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $S_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$, $\sigma_{n-k} = u_{k+1} + \dots + u_n$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = S_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}. \quad (29.1)$$

Если существует конечный предел справа в (29.1), то существует и предел слева, и ряд $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ сходится ☒

2⁰. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и имеет сумму S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, $c = \text{const}$, сходится и имеет сумму cS .

□ Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cS \quad \text{☒}$$

3⁰. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и имеют суммы S и σ соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ сходится и имеет сумму $S + \sigma$.

□ Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $\sigma_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, $S_n^* = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n)$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S + \sigma \quad \boxtimes$$

29.3. Необходимый признак сходимости числового ряда

Т: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ■

□ Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$, тогда $u_n = S_n - S_{n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0 \quad \boxtimes$

Следствие: Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример:

◀ $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{n}{3n+1} + \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится ▶

Необходимый признак не является достаточным. Например, для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, а ряд расходится. Последнее будет установлено позднее в п. 29.4.3.

29.4. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

29.4.1. Признаки сравнения

Т.1 (признак сравнения 1): Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ выполняется неравенство

$$0 \leq u_n \leq v_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29.2)$$

Тогда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ расходится} \blacksquare$$

□ Если $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $\sigma_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, то из (29.2) следует, что

$$0 \leq S_n \leq \sigma_n. \quad (29.3)$$

Докажем сначала справедливость 1). По определению сходящегося ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ (конечное число), тогда, учитывая (29.3), имеем

$S_n \leq \sigma_n < \sigma$. Последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ неубывающая и ограниченная, потому она имеет конечный предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (доказательство см. в [4. С. 48]). По определению сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Докажем справедливость 2) от противного. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, тогда по 1) должен сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Приходим к противоречию \boxtimes

Пример: Исследовать на сходимость ряд
 $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots$

◀ Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$. Последний является геометрической прогрессией с $q = 1/5 < 1$, т.е. сходящимся рядом. Так как

$u_n = \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} < v_n = \frac{1}{5^{n-1}}$, то по признаку сравнения данный ряд сходится ▶

Т.2 (признак сравнения 2): Если для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с неотрицательными членами $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0, \infty$, то оба ряда или сходятся, или расходятся.

□ Из определения предела $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): n > N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - A \right| < \varepsilon$, т.е. $A - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} (A + \varepsilon)v_n$ тоже сходится (свойство 2⁰), и по признаку сравнения 1 в случае $u_n < v_n(A + \varepsilon)$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то $(A - \varepsilon)v_n < u_n$, а следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится ☒

В качестве рядов для сравнения обычно используются геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ и обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \leq 1$ (см. ниже п. 29.4.3).

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 3}$.

$$\blacktriangleleft \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1 + 3/n^3} = 0.$$

Применим признак сравнения 2. Ряд для сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/(n^3 + 3)}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 3} = 1 \Rightarrow$ данный ряд сходится \blacktriangleright

29.4.2. Признак Даламбера

Т: Если для знакоположительного ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \begin{cases} < 1 \Rightarrow \text{ч.р. сходится,} \\ > 1 \Rightarrow \text{ч.р. расходится,} \\ = 1 \Rightarrow \text{сомнительный случай} \blacksquare \end{cases}$$

□ Из определения предела $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): n > N \Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$.

Предположим сначала, что $\ell < 1$, ε выбираем настолько малым, что-

бы $\ell + \varepsilon < 1$. Обозначим $\ell + \varepsilon = q$, $0 < q < 1$, тогда $n > N \Rightarrow u_{n+1} < qu_n$.
 Таким образом, $u_{N+1} < qu_N$, $u_{N+2} < qu_{N+1} < u_N q^2$, $u_{N+3} < qu_{N+2} < u_N q^3, \dots$

Учитывая сходимость геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} u_n q^n$, получаем по признаку сравнения 1 и по свойству 1⁰ сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Предположим, что $\ell > 1$, т.е. $\ell - \varepsilon > 1$, тогда $n > N \Rightarrow u_{n+1} > u_n$.
 Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ и ряд расходится \square

Следствие. Если расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ установлена с помощью признака Даламбера, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.

◀ Применим признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{a^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится, кроме того, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \blacktriangleright$$

29.4.3. Интегральный признак Коши

Т: Пусть члены знакоположительного ч. р. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ являются при

$n = 1, 2, 3, \dots$ значениями некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной, монотонно убывающей на $[1, \infty)$, т.е. $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u(n), \dots$ Тогда

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \begin{cases} \text{сходится} \Rightarrow \text{ч.р. сходится,} \\ \text{расходится} \Rightarrow \text{ч.р. расходится} \blacksquare \end{cases}$$

□ Рассмотрим криволинейную трапецию с границей $\partial D: y=f(x)$, $x=1$, $x=n$, $y=0$ и две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[n-1, n]$. Описанная ступенчатая фигура имеет высоты $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n-1)$ и площадь $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) = S_n - u_n$, вписанная — высоты $f(2), f(3), \dots, f(n)$ и площадь $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = S_n - u_1$, если $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (рис. 29.1).

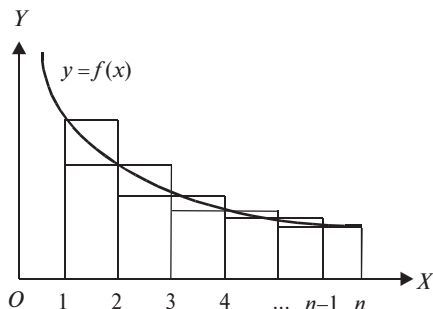


Рис. 29.1

Площадь криволинейной трапеции $S_{\text{кр.тр}} = \int_1^n f(x)dx$ удовлетворяет неравенству

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - u_n.$$

Пусть несобственный интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ сходится, т.е. существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = J$. Так как $f(x) > 0$, то последовательность $\left\{ \int_1^n f(x)dx \right\}_{n \rightarrow \infty}$ возрастает и ограничена сверху числом J . Из неравенства

$S_n - u_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - u_n$ имеем $S_n < u_1 + J$, т.е. последовательность $\{S_n\}$ возрастает и ограничена сверху, поэтому существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

[4. С. 48] и данный ряд сходится.

Пусть несобственный интеграл $\int_1^n f(x)dx$ расходится, т.е. $\int_1^n f(x)dx \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $\left\{ \int_1^n f(x)dx \right\}$ — возрастающая неограниченная последовательность. Из неравенства $S_n - u_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - u_n$ имеем $S_n > \int_1^n f(x)dx + u_n$, т.е. последовательность $\{S_n\}$ возрастает и неограничена, следовательно, ряд расходится \square

Пример: Исследовать на сходимость обобщенный гармонический

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$.

◀ Функция $\frac{1}{x^p} > 0$ убывает и непрерывна на $[1, +\infty)$. При $p \neq 1$

имеем $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \left\{ (\infty)^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{сходится при } p > 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ ряд сходится,} \\ \text{расходится при } p < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ ряд расходится.} \end{array} \right.$

При $p = 1$ имеем

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{\infty} = \{\ln \infty\} = \infty$ — расходится \Rightarrow ряд расходится ▶

29.5. Знакопередающиеся числовые ряды. Признак Лейбница

О: Знакопередающимся числовым рядом называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, $u_n > 0$.

Т. (признак Лейбница): Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, $u_n > 0$ выполняются условия: 1) $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то этот ряд сходится, причем его сумма $S > 0$ и $S \leq u_1$ ■

□ Рассмотрим частичную сумму S_{2m} , члены которой сгруппируем по два:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

В силу условия 1) разности в скобках положительны, поэтому последовательность $\{S_{2m}\}$ возрастающая и $S_{2m} > 0$. Перегруппируем члены S_{2m} : $S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$, отсюда $S_{2m} < u_1$. Возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S \leq u_1$.

Для последовательности нечетных сумм $\{S_{2m+1}\}$ в силу условия 2) имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и ряд сходится \square

29.6. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости

О: Знакопеременным числовым рядом называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, который содержит как положительные, так и отрицательные члены.

Знакопередающийся ч.р. является частным случаем знакопеременного ч.р.

Т. (признак абсолютной сходимости): Если для знакопеременного ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится ■

□ Обозначим $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, S_n' — сумма положительных членов в S_n , S_n'' — сумма абсолютных величин отрицательных членов в S_n , $\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$. Тогда $S_n = S_n' - S_n''$, $\sigma_n = S_n' + S_n''$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$. Последовательности частичных сумм $\{S_n'\}$, $\{S_n''\}$ возрастают и ограничены, так как $S_n' < \sigma_n < \sigma$, поэтому $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n' = S'$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n'' = S''$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n' - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n'' = S' - S''$. Данный ряд по определению сходится \boxtimes

Пример: Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

◀ Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$, который сравним со сходящимся обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Так как $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, то по первому признаку сравнения ряд из абсолютных величин сходится, поэтому данный знакопеременный ряд сходится по признаку абсолютной сходимости ▶

Признак абсолютной сходимости является достаточным, но не необходимым. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейб-

ница ($1 > \frac{1}{2} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$), но ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

О: Знакопеременный ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, и условно сходящимся, если он сходится, хотя ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Например, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ — абсолютно сходящийся ряд,
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ — условно сходящийся ряд.

Деление знакопеременных ч.р. на абсолютно и условно сходящиеся существенно. На абсолютно сходящиеся ч.р. переносятся все основные свойства конечных сумм. Особо важное свойство состоит в том, что сумма абсолютно сходящегося ч.р. не меняется при любой перестановке бесконечного числа его членов. В условно сходящемся ч.р. в результате такой перестановки можно получить расходящийся ряд [1а. С. 315].

Литература: [6. С. 379–391]; [10. С. 129–150]; [11. С. 254–272].

30. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Опорный конспект № 30

30.1. Понятие функционального и степенного рядов.

Теорема Абеля

О: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — функциональный ряд,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ — ряд по степеням $(x - x_0)$, (1)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ — ряд по степеням x , (2)

$(x_0, a_n \in \mathbf{R})$, (2) — частный случай (1).

Т. Абеля: Ряд (2) сходится в т. $x = x_1 \Rightarrow$ (2) сходится $\forall x$:
 $|x| < |x_1|$. Ряд (2) расходится в т. $x = x_1 \Rightarrow$ (2) расходится $\forall x$:
 $|x| > |x_1|$.

30.2. Радиус и интервал сходимости с.р.

Для ряда (2) радиус сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, интервал аб-

солютной сходимости $(-R, R)$, для ряда (1) интервал абсолютной сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$.

30.3. Дифференцирование и интегрирование с.р.

Дифференцирование и интегрирование с.р. проводится по-членно в интервале абсолютной сходимости, интервал сохраняется.

30.4. Ряды Тейлора и Маклорена

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{— ряд Тейлора, } (0! = 1)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \text{—}$$

ряд Маклорена

30.5. Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

O: $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ — остаточный член.

T: $f(x)$ — сумма ряда Тейлора \Leftrightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \text{— остаточный}$$

член в форме Лагранжа (ξ между x_0 и x)

30.6. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

$x \in (-1, 1)$ — биномиальный ряд,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

30.7. Применение рядов к приближенным вычислениям

30.7.1. Вычисление значений функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad (x_0 - R, x_0 + R) \text{ — интервал абсо-}$$

лютной сходимости.

$$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow f(x_1) \approx S_n(x_1),$$

$$\text{абсолютная погрешность } \Delta = |R_n(x_1)|.$$

30.7.2. Вычисление интегралов с помощью рядов

$$\int_a^x f(x) dx \approx \int_a^x S_n(x) dx.$$

30.7.3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Задача Коши:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y|_{x_0} = y_0, \quad y'|_{x_0} = y'_0.$$

Решение $y(x)$ ищем в виде

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots;$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = f(x_0, y_0, y_0'),$$

$$y'''(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} y'' \right)_{x_0}, \dots$$

30.1. Понятие функционального и степенного рядов. Теорема Абеля

О: Функциональным рядом (ф.р.) называется ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, члены которого являются функциями от x .

При фиксированном $x = x_0$ функциональный ряд становится числовым. Областью сходимости ф.р. называется множество X всех значений x , для которых он сходится.

В области сходимости X ф.р. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ его сумма $S(x)$ является

функцией от x .

Пример: $e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \dots$ – ф.р. Найти область сходимости.

◀ Так как члены его положительны, то для нахождения области сходимости можно воспользоваться признаком Даламбера (п. 29.4.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{e^{-nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x} \Rightarrow \frac{1}{e^x} < 1, \quad x \in (0, +\infty) \Rightarrow$$

при $x > 0$ ряд сходится ▶

Важным частным случаем ф.р. является степенной ряд.

О: Степенным рядом (с.р.) называется ф.р. вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots, \quad x_0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in \mathbf{R}. \quad (30.1)$$

При $x_0 = 0$ получаем ряд по степеням x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (30.2)$$

Для того чтобы найти область сходимости с.р., докажем теорему Абеля.

Т. (Абеля): Если степенной ряд (30.2) сходится при $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится $\forall x: |x| < |x_1|$. Если ряд (30.2) расходится в т. $x = \bar{x}_1$, то он расходится $\forall x: |x| > |\bar{x}_1|$ ■

□ Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ сходится, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_n^n = 0$. Поскольку

функция, имеющая предел, ограничена, то $\exists M > 0: |a_n x_1^n| < M \quad \forall n$. Перепишем ряд (30.2) в виде

$$a_0 + a_1 x_1 \frac{x}{x_1} + a_2 x_1^2 \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \dots + a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \dots$$

Для ряда из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x_1|^n \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad (30.3)$$

имеем $|a_n| |x_1|^n \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$, причем геометрическая прогрессия

$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ сходится при $\left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$. Таким образом, при $|x| < |x_1|$ по первому признаку сравнения ряд (30.3) сходится, тогда по признаку абсолютной сходимости ряд (30.2) сходится абсолютно.

Пусть теперь ряд (30.2) расходится при $x = \bar{x}_1$. Предположим в противоречие с утверждением теоремы, что $\exists x_1: |x_1| > |\bar{x}_1|$, при кото-

ром ряд (30.2) сходится. Но по доказанному выше ряд (30.2) должен тогда сходиться в т. \bar{x}_1 . Полученное противоречие с условием доказывает теорему \square

30.2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля следует, что если x_1 — точка сходимости ряда (30.2), то ряд сходится абсолютно во всех точках интервала $(-|x_1|, |x_1|)$. Если \bar{x}_1 — точка расходимости (30.2), то ряд расходится во всех точках интервалов $(-\infty, |\bar{x}_1|)$, $(|\bar{x}_1|, \infty)$. Отсюда делаем вывод, что существует такое число R , что на $(-R, R)$ ряд (30.2) сходится абсолютно, а на $(-\infty, -R)$, $(R, +\infty)$ расходится. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т: Областью сходимости ряда (30.2) является интервал $(-R, R)$.

В каждой точке этого интервала ряд сходится абсолютно, а на интервалах $(-\infty, -R)$, $(R, +\infty)$ — расходится \blacksquare

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости ряда (30.2), а R — его радиусом сходимости. Для некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R = 0$), для других — охватывает всю ось OX ($R = \infty$). При $x = R$ ряд может и сходиться, и расходиться (вопрос решается для каждого конкретного ряда).

Укажем способ определения радиуса сходимости ряда (30.2). Рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Если $|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, т.е. $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, то ряд из абсолютных ве-

личин членов (30.2) сходится и ряд (30.2) сходится абсолютно. Обозначим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{30.4}$$

При $|x| > R$ ряд (30.2) расходится, так как общий член ряда $a_n x^n$ не стремится к 0. Таким образом, формула (30.4) дает радиус сходимости.

Пример: Найти радиус и интервал сходимости ряда

$$1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{3^n \cdot (n+1)} + \dots$$

$$\blacktriangleleft R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{3^n (n+1)} : \frac{1}{3^{n+1} (n+2)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(n+2)}{(n+1)} = 3,$$

интервал абсолютной сходимости $(-3, 3)$. На концах интервала:

при $x = 3$ имеем $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический расходящийся ряд,

при $x = -3$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ — знакочередующийся ряд, сходящийся

условно. Область сходимости данного ряда — промежуток $[-3, 3)$ \blacktriangleright

Ряд (30.1) сводится к ряду (30.2) заменой переменной $x - x_0 = t$.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ имеет радиус сходимости R , то ряд (30.1) сходится абсолютно для $|x - x_0| < R$, т.е. на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$.

30.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Т: Пусть функция $f(x)$ является суммой с.р. (30.1) на $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Тогда

1) $f(x)$ дифференцируема на $(x_0 - R, x_0 + R)$, причем

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots)' = \\ &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

сходится абсолютно в этом интервале;

Подставляя их в (30.5), имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (30.6)$$

Полученный ряд называется рядом Тейлора для функции $f(x)$, а в частном случае при $x_0 = 0$ — рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (30.7)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ разлагается по степеням $(x - x_0)$, то этот ряд называется рядом Тейлора и $f(x)$ бесконечно дифференцируема в т. $x = x_0$.

30.5. Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора

Рассмотрим задачу, обратную поставленной в разд. 30.4. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в т. $x = x_0$. Составим для нее ряд Тейлора. Его сумма не всегда будет совпадать с функцией

$f(x)$. Например, функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$, бесконечно диф-

ференцируема при $x = 0$, причем $f^{(n)}(0) = 0$, поэтому для нее ряд Маклорена $0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{0}{n!}x^n + \dots$. Его сумма $S(x) = 0 \neq f(x)$

при $x \neq 0$. Выясним, при каких условиях $S(x) = f(x)$.

О: Многочленом Тейлора степени n называется частичная сумма

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Остаточным членом ряда Тейлора называется

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x). \quad (30.8)$$

Т: Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в т. x_0 функция $f(x)$ являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора (30.6), необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ■

□ Используя определение сходящегося ряда и выражение (30.8), имеем следующую цепочку:

$$f(x) - \text{сумма (30.6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \boxtimes$$

Приведем запись остаточного члена в форме Лагранжа [4. С. 168]:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (30.9)$$

где ξ находится между x_0 и x .

30.6. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

Разложение бесконечно дифференцируемой в т. x_0 функции $f(x)$ в ряд Тейлора (в частности, Маклорена при $x_0 = 0$) распадается на три этапа:

- 1) составляется для функции $f(x)$ ряд Тейлора;
- 2) находится интервал сходимости ряда;
- 3) проверяется, что для составленного ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, т.е. $f(x)$

является суммой этого ряда.

30.6.1. Разложение $f(x) = e^x$ в ряд Маклорена

1) Находим производные $f_{(x)}'(x) = e^x, \dots, f^{(n)} = e^x, \dots$, т.е. $f(0) = f_{(x)}'(0) = f_{(x)}''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1$, получаем ряд Маклорена для $f(x) = e^x$ по формуле (30.7):

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (30.10)$$

2) Определяем интервал сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

на интервале $(-\infty, +\infty)$ ряд сходится абсолютно.

3) Записываем $R_n(x)$ в форме Лагранжа (30.9):

$$R_n(x) = e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in (0, x) \vee \xi \in (x, 0). \quad (30.11)$$

Функция e^x монотонно возрастает, поэтому $e^x < e^{|x|}$. Так как ряд (30.10) сходится, то по необходимому признаку сходимости

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, т.е. формула (30.11) представляет собой произведе-

ние ограниченной функции на б.м., поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Таким образом, e^x является на интервале $(-\infty, +\infty)$ суммой ряда (30.10).

30.6.2. Разложение $f(x) = \sin x$ в ряд Маклорена

1) Находим производные $f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$, $f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + 2\pi/2)$, $f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2)$, ..., $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$, ..., т.е. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, ..., $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, $f^{(2n)}(0) = 0$, получаем ряд Маклорена для функции $f(x) = \sin x$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (30.12)$$

2) Определяем интервал сходимости, применяя признак Далам-

бера к $\sum_1^n \frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|x|^{2n+1}}{|2n-1|!} : \frac{|x|^{2n-1}}{|2n+1|!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{2n(2n+1)} = 0 < 1,$$

на интервале $(-\infty, +\infty)$ ряд сходится абсолютно.

3) Записываем $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \sin\left(\xi + (n+1)\frac{x}{2}\right) \frac{x^n}{(2n+1)!}, \quad \xi \in (0, x) \vee \xi \in (x, 0).$$

Используя неравенство $\left|\sin\left(\xi + (n+1)\frac{x}{2}\right)\right| \leq 1$, получаем, как и в

п. 30.6.1, что $f(x) = \sin x$ является суммой ряда (30.11) на интервале $(-\infty, +\infty)$.

30.6.3. Разложение $f(x) = \cos x$ в ряд Маклорена

Используя формулу $\cos x = (\sin x)'$, получим ряд для $\cos x$ почленным дифференцированием (30.12):

$$\begin{aligned} \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right)' = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \end{aligned}$$

На интервале $(-\infty, +\infty)$ ряд сходится абсолютно.

30.6.4. Разложение $(1+x)^m$, $m \in \mathbf{R}$, в ряд Маклорена (биномиальный ряд)

1) Находим производные $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, ..., $f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$, ..., т.е. $f(0) = 1$, $f'(0) = m$, $f''(0) = m(m-1)$, ..., $f^{(n)}(0) = m(m-1) \dots (m-n+1)$, ..., получаем ряд Маклорена для $f(x) = (1+x)^m$:

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad (30.13)$$

который называется биномиальным рядом (если m — натуральное число, то при $n \geq m+1$ коэффициенты обращаются в нуль и получаем многочлен — это частный случай бинома Ньютона).

2) Определяем интервал сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{n!} \cdot \frac{|m(m-1)\dots(m-n)|}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{|m-n|} = 1,$$

на интервале $(-1, 1)$ ряд сходится абсолютно. Если m не является натуральным числом, то на $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ряд расходится. На концах $x = -1$, $x = 1$ сходимость исследуется при конкретном m . В [1а. С. 452] показано, что ряд (30.13) имеет сумму $(1 + x)^m$.

30.6.5. Разложение $f(x) = \ln(1 + x)$ в ряд Маклорена

Используем интегральную формулу $\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dx}{1 + x}$.

Разложение $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$ может быть получено из (30.13) при $m = -1$. Тогда

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= \int_0^x (1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots) dx = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \end{aligned}$$

причем ряд сходится абсолютно на интервале $(-1, 1)$. При $x = -1$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический расходящийся ряд, при $x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ сходится условно.

30.6.6. Разложение $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена

Используем интегральную формулу

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Разложение $(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$ получается из разложения $(1 + t)^{-1}$ при $t = x^2$, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x ((1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots) dx = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

При $x = -1$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$, при $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$. Эти ряды сходятся условно.

30.7. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

30.7.1. Вычисление значений функций с помощью рядов

Пусть функция $f(x)$ является суммой ряда Тейлора (30.6), сходящегося абсолютно в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$. Если т. $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$, то приближенно можно вычислить значение $f(x_1)$: $f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + \dots + a_n(x_1 - x_0)^n$. Абсолютная погрешность, которая допускается при замене $f(x_1)$ на $S_n(x_1)$, равна

$$\Delta = |f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)|.$$

Если ряд, получающийся при подстановке x_1 в ряд Тейлора, знакопередающийся, то для определения Δ пользуются признаком Лейбница, по которому Δ не превосходит модуль первого из отброшенных членов.

Пример: Вычислить число e с точностью до 0,001.

◀ Воспользуемся разложением e^x в ряд Маклорена (30.10).

Тогда при $x = 1$ $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$. Так как по (30.9)

$$R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}, \text{ а } e^\xi < e^1 < 3 \text{ [10. С. 52]}, \text{ то } \Delta = R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

При $n = 5$ имеем $\Delta < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} > 0,001$, а при $n = 6$

$$\Delta < \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < 0,001.$$

Поэтому $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,7181$ ▶

30.7.2. Вычисление интегралов с помощью рядов

Пусть нужно вычислить $\int_0^x f(x) dx$, причем $f(x)$ разлагается в ряд

Тейлора (30.6). Тогда можно интегрировать почленно внутри интервала сходимости. Определенный интеграл можно вычислить с заданной степенью точности.

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью 0,001.

◀ Пользуясь разложением $\sin x$ (30.12), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots \Bigg|_0^{0,5} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5 \cdot 5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} (2n-1)(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{2^3 \cdot 3! \cdot 3} = \frac{1}{144} > 0,001$, а $\frac{1}{2^5 \cdot 5! \cdot 5} = \frac{1}{19200} < 0,001$, то с

помощью признака Лейбница получаем

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3! \cdot 3} \approx 0,5 - 0,0069 = 0,4931 \blacktriangleright$$

30.7.3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Пусть необходимо найти решение $y(x)$ задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка:
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \end{cases}$$

Ищем $y(x)$ в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \frac{(x-x_0)}{1!} +$$

$$+y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots \quad (30.14)$$

Значения $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ известны, поэтому определяется сразу $y''(x_0) = f''(x_0, y_0, y_0')$. Для нахождения следующих коэффициентов ряда (30.14) необходимо брать последовательно производные от $y'' = f(x, y, y')$ и подставлять в них известные уже значения предыдущих производных.

Пример: Найти первые три члена разложения в с.р. решения задачи Коши $y'' = xy' - y + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$\leftarrow y(x) \text{ ищем в виде } y(x) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = (xy' - y + e^x)|_{x=0} = 0, \\ y'''(0) &= (xy' - y + e^x)'|_{x=0} = (y' + xy'' - y' + e^x)|_{x=0} = 1, \\ y^{IV}(0) &= (y' + xy'' - y' + e^x)'|_{x=0} = \\ &= (y'' + y' + xy''' - y'' + e^x)|_{x=0} = 1, \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4. \text{ Изложенный метод применим для при-}$$

ближенного решения уравнений любого порядка \blacktriangleright

Литература: [6. С. 394–402]; [10. С. 130–172]; [11. С. 275–320].

31. РЯДЫ ФУРЬЕ

Опорный конспект № 31

31.1. Тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (31.1)$$

$f(x)$ имеет период 2π .

$$T: \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \text{ сходитс} \Rightarrow (31.1)$$

правильно сходитс $\forall x \in \mathbf{R}$

31.2. Коэффициенты Фурье.

Ряд Фурье для функции с периодом 2π

Ряд (31.1), где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad - \text{ р.}\Phi.$$

31.3. Достаточные условия разложения $f(x)$ с периодом 2π в р.Ф.

О: $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирихле на $[a, b]$, если:

- 1) $f(x) \in C_{[a,b]}$, кроме конечного числа точек разрыва I рода;
- 2) $f(x)$ кусочно-монотонна на $[a, b]$.

Т. (Дирихле): $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет условиям Дирихле $\forall [a, b] \in \mathbf{R} \Rightarrow$ р. Ф. для $f(x)$ сходитс $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = S(x)$ в точках непрерывности,

$$S(\xi) = (f(\xi - 0) + f(\xi + 0))/2 \text{ в точках разрыва } x = \xi$$

31.4. Р.Ф. для четных и нечетных функций

$f(x)$ — четная с периодом $2\pi \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx;$$

$f(x)$ — нечетная с периодом $2\pi \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

31.5. Р.Ф. для функции $f(x)$ с периодом $2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

31.1. Тригонометрический ряд

О: Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots +$$

$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots,$$

где $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ — действительные числа, называемые коэффициентами ряда, $n \in \mathbf{N}$.

Так как члены тригонометрического ряда имеют общий период $T = 2\pi$, то сумма ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (31.1)$$

если он сходится, является периодической функцией с периодом 2π . Это обстоятельство позволяет применять тригонометрические ряды при изучении периодических процессов в электротехнике, радиотехнике и т.д.

О: Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется правильно сходящимся на промежутке X , если существует такой знакоположительный сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что $|u_n| \leq a_n, n = 1, 2, \dots$. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется мажорирующим рядом по отношению к

функциональному ряду.

Правильно сходящийся на промежутке X ряд является на нем абсолютно сходящимся и его можно почленно интегрировать на X [11. С. 281].

Т: Если сходится ряд $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$, то тригонометрический

ряд является правильно сходящимся ■

□ Теорема верна в силу справедливости неравенств $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|b_n \sin nx| \leq |b_n|$, $n = 1, 2, \dots$, $\forall x \in (-\pi, +\pi)$ ☒

31.2. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье для функции с периодом 2π

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π представляется правильно сходящимся тригонометрическим рядом (31.1), т.е. является его суммой. Выразим коэффициенты ряда a_k, b_k через функцию $f(x)$.

Предварительно отметим свойства системы тригонометрических функций

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \right\}: \quad (31.2)$$

$$1^0. \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ \pi, & k = n; \end{cases}$$

$$2^0. \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ \pi, & k = n; \end{cases}$$

$$3^0. \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0;$$

$$4^0. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin nx \, dx = 0.$$

$1^0 - 4^0$ называются свойствами ортогональности системы (31.2) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Интегралы вычисляются с использованием формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Например, при $k \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+n)x + \cos(k-n)x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Для коэффициентов a_k, b_k справедливы формулы Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad (31.3)$$

Для вывода (31.3) проинтегрируем сначала тригонометрический ряд на $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right).$$

Используя свойство 4⁰ системы (31.2), имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx = a_0 \pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Для нахождения коэффициента a_k умножим обе части (31.1) на $\cos kx$ и полученный правильно сходящийся ряд проинтегрируем на $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right).$$

В силу 1⁰, 3⁰, 4⁰ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \pi \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Аналогично для нахождения коэффициента b_k необходимо умножить обе части (31.1) на $\sin kx$ и проинтегрировать полученный правильно сходящийся ряд на $[-\pi, \pi]$, используя свойства 2⁰–4⁰.

О: Тригонометрический ряд (31.1), коэффициенты которого определяются формулами Фурье (31.3), называется рядом Фурье (р. Ф.), соответствующим функции $f(x)$.

31.3. Достаточные условия разложения периодической функции $f(x)$ с периодом 2π в ряд Фурье

О: Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирихле на $[a, b]$, если она:

- 1) непрерывна на $[a, b]$ или имеет конечное число точек разрыва I рода;
- 2) кусочно-монотонна на $[a, b]$, т.е. отрезок $[a, b]$ можно разделить на конечное число отрезков, внутри которых функция $f(x)$ либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом отрезке из \mathbf{R} условиям Дирихле. Тогда для нее можно найти по формулам (31.3) коэффициенты a_0, a_k, b_k и построить ряд Фурье (31.1).

Будет ли этот ряд расходиться на $(-\pi, +\pi)$ и будет ли его сумма равна $f(x)$? Достаточные для этого условия дает теорема Дирихле (доказательство см. в [16. С. 438]).

Т (Дирихле): Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом отрезке из \mathbf{R} условиям Дирихле, то р.Ф. для функции $f(x)$ сходится $\forall x \in \mathbf{R}$. При этом в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x) = f(x)$, а в каждой точке $x = \xi$ разрыва $f(x)$ сумма $S(\xi) = (f(\xi - 0) + f(\xi + 0))/2$ ■

Пример: Периодическая функция с периодом 2π определена как $f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi$. Разложить ее в ряд Фурье.

◀ Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле (рис. 31.1). Находим коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(x \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx \right) = 0; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-x \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx \right) = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

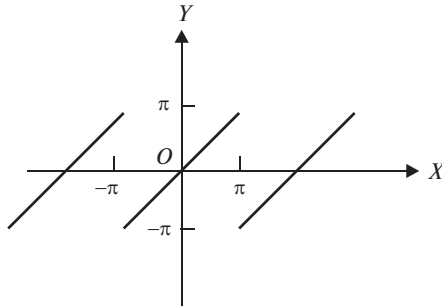


Рис. 31.1

Таким образом, $\forall x \in \mathbf{R}$, за исключением точек разрыва

$$f(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} + \dots \right). \quad (31.4)$$

В точках разрыва $x = \pm (2n - 1)\pi$ сумма ряда

$$S(x) = (-(2n - 1)\pi + (2n - 1)\pi)/2 = 0 \blacktriangleright$$

31.4. Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Л.1: Если $f(x)$ — четная функция на $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ если } f(x) \text{ — нечетная функция на}$$

$$[-a, a], \text{ то } \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \blacklozenge$$

□ Для четных функций

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = -z, \\ x | -a | 0 \\ \hline z | a | 0 \end{array} \right\} = \\ &= - \int_a^0 f(-z) dz + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(z) dz + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Для нечетной функции доказательство аналогично \square

Л.2: Произведение двух четных или двух нечетных функций есть четная функция, четной и нечетной — нечетная функция \blacklozenge

\square $\varphi(x), \psi(x)$ — четные функции \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \varphi(-x) = \varphi(x), \psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)\psi(x)$.

Остальное доказывается аналогично \square

С помощью лемм 1, 2 получаем следующие коэффициенты Фурье:

— для четной функции:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_k = 0;$$

— для нечетной функции:

$$a_0 = 0; \quad a_k = 0; \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Таким образом, ряд Фурье

$$\text{для четной функции } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$\text{для нечетной функции } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Пример: Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , если на $[-\pi, \pi]$ она имеет вид $f(x) = |x|$.

◀ Данная функция является четной (рис. 31.2). Поэтому

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & k \text{ — четное,} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ — нечетное,} \end{cases} \quad b_k = 0, \\ f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \dots \right) \quad \blacktriangleright \quad (31.5) \end{aligned}$$

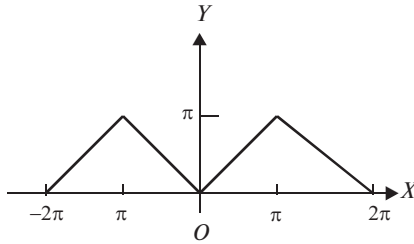


Рис. 31.2

31.5. Ряд Фурье для функций с периодом 2ℓ . Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом отрезке из \mathbf{R} и $f(x \pm 2\ell) = f(x)$. Разложение ее в тригонометрический ряд проводится путем сведения этого случая к случаю периодической функции с периодом 2π с помощью замены $z = \pi x/\ell$. Функция $\varphi(z) = f(\ell z/\pi)$ имеет период 2π , так как $\varphi(z + 2\pi) = f(\ell(z + 2\pi)/\pi) = f(\ell z/\pi + 2\ell) = f(\ell z/\pi) = \varphi(z)$.

Тогда $\varphi(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz + b_n \sin nz$, где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} z\right) dz = \begin{cases} \frac{\ell}{\pi} z = x, \\ dz = \frac{\pi}{\ell} dx \end{cases} = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \cos nz dz = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \sin nz dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} z\right) \sin nz dz = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (31.6)$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Пример: Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l = 2$, заданную формулой $f(x) = x$, $x \in [-1, 1]$.

◀ Функция нечетная, поэтому в (31.6) коэффициенты $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = -\frac{2x \cos n\pi x}{\pi n} \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx = -\frac{2 \cos n\pi}{\pi n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

В точках непрерывности $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$, а в точ-

ках разрыва $x = \pm 1, \pm 2, \dots$ имеем $S(x) = 0$ ▶

Если функция $f(x)$ задана на $[0, l]$, то для ее разложения в ряд Фурье необходимо продолжить сначала по некоторому закону $f(x)$ на $[-l, 0]$ четным или нечетным образом. Например, функцию $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$ можно продолжить на $[-\pi, 0]$ нечетным образом (см. рис. 31.1) и получить разложение в ряд по синусам (31.4) или четным образом (см. рис. 31.2) и получить разложение в ряд по косинусам (31.5). Можно осуществить продолжение и другими способами, т.е. получить бесконечное множество рядов Фурье, однако на $[0, l]$ все они имеют сумму $f(x)$.

На практике часто пользуются так называемыми усеченными рядами Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где n — конечное число. Сумма такого усеченного ряда лишь приближенно аппроксимирует исходную функцию $f(x)$. При этом ошибка $\delta(x) = |S(x) - f(x)|$ может быть оценена методами, изложенными в [2. С. 244].

Ряды Фурье широко используются в приложениях, например, при решении линейных дифференциальных уравнений в частных производных [см. разд. 33], а также в практическом гармоническом анализе [2. С. 245] для представления функций, заданных таблично или графически, в виде аналитических выражений.

Литература: [2. С. 229–254]; [6. С. 410–413]; [10. С. 178–191]; [11. С. 328–373].

Глава 11

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

32. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Опорный конспект № 32

32.1. Понятие об основных УМФ

1. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const} \quad (32.1)$$

2. Уравнение теплопроводности (уравнение Фурье)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const}. \quad (32.2)$$

3. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (32.3)

Задаются начальные и граничные условия, обеспечивающие корректность задач

32.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных II порядка

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), (*)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c — \text{const}$

$a_{11}(dy)^2 + 2a_{12}dy dx + a_{22}(dx)^2 = 0$ — характеристическое уравнение \Rightarrow

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \alpha_{1,2} \Rightarrow y = \alpha_{1,2}x + c_{1,2}$$

1) $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ — гиперболический тип, приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi;$$

2) $\Delta = 0$ — параболический тип $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \Phi;$

3) $\Delta < 0$ — эллиптический тип $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi$

УМФ (32.1) — 1-й тип, (32.2) — 2-й тип, (32.3) — 3-й тип.

Три вида задач для уравнений:

1) задача Коши для 1, 2-го типов;

2) краевая задача для 2-го типа;

3) смешанная задача для 1, 2-го типов (задаются начальные и граничные условия)

32.1. Понятие об уравнениях математической физики. Граничные и начальные условия

Любой технологический процесс протекает в условиях действия основных законов природы, некоторые из них достаточно хорошо изучены и сформулированы в виде математических зависимостей. Часто эти зависимости представляют в форме дифференциальных уравнений в частных производных.

Мы рассмотрим так называемые основные уравнения математической физики (УМФ) [2. С. 294]. С целью упрощения изложения будем рассматривать случай линейных дифференциальных

уравнений 2-го порядка с частными производными для функций двух переменных.

Основными УМФ называют:

1. Волновое уравнение для неизвестной функции $u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const} \quad (32.1)$$

Таким уравнением описывают процессы поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний, колебаний газа и т.д.

2. Уравнение теплопроводности, или уравнение Фурье

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const}, \quad (32.2)$$

с помощью которого описывают распространение тепла, фильтрацию жидкости и газа в пористой среде и т.д.

3. Уравнение Лапласа для функции $u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (32.3)$$

к которому приводят стационарные задачи об электрических и магнитных полях, гидромеханики, диффузии и т.д.

Соответствующие уравнения для функций с бóльшим числом переменных, например для функций $u(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Для описания реального физического процесса необходимо знать начальное состояние процесса (начальные условия), а также значения функции и ее производных на границе области (граничные условия).

Так, для уравнения (32.1) необходимы четыре условия: по два на каждую из переменных t и x . Например, задача об определении колеблющейся струны: найти дважды дифференцируемую в области $D = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$ функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяет уравнению (32.1) при заданных условиях:

$$\text{— начальные} \quad \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = \varphi(x), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\text{— граничные} \quad \lim_{x \rightarrow +0} u(x, t) = \mu_1(t), \quad \lim_{x \rightarrow l-0} u(x, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0.$$

Функция $\varphi(x)$ дает отклонение струны от положения равновесия в т. x в момент $t = 0$, функция $\psi(x)$ — скорость струны в т. x в момент $t = 0$, функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — законы движения концов струны.

Для уравнения (32.2) начальные и граничные условия записываются в виде

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u(x, t) = T_1(t), \quad \lim_{x \rightarrow l-0} u(x, t) = T_2(t), \quad t \geq 0.$$

Для уравнения (32.3) задаются только граничные условия, а задача называется краевой. Если ищется функция $u(x, y)$, дважды дифференцируемая и удовлетворяющая в области D уравнению (32.3), принимающая в каждой т. $M \in L = \partial D$ заданное значение $u|_L = \psi(M)$, то такая краевая задача называется задачей Дирихле.

Граничные и начальные условия обеспечивают единственность решения поставленных задач [7. С. 46, 196, 297]. Отметим, что с практической точки зрения задача должна быть поставлена корректно, т.е. ее решение не только должно существовать, но и быть единственным и устойчивым (малым изменениям исходных данных должно соответствовать малое изменение решения) [7. С. 297]; [2. С. 325].

32.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка

Было отмечено, что для каждого из приведенных УМФ начальные и граничные условия ставятся по-разному. Для того чтобы корректно в указанном выше смысле поставить задачу, прежде

следует классифицировать УМФ так, чтобы внутри каждого класса уравнений постановка этих условий была одинаковой.

Классификация УМФ в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу [7. С. 18]. Мы же ограничимся лишь случаем линейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка с постоянными коэффициентами, общий вид которого

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), \quad (32.4)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ — постоянные; $u(x, y), F(x, y)$ — неизвестная и заданная функции соответственно.

Путем замены в (32.4) переменных x, y на новые ξ, η можно добиться упрощения этого уравнения [7. С. 12]. Для этого предварительно составляется уравнение [2. С. 307] $a_{11}(dy)^2 + 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = 0$, которое называется характеристическим. Из него находят

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \alpha_{1,2} \Rightarrow y = \alpha_{1,2}x + c_{1,2}, \quad c_{1,2} = \text{const.}$$

Возможны три случая:

1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, уравнение (32.4) может быть путем замены $\xi = y - \alpha_1 x, \eta = y - \alpha_2 x$ приведено к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b_1^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2^* \frac{\partial u}{\partial \eta} + c^* u = f,$$

или $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2^* \frac{\partial u}{\partial \eta} + c^* u = f$ — гиперболический тип

уравнения;

2) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, уравнение (32.4) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b_1^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2^* \frac{\partial u}{\partial \eta} = f$$
 — параболический тип уравнения;

3) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, уравнение (32.4) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2^* \frac{\partial u}{\partial \eta} + c^* u = f \quad \text{— эллиптический тип уравнения.}$$

ния.

Таким образом, (32.1), (32.2), (32.3) — уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов соответственно.

Различают три вида задач для этих уравнений:

1) задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, граничные отсутствуют, область определения уравнения и его решения не ограничена;

2) краевая граничная задача для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе $L = \partial D$ области определения неизвестной функции, начальные условия отсутствуют;

3) смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов (задаются начальные и граничные условия).

32.3. Построение математической модели задачи о распространении тепла

Рассмотрим однородный неравномерно нагретый стержень длиной l . Условимся о предположениях, что его боковая поверхность теплонепроницаема и во всех точках поперечного сечения температура одинакова. Расположим ось Ox так, чтобы один конец стержня находился в точке O , а другой — в точке $x = l$ (рис.32.1). Обозначим через $u(x, t)$ температуру стержня в момент t в точке x . Требуется найти зависимость $u(x, t)$, если при $t = 0$ функция $u(x, 0) = \varphi(x)$ (в начальный момент задана температура в различных сечениях стержня) и при $x = 0$, $x = l$ соответственно $u(0, t) = \psi_1(t)$, $u(l, t) = \psi_2(t)$ (известна температура на концах стержня в любой момент t).

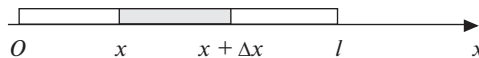


Рис. 32.1

Известно, что скорость распространения тепла q , т.е. количество тепла, протекающего через сечение с абсциссой x за единицу времени, находится по формуле

$$q = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x} S,$$

где S — площадь сечения, γ — коэффициент теплопроводности. Рассмотрим элемент стержня между сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$. Количество тепла ΔQ , сообщенное ему за время Δt , определяется формулой

$$\Delta Q = Q(x + \Delta x) - Q(x) = \gamma S \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \Delta t.$$

Применяя формулу Лагранжа (разд.10.1), получим

$$\Delta Q = \gamma S \frac{\partial^2 u(x + \Theta_1 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta t \Delta x, \quad 0 < \Theta_1 < 1.$$

Пусть выделенный элемент стержня является столь малым, что в каждый момент температуру всех его точек можно считать одинаковой. Тогда сообщенное этому элементу стержня количество тепла ΔQ за время Δt можно определить по формуле

$$\Delta Q = C_p S (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) \Delta x,$$

где C и ρ — соответственно теплоемкость и плотность вещества, из которого состоит стержень.

Применяя формулу Лагранжа, будем иметь

$$\Delta Q = C_p S \frac{\partial u(x, t + \Theta_2 \Delta t)}{\partial x} \Delta t \Delta x, \quad 0 < \Theta_2 < 1.$$

Приравнивая выражения для ΔQ , получаем

$$C_p S \frac{\partial u(x, t + \Theta_2 \Delta t)}{\partial x} \Delta t \Delta x = \gamma S \frac{\partial^2 u(x + \Theta_1 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta t \Delta x.$$

После сокращения на $S\Delta t\Delta x$ и перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ окончательно получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\gamma}{C\rho}.$$

Это и будет уравнение распространения тепла в однородном стержне (уравнение теплопроводности) (32.2).

Итак, математическая модель задачи о распространении тепла в стержне имеет следующий вид (смешанная краевая задача):

Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности,

начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$,

и граничным условиями $u(0,t) = \psi_1(t)$, $u(l,t) = \psi_2(t)$, $0 \leq t \leq T$. (32.4).

Литература: [2. С. 292–306]; [9. С. 83–114].

33. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Опорный конспект № 33

33.1. Метод Даламбера

Состоит в упрощении уравнения (*) гиперболического типа (см. ОК 32.2) путем замены

$\xi = y - \alpha_1 x$, $\eta = y - \alpha_2 x$. Пример — решение задачи Коши:

$$\left. \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]/2 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx$$

33.2. Метод Фурье

Он основан на разделении переменных в (*) путем замены $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

33.2.1. Решение смешанной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = u(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0; \\ u(x,0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$$

33.2.2. Решение смешанной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell; \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \end{array} \right\} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$$

33.2.3. Решение задачи Дирихле в круге:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad D: x^2 + y^2 < R^2; \quad u|_{\partial D} = f(x,y).$$

Переходим к полярным координатам:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad u|_{r=R} = \Phi(\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n,$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) dt, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \cos nt dt,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \sin nt dt$$

33.1. Метод Даламбера

Решение большинства задач вида 1–3 (разд. 32.2) сопряжено с серьезными математическими трудностями, поэтому в основном эти задачи решаются приближенно [7. С. 635]. Но для некоторых УМФ разработаны точные методы их решения: метод Даламбера, Фурье, операционный метод.

Метод Даламбера состоит в упрощении уравнения (32.4) в случае $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ путем замены переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, чтобы полученное после замены новое уравнение из вторых производных содержало только смешанную производную.

Пусть необходимо решить задачу Коши для бесконечной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (33.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \quad (33.2)$$

Для решения применим метод Даламбера. Характеристическое уравнение $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$. Отсюда $dx = \pm a dt \Rightarrow x = \pm at + c$, или $c_1 = x - at$, $c_2 = x + at$. Сделаем в (33.1) замену переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x - at, \\ \eta = x + at, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2a}(\xi + \eta), \\ t = \frac{1}{2a}(\eta - \xi), \end{array} \right. \quad u = \Phi(\xi, \eta) = u\left(\frac{1}{2a}(\xi + \eta), \frac{1}{2a}(\eta - \xi)\right).$$

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta}a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$

или $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ зависит только от ξ , а $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ — только от $\eta \Rightarrow$

$u = F_1(\xi) + F_2(\eta)$. Отсюда $u(x, y) = F_1(x - at) + F_2(x + at)$ — общее решение уравнения (33.1), которое называется решением Даламбера. Для нахождения функций F_1 и F_2 используем начальные условия (33.2) и производную $\frac{\partial u}{\partial t} = F_1'(x - at)(-a) + F_2'(x + at)a$. Полу-

чим систему $\begin{cases} \varphi(x) = F_1(x) + F_2(x), \\ \psi(x) = -aF_1'(x) + aF_2'(x). \end{cases}$ Проинтегрируем второе

равенство в пределах от 0 до x :

$$F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(x) dx + c, \quad c - \text{const.}$$

Используя первое ра-

венство, имеем

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(x) dx + \frac{c}{2}, \\ F_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(x) dx - \frac{c}{2}, \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(x) dx - \int_0^{x-at} \psi(x) dx \right] \Rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx. \quad (33.3)$$

Формула (33.3) и дает решение поставленной задачи, если $\psi(x)$ — дифференцируемая функция, а $\varphi(x)$ — дважды дифференцируемая.

33.2. Метод Фурье

Метод Фурье, или метод разделения переменных, основан на разделении переменных в уравнении (32.1) путем замены $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Применим этот метод при решении задач для уравнений (32.1)–(32.3).

33.2.1. Решение смешанной задачи для уравнений колебаний струны

Задача. Найти решение уравнения (32.1) для струны конечной длины l , $t > 0$, при условиях:

$$\text{— граничных} \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (33.4)$$

$$\text{— начальных} \quad u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (33.5)$$

Нетривиальное решение данной задачи будем искать в виде $u(x, t) = U(x)T(t)$. Подставив его в (32.1), имеем

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (33.6)$$

Так как левая часть в (33.6) зависит от t , а правая — только от x , то знак равенства между ними может иметь смысл лишь в том

случае, если обе части равны постоянной, которую обозначим $-\lambda$. Пусть $\lambda > 0$, тогда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (33.7)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \quad (33.8)$$

общее решение которых [разд. 21.3] соответственно

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \\ T(t) &= C \cos a\sqrt{\lambda} t + D \sin a\sqrt{\lambda} t. \end{aligned} \quad (33.9)$$

Постоянные A, B, C, D определяются из заданных в задаче условий. Подставим (33.9) в граничные условия (33.4) ($T(t) \neq 0$):

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= A \cos 0 + B \sin 0, \\ X(\ell) &= A \cos a\sqrt{\lambda} \ell + B \sin a\sqrt{\lambda} \ell = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0. \end{cases}$$

Так как $B \neq 0$ (ищется нетривиальное решение), то $\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi n / \ell$, $n = 1, 2, \dots$. Полагаем $n \neq 0$, иначе было бы $X \equiv 0$, $u \equiv 0$. В результате получаем последовательность частных решений

$$\left. \begin{aligned} X_n(x) &= B_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \\ T_n(t) &= C'_n \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D'_n \sin \frac{an\pi}{\ell} t, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_n(x, t) &= \sin \frac{\pi n}{\ell} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right),$$

$C_n = B_n C'_n$, $D_n = B_n D'_n$ — последовательность частных решений (32.1). Их сумма

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (33.10)$$

в силу линейности и однородности (32.1) тоже является его решением, удовлетворяющим (33.4), если выполняются определенные условия относительно сходимости ряда (33.10) [7. С. 92]. Достаточно обеспечить правильную сходимость ряда (33.10) и рядов, полученных из него почленным двойным дифференцированием по x и по t . Если предположить, что $\lambda < 0$, то уравнение (33.7) приняло бы вид $X'' - k^2 X = 0$, $-\lambda = k^2$. Его общее решение $X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ не может удовлетворить условиям (33.4).

Отметим, что значения $\lambda_n = \sqrt{\lambda} \frac{n\pi}{l}$ называют собственными значениями данной краевой задачи, а соответствующие им функции $X_n(x)$ — собственными функциями.

Для определения C_n и D_n в (33.10) используем начальные условия (33.5):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x).$$

Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье (см. разд. 31.3), то коэффициенты C_n , D_n , $\frac{an\pi}{l}$ являются коэффициентами Фурье:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (33.11)$$

Таким образом, ряд (33.10) с коэффициентами (33.11) является решением поставленной задачи.

33.2.2. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Задача. Найти решение уравнения (32.2), $0 < x < l$, $t > 0$, удовлетворяющее граничным

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (33.12)$$

иначальному

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (33.13)$$

условиям.

Решение, как и в предыдущей задаче, ищем в виде $u(x,y) = X(x)T(t)$. Подставив его в (32.2), получим аналогично п. 33.2.1 два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \lambda > 0; \quad (33.14)$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \quad (33.15)$$

Общее решение (33.14) $X(x)$ имеет вид (33.9). Решаем (33.15), являющееся уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dT}{T} = -a^2\lambda dt \Rightarrow \ln T = -a^2\lambda t + \ln c \Rightarrow T(t) = ce^{-a^2\lambda t}, c = \text{const.}$$

Используя граничные условия (33.12), аналогично п. 33.2.1 получаем решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (33.16)$$

Для определения B_n используем начальное условие (33.13):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Если выполняются условия разложения $\psi(x)$ в ряд Фурье, то

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (33.17)$$

Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид (33.16), где коэффициенты определяются формулой (33.17).

33.2.3. Решение задачи Дирихле в круге

Задача Дирихле. Найти в круге радиусом R с центром в начале координат дважды дифференцируемую функцию $u(x,y)$, непрерывную в замкнутом круге и удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (33.18)$$

а на границе $L: x^2 + y^2 = R^2$ — граничному условию $u|_L = f(x,y)$.

Для решения задачи перейдем в уравнении (33.18) к полярным координатам [2. С. 101]; [9. С. 136]: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi \Rightarrow$

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad u = u(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (33.19)$$

Будем искать частное решение в виде $u = F(\varphi)P(r)$, подставим его в (33.19):

$$r^2 F(\varphi) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + r F(\varphi) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} P = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}}{F(\varphi)} = - \left(\frac{r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}}{P} + \frac{r \frac{\partial P}{\partial r}}{P} \right).$$

Функция в левой части зависит только от φ , в правой части — от r , поэтому знак равенства может быть при условии, что обе части равны некоторой константе — k^2 . Тогда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения 2-го порядка, линейных и однородных:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + k^2 F = 0, \quad (33.20)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + r \frac{\partial P}{\partial r} - k^2 P = 0. \quad (33.21)$$

Общее решение (33.20): $F = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi$. Решение (33.21) ищем в виде $P = r^m$, подставим его в уравнение: $r^2 m(m-1)r^{m-2} + r m r^{m-1} + k^2 r^m = 0 \Rightarrow m^2 - k^2 = 0$.

Отсюда получаем два частных решения уравнения (33.21): r^k и r^{-k} , которые образуют фундаментальную систему решений. Общее его решение имеет вид

$$P(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}. \quad (33.22)$$

Таким образом, при любом k , отличном от нуля, функция

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}) \quad (33.23)$$

является решением (33.19). При $k = 0$ уравнения (33.20), (33.21) принимают вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + r \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

и являются ОДУ, допускающими понижение порядка (см. разд. 21.2). Их общие решения соответственно

$$F(\varphi) = A_0 + B_0 \varphi, \quad P(r) = C_0 + D_0 \ln r; \quad u_0 = (A_0 + B_0 \varphi)(C_0 + D_0 \ln r).$$

Так как при одном и том же r должно быть $u_0(r, \varphi) = u_0(r, \varphi + 2\pi)$, то $B_0 = 0$. В силу непрерывности $u(r, \varphi)$ решение при $r = 0$ должно быть конечным, т.е. $D_k = 0$, $D_0 = 0$. Таким образом, $u_0 = A_0 C_0$. Обозначив $A_0 C_0$ через $A_0/2$, имеем $u_0 = A_0/2$. Составим решение уравнения (33.19) в виде суммы решений (33.23), оно является периодическим при целых значениях k :

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \quad (33.24)$$

(отрицательные k новых частных решений не дают).

Постоянные A_n и B_n подберем так, чтобы удовлетворялось граничное условие

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n = \Phi(\varphi), \quad \Phi(\varphi) = f(R \cos \varphi, R \sin \varphi).$$

Если выполняются условия разложения $\Phi(\varphi)$ в ряд Фурье, то $A_n R^n$, $B_n R^n$ — коэффициенты Фурье этой функции, т.е.

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) dt, \\ A_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \cos nt dt, \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \sin nt dt. \end{aligned} \quad (33.25)$$

Формулы (33.24), (33.25) и определяют искомое решение. После преобразований [2. С. 319] это решение можно записать в виде так называемого интеграла Пуассона:

$$u = u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} dt.$$

33.3. Метод конечных разностей для решения уравнений математической физики

В разделе 33.2 дано решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности при нулевых граничных условиях методом Фурье. Рассмотрим также приближенный метод решения задачи (32.2), (32.4) раздела 32.3, который часто используется на практике: метод конечных разностей, или метод сеток.

Производные в уравнении теплопроводности заменяются разностями по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &\approx \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h}, \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h} \left[\frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} - \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} \right] = \\ &= \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}, \end{aligned}$$

аналогично $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau}$, $h < l$, $\tau < T$.

Прямые $x = 0$, $x = l$, $t = 0$, $t = T$ образуют прямоугольник (рис. 33.1).

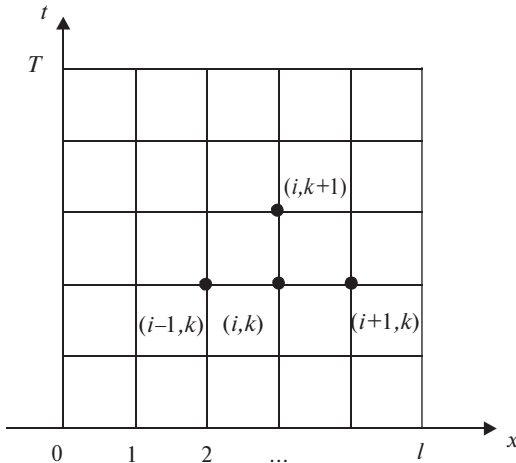


Рис. 33.1

На трех его сторонах — нижней и двух боковых — заданы значения искомой функции $u(x, t)$. Покроем прямоугольник сеткой, образованной прямыми:

$$x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t = k\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

Числа h и τ называются шагами сетки в направлении x и t соответственно, точки пересечения прямых — узлами сетки. Обозначим их через (i, k) . Прямые $x = ih, t = k\tau$ называют сетчатыми слоями. Определим приближенные значения решения в узлах сетки.

Обозначим $u(ih, k\tau) = u_{i,k}$ и запишем вместо уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

соответствующее ему уравнение в конечных разностях в точке $(ih, k\tau)$:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}.$$

Найдем отсюда $u_{i,k+1}$:

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) u_{i,k} + a^2 \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1,k} - u_{i-1,k}). \quad (33.26)$$

Таким образом, если известны три значения на k -м слое: $u_{i,k}$; $u_{i+1,k}$; $u_{i-1,k}$, то определяется значение $u_{i,k+1}$ на $(k+1)$ -м слое. Нам известны значения $u(x, t)$ при $t = 0$, т.е. на прямой $t = 0$: $u(x, 0) = \varphi(x)$. Это означает, что на сеточном слое $k = 0$ известны все $u_{i,0}$. Тогда по (33.26) могут быть найдены $u_{i,1}$, которые используются для нахождения $u_{i,2}$, и т.д. В результате будут найдены приближенные значения $u_{i,k}$ функции $u(x, t)$ в узлах сетки. Приближенные значения $u(x, t)$ между узлами сетки могут быть найдены методом интерполяции [14. С. 13].

При выборе слишком большого шага τ вычисления могут быть неустойчивыми, поэтому необходимо выполнение условия:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}, \quad \text{причем формула для } u_{i,k+1} \text{ упрощается при выборе}$$

$$\tau = \frac{h^2}{2a^2}: \quad u_{i,k+1} = \frac{\tau}{2} (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}).$$

Литература: [2. С. 310–325]; [3. С. 315–350]; [9. С. 114–175].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ТРЕТЬЕЙ ЧАСТИ

- 1а. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. Т. II. — 800 с.
- 1б. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1970. Т. III. — 656 с.
2. *Овчинников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М.* Высшая математика. — Киев: Выща школа, 1989. — 680 с.
3. *Бугров Н.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения и кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1985. — 448 с.
4. *Бугров Н.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1980. — 432 с.
5. *Данилов Ю.М., Журбенко Л.И., Никонова Г.А.* Высшая математика. Учебное пособие. — Казань, КГУ, 2000. — 380 с.
6. *Щипачев В.С.* Высшая математика. — М.: Высш.школа, 2003. — 479 с.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1993. — 735 с.
8. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. — М: Высш. школа, 1998. Т.2. — 584 с.
9. *Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев Л.А.* Специальный курс высшей математики. — М.: Высш. школа, 1976. — 390 с.
10. *Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С.* Краткий курс высшей математики. — М.: Высш. школа, 1972. Т. II. — 640 с.
11. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1978. Т. II. — 576 с.
12. *Баврин И.И.* Высшая математика. — М: Высш. школа, 2001. — 616 с.
13. *Гусак А.А.* Высшая математика. — М.: Тетрасистемс, 2001. Т.2. — 449 с.
14. *Вержбицкий В.М.* Численные методы. — М.: ООО «Изд. дом ОНИКС 21 век», 2005. — 400 с.

Часть 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

В четвертой части учебного пособия рассматриваются основные понятия теории вероятностей, случайные величины, основные понятия математической статистики. Излагаются основные сведения по логике высказываний и теории графов.

Глава 12

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

34. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Опорный конспект № 34

34.1. Понятие пространства элементарных событий Ω и случайного события (с.с.). Основные формулы комбинаторики

О: $\Omega = \{\omega\}$ — множество всевозможных исходов опыта, ω — элементарное событие.

О: С.с. $A \Leftrightarrow A \subset \Omega$. Ω — достоверное событие, \emptyset — невозможное событие

Формулы комбинаторики:

$P_n = n!$ — число перестановок из n элементов, $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ —

число размещений из n по m , $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ — число сочетаний из n по m

34.2. Действия над с.с.

Сумма $A \cup B = \{\omega: \omega \in A \vee \omega \in B\}$.

Произведение $AB = \{\omega: \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.

Разность $A \setminus B = \{\omega: \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$.

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение A до Ω .

A, B несовместны $\Leftrightarrow AB = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A + B$

O: $S = \{A_i\}$, $A_i \subset \Omega$, $i \in \mathbb{N}$ — полная группа событий

$$\Leftrightarrow \sum_i A_i = \Omega$$

34.4. Сложение и умножение вероятностей

T: $AB = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

$AB \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$A + \bar{A} = \Omega \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

O: $P(A/B)$ — условная вероятность (наступления A при условии, что B произошло). A, B — независимы $\Leftrightarrow P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$.

T: $P(AB) = P(A/B)P(B)$; A, B — независимы $\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

T: $S = \{H_i\}$: $\sum_{i=1}^n H_i = \Omega \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$, $\forall A \subset \Omega$

34.3. Различные определения вероятности

34.3.1. Аксиоматическое и классическое определения

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$

O: Вероятность $P(\omega_i) \Leftrightarrow P(\omega_i) \in \mathbf{R}$:

1) $P(\omega_i) \geq 0 \forall i$, 2) $\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$;

$P(\omega_i)$ — мера наступления ω_i

O: Вероятность $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$, $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$, $0 < P(A) < 1$

В классическом определении:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, ω_i , $i = \overline{1, n}$, — равновозможны, m эл.событий $\omega_i \in A \Rightarrow P(A) = m/n$

34.3.2. Геометрическое определение

O: E^*, E — измеримые множества из \mathbf{R}^n , $E^* \subset E$, A — попадание т. $A \in E$ в $E^* \Rightarrow P(A) = \mu(E^*)/\mu(E)$, $\mu(E)$ — мера E

34.3.3. Статистическое определение

О: $P(A)P^*(A) = m/n$ — относительная частота; m — число наблюдений A при повторении эксперимента n раз

34.5. Схема испытаний Бернулли

Вероятность появления с.с. A в n независимых испытаниях m раз:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, P(A) = p, P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

34.1. Понятия пространства элементарных событий и случайного события.

Основные формулы комбинаторики

Теория вероятностей изучает модели экспериментов, исход которых неоднозначно определяется условиями опыта (случайных экспериментов).

О: Элементарными событиями ω_i называются всевозможные исходы опыта. Пространством (множеством) элементарных событий Ω называется совокупность всех элементарных событий данного опыта: $\Omega = \{\omega_i\}$.

Будем считать, что Ω — конечное или счетное множество.

Примеры:

1. Бросают игральную кость. Количество возможных исходов опыта $n = 6$, $\Omega = \{\omega_i, i = \overline{1, 6}\}$, ω_i — выпадение i .

2. Подбрасывают монету. Количество возможных исходов $n = 2$, $\Omega = \{r, p\}$, r — выпадение герба, p — выпадение решки.

3. Подбрасывают две монеты. Количество возможных исходов $n = 4$, $\Omega = \{(r, r); (r, p); (p, r); (p, p)\}$.

При определении числа элементарных событий, входящих в конечное пространство Ω , используются такие понятия комбинаторного анализа, как перестановки, сочетания, размещения.

О: Соединениями называются различные комбинации из элементов множества $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, подчиненные определенным условиям. Перестановками из n элементов называются соединения, содержащие n элементов и отличающиеся их порядком. Размещениями из n элементов по m ($m \leq n$) называются соединения из m элементов, составленные из данных n элементов, отличающихся друг от друга либо самими элементами, либо их порядком. Сочетаниями из n элементов по m ($m \leq n$) называются соединения из m элементов, составленных из данных n элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Для подсчета числа соединений существуют следующие формулы:

число перестановок из n элементов: $P_n = n!$,

число размещений из n элементов по m :

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

число сочетаний из n элементов по m :

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Пример: $\Omega = \{a, b, c\}$.

1. Перестановки: $abc, bca, cab, cba, bac, acb$; $P_3 = 3! = 6$.

2. Размещения из трех элементов по два: ab, ac, bc, ba, ca, cb ; $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

3. Сочетания из трех элементов по два: ab, ac, bc ; $C_3^2 = A_3^2 / P_2 = 6 / 2 = 3$.

О: Случайным событием A называется подмножество множества элементарных событий: $A \subset \Omega$; Ω называется достоверным событием, \emptyset (пустое множество) — невозможным.

В результате эксперимента случайное событие может произойти или не произойти.

Примеры:

1. Бросают игральную кость. Событие A — появление цифр $\leq 3 \Rightarrow A = \{\omega_i, i = 1, 2, 3\}$, ω_i — появление i , т.е. в A входят 3 элементарных события.

2. Бросают две игральные кости. Пространство элементарных событий $\Omega = \{(n_1, n_2): n_1, n_2 \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$, число элементарных событий 36. Пусть A — появление таких цифр (n_1, n_2) , что их сумма $n_1 + n_2 \leq 4 \Rightarrow A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$.

3. Из карточек сложено слово из шести букв «победа». Выбираем наугад две буквы, A — обе выбранные буквы являются согласными. Пространство элементарных событий состоит из $C_6^2 = 6!/(4!2!) = 15$ элементарных событий. Случайное событие

A состоит из $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$ элементарных событий.

34.2. Действия над событиями

Действия над случайными событиями и отношения между ними определяются по аналогии с действиями и отношениями в теории множеств.

Обозначаем $\omega_i \in A$, если ω_i — элементарный исход события A ; $A \subset B$, если событие A влечет за собой B ; $A, B \subset \Omega$.

Равенство (эквивалентность) событий: $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

О: Суммой $A \cup B$ событий A и B называется их теоретико-множественное объединение, т.е. событие, состоящее из элементарных событий ω : $\omega \in A$ или $\omega \in B$.

Произведением AB ($A \cap B$) событий A и B называется их теоретико-множественное пересечение, т.е. событие, состоящее из элементарных событий: $\omega \in A$ и $\omega \in B$.

Разностью $A \setminus B$ событий A и B называется их теоретико-множественная разность, т.е. событие, состоящее из элементарных событий ω : $\omega \in A$, но $\omega \notin B$.

Противоположным событием \bar{A} для события $A \subset \Omega$ называется теоретико-множественное дополнение A до Ω , т.е. $\bar{A} = \Omega \setminus A$ происходит тогда, когда A не происходит.

Если изобразить геометрически Ω областью на плоскости, а элементарные события ω — точками этой области, то действия над событиями можно изобразить схематически (рис. 34. 1).

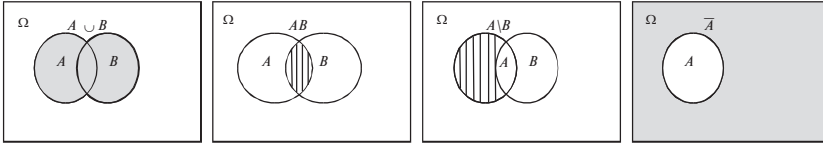


Рис. 34.1

Примеры:

1. A — выигрыш по займу 1; B — выигрыш по займу 2. Тогда $A \cup B$ — выигрыш хотя бы по одному из займов (в частности, сразу по двум).

2. A — прохождение I тура на конкурсе, B — прохождение II тура. Тогда AB — успешное прохождение I и II туров.

3. Бросают монету. A — выпадение герба, \bar{A} — выпадение решки.

Множество случайных событий $A \subseteq \Omega$ и \emptyset образуют булеву алгебру — алгебру событий, связанных с заданным экспериментом.

О: События A и B называются несовместными, если наступление A исключает наступление B , т.е. $AB = \emptyset$. В этом случае используют $A \cup B = A + B$.

Таким образом A, \bar{A} — несовместные события.

О: Множество (система) событий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_i \subseteq \Omega, \forall i \in \mathbb{N}$, называется полной группой событий S , если $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$, $\sum_i A_i = \Omega$.

Пример: На трех станках производят болты, которые складываются вместе. Берут наугад один болт. Ω — множество всех болтов, а полная группа $S = \{A_1, A_2, A_3\}$, где A_i — случайное событие, состоящее в том, что болт сделан на i -м станке.

34.3. Различные определения вероятности

34.3.1. Аксиоматическое и классическое определения

Пусть с данным опытом связано конечное или счетное пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$.

О: Вероятностью $P(\omega_i)$ элементарного события ω_i называется действительное число, удовлетворяющее условиям

$$1) P(\omega_i) \geq 0 \quad \forall i; \quad 2) \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$$

и определяющее меру наступления ω_i .

Рассмотрим теперь случайное событие $A \subset \Omega$.

О: Вероятностью $P(A)$ случайного события $A \subset \Omega$ называется действительное число, определяемое формулой

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i). \quad (34.1)$$

Из определений следует, что $P(A) > 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. Таким образом, $0 < P(A) < 1$.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, причем все ω_i являются равновероятными и $A \subset \Omega$ содержит m элементарных событий. Тогда все $P(\omega_i)$ одинаковы, т.е. $P(\omega_i) = 1/n$ и по (34.1)

$$P(A) = m/n. \quad (34.2)$$

Формулу (34.2), являющуюся частным случаем (34.1), принимают за классическое определение вероятности в случае n равновероятных попарно несовместных исходов опыта. События $\omega_i \subset A$ называют в этом случае благоприятствующими наступлению A .

Примеры: 1. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших цифр ≤ 4 .

◀ Пространство Ω содержит 36 равновероятных элементарных событий (см. пример 2 п.34.1), случайное событие A — 6 событий, т.е. $P(A) = 6/36 = 1/6$ ▶

2. В урне 2 зеленых, 4 желтых, 7 красных, 10 белых шаров. Вынимают один шар. Какова вероятность того, что он зеленый?

◀ Пространство Ω состоит из $2 + 4 + 7 + 10 = 23$ событий, случайное событие A — из двух событий, т.е. $P(A) = 2/23$ ▶

34.3.2. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вводится для пространств Ω с бесконечным числом элементарных событий, каждое из которых интерпретируется как выбор наугад точки из некоторого множе-

ства E евклидова пространства \mathbf{R}^n . Предполагается, что множество E имеет геометрическую форму и конечную меру $\mu(E)$.

О: Вероятностью события A , состоящего в попадании выбранной наугад точки из измеримого множества E в измеримое множество $E^* \subset E$, называется $P(A) = \mu(E^*)/\mu(E)$.

Пример: Два человека договариваются о встрече на заданном промежутке времени t . Пришедший первым ожидает в течение времени $\lambda < t$. Какова вероятность встречи?

◀ Множество элементарных событий — квадрат D : $0 \leq x \leq t$, $0 \leq y \leq t$, где x — время прихода 1-го, y — 2-го. Событие A состоит из элементарных событий, находящихся в полосе между прямыми $y = x - \lambda$, $y = x + \lambda$ (рис. 34.2), так как для осуществления встречи должно выполняться $|y - x| \leq \lambda$. Площадь полосы $S^* = t^2 - (t - \lambda)^2$, площадь квадрата $S = t^2$, тогда $P(A) = S^*/S = (t^2 - (t - \lambda)^2)/t^2 = 1 - ((t - \lambda)/t)^2$ ▶

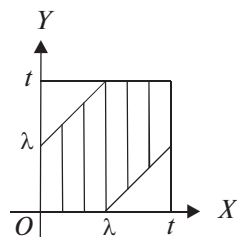


Рис. 34.2

34.3.3. Статистическое (частотное) определение вероятности

Пусть некоторый эксперимент повторяется n раз, событие A при этом наступило m раз.

О: Относительной частотой появления события A , наступившего m раз при повторении эксперимента n раз, называется $P^*(A) = m/n$.

Замечено, что при больших n частота $P^*(A)$ лишь слегка колеблется — это закон устойчивости частот.

О: Статистической вероятностью события A называется $P(A) \approx P^*(A) = m/n$, если число испытаний n достаточно большое.

Например, при бросании монеты 24 000 раз герб выпал 12 012 раз (опыт К. Пирсона). Число $12\,012/24\,000$ близко к $1/2$. При решении задачи о вероятности выпадения герба при бросании монеты формула (34.2) дает $P(A) = 1/2$.

34.4. Сложение и умножение вероятностей

Т: Если A и B — несовместные события \Rightarrow

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \quad (34.3)$$

в противном случае

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \blacksquare \quad (34.4)$$

Формула (34.3) справедлива и для вероятности суммы n несовместных событий.

□ Теорема является следствием **О** вероятности (формула 34.1)). В формуле (34.4) слева $P(A \cup B) = \sum_{\omega_i \in A \cup B} P(\omega_i)$, а справа в

сумме $P(A) + P(B)$ вероятности для $\omega_i \in AB$ учитываются дважды. Вычитание в правой части $P(AB)$ делает ее равной левой ☒

С л е д с т в и е. Вероятность противоположного событию A события \bar{A} равна $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

□ Имеем по (34.3)

$$P(A) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad \square$$

Примеры:

1. В урне 2 зеленых, 4 желтых, 7 красных, 10 белых шаров. Вынимают один шар. Найти вероятность того, что он не белый.

◀ Пространство Ω содержит 23 элементарных события. Случайное событие, состоящее в выборе цветного шара, $A = A_1 + A_2 + A_3$. Здесь A_1 — событие, состоящее в выборе зеленого шара, A_2 — желтого, A_3 — красного. Так как $P(A_1) = 2/23$, $P(A_2) = 4/23$, $P(A_3) = 7/23$, по формуле (34.3) имеем $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 2/23 + 4/23 + 7/23 = 13/23$ ▶

2. Вероятность того, что день пасмурный $P = 0,7$. Найти вероятность того, что день ясный.

◀ Событие \bar{A} , состоящее в том, что день ясный, противоположное событию A (день дождливый), т.е. $P(\bar{A}) = 1 - P = 1 - 0,7 = 0,3$ ▶

О: Вероятность события A в предположении, что произошло событие B , называется условной вероятностью и обозначается $P(A/B)$. События A и B называются независимыми, если предположение о том, что произошло одно из них, не влияет на вероятность другого, т.е.

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B). \quad (34.5)$$

Т: Вероятность $P(AB)$ совместного наступления событий A и B вычисляется по формуле

$$P(AB) = P(B)P(A/B). \quad (34.6)$$

Если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A)P(B) \blacksquare \quad (34.7)$$

Формула (34.7) справедлива и для вероятности произведения n независимых событий.

□ Рассмотрим классический случай. Пусть $P(B) = m/n$, $P(AB) = k/n$. Если B произошло, то A состоит из k элементарных событий $\omega_i \in B$, т.е. $P(A/B) = k/m$. Отсюда

$$P(AB) = k/n = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(B)P(A/B).$$

Формула (34.7) следует из (34.6) и (34.5) ☒

Примеры:

1. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, вынимают два. Какова вероятность того, что оба шара белые?

◀ Событие A — вынут белый шар, $P(A) = 3/10$, событие B — вынут второй белый шар при условии, что произошло A , $P(B/A) = 2/9$, тогда вероятность того, что оба шара белые, $P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$ ▶

2. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка $P_1 = 0,9$,

для второго $P_2 = 0,8$, для третьего $P_3 = 0,7$. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего.

◀ По формуле (34.7) имеем $P = P_1 P_2 P_3 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504$ ▶

T: Пусть случайные события $H_i \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$, образуют полную группу событий. Тогда для любого случайного события $A \subset \Omega$ справедлива формула

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) \blacksquare \quad (34.8)$$

Формулу (34.8) называют формулой полной вероятности.

□ Событие A может произойти только с одним из несовместных событий H_i , $i = \overline{1, n}$, тогда $A = H_1 A + H_2 A + \dots + H_n A$. Применяя формулу (34.3), получим $P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \dots + P(H_n A)$. Далее из (34.6) имеем для каждого слагаемого $P(H_i A) = P(H_i)P(A/H_i)$, $i = \overline{1, n}$, что доказывает формулу (34.8) ☒

Пример: Имеется два ящика с шарами. В первом ящике два белых и один черный шар, во втором ящике один белый и четыре черных шара. Наугад выбираем ящик и вынимаем шар. Какова вероятность того, что он белый?

◀ Пространство $\Omega = H_1 + H_2$, где H_1 — выбор первого ящика, H_2 — второго, событие A — выбор шара, тогда $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$, $P(A/H_1) = 2/3$, $P(A/H_2) = 1/5$ и по формуле (34.8): $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$ ▶

Из формул $P(H_i A) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$ и (34.8) получается так называемая формула Байеса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(A/H_j)P(H_j)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (34.9)$$

Формула трактуется следующим образом: имеется полная группа гипотез H_1, \dots, H_n , вероятности которых известны до опыта. Проводится опыт, в результате которого может наступить или не наступить событие A . Если событие A наступило, то (34.9) определяет вероятности гипотез после опыта.

34.5. Схема испытаний Бернулли

Пусть один и тот же опыт повторяется n раз, испытания независимы, в результате каждого испытания может наступить или нет событие A . Пусть $P(A) = p$ — вероятность наступления A , тогда $P(\bar{A}) = q = 1 - p$. Такая схема испытаний называется схемой Бернулли. Найдем вероятность $P_n(m)$ того, что событие A произойдет при n испытаниях m раз.

Пространство элементарных событий состоит из произведений n событий A или \bar{A} : $\omega_\alpha = A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \dots A_{\alpha_n}$, $A_{\alpha_i} = A \vee \bar{A}$, $i = \overline{1, n}$. Событие B , состоящее в том, что событие A произойдет при n испытаниях m раз, включает те ω_α , в которых A содержится m раз, их C_n^m . По формуле (34.7) $P(\omega_\alpha) = p^m q^{n-m}$, поэтому по (34.3)

$$P(B) = P_n(m) = \sum_{\omega_\alpha \subset B} P(\omega_\alpha) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Формула

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (34.10)$$

называется формулой Бернулли.

Пример: Найти вероятность того, что четырехзначный номер первого встречного автомобиля содержит две цифры 5.

◀ Так как $n = 4$ (число цифр в номере), $m = 2$, событие A — данная цифра номера 5, \bar{A} — не 5, $P(A) = 1/10$, $P(\bar{A}) = 9/10$, то $P_4(2) = C_4^2 (1/10)^2 (9/10)^2 = 6 \cdot 0,01 \cdot 0,81 = 0,0486$ ▶

При больших значениях n , m подсчет $P_n(m)$ проводится по приближенной формуле (локальная теорема Лапласа)

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Если n велико, а $p < 0,1$, $npq \leq q$, то применяют приближенную формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np. \quad (34.11)$$

Последнюю формулу называют законом редких событий.

Литература: [1. С. 17–63]; [2. С. 6–39]; [5. С. 510–528].

35. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Опорный конспект № 35

35.1. Дискретные и непрерывные СВ. Закон распределения

О: СВ $\xi \Leftrightarrow \xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $\xi \in \mathbf{R}$. Дискретная СВ $\Leftrightarrow \xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Непрерывная СВ $\Leftrightarrow \xi \in (a, b)$.

О: Ряд распределения СВ — таблица

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

$$\sum_i p_i = 1$$

О: Функция распределения СВ ξ : $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbf{R}$.

О: Плотность распределения непр. СВ $\Leftrightarrow \varphi(x)$: $F'(x) = \varphi(x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx$$

35.2. Числовые характеристики СВ

О: Математическое ожидание дискретной СВ

$$\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad P(\xi = x_i) = p_i \Leftrightarrow M(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Математическое ожидание непр. СВ ξ с плотностью веро-

ятности $\varphi(x) \Leftrightarrow M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx.$

Дисперсия СВ $\xi \Leftrightarrow D(\xi) = M((\xi - M(\xi))^2)$. Среднее квадратическое отклонение СВ $\xi \Leftrightarrow \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$

35.3. Примеры распределений дискретных и непрерывных СВ

О: Равномерное распределение дискретной СВ

$$\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow P(\xi = x_i) = 1/n, \quad i = \overline{1, n} \Rightarrow$$

$$M(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad D(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

O: Биномиальное распределение

СВ $\xi = (1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow P(\xi = i) = C_n^i p^i q^{n-i}$,

$i = \overline{1, n}$; p, q определены в разд. 34.5. $\Rightarrow M(\xi) = np, D(\xi) = npq$.

O: Распределение Пуассона СВ $\xi = (1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow P(\xi = i) = (\lambda^i / i!) e^{-\lambda}$, $\lambda = np$; p определено в разд. 34.5 $\Rightarrow M(\xi) = D(\xi) = \lambda$.

O: Равномерное распределение непрерывной СВ

$\xi \in [a, b] \Leftrightarrow \varphi(x) = c, c = \text{const}, x \in [a, b] \Rightarrow c = 1/(b - a)$,

$M(\xi) = (a + b)/2, D(\xi) = (b - a)^2/12$.

O: Нормальное распределение

СВ $\xi \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, +\infty)$,

$m = M(\xi), \sigma = \sqrt{D(\xi)}$

35.4. Многомерные СВ

O: Многомерная СВ $\zeta \Leftrightarrow \zeta = \zeta(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$, $\xi \in \mathbf{R}^n, \omega \in \Omega$.

O: Функция распределения вероятностей СВ $\zeta = (\xi, \eta) \Leftrightarrow F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$.

$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2$, $\varphi(x, y)$ — плотность вероятности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy = 1, \quad P(\zeta \in D) = \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

$$M(\zeta) = (M(\xi), M(\eta)), \quad M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x, y) dx dy,$$

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(x, y) dx dy.$$

O: СВ ξ, η независимы \Leftrightarrow плотность вероятности $\varphi(x, y)$ СВ $\zeta = (\xi, \eta)$: $\varphi(x, y) = \varphi_\xi(x) \varphi_\eta(y)$.

О: Распределение $\chi^2 \Leftrightarrow$ распределение СВ $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, если

$\xi_i, i = \overline{1, n}$, независимы и нормально распределены с параметрами $m = 0, \sigma = 1$. Для независимых СВ: $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$.

Для зависимых СВ: $R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta)}{\sigma(\xi) \cdot \sigma(\eta)}$ — коэффициент корреляции.

Т. (Ляпунова): СВ $\xi_i, i = \overline{1, n}$, независимы и нормально распределены с m, σ ; $\bar{\xi}_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{\xi}_n < x) = \Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

35.1. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения

Пусть с некоторым экспериментом связано пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$.

О: Случайной величиной (СВ) ξ называется функция $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}$.

Рассмотрим СВ двух видов: дискретные и непрерывные. Область возможных значений дискретной СВ состоит из конечного или счетного числа точек, а область возможных значений непрерывной СВ является некоторым интервалом.

Примеры: 1) Дискретная СВ ξ — число очков, выпавших при однократном бросании кости: $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2) Дискретная СВ — индикатор события A :

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A; \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

3) Непрерывная СВ — отклонение от номинала некоторого размера детали при правильно налаженном технологическом процессе.

О: Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими этим значениям вероятностями.

Для дискретной СВ закон распределения может быть задан в виде ряда распределения или в виде функции распределения, для непрерывной СВ — в виде функции распределения.

Обозначим $P(\xi = x_i)$ вероятность того, что ξ примет значение x_i .

О: Рядом распределения дискретной СВ ξ называется закон распределения, заданный в виде таблицы значений $\xi = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ и вероятностей $p_i = P(\xi = x_i)$;

$$\sum_i p_i = 1:$$

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Графическое изображение, представленное на рис. 35.1, называется многоугольником распределения.

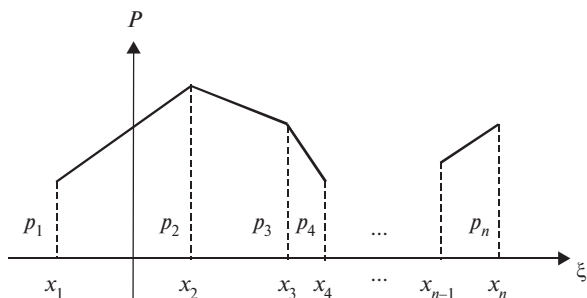


Рис. 35.1

Пример: Бросают игральную кость, $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p_i = 1/6$, $i = 1, 6$. Ряд распределения

ξ	1	2	...	6
P	1/6	1/6	...	1/6

О: Функцией распределения вероятностей СВ ξ называется $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbf{R}$, т.е. значение функции в т. x равно вероятности того, что СВ $\xi < x$.

Если для дискретной СВ $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ построен ряд распределения

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

то функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ \sum_{j=1}^i p_j, & x_i < x \leq x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$

ее график — ступенчатая функция (рис. 35.2).

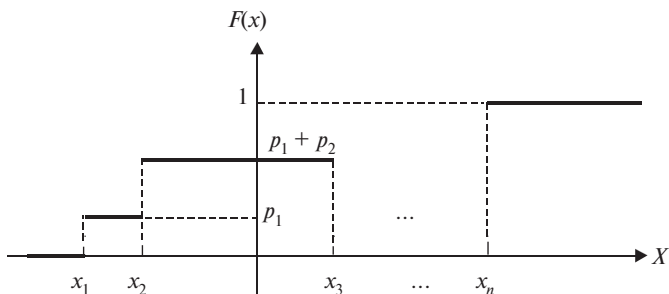


Рис. 35.2

Пример: Бросают игральную кость

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ i/6, & i < x \leq i+1, \quad i = \overline{1, 5}, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1⁰. $F(x)$ — неубывающая функция.
- 2⁰. $0 \leq F(x) \leq 1$.

□ Если $x' < x$, то из $\xi \in (-\infty, x')$ следует, что $\xi \in (-\infty, x)$, т. е. по (34.3) имеем $P(\xi < x) = P(\xi < x') + P(x' \leq \xi < x)$. Так как вероятность любого события ≥ 0 , $P(\xi < x) \geq P(\xi < x')$, т.е. $F(x') \leq F(x)$. Свойство 2⁰ следует из того, что $F(x)$ определяется как вероятность \square

График $F(x)$ непрерывной СВ имеет вид кривой, изображенной на рис. 35.3.

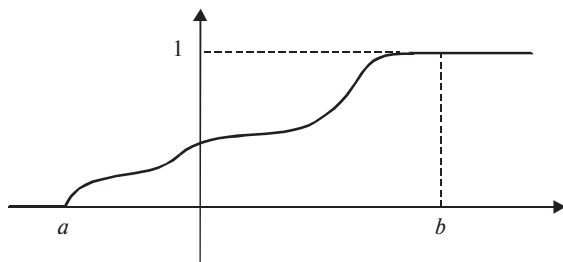


Рис. 35.3

Пусть для непрерывной СВ ξ ее функция распределения $F(x)$ имеет непрерывную производную $F'(x) = \varphi(x)$.

О: Плотностью распределения вероятностей (плотностью распределения) для функции распределения $F(x)$ непрерывной СВ ξ называется функция $\varphi(x)$ такая, что $F'(x) = \varphi(x)$.

Так как $F(x)$ неубывающая функция, то $\varphi'(x) \geq 0$.

На основании формулы Ньютона—Лейбница

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2). \quad (35.1)$$

Используя определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования (разд. 17.5) и формулу (35.1), функцию $F(x)$ можно записать через плотность распределения $\varphi(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

Формула справедлива и в случае конечного числа точек разрыва I рода функции $\varphi(x)$. Из достоверности события $\xi \in (-\infty, +\infty)$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

35.2. Числовые характеристики случайных величин

Для характеристики среднего значения СВ вводится математическое ожидание.

О: Математическим ожиданием дискретной СВ $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с законом распределения $P(\xi = x_i) = p_i$ называется

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (35.2)$$

Математическим ожиданием непрерывной СВ ξ с плотностью распределения $\varphi(x)$ называется

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx. \quad (35.3)$$

Математическое ожидание имеет следующие свойства:

1⁰. Математическое ожидание постоянной равно ей самой:

$$M(c) = c, \quad c = \text{const.}$$

$$\square \quad \xi = c, \quad p = 1 \Rightarrow M(\xi) = M(c) = c \cdot 1 = c \quad \square$$

2⁰. $M(k\xi) = kM(\xi)$, $k = \text{const.}$

$$\square \quad \text{Для дискретной СВ } M(k\xi) = \sum_{i=1}^n kx_i p_i = k \sum_{i=1}^n x_i p_i = kM(\xi). \text{ Для}$$

непрерывной СВ свойство следует из свойств определенного интеграла и определения несобственного интеграла \square

3⁰. $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$, где ξ, η — СВ.

Доказательство проводится аналогично свойству 2⁰.

Если задана дискретная СВ $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ с законом распределения $P(\xi = x_i) = p_i$, то математическое ожидание определяется как $M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ в случае абсолютной сходимости ряда.

В противном случае СВ не имеет математического ожидания.

Для характеристики степени разбросанности значений СВ ξ около ее среднего значения $M(\xi)$ вводится дисперсия.

О: Дисперсией СВ ξ называется

$$D(\xi) = M[(\xi - M(\xi))^2]. \quad (35.4)$$

Средним квадратическим отклонением СВ ξ называется

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}.$$

Используя (35.2) и (35.4), получаем для дискретной СВ $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ формулу $D(\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(\xi))^2 p_i$.

Для непрерывной СВ ξ с плотностью вероятности $\varphi(x)$ из (35.3), (35.4) имеем $D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^2 \varphi(x) dx$.

Используя свойства $M(\xi)$, запишем $D(\xi)$ в другом виде:

$$\begin{aligned} D(\xi) &= M(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + (M(\xi))^2) = \\ &= M(\xi^2) - 2M(\xi)M(\xi) + (M(\xi))^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \end{aligned} \quad (35.5)$$

Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам:

1⁰. $D(c) = 0$, $c = \text{const}$.

2⁰. $D(k\xi) = k^2 D(\xi)$, $k = \text{const}$.

Свойства следуют из формулы (35.6) и свойств 1⁰, 2⁰ математического ожидания.

Примеры:

1) Бросают игральную кость, $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow$

$$M(\xi) = 1 \cdot (1/6) + 2 \cdot (1/6) + \dots + 6 \cdot (1/6) = 3,5,$$

$$D(\xi) = (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)/6 - (3,5)^2 \approx 2,92,$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{2,92} \approx 1,71.$$

2) Вращающееся симметричное колесо останавливается вследствие трения. Угол θ , образованный некоторым фиксированным подвижным радиусом колеса с неподвижным радиусом после остановки колеса, — есть случайная величина с плотностью распределения

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq 0, \\ \frac{1}{2\pi}, & 0 < \theta \leq \pi, \\ 0, & \theta > \pi. \end{cases}$$

Тогда

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi,$$

$$D(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \pi)^2 \varphi(x) dx = \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{(x - \pi)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\sigma(\theta) = \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

35.3. Примеры распределений дискретных и непрерывных случайных величин

35.3.1. Примеры распределений дискретной СВ

О: Распределение дискретной СВ ξ называется равномерным, если оно задается рядом

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	$p_1 = 1/n$	$p_2 = 1/n$...	$p_n = 1/n$

Для равномерного распределения по (35.2), (35.6)

$$M(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad D(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Пример такого распределения приведен в разд. 35.1.

О: Распределение дискретной СВ называется биномиальным, если оно задается рядом

ξ	0	1	2	...	n
P	$p_1 = C_n^0 p^0 q^n$	$p_2 = C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$p_2 = C_n^2 p^2 q^{n-2}$...	$p_n = C_n^n p^n q^0$

где p и q имеют тот же смысл, что и для схемы испытаний Бернулли (разд. 34.5).

Для биномиального распределения СВ ξ математическое ожидание $M(\xi) = np$.

□ ξ можно рассматривать как $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где ξ_i ($i = \overline{1, n}$) — число появлений события A в i -м испытании, т.е. $\xi_i = \{0, 1\}$ с вероятностями p, q . Тогда $M(\xi_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ и $M(\xi) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n) = np$ ☒

Дисперсия $D(\xi)$ для биномиального распределения вычисляется по формуле $D(\xi) = npq$ [2. С. 463].

Пример: Бросают игральную кость 10 раз. Событие A — явление некоторой цифры, например 1, при каждом бросании, СВ ξ — число возможных наступлений A при десяти бросаниях кости. Тогда $\xi = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$, $p_i = P(\xi = i) = C_{10}^i (1/6)^i (5/6)^{10-i}$, $i = \overline{0, 10}$, $M(\xi) = 10/6 = 5/3$, $D(\xi) = (10/6) \cdot (5/6) = 25/18$.

О: Распределение дискретной СВ ξ называется распределением Пуассона, если оно задано рядом

ξ	0	1	2	3	...	n
P	$\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$	$\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

$\lambda = np$, n и p удовлетворяют тем же условиям, что в формуле Пуассона (34.11).

Для распределения Пуассона $M(\xi) = D(\xi) = \lambda$. Вывод в [2. С. 464].

35.3.2. Примеры распределений непрерывной СВ

О: Непрерывная СВ ξ , все возможные значения которой заполняют отрезок $[a, b]$, называется равномерно распределенной, если ее плотность вероятности $\varphi(x) = c$ на $[a, b]$, $c = \text{const}$.

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = c \int_a^b dx = c(b-a) = 1$, то $c = 1/(b-a)$, т.е. плот-

ность равномерного распределения

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

График плотности распределения изображен на рис. 35.4.

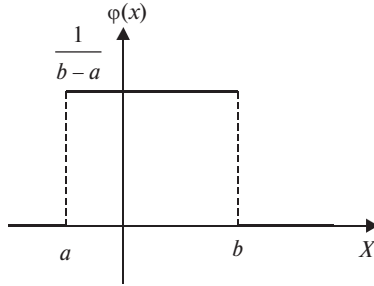


Рис. 35.4

Найдем $M(\xi)$ по (35.3):

$$M(\xi) = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсию $D(\xi)$ получим по (35.6), используя

$$M(\xi^2) = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

$$D(\xi) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность попадания СВ ξ на отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ находится по формуле (35.1):

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Пример: Непрерывная СВ ξ имеет равномерный закон распределения на $[1, 4]$. Определить: 1) вероятность попадания ξ в $[1, 2]$; 2) $M(\xi)$, $D(\xi)$.

◀ По условию плотность распределения

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1/3, & 1 \leq x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Отсюда

$$1) P(1 \leq \xi \leq 2) = \frac{1}{3} \int_1^2 dx = \frac{1}{3};$$

$$2) M(\xi) = (b + a)/2 = 2,5; D(\xi) = (b - a)^2/12 = 9/12 = 3/4 \blacktriangleright$$

О: Непрерывная СВ ξ называется нормально распределенной, если ее плотность распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$x \in (-\infty, +\infty)$, m, σ — некоторые постоянные.

Функция нормального распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Установим смысл параметров σ, m . Для этого найдем

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-m}{\sigma} = z, \quad x = \sigma z + m, \\ dx = \sigma dz \end{array} \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + m) e^{-z^2/2} \sigma dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} d\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю. Найдем второе, используя

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx =$$

$$= \left\{ \frac{x-m}{\sigma} = z \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = 1,$$

т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}.$

Таким образом, $M(\xi) = m$. Найдем

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \left\{ \frac{x-m}{\sigma} = z \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \left\{ \begin{array}{l} u = z, \quad du = dz, \\ dv = ze^{-z^2/2} dz, \quad v = -e^{-z^2/2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-ze^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sigma^2, \end{aligned}$$

следовательно, $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ — среднее квадратическое отклонение.

График плотности распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

(рис. 35.5) имеет максимум в т. $x = m$ (значение $x = m$, в котором плотность $\varphi(x)$ имеет максимум, называется *модой* СВ ξ).

Пусть необходимо найти вероятность того, что СВ ξ попадает в промежуток $[\alpha, \beta]$. По (35.1)

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq \xi \leq \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{x-m}{\sigma} = z \\ x \quad \left| \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \alpha-m & \beta-m \\ \hline \sigma & \sigma \end{array} \right. \\ z \quad \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha-m}{\sigma} & \frac{\beta-m}{\sigma} \end{array} \right. \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-z^2/2} dz. \end{aligned}$$

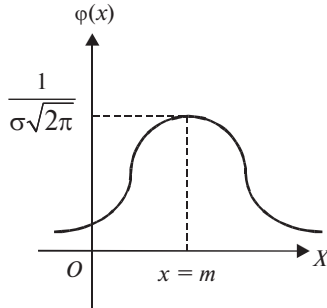


Рис. 35.5

Нечетная функция $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-u^2/2} du$ называется *функцией*

Лапласа. Имеются таблицы значений этой функции [10. С. 324]. Тогда

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \Phi((\beta - m)/\sigma) - \Phi((\alpha - m)/\sigma). \quad (35.6)$$

Пример: СВ ξ имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0$, $\sigma = 2$. Определить $P(-2 \leq \xi \leq 3)$.

◀ По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi((3 - 0)/2) = 0,43$, $\Phi((-2 - 0)/2) = -0,34$, т.е. по (35.6) $P(-2 \leq \xi \leq 3) = 0,43 + 0,34 = 0,77$ ▶

35.4. Многомерные случайные величины.

Понятие о случайных процессах

35.4.1. Понятие многомерной случайной величины.

Числовые характеристики

О: Многомерной (n -мерной) случайной величиной называется $\zeta = \zeta(\omega) = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, где $\zeta_i = \zeta_i(\omega)$, $\zeta \in \mathbf{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Случайные величины ζ_i называются компонентами ζ .

Например, положение центра тяжести самолета — трехмерная случайная величина $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Рассмотрим дискретные и непрерывные двумерные СВ.

Закон распределения дискретной двумерной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ может быть задан в виде таблицы распределения вероятностей:

$\eta \backslash \xi$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

$$p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j), \text{ причём } \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1.$$

Закон распределения дискретной и непрерывной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ можно задать в виде функции распределения.

Обозначим вероятность того, что $\zeta = (\xi, \eta)$ удовлетворяет неравенствам $\xi < x, \eta < y$ через $P(\xi < x, \eta < y)$.

О: Функцией распределения вероятностей СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ называется $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$.

Для непрерывной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ вводится понятие плотности распределения вероятностей.

О: Плотностью распределения вероятностей СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ с функцией распределения $F(x, y)$ называется непрерывная в \mathbf{R}^2 функция $\varphi(x, y)$ такая, что $\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Аналогично случаю одномерной СВ имеем формулы для вычисления вероятности того, что значения двумерной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ с плотностью распределения $\varphi(x, y)$ окажутся в области $D \subset \mathbf{R}^2$:

$$P(\zeta \in D) = \iint_D \varphi(x, y) dx dy,$$

и функции распределения СВ $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (35.7)$$

причем $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy = 1$.

Математическое ожидание двумерной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$: $M(\zeta) = (M(\xi), M(\eta))$, где

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x, y) dx dy, \quad M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(x, y) dx dy.$$

Точка $(M(\xi), M(\eta))$ называется центром рассеивания двумерной СВ ζ .

Дисперсия $D(\zeta) = (D(\xi), D(\eta))$, где $D(\xi)$, $D(\eta)$ определяются по формуле (35.4).

Рассмотрим нормальный закон распределения на плоскости.

О: Распределение непрерывной двумерной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ называется нормальным, если плотность распределения выражается формулой

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right], \quad (35.8)$$

$$\sigma_x, \sigma_y = \text{const}, (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Точка $O(0,0)$ — центр рассеивания СВ ζ ; σ_x, σ_y — главные средние квадратические отклонения.

График плотности $\varphi(x, y)$, определяемой (35.8), изображен на рис. 35.6.

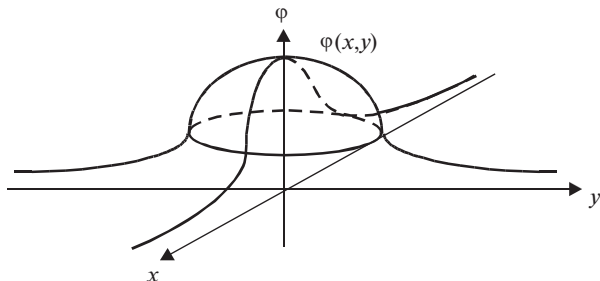


Рис. 35.6

35.4.2. Независимые СВ. Коэффициент корреляции

О: СВ ξ, η называются независимыми, если плотность распределения $\varphi(x, y)$ СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi(x, y) = \varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y), \quad (35.9)$$

где $\varphi_\xi(x), \varphi_\eta(y)$ — плотности распределений СВ ξ, η соответственно.

Для функции распределения $F(x, y)$ СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ при независимых ξ, η в силу (35.7), (35.9) получаем

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^y \varphi_\xi(t_1)\varphi_\eta(t_2)dt_2 = \int_{-\infty}^x \varphi_\xi(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^y \varphi_\eta(t_2)dt_2.$$

Таким образом,

$$F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y), \quad (35.10)$$

где $F_\xi(x), F_\eta(y)$ — функции распределения СВ ξ, η соответственно.

Для нормального распределения СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ с плотностью распределения (35.8) СВ ξ, η нормально распределены и независимы, так как справедливо равенство (35.9), в котором

$$\varphi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right], \quad \varphi_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right].$$

Определение независимых СВ распространяется и на n СВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Для таких СВ вводится важное с точки зрения практики χ^2 -распределение.

О: Распределением χ^2 с n степенями свободы называется распределение СВ $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, если СВ $\xi_i, i = \overline{1, n}$, независимы и распределены по одному и тому же нормальному закону с параметрами $m = 0, \sigma = 1$.

Плотность распределения χ^2 имеет вид

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ при } 0 \leq x < \infty, \quad \varphi_n(x) = 0 \text{ при } x < 0,$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция.

Определим математическое ожидание произведения СВ ξ, η формулой

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\varphi(x, y) dx dy. \quad (35.11)$$

Тогда для независимых СВ ξ, η в силу (35.3), (35.9) аналогично равенству (35.10) получаем

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta). \quad (35.12)$$

Эта формула имеет место и для дискретных независимых СВ, определяемых равенством (35.10).

Для зависимых СВ равенство (35.12), вообще говоря, неверно.

Отметим, что для любых СВ ξ, η по свойствам $2^0, 3^0$ математического ожидания $M(k\xi + r\eta) = kM(\xi) + rM(\eta)$; $k, r \in \mathbf{R}$. Аналогичное свойство для дисперсий имеет место только в случае независимых СВ ξ, η и записывается при учете свойства 2^0 в виде $D(k\xi + r\eta) = k^2D(\xi) + r^2D(\eta)$. Для зависимых СВ ξ, η справедливо следующее равенство:

$$D(k\xi + r\eta) = k^2D(\xi) + r^2D(\eta) + 2krM((\xi - m(\xi))(\eta - m(\eta))).$$

О: Мерой связи между СВ ξ, η называется коэффициент корреляции

$$R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi \cdot \eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}, \quad (35.13)$$

где $\sigma(\xi), \sigma(\eta)$ — средние квадратические отклонения СВ ξ, η соответственно.

Из равенства (35.11) следует, что $R(\xi, \eta) = 0$, если СВ ξ, η независимы. Обратное утверждение в общем случае неверно, но имеет место для нормально распределенных ξ, η .

Отметим без доказательства, что $|R(\xi, \eta)| \leq 1$. Если $|R(\xi, \eta)| = 1$, то между ξ, η имеется линейная зависимость.

Пример: Для СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ плотность распределения

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} a \sin(x + y), & x \in \bar{D}; \\ 0, & x \notin \bar{D}; \end{cases}$$

$D: 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$. Найти $R(\xi, \eta)$.

◀ Найдем a из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy = a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dx dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a \int_0^{\pi/2} dx \cdot \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} = a \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2.$$

Далее по (35.3), (35.5), (35.11) имеем:

$$M(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x(\sin x + \cos x) dx = \frac{\pi}{4},$$

$$M(\xi) = M(\eta) = \frac{\pi}{4},$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y) dx dy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 (\sin x + \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

$$D(\eta) = D(\xi) = \pi^2/16 + \pi/2 - 2,$$

$$M(\xi \cdot \eta) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \sin(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} y \sin(x+y) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left(\frac{\pi}{2} \sin x + \cos x - \sin x \right) dx = \frac{\pi}{4} - 1.$$

Подставляя найденные числа в (35.12), окончательно получаем

$$R(\xi_1, \xi_2) = (8\pi - 16 - \pi^2)/(\pi^2 + 8\pi - 32) \approx -0,2454 \blacktriangleright$$

35.4.3. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

Пусть имеется n попарно независимых СВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, дисперсии которых ограничены одной и той же постоянной C . Обо-

значим $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$.

Сформулируем теорему Чебышева, которую называют законом больших чисел.

Т.: Если для независимых СВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ дисперсии $D(\xi_i) \leq C$, $i = \overline{1, n}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\overline{\xi_n} - M(\overline{\xi_n})\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Доказательство см. в [1. С. 104]. Сущность теоремы Чебышева заключается в том, что хотя каждая из независимых СВ ξ_i , $i = \overline{1, n}$, может принять значение, далекое от $M(\xi_i)$, среднее арифметическое $\overline{\xi_n}$ при достаточно большом n с большой вероятностью будет весьма близко к $M(\overline{\xi_n})$. Практическое значение этого факта заключается в том, что можно принять в качестве искомого значения некоторой измеряемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений.

Простейшей формой закона больших чисел является утверждение в теореме Бернулли.

Т.: Пусть m — число наступлений события A в n независимых испытаниях, $p = p(A)$ — вероятность наступления A в каждом

из испытаний. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$

Доказательство см. в [1. С. 109].

Большое значение для практики имеет также теорема Ляпунова, которую называют центральной предельной теоремой. Приведем ее в упрощенном виде.

Т.: Если независимые СВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 , то при неограниченном увеличении n закон рас-

пределения нормированной СВ $\overline{\xi_n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\sigma\sqrt{n}}$

($M(\overline{\xi_n}) = 0$, $D(\overline{\xi_n}) = 1$) как угодно мало отличается от нор-

мального: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{\xi_n} < x) = \Phi(x).$

Общая теорема Ляпунова обобщает данный вывод на случай различных распределений независимых СВ $\xi_i, i = \overline{1, n}$, если роль каждой из них в образовании нормированной СВ $\overline{\xi}_n$ мала.

Доказательство теорем содержится в [2. С. 245–252].

35.4.4. Случайные процессы. Марковские цепи

Более общим, чем понятие многомерной СВ, является понятие случайного процесса.

О: Случайным процессом называется случайная функция $\xi(t)$ от действительного параметра $t, t \in \theta$, при фиксированном $\omega \in \Omega$, т.е. $\xi(t) = \xi(t, \omega)$.

В приложениях часто t является временем, например, процессами являются скорость снаряда через время t после выстрела, число бактерий в популяции в момент времени t , давление в камере сгорания теплового двигателя.

Если множество θ конечно, то определение процесса равносильно определению многомерной случайной величины.

О: Случайный процесс $\xi(t), t \in \theta$, называется случайным процессом с дискретным временем или случайной последовательностью, если θ конечно или счетно: $\theta = \{t_n\}$.

Для процесса с дискретным временем обозначим $\xi_1 = \xi(t_1), \xi_2 = \xi(t_2), \dots, \xi_n = \xi(t_n)$ и $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$ — функция распределения n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

О: Случайная последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называется марковской, если $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2/x_1) \dots F_n(x_n/x_{n-1})$, где $F_i(x_i/x_{i-1})$ — функции распределения СВ ξ_i при условии, что СВ ξ_{i-1} приняла определенное числовое значение.

Из определения следует, что распределение каждого следующего члена последовательности зависит лишь от того, какое значение принял предыдущий член.

Если члены марковской последовательности ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$) являются дискретными СВ, имеющими конечное число возможных

значений, то такую последовательность называют цепью Маркова или простой цепью.

Например, испытания Бернулли есть частный случай цепи Маркова.

Более подробно о случайных процессах см. в [2. С. 254 – 280].

Литература: [1. С. 64–185]; [2. С. 86–280]; [5. С. 531–570].

36. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Опорный конспект № 36

36.1. Основные понятия математической статистики

О: Выборка (x_1, x_2, \dots, x_n) — совокупность значений СВ ξ , полученных в результате n независимых экспериментов.

О: Статистический ряд:

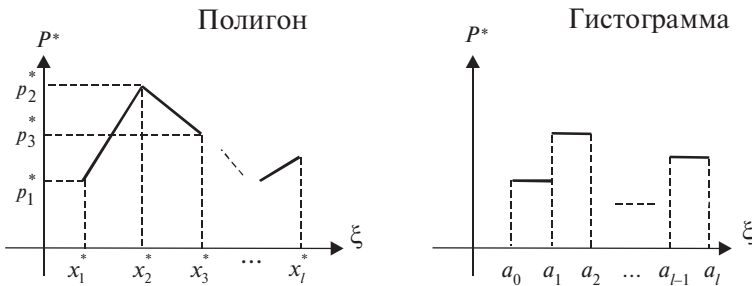
ξ	x_1^*	x_2^*	...	x_l^*
P^*	p_1^*	p_2^*	...	p_l^*

$x_i^* \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_{i-1}^* < x_i^*$, $i = \overline{1, l}$,
 $p_i^* = m_i/n$ — относительная частота,
 m_i — частота появления x_i^* .

О: Статистический ряд по интервалам

ξ	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{l-1}, a_l)
P^*	p_1^*	p_2^*	...	p_l^*

m_i – число значений СВ ξ , попавших в (a_{i-1}, a_i) . Графическое изображение:



О: Эмпирическая функция распределения:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_0; \\ 1, & x > a_n; \\ \sum_{i=1}^k p_i^*, & a_{k-1} < x \leq a_k, \quad k = \overline{1, l}. \end{cases}$$

36.2. Определение неизвестных параметров распределения

О: Среднее арифметическое M^* , дисперсия D^* выборки:

$$M^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M^*)^2;$$

статист. ряда:

$$M^* = \sum_{i=1}^n x_i p_i^*, \quad D^* = \sum_{i=1}^l (x_i - M^*)^2 p_i^*;$$

$M(\xi)$, $D(\xi)$ — числовые характеристики СВ ξ с выборкой $(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow M(\xi) \approx M^*$, $D(\xi) \approx D^*$.

О: Доверительный интервал $(\Theta^* - \Delta, \Theta^* + \Delta) \Leftrightarrow P(|\Theta - \Theta^*| \leq \Delta) = \gamma$, Δ — точность оценки Θ^* параметра Θ в функции распределения $F(x, \Theta)$ СВ ξ ; γ — коэффициент доверия.

Для нормального распределения с параметрами m , σ при $m \approx M^* \Rightarrow P(m^* - \Delta \leq m \leq m^* + \Delta) = 2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma)$. Для двумерной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ с выборкой $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ выборочный коэффициент корреляции

$$R^*(\xi, \eta) = \frac{M^*(\xi \cdot \eta) - M^*(\xi) \cdot M^*(\eta)}{\sqrt{D^*(\xi) \cdot D^*(\eta)}},$$

$$M^*(\xi \cdot \eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

36.3. Проверка статистических гипотез

Выдвинуты гипотезы о параметрах распределения:

$H_0: M(\xi) = M(\eta); H_1: M(\xi) > M(\eta)$, где ξ, η — нормальные генеральные совокупности, выборки из них объемами n и l имеют выборочные средние m_ξ^*, m_η^* , дисперсии $D^*(\xi), D^*(\eta)$, $n \geq 30, l \geq 30$. В качестве критерия выбирается $Z = \left| m_\xi^* - m_\eta^* \right| / \sqrt{(D^*(\xi)/n + (D^*(\eta)/l))}$, строится правосторонняя критическая область $P(Z > Z_{\text{кр.пр}}) = \alpha$, α — уровень значимости (малая вероятность ошибочно отвергнуть H_0), $Z_{\text{кр.пр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)$.

При вычисленном по выборкам $Z_{\text{набл}} > Z_{\text{кр.пр}}$ гипотеза H_0 отвергается, и принимается H_1 .

Выдвинута гипотеза H_0 о функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ СВ ξ при выборке (x_1, x_2, \dots, x_n) и построенном статистическом ряде по интервалам (a_{i-1}, a_i) , $i = \overline{1, l} \Rightarrow$ мера расхождения между m_i и np_i (p_i — теоретические вероятности):

$$\chi^{*2} = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Т. (Пирсона): $P(\chi^{*2} < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^x \varphi_k(x) dx,$

где $\varphi_k(x)$ — плотность распределения χ^2 с $k = l - 1$ степенями свободы.

Критерий согласия Пирсона: 1) выбирается уровень значимости α , равный вероятности того, что H_0 будет ошибочно отвергнута;

2) из уравнения $P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} \varphi_k(x) dx = \alpha$

определяется χ_α^2 — предел значимости (для определения χ_α^2 пользуются таблицей);

3) при $\chi^{*2} > \chi_{\alpha}^2$ гипотеза H_0 отвергается, при $\chi^{*2} \leq \chi_{\alpha}^2$ опытные данные совместимы с гипотезой H_0 .

36.1. Основные понятия математической статистики. Построение эмпирического закона распределения

Математическая статистика — наука о методах обработки экспериментальных данных, полученных при изучении закономерностей в случайных массовых явлениях. Способ статистической обработки, равно как и ценность ее результатов, полностью зависит от положенной в основу вероятностной модели, которая должна объяснить вероятностную структуру наблюдений.

Пусть произведено n независимых экспериментов и получено n значений x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины ξ .

О: Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений случайной величины ξ . Выборкой объемом n : (x_1, x_2, \dots, x_n) называется совокупность значений ξ , полученных в результате n независимых экспериментов.

По исследованию выборки необходимо сделать правильный вывод о СВ ξ . Например, по толщине покрытия 100 деталей из серии необходимо сделать вывод о качестве покрытия деталей. В этом случае классическую вероятность заменяют статистической.

О: Статистическим рядом называется таблица, в которой записываются упорядоченные по возрастанию различные элементы выборки $x_i^* \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, l}$, и относительные частоты $p_i^* = m_i/n$ (m_i — частота появления x_i^*):

ξ	x_1^*	x_2^*	...	x_l^*
P	p_1^*	p_2^*	...	p_l^*

$$\sum_{i=1}^l p_i^* = 1. \quad (36.1)$$

Наблюдаемые различные x_i^* называются также вариантами, а их последовательность, записанная в порядке возрастания: $x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^*$ — вариационным рядом.

Пример 1. Исследователь, интересующийся тарифным разрядом рабочих механического цеха, в результате опроса 10 рабочих получил следующие сведения: 5,1,4,5,4,3,5,5,2,6. Построить статистический ряд.

◀ Случайная величина ξ — тарифный разряд, полученные от него сведения образуют выборку объемом 10 из генеральной совокупности. Получаем статистический ряд:

ξ	1	2	3	4	5	6
m_i	1	1	2	4	1	4
p_i^*	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

Следует отметить, что свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства генеральной совокупности, такую выборку называют репрезентативной (представительной).

При большом числе измерений анализ такого материала затруднителен. Поэтому поступают следующим образом.

Составляется статистический ряд по интервалам, или вариационный ряд. Весь интервал полученных значений величины ξ разбивается на интервалы (a_0, a_1) , (a_1, a_2) , ..., (a_{l-1}, a_l) , подсчитываются относительные частоты $p_i^* = m_i/n$, где m_i — число значений величины ξ , попавших в (a_{i-1}, a_i) , и строится таблица:

Номер интервала	1	2	...	l
Интервалы для ξ	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{l-1}, a_l)
Относительные частоты	p_1^*	p_2^*	...	p_l^*

Графическими изображениями статистических рядов являются полигон и гистограмма.

Полигон строят из отрезков, соединяющих точки (x_i^*, p_i^*) , $i = \overline{1, l}$, где в случае ряда по интервалам x_i^* — срединное значение интервала (a_{i-1}, a_i) (рис.36.1).

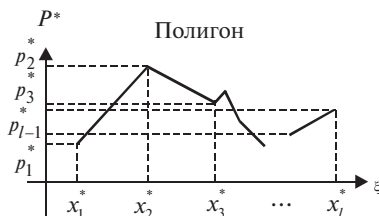


Рис. 36.1

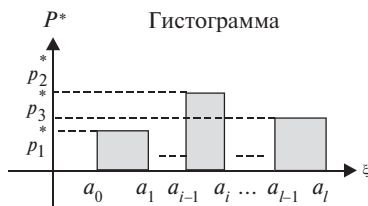


Рис. 36.2

Гистограмма служит для изображения интервального статистического ряда (36.2). По оси ξ откладывают интервалы (a_{i-1}, a_i) , $i = \overline{1, l}$, варьирования СВ ξ и на этих отрезках строят прямоугольники с высотами p_i^* (рис. 36.2).

О: Эмпирической функцией распределения СВ ξ , для которой составлен статистический ряд (36.2), называется

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_0; \\ \sum_{i=1}^k p_i^*, & a_{k-1} < x \leq a_k, \quad k = \overline{1, l}; \\ 1, & x > a_l. \end{cases}$$

При малых $\Delta x_i = a_i - a_{i-1}$, $i = \overline{1, l}$, и больших n функция $F^*(x)$ близка к теоретической функции распределения $F(x)$ [4. С. 102].

Пример 2: Толщина покрытия стального шарика в гальваническом производстве — случайная величина ξ . Из партии отобрали случайным образом 20 шариков и измерили толщину покрытия x в микрометрах: 5,00; 6,30; 7,05; 5,30; 7,85; 7,25; 6,48; 6,98; 6,12; 6,55; 6,88; 7,99; 5,56; 6,66; 6,76; 5,88; 6,76; 5,88; 6,37; 7,42.

Построить статистический ряд по интервалам, гистограмму и график $F^*(x)$.

◀ Определяем $\min_i \{x_i\} = 5$, $\max_i \{x_i\} = 8$, т.е. все значения выборки $\in [5, 8]$.

Разобьем этот интервал на 6 частей с $\Delta x = (8 - 5)/6 = 0,5$ и построим статистический ряд.

Номер интервала	1	2	3	4	5	6
Интервал	(5,0;5,50)	(5,50;6,0)	(6,0;6,50)	(6,50;7,0)	(7,0;7,50)	(7,50;8,0)
Относит. частота P^*	2/20	3/20	4/20	6/20	3/20	2/20

Гистограмма статистического ряда представлена на рис. 36.3. График эмпирической функции распределения изображен на рис. 36.4 ►

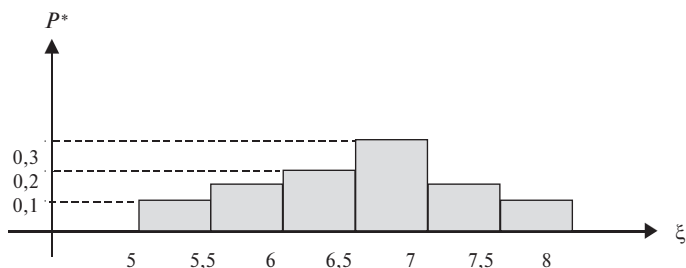


Рис. 36.3

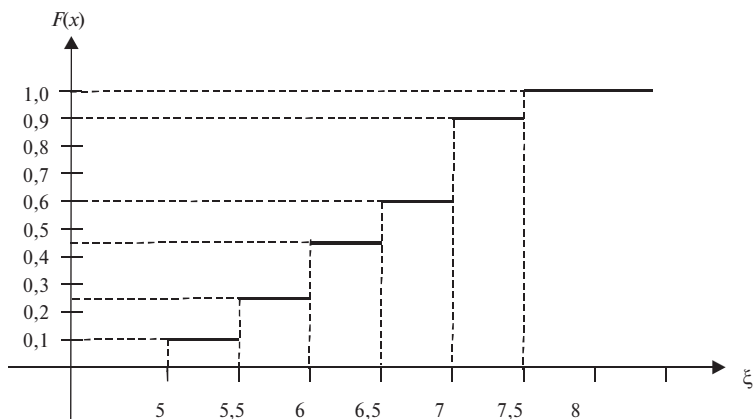


Рис. 36.4

36.2. Определение неизвестных параметров распределения и выборочного коэффициента корреляции

36.2.1. Выборочные числовые характеристики.

Оценки параметров

Для выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) СВ ξ и для статистического ряда определяются следующие числовые характеристики.

О: Средним арифметическим выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) называется

$M^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, средним арифметическим статистического

ряда (36.1): $M^* = \sum_{i=1}^l x_i^* p_i^*$. Дисперсией выборки

(x_1, x_2, \dots, x_n) называется $D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l (x_i - M^*)^2$, дисперсией

статистического ряда (36.1) — $D^* = \sum_{i=1}^l (x_i^* - M^*)^2 p_i^*$. Сред-

ним квадратическим отклонением называется $\sigma^* = \sqrt{D^*}$.

Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(\xi, \theta)$, где θ — неизвестный параметр распределения, т.е. неизвестная числовая характеристика СВ ξ . Например, ξ имеет нормальное распределение с неизвестным параметром $m = M(\xi)$. Рассмотрим k выборок $X_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$, $j = \overline{1, k}$, этой СВ ξ . Обозначим через θ^* оценку величины θ , ее можно представить как случайную величину, зависящую от X_j , $j = \overline{1, k}$, т.е. $\theta^* = \psi(X_1, X_2, \dots, X_k)$. Чтобы выбрать в некотором смысле лучшую оценку θ^* , рассматриваются свойства оценок: несмещенность, состоятельность, эффективность.

О: Оценка θ^* параметра θ называется несмещенной, если ее математическое ожидание $M(\theta^*) = \theta$, состоятельной, если θ^* по вероятности сходится к θ при $k \rightarrow \infty$, т.е. $P(|\theta^* - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Несмещенная оценка θ^* называется

эффективной, если ее дисперсия $D(\theta^*)$ — наименьшая среди всех дисперсий, вычисляемых для оценок θ^* по выборкам одинакового объема.

Т: Среднее арифметическое M^* выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) случайной величины ξ , имеющей математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсию $D(\xi)$, является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания. В случае нормального распределения СВ ξ эта оценка является эффективной.

Доказательство в [7. С. 505].

В качестве оценки математического ожидания генеральной совокупности ξ берется среднее арифметическое M^* выборки. Выборочная дисперсия D^* является смещенной состоятельной оценкой дисперсии, поэтому в качестве несмещенной состоятельной оценки дисперсии генеральной совокупности используется исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^*$$

(n — объем выборки), S — исправленное среднее квадратическое отклонение. Если объем выборки достаточно большой ($n \geq 30$), то

$\frac{n}{n-1} \approx 1$, и в качестве оценки генеральной дисперсии берется D^* .

Пример 3: Найти параметры распределения случайной величины ξ в примере 2 разд. 36.1, если ξ имеет нормальный закон распределения.

◀ Плотность вероятности для нормального закона распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right],$$

неизвестные параметры — $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$, $m = M(\xi)$. Так как

$$M^*(\xi) = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{131,04}{20} = 6,552 \text{ (мкм)},$$

$$D^*(\xi) = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x_i - M^*)^2 = 0,589 \text{ (мкм}^2\text{)}, \quad S^2 = 0,62,$$

то $m \approx M^* = 6,552$, $\sigma \approx S = 0,787$ ▶

36.2.2. Доверительные интервалы параметров

Рассмотренные в п. 36.2.1 оценки параметров являются точечными. При малом объеме выборки, чтобы избежать грубых ошибок, вводят интервальную оценку. Обозначим точность оценки θ^* параметра θ через Δ , т.е. $|\theta - \theta^*| \leq \Delta$, а через γ — вероятность $P(|\theta - \theta^*| \leq \Delta)$, т.е. $P(\theta^* - \Delta \leq \theta \leq \theta^* + \Delta) = \gamma$. Последнее условие означает, что интервал $(\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta)$ покрывает значение θ с заданной вероятностью γ . Он называется доверительным интервалом, γ — коэффициентом доверия. На практике γ выбирают достаточно близким к 1.

Величины γ , Δ и объем выборки связаны между собой. Если определены две из них, то можно найти третью.

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами m , σ .

В качестве оценки m возьмем $m^* = M^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Все элементы $x_i, i = \overline{1, n}$, выборки случайные и имеют то же распределение, что

и ξ с параметрами $m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Тогда по (35.7) в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(x)$

$$\begin{aligned} P(m^* - \Delta \leq m \leq m^* + \Delta) &= \Phi\left(\frac{m^* + \Delta - m^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{m^* - \Delta - m^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Обозначим $u_\gamma = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}$, тогда

$$P\left(m^* - \frac{u_\gamma\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq m^* + \frac{u_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(u_\gamma).$$

Если γ задано, то u_γ находится по таблице функции Лапласа.

Интервал $\left(m^* - \frac{u_\gamma\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq m^* + \frac{u_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ с вероятностью γ покрывает значение m и является доверительным для m . При этом предпо-

лагается, что σ известно. Если σ заменить приближенным значением $\sigma \approx \sqrt{D^*}$, то коэффициент доверия γ уменьшится.

Пример 4: Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания m , если объем выборки $n = 49$, $\gamma = 0,95$.

◀ Имеем $2\Phi(u_\gamma) = 0,95$, $\Phi(u_\gamma) = 0,475$. По таблице функции

$$\text{Лапласа } u_\gamma = 1,96, \quad \Delta = \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{49}} = \frac{3,92}{7} = 0,56.$$

Доверительный интервал запишется в виде $(m^* - 0,56, m^* + 0,56)$ ▶

При неизвестном σ при определении доверительного интервала для математического ожидания m применяется случайная величина

$$T = \frac{m^* - m}{S/\sqrt{n}},$$

где n — объем выборки, m^* — выборочное среднее (среднее арифметическое выборки), S — исправленное среднее квадратическое отклонение. Случайная величина T имеет распределение, не зависящее от m и σ , которое называется распределением Стьюдента. Плотность вероятности распределения Стьюдента дается формулой

$$S(t, n) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1} \right)^{-\frac{n}{2}},$$

где коэффициент B_n зависит от объема выборки:

$$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \text{ Потребуем, чтобы с заданным коэффициентом доверия (надежностью) } \gamma \text{ выполнялось неравенство}$$

ентом доверия (надежностью) γ выполнялось неравенство

$$P(|T| < t_\gamma) = \gamma.$$

Пользуясь четностью функции $S(t, n)$, получаем из (35.1), что

$$P\left(m^* - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < m < m^* + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} S(t, n) dt = \gamma.$$

Таким образом, с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(m^* - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}, m^* + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный

параметр m , точность оценки $\Delta = \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$.

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ содержится в [1. С. 464].

Следует отметить, что при $n \geq 30$ распределения Стьюдента практически не отличается от нормированного распределения ($m = 0, \sigma = 1$), так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Пример 5: Найти доверительный интервал для m в примере 2 разд. 36.1 с коэффициентом доверия 0,95, используя полученные в примере 3 разд. 36.2 оценки параметров.

◀ По таблице значений t_γ при $\gamma = 0,95$ и $n = 20$ определяем $t_\gamma = 2,09$, т.е. $\Delta = \frac{2,09 \cdot 0,787}{\sqrt{20}} = 0,37$, доверительный интервал для m : (6,18; 6,92).

Проведем вычисления, используя доверительный интервал при известном σ , заменив σ на $S = 0,787$. По таблице функции Лапласа $u_\gamma = 1,96$, $\Delta = \frac{2,09 \cdot 0,787}{\sqrt{20}} = 0,35$, доверительный интервал для m : (6,2; 6,9), т.е. интервал уменьшился, хотя и не очень значительно ▶

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ с коэффициентом доверия γ имеет вид $(S - Sq_\gamma, S + Sq_\gamma)$, где значение $q_\gamma = q(\gamma, n)$ находится из таблицы [1. С. 464].

Пример 6: Найти доверительный интервал для среднего квадратического отклонения в примере 2 разд. 36.1 с коэффи-

циентом доверия $\gamma = 0,95$, используя полученное исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 0,787$.

◀ По таблице значений $q(\gamma, n)$ находим при $n = 20$ $q_\gamma = 0,37$, поэтому доверительный интервал для σ : $(0,5; 0,814)$ ▶

36.2.3. Выборочный коэффициент корреляции

Пусть проведено n независимых испытаний, в результате которых получены выборочные значения двумерной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$: $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$.

Аналогично случаю одномерной СВ ξ определяются выборочные числовые характеристики:

$$M^*(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad M^*(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$D^*(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M^*(\xi))^2, \quad D^*(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - M^*(\eta))^2,$$

$$M^*(\xi \cdot \eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

О: Выборочным коэффициентом корреляции СВ $\zeta(\xi, \eta)$ назы-

вается
$$R^*(\xi, \eta) = \frac{M^*(\xi \cdot \eta) - M^*(\xi) \cdot M^*(\eta)}{\sqrt{D^*(\xi) \cdot D^*(\eta)}}.$$

При построении доверительного интервала для коэффициента корреляции генеральной совокупности $R(\xi, \eta)$ по формуле

$$\delta_R = \frac{1 - (R^*(\xi, \eta))^2}{\sqrt{n}}$$

определяется так называемая погрешность выборочного коэффициента $R^*(\xi, \eta)$. Тогда интервал $(R^* - u_\gamma \delta_R, R^* + u_\gamma \delta_R)$ с вероятностью γ покрывает коэффициент корреляции $R(\xi, \eta)$, u_γ находится по таблице значений функции Лапласа в зависимости от γ .

Если $|R^*(\xi, \eta)| \sqrt{n-1} \geq 3$, то связь между СВ ξ, η достаточно вероятна, т.е. ξ, η находятся в корреляционной зависимости.

На практике часто используется связь между изменениями значений одной случайной величины и изменениями математического ожидания другой.

О: Условным математическим ожиданием дискретной СВ ξ при $\eta = y$ называется

$$M_y(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i | \eta = y),$$

где $P(\xi = x_i | \eta = y)$ — условная вероятность равенства $\xi = x_i$ при $\eta = y$. Функция $M_y(\xi) = f(y)$ называется функцией регрессии СВ ξ на η , а уравнение $x = f(y)$ определяет линию на плоскости, называемую линией регрессии ξ на η . Линия регрессии ξ на η показывает, как в среднем зависит ξ от η .

Аналогично определяется условное математическое ожидание

$$M_x(\eta) = \sum_{i=1}^n y_i P(\eta = y_i | \xi = x)$$
 и линия регрессии η на ξ с уравнени-

ем $y = g(x)$.

Если $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ — выборочные значения двумерной СВ (ξ, η) , то формулы для $M_y(\xi)$, $M_x(\eta)$ дают условные выборочные средние M_y^* , M_x^* , а $M_y^* = f^*(y)$, $M_x^* = g^*(x)$ определяют выборочные уравнения регрессии $x = f^*(y)$, $y = g^*(x)$.

О: Корреляционная зависимость между СВ ξ и η называется линейной корреляцией, если функции регрессии ξ на η и η на ξ являются линейными. Обе линии регрессии являются прямыми и называются прямыми регрессии.

Линейные уравнения регрессий запишем для выборочных значений СВ (ξ, η) и вычисленных для них числовых характеристик [1. С. 268]. Линейное уравнение регрессии СВ ξ на η имеет вид

$$x - M^*(\xi) = R^*(\xi, \eta) \frac{\sigma^*(\xi)}{\sigma^*(\eta)} (y - M^*(\eta)).$$

Линейное уравнение регрессии СВ η на ξ :

$$y - M^*(\eta) = R^*(\xi, \eta) \frac{\sigma^*(\eta)}{\sigma^*(\xi)} (x - M^*(\xi)).$$

Пример 7: Дана выборка СВ $\zeta = (\xi, \eta)$: (2,2), (4,5), (6,7), (8,10).

Найти $R^*(\xi, \eta)$, прямые регрессии.

$$\blacktriangleleft M^*(\xi) = (2 + 4 + 6 + 8)/4 = 5,$$

$$M^*(\eta) = (2 + 5 + 7 + 10)/4 = 6,$$

$$D^*(\xi) = (9 + 1 + 1 + 9)/4 = 5,$$

$$D^*(\eta) = (16 + 1 + 1 + 16)/4 = 6,5,$$

$$M^*(\xi \cdot \eta) = (4 + 20 + 42 + 80)/4 = 36,5,$$

$$R^*(\xi \cdot \eta) = \frac{6,5}{\sqrt{5 \cdot 8,5}} = 0,997.$$

Коэффициент корреляции близок к 1, т.е. зависимость между ξ , η близка к линейной.

Прямые регрессии имеют уравнения

$$x - 5 = 0,997 \sqrt{\frac{5}{6,5}} (y - 6,5) \Leftrightarrow x = 0,9y - 1,5,$$

$$y - 6,5 = 0,997 \sqrt{\frac{6,5}{5}} (x - 5) \Leftrightarrow y = 1,1x + 1,5,$$

т.е. почти совпадают ►

36.3. Проверка статистических гипотез

О: Статистической гипотезой называется высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Статистические гипотезы классифицируются на гипотезы о законах распределения и гипотезы о параметрах распределения.

36.3.1. Гипотеза о параметрах распределения

Пусть закон распределения генеральной совокупности ξ известен, а параметры распределения неизвестны.

О: Подлежащая проверке гипотеза о параметрах распределения называется основной, или нулевой (обозначается H_0).

Одновременно выдвигается конкурирующая, или альтернативная гипотеза H_1 . Например, при неизвестном математическом ожидании гипотеза H_0 : $M(\xi) = m$, гипотеза H_1 : $M(\xi) \neq m$ или $M(\xi) > m$ ($M(\xi) < m$).

Проверка гипотезы проводится статистическими методами.

О: Случайная величина с известным распределением, служащая для проверки статистической гипотезы, называется статистическим критерием. Уровнем значимости критерия K называется число α , равное вероятности того, что гипотеза H_0 будет ошибочно отвергнута. Подмножество значений K , при которых гипотеза H_0 принимается, называется областью принятия гипотезы; подмножество значений K , при которых H_0 отвергается и принимается H_1 , называется критической областью.

Проверка статистической гипотезы состоит из следующих этапов:

- 1) определение гипотез H_0 и H_1 ;
 - 2) выбор критерия K и задание уровня значимости α ;
 - 3) определение по таблицам критической точки $K_{кр}$ и критической области;
 - 4) вычисление по выборке значения $K_{набл}$;
 - 5) сравнение значений $K_{кр}$ и $K_{набл}$;
 - 6) принятие решения о правильности гипотезы H_0 или H_1 .
- Рассмотрим практические задачи.

На практике часто требуется сравнить точность измерения различными приборами или методами.

Задача о сравнении неизвестных математических ожиданий

Из двух нормальных генеральных совокупностей ξ и η с известными дисперсиями $D(\xi)$ и $D(\eta)$ извлечены две независимые выборки объемами n и l соответственно и найдены выборочные средние m_ξ^* и m_η^* . Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу $H_0: M(\xi) = M(\eta)$ для неизвестных математических ожиданий генеральных совокупностей ξ и η . Уровень значимости α является малой вероятностью ($\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$), что гипотеза H_0 будет ошибочно отвергнута. В случае справедливости гипотезы H_0 различия между m_ξ^* и m_η^* будут несущественными. В качестве критерия K выбирается нормированная СВ $Z(M(Z) = 0, \sigma(Z) = 1)$:

$$Z = \frac{|m_\xi^* - m_\eta^*|}{\sqrt{D(\xi)/n + D(\eta)/l}}.$$

1) Пусть гипотеза $H_1: M(\xi) \neq M(\eta)$, тогда определяется $Z_{кр}$ — критическая точка, отделяющая критическую область (область

значений Z , при которых гипотеза H_0 отвергается) от области принятия гипотезы H_0 :

$$Z_{\text{кр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right), \quad P(|Z| > Z_{\text{кр}}) = \alpha.$$

По данным выборок находится $Z_{\text{набл}}$.

При $Z_{\text{набл}} \in (-Z_{\text{кр}}, Z_{\text{кр}})$ гипотеза H_0 принимается.

2) Пусть гипотеза $H_1: M(\xi) > M(\eta)$. Тогда строится правосторонняя критическая область $P(Z > Z_{\text{кр.пр}}) = \alpha$, где

$$Z_{\text{кр.пр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right).$$

(Аналогично может быть построена левосторонняя критическая область).

Если дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ неизвестны, то при $n \geq 30$, $m \geq 30$ их заменяют выборочными дисперсиями $D^*(\xi)$, $D^*(\eta)$.

Пример 8: С целью сравнения эффективности двух различных технологий из двух партий продукции образованы две независимые выборки объемами $n = 45$, $l = 50$. Расходы сырья в обоих случаях представляют собой нормально распределенные величины ξ и η . Найдены расходы сырья на единицу продукции по одной технологии $m_{\xi}^* = 3000$, а по другой — $m_{\eta}^* = 295$ при выборочных дисперсиях $D^*(\xi) = 10$, $D^*(\eta) = 15$. Проверить при $\alpha = 0,05$ гипотезу $H_0: M(\xi) = M(\eta)$, если $H_1: M(\xi) \neq M(\eta)$.

◀ Находим критическую точку по таблице $\Phi(x)$:

$$Z_{\text{кр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-0,05}{2}\right) = 1,96,$$

затем определяем

$$Z_{\text{набл}} = \frac{300 - 295}{\sqrt{\frac{10}{45} + \frac{15}{50}}} = \frac{5}{\sqrt{0,52}} \approx 7.$$

Так как $Z_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается, и принимается гипотеза H_1 ▶

Если объемы выборок m , l малы, то для сравнения математических ожиданий $M(\xi)$, $M(\eta)$ используется СВ T , имеющая распределение Стьюдента:

$$T = \frac{m_{\xi}^* - m_{\eta}^*}{\sqrt{(n-1)S_{\xi}^2 + (l-1)S_{\eta}^2}} \sqrt{\frac{nl(n+l-1)}{n+l}}$$

с $k = n + l - 2$ степенями свободы.

Задача о сравнении двух дисперсий

Для нормальных генеральных совокупностей ξ и η по выборкам объемами n и l найдены исправленные выборочные дисперсии S_{ξ}^2 и S_{η}^2 . Пусть гипотеза $H_0: D(\xi) = D(\eta)$, гипотеза $H_1: D(\xi) > D(\eta)$. Требуется принять или отклонить H_0 .

Для проверки гипотезы H_0 при уровне значимости α используется СВ

$$F = \frac{S_{\xi}^2}{S_{\eta}^2},$$

которая имеет распределение Фишера—Снедекора со степенями свободы $k_1 = m - 1$, $k_2 = l - 1$. Плотность распределения Фишера—Снедекора

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C_0 \frac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2 + k_1 x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x > 0, \end{cases}$$

$$\text{где } C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}.$$

При больших выборках распределение близко к нормальному. Критическую область находим из условия $P(F > F_{\text{кр.пр}}(\alpha, k_1, k_2)) = \alpha$.

Критическую точку можно найти по таблице распределения Фишера—Снедекора [1. С. 467]. Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то гипотезу H_0 принимают, если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, то H_0 отвергают и принимают H_1 .

Пример 9: По двум независимым выборкам ξ , η объемами $n = 10$ и $l = 15$ найдены исправленные выборочные дисперсии

$S_{\xi}^2 = 10,5$ и $S_{\eta}^2 = 8,2$. При $\alpha = 0,05$ проверить $H_0: D(\xi) = D(\eta)$, если $H_1: D(\xi) > D(\eta)$.

◀ По таблице Фишера—Снедекора находим $F_{кр} = F(0,05; 9; 14) = 2,65$. Определяем $F_{набл} = \frac{10,5}{8,2} \approx 1,28$. Так как $F_{набл} < F_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается ▶

36.3.2. Гипотезы о законах распределения

Исходя из некоторых соображений выдвигается гипотеза H_0 о функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ СВ ξ . По выборке строится эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$. Обозначим через $D(F_n^*, F)$ меру отклонения $F_n^*(x)$ от теоретической функции распределения $F(x)$. Величину D можно определить по-разному, например,

$$D(F_n^*, F) = \sup_x |F_n^*(x) - F(x)|,$$

причем D сама является случайной величиной. Если гипотеза H_0 верна, то распределение СВ D может быть найдено. Зададим малое $\alpha > 0$, что событие с вероятностью α практически невозможно в единичном опыте. Считая известным распределение СВ D , можно найти число D_0 , что $P(D > D_0) = \alpha$. Далее вычисляем $D(F_n^*, F)$. Если $D(F_n^*, F) > D_0$, то произошло практически невозможное событие, и гипотеза H_0 отвергается. Если же $D(F_n^*, F) < D_0$, то гипотеза не противоречит опытным данным.

Таким образом, получен критерий для проверки гипотезы H_0 .

О: Критерием согласия гипотезы H_0 о функции распределения $F(x)$ называется правило, позволяющее отвергнуть или не отвергнуть гипотезу на основании выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) СВ ξ . Уровнем значимости критерия называется число α , равное вероятности того, что гипотеза H_0 будет ошибочно отвергнута. Пределом значимости называется число D_0 , определяемое из условия $P(D > D_0) = \alpha$, если $D(F_n^*, F)$ — мера отклонения эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ от $F(x)$.

Наиболее употребительным является критерий согласия Пирсона, который строится следующим образом.

Для проверки гипотезы H_0 область изменения выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) разбивается на l интервалов (a_{i-1}, a_i) , $i = \overline{1, l}$. Определяются относительные частоты $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, $\sum_{i=1}^l p_i^* = 1$ и теоретические вероятности p_i попадания в (a_{i-1}, a_i) , $i = \overline{1, l}$, согласно гипотезе H_0 . За меру $D(F_n^*, F)$ принимается

$$\chi^{*2} = n \sum_{i=1}^l \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (36.3)$$

χ^{*2} — случайная величина, и нас интересует ее распределение, вычисленное в предположении, что гипотеза верна.

Т. (Пирсона): Какова бы ни была функция распределения $F(x)$ СВ χ , распределение СВ χ^{*2} стремится при $n \rightarrow \infty$ к χ^2 — распределению с $k = l - 1$ степенями свободы, т.е.

$$P(\chi^{*2} < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^x \varphi_k(x) dx,$$

где $\varphi_k(x)$ — плотность распределения χ^2 с k степенями свободы ■

Зададим уровень значимости $\alpha > 0$. По таблице для распределения χ^2 с $k = l - 1$ степенями свободы найдем число χ_α^2 , которое

удовлетворяет уравнению $P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} \varphi_k(x) dx = \alpha$, т.е. является

пределом значимости.

Предположим, что n достаточно велико. Тогда по Т. Пирсона вероятность $P(\chi^{*2} > \chi_\alpha^2)$ будет приблизительно составлять α , т.е. событие $\chi^{*2} > \chi_\alpha^2$ можно считать практически невозможным. Таким образом, если гипотеза H_0 верна, то неравенство $\chi^{*2} > \chi_\alpha^2$ практически невозможно. Это означает, что в случае выполнения для данной выборки неравенства $\chi^{*2} > \chi_\alpha^2$, гипотеза H_0 отвергается. Если же $\chi^{*2} < \chi_\alpha^2$, то опытные данные совместимы с принятой гипотезой.

На практике применение Т. Пирсона дает хорошие результаты, если $np_i \geq 5$, $i = \overline{1, l}$.

Более часто выдвигаемая в качестве гипотезы функция распределения содержит неизвестные параметры $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_r$, значения которых приходится оценивать по выборке. Тогда в формуле (36.3) $p_i = P_i(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_r)$, $i = \overline{1, l}$, — случайные величины. В этом случае предельным распределением СВ χ^{*2} также является χ^2 — распределение, но уже с $k = l - 1 - r$ степенями свободы.

Пример 10: Подтвердить гипотезу о нормальном законе распределения СВ ξ в примере 2 разд. 36.1.

◀ По формуле (35.6), полагая $m = m^* = 6,55$, $\sigma = \sqrt{D^*} = 0,77$, найдем вероятности попадания ξ в интервалы (5; 6), (6; 6,5), (6,5; 7), (7; 8): $P_1 = P(5 \leq \xi \leq 6) = 0,18$, $P_2 = P(6 \leq \xi \leq 6,5) = 0,2$, $P_3 = P(6,5 \leq \xi \leq 7) = 0,28$, $P_4 = P(7 \leq \xi \leq 8) = 0,25$.

Составим таблицу:

№ интервала	1	2	3	4
Интервал	(5; 6)	(6; 6,5)	(6,5; 7)	(7; 8)
m_i	5	4	6	5
np_i	$20 \cdot 0,18 = 3,6$	$20 \cdot 0,2 = 4$	$20 \cdot 0,28 = 5,6$	$20 \cdot 0,25 = 5$

Подсчитаем χ^{*2} по (36.3):

$$\chi^{*2} = \frac{(5-3,6)^2}{3,6} + \frac{(4-4)^2}{4} + \frac{(6-5,6)^2}{5,6} + \frac{(5-5)^2}{5} =$$

$$= 0,54 + 0 + 0,03 + 0 = 0,57.$$

Так как число степеней свободы $k = 4 - 2 - 1 = 1$, то по таблице χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0,01$ получим $\chi_\alpha^2 = 6,6$, т.е. $\chi^{*2} < \chi_\alpha^2$, и гипотезу H_0 принимаем.

Литература: [1. С. 187–361]; [2. С. 307–362]; [5. С. 571–600].

Глава 13

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

37. ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Опорный конспект № 37

37.1. Логика высказываний

Высказывание $a = \{0,1\}$ — логическая переменная.

Логические операции:

1. Конъюнкция:

$$c = a \wedge b = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 1, \quad b = 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

2. Дизъюнкция:

$$c = a \vee b = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0, \quad b = 0, \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

3. Импликация:

$$c = a \Rightarrow b = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 1, \quad b = 0, \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

4. Отрицание:

$$b = \bar{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 1, \\ 1, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

5. Эквивалентность:

$$c = a \Leftrightarrow b = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b = 1 \text{ или } a = b = 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Формула $q = F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ — булева функция n переменных

37.2. Равносильные формулы логики высказываний

1. $\bar{\bar{a}} = a$;
2. $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$;
3. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;
4. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
5. $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}, \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$;
6. $a \wedge a = a, a \vee a = a$;
7. $a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$;
8. $a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a$;
9. $a \wedge \bar{a} = 0, a \vee \bar{a} = 1$;
10. $a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$;
11. $a \Rightarrow b = \bar{b} \Rightarrow \bar{a}$;
12. $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$.

Т: Любая булева функция n переменных представима в виде дизъюнктивной нормальной формы (дизъюнкции конъюнкций из a_i, \bar{a}_i).

37.3. Элементы логики предикатов

О: Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция: $x_i \in M, i = \overline{1, n}$, $P = \{0, 1\}$.

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — тождественно истинный на M , если при любых $x_i = a_i \in M, i = \overline{1, n}, P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

Кроме логических операций вводятся:

а) квантор общности $\forall x$:

$\forall x P(x) \Leftrightarrow$ для всех x из M значение $P(x) = 1$;

б) квантор существования $\exists x$:

$\exists x P(x) \Leftrightarrow$ существует x из M , что $P(x) = 1$.

$\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

37.1. Логика высказываний

Математический анализ изучает функции от непрерывных переменных (см. разд. 6–12, 15–19), дискретная математика занимается функциями от дискретных переменных. Одним из ее ос-

новных разделов является математическая логика: исчисление высказываний (алгебра высказываний) и исчисление предикатов. В разд. 6.1 была введена символика математической логики, которая в дальнейшем использовалась для сокращения записи математических высказываний. Кроме этого, алгебра высказываний находит применение в задачах анализа и синтеза контактных схем, т.е. в области автоматического управления, в геологии, биологии, химии. Это требует более подробного изучения логических операций.

Понятие «высказывание» является первоначальным и неопределяемым. Под высказыванием мы понимаем любое повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Например, «3 — простое число» — истинное, «4 — нечетное число» — ложное высказывания. Математическое предложение $5 \cdot 3 + 4$ — не высказывание, а $5 - 4 = 1$ — высказывание.

Высказывания обозначаются буквами $a, b, c, x, y, p, q, \dots$. Если обозначить истинность высказывания a цифрой 1, а ложность — цифрой 0, то высказывание a может принимать одно из двух значений: 1 или 0, т.е. является дискретной переменной $a = \{0, 1\}$. Такая переменная называется также логической.

Операции над высказываниями приведены в ОК 37.1. Все они, кроме операции отрицания высказывания, определяют дискретные функции двух логических переменных p_1, p_2 , принимающие значения 0, 1. Такие функции называются булевыми функциями. Например, импликация соответствует булева функция $q = p_1 \Rightarrow p_2$.

С помощью логических символов $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ можно соединить $n > 2$ высказываний. Например, $q = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$.

О: Формулами логики высказываний называются высказывания, составленные из высказываний p_1, p_2, \dots, p_n , соединенных знаками логических операций (логическими связками).

Формула $q = F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ определяет булеву функцию n переменных, которая наглядно задается таблицей истинности, содержащей 2^n строк.

Например, таблица истинности для $(a \wedge b) \vee c$ и $a \wedge (b \vee c)$ имеет вид:

a	b	c	$(a \wedge b) \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Последовательность выполнения операций при отсутствии скобок: $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge, -$ (справа налево).

В качестве примера рассмотрим приложение введенных логических операций к задачам анализа и синтеза контактных схем.

Электрические контакты в контактных схемах могут находиться только в двух положениях: разомкнуты или замкнуты, которым тоже можно сопоставить значения 0 и 1.

Под синтезом схемы понимают ее составление по заданным условиям работы, под анализом — определение условий работы заданной схемы.

Пусть p_1, p_2 обозначают наличие или отсутствие тока в обмотках электромагнитов 1, 2, к якорям которых притягиваются контактные пластинки, что прерывает ток в проводнике, q — наличие или отсутствие тока в проводнике. Конъюнкции $q = p_1 \wedge p_2$ соответствует схема, которая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты оба контакта (рис. 37.1). Дизъюнкции $q = p_1 \vee p_2$, импликация $q = p_1 \Rightarrow p_2$, отрицанию $q = \bar{p}$, эквивалентности $q = p_1 \Leftrightarrow p_2$ соответствуют схемы на рис. 37.2—37.5 соответственно.

Булевым функциям n переменных соответствуют более сложные контактные схемы, например, на рис. 37.6 представлены $q = p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)$, $q = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$.

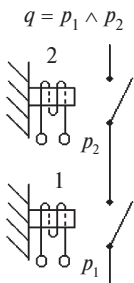


Рис. 37.1

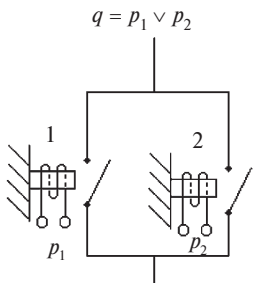


Рис. 37.2

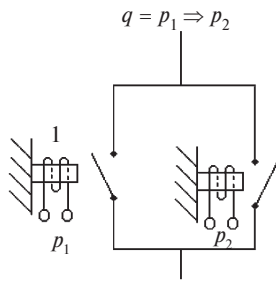


Рис. 37.3

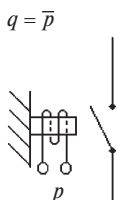


Рис. 37.4

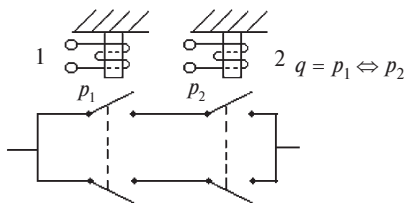


Рис. 37.5

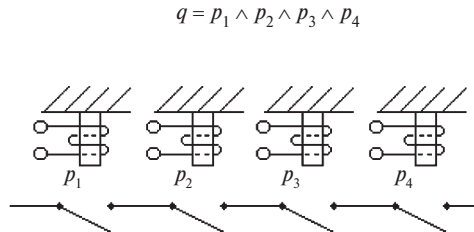
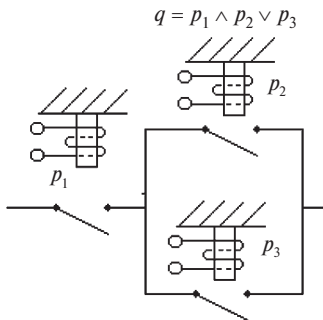


Рис. 37.6

37.2. Равносильные формулы логики высказываний

Пусть булева функция задана таблицей истинности. Тогда можно построить соответствующую ей формулу. Например, имеем таблицу

p_1	p_2	$F(p_1, p_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(37.1)

Для построения $F(p_1, p_2)$ возьмем только строки с $F(p_1, p_2) = 1$, это первая и четвертая строки.

Первой строке соответствует формула $p_1 \wedge p_2$, четвертой $\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2$, тогда $F(p_1, p_2) = (p_1 \wedge p_2) \vee (\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2)$. Таким образом, $F(p_1, p_2)$ построена как дизъюнкция конъюнкций.

О: Дизъюнкция конъюнкций из аргументов и их отрицаний называется нормальной дизъюнктивной формой.

Т: Любая булева функция n переменных может быть представлена в виде нормальной дизъюнктивной формы ■

Доказательство в [10. С. 38].

Таблице (37.1) кроме нормальной дизъюнктивной формы соответствует согласно определению эквивалентности $F(p_1, p_2) = p_1 \leftrightarrow p_2$. Таким образом, одна и та же булева функция может быть задана разными формулами.

О: Формулы, представляющие одну и ту же булеву функцию, называются эквивалентными, или равносильными.

Простейшие равносильности, которые используются для упрощения формул, приведены в ОК 37.2.

Для преобразования формул кроме равносильностей 1–12 необходимы следующие две теоремы.

Т.1 (о подстановке формулы вместо переменной):

Пусть $P(p_1, \dots, p_n) = Q(p_1, \dots, p_n)$, F — некоторая формула. Тогда при подстановке вместо p_i формулы F равносильность $P = Q$ сохраняется ■

Т.2 (о замене подформул): Пусть $P(p_1, \dots, p_n) = Q(p_1, \dots, p_n)$, C_P — формула, содержащая P , C_Q — результат замены в ней P на Q . Тогда $C_P = C_Q$ ■

Теоремы являются следствием сохранения таблиц истинности рассматриваемых формул [9. С. 14].

Примеры:

1. Доказать, что $\overline{\overline{a} \wedge \overline{b}} = a \vee b$.

◀ На основании теоремы 1 и равносильностей 5 имеем $\overline{\overline{a} \wedge \overline{b}} = \overline{\overline{a}} \vee \overline{\overline{b}}$. На основании теоремы 2 и равносильности 1 далее $\overline{\overline{a}} \vee \overline{\overline{b}} = a \vee b = a \vee b$ ▶

2. Составить формулу по таблице истинности:

p_1	p_2	p_3	q
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

◀ Записываем представление соответствующей таблице булевой функции в виде нормальной дизъюнктивной формы, используя строки с $q = 1$:

$q = (\overline{p_1} \wedge \overline{p_2} \wedge \overline{p_3}) \vee (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}) \vee (\overline{p_1} \wedge \overline{p_2} \wedge p_3) \vee (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$. Полученную формулу упрощаем, пользуясь равносильностями 2–4, 7, 9:

$$\begin{aligned} q &= \overline{p_1} \wedge [(\overline{p_2} \wedge \overline{p_3}) \vee (p_2 \wedge \overline{p_3}) \vee (\overline{p_2} \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)] \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \\ &= \overline{p_1} \wedge [(\overline{p_3} \wedge (\overline{p_2} \vee p_2)) \vee (p_3 \wedge (\overline{p_2} \vee p_2))] \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) = \\ &= \overline{p_1} \wedge (\overline{p_3} \vee p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) = \overline{p_1} \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) = (\overline{p_1} \vee p_1) \wedge (\overline{p_1} \vee (p_2 \wedge p_3)) = \overline{p_1} \vee (p_2 \wedge p_3) \end{aligned}$$

Такого рода задачи необходимо решать при синтезе контактных схем. Они возникают также в теории распознавания образов, где по определенному набору фактов (высказываний) связываются причины и следствия. Эта теория находит применение в геологии, химии, медицине, социологии.

37.3. Элементы логики предикатов

В теории формальных систем, алгоритмических языков, а также в таких науках, как медицина, геология, социология применяются выражения, имеющие форму высказываний, но содержащие аргументы (так называемые предметные переменные).

Например, « x — простое число» — не высказывание, но обращается в него при замене x конкретным значением $x = n \in \mathbf{N}$.

О: Предикатом $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, аргументы (предметные переменные) которой принимают значения на множестве M : $x_i \in M, i = 1, n$, а область значений $P = \{0, 1\}$. В зависимости от числа предметных переменных предикат называется одноместным, двухместным, ..., n -местным.

Например, « x — простое число» — одноместный предикат $P(x)$, $x \in \mathbf{N}$; $x < y$ — двухместный предикат $P(x, y)$, $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$; « x и y — родители z » — трехместный предикат $P(x, y, z)$ на множестве людей.

Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in M, i = 1, n$, становится высказыванием, если вместо x_i подставить значения (предикатные постоянные) $x_i = a_i \in M$.

О: Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется тождественно-истинным на M , если при подстановке вместо x_1, x_2, \dots, x_n любых значений $x_i = a_i \in M, i = 1, n$, $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, в противном случае — тождественно-ложным. Предикат называется выполнимым на M , если существует $a_i \in M, i = 1, n$, что $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. Множество $M^* \subset M$, на котором $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно-истинный, называется областью истинности предиката.

Например, предикат $|x| \geq 0$ тождественно-истинный на \mathbf{R} , предикат $|x| < 0$ — тождественно-ложный на \mathbf{R} .

О: Два предиката $P(x)$ и $Q(x)$ называются эквивалентными, если они определены на одном и том же множестве M и их множества истинности совпадают.

Аналогично определяется эквивалентность n -местных предикатов.

Предметные переменные не являются логическими, а сам предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in M$, $i = \overline{1, n}$, является логической переменной, поэтому из предикатов можно составлять формулы логики высказываний с помощью знаков логических операций $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Например, $P(x_1, x_2) \vee (Q(x_3, x_4) \wedge R(x_2, x_4))$ может рассматриваться как булева функция трех логических переменных P, Q, R , а также как составной четырехместный предикат от предметных переменных x_1, x_2, x_3, x_4 .

Кроме логических операций вводятся операции, которые относятся только к логике предикатов, называемые кванторами.

О: Квантором общности называется знак $\forall x$. Высказывание $\forall xP(x)$ означает: для всех x из M значение $P(x) = 1$.

Квантором существования называется знак $\exists x$. Высказывание $\exists xP(x)$ означает: существует x из M , что $P(x) = 1$.

Переход от $P(x)$ к $\forall xP(x)$ или $\exists xP(x)$ называется связыванием переменной x . Переменная, к которой применен квантор (говорят также, навешен квантор), называется связанной. Несвязанная переменная называется свободной.

Если $P(x)$ — предикат « x — четное число», то высказывание $\forall xP(x)$ истинно на множестве четных чисел, высказывание $\exists xP(x)$ истинно на любом множестве, содержащем хотя бы одно четное число.

Если квантор навешен на n -местный предикат, то в нем количество свободных переменных уменьшается, их будет $n - 1$. Так, $\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Важнейшей целью логики предикатов является исследование множества истинных формул логики предикатов, для чего используются определенные формальные методы, что приводит к необходимости изучения формальных систем [10. С. 215].

37.4. Понятие о формальных системах, языках и грамматиках

Если формулы алгебры логики рассматривать не как способ представления булевых функций, а как составные высказывания, образованные из элементарных высказываний с помощью логических связок $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$, то для этих формул строится формаль-

ная теория, называемая исчислением высказываний. Для этого выделяется подмножество формул, называемых аксиомами, и задаются правила вывода теорем. Рассмотрим в связи с этим некоторые понятия, связанные с формальными системами.

О: Алфавитом V называется конечное множество, элементами которого являются символы (буквы, цифры, знаки препинания, знаки операций, и т.д.). Последовательности n символов называются словами (цепочками) длиной n в алфавите V , причем запятые не ставятся.

Алфавит исчисления высказываний состоит из переменных высказываний a, b, c, \dots , знаков логических связок $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ и скобок $()$.

Словами являются формулы A, B, C . Между равносильными формулами ставится знак эквивалентности \sim . Алфавит исчисления предикатов состоит из предметных переменных x_1, x_2, \dots , предметных постоянных a_1, a_2, \dots , функциональных букв F, Q, P , знаков логических связок, кванторов \forall, \exists и скобок $()$.

Для построения исчисления высказываний задается, кроме того, система аксиом:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
3. $(A \wedge B) \Rightarrow A, (A \wedge B) \Rightarrow B$
4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
5. $A \Rightarrow (A \vee B), B \Rightarrow (A \vee B)$
6. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$
7. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \bar{B}) \Rightarrow \bar{A})$
8. $\bar{\bar{A}} \Rightarrow A$.

Далее задаются правила вывода формул [11. С. 432].

Аксиомы исчисления предикатов — это аксиомы исчисления высказываний плюс аксиомы:

9. $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$
10. $F(y) \Rightarrow \exists x F(x)$.

Пусть задан алфавит V и тем самым множество V^* конечных слов или цепочек в алфавите V .

О: Формальным языком L в алфавите V называется произвольное подмножество $L \subseteq V^*$.

Конструктивное описание формальных языков осуществляется с помощью формальных систем специального вида, называемых формальными грамматиками.

О: Формальная грамматика G — формальная система, определяемая четверкой объектов: $G = \langle V, W, J, R \rangle$, где V — алфавит основных (терминальных) символов, W — алфавит вспомогательных (нетерминальных) символов, $V \cap W = \emptyset$, J — начальный символ (аксиома) грамматики, R — конечное множество правил вывода $\xi \vdash \eta$ (ξ, η — цепочки в алфавите $V \cup W$). Языком $L(G)$, порождаемым грамматикой G , называется множество всех цепочек в терминальном алфавите V , выводимом из J . Грамматики G и G' называются эквивалентными, если $L(G) = L(G')$.

Так, для исчисления высказываний $V = \{a, b, c, \dots, \wedge, \vee, -, \Rightarrow, (,)\}$, $W = \{J\}$, R содержит правила вида $A \vdash \alpha$, $\alpha \in (V \cup W)$, $A \notin V$. Язык булевых формул с тремя переменными a, b, c порождается грамматикой $G = \langle V, W, J, R \rangle$, где $V = \{a, b, c, \dots, \wedge, \vee, -, (,)\}$, $W = \{J\}$, R содержит правила: $J \vdash (J \vee J)$, $J \vdash (J \wedge J)$, $J \vdash \bar{J}$, $J \vdash a$, $J \vdash b$, $J \vdash c$. Он отличается от языка формул исчисления высказываний отсутствием импликации. Более подробно о формальных грамматиках см. [10. С. 261–295].

Литература: [10. С. 50–88, 144–295]; [9. С. 8–162].

38. ГРАФЫ

Опорный конспект № 38

38.1. Основные понятия и способы задания графов

О: Граф $G = \{V, E\}$, $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — вершины, $E = \{(a_i, a_j)\}$, $i, j = \overline{1, n}$ — ребра, $l_{ij} = (a_i, a_j)$ инцидентно a_i, a_j .

G — ориентированный граф, если (a_i, a_j) , $i, j = \overline{1, n}$ — упорядоченные пары из V

О: Мультиграф — граф, имеющий кратные ребра.

О: Степенью вершины графа G называется число ребер, инцидентных a .

Граф изображается диаграммой или задается матрицей смежности (δ_{ij}) n -го порядка, в которой δ_{ij} равно числу ребер, инцидентных a_i и a_j для неориентированного графа.

38.2. Маршруты, цепи и циклы

О: Маршрут M в графе $G = \{V, E\} \Leftrightarrow M = \{I_{ij}\}$, где два соседних ребра имеют общую инцидентную вершину.

Цепь — маршрут M , у которого все ребра различны. Простая цепь — маршрут M , у которого все вершины, кроме, быть может, первой и последней, различны.

Цикл — цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают.

О: Граф G **связный**, если любая пара его вершин соединяется цепью.

О: Эйлеров граф \Leftrightarrow связный неориентированный мультиграф, для которого существует цикл, содержащий все ребра.

Т: Связный неориентированный мультиграф эйлеров т. и т.т., когда степени его вершин четны.

38.3. Некоторые классы графов

О: **Дерево** — связный граф без циклов, **лес** — несвязный граф без циклов.

Любая цепь в таком графе — простая. Любые две вершины дерева связаны одной и только одной цепью.

О: Остовом графа $G = \{V, E\}$ называется дерево $H = \{V, E^*\}$, $E^* \subseteq E$.

О: **Двудольный** граф $G = \{V, E\} \Leftrightarrow V = V_1 + V_2$, причем каждое ребро имеет один конец из V_1 , другой — из V_2 .

38.1. Основные понятия и способы задания графов

Одним из основных разделов дискретной математики является теория графов. Они используются при решении различных задач теории автоматического управления, а также в других науках, где возникают системы с большим числом объектов, связанных между собой разнообразными отношениями: большие молекулы, системы трубопроводов, технологические линии, сети железных

дорог, системы заводов–потребителей и предприятий–поставщиков и т.п.

О: Графом называется упорядоченная пара конечных множеств $G = \{V, E\}$, где $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — множество точек, называемых вершинами графа, $E = \{(a_i, a_j)\}$, $i, j = \overline{1, n}$, — множество пар элементов из V , называемых ребрами графа. Ребро (a_i, a_j) соединяет вершины a_i и a_j или инцидентно этим вершинам. Вершины a_i, a_j называются смежными или инцидентными ребру (a_i, a_j) . Два ребра называются смежными, если они инцидентны одной вершине. Граф с n вершинами и m ребрами называется (n, m) -графом. Граф G называется ориентированным (орграфом), если E — множество упорядоченных пар из V , т.е. его ребра являются направленными, такие направленные ребра называют дугами.

Каждому графу можно поставить в соответствие некоторую схему на плоскости, если вершины изображать точками, а ребра — линиями. Эта схема называется диаграммой графа или просто графом. Ребра на диаграмме могут быть отрезками прямых или дугами линий. Один и тот же граф можно изобразить разными диаграммами. Например, на рис. 38.1, 38.2 изображен один и тот же неориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(b, a), (b, e), (b, c), (d, c), (d, e)\}$. Такие диаграммы называются изоморфными.

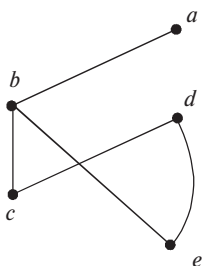


Рис. 38.1

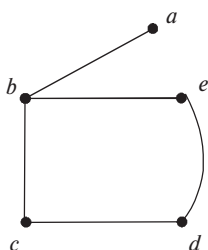


Рис. 38.2

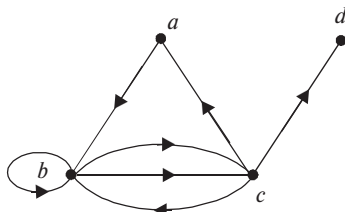


Рис. 38.3

На рис. 38.3 изображен ориентированный граф $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, b), (b, c), (c, a), (c, d)\}$. Этот граф имеет петлю (ребро, соединяющее вершину с ней са-

мой) и кратные ребра (две вершины соединены более чем одним ребром).

О: Граф, имеющий кратные ребра, называется мультиграфом, не имеющий кратных ребер — простым графом.

О: Степенью вершины a графа G называется число ребер, инцидентных a .

Например, для графа на рис. 38.3 степень вершины a равна 2, вершины b — 5. Задать граф можно также с помощью некоторой матрицы.

О: Матрицей смежности графа $G = (V, E)$, $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, называется квадратная матрица (δ_{ij}) , n -го порядка, столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа. Для неориентированного графа число δ_{ij} равно числу ребер, инцидентных a_i и a_j . Для орграфа δ_{ij} равно числу ребер с началом в a_i и концом в a_j .

Например, матрицы смежности графов на рис. 38.1 и 38.3 соответственно:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица смежности неориентированного графа симметрична: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, и сумма чисел в любой ее строке (столбце) равна степени соответствующей вершины.

Обратно, по матрице смежности можно построить диаграмму графа.

Итак, граф можно задать матрицей смежности, диаграммой или списком ребер.

38.2. Маршруты, цепи и циклы

Пусть G — неориентированный граф.

О: Маршрутом в графе $G = \{V, E\}$, $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $E = \{l_{12} = (a_1, a_2), \dots, l_{k-1k} = (a_{k-1}, a_k)\}$ называется такая последовательность ребер $M = \{l_{12}, l_{23}, \dots, l_{k-1k}\}$, что два соседних ребра имеют общую инцидентную вершину, a_1 — начальная, a_n — конечная вершины. Длиной маршрута называется число ребер маршрута.

О: Маршрут M называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины, кроме, может быть, первой и последней, различны.

Например, для графа на рис. 38.4 имеем: $abdbe$ — маршрут, но не цепь, $abcdbe$ — цепь, но не простая, abe — простая цепь.

О: Цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, называется циклом, если цепь простая, — простым циклом.

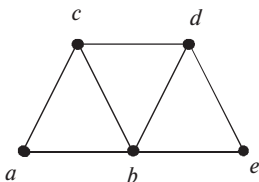


Рис. 38.4

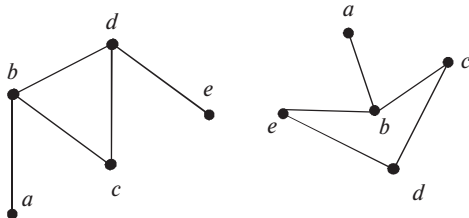


Рис. 38.5

Например, на рис. 38.4: $acbdeba$ — цикл, но не простой, $acdeba$ — простой цикл.

В частности, любая петля является циклом.

О: Граф называется связным, если любая пара его вершин соединяется цепью.

Например, граф на рис. 38.4 — связный, на рис. 38.5 — несвязный.

Начало разработки теории графов относится к постановке и решению задачи о Кенигсбергских мостах Эйлером.

Задача. Расположение мостов приведено на рис. 38.6. Требуется пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную часть города (суши).

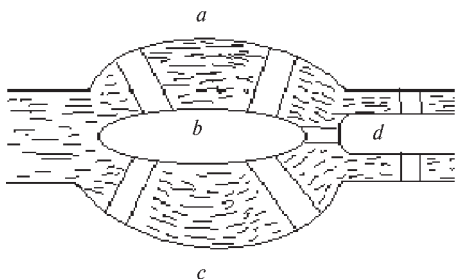


Рис. 38.6

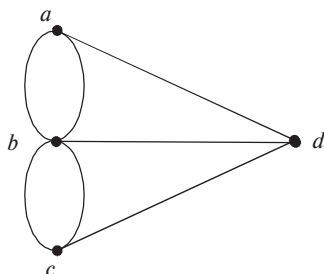


Рис. 38.7

Обозначим часть суши точками a, b, c, d и составим граф задачи (рис. 38.7). Обходу мостов соответствует последовательность ребер графа, причем два соседних ребра имеют общую вершину, т.е. маршрут. Так как в конце обхода нужно вернуться в исходную часть города и на каждом мосту побывать один раз, то этот маршрут является циклом, содержащим все ребра графа. Решение задачи сводится к ответу на вопрос, существует ли в данном случае такой цикл?

О: Связный неориентированный мультиграф называется эйлеровым, если существует цикл, содержащий все ребра графа (эйлеров цикл).

Эйлеров граф (цикл) можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрывающегося от бумаги.

Т: Неориентированный связанный мультиграф G эйлеров тогда и только тогда, когда степени его вершин четны ■

Доказательство в [10. С. 106].

Из теоремы следует вывод, что задача о Кенигсбергских мостах не имеет решения, так как все вершины имеют нечетную степень. Эйлеров граф изображен на рис. 38.8.

О: Связный неориентированный граф G называется гамильтоновым, если существует простой цикл, проходящий через каждую вершину графа (гамильтонов цикл).

Гамильтонов цикл изображен на рис. 38.9.

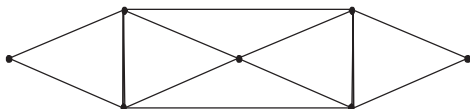


Рис. 38.8



Рис. 38.9

Во многих прикладных задачах используется следующее утверждение: в конечном связном графе всегда можно построить ориентированный цикл, проходящий через каждое ребро по одному разу в каждом из двух направлений.

38.3. Некоторые классы графов

Многие графы, употребляемые в приложениях, в частности графы сортировок, классификаций, имеют диаграммы, называемые деревьями.

О: Связный неориентированный граф без циклов (в частности, без петель и кратных ребер) называется деревом. Несвязный неориентированный граф без циклов называется лесом, а его связные компоненты — деревьями.

Любая часть леса или дерева также является лесом или деревом. Любая цепь в таком графе является простой.

Например, граф на рис. 38.10 — дерево, на рис. 38.11 — лес.

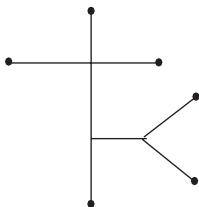


Рис. 38.10

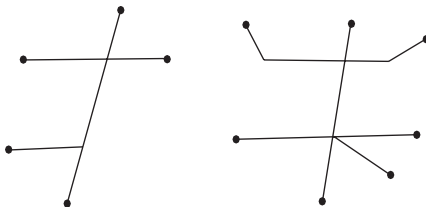


Рис. 38.11

Т: Любые две вершины дерева связаны одной и только одной цепью ■

Доказательство в [10. С. 110].

О: Остовом графа $G = \{V, E\}$ называется дерево $H = \{V, E^*\}$, $E^* \subseteq E$.

С помощью построения оптимального дерева могут быть решены задачи оптимизации на графах. Рассмотрим одну из задач.

Задача. Известны расстояния между каждой парой из n вершин. Нужно так соединить вершины, чтобы получился неориентированный граф — дерево с минимальной суммарной длиной ветвей (кратчайший остов).

◀ Правило построения (алгоритм) такого кратчайшего остова следующее. Строится ребро, соединяющее две вершины, между которыми наименьшее расстояние. Одна из вершин считается корнем дерева, а вторая соединяется со следующей вершиной, выбираемой так, чтобы расстояние между ними было меньше, чем расстояние до любой другой из оставшихся вершин.

Так же строятся следующие ребра.

Пропускается при этом лишь построение ребер, образующих циклы с ранее построенными. Таким образом получается дерево с $n - 1$ ребрами и с заданными вершинами, суммарная длина ребер у которого минимальна ▶

Алгоритм сохраняется для мультиграфа $G = \{V, E\}$, каждому ребру l которого приписана мера $\mu(l)$.

Например, для мультиграфа на рис. 38.12 с ребрами и их мерами:

l	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
$\mu(l)$	2	2	4	2	1	3

В качестве кратчайшего остова можно выбрать: (l_5, l_2, l_4) , (l_5, l_4, l_1) или (l_5, l_2, l_1) .

В ряде задач полезны двудольные графы.

О: Граф $G = \{V, E\}$ называется двудольным, если $V = V_1 + V_2$, причем каждое ребро графа имеет один конец из V_1 , другой — из V_2 .

Двудольные графы применяются, когда изучаемые объекты разделяются на две группы так, что внутри групп интересующие нас взаимодействия отсутствуют. Например, в генетике — признаки и гены, в химии — кислоты и основания, в экономике — производители и потребители.

Пример двудольного графа приведен на рис. 38.13, на диаграмме его вершины часто располагают на параллельных прямых.

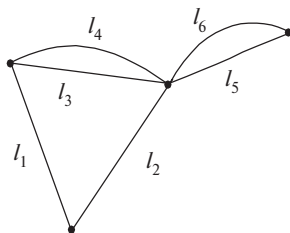


Рис. 38.12

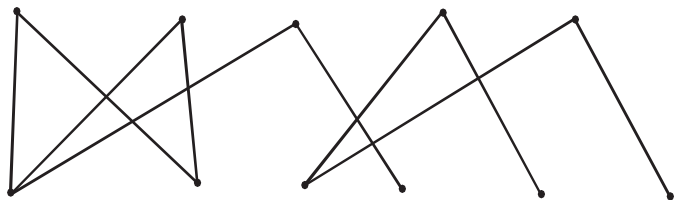


Рис. 38.13

С двудольными графами связана задача о назначениях. Пусть V_1 — множество претендентов на рабочие места, V_2 — множество рабочих мест. Необходимо каждого из претендентов обеспечить работой в соответствии с его профессиональной подготовкой.

Пусть, например $V_1 = \{a_i, i = \overline{1,6}\}$, $V_2 = \{b_i, i = \overline{1,7}\}$ и им соответствует двудольный граф G на рис. 38.14.

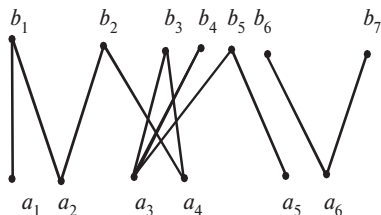


Рис. 38.14

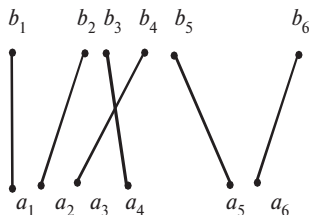


Рис. 38.15

Задача состоит в том, чтобы из этого графа выделить подграф G^* , состоящий из компонент с двумя вершинами, соединенными

ребром (рис. 38.15); G^* называется подграфом назначений. Необходимые и достаточные условия существования подграфа назначений приведены в [11. С. 74].

38.4. Понятие об автоматах, их задание графами

Теория автоматов, т.е. устройств со входами и выходами, связана с ее приложениями в проектировании цифровых устройств.

О: Конечным автоматом называется система $S = \{A, Q, V, \delta, \lambda\}$, в которой $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — входной алфавит, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — выходной алфавит, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ — алфавит состояний, $q_k = \delta(q_i, a_j)$ — функция переходов, $v_r = \lambda(q_i, a_j)$ — функция выходов.

Поскольку функции δ и λ определены на конечных множествах, т.е. являются дискретными, их можно задавать таблицами. Обычно обе таблицы сводятся в одну, которая называется таблицей переходов автомата, или автоматной таблицей.

Например, таблица переходов автомата с $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $V = \{v_1, v_2\}$ имеет вид:

	a_1	a_2	a_3
q_1	q_3, v_1	q_3, v_2	q_2, v_1
q_2	q_4, v_1	q_1, v_1	q_1, v_1
q_3	q_2, v_1	q_3, v_1	q_3, v_2
q_4	q_4, v_1	q_2, v_1	q_1, v_2

(38.1)

Наглядным способом задания автомата является ориентированный мультиграф, называемый графом переходов, или диаграммой переходов. Вершины графа соответствуют состояниям: если $\delta(q_i, a_j) = q_k$, $\lambda(q_i, a_j) = v_r$, то из q_i в q_k ведет ребро, на котором написаны a_j и v_r .

Граф переходов для таблицы (38.1) изображен на рис. 38.16.

В абстрактной теории автоматов изучается работа со словами при наличии конечной памяти, хотя конечный автомат с функ-

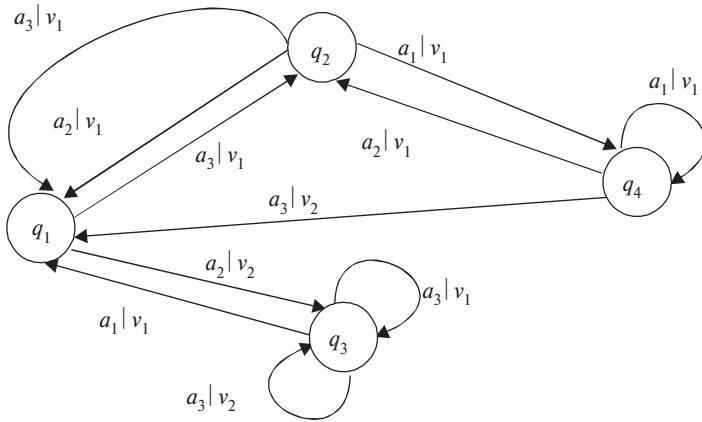


Рис. 38.16

ациональной точки зрения представляет довольно точную модель дискретного вычислительного или управляющего устройства. Более подробно об автоматах см. в [10. С. 295—351].

Литература: [10. С. 88—144, 295—351]; [9. С. 222— 381].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ЧЕТВЕРТОЙ ЧАСТИ

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М: Высш. школа, 2001. — 479 с.
2. *Коваленко И.Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М: Высш.школа, 1982. — 368 с.
3. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. — М: Наука, 1987. — 240 с.
4. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во МГУ, 1972. — 240 с.
5. *Баврин И.И.* Высшая математика. — М.: Высш. школа, 2001. — 616 с.
6. *Гусак А.А.* Высшая математика. — Мн.: ТетраСистемс, 2001. — 448 с.
7. *Овчинников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М.* Высшая математика. — Киев: Высш. школа, 1989. — 680 с.
8. *Коромок В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.:Наука, 1985. — 640 с.
9. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. —М.: Высш. школа, 2003. — 384 с.
10. *Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский П.М.* Дискретная математика для инженера. — М.: Энергоиздат, 1988. — 480 с.
11. *Гильдерман Ю.И.* Вооружившись интегралом. — Новосибирск: Наука, 1980. — 192 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Список используемых обозначений	5

ЧАСТЬ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	7
1. Линейная алгебра	7
1.1. Определители, их свойства	10
1.2. Системы линейных алгебраических уравнений, их совместность, определенность. Методы Гаусса и Крамера	13
1.3. Действия над матрицами. Матричный способ решения СЛАУ	17
2. Векторная алгебра	21
2.1. Векторы и линейные операции над ними	24
2.2. Базис в пространстве и на плоскости	27
2.3. Проекция вектора на ось и ее свойства	29
2.4. Прямоугольная система координат. Координаты вектора и точки	30
2.5. Скалярное произведение векторов	32
2.6. Векторное произведение векторов	34
2.7. Смешанное (векторно-скалярное) произведение трех векторов	36
2.8. Линейное пространство. Евклидово пространство R^n	37
2.9. Линейные преобразования. Собственные значения и собственные векторы. Квадратичные формы R^n	41
2.10. Применение методов алгебры в математическом моделировании	47
3. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: прямая и плоскость	52
3.1. Прямая на плоскости	54
3.2. Плоскость в пространстве	57
3.3. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости	61

4.	Аналитическая геометрия на плоскости:	
	кривые 2-го порядка	65
4.1.	Общее уравнение кривой 2-го порядка.	
	Окружность	67
4.2.	Эллипс	68
4.3.	Гипербола	69
4.4.	Парабола	71
4.5.	Преобразования параллельного переноса и поворота системы координат. Упрощение уравнений кривых 2-го порядка	72
5.	Аналитическая геометрия в пространстве:	
	поверхности 2-го порядка	76
5.1.	Цилиндрические поверхности	78
5.2.	Конус 2-го порядка	79
5.3.	Эллипсоид	80
5.4.	Гиперболоиды	81
5.5.	Параболоиды	82

Глава 2. Введение в математический анализ 84

6.	Функции одной переменной. Элементарные функции	84
6.1.	Элементы теории множеств. Символика математической логики. Топология числовой прямой	86
6.2.	Функции. Область определения. Способы задания	88
6.3.	Основные элементарные функции. Элементарные функции	90
7.	Пределы функции одной переменной	91
7.1.	Предел последовательности	93
7.2.	Предел функции в точке	93
7.3.	Бесконечно малые и бесконечно большие функции	94
7.4.	Леммы о бесконечно малых	95
7.5.	Основные теоремы о пределах	96
7.6.	Понятие о неопределенностях. I и II замечательные пределы	98
7.7.	Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые	101
8.	Непрерывные функции одной переменной	103
8.1.	Определения непрерывности	104
8.2.	Точки разрыва	106

8.3.	Свойства функций, непрерывных в т. x_0	107
8.4.	Свойства функций, непрерывных на $[a, b]$	108

Глава 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной 110

9.	Дифференцируемые функции одной переменной	110
9.1.	Определение производной, ее физический смысл	112
9.2.	Геометрический смысл производной	113
9.3.	Существование производной и непрерывность	114
9.4.	Свойства операции дифференцирования	115
9.5.	Производная сложной функции. Логарифмическая производная	116
9.6.	Производные основных элементарных функций	117
9.7.	Дифференциал	119
9.8.	Производные и дифференциалы высших порядков	120
9.9.	Производные параметрически заданной функции	121
10.	Исследование функций и построение графиков	123
10.1.	Основные теоремы дифференциального исчисления	126
10.2.	Правило Лопиталю	128
10.3.	Монотонность	129
10.4.	Экстремумы	130
10.5.	Достаточный признак экстремума, использующий вторую производную. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке	132
10.6.	Выпуклость, вогнутость	133
10.7.	Точка перегиба	134
10.8.	Асимптоты	136
10.9.	Общая схема исследования функции и построение графика	138
10.10.	Применение методов дифференциального исчисления в математическом моделировании	140

Глава 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных 144

11.	Дифференцируемые функции нескольких переменных	144
-----	---	-----

11.1.	Понятие функции нескольких переменных. Элементы топологии в \mathbb{R}^n	146
11.2.	Предел и непрерывность функций нескольких переменных	150
11.3.	Частные приращения и частные производные	151
11.4.	Полное приращение и полный дифференциал, применение в приближенных вычислениях	153
11.5.	Частные производные и полные дифференциалы высших порядков	156
11.6.	Производные сложных функций	157
11.7.	Неявные функции, их дифференцирование	159
12.	Приложения дифференциального исчисления функций нескольких переменных	160
12.1.	Экстремумы функции нескольких переменных	162
12.2.	Условный экстремум функции нескольких переменных	164
12.3.	Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Линии как пересечение двух поверхностей	167
	<i>Список литературы к первой части</i>	173

ЧАСТЬ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 5. Комплексные числа. Функции комплексного переменного	174
13. Комплексные числа	174
13.1. Алгебраическая форма к.ч., его изображение на комплексной плоскости	176
13.2. Действия над к.ч. в алгебраической форме	177
13.3. Тригонометрическая и показательная формы к.ч.	178
13.4. Умножение и деление к.ч. в тригонометрической и показательной формах	179
13.5. Возведение в целую положительную степень и извлечение корня n -й степени из к.ч.	180
14. Функции комплексного переменного	181
14.1. Области и линии на комплексной плоскости. Понятие функции комплексного переменного	182
14.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного	185

14.3. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши—Римана	187
14.4. Понятие аналитической функции. Сопряженные гармонические функции	188

Глава 6. Интегральное исчисление функций одной переменной 190

15. Неопределенный интеграл	190
15.1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла	192
15.2. Основные свойства неопределенного интеграла	193
15.3. Таблица неопределенных интегралов	194
15.4. Методы интегрирования	194
16. Классы интегрируемых функций	197
16.1. Интегрирование рациональных дробей	199
16.2. Интегрирование тригонометрических функций	203
16.3. Интегрирование иррациональных функций	204
17. Определенный интеграл	206
17.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла	209
17.2. Свойства определенного интеграла	211
17.3. Формула Ньютона—Лейбница	213
17.4. Интегрирование заменой переменных и по частям в определенных интегралах	215
17.5. Несобственный интеграл	216
18. Геометрические приложения определенного интеграла	220
18.1. Вычисление площади плоской фигуры	222
18.2. Вычисление объемов тел	227
18.3. Вычисление длины дуги кривой	229
19. Элементы теории функций и функционального анализа	233
19.1. Мера Лебега. Измеримые множества	234
19.2. Измеримые функции. Интеграл Лебега	236
19.3. Функции с ограниченным изменением. интеграл Стильтьеса	238

Глава 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения 241

20. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка	241
---	-----

20.1.	Основные понятия о дифференциальных уравнениях	242
20.2.	ОДУ 1-го порядка. Задача Коши. Общее решение ...	244
20.3.	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	246
20.4.	Однородные ДУ 1-го порядка	246
20.5.	Линейные ОДУ 1-го порядка	247
21.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	
	2-го порядка	249
21.1.	Основные понятия об ОДУ 2-го порядка	251
21.2.	ДУ 2-го порядка, допускающие понижение порядка	252
21.3.	Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка	253
22.	Понятие о решении ОДУ высших порядков и систем дифференциальных уравнений	260
22.1.	Линейные ДУ n -го порядка	261
22.2.	Нормальные системы ОДУ и их интегрирование методом исключения	262
22.3.	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	263
22.4.	Дифференциальная модель химических реакций	265

Глава 8. Интегрирование функций нескольких переменных	269
23. Двойной интеграл	269
23.1. Определение двойного интеграла	272
23.2. Свойства двойных интегралов	275
23.3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	275
23.4. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах	279
23.5. Приложения двойных интегралов	282
24. Тройные и n -кратные интегралы	288
24.1. Понятия тройного и n -кратного интеграла	291
24.2. Свойства тройного интеграла	294
24.3. Вычисление тройного интеграла	294
24.4. Приложения тройных интегралов	299
Список литературы ко второй части	303

ЧАСТЬ 3. ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА

Глава 9. Векторный анализ 304

- 25. Криволинейный интеграл по длине дуги (I рода) 304
 - 25.1. Кривые в R^n . Задача о массе кривой. Понятие криволинейного интеграла I рода 305
 - 25.2. Свойства криволинейного интеграла I рода 307
 - 25.3. Вычисление криволинейного интеграла I рода 308
- 26. Криволинейный интеграл по координатам (II рода) 310
 - 26.1. Определение криволинейного интеграла II рода 312
 - 26.2. Свойства криволинейного интеграла II рода 314
 - 26.3. Вычисление криволинейного интеграла II рода 315
 - 26.4. Связь между криволинейными интегралами I и II рода 317
 - 26.5. Формула Грина 317
 - 26.6. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования 319
 - 26.7. Интегрирование полных дифференциалов 321
 - 26.8. Уравнения в полных дифференциалах 323
- 27. Поверхностные интегралы 324
 - 27.1. Поверхности в R^3 327
 - 27.2. Поверхностный интеграл I рода 329
 - 27.3. Поверхностный интеграл II рода 333
 - 27.4. Формула Остроградского—Гаусса 337
 - 27.5. Формула Стокса 338
- 28. Скалярное и векторное поля 340
 - 28.1. Скалярное поле и его характеристики 342
 - 28.2. Векторное поле и его характеристики 346

Глава 10. Числовые и функциональные ряды 354

- 29. Числовые ряды 354
 - 29.1. Понятие числового ряда и его суммы 357
 - 29.2. Основные свойства сходящихся числовых рядов 358
 - 29.3. Необходимый признак сходимости числового ряда 359
 - 29.4. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов 359
 - 29.5. Знакопередающиеся числовые ряды. Признак Лейбница 364

29.6.	Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости	365
30.	Степенные ряды	367
30.1.	Понятие функционального и степенного рядов. Теорема Абеля	370
30.2.	Радиус и интервал сходимости степенного ряда	372
30.3.	Дифференцирование и интегрирование степенных рядов	373
30.4.	Ряды Тейлора и Маклорена	374
30.5.	Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора	375
30.6.	Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена	376
30.7.	Применение степенных рядов к приближенным вычислениям	380
31.	Ряды Фурье	382
31.1.	Тригонометрический ряд	384
31.2.	Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье для функции с периодом 2π	385
31.3.	Достаточные условия разложения периодической функции $f(x)$ с периодом 2π в ряд Фурье	387
31.4.	Ряд Фурье для четных и нечетных функций	388
31.5.	Ряд Фурье для функций с периодом 2ℓ . Разложение в ряд Фурье непериодических функций	390

Глава 11. Уравнения математической физики 392

32.	Основные типы уравнений математической физики	392
32.1.	Понятие об уравнениях математической физики. Граничные и начальные условия	393
32.2.	Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка	395
32.3.	Построение математической модели задачи распространении тепла	397
33.	Методы решения уравнений математической физики	399
33.1.	Метод Даламбера	401
33.2.	Метод Фурье	403
33.3.	Метод конечных разностей для решения уравнений математической физики	409
	<i>Список литературы к третьей части</i>	<i>411</i>

ЧАСТЬ 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Глава 12. Элементы теории вероятностей и математической статистики	412
34. Основные понятия теории вероятностей	412
34.1. Понятия пространства элементарных событий и случайного события. Основные формулы комбинаторики	414
34.2. Действия над событиями	416
34.3. Различные определения вероятности	417
34.4. Сложение и умножение вероятностей	420
34.5. Схема испытаний Бернулли	423
35. Случайные величины	424
35.1. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения	426
35.2. Числовые характеристики случайных величин	430
35.3. Примеры распределений дискретных и непрерывных случайных величин	432
35.4. Многомерные случайные величины. Понятие о случайных процессах	437
36. Элементы математической статистики	445
36.1. Основные понятия математической статистики. Построение эмпирического закона распределения ..	448
36.2. Определение неизвестных параметров распределения и выборочного коэффициента корреляции	452
36.3. Проверка статистических гипотез	459
Глава 13. Дискретная математика	466
37. Логические исчисления	466
37.1. Логика высказываний	467
37.2. Равносильные формулы логики высказываний	470
37.3. Элементы логики предикатов	473
37.4. Понятие о формальных системах, языках и грамматиках	474
38. Графы	476
38.1. Основные понятия и способы задания графов	477
38.2. Маршруты, цепи и циклы	480
38.3. Некоторые классы графов	482
38.4. Понятие об автоматах, их задание графами	485
<i>Список литературы к четвертой части</i>	<i>487</i>