

Я. С. УФЛЯНД

**БИПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ
В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

проф. А. И. ЛУРЬЕ

и проф. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

Редактор *А. И. Чекмарев*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 28/II 1950 г. Тираж 3000 экз. Печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 12,73.
35 152 тип. зн. в печ. л. Т-00238. Цена 7 р. 65 к., переплёт 50 к. Заказ № 1002.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР,
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|-----------------------|---|
| Предисловие | 8 |
|-----------------------|---|

Глава I. Введение

| | |
|---|----|
| § 1. Геометрия биполярных координат | 11 |
| § 2. Интегрирование гармонического уравнения в биполярных координатах | 15 |
| § 3. Бигармоническое уравнение и его интегралы в биполярных координатах | 18 |

Часть первая

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Глава II. Кручение призматических стержней с поперечным сечением, имеющим форму круговой луночки

| | |
|--|----|
| § 4. Постановка задачи и общее решение | 20 |
| § 5. Касательные напряжения при кручении | 23 |
| § 6. Вычисление жесткости при кручении | 25 |
| § 7. Кручение кругового цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси | 28 |
| § 8. Кручение стержня с поперечным сечением в виде симметричной круговой луночки | 33 |
| § 9. Кручение кругового цилиндра, ослабленного полукруглым продольным пазом | 37 |

Глава III. Изгиб призматических стержней с поперечным сечением в виде круговой луночки

| | |
|---|----|
| § 10. Постановка задачи | 40 |
| § 11. Общее решение | 41 |
| § 12. Изгиб кругового цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси | 50 |
| § 13. Расчет координат центра изгиба | 52 |
| § 14. Касательные напряжения при изгибе | 60 |

*Часть вторая***БИГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ****Глава IV. Изгиб тонких плит, контур которых образован дугами двух пересекающихся окружностей**

- § 15. Общее решение задачи об изгибе луночной плиты с закрепленным контуром 65
- § 16. Изгибающие моменты и перерезывающие силы 69
- § 17. Изгиб луночной плиты под действием сосредоточенной силы 72
- § 18. Изгиб плиты, имеющей форму симметричной круговой луночки 76
- § 19. Некоторые интегрируемые случаи 84
- § 20. Изгиб плиты, имеющей форму кругового сегмента 91
- § 21. Влияние закрепленной сегментной выемки на напряжения в изогнутой полуплоскости с закрепленным краем 103
- § 22. Плита в виде кругового сегмента со свободно опертым прямолинейным краем и закрепленной дугой 108
- § 23. Плита в виде полуплоскости с опертым краем, содержащая закрепленную сегментную выемку 117
- § 24. Изгиб полуплоскости при смешанных граничных условиях 118
- § 25. Луночная плита под равномерной нагрузкой 123
- § 26. Некоторые случаи изгиба плиты, имеющей форму половины круговой луночки 131

Глава V. Изгиб эксцентрических колец

- § 27. Общее решение задачи об изгибе эксцентрического кольца с закрепленным контуром 136
- § 28. Эксцентрическое кольцо под равномерной нагрузкой 145
- § 29. Равномерно нагруженная круглая плита с закрепленной внутренней точкой 151
- § 30. Изгиб эксцентрического кольца сосредоточенной силой 154
- § 31. Круглая плита, содержащая закрепленную точку и нагруженная сосредоточенной силой 155
- § 32. Влияние закрепленного круглого отверстия на напряжения в изогнутой полуплоскости с закрепленным краем. 159
- § 33. Полуплоскость с опертым краем, содержащая закрепленное круглое отверстие 164
- § 34. Некоторые случаи изгиба плиты, имеющей форму половины эксцентрического кольца 165

Глава VI. Плоская задача теории упругости для внешности круговой луночки

- § 35. Видоизменение системы биполярных координат 169
- § 36. Уравнения плоской задачи теории упругости в биполярных координатах 170

| | |
|--|-----|
| § 37. Постановка задачи о растяжении бесконечной упругой плоскости, содержащей отверстие, имеющее форму круговой луночки | 173 |
| § 38. Общее решение задачи о растяжении бесконечной плоскости с луночным отверстием | 175 |
| § 39. Растяжение бесконечной плоскости, ослабленной отверстием в виде симметричной круговой луночки | 180 |
| § 40. Растяжение полуплоскости с луночной выемкой на краю | 189 |
| Глава VII. Плоская задача теории упругости для эксцентрического кольца | |
| § 41. Постановка задачи о равновесии эксцентрического кольца под действием заданных усилий | 193 |
| § 42. Нахождение функции напряжений | 200 |
| § 43. Эксцентрическая труба под равномерным давлением | 204 |
| § 44. Полуплоскость с круглым отверстием, подверженным равномерному давлению. | 210 |
| § 45. Влияние круглого отверстия на напряжения в растянутой полуплоскости | 212 |
| § 46. Растяжение бесконечной плоскости с двумя круглыми отверстиями | 218 |
| Приложение. Таблицы некоторых определенных интегралов (пределы 0 и ∞) | 225 |
| Цитированная литература | 231 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная теория упругости располагает большим количеством двумерных задач (кручение и изгиб стержней, изгиб тонких плит и плоская задача), решенных с помощью применения криволинейных координат, главным образом полярных и эллиптических. Отдельные задачи решены также и в биполярных координатах.

Если говорить о бигармонических проблемах, то здесь следует назвать работу акад. С. А. Чаплыгина [1], совместно с проф. Н. С. Аржаниковым, давшего решение весьма важной задачи об эксцентрической трубе, подверженной внешнему и внутреннему давлению. Далее, Джеффри [2] и Вайнель [3] разработали общее решение плоской задачи теории упругости для области, ограниченной двумя эксцентрическими окружностями. Н. В. Кудрявцев [4] решил задачу об изгибе тонкой упругой плиты, имеющей форму эксцентрического кольца и подверженной действию сосредоточенной силы. Что касается более простых гармонических проблем, то здесь еще Макдональдом [5] рассмотрена задача о кручении круглой трубы, имеющей эксцентрически просверленную внутреннюю полость¹.

Точное решение всех перечисленных задач дается в форме тригонометрических рядов.

Однако, все указанные авторы рассматривали области, ограниченные двумя координатными линиями лишь одной системы, а именно — эксцентрические кольца.

Между тем, области, ограниченные двумя координатными линиями другой системы — дугами двух пересекающихся окружностей (так называемые круговые „луночки“), представляют для практики не меньший интерес. Так, Г. А. Гришбергу [8] с помощью биполярных координат и метода инверсии удалось решить ряд важных электростатических задач для областей луночного типа.

¹ См. также [6] и [7].

В этом направлении по теории упругости имеется весьма незначительное число работ, авторы которых ограничиваются лишь некоторыми частными случаями плоской задачи теории упругости. Сюда относятся появившиеся в последние годы работы Вайнеля [9] и Линга [10, 11], посвященные растяжению бесконечной плоскости, содержащей криволинейное отверстие, имеющее форму круговой луночки.

Автором данной работы разработан метод расчета упругих тонких плит, имеющих форму круговой луночки и подверженных действию произвольной внешней нагрузки. Кроме того, в работах автора [12] и [13] решены гармонические задачи о кручении и изгибе призматического стержня с поперечным сечением в виде круговой луночки. Точное решение всех подобных задач дается в форме интегралов Фурье.

Биполярные координаты привлекли внимание автора по двум причинам:

во-первых, области, ограниченные координатными линиями системы биполярных координат, чрезвычайно многообразны (эксцентрическое кольцо, полуплоскость с круглым отверстием, плоскость с двумя круглыми отверстиями, круговая луночка, круговой сегмент, полуплоскость, полуплоскость с сегментной выемкой на краю и др.). С помощью биполярных координат удается дать точное решение задачи изгиба для полукруглой плиты с закрепленным контуром, а также для полуплоскости, часть края которой закреплена, а часть — свободно оперта;

во-вторых, математический аппарат, связанный с решением задач теории упругости в биполярных координатах, сравнительно прост и не требует применения никаких специальных функций, кроме тригонометрических и гиперболических.

Во многих случаях интегрирование (или суммирование) удается выполнить, и окончательное решение дается в замкнутой форме.

В работе над книгой автор задался целью обобщить и систематизировать все имеющиеся решения двумерных задач теории упругости в биполярных координатах.

Областям, имеющим форму эксцентрических колец, уделено сравнительно меньше внимания, в связи с большей изученностью этих вопросов, а гармонические проблемы для такого рода областей совсем исключены из рассмотрения.

Соответственно этому бóльшую часть содержания книги составляет применение аппарата интегралов Фурье к решению гармонических и бигармонических задач для областей в виде круговых луночек.

В вводной главе I излагается геометрия биполярных координат и общие соображения об интегрировании гармонического и бигармонического уравнений в биполярных координатах. В главах II и III дается решение задач кручения и изгиба призматического стержня, имеющего поперечное сечение в виде круговой луночки.

Глава IV посвящена изгибу упругих тонких плит, имеющих форму круговой луночки, а глава V — изгибу эксцентрических колец. В частности, здесь дается решение задачи изгиба полукруглой плиты с закрепленным контуром, полуплоскости при смешанных граничных условиях, а также изучается влияние сегментной выемки и круглого отверстия на напряжения в изогнутой полуплоскости. В главах VI и VII дается решение плоской задачи теории упругости для круговых луночек и эксцентрических колец. Наибольший интерес здесь представляют задачи о растяжении полуплоскости, содержащей сегментную выемку на краю, или круглое отверстие а также задача об эксцентрически просверленной трубе находящейся под давлением.

Автор старался дать не только общие методы решения но и конкретные приемы расчета, снабдив текст достаточным количеством таблиц и графиков, исходя при этом из предположения, что книга представит интерес не только для специалистов по математической и прикладной теории упругости, но и для инженеров-практиков.

В конце книги в виде приложения приведена справочная таблица, содержащая ряд определенных интегралов, неоднократно применяющихся при выкладках, причем при ссылке на табличный интеграл перед номером последнего ставится буква П (приложение).

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность профессору А. И. Лурье за неизменное внимание к работе, а также инженеру А. Я. Черняку за производство численных расчетов.

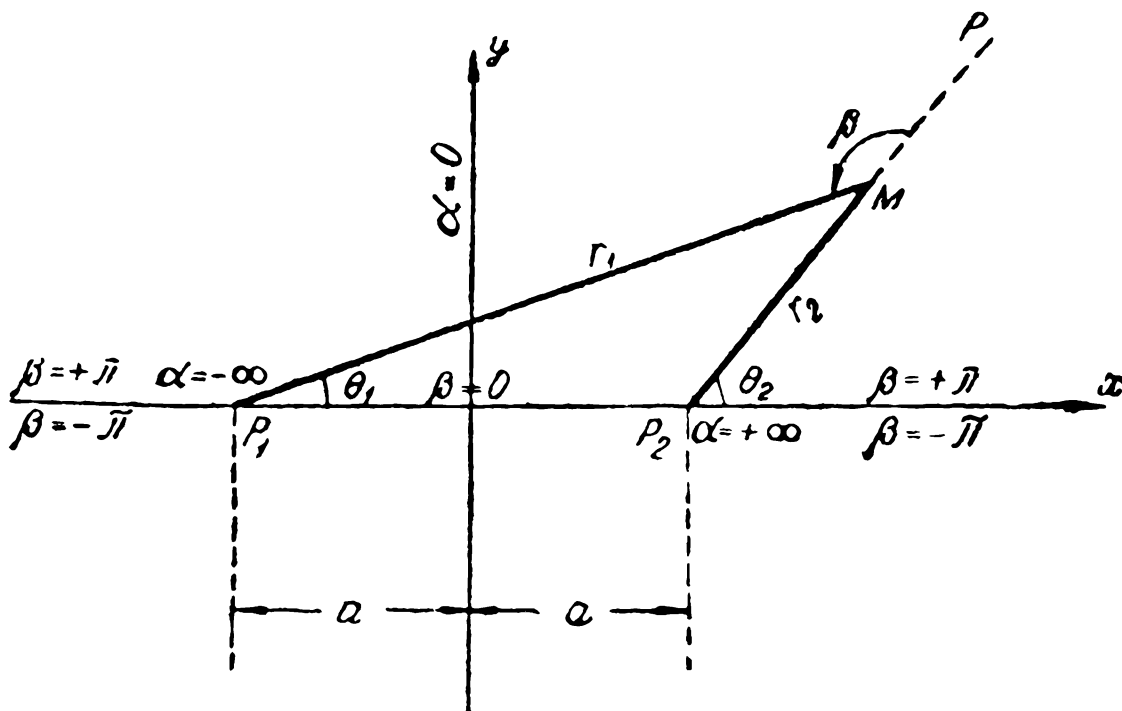
Я. Уфлянд

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Геометрия биполярных координат

Рассмотрим систему криволинейных координат (α, β) , определив их следующим образом: выберем на оси ox две точки P_1 и P_2 (полюсы) на расстоянии $2a$ друг от друга (фиг. 1)



Фиг. 1.

и будем характеризовать положение точки на плоскости следующими двумя величинами:

$$\alpha = \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \angle PMP_1. \quad (1,1)$$

Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; в правой полуплоскости $\alpha > 0$, в левой $\alpha < 0$; ось oy

является координатной линией $\alpha = 0$; точки $x = \pm a$, $y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm \infty$.

Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$; в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней $\beta < 0$; отрезок P_1P_2 является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси ox при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв, равный 2π , а именно, на верхнем берегу ($y = +0$) $\beta = +\pi$, на нижнем ($y = -0$) $\beta = -\pi$.

Такие криволинейные координаты обычно называют биполярными.

Нетрудно показать, что эти же координаты могут быть получены при помощи такого конформного преобразования:

$$\zeta = \lg \frac{a+z}{a-z}, \quad \zeta = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy. \quad (1,2)$$

В самом деле, разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \lg \sqrt{(a+x)^2 + y^2} - \lg \sqrt{(a-x)^2 + y^2}; \\ \beta &= \arctg \frac{y}{a+x} - \arctg \frac{y}{x-a} + \pi, \end{aligned}$$

что совпадает с (1,1), если учесть соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, & r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \\ \theta_1 &= \arctg \frac{y}{x+a}, & \theta_2 &= \arctg \frac{y}{x-a}. \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

Преобразование (1,2) показывает, что биполярные координаты образуют взаимно ортогональную сетку кривых $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$.

Геометрически ясно, что координатные линии $\beta = \text{const}$ суть дуги окружностей, имеющих центры на оси oy и проходящих через точки P_1 и P_2 (фиг. 2).

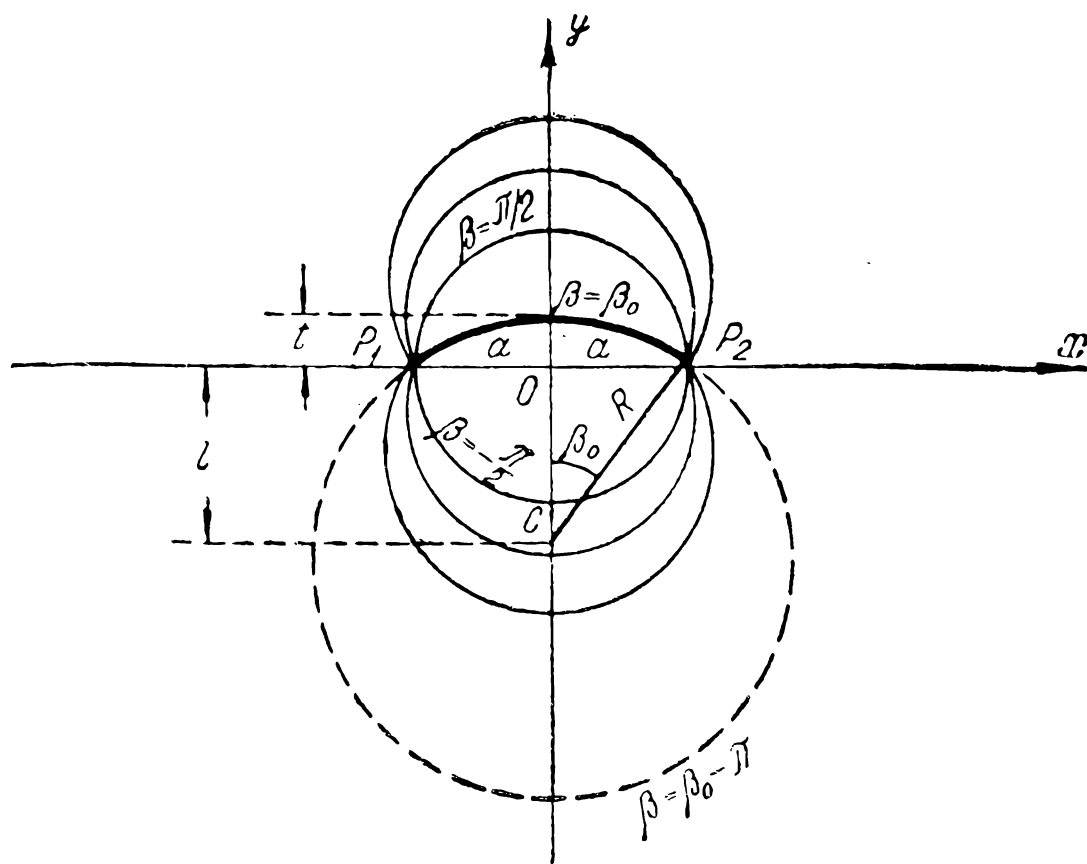
Радиус R дуги $\beta = \beta_0$, а также расстояние l от начала координат до центра C этой дуги определяются непосредственно из треугольника OSP_2 :

$$R = \frac{a}{|\sin \beta_0|}, \quad l = a |\operatorname{ctg} \beta_0|. \quad (1,4)$$

Таким образом, радиус дуги $\beta = -\pi$ (отрезки оси ox : $-\infty$ и $+a$, $+\infty$) бесконечно велик; при возрастании

от $-\pi$ до $-\pi/2$ расстояние l убывает от ∞ до 0 , т. е. центры дуг $\beta = \text{const}$ передвигаются из точки $y = -\infty$ в начало координат, а их радиусы убывают от ∞ до a , так что линия $\beta = -\pi/2$ есть нижняя половина окружности радиуса a .

При дальнейшем возрастании β от $-\pi/2$ до 0 центры дуг передвигаются из начала координат в точку $y = +\infty$, а их



Фиг. 2.

радиусы возрастают от a до ∞ , причем радиус дуги $\beta = 0$ (отрезок $-a, +a$) бесконечно велик.

При возрастании β от 0 до $\frac{\pi}{2}$ центры дуг передвигаются из точки $y = +\infty$ в точку $y = 0$, а их радиусы убывают от ∞ до a , так что линия $\beta = \frac{\pi}{2}$ есть верхняя половина окружности радиуса a . Наконец, при изменении β от $\pi/2$ до π центры дуг передвигаются из начала координат в точку $y = +\infty$, а их радиусы возрастают от a до ∞ ; радиус дуги $\beta = +\pi$ (отрезки $-a, -\infty$ и $+a, +\infty$ оси ox) бесконечно велик.

Отметим полезную формулу для расстояния t от начала координат до вершины дуги $\beta = \beta_0$: $t = R - l$, или

$$t = a \left| \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right|. \quad (1,5)$$

Заметим еще, что дуга, дополняющая дугу $\beta = \beta_0 \geq 0$ до полной окружности, является координатной линией $\beta = \beta_0 - \pi$.

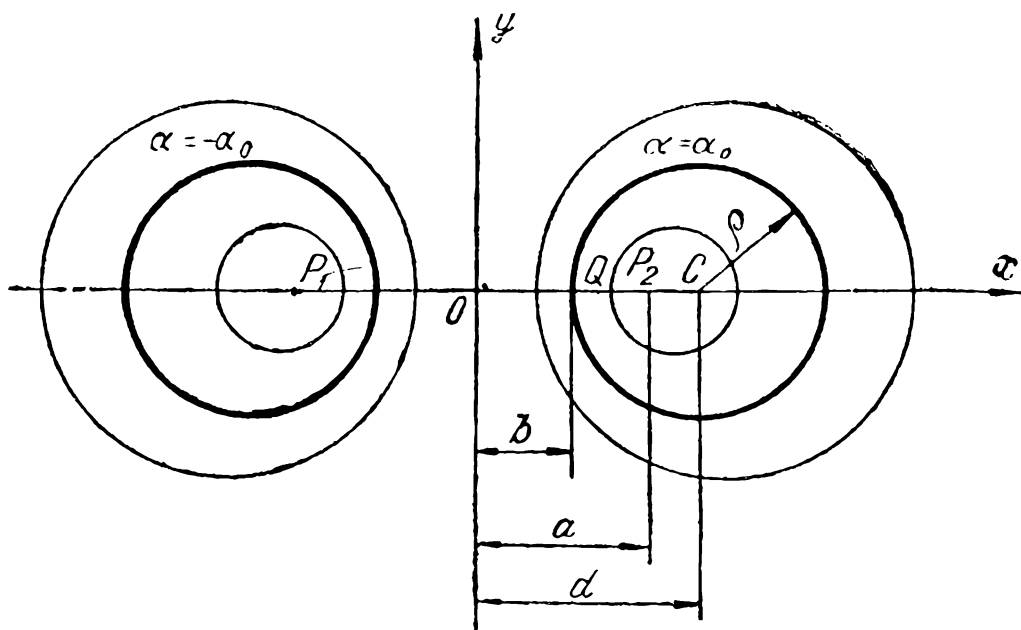
Уравнение кривой $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ может быть непосредственно получено из равенства:

$$\alpha_0 = \operatorname{lg} \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}},$$

которое можно преобразовать к такому виду:

$$(x - a \operatorname{cth} \alpha_0)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh} \alpha_0} \right)^2. \quad (1,6)$$

Последнее уравнение показывает, что координатные линии $\alpha = \text{const}$ суть эксцентрические окружности, центры которых расположены на оси ox (фиг. 3). Радиусы ρ этих окружно-



Фиг. 3.

стей и расстояния d их центров от начала координат даются формулами:

$$\rho = a / |\operatorname{sh} \alpha_0|, \quad d = a |\operatorname{cth} \alpha_0|. \quad (1,7)$$

Расстояние от начала координат до точки Q пересечения окружности $\alpha = \alpha_0$ с осью ox будет $b = d - \rho$ или

$$b = a \left| \operatorname{th} \frac{\alpha_0}{2} \right|. \quad (1,8).$$

Таким образом, радиус окружности $\alpha = -\infty$ (точка P_1) бесконечно мал; при возрастании α от $-\infty$ до 0 центры окружностей $\alpha = \text{const}$ передвигаются из точки P_1 в точку $x = -\infty$, а их радиусы возрастают от 0 до ∞ , так что ось ou (линия $\alpha = 0$) есть окружность бесконечно большого радиуса.

При дальнейшем возрастании α от 0 до ∞ центры окружностей $\alpha = \text{const}$ передвигаются из точки $x = +\infty$ в точку P_2 , которой соответствует $\alpha = +\infty$, а их радиусы убывают от бесконечности до нуля.

Выразим теперь прямоугольные координаты x и y через биполярные координаты α и β .

Решая уравнение (1,2) относительно z , получим:

$$z = a \operatorname{th} \frac{\zeta}{2}, \quad x + iy = a \operatorname{th} \frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad (1,9)$$

а отделяя здесь вещественную и мнимую части, будем иметь:

$$\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (1,10)$$

В дальнейшем нам понадобится также выражение полярного радиуса r через биполярные координаты. Из (1,10) имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta},$$

так что

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (1,11)$$

Из (1,11) видно, что бесконечно удаленная точка плоскости имеет биполярные координаты $\alpha = 0$, $\beta = \pm \pi$.

§ 2. Интегрирование гармонического уравнения в биполярных координатах

Так как биполярные координаты получаются из прямоугольных координат конформным преобразованием, то гармонический оператор от какой-либо функции преобразуется в биполярных координатах в оператор:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = g^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \right), \quad (2,1)$$

где g характеризует масштаб преобразования и дается известной формулой:

$$g = \frac{d\alpha}{ds_\alpha} = \frac{d\beta}{ds_\beta} = \frac{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}}{ds} = 1 : \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}. \quad (2,2)$$

С учетом соотношений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta} &= a \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial x}{\partial \beta} &= -a \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2,3)$$

получаем окончательно

$$g = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{a}. \quad (2,4)$$

Таким образом, гармоническое уравнение в биполярных координатах принимает вид:

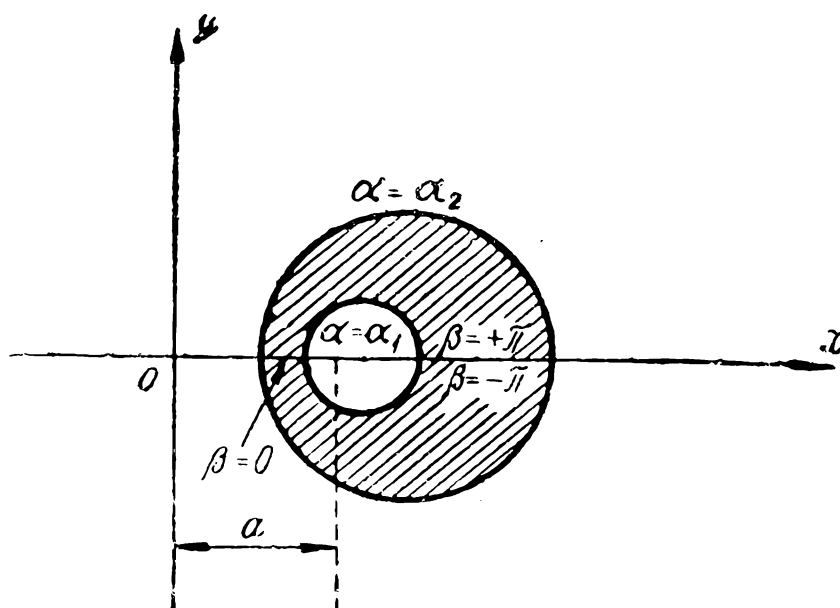
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0. \quad (2,5)$$

Очевидно, что произведения типа

$$[A_n \operatorname{ch} n\alpha + B_n \operatorname{sh} n\alpha] \cos n\beta + [C_n \operatorname{ch} n\alpha + D_n \operatorname{sh} n\alpha] \sin n\beta, \quad (2,6)$$

$$\begin{aligned} [A(m) \operatorname{ch} m\beta + B(m) \operatorname{sh} m\beta] \cos m\alpha + \\ + [C(m) \operatorname{ch} m\beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta] \sin m\alpha \end{aligned} \quad (2,7)$$

являются интегралами гармонического уравнения.



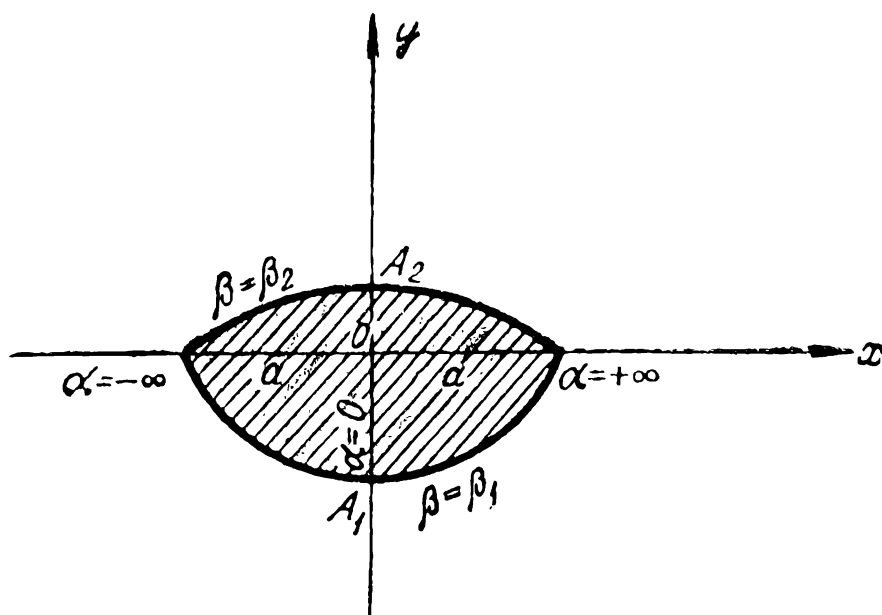
Фиг. 4.

Если мы имеем дело с областью, ограниченной двумя координатными линиями системы $\alpha = \text{const}$ (эксцентрическое

кольцо, фиг. 4), то интеграл гармонического уравнения, в силу периодичности по переменной β , ищется в виде тригонометрического ряда

$$\varphi(\alpha, \beta) = A + B\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \operatorname{ch} n\alpha + B_n \operatorname{sh} n\alpha) \cos n\beta + (C_n \operatorname{ch} n\alpha + D_n \operatorname{sh} n\alpha) \sin n\beta]. \quad (2,8)$$

Если же рассматривается область, ограниченная двумя координатными линиями системы $\beta = \text{const}$ (круговая „луночка“,



Фиг. 5.

фиг. 5), то решение будем искать в виде интеграла Фурье:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \{ [A(m) \operatorname{ch} m\beta + B(m) \operatorname{sh} m\beta] \cos m\alpha + [C(m) \operatorname{ch} m\beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta] \sin m\alpha \} dm. \quad (2,9)$$

Отметим, что уравнение (2,5) имеет еще следующие особые решения:

$$\varphi = (M\alpha + N)(P\beta + Q), \quad (2,10)$$

$$\varphi = K \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (2,11)$$

§ 3. Бигармоническое уравнение и его интегралы в биполярных координатах

Для дальнейшего полезно преобразовать оператор (2,1) к такому виду:

$$\alpha \Delta \varphi = \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) - 2 \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + 2 \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \right] (g\varphi). \quad (3,1)$$

Тогда бигармонический оператор будет

$$\Delta (\Delta \varphi) = g^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) (\Delta \varphi),$$

или после выкладок

$$\Delta^2 \varphi = g^3 \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\varphi). \quad (3,2)$$

Таким образом, бигармонический оператор от функции φ оказывается линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами от функции $g\varphi$, что дает возможность осуществить разделение переменных.

Для областей в виде эксцентрических колец решение бигармонического уравнения $\Delta^2 \varphi = 0$ ищем в виде:

$$g\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^c(\alpha) \cos n\beta + f_n^s(\alpha) \sin n\beta]. \quad (3,3)$$

После подстановки (3,3) в (3,2) получаем для $f_n^c(\alpha)$ [$f_n^s(\alpha)$] обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left[\frac{d^4}{d\alpha^4} - 2(n^2 + 1) \frac{d^2}{d\alpha^2} + (n^2 - 1)^2 \right] f_n(\alpha) = 0. \quad (3,4)$$

Если искать решение в обычной форме $f_n(\alpha) = e^{k\alpha}$, то для k имеем характеристическое уравнение $k^4 - 2(n^2 + 1)k^2 + (n^2 - 1)^2 = 0$, корнями которого являются величины $\pm(n+1)$ и $\pm(n-1)$, так что общий интеграл уравнения (3,4) будет:

$$\left. \begin{aligned} f_n(\alpha) &= A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + \\ &\quad + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha, \quad (n \geq 2) \\ f_0(\alpha) &= A_0 \operatorname{ch} \alpha + B_0 \alpha \operatorname{ch} \alpha + C_0 \operatorname{sh} \alpha + D_0 \alpha \operatorname{sh} \alpha, \\ f_1(\alpha) &= A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha + D_1 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

Для областей в виде круговых луночек имеем аналогично:

$$g\varphi = \int_0^{\infty} [f_c(m, \beta) \cos m\alpha + f_s(m, \beta) \sin m\alpha] dm, \quad (3,6)$$

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + 2(1 - m^2) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (m^2 + 1)^2 \right] f(m, \beta) = 0. \quad (3,7)$$

Подстановка $f(m, \beta) = e^{k\beta}$ дает характеристическое уравнение $k^4 + 2(1 - m^2)k^2 + (m^2 + 1)^2 = 0$ с корнями $\pm(m \pm i)$, так что

$$f(m, \beta) = A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + \\ + C(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta. \quad (3,8)$$

Что касается особых решений бигармонического уравнения, то, кроме решений типа (2,10) и (2,11), могут быть еще решения, получаемые умножением последних на x , y и r^2 .

Заметим, что часть таких особых решений совпадает с обычными решениями. В самом деле, умножение функции φ на x , y и r^2 равносильно умножению функции $g\varphi$ на $\operatorname{ch} \alpha$, $\operatorname{sh} \alpha$, $\cos \beta$ и $\sin \beta$.¹ Но особые решения типа $\alpha \operatorname{ch} \alpha$, $\alpha \operatorname{sh} \alpha$, $\alpha \cos \beta$ и $\alpha \sin \beta$ уже содержатся в функциях $f_0(\alpha)$, $f_1^c(\alpha) \cos \beta$, $f_1^s(\alpha) \sin \beta$, т. е. совпадают с неособыми решениями. Таким образом, особыми решениями бигармонического уравнения будут такие выражения:

$$g\varphi = (E \cos \beta + F \sin \beta + G \operatorname{ch} \alpha + H \operatorname{sh} \alpha) \beta, \quad (3,9)$$

$$g\varphi = (M \cos \beta + N \sin \beta + P \operatorname{ch} \alpha + Q \operatorname{sh} \alpha) \alpha \beta, \quad (3,10)$$

$$g\varphi = (T \cos \beta + U \sin \beta + V \operatorname{ch} \alpha + W \operatorname{sh} \alpha) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (3,11)$$

Использование тех или иных особых решений диктуется физическими соображениями конкретной задачи (см., например, §§ 38 и 41).

¹ Имеем:

$$g\varphi \operatorname{sh} \alpha = \varphi x; \quad g\varphi \sin \beta = \varphi y;$$

далее, согласно (1,11):

$$\varphi \frac{r^2}{a^2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \varphi = \varphi - 2 \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \varphi = \\ = -\varphi + 2 \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \varphi,$$

откуда

$$g\varphi \frac{r^2}{a} = a g\varphi + 2\varphi \cos \beta = -a g\varphi + 2\varphi \operatorname{ch} \alpha.$$

Часть первая
ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Г Л А В А II

**КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ
С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ФОРМУ
КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ**

§ 4. Постановка задачи и общее решение

Рассмотрим упругий призматический стержень с поперечным сечением в виде круговой луночки (фиг. 5), деформированный при помощи закручивающих моментов M , приложенных на его концах и направленных по оси стержня oz .

При этом в стержне возникают только два касательных напряжения τ_{xz} и τ_{yz} , которые могут быть выражены через одну функцию напряжений следующим образом:¹

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4,1)$$

Функция напряжений должна быть найдена в результате решения граничной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi &= -2\mu\theta, \\ \varphi &= 0 \text{ на контуре поперечного сечения стержня.} \end{aligned} \right\} (4,2)$$

Здесь μ — модуль сдвига материала стержня, а θ — угол закручивания на единицу длины.

Граничное условие для функции φ для рассматриваемого контура принимает вид:

$$\varphi(\alpha, \beta_1) = \varphi(\alpha, \beta_2) = 0. \quad (4,3)$$

¹ См., например, [14], стр. 257.

С целью сведения задачи к решению гармонического уравнения положим:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \mu \theta a^2 \left\{ f(\alpha, \beta) + \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4,4)$$

Так как $\Delta r^2 = 4$, то для безразмерной функции $f(\alpha, \beta)$ получаем гармоническое уравнение

$$\Delta f = 0. \quad (4,5)$$

На контуре поперечного сечения функция f должна удовлетворять граничным условиям:

$$f(\alpha, \beta_1) = \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right]_{\beta = \beta_1}, \quad f(\alpha, \beta_2) = \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right]_{\beta = \beta_2},$$

или, если учесть соотношение (1,11), таким условиям:

$$f(\alpha, \beta_1) = -2 \frac{\cos \beta_1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_1}, \quad f(\alpha, \beta_2) = -2 \frac{\cos \beta_2}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_2}. \quad (4,6)$$

Согласно (2,9), с учетом четности функции φ по переменной α , ищем решение уравнения (4,5) в виде интеграла:

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} [A_1(m) \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + A_2(m) \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)] \cos m\alpha \, dm. \quad (4,7)$$

Функции $A_1(m)$ и $A_2(m)$ должны определяться граничными условиями (4,6). Для фактического их определения разложим правые части (4,6) в соответствующие интегралы Фурье:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} = \int_0^{\infty} \psi(\beta, m) \cos m\alpha \, dm,$$

$$\psi(\beta, m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha \, d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (4,8)$$

Применяя формулу П (1), имеем:

$$\psi(\beta, m) = \frac{2}{\operatorname{sh} m\pi} \cdot \frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta}, \quad (4,9)$$

Таким образом, граничные условия (4,6) принимают вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A_2(m) \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1) \cos m\alpha \, dm &= \\ &= -4 \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_1}{\operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha \, dm, \\ \int_0^{\infty} A_1(m) \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1) \cos m\alpha \, dm &= \\ &= -4 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_2}{\operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha \, dm, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} A_1(m) &= -4 \operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\operatorname{sh} m\beta_2}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)}, \\ A_2(m) &= -4 \operatorname{ctg} \beta_1 \frac{\operatorname{sh} m\beta_1}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)}. \end{aligned} \quad (4,10)$$

Имея функции $A_1(m)$ и $A_2(m)$, можем сразу написать точное решение поставленной граничной задачи для функции $\varphi(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\mu\theta a^2} &= \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - \\ &- 2 \left\{ \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \cos m\alpha \, dm + \right. \\ &\left. + \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \cos m\alpha \, dm \right\}. \end{aligned} \quad (4,11)$$

Сходимость полученных несобственных интегралов при $m=0$ очевидна, а при $m=\infty$ обеспечивается условием $-\pi < \beta_1 < \beta < \beta_2 < +\pi$.

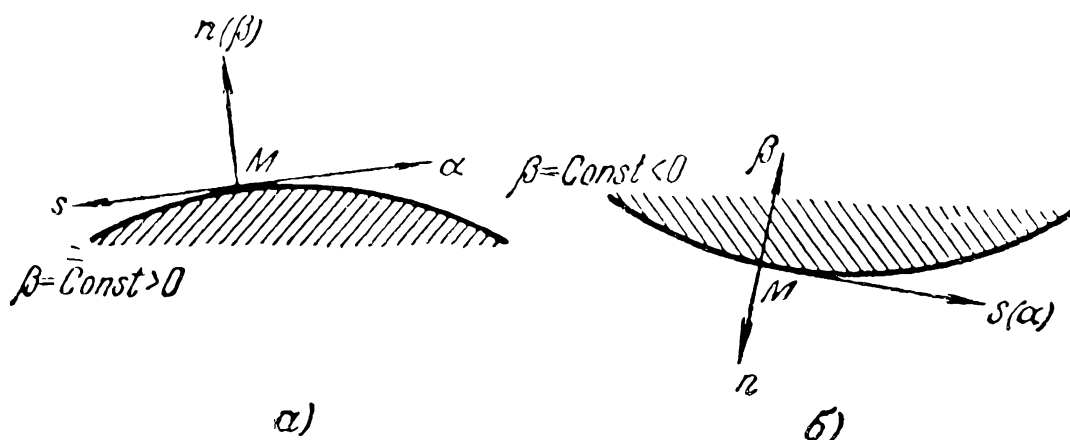
В качестве контроля положим в (4,11) $\beta_2 = -\beta_1 = \pi/2$. При этом рассматриваемая луночка переходит в круг, и (4,11) дает:

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\mu\theta a^2} = \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right],$$

что совпадает с функцией напряжений для круга, как и должно быть.

§ 5. Касательные напряжения при кручении

Выведем формулы для напряжений в произвольной точке поперечного сечения стержня. Проекция скалывающего напряжения, действующего в точке M (фиг. 6), на касательную



Фиг. 6.

и нормаль к линии $\beta = \text{const}$, проходящей через эту точку, даются известными формулами:¹

$$\tau_n = \tau_{\beta z} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \tau_s = \tau_{\alpha z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (5,1)$$

Из (2,2) нетрудно видеть, что $\frac{\partial}{\partial s} = \mp g \frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial}{\partial n} = \pm g \frac{\partial}{\partial \beta}$, причем верхний знак здесь и в дальнейшем относится к случаю $\beta > 0$ (фиг. 6а), а нижний — к случаю $\beta < 0$ (фиг. 6б).

¹ [6], стр. 206.

Применяя формулу (4,11), получаем следующие выражения для касательных выражений в любой точке стержня:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu\theta g a^2} \tau_{\alpha z} = & \pm \left\{ \frac{\operatorname{ch} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \right. \\ & + 2 \left[\operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{ch} m(\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \cos m\alpha \, dm - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{ch} m(\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \cos m\alpha \, dm \right] \right\}; \quad (5,2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu\theta g a^2} \tau_{\beta z} = & \pm \left\{ \frac{\cos \beta \operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} - \right. \\ & - 2 \left[\operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \sin m\alpha \, dm + \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \sin m\alpha \, dm \right] \right\}. \quad (5,3) \end{aligned}$$

При помощи (5,3) можно проверить выполнение граничных условий. В самом деле, при $\beta = \beta_1$ получаем:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\mu\theta g(\beta_1) a^2} \tau_{\beta z} \Big|_{\beta=\beta_1} & = \\ & = \frac{\operatorname{sh} \alpha \cos \beta_1}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_1)^2} - 2 \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta_1}{\operatorname{sh} m\pi} \sin m\alpha \, dm, \end{aligned}$$

или после применения формулы П(20):

$$- \frac{1}{\mu\theta g(\beta_1) a^2} \tau_{\beta z} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\operatorname{sh} \alpha \cos \beta_1}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_1)^2} - 2 \operatorname{ctg} \beta_1 \frac{\sin \beta_1 \operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_1)^2},$$

откуда следует, что $\tau_{\beta z} \Big|_{\beta=\beta_1} \equiv 0$, как и должно быть, ибо на боковой поверхности стержня касательные напряжения отсутствуют. Таким же способом можно показать, что $\tau_{\beta z} \Big|_{\beta=\beta_2} \equiv 0$. Максимальные касательные напряжения достигаются на кон-

туре в точках A_1 ($\alpha = 0$, $\beta = \beta_1$) и A_2 ($\alpha = 0$, $\beta = \beta_2$) соответственно¹ (фиг. 5) и даются формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\mu a \theta} = \frac{\tau_{\alpha z}}{\mu a \theta} \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=\beta_1}} = & - (1 + \cos \beta_1) \left\{ \frac{\sin \beta_1}{(1 + \cos \beta_1)^2} + \right. \\ & + 2 \left[\operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_2}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m (\beta_2 - \beta_1)} dm - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_1 \operatorname{ch} m (\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m (\beta_2 - \beta_1)} dm \right] \right\}, \quad (5,4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_2}{\mu a \theta} = \frac{\tau_{\alpha z}}{\mu a \theta} \Big|_{\beta=\beta_2} = & (1 + \cos \beta_2) \left\{ \frac{\sin \beta_2}{(1 + \cos \beta_2)^2} + \right. \\ & + 2 \left[\operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_2 \operatorname{ch} m (\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m (\beta_2 - \beta_1)} dm - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_1}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m (\beta_2 - \beta_1)} dm \right] \right\}. \quad (5,5) \end{aligned}$$

§ 6. Вычисление жесткости при кручении

Жесткость при кручении C определяет связь между крутящим моментом M и углом закручивания на единицу длины θ , а именно

$$C = M/\theta. \quad (6,1)$$

Для крутящего момента имеем формулу²:

$$M = 2 \int \int \varphi dx dy = 2 \int \int \varphi ds_\alpha ds_\beta. \quad (6,2)$$

Но, согласно (2,2),

$$ds_\alpha \cdot ds_\beta = \frac{d\alpha \cdot d\beta}{g^2}, \quad (6,3)$$

¹ Это справедливо для луночек определенной формы — см. стр. 37.

² [14], стр. 259.

так что $M = 2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi d\alpha d\beta}{g^2}$. Это после подстановки значения g и учета четности подинтегральной функции дает

$$\frac{C}{4\mu a^4} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_0^{\infty} \frac{\varphi/\mu\theta a^2}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} d\alpha d\beta,$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{C}{4\mu a^4} &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} - \\ &- 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_2 dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) d\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} - \\ &- 2 \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_1 dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) d\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2}. \quad (6,4) \end{aligned}$$

Пользуясь П(7) и П(2), произведем первое интегрирование по переменной α , после чего будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{C}{4\mu a^4} &= \frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} [\beta (3 - 2 \sin^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta] \frac{\cos \beta d\beta}{\sin^5 \beta} - \\ &- 2\pi \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_2 dm}{\operatorname{sh}^2 m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \right) d\beta - \\ &- 2\pi \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_1 dm}{\operatorname{sh}^2 m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \right) d\beta. \quad (6,5) \end{aligned}$$

Для выполнения второго интегрирования по переменной β подсчитаем следующие вспомогательные интегралы:

$$J_s = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \right) d\beta, \quad J_c = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\operatorname{ch} m\beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \right) d\beta. \quad (6,6)$$

Первый из них берется сразу и равен $\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \right)^2 \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$.

Для вычисления второго интеграла продифференцируем его по параметру m и проинтегрируем по частям, после чего получим:

$$\frac{\partial J_c}{\partial m} = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta \operatorname{ch} 2m\beta}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta \right]_{\beta_1}^{\beta_2}. \quad (6,7)$$

Так как $J_c|_{m=0} = 0$, то, интегрируя (6,7) по m , будем иметь:

$$J_c = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{ch} m\beta_2}{\sin^2 \beta_2} - \frac{\operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{ch} m\beta_1}{\sin^2 \beta_1} \right] - \frac{m}{2} (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1). \quad (6,8)$$

Подставляя полученные значения J_c и J_s в (6,5) и производя преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \frac{C}{4\mu a^4} = & \frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} [\beta (3 - 2 \sin^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta] \frac{\cos \beta d\beta}{\sin^5 \beta} - \\ & - \pi (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m\beta_2}{\operatorname{sh}^2 m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} dm + \\ & + \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\sin^2 \beta_1} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 m\beta_1}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm - \frac{\operatorname{ctg} \beta_2}{\sin^2 \beta_2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 m\beta_2}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm. \quad (6,9) \end{aligned}$$

Наконец, применяя П(36), а также вычисляя интеграл

$$\begin{aligned} \int [\beta (3 - 2 \sin^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta] \frac{\cos \beta d\beta}{\sin^5 \beta} = \\ = \frac{1}{4} \left[\frac{\beta (1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \beta)}{\sin^2 \beta} + \operatorname{ctg} \beta (1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \beta) \right], \quad (6,10) \end{aligned}$$

получим после выкладок окончательную формулу для жесткости при кручении:

$$\begin{aligned} \frac{C}{\mu a^4} = & \frac{1}{2} \frac{\beta + \sin \beta \cos \beta (2 \cos^2 \beta - 3)}{\sin^4 \beta} \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} - \\ & - 4\pi (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m\beta_2}{\operatorname{sh}^2 m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} dm. \quad (6,11) \end{aligned}$$

§ 7. Кручение кругового цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси

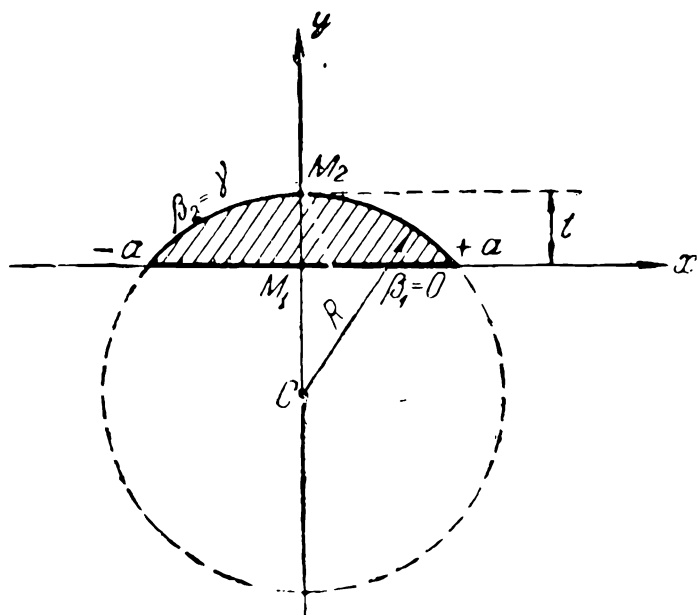
Если положить $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma < \pi$, то рассматриваемое поперечное сечение стержня превращается в круговой сегмент (фиг. 7), т. е. мы имеем дело с круговым цилиндром, срезанным плоскостью, параллельной его оси.

Максимальное касательное напряжение на прямолинейной части контура ($\beta = 0$) достигается в точке M_1 и дается формулой (5,4) при $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = \gamma$. Имеем:

$$\frac{\tau_1}{\mu a \theta} = -4 \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \, dm}{\operatorname{sh} m \pi} +$$

$$+ 4 \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_1 \operatorname{ch} m (\gamma - \beta_1)}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_1)} \, dm. \quad (7,1)$$

Нетрудно показать, что, благодаря наличию величины $\operatorname{sh} m \pi$ в знаменателе подинтегральной функции, можно переходить к пределу под знаком интеграла. Осуществляя предельный переход и учитывая еще П(28), получаем:



Фиг. 7.

$$\frac{\tau_1}{\mu a \theta} = -\operatorname{ctg} \gamma +$$

$$+ 4 \int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{cth} m \gamma}{\operatorname{sh} m \pi} \, dm, \quad (7,2)$$

или, вводя обозначения:

$$\tau_0 = \frac{\tau_1}{\mu R \theta},$$

$$J_0 = \int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{cth} m \gamma}{\operatorname{sh} m \pi} \, dm, \quad (7,3)$$

получаем, с учетом равенства $a = R \sin \gamma$,¹ окончательную формулу для коэффициента τ_0 :

$$\tau_0 = 4J_0 \sin \gamma - \cos \gamma. \quad (7,4)$$

¹ См. формулу (1,4).

Максимальное касательное напряжение на дуговой части контура ($\beta = \gamma$) достигается в точке M_2 и дается формулой (5,5) при $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = \gamma$. Имеем:

$$\frac{\tau_2}{\mu a \theta} = (1 + \cos \gamma) \left\{ \frac{\sin \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} + 2 \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} m \gamma}{\operatorname{sh} m \pi} dm - \right. \\ \left. - 2 \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_1}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_1)} dm \right\}. \quad (7,5)$$

Переходя к пределу и применяя П(17), получаем:

$$\frac{\tau_2}{\mu a \theta} = (1 + \cos \gamma) \left\{ \frac{\sin \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{1 + \cos \gamma} - 2 \int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m \gamma} \right\}. \quad (7,6)$$

Вводя обозначения:

$$\tau_\gamma = \frac{\tau_2}{\mu R \theta}, \quad J_\gamma = \int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{\operatorname{sh} m \pi \operatorname{sh} m \gamma}, \quad (7,7)$$

после небольших преобразований получаем окончательную формулу для коэффициента τ_γ :

$$\tau_\gamma = 1 - 2 \sin \gamma (1 + \cos \gamma) J_\gamma. \quad (7,8)$$

Подсчитаем жесткость при кручении по формуле (6,11), где полагаем $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma$:

$$\frac{C}{\mu a^4} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + \sin \gamma \cos \gamma (2 \cos^2 \gamma - 3)}{\sin^4 \gamma} - \\ - \frac{1}{2} \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \frac{\beta_1 + \sin \beta_1 \cos \beta_1 (2 \cos^2 \beta_1 - 3)}{\sin^4 \beta_1} - \\ - 4\pi \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}^2 \beta_1 - 2 \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \beta_1) \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_1 \operatorname{sh} m \gamma}{\operatorname{sh}^2 m \pi \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_1)} dm. \quad (7,9)$$

Вычисляем следующие пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_1 \operatorname{sh} m \gamma}{\operatorname{sh}^2 m \pi \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_1)} dm &= \\ &= \int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{\operatorname{sh}^2 m \pi} = \frac{1}{6\pi} \quad [\text{см. П(37)}], \end{aligned}$$

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_1 \operatorname{sh} m \gamma}{\operatorname{sh}^2 m \pi \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_1)} dm \approx \frac{1}{6\pi} \frac{1}{\beta_1} + \int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} m \gamma}{\operatorname{sh}^2 m \gamma} dm,$$

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \frac{\beta_1 + \sin \beta_1 \cos \beta_1 (2 \cos^2 \beta_1 - 3)}{\sin^4 \beta_1} \approx -\frac{4}{3\beta_1},$$

после чего равенство (7,9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{C}{\mu a^4} &= \frac{1}{2 \sin^4 \gamma} [\gamma + \sin \gamma \cos \gamma (2 \cos^2 \gamma - 3)] + \\ &+ \frac{4}{3} \operatorname{ctg} \gamma - 4\pi \int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} m \gamma}{\operatorname{sh}^2 m \pi} dm. \quad (7,10) \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\zeta = \frac{C}{\mu R^4}, \quad J = \int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} m \gamma}{\operatorname{sh}^2 m \pi} dm, \quad (7,11)$$

после выкладок получаем окончательную формулу для коэффициента ζ :

$$\zeta = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12} \sin 2\gamma (2 \sin^2 \gamma - 3) - 4\pi J. \quad (7,12)$$

Для частного случая $\gamma = \pi/2$ рассматриваемый сегмент превращается в полукруг. При этом квадратуры в формулах

(7,4), (7,8) и (7,12) выполняются, а именно:

$$J_0 = \int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh} m\pi} dm = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{2}{3\pi},$$

$$J_{\gamma} = \int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2}} dm - \int_0^{\infty} \frac{m^2 dm}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right] = \\ = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2},$$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm = \frac{1}{4} \left[\int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^3 \frac{m\pi}{2}} dm - \int_0^{\infty} \frac{m^3 dm}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right] = \\ = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{16}$$

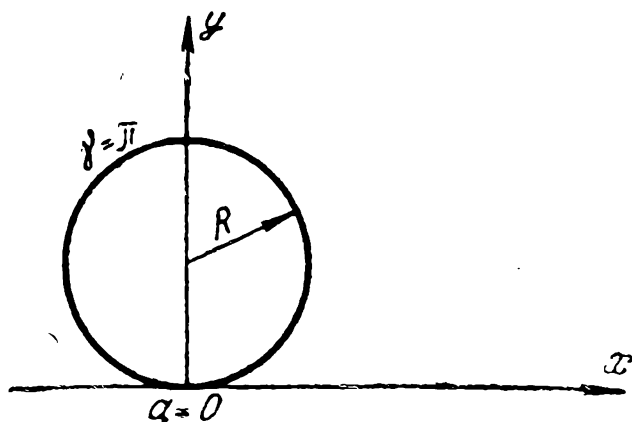
([см. П(38), П(39), П(31), П(40) и П(29)]), после чего имеем:

$$\tau_0 = \frac{8}{3\pi}, \quad \tau_{\gamma} = 2 - \frac{4}{\pi}, \quad \zeta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}. \quad (7,13)$$

Значения этих коэффициентов совпадают с соответствующими значениями, полученными для полукруглого сечения иными способами: Сен-Венаном [15] — в полярных координатах и Динником [16] — с помощью бесселевых функций.

В предельном случае ¹ $\gamma = \pi$ получаем круглое сечение (фиг. 8). Формулы (7,4), (7,8) и (7,12) дают:

$$\tau_0 = \tau_{\gamma} = 1, \quad \zeta = \frac{\pi}{2}, \quad (7,14)$$



Фиг. 8.

как и должно быть.

В табл. 1 приведены значения коэффициентов τ_0 , τ_{γ} , ζ для значений γ , соответствующих значениям отношения высоты

¹ При этом $a \rightarrow 0$, но величина радиуса $R = a/\sin \gamma$ остается конечной.

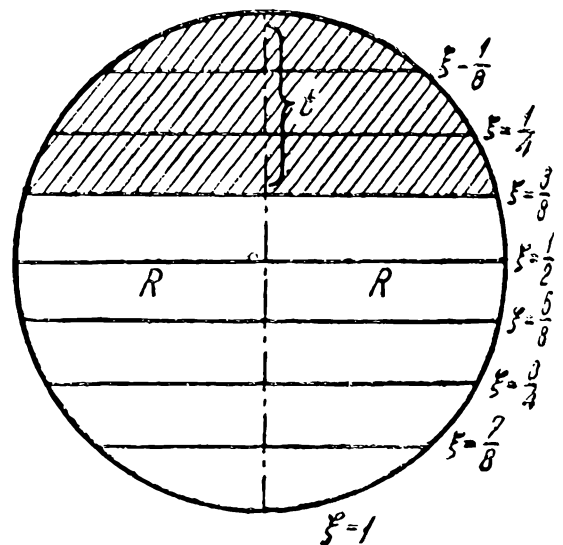
луночки к диаметру круга: $\xi = \frac{t}{2R} = \frac{m}{8}$ ($m = 1, 2, \dots, 7, 8$) (фиг. 9), причем из (1,4) следует, что

$$\xi = \sin^2 \frac{\gamma}{2} \quad (7,15)$$

Интегралы, входящие в соответствующие формулы, подсчитывались следующим образом. Промежуток $(0, \infty)$ раз-

Таблица 1

| ξ | γ | τ_0 | τ_γ | ζ |
|-------|----------|----------|---------------|---------|
| 1/8 | 0,722 | 0,245 | 0,221 | 0,0152 |
| 1/4 | $\pi/3$ | 0,444 | 0,407 | 0,0375 |
| 3/8 | 1,31 | 0,659 | 0,562 | 0,132 |
| 1/2 | $\pi/2$ | 0,848 | 0,726 | 0,297 |
| 5/8 | 1,83 | 1,03 | 0,824 | 0,553 |
| 3/4 | $2\pi/3$ | 1,15 | 0,920 | 0,931 |
| 7/8 | 2,42 | 1,21 | 0,972 | 1,26 |
| 1 | π | 1 | 1 | $\pi/2$ |



Фиг. 9.

бивался на два промежутка: $(0, N)$ и (N, ∞) , причем в первом промежутке интеграл подсчитывался численно, а во втором гиперболические функции заменялись на показательные; при этом члены с отрицательными показателями отбрасывались, после чего квадратуры оказывались выполнимыми. Число N выбиралось таким образом, чтобы сделанные пренебрежения не влияли на результаты с принятой степенью точности.

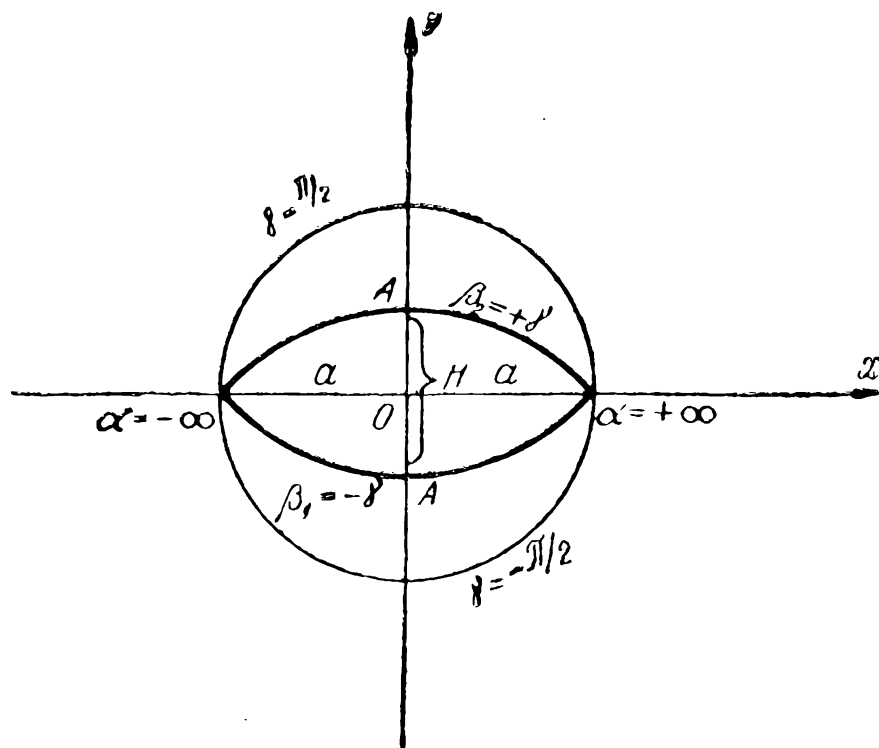
В качестве примера, приведем расчетную формулу для интеграла J :

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm = \int_0^N \frac{m^3 \operatorname{cth} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm + 4 \int_N^{\infty} \frac{m^3}{e^{2m\pi}} dm = \\
 &= \int_0^N \frac{m^3 \operatorname{cth} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm + \frac{e^{-2N\pi}}{2\pi} \left[N^3 + \frac{3N^2}{4\pi^2} + \frac{3}{4\pi^3} \left(N + \frac{1}{2\pi} \right) \right]. \quad (7,16)
 \end{aligned}$$

При расчетах в формуле (7,16) было выбрано $N = 4$.

§ 8. Кручение стержня с поперечным сечением в виде симметричной круговой луночки

При $\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$ рассматриваемое поперечное сечение стержня принимает форму круговой луночки, симметричной относительно оси ox (фиг. 10).



Фиг. 10.

Максимальные касательные напряжения, даваемые формулами (5,4) и (5,5), совпадают друг с другом. Обозначив

$$\tau^* = \frac{\tau}{\mu a \theta} = \frac{\tau_1}{\mu a \theta} \Big|_{\beta_2 = -\beta_1 = \gamma} = \frac{\tau_2}{\mu a \theta} \Big|_{\beta_2 = -\beta_1 = \gamma}, \quad (8,1)$$

получим

$$\begin{aligned} \tau^* = (1 + \cos \gamma) & \left\{ \frac{\sin \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} + 2 \left[\operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} 2m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} 2m\gamma} dm - \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} 2m\gamma} dm \right] \right\} = (1 + \cos \gamma) \times \\ & \times \left\{ \frac{\sin \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} + 2 \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh}^2 m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{ch} m\gamma} dm \right\}, \end{aligned}$$

или с учетом П (17):

$$\tau^* = \frac{1}{\sin \gamma} - 2 \operatorname{ctg} \gamma (1 + \cos \gamma) J^*, \quad J^* = \int_0^{\infty} \frac{m dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{ch} m\gamma}. \quad (8,2)$$

Жесткость при кручении на основании (6,11) дается формулой:

$$\zeta^* = \frac{C}{\mu a^4} \Big|_{\beta_2 = -\beta_1 = \gamma} = \frac{1}{\sin^4 \gamma} [\gamma + \sin \gamma \cos \gamma (2 \cos^2 \gamma - 3)] - 16\pi \operatorname{ctg}^2 \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh}^2 m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi \operatorname{sh} 2m\gamma} dm,$$

или

$$\left. \begin{aligned} \zeta^* &= \frac{1}{\sin^4 \gamma} [\gamma + \sin \gamma \cos \gamma (2 \cos^2 \gamma - 3) - 8\pi \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \cdot I^*], \\ I^* &= \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm. \end{aligned} \right\} (8,3)$$

Для круглого сечения ($\gamma = \pi/2$) формулы (8,2) — (8,3) дают:

$$\tau^* = 1, \quad \zeta^* = \pi/2, \quad (8,4)$$

как и должно быть.

Займемся теперь исследованием вопроса о поведении касательных напряжений в углах луночки ($\alpha = \pm \infty$).

Рассмотрим значение касательного напряжения $\tau_{\beta z}$ в точках отрезка $(-a, +a)$, т. е. при $\beta = 0$. Введем обозначение:¹

$$\tau(\alpha) = \tau_{\beta z} \Big|_{\substack{\beta_2 = -\beta_1 = \gamma \\ \beta = 0}} \quad (8,5)$$

Из (5,3) получаем

$$\frac{\tau(\alpha)}{\mu a \theta} = (\operatorname{ch} \alpha + 1) \left\{ \frac{\operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2} - 4 \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh}^2 m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} 2m\gamma} \sin m\alpha dm \right\},$$

¹ Для простоты мы исследуем лишь симметричную луночку. Исследование для общего случая проводится аналогично.

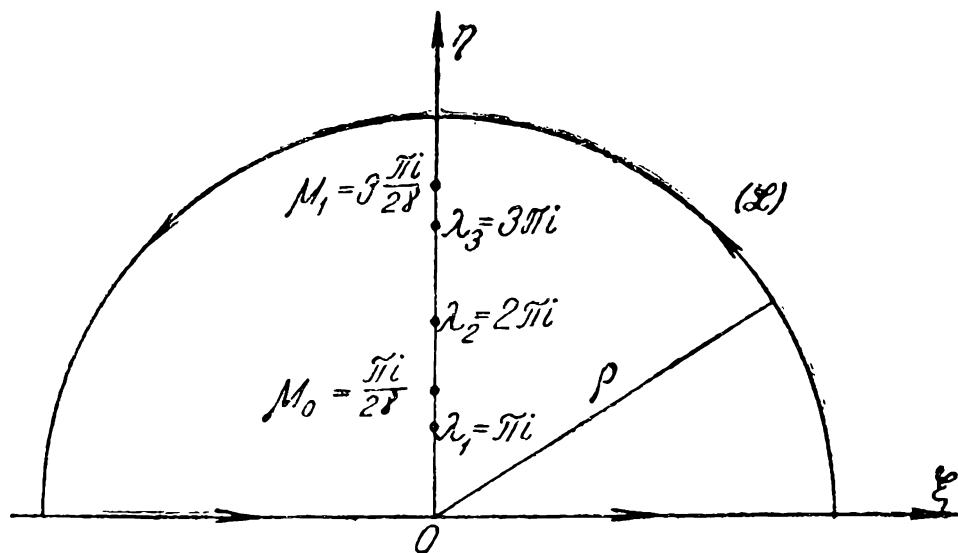
или

$$\frac{\tau(\alpha)}{\mu\alpha\theta} = \frac{\text{sh } \alpha}{\text{ch } \alpha + 1} - 2 \text{ctg } \gamma (\text{ch } \alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \text{ sh } m\gamma}{\text{sh } m\pi \text{ ch } m\gamma} \sin m\alpha \, dm. \quad (8,6)$$

Для того чтобы исследовать поведение $\tau(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \pm\infty$, представим интеграл, входящий в (8,6), в виде бесконечного ряда с помощью теоремы о вычетах. Запишем этот интеграл в таком виде:

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{m \text{ sh } m\gamma}{\text{sh } m\pi \text{ ch } m\gamma} \sin m\alpha \, dm = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m \text{ sh } m\gamma}{\text{sh } m\pi \text{ ch } m\gamma} e^{im\alpha} \, dm. \quad (8,7)$$

Интегрирование по вещественной оси ξ ($m = \xi + i\eta$) можно заменить интегрированием по контуру L , изображенному



Фиг. 11.

на фиг. 11 ($\rho \rightarrow \infty$), ибо нетрудно показать, что при $\rho \rightarrow \infty$ интеграл по полуокружности исчезает.

Интеграл по L в свою очередь может быть заменен произведением $2\pi i$ на сумму вычетов подинтегральной функции. Особые точки подинтегральной функции являются полюсами и разбиваются на две группы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= ki; & k &= 1, 2, 3, \dots; & (\text{sh } \lambda_k \pi &= 0), \\ \mu_k &= \frac{2k+1}{2\gamma} \pi i; & k &= 0, 1, 2, \dots; & (\text{ch } \mu_k \gamma &= 0). \end{aligned} \right\} \quad (8,8)$$

Итак,

$$I(\alpha) = \pi \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k \gamma}{\pi \operatorname{ch} \lambda_k \pi \operatorname{ch} \lambda_k \gamma} e^{i\lambda_k \alpha} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k \gamma}{\operatorname{sh} \mu_k \pi \cdot \gamma \operatorname{sh} \mu_k \gamma} e^{i\mu_k \alpha} \right\} = \pi (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (8,9)$$

Так как нас интересует $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau(\alpha)$, а интеграл $I(\alpha)$ в (8,6) умножается на $\operatorname{ch} \alpha \rightarrow \frac{1}{2} e^\alpha$ при $\alpha \rightarrow \infty$, то мы сразу замечаем, что при $\alpha \rightarrow \infty$ все члены ряда σ_1 , кроме первого, будучи умножены на e^α , в пределе, при $\alpha \rightarrow \infty$, стремятся к нулю, так что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\sigma_1 \cdot e^\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\frac{e^\alpha}{\pi} \cdot \frac{i \operatorname{sh} i\gamma}{\operatorname{ch} \pi i \cdot \operatorname{ch} i\gamma} \cdot e^{-\alpha} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \gamma. \quad (8,10)$$

Что касается ряда σ_2 , то здесь следует различать два случая:

$$\text{а) } \gamma < \pi/2, \quad \frac{2k+1}{2\gamma} \pi > 1,$$

при этом

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\sigma_2 \cdot e^\alpha) = 0; \quad (8,11)$$

$$\text{б) } \gamma > \pi/2, \quad \frac{2k+1}{2\gamma} \pi < 1,$$

в этом случае

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\sigma_2 \times e^\alpha) = \infty. \quad (8,12)$$

Таким образом, из (8,6) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau(\alpha) &= 1 - 2 \operatorname{ctg} \gamma \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma = 0 \quad \text{при } \gamma < \pi/2, \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau(\alpha) &= \infty \quad \text{при } \gamma > \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (8,13)$$

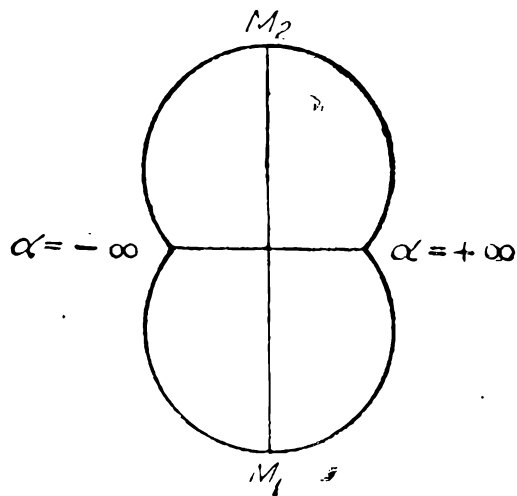
При $\gamma = \pi/2$ такого исследования проводить не нужно, ибо из (8,6) сразу следует, что $\tau(\infty) = \mu a \theta$.

Итак, можно сделать следующий вывод: при отсутствии входящих углов ($\gamma < \pi/2$) напряжения в углах луночки

равны нулю; при наличии входящих углов ($\gamma > \pi/2$, фиг. 12) напряжения в углах луночки принимают бесконечно большие значения, так что напряжения в точках M_1 и M_2 не будут максимальными и не могут являться расчетными.¹ Напряжения в таком стержне должны изучаться экспериментальным путем.

Таблица 2

| η | γ | τ^* | ζ^* |
|--------|----------|----------|-----------|
| 1/8 | 0,248 | 0,242 | 0,0144 |
| 1/4 | 0,490 | 0,445 | 0,0352 |
| 3/8 | 0,718 | 0,601 | 0,102 |
| 1/2 | 0,928 | 0,743 | 0,243 |
| 5/8 | 1,12 | 0,835 | 0,472 |
| 3/4 | 1,29 | 0,912 | 0,878 |
| 7/8 | 1,44 | 0,962 | 1,32 |
| 1 | $\pi/2$ | 1 | $\pi/2$ |



Фиг. 12.

В табл. 2 даны значения τ^* и ζ^* для значений $\gamma \leq \pi/2$, соответствующих значениям отношения ширины луночки к ее длине: $\eta = \frac{H}{2a} = \frac{m}{8}$ ($m = 1, 2, \dots, 7, 8$), причем, согласно (1,4),

$$\eta = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \quad (8,14)$$

§ 9. Кручение кругового цилиндра, ослабленного полукруглым продольным пазом

Интерес представляет круговая луночка, у которой продолжение дуги $\beta = \beta_2 > \pi/2$ проходит через центр дуги $\beta = \beta_1 < \pi/2$ (фиг. 13).

Покажем, прежде всего, что в этом случае

$$\beta_2 = 2\beta_1. \quad (9,1)$$

¹ Для срезанного цилиндра (§ 7) можно показать, что при всех $\gamma < \pi$ напряжения в углах луночки равны нулю.

Воспользуемся соотношениями (1,4), которые дают

$$OO_1 = a \operatorname{ctg} \beta_1, \quad OO_2 = a |\operatorname{ctg} \beta_2|, \quad R_2 = \frac{a}{\sin \beta_2}, \quad (9,2)$$

и составим очевидное равенство $OO_1 + OO_2 = R_2$.

Имеем:

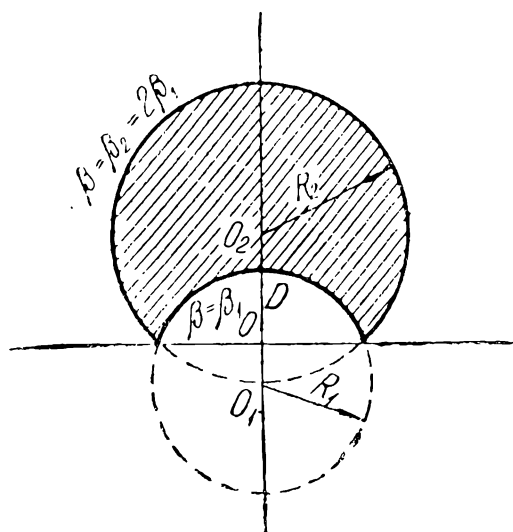
$$a \operatorname{ctg} \beta_1 - a \operatorname{ctg} \beta_2 = \frac{a}{\sin \beta_2},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{1}{\sin \beta_2} + \operatorname{ctg} \beta_2,$$

или

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \operatorname{ctg} \frac{\beta_2}{2}, \quad \beta_2 = 2\beta_1,$$



Фиг. 13.

что и требовалось доказать. Оказывается, что в этом специальном случае квадратуры в формулах (5,4), (5,5) и (6,11) можно выполнить.

Наибольший интерес представляет напряжение на дне паза (точка D), даваемое формулой (5,4) при $\beta_2 = 2\beta_1$:

$$\frac{\tau}{\mu a \theta} = \frac{\tau_1}{\mu a \theta} = - (1 + \cos \beta_1) \left\{ \frac{\sin \beta_1}{(1 + \cos \beta_1)^2} + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{ctg} 2\beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} 2m\beta_1}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m\beta_1} dm - 2 \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} m\beta_1}{\operatorname{sh} m\pi} dm \right\},$$

или

$$\frac{\tau}{\mu a \theta} = - (1 + \cos \beta_1) \left\{ \frac{\sin \beta_1}{(1 + \cos \beta_1)^2} + \right. \\ \left. + 2 (2 \operatorname{ctg} 2\beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_1) \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} m\beta_1}{\operatorname{sh} m\pi} dm \right\}. \quad (9,3)$$

Применяя П(17), получаем:

$$\frac{\tau}{\mu a \theta} = - \left[\frac{\sin \beta_1}{1 + \cos \beta_1} + 2 \operatorname{ctg} 2\beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_1 \right],$$

или после преобразований:

$$\frac{\tau}{\mu a \theta} = \frac{\sin \beta_1}{\cos \beta_1 (1 + \cos \beta_1)}. \quad (9,4)$$

Можно выразить полученное выражение через радиусы R_1 и R_2 . В самом деле,

$$\frac{\sin \beta_1}{\cos \beta_1 (1 + \cos \beta_1)} = \frac{1 - \cos \beta_1}{\sin \beta_1 \cos \beta_1} = \frac{2}{\sin \beta_2} - \frac{1}{\sin \beta_1} = 2 \frac{R_2}{a} - \frac{R_1}{a}.$$

Итак,

$$\frac{\tau}{\mu \theta} = 2R_2 - R_1. \quad (9,5)$$

Из этой формулы сразу можно сделать вывод, что при малых радиусах выточки ($R_1 \ll 2R_2$)

$$\tau \approx 2R_2 \mu \theta, \quad (9,6)$$

т. е. напряжение на дне паза получается вдвое больше, чем максимальное напряжение для случая сплошного цилиндра.¹

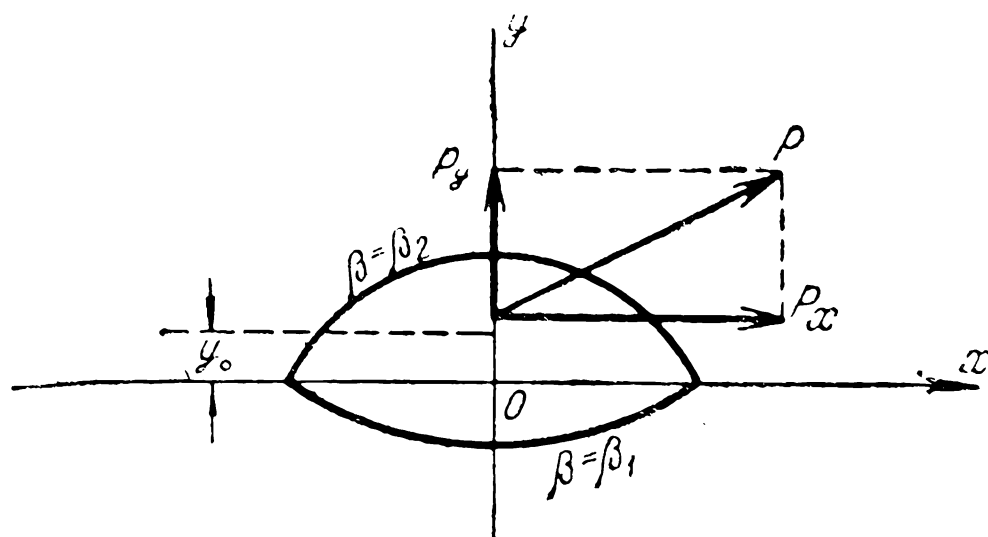
¹ Этот результат был получен Вебером [17] другим способом.

ГЛАВА III

ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

§ 10. Постановка задачи

Пусть упругий призматический стержень с поперечным сечением в виде круговой луночки подвергается действию поперечной силы P ,¹ приложенной на его конце (фиг. 14).



Фиг. 14.

При этих условиях в стержне возникают три упругих напряжения: σ_z , τ_{xz} и τ_{yz} .

Нормальное напряжение σ_z дается формулой:²

$$\sigma_z = [A(x - x_0) + B(y - y_0)](z - l), \quad (10,1)$$

где

$$A = P_x/J_y, \quad B = P_y/J_x, \quad (10,2)$$

¹ Считаем, что сила P проходит через центр изгиба поперечного сечения, так что кручение отсутствует.

² См. [18], стр. 286.

J_x и J_y — соответствующие моменты инерции:

$$J_x = \int \int y^2 dx dy, \quad J_y = \int \int x^2 dx dy, \quad (10,3)$$

а x_0 и y_0 — координаты центра тяжести сечения (в нашем случае $x_0 \equiv 0$).

Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} могут быть выражены через функцию напряжений $\varphi(x, y)$:¹

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2} Ax^2, \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} By(2y_0 - y). \end{aligned} \right\} \quad (10,4)$$

Решение задачи изгиба призматического стержня сводится к нахождению функции напряжений φ в результате решения следующего уравнения, полученного академиком Л. С. Лейбеноном [19]:

$$\Delta \varphi = \frac{\nu}{1 + \nu} [A(y - y_0) - Bx]. \quad (10,5)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона материала стержня.

На контуре поперечного сечения функция φ должна удовлетворять граничному условию:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{1}{2} \left[Ax^2 \frac{\partial y}{\partial S} + By(2y_0 - y) \frac{\partial x}{\partial S} \right]. \quad (10,6)$$

§ 11. Общее решение

Желая свести поставленную задачу к гармонической проблеме, положим

$$\varphi(x, y) = \frac{\nu a^3}{1 + \nu} \left\{ \frac{1}{6} \left[A \frac{(y - y_0)^3}{a^3} - B \frac{x^3}{a^3} \right] + f(\alpha, \beta) \right\}. \quad (11,1)$$

Подставляя (11,1) в (10,5) и (10,6), получим для безразмерной функции f гармоническое уравнение:

$$\Delta f = 0 \quad (11,2)$$

¹ См. [18], стр. 287. Считаем, что произвольные функции выбраны нулями: $f_1(y) = f_2(x) \equiv 0$.

и граничное условие на контуре:

$$\begin{aligned} \frac{\nu a^3}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left[A \frac{(y-y_0)^2}{a^3} \frac{\partial y}{\partial S} - B \frac{x^2}{a^3} \frac{\partial x}{\partial S} \right] + \frac{\partial f}{\partial S} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left[Ax^2 \frac{\partial y}{\partial S} + By(2y_0 - y) \frac{\partial x}{\partial S} \right], \end{aligned}$$

или, вспоминая, что $\frac{\partial}{\partial S} = g \frac{\partial}{\partial \alpha}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\beta_i} = \frac{1}{2a^3} \left\{ A \left[\frac{1+\nu}{\nu} x^2 - (y-y_0)^2 \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + B \left[\frac{1+\nu}{\nu} y(2y_0 - y) + x^2 \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\} \Big|_{\beta=\beta_i}; \quad (i=1,2). \quad (11,3) \end{aligned}$$

Для дальнейшего это условие удобно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\beta_i} = \frac{1}{2a^3} \left\{ A \left[\frac{1+\nu}{\nu} r^2 + 2yy_0 - y_0^2 - \frac{1+2\nu}{\nu} y^2 \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + B \left[r^2 + 2 \frac{1+\nu}{\nu} yy_0 - \frac{1+2\nu}{\nu} y^2 \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\} \Big|_{\beta=\beta_i}. \quad (11,4) \end{aligned}$$

Желая выразить правую часть этого условия в биполярных координатах, применим формулы (1,10), (1,11) и (2,3), после чего получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=\beta_i} = \frac{1}{2} \left\{ A \left[\left(\frac{y_0}{a} \right)^2 + \frac{1+2\nu}{\nu} \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} - \right. \right. \\ \left. - \frac{1+\nu}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - 2 \left(\frac{y_0}{a} \right) \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \right] \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \\ \left. + B \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + 2 \frac{1+\nu}{\nu} \left(\frac{y_0}{a} \right) \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - \right. \right. \\ \left. - \frac{1+2\nu}{\nu} \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right] \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right\} \Big|_{\beta=\beta_i} = F(\alpha, \beta_i). \quad (11,5) \end{aligned}$$

В соответствии с (2,9) решение уравнения (11,2) ищем в виде:

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \{ [A_1(m) \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + A_2(m) \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)] \cos m\alpha + \\ + [B_1(m) \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + B_2(m) \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)] \sin m\alpha \} dm. \quad (11,6) \end{aligned}$$

Функции $A_1(m)$, $A_2(m)$, $B_1(m)$ и $B_2(m)$ подлежат определению из условий (11,5). Разложим правую часть равенства (11,5) в интеграл Фурье, для чего вычислим интегралы:

$$\left. \begin{aligned} C(\beta, m) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) \cos m\alpha \, d\alpha, \\ S(\beta, m) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) \sin m\alpha \, d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11,7)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{B} C(\beta, m) &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} (1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta) \cos m\alpha \, d\alpha + \\ &+ 2 \frac{1 + \nu}{\nu} \left(\frac{y_0}{a}\right) \sin \beta \int_0^{\infty} \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} \cos m\alpha \, d\alpha - \\ &- \frac{1 + 2\nu}{\nu} \sin^2 \beta \int_0^{\infty} \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^4} \cos m\alpha \, d\alpha; \quad (11,8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{A} S(\beta, m) &= \left(\frac{y_0}{a}\right)^2 \sin \beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \, d\alpha + \\ &+ \frac{1 + 2\nu}{\nu} \sin^3 \beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^4} \, d\alpha - \\ &- \frac{1 + \nu}{\nu} \sin \beta \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} \, d\alpha - \\ &- 2 \left(\frac{y_0}{a}\right) \sin^2 \beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} \, d\alpha. \quad (11,9) \end{aligned}$$

Для удобства интегрирования преобразуем эти выражения еще к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{B} C(\beta, m) = & \cos \beta \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} d\alpha + \left[3 \sin^2 \beta - 2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{1+\nu}{\nu} \left(\frac{y_0}{a} \right) \sin \beta \cos \beta \right] \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} d\alpha + \\ & + \left[2 \frac{1+\nu}{\nu} \frac{y_0}{a} \sin \beta - \frac{1+4\nu}{\nu} \cos \beta \right] \sin^2 \beta \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} d\alpha - \\ & - \frac{1+2\nu}{\nu} \sin^4 \beta \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^4} d\alpha; \quad (11,10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{A} S(\beta, m) = & \sin \beta \left[\left(\frac{y_0}{a} \right)^2 - \frac{1+\nu}{\nu} \right] \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} d\alpha + \\ & + 2 \sin \beta \left[\frac{1+\nu}{\nu} \cos \beta - \left(\frac{y_0}{a} \right) \sin \beta \right] \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} d\alpha + \\ & + \frac{1+2\nu}{\nu} \sin^3 \beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^4} d\alpha. \quad (11,11) \end{aligned}$$

Теперь, применяя П(1) — П(4), выполняем интегрирование в (11,10) и получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} m\pi}{B} C(\beta, m) = & \frac{1+\nu}{\nu} \frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin^2 \beta} \left(\operatorname{ctg} \beta + \frac{y_0}{a} \right) + \\ & + m \operatorname{ch} m\beta \left[\frac{1+2\nu}{3\nu} - \frac{1+\nu}{\nu} \left(\frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta \right) \right] + \\ & + m^2 \operatorname{sh} m\beta \left[\frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \beta + \frac{y_0}{a} \right] - \frac{1+2\nu}{6\nu} m^3 \operatorname{ch} m\beta, \quad (11,12) \end{aligned}$$

а с помощью $\Pi(1) - \Pi(3)$ имеем из (11,11):

$$\frac{\text{sh } m\pi}{mA} S(\beta, m) = \frac{1+2\nu}{6\nu} m^2 \text{sh } m\beta + \left(\frac{1}{2\nu} \text{ctg } \beta - \frac{y_0}{a} \right) m \text{ch } m\beta + \\ + \left[\left(\frac{y_0}{a} \right)^3 + \left(\frac{y_0}{a} \right) \text{ctg } \beta - \frac{1+2\nu}{3\nu} - \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \beta} \right] \text{sh } m\beta. \quad (11,13)$$

Из (11,7) следует, что

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} [C(\beta, m) \cos m\alpha + S(\beta, m) \sin m\alpha] dm, \quad (11,14)$$

так что условия (11,5) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\infty} m [-A_2(m) \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1) \sin m\alpha + \\ & + B_2(m) \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1) \cos m\alpha] dm = \\ & = \int_0^{\infty} [C(\beta_1, m) \cos m\alpha + S(\beta_1, m) \sin m\alpha] dm, \\ & \int_0^{\infty} m [-A_1(m) \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1) \sin m\alpha + \\ & + B_1(m) \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1) \cos m\alpha] dm = \\ & = \int_0^{\infty} [C(\beta_2, m) \cos m\alpha + S(\beta_2, m) \sin m\alpha] dm. \end{aligned} \right\} (11,15)$$

Из этих равенств определяем функции $A_1(m)$, $A_2(m)$, $B_1(m)$, $B_2(m)$:

$$\left. \begin{aligned} A_1(m) &= -\frac{S(\beta_2, m)}{m \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1)}, & A_2(m) &= -\frac{S(\beta_1, m)}{m \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1)}, \\ B_1(m) &= \frac{C(\beta_2, m)}{m \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1)}, & B_2(m) &= \frac{C(\beta_1, m)}{m \text{sh } m(\beta_2 - \beta_1)}. \end{aligned} \right\} (11,16)$$

Подставляя (11,16) в (11,6), получаем для функции $f(\alpha, \beta)$ такое выражение:

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \{ - [S(\beta_2, m) \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + \\ + S(\beta_1, m) \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)] \cos m\alpha + [C(\beta_2, m) \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + \\ + C(\beta_1, m) \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)] \sin m\alpha \} \frac{dm}{m \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (11,17)$$

Подставив сюда выражения (11,12) и (11,13) для функций $C(\beta, m)$ и $S(\beta, m)$, будем иметь:

$$f(\alpha, \beta) = A \left\{ - \frac{1+2\nu}{6\nu} \int_0^{\infty} [\operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \right. \\ + \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)] \frac{m^2 \cos m\alpha dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{y_0}{a} \int_0^{\infty} [\operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m \times \\ \times (\beta_2 - \beta) + \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)] \frac{m \cos m\alpha dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} - \\ - \left(\frac{y_0^2}{a_2} - \frac{1+2\nu}{3\nu} \right) \int_0^{\infty} [\operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)] \times \\ \times \frac{\cos m\alpha dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} - \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_2 - \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \beta_2} \right) \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m \times \right. \\ \times (\beta - \beta_1) + \left. \left(\frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_1 - \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \beta_1} \right) \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) \right] \times \\ \times \frac{\cos m\alpha dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} - \frac{1}{2\nu} \int_0^{\infty} [\operatorname{ctg} \beta_2 \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + \\ + \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)] \frac{m \cos m\alpha dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \left. \right\} + \\ + B \left\{ \frac{1+2\nu}{3\nu} \int_0^{\infty} [\operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\sin m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{y_0}{a} \int_0^\infty [\operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \\
& + \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)] \frac{m \sin m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} - \\
& - \frac{1+2\nu}{6\nu} \int_0^\infty [\operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1)] \times \\
& \times \frac{m^2 \sin m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{1}{\nu} \int_0^\infty \left[\left(\operatorname{ctg} \beta_1 + \frac{y_0}{a} \right) \frac{1+\nu}{\sin^2 \beta_1} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_1 \right] \times \\
& \times \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \left(\operatorname{ctg} \beta_2 + \frac{y_0}{a} \right) \frac{1+\nu}{\sin^2 \beta_2} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right] \times \\
& \times \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) \left] \frac{\sin m\alpha \, dm}{m \operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} - \\
& - \frac{1+\nu}{\nu} \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{\sin^2 \beta_1} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\sin^2 \beta_2} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_2 \right) \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) \right] \times \\
& \times \frac{\sin m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} \left. \right\}. \quad (11,18)
\end{aligned}$$

Некоторые из интегрирований в последнем выражении можно выполнить, пользуясь соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}
\operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) &= \operatorname{sh} m\beta \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1), \\
\operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) + \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) &= \operatorname{ch} m\beta \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1),
\end{aligned} \right\}$$

а также формулами П (16) — П (21).

После выкладок, получим для искомой функции $f(\alpha, \beta)$ такую окончательную формулу:

$$\begin{aligned}
f(\alpha, \beta) = A \left\{ \left[\frac{1+2\nu}{3\nu} - \left(\frac{y_0}{a} \right)^2 \right] \frac{y}{2a} - \frac{1+2\nu}{24\nu a^3} y (y^2 - 3x^2 + a^2) + \right. \\
\left. + \frac{y_0}{4a^3} (y^2 - x^2 + a^2) + \Phi(\alpha, \beta) \right\} + B \left\{ \frac{x}{2a} \left[\frac{1+2\nu}{4\nu} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{yy_0}{a^2} - \frac{1+2\nu}{12\nu a^2} (3y^2 - x^2) \right] + \Psi(\alpha, \beta) \right\}. \quad (11,19)
\end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2\nu \sin^2 \beta_2} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_2 \right) \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2\nu \sin^2 \beta_1} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) \right] \times \\ & \times \frac{\cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} - \frac{1}{2\nu} \int_0^{\infty} [\operatorname{ctg} \beta_2 \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + \\ & + \operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta)] \frac{m \cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)}, \quad (11,20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta) = & \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} \left[\left(\left(\operatorname{ctg} \beta_2 + \frac{y_0}{a} \right) \frac{1+\nu}{\sin^2 \beta_2} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right) \times \right. \\ & \times \operatorname{sh} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + \left(\left(\operatorname{ctg} \beta_1 + \frac{y_0}{a} \right) \frac{1+\nu}{\sin^2 \beta_1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) \left. \right] \frac{\sin m\alpha \, dm}{m \operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)} - \\ & - \frac{1+\nu}{\nu} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sin^2 \beta_2} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_2 \right) \operatorname{ch} m\beta_2 \operatorname{sh} m(\beta - \beta_1) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\sin^2 \beta_1} + \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta) \right] \times \\ & \times \frac{\sin m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (11,21) \end{aligned}$$

Формулы (11,19)—(11,21) в совокупности с (11,1) дают точное решение поставленной граничной задачи для функции напряжений $\varphi(\alpha, \beta)$.

В качестве контроля положим в (11,19)—(11,21) $\beta_2 = = -\beta_1 = \pi/2$, что должно дать решение задачи изгиба для круглого сечения. Из (11,20) имеем с учетом П(16):

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\nu} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm = \frac{1}{4\nu} \frac{y}{a}.$$

Из (11,21) получаем, имея в виду, что для круга $y_0 = 0$:

$$\Psi(\alpha, \beta) = -\frac{1+\nu}{\nu} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm = -\frac{1+\nu}{2\nu} \frac{x}{a} \text{ [см. Д (19)],}$$

после чего (11,19) и (11,1) дают ($a = R$):

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{\nu R^3} \varphi(x, y) = & A \left[\frac{1}{6} \frac{y^3}{R^3} + \frac{1+2\nu}{3\nu} \frac{y}{2R} - \right. \\ & \left. - \frac{1+2\nu}{24\nu R^3} y(y^2 - 3x^2 + R^2) + \frac{1}{4\nu} \frac{y}{R} \right] + \\ + B \left\{ -\frac{1}{6} \frac{x^3}{R^3} + \frac{x}{2R} \left[\frac{1+2\nu}{4\nu} - \frac{1+2\nu}{12\nu R^2} (3y^2 - x^2) - \frac{1+\nu}{2\nu} \frac{x}{R} \right] \right\}, \end{aligned}$$

или после преобразований с учетом (10,2) и равенства $J_x = J_y = J$:

$$\begin{aligned} 24J(1+\nu) \varphi(x, y) = & P_x y [(2\nu - 1)y^2 + 3(2\nu + 1)x^2 + \\ & + 3(3 + 2\nu)R^2] - P_y x [(2\nu - 1)x^2 + \\ & + 3(2\nu + 1)y^2 + 3(3 + 2\nu)R^2]. \quad (11,22) \end{aligned}$$

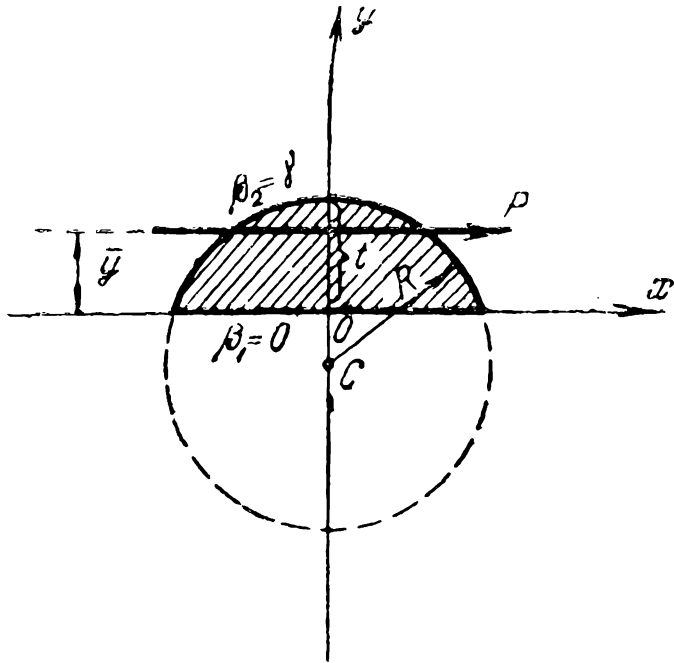
Полученное выражение не совпадает с обычным выражением функции напряжений для круглого сечения, ибо обычно делается другой выбор произвольных функций $f_1(y)$ и $f_2(x)$, которые мы приравняли нулю. Однако, касательные напряжения, данные формулой (10,4), должны совпасть с обычными формулами касательных напряжений. Проверим это. Имеем из (11,22) и (10,4) для случая силы, направленной по оси x ($P_y = 0$, $P_x = P$):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{P(3+2\nu)}{8J(1+\nu)} \left[R^2 - x^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right], \\ \tau_{yz} &= -\frac{P(1+2\nu)}{4J(1+\nu)} xy, \end{aligned} \right\} \quad (11,23)$$

что полностью совпадает с известными формулами касательных напряжений при изгибе стержня круглого сечения (см., например, [14], стр. 319). Случай $P_x = 0$, $P_y = P$ соответствует перестановке букв x и y .

§ 12. Изгиб кругового цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси

Рассмотрим поперечное сечение в виде кругового сегмента; при этом мы имеем дело с круглым цилиндром, срезанным плоскостью, параллельной оси.



Фиг. 15.

Ради упрощения выкладок ограничимся случаем, когда поперечная сила P параллельна прямолинейной части контура — оси ox (фиг. 15).¹

Для такого случая в общих формулах следует положить

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= \gamma, \\ P_x &= P, & P_y &= 0, \\ B &= 0, & A &= P/J_y. \end{aligned} \quad (12,1)$$

Чтобы разыскать функцию напряжений φ , вычислим прежде всего функцию $f(\alpha, \beta)$. Полагая в (11,20) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma$, получим:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) &= \left(\frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \gamma \right) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm - \\ &- \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2\nu} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} m\gamma \operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m\gamma} dm + \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \beta_1} - \right. \right. \\ &- \left. \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_1) \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_1)} dm - \\ &- \left. \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{ch} m\beta_1 \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_1) \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_1)} dm \right]. \end{aligned} \quad (12,2)$$

¹ Практически именно этот случай наиболее интересен, ибо изгиб может сопровождаться кручением, в то время как наличие P_y — составляющей силы P по оси oy — вообще не вызывает кручения

Осуществляя допустимые здесь предельные переходы под знаком интегралов, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & \left(\frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \gamma \right) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm - \\ & - \frac{y_0}{a} \int_0^\infty \frac{m \operatorname{ch} m\beta}{\operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha dm + \\ & + \left(\frac{y_0}{a} - \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \right) \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta}{\operatorname{sh} m\pi} \operatorname{cth} m\gamma \cos m\alpha dm. \quad (12,3) \end{aligned}$$

Применяя формулы П (16) — П (17) и вводя обозначение

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta}{\operatorname{sh} m\pi} \operatorname{cth} m\gamma \cos m\alpha dm, \quad (12,4)$$

получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2} \frac{y}{a} \left(\frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \gamma \right) - \frac{y_0}{4a^3} (y^2 - x^2 + a^2) + \\ & + \left(\frac{y_0}{a} - \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \right) \omega(\alpha, \beta, \gamma). \quad (12,5) \end{aligned}$$

Теперь формула (11,19) дает функцию $f(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} \frac{J_y}{Pa^3} f(\alpha, \beta) = & \frac{y}{2a} \left[\frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{1+2\nu}{3\nu} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \gamma - \left(\frac{y_0}{a} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{1+2\nu}{24\nu a^3} y (y^2 - 3x^2 + a^2) + \\ & + \left(\frac{y_0}{a} - \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \right) \omega(\alpha, \beta, \gamma), \quad (12,6) \end{aligned}$$

а формула (11,1) — функцию напряжений φ :

$$\begin{aligned} \frac{J_y}{Pa^3} \frac{1+\nu}{\nu} \varphi = & \frac{2\nu-1}{24\nu} \left(\frac{y}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \frac{y_0}{a} \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{a} \right) \left[\frac{1+2\nu}{4\nu} + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \gamma \right] + \frac{1+2\nu}{8\nu} \left(\frac{y}{a} \right) \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{6} \left(\frac{y_0}{a} \right)^3 + \left(\frac{y_0}{a} - \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \right) \omega(\alpha, \beta, \gamma). \quad (12,7) \end{aligned}$$

Для полукруглого сечения ($\gamma = \pi/2$) квадратуры в выражении (12,7) могут быть выполнены. В самом деле:

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta, \pi/2) &= \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m\beta}{\operatorname{sh} m\pi} \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} \cos m\alpha \, dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m\beta}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2}} \cos m\alpha \, dm, \end{aligned}$$

или, согласно П (50):

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta, \pi/2) &= \frac{1}{\pi} \left[2 \frac{\beta (1 - \operatorname{ch} 2\alpha \cos 2\beta) + \alpha \operatorname{sh} 2\alpha \sin 2\beta}{(\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta} \right]. \end{aligned} \quad (12,8)$$

§ 13. Расчет координат центра изгиба

При постановке задачи изгиба в § 10 было предположено, что поперечная сила P проходит через центр изгиба поперечного сечения, т. е. что изгиб не сопровождается кручением.

Поставим задачу — определить координаты центра изгиба для случая, рассмотренного в предыдущем параграфе.

В силу симметрии рассматриваемой области относительно оси ou , очевидно, что абсцисса центра изгиба есть нуль, и требуется определить ординату \bar{y} центра изгиба (фиг. 15). Воспользуемся формулами:¹

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= -\frac{M}{P}, \quad M = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) \, dx \, dy = \\ &= 2 \iint \varphi \, dx \, dy - \oint \varphi \, d\sigma + \frac{P}{2J_y} \iint \lambda^2 y \, dx \, dy, \\ d\sigma &= x \, dy - y \, dx, \end{aligned} \right\} (13,1)$$

¹ См. [18], стр. 302.

Подставляя сюда φ из (12,7), получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{J_y}{Pa^3} \cdot \frac{1+\nu}{\nu} M = & \frac{2\nu-1}{24\nu a^3} \left[2 \int \int y^3 dx dy - \oint y^3 d\sigma \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{y_0}{a^3} \left[2 \int \int y^2 dx dy - \oint y^2 d\sigma \right] + \\
 & + \frac{1}{2a} \left[\frac{1+2\nu}{4\nu} + \frac{1}{2\nu} \cdot \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg} \gamma \right] \times \\
 & \times \left[2 \int \int y dx dy - \oint y d\sigma \right] - \frac{1}{6} \frac{y_0^3}{a^3} \left[2 \int \int dx dy - \oint d\sigma \right] + \\
 & + \left(\frac{y_0}{a} - \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \right) \left[2 \int \int \omega dx dy - \oint \omega d\sigma \right] + \\
 & + \frac{1+2\nu}{8\nu a^3} \left[2 \int \int x^2 y dx dy - \oint x^2 y d\sigma \right] + \\
 & + \frac{1}{2a^3} \cdot \frac{1+\nu}{\nu} \int \int x^2 y dx dy. \quad (13,2)
 \end{aligned}$$

Займемся, прежде всего, вычислением двойных интегралов, входящих в формулу (13,2).

Заметив, что, согласно (2,2)

$$\int \int \varphi dx dy = 2a^2 \int_0^\gamma d\beta \int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} d\alpha d\beta,$$

и воспользовавшись П (6) — П (9), получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2a^2} \int \int dx dy &= \int_0^\gamma \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\sin^3 \beta} d\beta, \quad \frac{1}{2a^3} \int \int y dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\gamma \frac{\beta (3 - 2 \sin^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta}{\sin^4 \beta} d\beta, \\
 \frac{1}{2a^4} \int \int y^2 dx dy &= \frac{1}{6} \int_0^\gamma [3\beta \cos \beta (2 \sin^2 \beta - 5) + \\
 &+ \sin \beta (15 - 11 \sin^2 \beta)] \frac{d\beta}{\sin^5 \beta},
 \end{aligned} \right\} (13,3)$$

$$\frac{1}{2a^5} \int \int y^3 dx dy = \frac{1}{24} \int_0^\gamma [3\beta (35 - 40 \sin^2 \beta + 8 \sin^4 \beta) + \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (13,3) \\ + 5 \sin \beta \cos \beta (10 \sin^2 \beta - 21)] \frac{d\beta}{\sin^6 \beta} .$$

Выполняя интегрирование по β в (13,3), получаем:

$$S = \int \int dx dy = a^2 \gamma \frac{\gamma - \sin \gamma \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \text{ — площадь сечения; } (13,4)$$

$$Sy_0 = \int \int y dx dy = [3 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \sin^3 \gamma] \frac{a^3}{3 \sin^3 \gamma}; (13,5)$$

$$\int \int y^2 dx dy = [15 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) + \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (13,6) \\ + 2 \sin^2 \gamma (\sin \gamma \cos \gamma - 6\gamma)] \frac{a^4}{12 \sin^4 \gamma}; \\ \int \int y^3 dx dy = [105 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) + \\ + \sin^2 \gamma (60\gamma \cos \gamma - 95 \sin \gamma + 6 \sin^3 \gamma)] \frac{a^5}{60 \sin^5 \gamma} .$$

Что касается интеграла $\int \int x^2 y dx dy$, то его удобно вычислять так:

$$\int \int x^2 y dx dy = \int \int (r^2 - y^2) y dx dy = \\ = a^5 \int \int \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right] \times \\ \times \frac{\sin \beta d\alpha d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} = a^5 \int \int \left[1 - 2 \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - \right. \\ \left. - \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right] \frac{\sin \beta d\alpha d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} ,$$

а последнее выражение содержит уже подсчитанные интегралы, так что окончательно получаем:

$$\int \int x^2 y \, dx \, dy = \frac{a^5}{60 \sin^5 \gamma} [15 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \sin^3 \gamma (5 + 2 \sin^2 \gamma)]. \quad (13,7)$$

Остается подсчитать $\int \int \omega \, dx \, dy$.

Согласно (12,4), будем иметь, применяя еще П (2):

$$\begin{aligned} \int \int \omega \, dx \, dy &= \\ &= 2a^2 \int_0^\gamma d\beta \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta}{\operatorname{sh} m\pi} = \operatorname{cth} m\gamma \cos m\alpha \, dm = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{cth} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} \, dm = \int_0^\gamma \frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \right) d\beta = \\ &= \pi a^2 \int_0^\infty \frac{m \operatorname{cth} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} = \left[\frac{\operatorname{sh}^2 m\gamma}{\sin^2 \gamma} - m^2 \right] dm = \\ &= \pi a^2 \left[\frac{1}{2 \sin^2 \gamma} = \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} 2m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} \, dm - \int_0^\infty \frac{m^3 \operatorname{cth} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} \, dm \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь П (41) и обозначая, как в (7,11), интеграл

$$\int_0^\infty \frac{m^3 \operatorname{cth} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} \, dm$$

через J , получаем окончательно:

$$\int \int \omega \, dx \, dy = a^2 \left[\frac{\gamma - \sin \gamma \cos \gamma}{4 \sin^4 \gamma} - \pi J \right]. \quad (13,8)$$

Обратимся теперь к вычислению контурных интегралов, входящих в формулу (13,1).

Прежде всего, составим выражение

$$d\sigma = x dy - y dx. \quad (13,9)$$

Пользуясь (1,9) и (2,3), будем иметь:¹

$$\begin{aligned} d\sigma &= x \frac{\partial y}{\partial s} ds - y \frac{\partial x}{\partial s} ds = x \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha - y \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha = \\ &= -a^2 \sin \beta \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} + \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} \right] d\alpha, \end{aligned}$$

или после выкладок:

$$d\sigma = -a^2 \frac{\sin \beta \operatorname{ch} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} d\alpha. \quad (13,10)$$

Теперь контурный интеграл от произвольной четной функции $\psi(\alpha)$ может быть вычислен так:²

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \oint \psi(\alpha) d\sigma &= -2 \sin \gamma \int_{\infty}^0 \frac{\psi(\alpha) \operatorname{ch} \alpha d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma)^2} = \\ &= 2 \sin \gamma \left[\int_0^{\infty} \frac{\psi(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} - 2 \cos \gamma \int_0^{\infty} \frac{\psi(\alpha) d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma)^2} \right], \end{aligned}$$

т. е. все требуемые интегралы от функций 1 , y , y^2 и y^3 могут быть сразу написаны с помощью П(1) и П(6)—П(9), а контурный интеграл от функции $x^2 y$ получается тем же способом, как формула (13,7).

¹ Интегрируем вдоль контура так, чтобы область оставалась слева, т. е. α меняется от ∞ до $-\infty$.

² Интеграл по прямолинейной части контура ($\beta = 0$) равен нулю, ибо $d\sigma|_{\beta=0} = 0$.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 \oint d\sigma &= \frac{2a^2}{\sin^2 \gamma} (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) = 2 \iint dx dy, \\
 \oint y d\sigma &= \frac{a^3}{\sin^3 \gamma} [3 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \sin^3 \gamma] = \\
 &= 3 \iint y dx dy, \\
 \oint y^2 d\sigma &= \frac{a^4}{3 \sin^4 \gamma} [15 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) + \\
 &+ 2 \sin^2 \gamma (\sin \gamma \cos \gamma - 6\gamma)] = 4 \iint y^2 dx dy, \\
 \oint y^3 d\sigma &= \frac{a^5}{12 \sin^5 \gamma} [105 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) + \\
 &+ \sin^2 \gamma (60 \gamma \cos \gamma - 95 \sin \gamma + 6 \sin^3 \gamma)] = \\
 &= 5 \iint y^3 dx dy, \\
 \oint x^2 y d\sigma &= \frac{2a^5}{3 \sin^5 \gamma} [3 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) (\sin^4 \gamma + \\
 &+ 10 \sin^2 \gamma - 10) - 2 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma (6\gamma \cos \gamma - 11 \sin \gamma)].
 \end{aligned} \tag{13,11}$$

Подсчитаем еще $\oint \omega d\sigma$:

$$\begin{aligned}
 \oint \omega d\sigma &= 2a^2 \sin \gamma \int_0^\infty \frac{m \operatorname{ch} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} dm \left[\int_0^\infty \frac{\cos m\alpha d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma} - \right. \\
 &\quad \left. - \cos \gamma \int_0^\infty \frac{\cos m\alpha d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma)^2} \right],
 \end{aligned}$$

или, с учетом П (1) и П (2):

$$\begin{aligned}
 \oint \omega d\sigma &= \frac{2\pi a^2}{\sin^2 \gamma} \left[\int_0^\infty \frac{m \operatorname{ch} m\gamma \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm - \right. \\
 &\quad \left. - \sin \gamma \cos \gamma \int_0^\infty \frac{m^3 \operatorname{ch}^2 m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm \right] = \frac{2\pi a^2}{\sin^2 \gamma} \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} 2m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm - \right. \\
 &\quad \left. - \sin \gamma \cos \gamma \left(\int_0^\infty \frac{m^2 dm}{\operatorname{sh}^2 m\pi} + \int_0^\infty \frac{m^2 \operatorname{sh}^2 m\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm \right) \right].
 \end{aligned}$$

Наконец, пользуясь П (41), П (37) и П (43), получим окончательно:

$$\oint \omega d\sigma = \frac{a^2}{6 \sin^4 \gamma} [3\gamma (1 + \cos^2 \gamma) - \sin \gamma \cos \gamma (6 + \sin^2 \gamma)]. \quad (13,12)$$

Подставляя все полученные интегралы в формулу (13,2), будем иметь:

$$M = \frac{P}{J_y} \cdot \frac{a^5}{1 + \nu} \left\{ \pi \operatorname{ctg} \gamma \cdot J + \frac{1}{60 \sin^5 \gamma} [15 (\gamma \cos \gamma - \sin \gamma) + \sin^3 \gamma (8 \sin^2 \gamma - 5)] + \nu \left[\frac{15 (\gamma \cos \gamma - \sin \gamma) + \sin^3 \gamma (5 + 2 \sin^2 \gamma)}{30 \sin^5 \gamma} + \frac{y_0}{a} \left(\frac{3 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) + 2 \sin^3 \gamma \cos \gamma}{12 \sin^4 \gamma} - 2\pi J \right) \right] \right\}. \quad (13,13)$$

Наконец, из выражения $\bar{y} = -M/P$, применяя еще равенство $R = a/\sin \gamma$, получим окончательную формулу для ординаты центра изгиба:

$$\frac{\bar{y}}{R} = \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{J_y/R^4} \left\{ \frac{1}{60} [15 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) + \sin^3 \gamma (5 - 8 \sin^2 \gamma)] - \pi \cos \gamma \sin^4 \gamma \cdot J + \nu \left[\frac{15 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \sin^3 \gamma (5 + 2 \sin^2 \gamma)}{30} + \frac{y_0}{R} \left(\frac{3 (\sin \gamma \cos \gamma - \gamma) - 2 \sin^3 \gamma \cos \gamma}{12} + 2\pi \sin^4 \gamma \cdot J \right) \right] \right\}. \quad (13,14)$$

Здесь ордината центра тяжести y_0 вычисляется по следующей формуле, вытекающей из (13,4) и (13,5):

$$\frac{y_0}{R} = \frac{3 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \sin^3 \gamma}{3 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma)}. \quad (13,15)$$

Момент инерции $J_y = \int \int x^2 dx dy$ может быть вычислен таким же способом, как и интеграл $\int \int x^2 y dx dy$ [формула (13,7)] и выражается формулой:

$$\frac{J_y}{R^4} = \frac{1}{12} [3 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) - 2 \cos \gamma \sin^3 \gamma]. \quad (13,16)$$

Рассмотрим частный случай полукруглого сечения ($\gamma = \pi/2$). При этом, как было уже показано в § 7 (стр. 31), $J = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{16}$, после чего, полагая в (13,14) $\gamma = \pi/2$ и учитывая равенства $J_y/R^4 = \pi/8$, $y_0/R = 4/3\pi$, будем иметь:

$$\frac{\bar{y}}{R} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{1}{5} + \nu \left(\frac{8}{3\pi^2} - \frac{1}{15} \right) \right],$$

или

$$\pi \frac{\bar{y}}{R} = \frac{8}{15(1+\nu)} \left[3 + \nu \left(\frac{40}{\pi^2} - 1 \right) \right]. \quad (13,17)$$

В курсе теории упругости Л. С. Лейбензона¹ с помощью полярных координат для ординаты центра изгиба полукруга получена формула:

$$\left. \begin{aligned} \pi \frac{\bar{y}}{R} &= \frac{8(3+4\nu)}{15(1+\nu)} + \frac{4\nu}{3(1+\nu)} K, \\ K &= 1 + \frac{128}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n^2(n+2)^2}. \end{aligned} \right\} (13,18)$$

Если просуммировать входящий в K ряд

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n^2(n+2)^2} = \frac{1}{8} - \frac{3\pi^2}{128},$$

то получим $K = \frac{16}{\pi^2} - 2$, после чего формулы (13,18) и (13,17) совпадут.

В предельном случае $\gamma = \pi$ (фиг. 8) формула (13,14) дает:

$$\frac{\bar{y}}{R} = \frac{4}{1+\nu} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{4} \right) = 1,$$

как и должно быть.

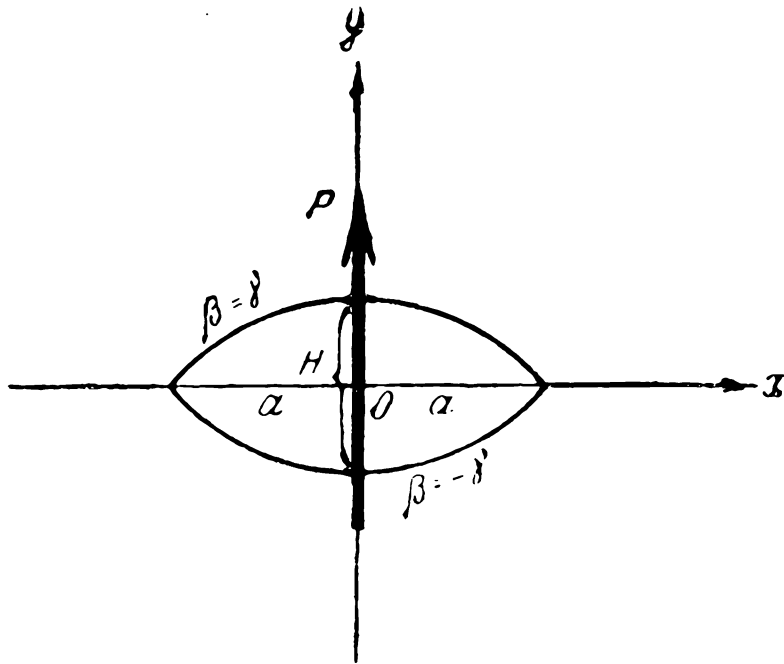
В табл. 3 даны значения \bar{y}/R для тех же значений $\xi = t/2R$, что и

Таблица 3

| ξ | \bar{y}/R | y_0/R |
|-------|-------------|---------|
| 1/8 | 0,151 | 0,0924 |
| 1/4 | 0,276 | 0,205 |
| 3/8 | 0,387 | 0,326 |
| 1/2 | 0,511 | 0,424 |
| 5/8 | 0,628 | 0,541 |
| 3/4 | 0,739 | 0,659 |
| 7/8 | 0,892 | 0,829 |
| 1 | 1 | 1 |

¹ [18] стр. 304, формулы (10,235) — (10,236). В формулу (10,235) вкралась опечатка — между дробями стоит знак минус вместо плюса.

в гл. I (§ 7), причем принято $\nu = 0,3$, и для сравнения приведены значения y_0/R . Из рассмотрения этой таблицы



Фиг. 16.

видно, что во всех случаях ордината \bar{y} центра изгиба превышает ординату y_0 центра тяжести.

§ 14. Касательные напряжения при изгибе

Так как функция напряжений нами получена [формулы (11,1), (11,19) — (11,21)], то оба касательные напряжения могут быть подсчитаны по формулам (10,4).

Не проделывая этих выкладок в общем случае, обратимся к частному случаю симметричной луночки (фиг. 16), нагруженной поперечной силой вдоль вертикальной оси симметрии (oy). Полагая в формулах (11,19) и (11,21)

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 = -\beta_1 = \gamma, \quad P_x = 0, \quad P_y = P, \\ A = 0, \quad B = \frac{P}{J_x}, \quad y_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (14,1)$$

получим:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \beta) = & \frac{1+\nu}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} [\operatorname{sh} m(\beta + \gamma) - \operatorname{sh} m(\beta - \gamma)] \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh} m\gamma \sin m\alpha}{m \operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} 2m\gamma} dm + \frac{1+\nu}{\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} [\operatorname{sh} m(\beta - \gamma) - \\ & - \operatorname{sh} m(\beta + \gamma)] \frac{\operatorname{ch} m\gamma \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} 2m\gamma} dm + \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} [\operatorname{sh} m(\beta + \gamma) - \\ & - \operatorname{sh} m(\beta - \gamma)] \frac{m \operatorname{sh} m\gamma \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} 2m\gamma} dm, \end{aligned}$$

или, учитывая П (19):

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta) = & \frac{1 + \nu}{\nu} \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{m \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{th} m\gamma \, dm + \\ & + \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \operatorname{th} m\gamma \, dm - \\ & - \frac{1 + \nu}{2\nu} \cdot \frac{1}{\sin^2 \gamma} \cdot \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (14,2)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{J_x}{P} f(\alpha, \beta) = & \frac{x}{2a} \left[\frac{1 + 2\nu}{4\nu} - \frac{1 + \nu}{\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{y y_0}{a^2} - \frac{1 + 2\nu}{12\nu a^2} (3y^2 - x^2) \right] + \\ & + \frac{1 + \nu}{\nu} \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{m \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{th} m\gamma \, dm + \\ & + \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \operatorname{th} m\gamma \, dm. \end{aligned} \quad (14,3)$$

Наконец, подставляя (14,3) в (11,1), будем иметь для функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \nu}{\nu} \frac{J_x}{Pa^3} \varphi = & \frac{1}{2} \frac{x}{a} \left[\frac{1 + 2\nu}{4\nu} - \frac{1 + \nu}{\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{1 - 2\nu}{12\nu} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1 + 2\nu}{4\nu} \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + \frac{1 + \nu}{\nu} \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{m \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{th} m\gamma \, dm + \\ & + \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \operatorname{th} m\gamma \, dm. \end{aligned} \quad (14,4)$$

Подсчитаем, как это обычно делают для подобного рода профилей, касательное напряжение на горизонтальном диаметре $y = 0$ ($\beta = 0$). Формула (10,4) дает:

$$\tau_{yz} \Big|_{y=0} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{y=0} = - \left(g \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)_{\beta=0} = - \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{\beta=0}. \quad (14,5)$$

Подставляя сюда φ из (14,4), получим:

$$\begin{aligned} -\tau_{yz} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{Pa^2}{J_x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1+2\nu}{4\nu} - \frac{1+\nu}{\nu} \cdot \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \right. \right. \\ &+ 3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \frac{1-2\nu}{12\nu} \Big] + (\operatorname{ch} \alpha + 1) \left[\frac{1+\nu}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha \operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} dm + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2\nu} \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{m^2 \cos m\alpha \operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} dm \right] \right\}. \quad (14,6) \end{aligned}$$

Максимальное касательное напряжение будет в центре луночки ($x=0$ и $\alpha=0$), минимальное — в углах ¹ ($\alpha = \pm \infty$):

$$\begin{aligned} \tau_{\max} = \tau_{yz} \Big|_{\alpha=\beta=0} &= \frac{Pa^2}{J_x} \cdot \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{\sin^2 \gamma} - \frac{1+2\nu}{4} \right) - \right. \\ &\left. - 2 \operatorname{ctg} \gamma \left[\frac{1+\nu}{\sin^2 \gamma} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} dm + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} dm \right] \right\}. \quad (14,7) \end{aligned}$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= \tau \frac{P}{F}, \\ F &= \int \int dx dy = 2R^2 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (14,8)$$

получим для коэффициента τ выражение:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{F/R^2}{J_x/R^4} \left[\frac{1}{2} - \frac{1+2\nu}{8(1+\nu)} \sin^2 \gamma - 2 \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} dm - \right. \\ &\left. - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{1+\nu} \int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{th} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} dm \right]. \quad (14,9) \end{aligned}$$

Момент инерции определяется из формулы:

$$J_x = \frac{R^4}{6} [15 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) + 2 \sin^2 \gamma (\sin \gamma \cos \gamma - 6\gamma)]. \quad (14,10)$$

¹ Ниже будет показано, что это утверждение справедливо лишь при $\gamma \leq \pi/2$ (см. стр. 63).

Чтобы определить $\tau_{\min} = \tau_{yz}|_{\beta=0, \alpha=\pm\infty}$, перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow \pm\infty$ в формуле (14,6).

Интегралы, входящие в (14,6), будем вычислять при помощи теоремы о вычетах, совершенно так же, как это было сделано в § 8 (стр. 35).

Имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\operatorname{ch} \alpha \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{ch} m\gamma} dm \right] = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma, \quad \text{если } \gamma < \pi/2,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\operatorname{ch} \alpha \int_0^{\infty} \frac{\cos m\alpha \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{ch} m\gamma} dm \right] = \infty \quad \text{при } \gamma > \pi/2.$$

Точно так же:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\operatorname{ch} \alpha \int_0^{\infty} \frac{m^2 \cos m\alpha \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{ch} m\gamma} dm \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma \quad (\gamma < \pi/2),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\operatorname{ch} \alpha \int_0^{\infty} \frac{m^2 \cos m\alpha \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{ch} m\gamma} dm \right] = \infty \quad (\gamma > \pi/2).$$

Таким образом, при $\gamma < \pi/2$

$$\tau_{\min} = -\frac{\nu P a^2}{J_x (1 + \nu)} \left[\frac{1 + 2\nu}{8\nu} - \frac{1 + \nu}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{1 - 2\nu}{12\nu} + \frac{1 + \nu}{2\nu} \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{1}{4\nu} \right] = 0,$$

т. е. в углах луночки напряжения отсутствуют.

Что касается случая $\gamma > \pi/2$, когда на контуре имеются входящие углы (см. фиг. 12), то в углах напряжения принимают бесконечно большие значения, так что величина τ_{\max} уже не может считаться максимальной или расчетной величиной касательных напряжений.

Для случая $\gamma = \pi/2$ вместо сделанного исследования сразу полагаем в (14,6) $\gamma = \pi/2$, после чего получаем

$$\tau_{\min} = \frac{P a^2}{4J} \frac{2\nu + 1}{\nu + 1} \approx 1,23 P/F,$$

что совпадает с известным результатом (см., например, [14], стр. 320).

В табл. 4 приведены значения коэффициента τ для тех же значений $\eta = H/2a$, что и в § 8.

То обстоятельство, что в углах луночки напряжения исчезают (при $\gamma < \pi/2$), показывает, что напряжения по диаметру симметричной луночки распределены более неравномерно, чем, скажем, в случае эллипса, когда напряжения по концам большой полуоси отнюдь не нули (например для круга $\tau_{\min} \approx 1,23 P/F$). Даже если обратиться к случаю весьма удлиненного эллипса, близкого по форме к луночке при $\gamma \rightarrow 0$, то распределение напряжений вдоль большой полуоси будет отличаться от распределения напряжений вдоль отрезка $0 < x < a$, $y = 0$ рассматриваемой луночки. В самом деле, известно,¹ что для сильно вытянутого эллипса $\tau_{\min} \approx 0,92 P/F$, в то время как для луночки даже при $\gamma \rightarrow 0$

Таблица 4

| η | τ |
|--------|--------|
| 1/8 | 1,53 |
| 1/4 | 1,52 |
| 3/8 | 1,50 |
| 1/2 | 1,47 |
| 5/8 | 1,45 |
| 3/4 | 1,42 |
| 7/8 | 1,40 |
| 1 | 1,38 |

все же остается $\tau_{\min} = 0$. Что касается значения τ_{\max} , то устремляя γ в (14,9) к нулю и удерживая члены первого порядка малости, можно получить такой результат:

$$\tau_{\max} = \frac{Pt^2}{2J(1+\nu)},$$

где

$$t = a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \approx \frac{a\gamma}{2},$$

или, с учетом вытекающего из (14,8) и (14,10) равенства $8J = F(a\gamma)^2$, $\tau_{\max} \approx 1,54 P/F$. Но такое же выражение для τ_{\max} получается и в случае сильно вытянутого эллипса,² так что значения τ_{\max} в этом случае для эллипса и луночки совпадают.

Таким образом, элементарное решение вопроса, считающее касательные напряжения постоянными по ширине профиля, оказывается совершенно неверным в применении к рассматриваемым луночным профилям.

¹ См. [14], стр. 321.

² См. там же.

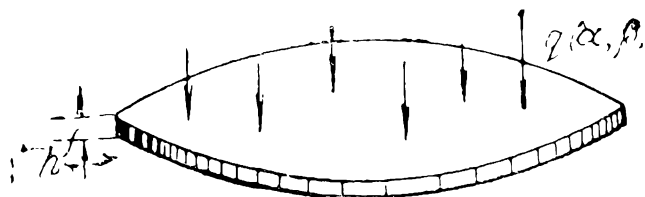
Часть вторая
БИГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

ГЛАВА IV

**ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛИТ, КОНТУР КОТОРЫХ ОБРАЗОВАН
ДУГАМИ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ**

**§ 15. Общее решение задачи об изгибе луночной плиты
с закрепленным контуром**

Рассмотрим упругую тонкую плиту, имеющую форму круговой луночки, подверженную действию распределенной поперечной нагрузки $q(\alpha, \beta)$ (фиг. 17).



Фиг. 17.

Как известно, прогиб $w(x, y)$ такой плиты удовлетворяет бигармоническому уравнению с правой частью:

$$\Delta^2 w = \frac{q(\alpha, \beta)}{D}, \quad (15,1)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (15,2)$$

есть цилиндрическая жесткость плиты.

Здесь h — толщина плиты и E — модуль упругости материала плиты.

Введем в рассмотрение так называемый приведенный прогиб

$$u = Dw, \quad (15,3)$$

удовлетворяющий уравнению

$$\Delta^2 u = q(\alpha, \beta). \quad (15,4)$$

Согласно (3,2), это уравнение можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} g^3 \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) (gu) = q(\alpha, \beta), \\ g = \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta). \end{aligned} \right\} \quad (15,5)$$

В соответствии с (3,6) ищем решение уравнения (15,5) в виде:

$$gu(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} [f_c(\beta, m) \cos m\alpha + f_s(\beta, m) \sin m\alpha] dm. \quad (15,6)$$

Подставив (15,6) в (15,5), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^4 f_c}{\partial \beta^4} + 2(1-m^2) \frac{\partial^2 f_c}{\partial \beta^2} + (1+m^2)^2 f_c \right] \cos m\alpha dm + \\ + \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^4 f_s}{\partial \beta^4} + 2(1-m^2) \frac{\partial^2 f_s}{\partial \beta^2} + (1+m^2) f_s \right] \times \\ \times \sin m\alpha dm = \frac{q(\alpha, \beta)}{g^3}. \end{aligned} \quad (15,7)$$

Разложим функцию $q(\alpha, \beta)/g^3$ в интеграл Фурье:¹

$$\left. \begin{aligned} q(\alpha, \beta)/g^3 = \int_0^{\infty} [p_c(\beta, m) \cos m\alpha + \\ + p_s(\beta, m) \sin m\alpha] dm, \\ p_c(\beta, m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\alpha, \beta)}{g^3} \cos m\alpha d\alpha, \\ p_s(\beta, m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\alpha, \beta)}{g^3} \sin m\alpha d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (15,8)$$

¹ Для возможности такого разложения требуется, чтобы функция $q(\alpha, \beta)$ при $\alpha \rightarrow \pm\infty$ возрастала медленнее, чем $e^{3\alpha}$.

После подстановки (15,8) в (15,7) будем иметь для функции $f_c(\beta, m)$ [равным образом, для функции $f_s(\beta, m)$] неоднородное дифференциальное уравнение:¹

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \beta^4} + 2(1 - m^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + (1 + m^2)^2 f = p(\beta, m). \quad (15,9)$$

Общий интеграл соответствующего однородного уравнения в соответствии с (3,8) имеет вид:

$$f_0(\beta, m) = A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + \\ + C(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta. \quad (15,10)$$

Чтобы получить частное решение неоднородного уравнения (15,9), воспользуемся методом вариаций произвольных постоянных, а именно, будем считать величины $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ функциями переменной β . Тогда, для определения этих функций служит, как известно, система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \beta} \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + \frac{\partial B}{\partial \beta} \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + \frac{\partial C}{\partial \beta} \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + \\ + \frac{\partial D}{\partial \beta} \operatorname{sh} m\beta \sin \beta = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\operatorname{ch} m\beta \cos \beta) + \frac{\partial B}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\operatorname{ch} m\beta \sin \beta) + \\ + \frac{\partial C}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\operatorname{sh} m\beta \cos \beta) + \frac{\partial D}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\operatorname{sh} m\beta \sin \beta) = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\operatorname{ch} m\beta \cos \beta) + \frac{\partial B}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\operatorname{ch} m\beta \sin \beta) + \\ + \frac{\partial C}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\operatorname{sh} m\beta \cos \beta) + \frac{\partial D}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\operatorname{sh} m\beta \sin \beta) = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} (\operatorname{ch} m\beta \cos \beta) + \frac{\partial B}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} (\operatorname{ch} m\beta \sin \beta) + \\ + \frac{\partial C}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} (\operatorname{sh} m\beta \cos \beta) + \\ + \frac{\partial D}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} (\operatorname{sh} m\beta \sin \beta) = p(\beta, m). \end{aligned} \right\} (15,11)$$

¹ Дальнейшие выкладки для функции f относятся как к функции $f_c(\beta, m)$, так и к функции $f_s(\beta, m)$.

Решая эту систему, получим величины $\frac{\partial A}{\partial \beta}$, $\frac{\partial B}{\partial \beta}$, $\frac{\partial C}{\partial \beta}$ и $\frac{\partial D}{\partial \beta}$, а затем интегрированием по β найдем и сами функции A , B , C и D .

Опуская выкладки, выпишем сразу окончательное выражение для частного решения уравнения (15,9):

$$\left. \begin{aligned} f^*(\beta, m) &= \frac{1}{2m(m^2 + 1)} \int_{\bar{\beta}}^{\beta} p(t, m) K(\beta, m, t) dt, \\ K(\beta, m, t) &= m \operatorname{ch} m(\beta - t) \sin(\beta - t) - \\ &\quad - \operatorname{sh} m(\beta - t) \cos(\beta - t). \end{aligned} \right\} (15,12)$$

Здесь $\bar{\beta}$ — произвольное постоянное число в промежутке (β_1, β_2) .

Таким образом, имеем общий интеграл уравнения (15,9):

$$f(\beta, m) = f_0(\beta, m) + f^*(\beta, m). \quad (15,13)$$

Подставляя (15,13) в (15,6), получим выражение для приведенного прогиба $u(\alpha, \beta)$ в виде интеграла, содержащего восемь произвольных функций параметра m :

$A(m)$, $B(m)$, $C(m)$, $D(m)$ (для индексов c и s).

Для определения этих функций должны быть заданы четыре граничных условия — по два на каждой из дуг $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$.

Нам удалось дать решение подставленной задачи только для случая, когда края плиты закреплены, т. е. граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega \Big|_{\beta=\beta_1} &= \omega \Big|_{\beta=\beta_2} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = 0. \end{aligned} \right\} (15,14)$$

Очевидно, что эти условия будут выполнены, если выбрать восемь функций $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ как решение системы таких восьми уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_c(\beta_1, m) &= f_s(\beta_1, m) = f_c(\beta_2, m) = f_s(\beta_2, m) = 0, \\ \frac{\partial f_c}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} &= \frac{\partial f_s}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial f_c}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = \frac{\partial f_s}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = 0. \end{aligned} \right\} (15,15)$$

В самом деле, при этом $u(\alpha, \beta_1) = u(\alpha, \beta_2) = 0$, т. е. и $w(\alpha, \beta_1) = w(\alpha, \beta_2) = 0$. Кроме того, дифференцируя (15,6) по β , получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{1}{g} \int_0^\infty \left(\frac{\partial f_c}{\partial \beta} \cos m\alpha + \frac{\partial f_s}{\partial \beta} \sin m\alpha \right) dm +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{g} \right) \int_0^\infty (f_c \cos m\alpha + f_s \sin m\alpha) dm = 0 \quad \text{при } \beta = \beta_1$$

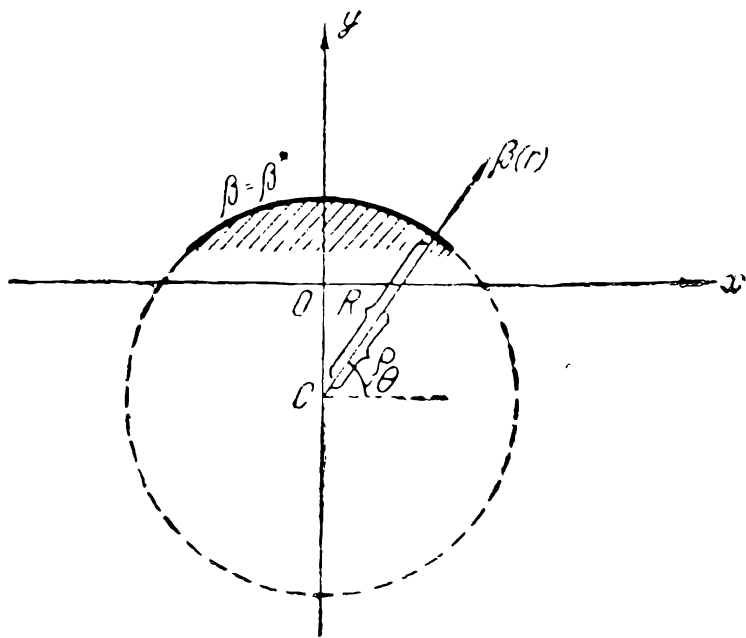
и $\beta = \beta_2$, т. е. и $\left. \frac{\partial w}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_1} = \left. \frac{\partial w}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_2} = 0$.

Можно получить также решение задачи об изгибе тонкой луночной плиты, имеющей форму кругового сегмента, для случая свободно опертого прямолинейного края, на чем мы остановимся в следующем параграфе.

§ 16. Изгибающие моменты и перерезывающие силы

Выведем формулы для изгибающих моментов и перерезывающих сил на той части контура круговой луночки, где $\beta = \beta^* = \text{const}$ (фиг. 18), причем контур будем считать закрепленным.

Для вычисления изгибающих моментов можно было бы воспользоваться общими формулами акад. Б. Г. Галеркина [20] для изгибающих моментов в криволинейных координатах. Однако, в данном случае можно поступить проще, воспользовавшись тем, что координатные линии $\beta = \text{const}$ суть дуги окружностей.



Фиг. 18.

Введем полярные координаты (ρ, θ) с центром в точке C (центр дуги $\beta = \beta^*$ — фиг. 18); при этом линия $\beta = \beta^* = \text{const}$ является линией $\rho = R = \text{const}$.

Изгибающий момент M_θ на линии $\rho = \text{const}$ дается известной формулой:

$$-M = -M_\theta \Big|_{\rho=R} = -M_\alpha \Big|_{\beta=\beta^*} = D \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=R} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \Big|_{\beta=\beta^*}, \quad (16,1)$$

или, учитывая то обстоятельство, что контур $\beta = \beta^*$ закреплен,¹

$$-M = (\Delta u)_{\beta=\beta^*}. \quad (16,2)$$

Заметим еще, что выражение Δu можно брать не только в координатах (ρ, θ) , но и в координатах (α, β) , ибо координаты (ρ, θ) получаются из обычных полярных координат с центром в точке O параллельным переносом, не влияющим на лапласиан. Учитывая это и применяя (3,1), получим:

$$-aM = \left\{ \left[(\text{ch } \alpha + \cos \beta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) - 2 \text{sh } \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + (\text{ch } \alpha - \cos \beta) \right] (gu) \right\}_{\beta=\beta^*}, \quad (16,3)$$

или в силу граничных условий $u \Big|_{\beta=\beta^*} = \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta^*} = 0$:

$$-aM = (\text{ch } \alpha + \cos \beta^*) \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (gu) \right]_{\beta=\beta^*}. \quad (16,4)$$

Формула (16,4) является основной для расчета изгибающих моментов на закрепленном контуре плиты.

Переходя к перерезывающим силам, воспользуемся известной формулой для перерезывающей силы $N_{\rho z}$ на координатной линии $\rho = \text{const}$, а также соотношением (2,2). Имеем:

$$-N = -N_{\rho z} \Big|_{\rho=R} = -N_{\beta z} \Big|_{\beta=\beta^*} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\Delta u) \right]_{\rho=R} = \\ = \left[g \frac{\partial}{\partial \beta} (\Delta u) \right]_{\beta=\beta^*}. \quad (16,5)$$

¹ При этом

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2},$$

ибо, в силу граничных условий на закрепленном краю:

$$u \Big|_{\rho=R} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \Big|_{\rho=R} = 0.$$

Применяя (3,1), получим:

$$-Na = \left\{ g \frac{\partial}{\partial \beta} \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) - 2 \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \right] (gu) \right\}_{\beta=\beta^*}, \quad (16,6)$$

или в силу граничных условий:

$$-Na^2 = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*) \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*) \frac{\partial^3 (gu)}{\partial \beta^3} \Big|_{\beta=\beta^*} + \right. \\ \left. + \sin \beta^* \frac{\partial^2 (gu)}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\beta^*} \right], \quad (16,7)$$

Последняя формула и служит для расчета перерезывающих сил на закрепленном контуре плиты.

Имея выражение (16,1) для изгибающего момента, можем поставить граничные условия для свободно опертого края плиты. Как известно, на свободно опертом краю должны выполняться условия $w = M = 0$, или с учетом (16,1) и (3,1):

$$u = 0, \quad (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2 (gu)}{\partial \beta^2} + 2 \sin \beta \frac{\partial (gu)}{\partial \beta} - \frac{a}{R} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0. \quad (16,8)$$

Второе из этих условий, вообще говоря, нельзя превратить в равенство относительно функций $f_c(\beta, m)$ и $f_s(\beta, m)$, т. е. в уравнение относительно величин $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$, ибо оно содержит переменную α вне знака интеграла. Исключение представляет случай, когда на краю $\beta^* = 0$, или $\beta^* = \pm \pi$, т. е. когда свободно опертым краем является прямолинейный край.¹ В самом деле, при этом на контуре $\sin \beta^* = 0$, и условия (16,8) для прямолинейного края принимают вид ($R = \infty$):

$$u \Big|_{\beta=\beta^*} = 0, \quad \frac{\partial^2 (gu)}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\beta^*} = 0. \quad (16,9)$$

Но второму из этих условий можно удовлетворить, полагая

$$\frac{\partial^2 f_c}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\beta^*} = \frac{\partial^2 f_s}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\beta^*} = 0.$$

¹ При этом плита имеет форму кругового сегмента.

Итак, система уравнений для определения величин $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ в случае свободно опертого «прямолинейного» края плиты окончательно запишется так:

$$\left. \begin{aligned} f_c |_{\beta=\beta^*} = f_s |_{\beta=\beta^*} = \frac{\partial^2 f_c}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\beta^*} = \frac{\partial^2 f_s}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\beta^*} = 0 \\ (\beta^* = 0 \text{ или } \beta^* = \pm \pi). \end{aligned} \right\} \quad (16,10)$$

Выведем еще формулы для перерезывающих сил на свободно опертом прямолинейном краю $\beta = 0$ или $\beta = \pm \pi$.

С учетом условий (16,9) равенство (16,6) при $\beta = \beta^*$ ($\beta^* = 0$ или $\pm \pi$) принимает вид:

$$\begin{aligned} -\alpha^2 N = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*) \left\{ \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] (gu) \right\} \Big|_{\beta=\beta^*}, \quad (16,11) \end{aligned}$$

что и является расчетной формулой для перерезывающей силы на свободно опертом прямолинейном краю.

Заметим, что все формулы данного параграфа выведены в предположении, что нормаль к рассматриваемой линии $\beta = \text{const}$ совпадает с осью β (фиг. 18); в противном случае знаки изгибающих моментов и перерезывающих сил следует изменять на противоположные.

§ 17. Изгиб луночной плиты под действием сосредоточенной силы.

Будем разыскивать функцию Грина для поставленной задачи об изгибе луночной плиты, т. е. положим, что внешняя нагрузка представляет из себя сосредоточенную силу P , приложенную в произвольной точке α_0, β_0 (фиг. 19).¹

В этом случае

$$q(\alpha, \beta) = \begin{cases} P g^2 / 4 \varepsilon^2 & \text{при } \alpha_0 - \varepsilon < \alpha < \alpha_0 + \varepsilon, \\ & \beta_0 - \varepsilon < \beta < \beta_0 + \varepsilon, \\ 0 & \text{при прочих } \alpha \text{ и } \beta, \end{cases} \quad (17.1)$$

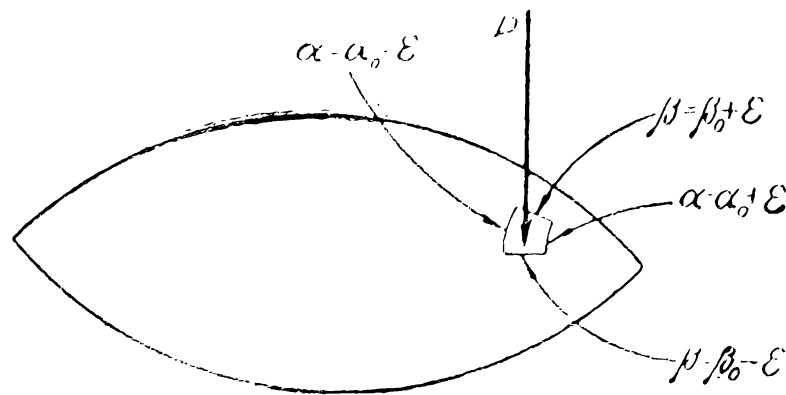
причем величина ε стремится к нулю.

¹ Обычно в функции Грина предполагается $P = 1$.

Из (15,8) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \rho_c(\beta, m) &= \frac{Pa}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\cos m\alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta} \\ \rho_s(\beta, m) &= \frac{Pa}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\sin m\alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta} \end{aligned} \right\} \text{при } \beta_0 - \varepsilon < \beta < \beta_0 + \varepsilon, \quad (17,2)$$

и $\rho_c(\beta, m) = \rho_s(\beta, m) = 0$ при прочих β .



Фиг. 19.

Далее, равенство (15,12) дает, если принять $\bar{\beta} = \beta_1$:

$$\left. \begin{aligned} f_c^*(\beta, m) &= \frac{Pa}{2\pi m(m^2 + 1)} \times \\ &\times \frac{\cos m\alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} K(\beta, m, \beta_0) \\ f_s^*(\beta, m) &= \frac{Pa}{2\pi m(m^2 + 1)} \times \\ &\times \frac{\sin m\alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} K(\beta, m, \beta_0) \end{aligned} \right\} \text{при } \beta \geq \beta_0. \quad (17,3)$$

При $\beta \leq \beta_0$

$$f_c^*(\beta, m) = f_s^*(\beta, m) = 0. \quad (17,4)$$

Таким образом, на основании (15,13), общий интеграл уравнения (15,9) для случая сосредоточенной силы можно

записать в виде:

$$f_c(\beta, m) = \frac{Pa}{2\pi m(m^2 + 1)} \cdot \frac{\cos m\alpha_0}{\operatorname{ch}\alpha_0 + \cos\beta_0} [K(\beta, m, \beta_0) + \\ + A_c(m) \operatorname{ch} m\beta \cos\beta + B_c(m) \operatorname{ch} m\beta \sin\beta + \\ + C_c(m) \operatorname{sh} m\beta \cos\beta + D_c(m) \operatorname{sh} m\beta \sin\beta], \quad (17,5)$$

$$f_s(\beta, m) = \frac{Pa}{2\pi m(m^2 + 1)} \cdot \frac{\sin m\alpha_0}{\operatorname{ch}\alpha_0 + \cos\beta_0} [K(\beta, m, \beta_0) + \\ + A_s(m) \operatorname{ch} m\beta \cos\beta + B_s(m) \operatorname{ch} m\beta \sin\beta + \\ + C_s(m) \operatorname{sh} m\beta \cos\beta + D_s(m) \operatorname{sh} m\beta \sin\beta], \quad (17,6)$$

причем член $K(\beta, m, \beta_0)$ следует здесь¹ брать лишь при $\beta \geq \beta_0$. Подставляя (17,5) — (17,6) в (15,6), получим окончательную формулу для приведенного прогиба:

$$u(\alpha, \beta) = \frac{Pa^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha_0 + \cos\beta_0)(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\varphi(\beta, m)}{m(m^2 + 1)} \cos m(\alpha - \alpha_0) dm, \quad (17,7)$$

$$\varphi(\beta, m) = K(\beta, m, \beta_0) + A_1(m) \operatorname{ch} m\beta \cos\beta + \\ + A_2(m) \operatorname{ch} m\beta \sin\beta + B_1(m) \operatorname{sh} m\beta \cos\beta + \\ + B_2(m) \operatorname{sh} m\beta \sin\beta. \quad \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\}$$

В дальнейшем функцию $\varphi(\beta, m)$ будем называть основной функцией.

Граничные условия для закрепленного края

$$\varphi(\alpha, \beta_1) = \varphi(\alpha, \beta_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = 0 \quad (17,8)$$

могут быть записаны в виде следующей системы уравнений

¹ А также и во всех аналогичных формулах этой главы.

относительно неизвестных функций $A_1(m)$, $A_2(m)$, $B_1(m)$, $B_2(m)$:

$$\begin{aligned}
 & A_1 \operatorname{ch} m\beta_1 \cos \beta_1 + A_2 \operatorname{ch} m\beta_1 \sin \beta_1 + B_1 \operatorname{sh} m\beta_1 \cos \beta_1 + \\
 & \quad + B_2 \operatorname{sh} m\beta_1 \sin \beta_1 = 0, \\
 & A_1 (m \operatorname{sh} m\beta_1 \cos \beta_1 - \operatorname{ch} m\beta_1 \sin \beta_1) + \\
 & \quad + A_2 (m \operatorname{sh} m\beta_1 \sin \beta_1 + \operatorname{ch} m\beta_1 \cos \beta_1) + \\
 & \quad + B_1 (m \operatorname{ch} m\beta_1 \cos \beta_1 - \operatorname{sh} m\beta_1 \sin \beta_1) + \\
 & \quad + B_2 (m \operatorname{ch} m\beta_1 \sin \beta_1 + \operatorname{sh} m\beta_1 \cos \beta_1) = 0, \\
 & A_1 \operatorname{ch} m\beta_2 \cos \beta_2 + A_2 \operatorname{ch} m\beta_2 \sin \beta_2 + B_1 \operatorname{sh} m\beta_2 \cos \beta_2 + \\
 & \quad + B_2 \operatorname{sh} m\beta_2 \sin \beta_2 = -K(\beta_2, m, \beta_0), \\
 & A_1 (m \operatorname{sh} m\beta_2 \cos \beta_2 - \operatorname{ch} m\beta_2 \sin \beta_2) + \\
 & \quad + A_2 (m \operatorname{sh} m\beta_2 \sin \beta_2 + \operatorname{ch} m\beta_2 \cos \beta_2) + \\
 & \quad + B_1 (m \operatorname{ch} m\beta_2 \cos \beta_2 - \operatorname{sh} m\beta_2 \sin \beta_2) + \\
 & \quad + B_2 (m \operatorname{ch} m\beta_2 \sin \beta_2 + \operatorname{sh} m\beta_2 \cos \beta_2) = \\
 & \quad = -K'(\beta_2, m, \beta_0).
 \end{aligned} \tag{17,9}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}
 K'(\beta, m, t) &= \frac{\partial K(\beta, m, t)}{\partial \beta} = \\
 &= (m^2 + 1) \operatorname{sh} m(\beta - t) \sin(\beta - t). \tag{17,10}
 \end{aligned}$$

Соотношениями (17,7) и (17,9) полностью определяется функция Грина для поставленной задачи об изгибе луночной плиты с закрепленным контуром.

Формула (16,4) дает выражение для изгибающего момента на закрепленном краю $\beta = \beta^*$ в случае изгиба сосредоточенной силой

$$\begin{aligned}
 -M/P &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*}{2\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 \varphi(\beta, m)}{\partial \beta^2} \right)_{\beta=\beta^*} \times \\
 & \quad \times \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{m(m^2 + 1)} dm, \tag{17,11}
 \end{aligned}$$

а формула (16,7) — выражение перерезывающей силы для того же случая:

$$-\frac{N}{P/a} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*}{2\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^\infty \left[(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*) \frac{\partial^3 \varphi(\beta, m)}{\partial \beta^3} \Big|_{\beta=\beta^*} + \sin \beta^* \frac{\partial^2 \varphi(\beta, m)}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=\beta^*} \right] \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{m(m^2 + 1)} dm. \quad (17,12)$$

Наконец, формула (16,11) дает выражение для перерезывающей силы на свободно опертом прямолинейном краю $\beta = 0$ ($\beta^* = 0$ или $\pm \pi$):

$$-\frac{N}{P/a} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*}{2\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \left\{ (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta^*) \times \int_0^\infty \left[(1 - m^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta^*} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta^3} \Big|_{\beta=\beta^*} \right] \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{m(m^2 + 1)} dm + 2 \operatorname{sh} \alpha \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta^*} \frac{\sin m(\alpha - \alpha_0)}{m^2 + 1} dm \right\}. \quad (17,13)$$

Не решая, ввиду громоздкости выкладок, систему (17,9) в общем виде, обратимся к некоторым практически важным частным случаям.

Нагрузка в дальнейшем (кроме § 25) предполагается сосредоточенной в точке, причем в § 18—21 нами будут рассмотрены плиты с закрепленным краем, а в § 22—24 решаются некоторые задачи для плиты с частично опертым краем.

§ 18. Изгиб плиты, имеющей форму симметричной круговой луночки

Полагая в общих формулах предыдущего параграфа $\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$, получим решение задачи об изгибе симметричной луночной плиты (фиг. 10) с закрепленным контуром под действием сосредоточенной силы P , приложенной в произвольной точке (α_0, β_0) .

Система уравнений (17,9) для неизвестных функций $A_1(m)$, $A_2(m)$, $B_1(m)$ и $B_2(m)$ принимает при этом вид:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - A_2 \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - B_1 \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma + \\
 + B_2 \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma &= 0, \\
 A_1 \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma + A_2 \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + B_1 \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma + \\
 + B_2 \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma &= -K(\gamma, m, \beta_0), \\
 A_1(-m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma + \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) - A_2(m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \\
 + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma) + B_1(m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma) - \\
 - B_2(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) &= 0 \\
 A_1(m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) + A_2(m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \\
 + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma) + B_1(m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma) + \\
 + B_2(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) &= -K'(\gamma, m, \beta_0).
 \end{aligned} \right\} (18,1)$$

Решая эту систему, получим следующие значения:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta A_1 &= \sin \gamma \operatorname{sh} m\gamma \cdot K'(\gamma, m, \beta_0) - (\cos \gamma \operatorname{sh} m\gamma + \\
 &+ m \sin \gamma \operatorname{ch} m\gamma) \cdot K(\gamma, m, \beta_0), \\
 \delta A_2 &= (m \cos \gamma \operatorname{ch} m\gamma - \sin \gamma \operatorname{sh} m\gamma) \cdot K(\gamma, m, \beta_0) - \\
 &- \cos \gamma \operatorname{sh} m\gamma \cdot K'(\gamma, m, \beta_0), \\
 \delta B_1 &= \sin \gamma \operatorname{ch} m\gamma \cdot K'(\gamma, m, \beta_0) - (\cos \gamma \operatorname{ch} m\gamma + \\
 &+ m \sin \gamma \operatorname{sh} m\gamma) \cdot K(\gamma, m, \beta_0), \\
 \Delta B_2 &= (m \cos \gamma \operatorname{sh} m\gamma - \sin \gamma \operatorname{ch} m\gamma) \cdot K(\gamma, m, \beta_0) - \\
 &- \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma \cdot K'(\gamma, m, \beta_0), \\
 \Delta &= \operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma, \quad \delta = \operatorname{sh} 2m\gamma - m \sin 2\gamma, \\
 K(\gamma, m, \beta_0) &= m \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) \sin(\gamma - \beta_0) - \\
 &- \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \cos(\gamma - \beta_0), \\
 K'(\gamma, m, \beta_0) &= (m^2 + 1) \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \sin(\gamma - \beta_0),
 \end{aligned} \right\} (18,2)$$

после чего окончательное решение задачи дается формулой (17,7).

Обратимся к частному случаю $\beta_0 = 0$, когда сила P приложена к точке оси симметрии (ox); при этом прогиб будет

симметричен относительно оси ox , т. е. он является четной функцией переменной β .

Рассмотрим для этого случая функцию $\varphi(\beta, m)$ в формуле (17,7). Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(\beta, m) \Big|_{\beta_0=0} = & K(\beta, m, 0) \Big|_{\beta_0=0} + \text{ch } m\beta \cos \beta + \\ & + A_2(m) \Big|_{\beta_0=0} \text{ch } m\beta \sin \beta + B_1(m) \Big|_{\beta_0=0} \text{sh } m\beta \cos \beta + \\ & + B_2(m) \Big|_{\beta_0=0} \text{sh } m\beta \sin \beta, \end{aligned} \quad (18,3)$$

или, после подстановки сюда (18,2) и учета соотношения

$$K(\beta, m, 0) = m \text{ch } m\beta \sin \beta - \text{sh } m\beta \cos \beta: \quad (18,4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\beta, m) \Big|_{\beta_0=0} = & \pm \frac{1}{2} K(\beta, m, 0) + \frac{1}{\Delta} \{ (\text{sh}^2 m\gamma - \\ & - m^2 \sin^2 \gamma) \cos \beta \text{ch } m\beta - m \sin \beta \text{sh } m\beta \times \\ & \times (\text{sh}^2 m\gamma + \sin^2 \gamma) \}. \end{aligned} \quad (18,5)$$

Здесь плюс относится к случаю $\beta \geq 0$, а минус к случаю $\beta \leq 0$.

Подсчитаем прогиб под силой, т. е. при $\beta = \beta_0 = 0$, $\alpha = \alpha_0$. (18,5) дает:

$$\varphi(0, m) \Big|_{\beta_0=0} = \frac{1}{\Delta} (\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma). \quad (18,6)$$

Подставляя (18,6) в (17,7) и полагая $\beta = \beta_0 = 0$, $\alpha = \alpha_0$, будем иметь для прогиба под силой $u_0(\alpha_0) = u_0$:

$$u_0 = \frac{Pa^2}{2\pi} \frac{1}{(\text{ch } \alpha_0 + 1)^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \cdot \frac{dm}{m(m^2 + 1)}. \quad (18,7)$$

Наконец, если $\alpha_0 = 0$ (сила приложена в центре плиты — начале координат), то прогиб u_0 в центре плиты дается формулой:

$$u_0 = \frac{Pa^2}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \cdot \frac{dm}{m(m^2 + 1)}. \quad (18,8)$$

Для круга ($\gamma = \pi/2$, $a = R$) имеем:

$$u_0 = \frac{PR^2}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2}{\text{sh } m\pi} \cdot \frac{dm}{m(m^2 + 1)} =$$

$$= \frac{PR^2}{8\pi} \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\text{th} \frac{m\pi}{2} dm}{m(m^2 + 1)} - \int_0^\infty \frac{m dm}{(m^2 + 1) \text{sh } m\pi} \right],$$

или, после использования П (46) и П (45), $u_0 = \frac{PR^2}{16\pi}$, как и должно быть (см., например, [21], стр. 512). Этот случай, а также случай $\gamma = \pi$, будет нами подробно рассмотрен в следующем параграфе.

Таблица 5

Вспоминая, что $u_0 = D\omega_0$ и обозначая

$$\omega_0 = \lambda \frac{Pa^2}{Eh^3} (1 - \nu^2), \quad (18,9)$$

для коэффициента λ получим:

$$\lambda = \frac{12u_0}{Pa^2} =$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{\sin 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \cdot \frac{dm}{m(m^2 + 1)}. \quad (18,10)$$

| η | λ |
|----------|-----------|
| 1/4 | 0,0356 |
| 1/2 | 0,0832 |
| 3/4 | 0,153 |
| 1 | 0,239 |
| 2 | 0,381 |
| 3 | 0,427 |
| ∞ | 0,478 |

В табл. 5 даны значения коэффициента λ для некоторых значений отношения η ширины луночки H к ее длине $2a$ [$\eta = \text{tg} \frac{\gamma}{2}$].¹

Интегралы, входящие в выражение (18,10) подсчитывались тем же способом, что и в § 7, а именно:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \cdot \frac{dm}{m(m^2 + 1)} =$$

$$= \int_0^N \frac{\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \cdot \frac{dm}{m(m^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int_N^\infty \frac{dm}{m(m^2 + 1)},$$

¹ См. стр. 37.

причем первый интеграл вычислялся численно, а во втором квадратуры можно выполнить. Число N подбирается так чтобы пренебрежения, сделанные во втором интеграле, не влияли на точность результата.

Обратимся теперь к вычислению изгибающих моментов, приложенных к закрепленному контуру симметричной луночной плиты, причем ограничимся случаем, когда действующая сила P приложена в точке оси ox , т. е. когда $\beta_0 = 0$.

Чтобы применить формулу (16,4), продифференцируем равенство (18,5) дважды по переменной β и положим $\beta = \gamma$. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi''(\gamma, m) \Big|_{\beta_0=0} &= \frac{1}{2} K''(\gamma, m, 0) + \frac{1}{\Delta} \{ (\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma) \times \\ &\times (-\cos \gamma \text{ch } m\gamma - 2m \sin \gamma \text{sh } m\gamma + m^2 \cos \gamma \text{ch } m\gamma) - \\ &- m (\text{sh}^2 m\gamma + \sin^2 \gamma) \cdot (-\sin \gamma \text{sh } m\gamma + 2m \cos \gamma \text{ch } m\gamma + \\ &+ m^2 \sin \gamma \text{sh } m\gamma) \}, \end{aligned}$$

или после преобразований с учетом равенства

$$\begin{aligned} K''(\beta, m, t) &= \frac{\partial^2 K(\beta, m, t)}{\partial \beta^2} = \\ &= (m^2 + 1) [m \text{ch } m(\beta - t) \sin(\beta - t) + \text{sh } m(\beta - t) \cos(\beta - t)], \\ \varphi''(\gamma, m) \Big|_{\beta_0=0} &= \frac{2m(m^2 + 1) \sin \gamma \text{sh } m\gamma}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma}. \quad (18,11) \end{aligned}$$

Теперь, подставив (18,11) в (16,4), получим для изгибающего момента на контуре:

$$\begin{aligned} -M &= \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{\text{ch } \alpha + \cos \gamma}{\text{ch } \alpha_0 + 1} \int_0^\infty \varphi''(\gamma, m) \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{m(m^2 + 1)} dm = \\ &= \frac{P \sin \gamma}{\pi} \cdot \frac{\text{ch } \alpha + \cos \gamma}{\text{ch } \alpha_0 + 1} \int_0^\infty \frac{\text{sh } m\gamma \cos m(\alpha - \alpha_0)}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma} dm, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$-\frac{M}{P} = \frac{\sin \gamma}{\pi} \cdot \frac{\text{ch } \alpha + \cos \gamma}{\text{ch } \alpha_0 + 1} \int_0^\infty \frac{\text{sh } m\gamma \cos m(\alpha - \alpha_0)}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma} dm. \quad (18,12)$$

Максимальный изгибающий момент для случая силы, приложенной в центре плиты ($\alpha_0 = 0$), будет достигаться в точках A (фиг. 10), где $\alpha = 0$.¹ Имеем:

$$-\frac{M_{\max}}{P} = \frac{\sin \gamma (1 + \cos \gamma)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\gamma \, dm}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma}. \quad (18,13)$$

При $\gamma = \pi/2$ имеем из (18,12):

$$-\frac{M}{P} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \int_0^{\infty} \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \, dm,$$

или, согласно П(26):

$$-\frac{M}{P} = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0) + 1} = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{2\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0)(\operatorname{ch} \alpha_0 + 1)};$$

при $\alpha_0 = 0$ $-\frac{M}{P} = \frac{1}{4\pi}$ и не зависит от α , как и должно быть для круга.

Исследуем теперь поведение изгибающего момента M в углах луночки ($\alpha = \pm \infty$) при помощи формулы (18,12), принимая для простоты рассуждений $\alpha_0 = 0$ (сила сосредоточена в центре плиты). Имеем:

$$-\frac{M(\alpha)}{P} = \frac{\sin \gamma (\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} m\alpha}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \, dm. \quad (18,14)$$

Имея в виду переход к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, будем вычислять интеграл с помощью теоремы о вычетах (см. § 8, стр. 35).

Можно показать, что все корни функции $\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma$ простые и в верхней полуплоскости комплексной переменной m имеют вид $m_k = a_k + ib_k$, причем все $b_k > 2$ при $\gamma < \pi/2$ и все $b_k < 2$ при $\gamma > \pi/2$. Поэтому

$$-\frac{M(\alpha)}{P} = \frac{i}{2} \sin \gamma (\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma) \sum_k \frac{\operatorname{sh} \gamma m_k e^{i a_k \alpha} e^{-b_k \alpha}}{2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma m_k + \sin 2\gamma};$$

¹ Ниже будет показано, что это справедливо лишь для $\gamma < \pi/2$.

и при $\alpha \rightarrow \infty$ правая часть последнего равенства стремится к нулю при $\gamma < \pi/2$ и безгранично возрастает при $\gamma > \pi/2$.

Таким образом, изгибающие моменты в углах закрепленной по контуру симметричной луночной плиты равны нулю, если на контуре нет входящих углов ($\gamma < \pi/2$). Если же на контуре имеются входящие углы ($\gamma > \pi/2$, фиг. 12), то изгибающие моменты в углах плиты принимают бесконечно большие значения.

Можно показать, что при $\gamma < \pi/2$ и $\alpha_0 = 0$ изгибающий момент на краю симметричной луночки монотонно убывает от

Таблица 6

| η | $1/4$ | $1/2$ | $3/4$ | 1 |
|----------|-------|-------|-------|--------|
| κ | 0,169 | 0,132 | 0,105 | 0,0796 |

значения M_{\max} при $\alpha = 0$ до нуля при $\alpha = \pm \infty$; при $\gamma > \pi/2$ указанный изгибающий момент монотонно возрастает от минимального значения при $\alpha = 0$ до бесконечности при $\alpha = \pm \infty$.

В табл. 6 даны значения величины $\kappa = -\frac{M_{\max}}{P}$ для некоторых значений η , соответствующих острым углам γ .

Пользуясь формулой (16,7), можно получить выражение для перерезывающей силы на контуре плиты.

Ограничиваясь случаем $\beta_0 = 0$ (сила сосредоточена в точке оси ox), продифференцируем равенство (18,5) трижды по переменной β и положим $\beta = \gamma$. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi'''(\gamma, m) \Big|_{\beta_0=0} &= \frac{1}{2} K'''(\gamma, m, 0) + \\ &+ \frac{1}{\Delta} [(\text{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma) \cdot (\sin \gamma \text{ch } m\gamma - 3m \cos \gamma \text{sh } m\gamma - \\ &- 3m^2 \sin \gamma \text{ch } m\gamma + m^3 \cos \gamma \text{sh } m\gamma) - m (\text{sh}^2 m\gamma + \sin^2 \gamma) \times \\ &\times (-\cos \gamma \text{sh } m\gamma - 3m \sin \gamma \text{ch } m\gamma + 3m^2 \cos \gamma \text{sh } m\gamma + \\ &+ m^3 \sin \gamma \text{ch } m\gamma)], \end{aligned}$$

или после выкладок, с учетом равенства

$$K'''(\beta, m, t) = \frac{\partial^3 K(\beta, m, t)}{\partial \beta^3} = (m^2 + 1) [2m \text{ch } m(\beta - t) \cos(\beta - t) + (m^2 - 1) \text{sh } m(\beta - t) \sin(\beta - t)],$$

$$\varphi'''(\gamma, m) \Big|_{\beta_0=0} = 2m(m^2 + 1) \frac{\cos \gamma \text{sh } m\gamma + m \sin \gamma \text{ch } m\gamma}{\text{sh } 2m\gamma + m \sin 2\gamma}. \quad (18,15)$$

Подставляя (18,15) в (16,7), получим:

$$-\frac{N}{P/a} = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \int_0^{\infty} [(\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma) \varphi'''(\gamma, m) + \sin \gamma \varphi''(\gamma, m)] \cos m(\alpha - \alpha_0) dm,$$

или окончательно с учетом (18,11):

$$-\frac{N}{P/a} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \times \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma) (\cos \gamma \operatorname{sh} m\gamma + m \sin \gamma \operatorname{ch} m\gamma) + \sin^2 \gamma \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \times \cos m(\alpha - \alpha_0) dm. \quad (18,16)$$

Исследование этой формулы при $\alpha \rightarrow \pm \infty$ показывает, что перерезывающие силы в углах плиты равны нулю, если $\gamma < \pi/2$, и бесконечно велики, если $\gamma > \pi/2$.

Для $\gamma < \pi/2$ максимальное значение перерезывающей силы будет в точках А, где $\alpha = 0$ (при этом считается, что сила P приложена в центре плиты, т. е. $\alpha_0 = 0$).

Имеем из (18,16):

$$-\frac{N_{\max}}{P/a} = \frac{(1 + \cos \gamma)^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\gamma + m \sin \gamma \operatorname{ch} m\gamma}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} dm. \quad (18,17)$$

Для круга ($\gamma = \pi/2$) имеем из (18,16):

$$-\frac{N}{P/R} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \left[\int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} \cos m(\alpha - \alpha_0) dm + \int_0^{\infty} \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} dm \right],$$

или с помощью П(17) и П(26):

$$-\frac{N}{P/R} = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha}{1 + \operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0)} + \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0)}{1 + \operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0)} \right] = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\pi(\operatorname{ch} \alpha_0 + 1)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0)}{1 + \operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0)}.$$

При $\alpha_0 = 0$ $-\frac{N_{\max}}{P/R} = \frac{1}{2\pi}$ и не зависит от x , как и должно быть.

В табл. 7 приведены значения величины $k = -\frac{N_{\max}}{P/a}$ для некоторых значений η , соответствующих острым углам γ .

Таблица 7

| η | $1/4$ | $1/2$ | $3/4$ | 1 |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| k | 1,56 | 0,752 | 0,337 | 0,159 |

§ 19. Некоторые интегрируемые случаи

Из рассмотрения формул (18,2) можно сделать вывод, что при $\gamma = \pi/2$ или $\gamma = \pi$ знаменатели функции $\varphi(\beta, m)$ будут одночленными: $\Delta = \delta = \text{sh } m\pi$ для случая $\gamma = \pi/2$ и $\Delta = \delta = \text{sh } 2m\pi$ для случая $\gamma = \pi$, т. е. соответствующие интегралы, входящие в основную формулу (17,7), могут быть вычислены точно, ибо интегралы типа

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sh } mp \cdot \cos mq}{(m^2 + 1) \text{sh } m\pi} dm, \quad \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } mp \cdot \cos mq}{(m^2 + 1) \text{sh } 2m\pi} dm$$

могут быть взяты.

Разберем, прежде всего, случай $\gamma = \pi/2$, соответствующий изгибу сосредоточенной силой круглой плиты, закрепленной по контуру.

Положим $\beta_0 = 0$.¹

Из (18,5) будем иметь при $\beta \geq \beta_0$:

$$\begin{aligned} \varphi(\beta, m) \Big|_{\substack{\beta_0=0 \\ \gamma=\pi/2}} &= \frac{1}{2} (m \text{ch } m\beta \sin \beta - \text{sh } m\beta \cos \beta) + \\ + \frac{1}{\text{sh } m\pi} &\left[\left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2 \right) \cos \beta \text{ch } m\beta - m \sin \beta \text{sh } m\beta \left(\text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} + 1 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\text{sh } m\pi} \left\{ \cos \beta \left[\text{sh } m \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \text{sh } \frac{m\pi}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - m^2 \text{ch } m\beta \right] + m \sin \beta \text{sh } m \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \text{ch } \frac{m\pi}{2} \right\}, \end{aligned}$$

¹ В случае круглой плиты это допущение не нарушает общности.

а подставляя последнее выражение в основную формулу (17,7) получим:

$$u = \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \left\{ 2 \cos \beta \int_0^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - m^2 \operatorname{ch} m\beta \right] \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0) dm}{m(m^2 + 1) \operatorname{sh} m\pi} + \right. \\ \left. + \sin \beta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos m(\alpha - \alpha_0)}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} dm \right\}. \quad (19,1)$$

Выполняя интегрирование с помощью П (47) и П (51), будем после некоторых выкладок иметь:

$$u = \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \left\{ \frac{1}{2} [\cos \beta - \right. \\ \left. - \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0)] \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + \cos \beta}{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos \beta} + \cos \beta \right\}, \quad (19,2)$$

что и дает точное решение в биполярных координатах задачи об изгибе круглой плиты с закрепленным краем под действием сосредоточенной силы P , приложенной в произвольной точке (α_0, β_0) .

При $\alpha_0 = 0$ (сила в центре круга) имеем:

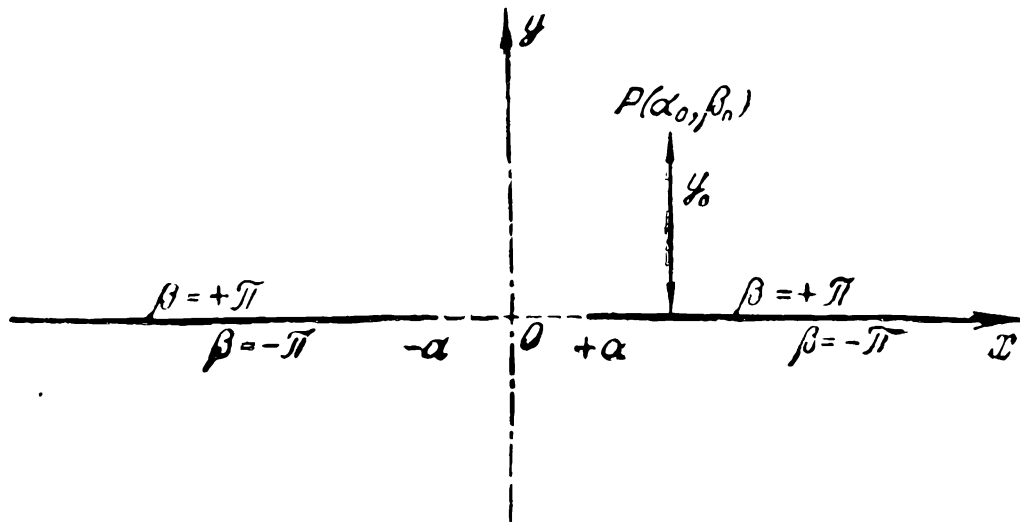
$$u = \frac{Pa^2}{8\pi (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \times \\ \times \left[\frac{1}{2} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \cos \beta \right]. \quad (19,3)$$

Последнее выражение с помощью (1,11) можно привести к виду:

$$u = \frac{Pa^2}{8\pi} \left[\frac{r^2}{a^2} \operatorname{lg} \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right], \quad (19,4)$$

что полностью совпадает с известным решением задачи об изгибе круглой плиты сосредоточенной силой в центре.

Обратимся теперь к другому интегрируемому случаю $\gamma = \pi$, который соответствует изгибу бесконечной плиты с закре-



Фиг. 20.

пленной линией (ось ox), имеющей разрыв (отрезок $-a, +a$, фиг. 20). Система (18,2) при $\gamma = \pi$ дает:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} 2m\pi \cdot A_1 &= \operatorname{sh} m\pi \cdot K(\pi, m, \beta_0), \\ \operatorname{sh} 2m\pi \cdot A_2 &= -m \operatorname{ch} m\pi \cdot K(\pi, m, \beta_0) + \\ &\quad + \operatorname{sh} m\pi \cdot K'(\pi, m, \beta_0), \\ \operatorname{sh} 2m\pi \cdot B_1 &= \operatorname{ch} m\pi \cdot K(\pi, m, \beta_0), \\ \operatorname{sh} 2m\pi \cdot B_2 &= -m \operatorname{sh} m\pi \cdot K(\pi, m, \beta_0) + \\ &\quad + \operatorname{ch} m\pi \cdot K'(\pi, m, \beta_0). \end{aligned} \right\} \quad (19,5)$$

Подставляя (19,5) в (17,7), получим после преобразований

$$\varphi(\beta, m) = K(\beta, m, \beta_0) + \frac{1}{\operatorname{sh} 2m\pi} \left\{ [\cos \beta \operatorname{sh} m(\pi + \beta) - \right. \\ \left. - m \sin \beta \operatorname{ch} m(\pi + \beta)] K(\pi, m, \beta_0) + \right. \\ \left. + \sin \beta \operatorname{sh} m(\pi + \beta) K'(\pi, m, \beta_0) \right\}. \quad (19,6)$$

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} K(\pi, m, \beta_0) &= m \operatorname{ch} m(\pi - \beta_0) \sin \beta_0 + \operatorname{sh} m(\pi - \beta_0) \cos \beta_0, \\ K'(\pi, m, \beta_0) &= (m^2 + 1) \operatorname{sh} m(\pi - \beta_0) \sin \beta_0, \end{aligned} \right\} \quad (19,7)$$

можно равенство (19,6) привести к весьма удобному для интегрирования виду:

$$2 \operatorname{sh} 2m\pi\varphi(\beta, m) = (m^2 + 1) \cos(\beta - \beta_0) \{ \operatorname{ch} m [2\pi \pm (\beta_0 - \beta)] - \\ - \operatorname{ch} m (\beta_0 + \beta) \} + m \{ \sin(\beta_0 + \beta) \operatorname{sh} m (\beta_0 + \beta) \pm \\ \pm \sin(\beta_0 - \beta) \operatorname{sh} m [2\pi \pm (\beta_0 - \beta)] \} + \\ + m^2 \{ \cos(\beta_0 + \beta) \operatorname{ch} m (\beta_0 + \beta) - \\ - \cos(\beta_0 - \beta) \operatorname{ch} m [2\pi \pm (\beta_0 - \beta)] \}, \quad (19,8)$$

причем верхний знак соответствует случаю $\beta \geq \beta_0$, а нижний — случаю $\beta \leq \beta_0$.

Теперь из равенства (17,7) получаем:

$$u = \frac{Pa^2}{4\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0) (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \times \\ \times [\cos(\beta - \beta_0) J_1 + J_2 + J_3], \\ J_1 = \int_0^\infty \{ \operatorname{ch} m [2\pi \pm (\beta_0 - \beta)] - \\ - \operatorname{ch} m (\beta_0 + \beta) \} \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{m \operatorname{sh} 2m\pi} dm, \\ J_2 = \int_0^\infty \{ \sin(\beta_0 + \beta) \operatorname{sh} m (\beta_0 + \beta) \pm \\ \pm \sin(\beta - \beta_0) \operatorname{sh} m [2\pi \pm (\beta_0 - \beta)] \} \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} 2m\pi} dm, \\ J_3 = \int_0^\infty \{ \cos(\beta_0 + \beta) \operatorname{ch} m (\beta_0 + \beta) - \\ - \cos(\beta_0 - \beta) \operatorname{ch} m [2\pi \pm (\beta_0 - \beta)] \} \frac{m \cos m(\alpha - \alpha_0)}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} 2m\pi} dm. \quad (19,9)$$

Интеграл J_1 после дифференцирования по переменной β берется с помощью П(16):

$$J_1 = \frac{1}{2} \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \cos \frac{\beta + \beta_0}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} - \cos \frac{\beta - \beta_0}{2}}. \quad (19,10)$$

Интеграл J_3 выражается через интеграл J_2 почленным дифференцированием по переменной β , а интеграл J_2 берется с помощью П(48).

После выкладок, которые мы здесь опускаем, окончательное решение получается в форме:

$$u = \frac{Pa^2}{8\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0) (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ [\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) - \right. \\ \left. - \cos (\beta - \beta_0)] \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} - \cos \frac{\beta - \beta_0}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \cos \frac{\beta + \beta_0}{2}} + \right. \\ \left. + 4 \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \cos \frac{\beta_0}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \beta_0 \sin \beta \right\}. \quad (19,11)$$

Если $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, т. е. сила действует в начале координат, то

$$u = \frac{Pa^2}{16\pi (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2}} + \right. \\ \left. + 4 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right]. \quad (19,12)$$

Прогиб под силой будет $u_0 = u(0,0) = \frac{Pa^2}{8\pi}$ — вдвое больше, чем для случая круглой плиты.

Этот же результат получается из (18,8) при $\gamma = \pi$ с учетом П(44);

$$u_0 = \frac{Pa^2}{16\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} m\pi \, dm}{m(m^2 + 1)} = \frac{Pa^2}{8\pi}.$$

Обратимся к изгибающим моментам и перерезывающим силам на прямолинейной заделке ($\beta = \pm \pi$).

Ввиду того, что на заделке имеет место совпадение двух границ рассматриваемой области — координатной линии $\beta = +\pi$ и координатной линии $\beta = -\pi$, то изгибающий момент (точно так же и перерезывающая сила) на заделке должен подсчитываться как разность изгибающих моментов на кромках $\beta = +\pi$ и $\beta = -\pi$.

Учитывая это обстоятельство, имеем из (16,4):

$$-M = \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{a^2} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} [(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) u] \right)_{\beta=+\pi} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} [(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) u] \right)_{\beta=-\pi} \right\}. \quad (19,13)$$

Но из (19,11)

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) u = & \frac{Pa^2}{8\pi(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \left\{ [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \right. \\ & \left. - \cos(\beta - \beta_0)] \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} - \cos \frac{\beta - \beta_0}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \cos \frac{\beta + \beta_0}{2}} + \right. \\ & \left. + 4 \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \cos \frac{\beta_0}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \beta_0 \sin \beta \right\}, \end{aligned}$$

так что остается продифференцировать правую часть последнего равенства дважды по β и подставить в (19,13) при соответствующих значениях β .

После выкладок имеем:

$$-M = \frac{P(\operatorname{ch} \alpha - 1)}{\pi} \cdot \frac{\sin \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \cdot \frac{\cos \frac{\beta_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0}$$

или, заменяя отношение $\frac{\sin \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0}$ через $\frac{y_0}{a}$ (см. фиг. 20)

$$-\frac{M}{P} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{\pi} \cdot \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\cos \frac{\beta_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0}. \quad (19,14)$$

На бесконечности ($\alpha \rightarrow 0$) $M \rightarrow 0$, а на концах заделки ($\alpha = \pm \infty$) $M \rightarrow \infty$, причем на заделке знак момента не меняется и вдоль заделки момент монотонно возрастает от 0 до ∞ .

При $\beta_0 = 0$ $M \equiv 0$ на всей заделке, как и должно быть, ибо внешняя сила P , будучи приложена в точке отрезка оси ox ($-a, +a$), не создает никакого момента относительно заделки,

Точно таким же образом, дифференцируя правую часть равенства (19,13) трижды по переменной β и применяя формулу (16,7), получим после выкладок следующее выражение для перерезывающей силы на заделке:

$$-\frac{N}{P/a} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^2 \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \cos^3 \frac{\beta_0}{2}}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \left\{ \frac{4 \sin^2 \frac{\beta_0}{2}}{[\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0]^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0} \right\}. \quad (19,15)$$

На бесконечности ($\alpha \rightarrow 0$) $N \rightarrow 0$, а на концах заделки ($\alpha = \pm \infty$) $N \rightarrow \infty$.

Любопытно, что знак перерезывающей силы изменяется в некоторой точке заделки ($\alpha = \alpha^*$). Чтобы определить значение α^* , приравняем N нулю, после чего получим уравнение для величины α^* : $4 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} - \operatorname{ch} (\alpha^* - \alpha_0) - \cos \beta_0 = 0$, или

$$\operatorname{ch} (\alpha^* - \alpha_0) = 6 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} - 1. \quad (19,16)$$

Если $\alpha_0 = 0$ (сила действует в точке оси oy), то

$$\operatorname{ch} \alpha^* = 6 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} - 1. \quad (19,17)$$

Абсцисса рассматриваемой точки $\alpha = \alpha^*$ будет:

$$\begin{aligned} \frac{x^*}{a} &= \frac{\operatorname{sh} \alpha^*}{\operatorname{ch} \alpha^* - 1} = \frac{\sin \frac{\beta_0}{2} \sqrt{3 \left(3 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} - 1 \right)}}{3 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} - 1} = \\ &= \sqrt{3} \frac{\sin \frac{\beta_0}{2}}{\sqrt{3 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} - 1}}. \quad (19,18) \end{aligned}$$

Например, при $\beta_0 = \pi/2$ ($y_0 = a$) получим $x^* = a \sqrt{3}$.

Из (19,17) или (19,18) видно, что точка $\alpha = \alpha^*$ существует не для всех значений β_0 , а только для таких, что $3 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} - 1 > 0$ или $\cos \beta_0 < \frac{1}{3}$. При $\cos \beta_0 = 1/3$, $x^* =$

$= \infty$ ($\text{ch } \alpha^* = 1, \alpha^* = 0$). Таким образом, при $0 \leq \beta_0 \leq \arccos \frac{1}{3}$ перерезывающая сила на заделке монотонно убывает от ∞ до нуля; при $\arccos \frac{1}{3} < \beta_0 < \pi$ перерезывающая сила меняет знак в точке, абсцисса которой определяется равенством (19,18).

Если $\beta_0 = 0$, т. е. сила P приложена в точке оси ox (между $-a$ и $+a$), имеем из (19,15):

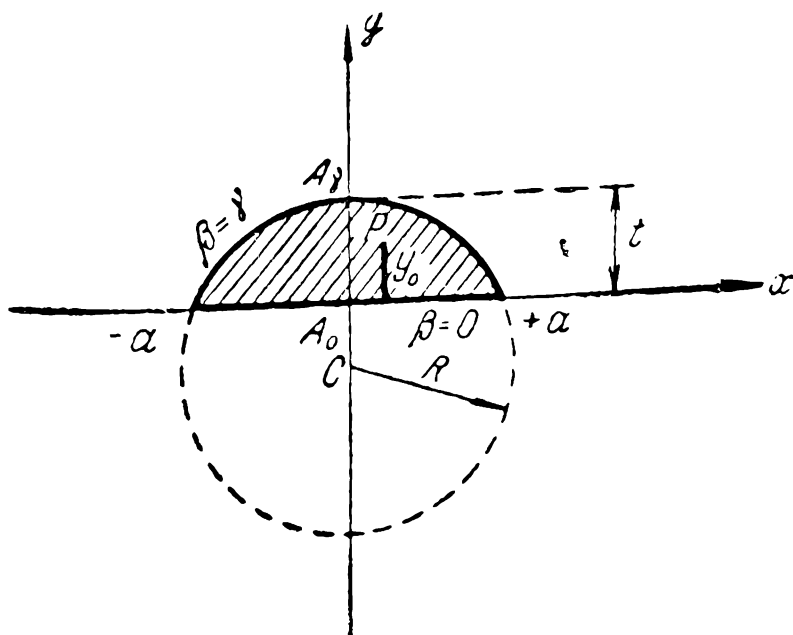
$$\frac{N}{P/a} = \frac{(\text{ch } \alpha - 1)^2}{\text{ch } \alpha_0 + 1} \cdot \frac{\text{ch } \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}{\text{ch } (\alpha - \alpha_0) + 1}$$

или

$$\frac{N}{P/a} = \frac{(\text{ch } \alpha - 1)^2}{2(\text{ch } \alpha_0 + 1)} \frac{1}{\text{ch } \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}. \quad (19,19)$$

§ 20. Изгиб плиты, имеющей форму кругового сегмента

Полагая в общем решении (§ 17) $\beta_1 = 0, \beta_2 = \gamma < \pi$, получим плиту в виде кругового сегмента (фиг. 21).



Фиг. 21.

Задача, решаемая в данном параграфе, интересная сама по себе, дает, кроме того, важные частные случаи — полу-круг ($\gamma = \pi/2$) и полуплоскость ($\gamma = \pi$).

Точное решение задачи об изгибе полукруглой плиты с закрепленным контуром не может быть получено в полярных

координатах. Такое решение, повидимому, впервые дается в этом параграфе.

Что касается второго частного случая, то, разумеется, задача об изгибе полуплоскости с закрепленным краем может быть решена в прямоугольных координатах, хотя в литературе нам такое решение обнаружить не удалось.

Переходим к решению задачи в общем случае (γ — любое от 0 до π).

Положим в (17,9) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma$. Получим такую систему для определения величин $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$:

$$\left. \begin{aligned} A(m) &= 0, \\ B(m) + mC(m) &= 0, \\ A(m) \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma + B(m) \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \\ &+ C(m) \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma + \\ &+ D(m) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma = -K(\gamma, m, \beta_0), \\ A(m) [m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma] + \\ &+ B(m) [m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma] + \\ &+ C(m) [m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma] + \\ &+ D(m) [m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \\ &+ \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma] = -K'(\gamma, m, \beta_0). \end{aligned} \right\} (20,1)$$

С учетом первых двух уравнений, вторые два уравнения дают для величин $B(m)$ и $D(m)$ систему:

$$\left. \begin{aligned} B(m) \left(\operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \frac{\operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma}{m} \right) + D(m) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma = \\ = -K(\gamma, m, \beta_0), \\ B(m) \left(m + \frac{1}{m} \right) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + D(m) (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \\ + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) = -K'(\gamma, m, \beta_0), \end{aligned} \right\} (20,2)$$

определитель которой будет (с точностью до множителя, не зависящего от γ)

$$\Delta = \operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma. \quad (20,3)$$

Находя из (20,2) величины $B(m)$ и $D(m)$ и учитывая, что $A(m) = 0$, $C(m) = -\frac{1}{m}B(m)$, получим из (17,7) после выкладок такое выражение для основной функции $\varphi(\beta, m)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\beta, m) = & K(\beta, m, \beta_0) + \frac{1}{\Delta} \{ [(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) \times \\ & \times K(\gamma, m, \beta_0) - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma K'(\gamma, m, \beta_0)] \times \\ & \times (m \operatorname{ch} m\beta \sin \beta - \operatorname{sh} m\beta \cos \beta) + [(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \\ & - \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) K'(\gamma, m, \beta_0) - (m^2 + 1) \times \\ & \times \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma K(\gamma, m, \beta_0)] \operatorname{sh} m\beta \sin \beta \}. \quad (20,4) \end{aligned}$$

Не останавливаясь, ввиду громоздкости выкладок, на вычислении прогибов, переходим сразу к расчетам изгибающих моментов.

Чтобы получить значение изгибающего момента на прямолинейном краю, составим:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi''(0, m) = & 2m [(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) K'(\gamma, m, \beta_0) - \\ & - (m^2 + 1) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma K(\gamma, m, \beta_0)] = 2m(m^2 + 1) \times \\ & \times [\sin \beta_0 \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - m \sin(\gamma - \beta_0) \sin \gamma \operatorname{sh} m\beta_0], \end{aligned}$$

после чего формула (17,11) дает при $\beta^* = 0$:¹

$$\begin{aligned} \frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = & \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{\sin \beta_0 \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - m \sin(\gamma - \beta_0) \sin \gamma \operatorname{sh} m\beta_0}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma} \times \\ & \times \cos m(\alpha - \alpha_0) dm. \quad (20,5) \end{aligned}$$

При $\alpha_0 = 0$ (сила P приложена в точке оси симметрии плиты) максимальный изгибающий момент достигается в точке

¹ Знак момента изменяется на противоположный, ибо внешняя нормаль к линии $\beta = 0$ направлена противоположно оси β .

$A_0 (\alpha = 0)$ и дается формулой:

$$x_0 = \frac{M_{\max}}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_0}{a} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - \frac{m \sin \gamma}{\sin \beta_0} \sin(\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m\beta_0}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma} dm \quad (20,6)$$

$$\left(\frac{y_0}{a} = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right).$$

Чтобы вычислить изгибающий момент на дуговом краю, составляем:

$$\Delta \varphi'' (\gamma, m) = \Delta K''' (\gamma, m, \beta_0) + [K (\gamma, m, \beta_0) (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma +$$

$$+ \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) - K' (\gamma, m, \beta_0) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma] \times$$

$$\times (m^2 + 1) (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) +$$

$$+ [K' (\gamma, m, \beta_0) (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) -$$

$$- (m^2 + 1) K (\gamma, m, \beta_0) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma] \cdot [(m^2 - 1) \times$$

$$\times \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + 2m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma] = 2m (m^2 + 1) \times$$

$$\times [\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0 \sin(\gamma - \beta_0) - m \sin \gamma \sin \beta_0 \times$$

$$\times \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)],$$

после чего имеем из (17,11), полагая $\beta^* = \gamma$:

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0 \sin(\gamma - \beta_0) - m \sin \beta_0 \sin \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma} \times$$

$$\times \cos m(\alpha - \alpha_0) dm. \quad (20,7)$$

При $\alpha_0 = 0$ максимальный изгибающий момент будет в точке $A_\gamma (\alpha = 0)$:

$$x_\gamma = -\frac{M_{\max}}{P} \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{1 + \cos \gamma}{2\pi} \cdot \frac{y_0}{a} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\frac{\sin(\gamma - \beta_0)}{\sin \beta_0} \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0 - m \sin \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma} dm. \quad (20,8)$$

В табл. 8 даны значения коэффициентов α_0 и α_γ для некоторых значений $\xi = \frac{t}{2R}$, $t = a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ (см. § 7, стр. 32), причем сила P предполагается приложенной в центре пластины, где $y_0 = t/2$. Это дает уравнение для определения значения β_0 по заданному значению ξ , а именно:

$$\frac{y_0}{a} = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \frac{t}{2a} = \frac{\xi}{\sin \gamma}. \quad (20,9)$$

В случае $\gamma \rightarrow \pi$ одновременно предполагаем, что $a \rightarrow 0$, так что радиус $R = \frac{a}{\sin \gamma}$ остается конеч-

ным, т. е. в пределе получается круглая плита. При этом величина β_0 также стремится к π , и из (20,9) можно получить, что

$$\beta_0 |_{\gamma \rightarrow \pi} \approx 2\gamma - \pi.$$

Учитывая это, имеем из (20,6):

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow \pi \\ a \rightarrow 0}} \alpha_0 = \frac{2}{\pi} \lim_{\gamma \rightarrow \pi} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) + \frac{m}{2} \operatorname{tg} \gamma \operatorname{sh} m(2\gamma - \pi)}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma} dm \right\},$$

или после выкладок

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow \pi \\ a \rightarrow 0}} \alpha_0 |_{\beta=0} = \frac{1}{4\pi},$$

как и должно быть в случае круглой плиты с закрепленным краем, нагруженной в центре сосредоточенной силой.¹ Этот же результат получится при аналогичном предельном переходе в формуле (20,8).

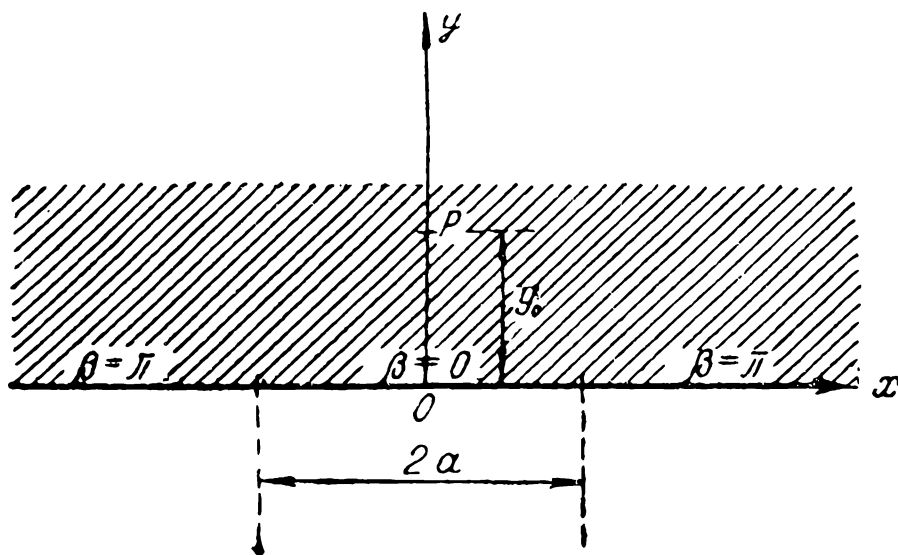
Если же $\gamma \rightarrow \pi$ при конечной длине a и произвольном y_0 [условие (20,9) при этом теряет смысл], то в пределе полу-

¹ Можно показать, что такое значение изгибающего момента получится в любой точке контура.

Таблица 8

| ξ | α_0 | α_γ |
|-------|------------|-----------------|
| $1/4$ | 0,161 | 0,152 |
| $1/2$ | 0,158 | 0,132 |
| $3/4$ | 0,129 | 0,114 |
| 1 | 0,0796 | 0,0796 |

чается полуплоскость с закрепленным краем. В этом случае все квадратуры в (20,5) и (20,7) могут быть выполнены.



Фиг. 22.

В самом деле, при $\gamma = \pi$ имеем из (20,5):

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1) \sin \beta_0}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m (\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh} m \pi} \cos m (\alpha - \alpha_0) dm.$$

Применяя П (16), получим при $\alpha_0 = 0$ (фиг. 22):

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \beta_0}{1 + \cos \beta_0} \cdot \frac{\sin \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0}$$

или

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1) (1 - \cos \beta_0)}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0}. \quad (20,10)$$

Это выражение можно преобразовать к прямоугольным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \operatorname{ch} \alpha) (1 - \cos \beta_0)}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0} &= \frac{(1 + \operatorname{ch} \alpha) (1 - \cos \beta_0)}{(1 + \operatorname{ch} \alpha) - (1 + \cos \beta_0)} = \\ &= \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_0}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1 + \cos \beta_0} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \alpha}} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_0}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta_0}{2} + \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2y_0^2}{y_0^2 + x^2}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{\pi} \frac{y_0^2}{x^2 + y_0^2}. \quad (20,11)$$

Аналогичным образом, полагая $\gamma = \pi$ в (20,7), будем иметь при $\alpha_0 = 0$:

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma=\pi} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1) \sin \beta_0}{\pi (1 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_0}{\operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha \, dm,$$

или, с учетом П (16):

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma=\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1) (1 - \cos \beta_0)}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0}. \quad (20,12)$$

Произведя те же выкладки, что и при выводе формулы (20,11), можно убедиться в том, что формула (20,11) сохраняет свой вид и в этом случае,¹ т. е. она является общей формулой для изгибающего момента на закрепленном краю полуплоскости.

Соотношение (20,11) может быть получено и непосредственным решением задачи об изгибе полуплоскости с закрепленным краем в прямоугольных координатах.

Из (20,11) следует, что максимальное значение изгибающего момента на закрепленном краю полуплоскости будет при $x = 0$:

$$M_{\max} = P/\pi. \quad (20,13)$$

Это значение не зависит от расстояния y_0 .

Переходим к вычислению перерезывающих сил на контуре сегментной плиты.

¹ При $\beta = \pi$ $x = \operatorname{sh} \alpha/2$, в то время как при $\beta = 0$ было $x = \operatorname{th} \alpha/2$. Различие знака в обоих случаях объясняется тем, что при $\beta = 0$ ось x совпадает с осью α , в то время как при $\beta = \pi$ направления осей α и x взаимно противоположны.

Для получения значения перерезывающей силы на прямолинейном краю, составим:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi'''(0, m) &= 2m(m^2 + 1) [K(\gamma, m, \beta_0) (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \\ &+ \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) - K'(\gamma, m, \beta_0) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma] = \\ &= 2m(m^2 + 1) \{m^2 \sin \gamma \sin(\gamma - \beta_0) \operatorname{ch} m\beta_0 + \\ &+ m [\operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) \sin(\gamma - \beta_0) - \\ &- \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \cos(\gamma - \beta_0)] - \\ &- \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \cos \beta_0\}, \end{aligned}$$

после чего формула (17,12) дает при $\beta^* = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} &= \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2}{\pi(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^\infty \{m^2 \sin \gamma \sin(\gamma - \beta_0) \operatorname{ch} m\beta_0 + \\ &+ m [\operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) \sin(\gamma - \beta_0) - \\ &- \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \cos(\gamma - \beta_0)] - \\ &- \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \cos \beta_0\} \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0) dm}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}. \quad (20,14) \end{aligned}$$

При $\alpha_0 = 0$ максимальное значение перерезывающей силы будет при $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} k_0 &= - \frac{N_{\max}}{P/R} = \frac{4}{\pi(1 + \cos \beta_0)} \sin \gamma \int_0^\infty \{m [\operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma \times \\ &\times \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \cos(\gamma - \beta_0) - \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) \times \\ &\times \sin(\gamma - \beta_0)] - m^2 \sin \gamma \sin(\gamma - \beta_0) \operatorname{ch} m\beta_0 + \\ &+ \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \cos \beta_0\} \frac{dm}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}. \quad (20,15) \end{aligned}$$

Для вычисления перерезывающей силы на дуговом краю, составим

$$\begin{aligned} \Delta \varphi'''(\gamma, m) &= 2m(m^2 + 1) \{m \sin(\gamma - \beta_0) [\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} m\beta_0 + \\ &+ \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) - \sin^2 \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)] - \\ &- \cos(\gamma - \beta_0) [m^2 \sin^2 \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) + \\ &+ \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0]\}, \end{aligned}$$

после чего имеем из (17,12) при $\beta^* = \gamma$ с учетом (20,7):

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} \{ (\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma) [m \sin (\gamma - \beta_0) \times \\ \times (\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} m\beta_0 + \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) - \\ - \sin^2 \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)) - \cos (\gamma - \beta_0) \times \\ \times (m^2 \sin^2 \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) + \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - \\ - \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0)] + \sin \gamma [\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0 \sin (\gamma - \beta_0) - \\ - m \sin \gamma \sin \beta_0 \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)] \} \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0) dm}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}. \quad (20,16)$$

При $\alpha_0 = 0$ максимум перерезывающей силы достигается в точке $\alpha = 0$:

$$k_\gamma = -\frac{N_{\max}}{P/R} \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{1 + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \sin \gamma \int_0^{\infty} \{ (1 + \cos \gamma) \times \\ \times [m \sin (\gamma - \beta_0) (\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} m\beta_0 + \sin \gamma \cos \gamma \times \\ \times \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) - \sin^2 \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)) - \cos (\gamma - \beta_0) \times \\ \times (m^2 \sin^2 \gamma \operatorname{ch} m(\gamma - \beta_0) + \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - \\ - \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0)] + \sin \gamma [\operatorname{sh} m\gamma \operatorname{sh} m\beta_0 \sin (\gamma - \beta_0) - \\ - m \sin \gamma \sin \beta_0 \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)] \} \frac{dm}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}. \quad (20,17)$$

В табл. 9 даны значения коэффициентов k_0 и k_γ для различных значений $\xi = \frac{t}{2R}$, причем попрежнему предполагалось, что сила P приложена в центре плиты, т. е. имеет место соотношение (20,9)

Таблица 9

При $\gamma \rightarrow \pi$, $a \rightarrow 0$, проделывая тот же предельный переход, что и в случае изгибающих моментов (стр. 95), получаем из (20,14) или из (20,16):

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow \pi \\ a \rightarrow 0}} N \Big|_{\beta=0} = \lim_{\substack{\gamma \rightarrow \pi \\ a \rightarrow 0}} N \Big|_{\beta=\gamma} = \frac{P}{2\pi R},$$

| ξ | k_0 | k_γ |
|---------------|-------|------------|
| $\frac{1}{4}$ | 0,912 | 0,834 |
| $\frac{1}{2}$ | 0,885 | 0,610 |
| $\frac{3}{4}$ | 0,693 | 0,415 |
| 1 | 0,159 | 0,159 |

как и должно быть для случая круглой плиты, изгибаемой сосредоточенной силой в центре.

Произведем расчет перерезывающих сил на закрепленном краю полуплоскости, для чего положим $\gamma = \pi$ в (20,14). Имеем:

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m (\pi - \beta_0) \cos \beta_0 + m \operatorname{ch} m (\pi - \beta_0) \sin \beta_0}{\operatorname{sh} m \pi} \cos m (\alpha - \alpha_0) dm.$$

При $\alpha_0 = 0$ получим с учетом П(16) и П(17):

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2}{\pi (1 + \cos \beta_0)} \left[\cos \beta_0 \frac{\sin \beta_0}{2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0)} + \right. \\ \left. + \sin \beta_0 \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta_0}{2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0)^2} \right],$$

или

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2 \sin \beta_0 (1 - \cos \beta_0)}{2\pi (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0)^2}. \quad (20,18)$$

Проводя выкладки, аналогичные проведенным при выводе формулы (20,11), можно последнее выражение преобразовать к прямоугольным координатам

$$-\frac{N}{P/y_0} \Big|_{\beta=0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_0^4}{(y_0^2 + x^2)^2}, \quad (20,19)$$

причем это выражение остается справедливым и при $\beta = \gamma = \pi$.¹

Таким образом, формула (20,19), дает выражение для перерезывающей силы на закрепленном краю полуплоскости.

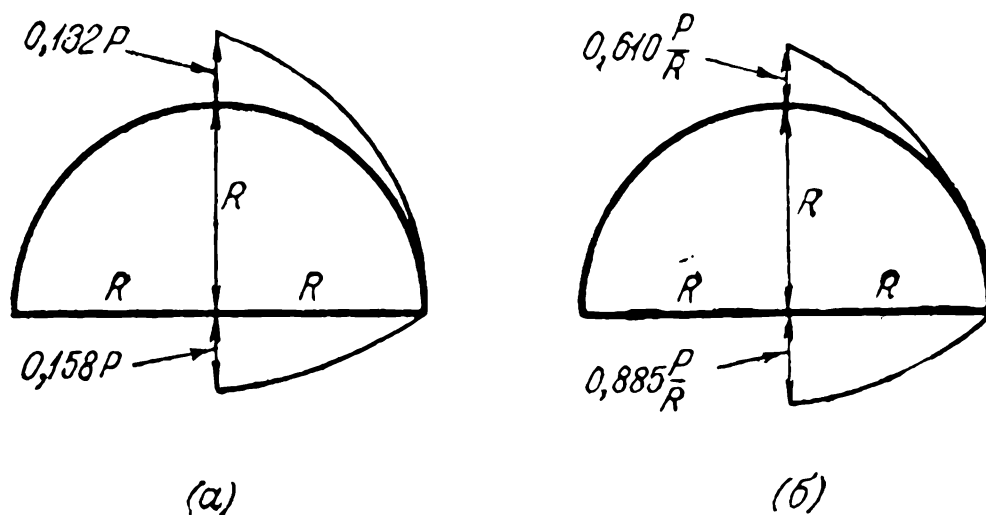
¹ Это можно показать, положив $\gamma = \pi$ в (20,16) и преобразовав полученное выражение к прямоугольным координатам.

Максимальное значение абсолютной величины перерезывающей силы получается при $x = 0$:

$$|N_{\max}| = \frac{2P}{\pi y_0}. \quad (20,20)$$

Исследуем поведение изгибающих моментов и перерезывающих сил в углах плиты, т. е. при $\alpha \rightarrow \pm \infty$.

Представляя любой из интегралов, входящих в выражения (20,5), (20,7), (20,14) и (20,16), в виде суммы по вычетам подинтегральной функции (см. § 18, стр. 81) и пользуясь тем, что функция $\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma$ в верхней полуплоскости комплексной переменной m имеет корни $m_k = a_k + ib_k$,



Фиг. 23.

причем все $b_k > 2$, можно без труда показать, что в углах плиты как изгибающие моменты, так и перерезывающие силы равны нулю. Кроме того, можно доказать, что при $\alpha_0 = 0$ (сила P сосредоточена в центре плиты) как изгибающие моменты, так и перерезывающие силы на крае $\beta = 0$ (равным образом и на крае $\beta = \gamma < \pi$), монотонно убывают от максимального значения при $\alpha = 0$, даваемого формулами (20,6), (20,8), (20,15) и (20,17), до нуля при $\alpha = \pm \infty$.

Для случая полукруглой плиты ($\gamma = \pi/2$) нами построены эпюры изгибающих моментов (фиг. 23а) и перерезывающих сил (фиг. 23б) на контуре плиты с помощью формул (20,21)—(20,24), полученных из (20,5), (20,7), (20,14) и (20,16) при $\gamma = \pi/2$ и $\alpha_0 = 0$, причем, как обычно, предположено, что сосредоточенная сила P приложена в центре плиты,

т. е. β_0 определяется формулой (20,9) при $\gamma = \pi/2$:

$$\frac{y_0}{R} = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \beta_0 = 4/3;$$

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - \right. \\ \left. - m \operatorname{ctg} \beta_0 \operatorname{sh} m \beta_0 \right] \frac{\cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2}; \quad (20,21)$$

$$- \frac{M}{P} \Big|_{\beta=\pi/2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{sh} m \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} m \beta_0 \operatorname{ctg} \beta_0 - \right. \\ \left. - m \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \right] \frac{\cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2}; \quad (20,22)$$

$$- \frac{N}{P/R} \Big|_{\beta=0} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{ctg} \beta_0 \right] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - m^2 \operatorname{ch} m \beta_0 \right\} \frac{\cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2}; \quad (20,23)$$

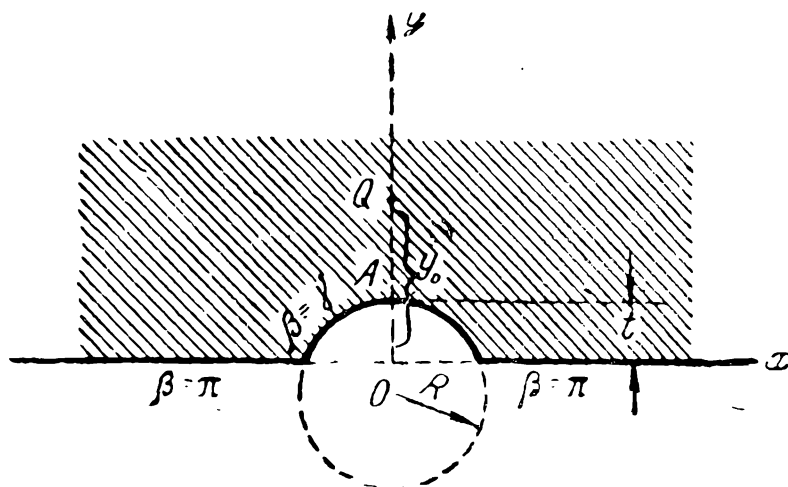
$$- \frac{N}{P/R} \Big|_{\beta=\pi/2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{ch} \alpha \left[m \operatorname{ctg} \beta_0 \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{ch} m \beta_0 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \right) - m^2 \operatorname{ch} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \beta_0 \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \beta_0 \operatorname{ctg} \beta_0 - m \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \right\} \frac{\cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2}. \quad (20,24)$$

Интегралы, входящие в эти формулы, могут быть приближенно подсчитаны по способу, аналогичному указанному в § 7, а именно: интеграл от 0 до ∞ разбивается на два — от 0 до N и от N до ∞ , причем первый интеграл подсчитывается численно, а во втором квадратуры выполняются, если пренебречь в знаменателе подинтегральной функции членом m^2 по сравнению с $\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2}$ и заменить гиперболические функции через показательные, отбрасывая члены с отри-

пательными показателями.¹ Число N подбирается так, чтобы сделанные пренебрежения не влияли на точность результата.

§ 21. Влияние закрепленной сегментной выемки на напряжения в изогнутой полуплоскости с закрепленным краем

Рассмотрим полуплоскость с закрепленным краем, имеющую на контуре выемку в виде кругового сегмента (фиг. 24),



Фиг. 24.

край которой также будем считать закрепленным. Этот случай получится, если в общих формулах § 17 положить $\beta_1 = \gamma < \pi$, $\beta_2 = \pi$ (нагрузку попержнему считаем сосредоточенной в точке α_0, β_0).

Мы сейчас покажем, что решение для этого случая можно получить сразу, заменяя в выражении основной функции $\varphi(\beta, m)$ для кругового сегмента (§ 20) β на $\pi - \beta$, γ на $\pi - \gamma$ и β_0 на $\pi - \beta_0$.

Будем искать функцию $\varphi(\beta, m)$, входящую в основную формулу (17,7), в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\beta, m) = & K(\beta, m, \beta_0) + A(m) \operatorname{ch} m(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) + \\ & + B(m) \operatorname{ch} m(\pi - \beta) \sin(\pi - \beta) + \\ & + C(m) \operatorname{sh} m(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) + \\ & + D(m) \operatorname{sh} m(\pi - \beta) \sin(\pi - \beta). \end{aligned} \quad (21,1)$$

¹ Квадратуры типа $\int_N^{\infty} m^k e^{-Am} \cos ma \, dm$ выполняются, если k — целое число.

Граничные условия (17,8) дают, если принять в (15,12) $\bar{\beta} = \beta_2 = \pi$:

$$A = 0, \quad B + mC = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & A \operatorname{ch} m(\pi - \gamma) \cos(\pi - \gamma) + B \operatorname{ch} m(\pi - \gamma) \sin(\pi - \gamma) + \\ & \quad + C \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \cos(\pi - \gamma) + \\ & \quad + D \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \sin(\pi - \gamma) = K(\gamma, m, \beta_0); \\ & A [m \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \cos(\pi - \gamma) - \operatorname{ch} m(\pi - \gamma) \sin(\pi - \gamma)] + \\ & \quad + B [m \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \sin(\pi - \gamma) + \\ & \quad + \operatorname{ch} m(\pi - \gamma) \cos(\pi - \gamma)] + \\ & \quad + C [m \operatorname{ch} m(\pi - \gamma) \cos(\pi - \gamma) - \\ & \quad - \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \sin(\pi - \gamma)] + \\ & \quad + D [m \operatorname{ch} m(\pi - \gamma) \sin(\pi - \gamma) + \\ & \quad + \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \cos(\pi - \gamma)] = \\ & \quad = -K'(\gamma, m, \beta_0). \end{aligned} \right\} (21,2)$$

Заметим теперь, что функции $K(\beta, m, \beta_0)$ и $K'(\beta, m, \beta_0)$ можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} K(\beta, m, \beta_0) &= m \operatorname{ch} m(\beta - \beta_0) \sin(\beta - \beta_0) - \\ & \quad - \operatorname{sh} m(\beta - \beta_0) \cos(\beta - \beta_0) = -m \operatorname{ch} m[(\pi - \beta) - \\ & \quad - (\pi - \beta_0)] \sin[(\pi - \beta) - (\pi - \beta_0)] + \operatorname{sh} m[(\pi - \beta) - \\ & \quad - (\pi - \beta_0)] \cos[(\pi - \beta) - (\pi - \beta_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'(\beta, m, \beta_0) &= (m^2 + 1) \operatorname{sh} m(\beta - \beta_0) \sin(\beta - \beta_0) = \\ & \quad = (m^2 + 1) \operatorname{sh} m[(\pi - \beta) - \\ & \quad - (\pi - \beta_0)] \sin[(\pi - \beta) - (\pi - \beta_0)], \end{aligned}$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} K(\beta, m, \beta_0) &= -K(\pi - \beta, m, \pi - \beta_0), \\ K'(\beta, m, \beta_0) &= K'(\pi - \beta, m, \pi - \beta_0). \end{aligned} \right\} (21,3)$$

С учетом (21,3), система (21,2) превращается в точности в систему (20,1) для случая кругового сегмента, если в последней заменить γ на $\pi - \gamma$ и β_0 на $\pi - \beta_0$. Эти

соображения в совокупности с (21,1) и доказывают утверждение, высказанное в начале параграфа.

Таким образом, во всех формулах для кругового сегмента (§ 20), где входит функция φ , нужно заменить β на $\pi - \beta$, γ на $\pi - \gamma$ и β_0 на $\pi - \beta_0$, чтобы получить соответствующие формулы для рассматриваемого случая полуплоскости с выемкой в виде кругового сегмента.

Нас будут интересовать, главным образом, значения изгибающего момента M в точке A ($\alpha = 0$, $\beta = \gamma$) при различных положениях точки $Q(0, y_0)$ приложения силы (мы принимаем, ради симметрии, $\alpha_0 = 0$ ¹ — фиг. 28), что в известной степени и характеризует влияние выемки на напряжения.

Формула для изгибающего момента в точке A получится из формулы (20,8) заменой β_0 на $\pi - \beta_0$ и γ на $\pi - \gamma$ (везде под знаком интеграла). Кроме того, в формуле (20,8) надо еще изменить знак,² после чего будем иметь:

$$\sigma(\beta_0, \gamma) = \frac{M(\beta_0, \gamma)}{P/\pi} = (1 + \cos \gamma) \frac{y_0}{a} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{m \sin \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - \frac{\sin(\gamma - \beta_0)}{\sin \beta_0} \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \operatorname{sh} m(\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 m(\pi - \gamma) - m^2 \sin^2 \gamma} dm. \quad (21,4)$$

В качестве контроля положим здесь $\gamma = 0$ (полуплоскость). Получаем:

$$\sigma(\beta_0, 0) = 2 \frac{y_0}{a} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m(\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh} m\pi} dm = \frac{\sin \beta_0}{1 + \cos \beta_0} \cdot \frac{\sin \beta_0}{1 - \cos \beta_0} = 1,$$

как и должно быть.

Можно показать, что если точка Q приложения силы P стремится к контуру отверстия (точке A), то момент в точке A стремится к предельному значению P/π

¹ При этом рассматриваемые значения изгибающего момента будут максимальными.

² В случае сегмента нормаль к дуговому краю совпадает с осью β , а в случае выемки эта нормаль и ось β взаимно противоположны.

независимо от величины γ . С другой стороны, можно разыскать предельное значение этого момента при $\beta_0 \rightarrow \pi$, когда точка Q приложения силы находится достаточно далеко от края (теоретически бесконечно далеко), для чего нужно в формуле (21,4) перейти к пределу при $\beta_0 \rightarrow \pi$. Имеем:

$$\lim_{\beta_0 \rightarrow \pi} \sigma(\beta_0, \gamma) = \frac{1 + \cos \gamma}{\pi} \lim_{\beta_0 \rightarrow \pi} \frac{\sin \beta_0}{1 + \cos \beta_0} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{m \sin \gamma \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) - \frac{\sin(\gamma - \beta_0)}{\sin \beta_0} \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) \operatorname{sh} m(\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 m(\pi - \gamma) - m^2 \sin^2 \gamma} dm,$$

или

$$\sigma(\pi, \gamma) = 2(1 + \cos \gamma) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{m \sin \gamma \operatorname{ch} m(\pi - \gamma) + \cos \gamma \operatorname{sh} m(\pi - \gamma)}{\operatorname{sh}^2 m(\pi - \gamma) - m^2 \sin^2 \gamma} m dm. \quad (21,5)$$

В табл. 10 приведены значения $\sigma(\pi, \gamma)$, характеризующие отношение этого предельного момента к величине P/π , дающей значение максимального изгибающего момента на краю полуплоскости без выемки.¹

Таблица 10

| ξ | 0 | 1/4 | 1/2 | 3/4 | 1 |
|-----------------------|---|------|------|------|-------|
| $\sigma(\pi, \gamma)$ | 1 | 2,42 | 3,07 | 3,57 | 3,999 |

Из рассмотрения этой таблицы видно, что с увеличением отношения $t/2R$, т. е. с увеличением размера выемки, предельный момент $M(\pi, \gamma)$ возрастает.

¹ При $\gamma = \pi$ значение $\sigma(\pi, \pi)$ подсчитано по формуле (21,8) выводимой ниже.

Производились также расчеты коэффициента $\sigma(\beta_0, \gamma)$ для двух значений: $\gamma = \pi/2$ и $\gamma = \pi$ (фиг. 25).

Для случая $\gamma = \pi/2$ (полукруглая выемка, $a = R$) имеем из (21,4):

$$\begin{aligned} \sigma\left(\beta_0, \frac{\pi}{2}\right) &= \\ &= \frac{y_0}{R} \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) - \operatorname{ctg} \beta_0 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m(\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} dm. \quad (21,6) \end{aligned}$$

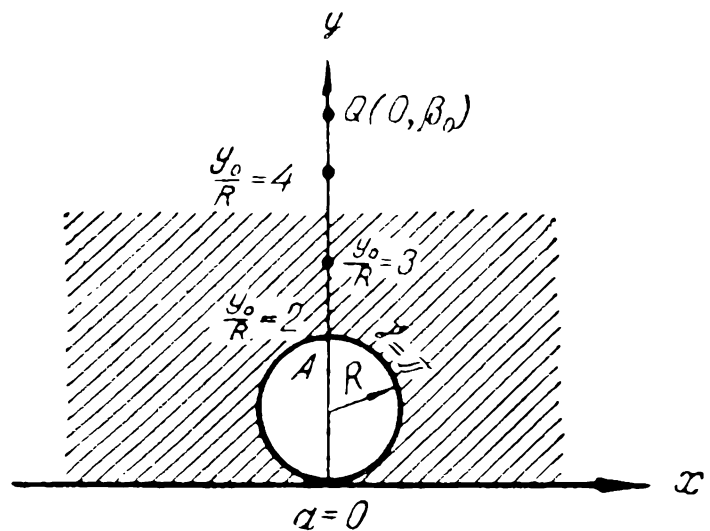
Случай $\gamma = \pi$ (круговая выемка, касательная к краю полуплоскости) требует перехода к пределу при $\gamma \rightarrow \pi$ в формуле (21,4), причем $a \rightarrow 0$,

$R = \frac{a}{\sin \gamma} \approx \frac{a}{\pi - \gamma}$ — конечная величина. При этом следует учесть, что $\beta_0 \rightarrow \pi$, причем из соотношения

$$\frac{y_0}{a} = \frac{\sin \beta_0}{1 + \cos \beta_0} \approx \frac{2}{\pi - \beta_0}$$

следует:

$$\frac{\pi - \gamma}{\pi - \beta_0} \approx \frac{y_0}{2R}.$$



Фиг. 25.

После соответствующего перехода к пределу, вводя новую переменную интегрирования $\theta = m(\pi - \gamma)$, будем иметь: ¹

$$\begin{aligned} \sigma(\beta_0, \pi) &= \frac{y_0}{2R} \int_0^{\infty} \left[\theta \operatorname{sh} \left(\frac{2R}{y_0} - 1 \right) \theta - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{y_0}{2R} \right) \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \frac{2R\theta}{y_0} \right] \frac{d\theta}{\operatorname{sh}^2 \theta - \theta^2}. \quad (21,7) \end{aligned}$$

¹ Производимые здесь операции можно было бы обосновать математически строго.

Результаты вычислений для обоих случаев сведены в табл. 11.

Таблица 11

| ν_0/R | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ∞ |
|---|---|------|------|------|------|----------|
| $\sigma\left(\beta_0, \frac{\pi}{2}\right)$ | 1 | 1,57 | 1,95 | 2,26 | 2,40 | 3,07 |
| $\sigma(\beta_0, \pi)$ | — | 1 | 1,93 | 2,58 | 3,24 | 3,999 |

При $\frac{\nu_0}{R} \rightarrow \infty$ переход к пределу дает предельное значение

$$\sigma(\pi, \pi) = \int_0^{\infty} \frac{\theta \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{sh}^2 \theta - \theta^2} \theta d\theta. \quad (21,8)$$

Этот же результат получится, если в формуле (21,5) перейти к пределу при $\gamma \rightarrow \pi$.

§ 22. Плита в виде кругового сегмента со свободно опертым прямолинейным краем и закрепленной дугой

Рассмотрим плиту в виде кругового сегмента, нагруженную сосредоточенной силой в точке (α_0, β_0) , причем будем считать прямолинейный край свободно опертым,¹ а дуговой край — попрежнему заделанным.

Согласно (16,9), граничные условия такой задачи будут:

$$gu|_{\beta=0} = gu|_{\beta=\gamma} = \frac{\partial^2(gu)}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=0} = \frac{\partial(gu)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\gamma} = 0. \quad (22,1)$$

Для основной функции $\varphi(\beta, m)$ имеем:

$$\varphi|_{\beta=0} = \varphi|_{\beta=\gamma} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\gamma} = 0. \quad (22,2)$$

¹ В дальнейшем для краткости вместо „свободно опертый“ будем говорить „опертый“.

Полагая

$$\begin{aligned} \varphi(\beta, m) = & K(\beta, m, \beta_0) + A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + \\ & + B(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + C(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + \\ & + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta, \end{aligned} \quad (22,3)$$

будем для неизвестных функций $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ иметь такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A = 0, \quad A(m^2 - 1) + 2mD = 0, \\ A \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma + B \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + C \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma + \\ \quad + D \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma = -K(\gamma, m, \beta_0), \\ A(m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma) + B(m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \\ \quad + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma) + C(m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma) + \\ \quad + D(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) = -K'(\gamma, m, \beta_0). \end{aligned} \right\} \quad (22,4)$$

Отсюда имеем $A = D = 0$, а для B и C получаем систему

$$\left. \begin{aligned} B \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + C \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma = -K(\gamma, m, \beta_0), \\ B(m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma) + C(m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \\ \quad - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma) = -K'(\gamma, m, \beta_0), \end{aligned} \right\} \quad (22,5)$$

определитель которой равен $-\frac{1}{2}(\operatorname{sh} 2m\gamma - m \sin 2\gamma)$.

Находя из (22,5) B и C , получим для основной функции $\varphi(\beta, m)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\beta, m) = & K(\beta, m, \beta_0) + \frac{2}{\Delta} \{ [K(\gamma, m, \beta_0) \times \\ & \times (m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma) - K'(\gamma, m, \beta_0) \times \\ & \times \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma] \cdot \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + [K'(\gamma, m, \beta_0) \times \\ & \times \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - K(\gamma, m, \beta_0) (m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \\ & \quad + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma)] \operatorname{sh} m\beta \cos \beta \}, \end{aligned} \right\} \quad (22,6)$$

$$\Delta = \operatorname{sh} 2m\gamma - m \sin 2\gamma.$$

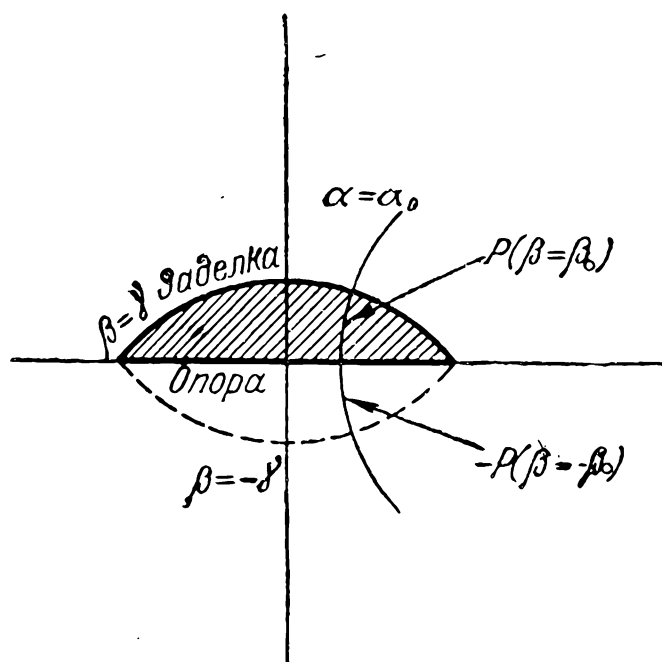
Решение этой же задачи можно было бы получить и совершенно иным способом.

Рассмотрим симметричную луночку, нагруженную двумя сосредоточенными силами: $+P$ в точке (α_0, β_0) и $-P$ в точке $(\alpha_0, -\beta_0)$, фиг. 26.

Очевидно, что прогиб такой плиты будет нечетной функцией переменной β , т. е. при $\beta = 0$ имеют место равенства:

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0. \quad (22,7)$$

Но (22,7) эквивалентно (22,1), так как $\left. \frac{\partial g}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0$. Таким образом, верхняя (равным образом и нижняя) половина рас-



Фиг. 26.

сматриваемой симметричной луночки находится в условиях сегментной плиты, нагруженной сосредоточенной силой P в точке (α_0, β_0) , закрепленной по дуговому краю и опертой по прямолинейной части контура.

Следовательно, основную функцию $\varphi(\beta, m)$ можно было бы получить как разность следующих двух функций: основной функции для симметричной луночки с закрепленным контуром (§ 18) и функции, полученной из последней заменой

β_0 на $-\beta_0$. Не останавливаясь на нахождении прогибов, переходим сразу к вычислению изгибающих моментов на дуговой заделке.

Подсчитываем:

$$\begin{aligned} \varphi''(\gamma, m) &= K''(\gamma, m, \beta_0) + \frac{2}{\Delta} \{ [K(\gamma, m, \beta_0) (m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \\ &- \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma) - K'(\gamma, m, \beta_0) \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma] (m^2 \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \\ &+ 2m \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) + [(K'(\gamma, m, \beta_0) \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \\ &- K(\gamma, m, \beta_0) (m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma)] \cdot (m^2 \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \\ &- 2m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) \} = \\ &= \frac{2}{\Delta} m (m^2 + 1) [\sin(\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m(\gamma + \beta_0) - \\ &- \sin(\gamma + \beta_0) \operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0)], \end{aligned}$$

после чего (17,11) дает:

$$\begin{aligned}
 -\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \frac{\sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m (\gamma + \beta_0) - \sin (\gamma + \beta_0) \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_0)}{\operatorname{sh} 2m\gamma - m \sin 2\gamma} \times \\
 &\times \cos m (\alpha - \alpha_0) dm. \quad (22,8)
 \end{aligned}$$

Как видно из (22,8), случаи $\gamma = \pi/2$ (полукруг) и $\gamma = \pi$ (полуплоскость) являются интегрируемыми.

Случай $\gamma = \pi$ будет отдельно рассмотрен в § 24.

Обратимся к случаю $\gamma = \pi/2$, т. е. к задаче об изгибе полукруглой плиты с опертым диаметром и заделанной дугой. Для случая равномерной нагрузки эта задача решена акад. Б. Г. Галеркиным [20] с помощью полярных координат. Мы же имеем нагрузку в виде сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке плиты.

Формула (22,8) дает значение изгибающего момента на заделке

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma=\pi/2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \beta_0}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\beta_0}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} \cos m (\alpha - \alpha_0) dm,$$

или, после применения П(27):

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma=\pi/2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_0}{R} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos^2 \beta_0}{\operatorname{ch} 2 (\alpha - \alpha_0) + \cos 2\beta_0}. \quad (22,9)$$

В углах плиты ($\alpha = \pm \infty$) момент равен нулю и вдоль заделки он не меняет знака.

Если сила приложена в точке оси симметрии ($\alpha_0 = 0$), то для максимального изгибающего момента, который имеет место в точке $\alpha = 0$, получается весьма простая формула:

$$\chi = -\frac{M_{\max}}{P} = \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{R} = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \beta_0/2. \quad (22,10)$$

$\chi \rightarrow \frac{1}{\pi}$ при $\beta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, как и должно быть при приближении силы P к точке $\alpha = 0$ (ср. стр. 97).

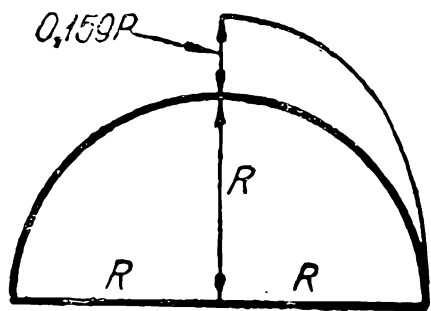
Если, например, сила действует в центре плиты ($y_0 = \frac{R}{2}$), то $-\frac{M_{\max}}{P} = \frac{1}{2\pi} \approx 0,159$, в то время как для полностью закрепленной полукруглой плиты соответствующее значение изгибающего момента было 0,132 (см. табл. 8).

В табл. 12 приведены значения коэффициента κ при различных положениях точки приложения силы P , получаемые из (22,10) почти без вычислений.

Таблица 12

| y_0/R | 0 | $1/4$ | $1/2$ | $3/4$ | 1 |
|----------|---|--------|-------|-------|-------|
| κ | 0 | 0,0796 | 0,159 | 0,239 | 0,318 |

На фиг. 27 изображена эпюра изгибающего момента на дуговой заделке при $\frac{y_0}{R} = 1/2$.



Фиг. 27.

Исследуя выражение (22,8) с помощью теоремы о вычетах, нетрудно показать, что в углах плиты $M = 0$ при $\gamma \leq \pi/2$ и $M = \infty$ при $\gamma > \pi/2$ (см. стр. 81).

Аналогичное утверждение будет справедливо и для перерезывающей силы на заделке [см. ниже формулу (22,19)].

Переходим к вычислению перерезывающих сил в общем случае.

Перерезывающая сила на опертном краю дается формулой (17,13). Подсчитываем:

$$\varphi'(0, m) = \frac{2(m^2 + 1)}{\Delta} [\operatorname{sh} m(\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m\gamma \sin \beta_0 - m \sin \gamma \sin(\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m\beta_0],$$

$$\varphi'''(0, m) = \frac{2}{\Delta} \{ [2m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma + (1 - m^2) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma] \times \\ \times K(\gamma, m, \beta_0) (1 + m^2) + [(1 - 3m^2) \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma + (m^3 - 3m) \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma] K'(\gamma, m, \beta_0) \}.$$

Составляем сумму:

$$\begin{aligned}
 (1 - m^2) \varphi' (0, m) + \varphi''' (0, m) &= \frac{4m (m^2 + 1)}{\Delta} \times \\
 &\times \{m \cos \gamma \sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{ch} m \beta_0 - \operatorname{ch} m \gamma \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_0) \cos \beta_0\}, \\
 \text{после чего формула (17,13) дает:} \\
 \frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} &= \frac{2 (\operatorname{ch} \alpha + 1)}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \\
 &\times \left\{ (\operatorname{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \cos \gamma \sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{ch} m \beta_0 - \operatorname{ch} m \gamma \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_0) \cos \beta_0}{\operatorname{sh} 2m\gamma - m \sin 2\gamma} \times \right. \\
 &\times \cos m (\alpha - \alpha_0) dm + \operatorname{sh} \alpha \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m (\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m \gamma \sin \beta_0 - m \sin \gamma \sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m \beta_0}{\operatorname{sh} 2m\gamma - m \sin 2\gamma} \times \\
 &\left. \times \sin m (\alpha - \alpha_0) dm \right\}. \quad (22,11)
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное выражение при $\gamma = \pi/2$ (полукруг):

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{P/R} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \left\{ (\operatorname{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} \times \right. \\
 &\times \cos \beta_0 \cos m (\alpha - \alpha_0) dm + \operatorname{sh} \alpha \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \sin \beta_0 \sin m (\alpha - \alpha_0) dm - \\
 &\left. - 2 \operatorname{sh} \alpha \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{sh} m \beta_0}{\operatorname{sh} m \pi} \cos \beta_0 \sin m (\alpha - \alpha_0) dm, \right.
 \end{aligned}$$

или с учетом П (27), П (34) и П (20)

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{P/R} \Big|_{\beta=0} &= \frac{y_0 (\operatorname{ch} \alpha + 1) \cos^2 \beta_0}{\pi} \times \\
 &\times \frac{2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (\alpha - \alpha_0) - (\operatorname{ch} \alpha + 1) [\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0]}{[\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) - \cos \beta_0] \cdot [(\operatorname{ch} \alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0]^2}. \quad (22,12)
 \end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что перерезывающая сила на диаметре обращается в нуль в точке $\alpha = \alpha^*$, причем значение α^* определяется уравнением:

$$2 \operatorname{th} \frac{\alpha^*}{2} \operatorname{sh} (\alpha^* - \alpha_0) = \operatorname{ch} (\alpha^* - \alpha_0) \frac{1}{\cos \beta_0}. \quad (22,13)$$

Посредине диаметра плиты, где $\alpha = 0$, перерезывающая сила имеет отрицательное значение:

$$-\frac{N^-}{P/R} = \frac{y_0}{R} \cdot \frac{4 \cos^2 \beta_0}{\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_0 - \cos^2 \beta_0}, \quad (22,14)$$

а в углах плиты ($\alpha = \pm \infty$) — положительное значение:

$$\frac{N^+}{P/R} = \frac{y_0}{R} \cdot \frac{\cos^2 \beta_0}{\pi} e^{\pm \alpha_0}. \quad (22,15)$$

Если $\alpha_0 = 0$ (сила приложена в точке оси симметрии плиты), то посредине диаметра перерезывающая сила достигает максимального отрицательного значения:

$$k_0^- = \left| \frac{N^-}{P/R} \right|_{\max} = \frac{y_0}{R} \cdot \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \beta_0}{\pi}, \quad (22,16)$$

а в углах — максимального положительного значения:

$$k_0^+ = \left(\frac{N^+}{P/R} \right)_{\max} = \frac{y_0}{R} \cdot \frac{\cos^2 \beta_0}{\pi}, \quad (22,17)$$

причем очевидно, что всегда $|N^-|_{\max} > N^+_{\max}$.

Например, при $\frac{y_0}{R} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{4}{3} \right) k_0^- = \frac{9}{8} \pi$, $k_0^+ = \frac{9}{50} \pi$.

Уравнение (22,13) для определения α^* в случае $\alpha_0 = 0$ принимает вид:

$$4 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha^*}{2} - \operatorname{ch} \alpha^* = \cos \beta_0,$$

или

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha^*}{2} = \pm \cos \frac{\beta_0}{2}. \quad (22,18)$$

Например, при $\frac{y_0}{R} = \frac{1}{2}$ $\operatorname{sh} \frac{\alpha^*}{2} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$, а отсюда $\frac{x^*}{a} = \operatorname{th} \frac{\alpha^*}{2} = \pm \frac{2}{3}$.

Чтобы получить значение перерезывающей силы на дуговой заделке, составим:

$$\Delta\varphi^m(\gamma, m) = 4m(m^2 + 1) \{ \text{sh } m\gamma [\text{ch } m\beta_0 \cos(\gamma - \beta_0) + m \text{ sh } m\beta_0 \sin(\gamma - \beta_0)] - \cos\gamma [\cos\beta_0 \text{ sh } m(\gamma - \beta_0) + m \sin\beta_0 \text{ ch } m(\gamma - \beta_0)] \}.$$

Теперь, согласно (17,12), получаем с учетом (22,8):

$$\begin{aligned} \frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=\gamma} &= \frac{\text{ch } \alpha + \cos\gamma}{\pi(\text{ch } \alpha_0 + \cos\beta_0)} \int_0^\infty \{ 2(\text{ch } \alpha + \cos\gamma) \times \\ &\times [\text{sh } m\gamma (\text{ch } m\beta_0 \cos(\gamma - \beta_0) + m \text{ sh } m\beta_0 \times \\ &\times \sin(\gamma - \beta_0) - \cos\gamma (\cos\beta_0 \text{ sh } m(\gamma - \beta_0) + \\ &+ m \sin\beta_0 \text{ ch } m(\gamma - \beta_0))] + \sin\gamma [\sin(\gamma - \beta_0) \times \\ &\times \text{sh } m(\gamma + \beta_0) - \sin(\gamma + \beta_0) \text{ sh } m(\gamma - \beta_0)] \} \times \\ &\times \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0) dm}{\text{sh } 2m\gamma - m \sin 2\gamma}. \end{aligned} \quad (22,19)$$

Вычислим квадратуры для случая полукруглой плиты.

При этом выражение (22,19) переходит в такое:

$$\begin{aligned} \frac{N}{P/R} \Big|_{\beta=\gamma=\pi/2} &= \frac{\text{ch } \alpha}{\pi(\text{ch } \alpha_0 + \cos\beta_0)} \int_0^\infty \left\{ \text{ch } \alpha \text{ sh } \frac{m\pi}{2} (\text{ch } m\beta_0 \sin\beta_0 + \right. \\ &+ m \text{ sh } m\beta_0 \cos\beta_0) + \cos\beta_0 \text{ ch } \frac{m\pi}{2} \text{ sh } m\beta_0 \left. \right\} \times \\ &\times \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0) dm}{\text{sh } \frac{m\pi}{2} \text{ ch } \frac{m\pi}{2}} = \frac{\text{ch } \alpha}{\pi(\text{ch } \alpha_0 + \cos\beta_0)} \times \\ &\times \left\{ \text{ch } \alpha \left[\sin\beta_0 \int_0^\infty \frac{\text{ch } m\beta_0}{\text{ch } \frac{m\pi}{2}} \cos m(\alpha - \alpha_0) dm + \right. \right. \\ &+ \left. \cos\beta_0 \int_0^\infty \frac{m \text{ sh } m\beta_0}{\text{ch } \frac{m\pi}{2}} \cos m(\alpha - \alpha_0) dm \right] + \\ &+ \left. \cos\beta_0 \int_0^\infty \frac{\text{sh } m\beta_0}{\text{sh } \frac{m\pi}{2}} \cos m(\alpha - \alpha_0) dm \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь П(26), П(23) и П(27), будем иметь

$$-\frac{N}{P/R} \Big|_{\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{y_0}{R} \frac{2 \operatorname{ch} \alpha \cos^2 \beta_0}{\pi [\operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0) + \cos 2\beta_0]} \times \\ \times \left[\frac{4 \operatorname{ch}^2 \alpha \cos \beta_0}{\operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0) + \cos 2\beta_0} + 1 \right]. \quad (22,20)$$

Из этой формулы следует, что в углах плиты¹ перерезывающая сила равна нулю.

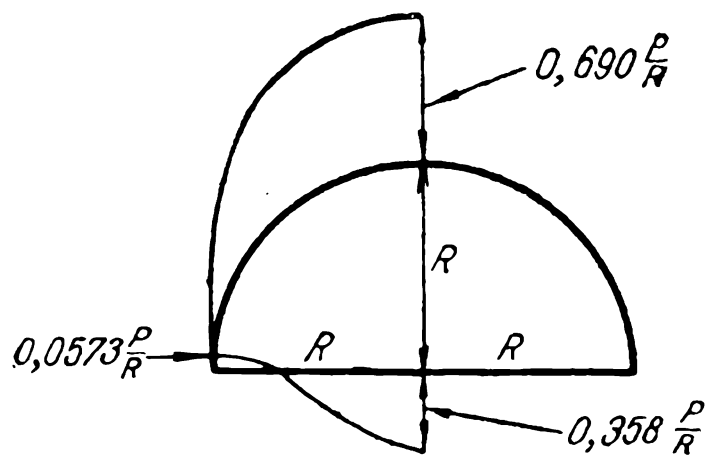
При $\alpha_0 = 0$ максимальное значение перерезывающей силы при $\alpha = 0$ будет:

$$K_\gamma = -\frac{N_{\max}}{P/R} \Big|_{\beta=\gamma=\pi/2} = \frac{2 + \cos \beta_0}{\pi \cos \beta_0} \cdot \frac{y_0}{R}. \quad (22,21)$$

Например, $K_\gamma = \frac{13}{6} \pi$ при $\frac{y_0}{R} = \frac{1}{2}$.

В табл. 13 приведены максимальные значения² перерезывающих сил на диаметре и на дуге при различных положе-

Таблица 13



Фиг. 28.

| y_0/R | K_0^- | K_0^+ | K_γ |
|---------|----------|---------|------------|
| 0 | ∞ | 0 | 0 |
| 1/4 | 1,12 | 0,0620 | 0,259 |
| 1/2 | 0,358 | 0,0573 | 0,690 |
| 3/4 | 0,0790 | 0,0183 | 1,96 |
| 1 | 0 | 0 | ∞ |

ниях точки приложения силы P , действующей по оси симметрии плиты.

На фиг. 28 построена эпюра перерезывающей силы на опертом диаметре и на дуговой заделке при $\frac{y_0}{R} = \frac{1}{2}$.

¹ Имеется в виду подход к углам вдоль дуговой заделки, в то время как в формуле (22,15) подход к углам осуществлялся вдоль диаметра.

§ 23. Плита в виде полуплоскости с опертым краем, содержащая закрепленную сегментную выемку

Пусть теперь рассматриваемая плита представляет собой полуплоскость с опертым краем, содержащим закрепленную сегментную выемку.

Рассуждениями, совершенно аналогичными проведенным в § 21, можно показать, что решение для этого случая получится из решения предыдущего параграфа для сегмента с опертым диаметром и закрепленной дугой путем замены β на $\pi - \beta$, γ на $\pi - \gamma$ и β_0 на $\pi - \beta_0$.

Так, например, формула (22,8) дает для изгибающего момента на дуговой заделке выражение:

$$\begin{aligned} \frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\sin (\gamma - \beta_0) \operatorname{sh} m (\gamma + \beta_0) - \sin (\gamma + \beta_0) \operatorname{sh} m (\gamma - \beta_0)}{\operatorname{sh} 2m (\pi - \gamma) + \sin 2\gamma} \times \\ &\times \cos m (\alpha - \alpha_0) dm. \end{aligned} \quad (23,1)$$

В случае полукруглой выемки из (22,9) следует:

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\gamma=\pi/2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_0}{R} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos^2 \beta_0}{\operatorname{ch} 2 (\alpha - \alpha_0) + \cos 2 \beta_0}. \quad (23,2)$$

Это выражение по виду совпадает с (22,9), однако здесь $\pi/2 < \beta_0 < \pi$, тогда как в (22,9) было $0 < \beta_0 < \pi/2$.

Формула (23,2) позволяет исследовать влияние заделанной полукруглой выемки на напряжения в полуплоскости с опертым краем, нагруженной сосредоточенной силой.

При $\alpha_0 = 0$ (сила приложена в точке оси симметрии плиты) максимальный изгибающий момент достигается в точке $\alpha = 0$ и дается простым соотношением:

$$\frac{M_{\max}}{P} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y_0}{R}. \quad (23,3)$$

Если сила P движется по оси y ($a \leq y_0 < \infty$), то величина $M_{\max}/P/\pi$ растет от 1 до ∞ .

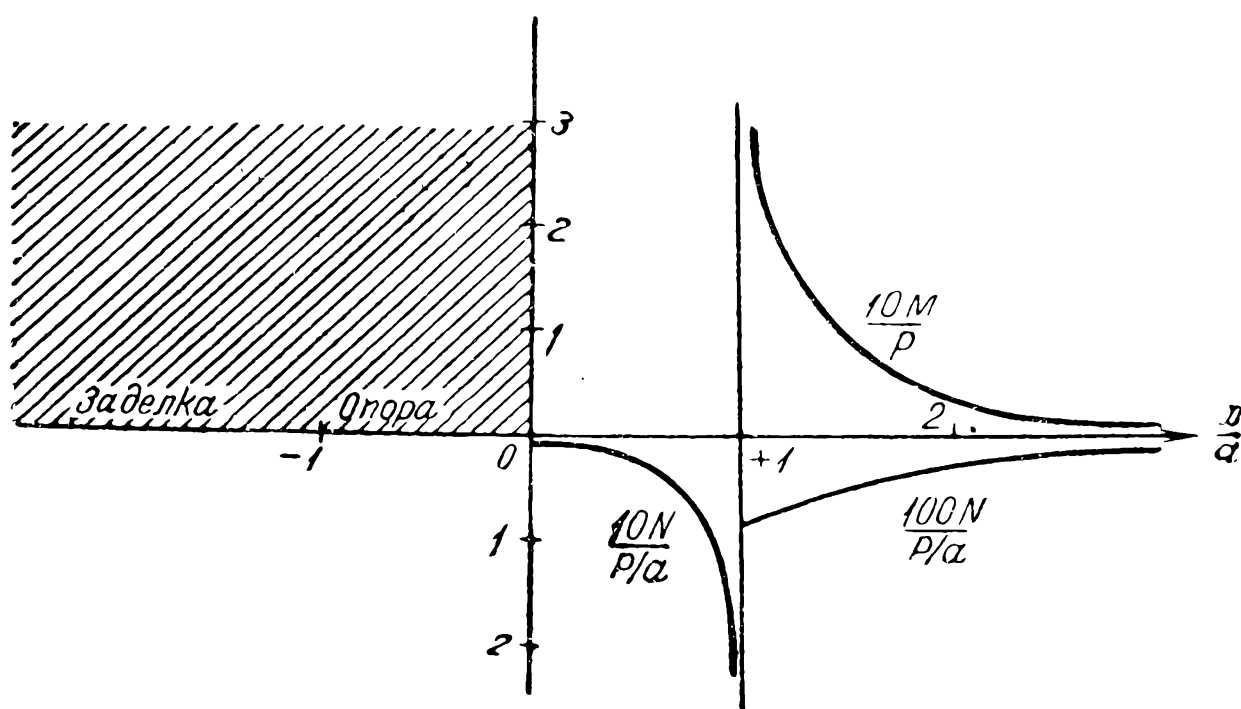
Последний результат можно объяснить так: если сила приложена бесконечно далеко от края полуплоскости, то она создает бесконечно большой изгибающий момент отно-

сительно края, который при конечной длине заделки может уравновеситься лишь в том случае, если момент на единицу длины заделки будет бесконечно велик.

§ 24. Изгиб полуплоскости при смешанных граничных условиях

В § 20 нами было получено решение задачи об изгибе плиты в виде полуплоскости с закрепленным краем, причем было отмечено, что это задача разрешима и в прямоугольных координатах.

Разработанная в §§ 22—23 методика позволяет рассчитывать напряжения в плите, имеющей форму полуплоскости и нагруженной сосредоточенной силой, причем часть края полуплоскости может быть закрепленной, а часть — опертой. В прямоугольных координатах такие задачи решить не удастся.



Фиг. 29.

Рассмотрим первый случай (фиг. 29), когда отрезок края полуплоскости длины $2a$ оперт, а остальная часть края — закреплена.

Основная функция $\varphi(\beta, m)$ для этого случая получится из общего решения для сегментной плиты с опертым прямолинейным краем и заделанным дуговым краем (§ 22) при $\gamma = \pi$.

Не останавливаясь на вычислении прогибов, переходим к изгибающим моментам.

Для изгибающего момента на заделке сразу имеем из (22,8) при $\gamma = \pi$:¹

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1) \sin \beta_0}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} m \beta_0}{\operatorname{ch} m \pi} \cos m (\alpha - \alpha_0) dm,$$

или, применяя П(22),

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{\pi} \cdot \frac{\cos \frac{\beta_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}{\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0}. \quad (24,1)$$

Отсюда видно, в точках „стыка“ ($\alpha = \pm \infty$) изгибающий момент терпит бесконечный разрыв — при подходе к этим точкам со стороны опоры момент равен нулю, а при подходе к этим же точкам со стороны заделки он бесконечно растет, причем при изменении α от ∞ до 0 (соответственно от $-\infty$ до 0) момент на заделке монотонно убывает от ∞ до 0.

Для перерезывающей силы на опоре ($\beta = 0$) получаем из (22,11) при $\gamma = \pi$:

$$\begin{aligned} -\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} &= \frac{2(\operatorname{ch} \alpha + 1)}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \left\{ (\operatorname{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} [m \sin \beta_0 \operatorname{ch} m \beta_0 + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ch} m \pi \operatorname{sh} m (\pi - \beta_0) \cos \beta_0] \frac{\cos m (\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{sh} 2m \pi} dm - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} \alpha \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m (\pi - \beta_0) \operatorname{sh} m \pi}{\operatorname{sh} 2m \pi} \sin \beta_0 \sin m (\alpha - \alpha_0) dm = \right. \\ &= \frac{2(\operatorname{ch} \alpha + 1)}{\pi (\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \left\{ (\operatorname{ch} \alpha + 1) \left[\sin \beta_0 \int_0^{\infty} \frac{m \operatorname{ch} m \beta_0}{\operatorname{sh} 2m \pi} \cos m (\alpha - \alpha_0) dm + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \cos \beta_0 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m (\pi - \beta_0)}{\operatorname{sh} m \pi} \cos m (\alpha - \alpha_0) dm \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha \sin \beta_0 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m (\pi - \beta_0)}{\operatorname{ch} m \pi} \sin m (\alpha - \alpha_0) dm \right\}, \end{aligned}$$

¹ Знак в формуле (22,8) должен быть изменен на противоположный, так как при $\beta = \pi$ оси x и α направлены взаимно противоположно.

или окончательно, с учетом П(33), П(16) и П(25):

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{2\pi} \cdot \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta_0}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha - \alpha_0}{2} - \cos^2 \frac{\beta_0}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \cos \frac{\beta_0}{2}} - \operatorname{ch} \frac{\alpha_0}{2} + \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right]. \quad (24,2)$$

Можно показать, что перерезывающая сила на опоре не меняет знака.

Из (24,2) видно, что при $\alpha = \pm \infty$ перерезывающая сила бесконечно велика.

Минимальное значение перерезывающей силы на опоре при $\alpha_0 = 0$ (симметричный изгиб) будет в точке $\alpha = 0$, т. е. в начале координат

$$-\frac{N_{\min}}{P/a} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\cos \frac{\beta_0}{2}}{1 + \cos \frac{\beta_0}{2}}. \quad (24,3)$$

Вычислим перерезывающую силу на заделке ($\beta = \pi$), полагая $\gamma = \pi$ в формуле (24,19). Имеем:

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{2(\operatorname{ch} \alpha - 1)^2}{\pi(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)} \int_0^{\infty} [\operatorname{sh} m\pi (m \operatorname{sh} m\beta_0 \sin \beta_0 -$$

$$- \operatorname{ch} m\beta_0 \cos \beta_0) + \cos \beta_0 \operatorname{sh} m(\pi - \beta_0) +$$

$$+ m \sin \beta_0 \operatorname{ch} m(\pi - \beta_0)] \frac{\cos m(\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{sh} 2m\pi} dm$$

Применяя П(17) и П(16), получим окончательно:

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{y_0}{a} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin^2 \beta_0}{[\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + \cos \beta_0]^2}. \quad (24,4)$$

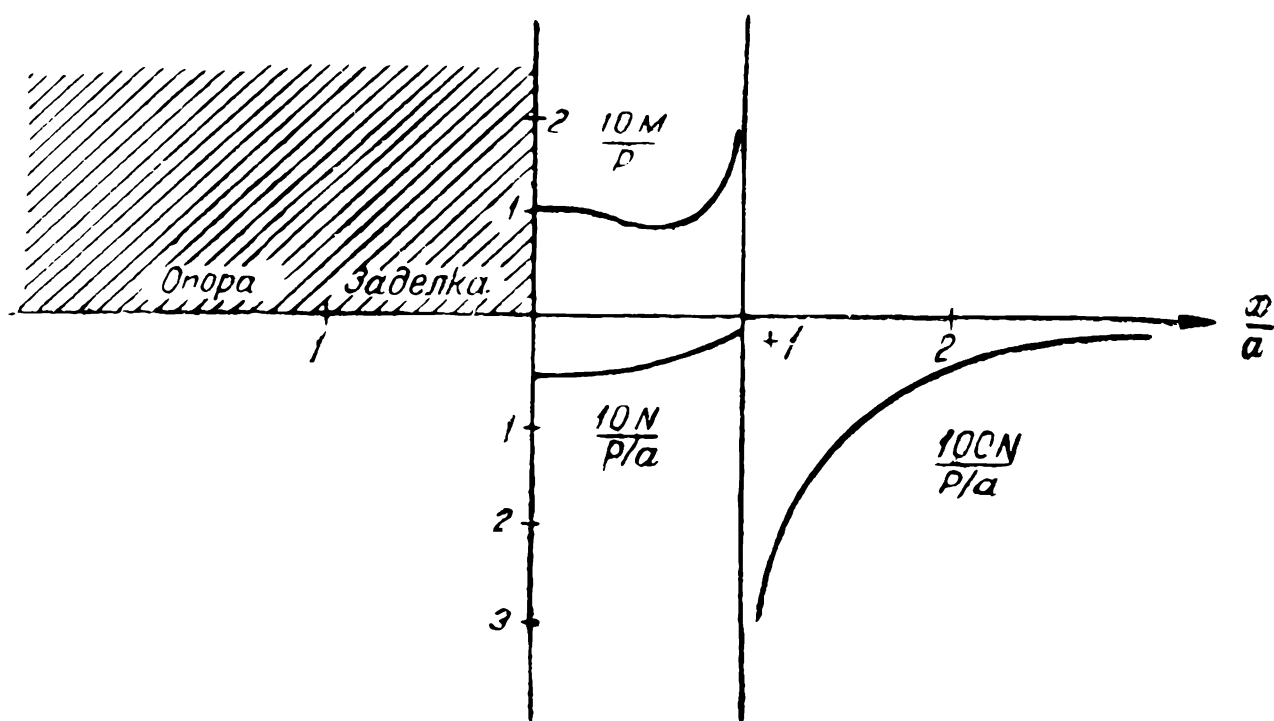
Отсюда видно, что при $\alpha = \pm \infty$ перерезывающая сила имеет конечное значение:

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\substack{\beta=\pi \\ \alpha=\pm\infty}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y_0}{a} \cdot \sin^2 \beta_0 \cdot e^{\pm 2\alpha_0}. \quad (24,5)$$

Можно показать, что вдоль заделки перерезывающая сила по абсолютной величине монотонно убывает от значения (24,5) до нуля.

Таким образом, перерезывающая сила в точках „стыка“ терпит бесконечный разрыв: при приближении к этим точкам со стороны опоры перерезывающая сила бесконечно велика, а при приближении к ним со стороны заделки она имеет конечное значение.

На фиг. 29 для случая симметричного изгиба ($\alpha_0 = 0$) изображены эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил на краю полуплоскости при $\frac{y_0}{a} = 1$.



Фиг. 30.

Второй случай (фиг. 30), когда отрезок $|x| \leq a$ — закреплен, а остальная часть края полуплоскости — оперта, получается из первого случая заменой β на $\pi - \beta$, γ на $\pi - \gamma$ и β_0 на $\pi - \beta_0$.¹

Изгибающий момент на заделке получаем из (24,1):

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_0}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2}}{\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) - \cos \beta_0}. \quad (24,6)$$

¹ Можно, разумеется, полагать $\gamma = 0$ в формулах § 23.

Формула (24,6) показывает, что в точках „стыка“ ($\alpha = \pm\infty$) изгибающий момент терпит бесконечный разрыв того же характера, что и в первом случае.

Однако вдоль заделки изгибающий момент может меняться не монотонно. В самом деле, дифференцируя (24,6) по α и приравнявая производную нулю (для простоты полагаем $\alpha_0 = 0$), находим, кроме максимума в точке $\alpha = 0$, еще минимум в точке

$$\operatorname{ch} \alpha^* = 3 \cos \beta_0 + 2, \quad (24,7)$$

так что, при изменении α от 0 до $\pm\infty$, момент на заделке сначала убывает от значения

$$\frac{M}{P} \Big|_{\alpha=\beta=0} = \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{a} \frac{1}{\sin \frac{\beta_0}{2}} \quad (24,8)$$

до минимального значения в точке $\alpha = \alpha^*$, а затем уже монотонно возрастает до бесконечности.¹

При $\beta_0 \rightarrow 0$ $\frac{M}{P} \Big|_{\alpha=\beta=0} \rightarrow \frac{1}{\pi}$, как и должно быть, ибо при приближении точки приложения силы к заделке мы находимся как бы вблизи закрепленного края полуплоскости.

Выражения для перерезывающих сил получаются из (24,2) и (24,4). На опоре:

$$\begin{aligned} -\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{y_0}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta_0}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha - \alpha_0}{2} - \sin^2 \frac{\beta_0}{2}} \times \\ &\times \left[\frac{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \sin \frac{\beta_0}{2}} - \operatorname{ch} \frac{\alpha_0}{2} + \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right]. \quad (24,9) \end{aligned}$$

На заделке:

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0} = \frac{y_0}{a} \frac{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin^2 \beta_0}{[\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) - \cos \beta_0]^2}. \quad (24,10)$$

¹ Точка α^* существует лишь при $\cos \beta_0 > -\frac{2}{3}$. В противном случае момент вдоль заделки меняется монотонно.

Из этих формул следует, что в точках „стыка“ ($\alpha = \pm \infty$) перерезывающие силы терпят бесконечный разрыв того же характера, что и в первом случае.

Вдоль опоры перерезывающая сила по абсолютной величине монотонно убывает от бесконечности до нуля. Можно показать, что на заделке перерезывающая сила не меняет знака, монотонно убывая по абсолютной величине от значения при $\alpha = 0$ (принято $\alpha_0 = 0$)

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\alpha=\beta=0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_0}{a} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta_0}{2} \quad (24,11)$$

до значения

$$-\frac{N}{P/a} \Big|_{\beta=0, \alpha=\pm \infty} = \frac{1}{2\pi} \frac{y_0}{a} \sin^2 \beta_0, \quad (24,12)$$

получаемого из (24,5) при $\alpha_0 = 0$.

На фиг. 30 построены эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил при $\frac{y_0}{a} = 1$ и $\alpha_0 = 0$.

§ 25. Луночная плита под равномерной нагрузкой

В § 17 была получена функция Грина для задачи об изгибе луночной плиты, так что интегрированием по области действия нагрузки можно получить решение для луночной плиты под произвольной нагрузкой.

Однако, для простейших случаев нагрузки удобнее сразу подбирать частное решение неоднородного бигармонического уравнения (15,4). Так мы и поступим для случая нагрузки $q(\alpha, \beta) = q = \text{const}$, т. е. для нагрузки, равномерно распределенной по всей площади плиты.

Ищем решение в виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{qa^4}{16} \left[u^* + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm \right], \\ f(\beta, m) &= A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + \\ &\quad + C(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta, \end{aligned} \right\} (25,1)$$

ибо в случае равномерной нагрузки прогиб будет четной функцией переменной α .

Функцию u^* выбираем следующим образом:

$$u^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2}. \quad (25,2)$$

Легко проверить, что выражение (25,2) удовлетворяет бигармоническому уравнению с правой частью

$$\Delta^2 u^* = \frac{16}{a^4}. \quad (25,3)$$

Для этого достаточно выразить u^* в прямоугольных координатах, а именно

$$u^*(x, y) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + 2\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{a^2} + 1,$$

откуда и следует справедливость (25,3).

Перепишем (25,1) так:

$$gu = \frac{qa^3}{16} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \int_0^\infty f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm \right]. \quad (25,4)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям на закрепленных краях

$$(gu)|_{\beta=\beta_1} = (gu)|_{\beta=\beta_2} = \frac{\partial (gu)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial (gu)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = 0, \quad (25,5)$$

разложим функцию $\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$ в интеграл Фурье, пользуясь П(16). Получим:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} = \frac{2}{\sin \beta} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} m\beta}{\operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha \, dm. \quad (25,6)$$

Подставив (25,6) в (25,4), будем иметь:

$$gu = \frac{qa^3}{16} \int_0^\infty \left[\frac{2\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta \operatorname{sh} m\pi} + f(\beta, m) \right] \cos m\alpha \, dm. \quad (25,7)$$

Теперь, чтобы удовлетворить (25,5), надо потребовать выполнения условий:

$$\left. \begin{aligned} f(\beta_i, m) + \frac{2 \operatorname{sh} m\beta_i}{\sin \beta_i \cdot \operatorname{sh} m\pi} &= 0, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_i} + \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{2 \operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta \operatorname{sh} m\pi} \right) \right]_{\beta=\beta_i} &= 0 \end{aligned} \right\} (i = 1, 2). \quad (25,8)$$

Это дает следующую систему уравнений для величин A, B, C, D :

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} m\beta_i \cos \beta_i + B \operatorname{ch} m\beta_i \sin \beta_i + C \operatorname{sh} m\beta_i \cos \beta_i + \\ + D \operatorname{sh} m\beta_i \sin \beta_i &= -\psi(m, \beta_i), \\ A(m \operatorname{sh} m\beta_i \cos \beta_i - \operatorname{ch} m\beta_i \sin \beta_i) + \\ + B(m \operatorname{sh} m\beta_i \sin \beta_i + \operatorname{ch} m\beta_i \cos \beta_i) + \\ + C(m \operatorname{ch} m\beta_i \cos \beta_i - \operatorname{sh} m\beta_i \sin \beta_i) + \\ + D(m \operatorname{ch} m\beta_i \sin \beta_i + \operatorname{sh} m\beta_i \cos \beta_i) &= -\psi'(m, \beta_i), \\ \psi(m, \beta) &= \frac{2 \operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta \operatorname{sh} m\pi}, \\ \psi'(m, \beta) &= \frac{2}{\operatorname{sh} m\pi} \cdot \frac{m \operatorname{ch} m\beta \sin \beta - \operatorname{sh} m\beta \cos \beta}{\sin^2 \beta}. \end{aligned} \right\} (25,9)$$

Не решая систему (25,9) в общем виде, рассмотрим два частных случая.

1°. Симметричная луночка с закрепленным контуром. Ввиду симметрии решения по переменной β , задаемся сразу таким видом функции $f(\beta, m)$:

$$f(\beta, m) = A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta. \quad (25,10)$$

Для определения величин A и B имеем систему:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma + B \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma &= -\psi(m, \gamma) = -\psi, \\ A(m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) + \\ + B(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) &= -\psi'(m, \gamma) = -\psi'. \end{aligned} \right\} (25,11)$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} m\gamma + m \sin \gamma \cos \gamma.$$

Для A и B имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2} A &= \psi' \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma - \psi (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) = \\ &= -4 \frac{\cos \gamma \operatorname{sh}^2 m\gamma}{\sin \gamma \operatorname{sh} m\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2} B &= \psi (m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) - \psi' \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma = \\ &= \frac{2}{\sin^2 \gamma \operatorname{sh} m\pi} \left[\cos^2 \gamma \operatorname{sh} 2m\gamma - \frac{\Delta}{2} \right], \end{aligned}$$

после чего получаем окончательное выражение для функции $f(\beta, m)$:

$$\begin{aligned} f(\beta, m) &= -\frac{2}{\sin^2 \gamma \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{sh} m\beta \sin \beta - \\ &- \frac{2}{\Delta} \left[4 \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ch} m\beta \cos \beta \frac{\operatorname{sh}^2 m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} + 2 \operatorname{ctg}^2 \gamma \operatorname{sh} m\beta \sin \beta \frac{\operatorname{sh} 2m\gamma}{\operatorname{sh} m\pi} \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(\beta, m) &= -\frac{2}{\sin^2 \gamma \operatorname{sh} m\pi} \left\{ \operatorname{sh} m\beta \sin \beta + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\Delta} [\operatorname{sh}^2 m\gamma \sin 2\gamma \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + \cos^2 \gamma \operatorname{sh} 2m\gamma \operatorname{sh} m\beta \sin \beta] \right\}. \quad (25,12) \end{aligned}$$

Теперь проведенный прогиб, согласно (25,7), дается формулой:

$$\begin{aligned} u &= \frac{qa^4}{8(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ \frac{\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta}{\sin \beta \sin^2 \gamma} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} m\beta}{\operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha \, dm - \right. \\ &- \frac{2 \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^\infty (\sin \gamma \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + \\ &\left. + \cos \gamma \operatorname{ch} m\gamma \operatorname{sh} m\beta \sin \beta) \frac{\operatorname{sh} m\gamma \cos m\alpha}{\Delta \operatorname{sh} m\pi} \, dm \right\}, \end{aligned}$$

или, согласно П(16):

$$\begin{aligned} u &= \frac{qa^4}{8(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - \right. \\ &- \frac{4 \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \int_0^\infty (\sin \gamma \operatorname{sh} m\gamma \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + \\ &\left. + \cos \gamma \operatorname{ch} m\gamma \operatorname{sh} m\beta \sin \beta) \frac{\operatorname{sh} m\gamma \cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi (\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma)} \right\}, \quad (25,13) \end{aligned}$$

Для случая круга ($\gamma = \pi/2$) получаем:

$$u = \frac{qa^4}{16} \cdot \frac{1 - \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2},$$

или после преобразований

$$u = \frac{qa^4}{64} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^2,$$

что совпадает с известным решением в полярных координатах для круглой плиты под равномерной нагрузкой (см., например, [21], стр. 511).

Прогиб u_0 в центре плиты ($\alpha = \beta = 0$) будет

$$u_0 = \frac{qa^4}{16} \left\{ \frac{1}{4} - 4 \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 m\gamma \, dm}{\operatorname{sh} m\pi (\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma)} \right\}. \quad (25,14)$$

Чтобы получить изгибающий момент на краю по формуле (16,4), продифференцируем функцию gu , даваемую (25,13), дважды по переменной β и положим $\beta = \gamma$. Получим:

$$\begin{aligned} -M &= \frac{qa^2}{8\sin^2 \gamma} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos 2\gamma + \cos \gamma}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma)^2} + \right. \\ &+ 8\cos \gamma \int_0^{\infty} [m \operatorname{ch} m\gamma \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma \cos \gamma + \\ &+ \operatorname{ch}^2 m\gamma \cos^2 \gamma - \operatorname{sh}^2 m\gamma \sin^2 \gamma] \times \\ &\times \left. \frac{m \operatorname{sh} m\gamma \cos m\alpha \, dm}{\operatorname{sh} m\pi (\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma)} \right\} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma). \quad (25,15) \end{aligned}$$

Для случая круга ($\gamma = \pi/2$) (25,15) дает $\kappa = -\frac{M}{qR^2} = \frac{1}{8}$ и не зависит от α , как и должно быть.

2°. Полукруглая плита с закрепленным контуром. Полагая в (25,9) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi/2$, получим систему:

$$A = \lim_{\beta \rightarrow 0} \psi(m, \beta) = -\frac{2m}{\text{sh } m\pi}, \quad B + mC = -\lim_{\beta \rightarrow 0} \psi'(m, \beta) = 0, \quad (25,16)$$

$$B \text{ch } \frac{m\pi}{2} + D \text{sh } \frac{m\pi}{2} = -\psi(m, \pi/2) = -\frac{1}{\text{ch } \frac{m\pi}{2}}, \quad (25,17)$$

$$\begin{aligned} -A \text{ch } \frac{m\pi}{2} + mB \text{sh } \frac{m\pi}{2} - C \text{sh } \frac{m\pi}{2} + \\ + mD \text{ch } \frac{m\pi}{2} = -\psi'(m, \pi/2) = -\frac{m}{\text{sh } \frac{m\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (25,18)$$

Отсюда $A = -2m/\text{sh } m\pi$, $C = -B/m$; для B и D имеем:

$$\left. \begin{aligned} B = -\frac{m^2}{\Delta}, \quad D = 2 \frac{m^2 \left(1 + \text{ch}^2 \frac{m\pi}{2}\right) - \text{sh}^2 \frac{m\pi}{2}}{\Delta \cdot \text{sh } m\pi}, \\ \Delta = \text{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2, \end{aligned} \right\} \quad (25,19)$$

после чего функция $f(\beta, m)$ может быть записана так:

$$\begin{aligned} f(\beta, m) = & -\frac{2}{\text{sh } m\pi} (\text{sh } m\beta \sin \beta + m \text{ch } m\beta \cos \beta) + \\ & + \frac{1}{\Delta} \left[m (\text{sh } m\beta \cos \beta - m \text{ch } m\beta \sin \beta) + \right. \\ & \left. + m^2 \text{cth } \frac{m\pi}{2} \text{sh } m\beta \sin \beta \right]. \end{aligned} \quad (25,20)$$

Теперь, согласно (25,7),

$$\begin{aligned} u = & \frac{qR^4}{16(\text{ch } \alpha + \cos \beta)} \left\{ \frac{2 \cos^2 \beta}{\sin \beta} \int_0^\infty \frac{\text{sh } m\beta}{\text{sh } m\pi} \cos m\alpha \, dm - \right. \\ & - 2 \cos \beta \int_0^\infty \frac{m \text{ch } m\beta}{\text{sh } m\pi} \cos m\alpha \, dm + \\ & + \int_0^\infty \left[m (\text{sh } m\beta \cos \beta - m \text{ch } m\beta \sin \beta) + \right. \\ & \left. + m^2 \text{cth } \frac{m\pi}{2} \text{sh } m\beta \sin \beta \right] \frac{\cos m\alpha}{\Delta} \, dm \left. \right\}, \end{aligned}$$

или с учетом П (16) и П (17):

$$u = \frac{qR^4}{16(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\operatorname{sh} m\beta \cos \beta - m \sin \beta \left(\operatorname{ch} m\beta + \operatorname{sh} m\beta \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} \right) \right] \frac{m \cos m\alpha}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} dm - \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right\}. \quad (25,21)$$

Прогиб в центре плиты, где $\alpha = 0$ и $\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \frac{1}{2}$ ($\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{4}{3}$), дается выражением:

$$u_0 = \frac{qR^4}{128} \int_0^{\infty} \left[3 \operatorname{sh} m\beta - 4m \left(\operatorname{ch} m\beta + \operatorname{sh} m\beta \cdot \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} \right) \right] \frac{m dm}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2},$$

откуда

$$u_0 \approx 0,0204 qR^4.$$

Для нахождения изгибающего момента на диаметре составим

$$f''(0, m) = 2m \left[\frac{m^2}{\Delta} \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} - \frac{m^2 + 1}{\operatorname{sh} m\pi} \right],$$

после чего (16,4) и (25,4) дадут

$$M \Big|_{\beta=0} = \frac{qR^2}{16} (\operatorname{ch} \alpha + 1) \left[2 \int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} \cos m\alpha dm - 2 \int_0^{\infty} \frac{m(m^2 + 1)}{\operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha dm + \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha + 1)^2} \right],$$

или с помощью П (52) и П (17):

$$\begin{aligned} & \frac{M}{qR^2} \Big|_{\beta=0} = \\ & = \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{8} \left[\int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} \cos m\alpha dm - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + 1} \right]. \quad (25,22) \end{aligned}$$

Максимальный изгибающий момент будет в точке $\alpha = 0$:

$$\frac{M_{\max}}{qR^2} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{8} \left[\int_0^{\infty} \frac{m^3 \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} dm - \frac{1}{2} \right], \quad (25,23)$$

откуда

$$M_{\max} \approx 0,0733 qR^2.$$

Чтобы получить значение изгибающего момента на дуговой заделке, составим:

$$f''\left(\frac{\pi}{2}, m\right) = \frac{m^2 + 1}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} - \frac{2}{\Delta} m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2},$$

после чего из (16,4) и (25,4) будем иметь:

$$\begin{aligned} -M \Big|_{\beta=\pi/2} &= \frac{qR^2}{16} \operatorname{ch} \alpha \left[\int_0^{\infty} \frac{(m^2 + 1) \cos m\alpha}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} dm - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int \frac{m^2 \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2}}{\Delta} \cos m\alpha dm + \frac{2}{\operatorname{ch}^3 \alpha} \right], \end{aligned}$$

или с помощью П (24) и П (35)

$$- \frac{M}{qR^2} \Big|_{\beta=\pi/2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{8} \left[\frac{2}{\operatorname{ch}^3 \alpha} - \int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} \cos m\alpha dm \right]. \quad (25,24)$$

Максимальный изгибающий момент будет в точке $\alpha = 0$:

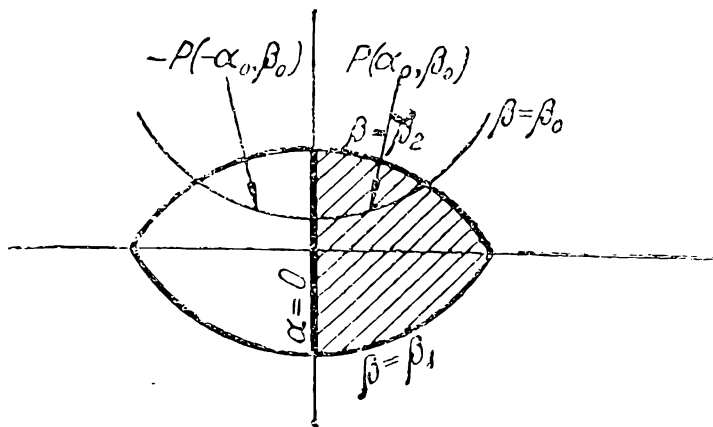
$$- \frac{M_{\max}}{qR^2} \Big|_{\beta=\pi/2} = \frac{1}{8} \left[2 - \int_0^{\infty} \frac{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} dm \right], \quad (25,25)$$

откуда

$$-M_{\max} \approx 0,0588 qR^2.$$

§ 26. Некоторые случаи изгиба плиты, имеющей форму половины круговой луночки

Рассмотрим плиту, имеющую форму половины круговой луночки (фиг. 31), т. е. ограниченную координатными линиями $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$ и координатной линией $\alpha = 0$.



Фиг. 31.

Если искать решение задачи в виде

$$gu(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} f(\beta, m) \sin m\alpha \, dm, \quad (26,1)$$

то на прямолинейном крае $\alpha = 0$ будут иметь место равенства

$$gu \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^2(gu)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (26,2)$$

в точности совпадающие с условиями (16,9) для свободно опертого прямолинейного края.

Применяя к (26,1) все рассуждения § 17, можно получить решение задачи об изгибе рассматриваемой плиты, сосредоточенной в точке (α_0, β_0) , силой P в форме:

$$u(\alpha, \beta) = \frac{Pa^2}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \times \left. \begin{aligned} & \times \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\beta, m)}{m(m^2 + 1)} \sin m\alpha_0 \sin m\alpha \, dm, \\ & \varphi(\beta, m) = K(\beta, m, \beta_0) + A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + \\ & \quad + B(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + C(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + \\ & \quad + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta \end{aligned} \right\} (26,3)$$

Последнее выражение для приведенного прогиба u можно преобразовать еще к виду:

$$u = u_- - u_+,$$

$$u_{\pm} = \frac{Pa^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\beta, m)}{m(m^2 + 1)} \times \left. \begin{array}{l} \\ \times \cos m(\alpha \pm \alpha_0) dm \end{array} \right\} (26,4)$$

Из рассмотрения (26,4) видно, что решение задачи об изгибе плиты в виде половины луночки с опертым прямолинейным краем и закрепленными дуговыми краями получается как разность двух решений, первое из которых совпадает с решением для полной луночки, а второе получается из него заменой параметра $\alpha - \alpha_0$ на $\alpha + \alpha_0$.

Таким образом, имея решение для какой-либо полной луночки, можно сразу писать решение для половины луночки, причем прямолинейный край последней считается опертым.¹

Заметим, что этот же результат можно получить и иным рассуждением.

Представим себе луночку, нагруженную двумя сосредоточенными силами: $+P$ в точке (α_0, β_0) и $-P$ в точке $(\alpha_0, -\beta_0)$. (фиг. 31). Тогда прогиб будет нечетной функцией переменной α , и при $\alpha = 0$ будут иметь место условия (26,2), соответствующие опертому прямолинейному краю.² Решение

¹ Можно было бы, конечно, вместо $\sin m\alpha$ взять в (26,1) $\cos m\alpha$, что соответствует горизонтальной касательной и отсутствию перерезывающих сил на кромке $\alpha = 0$, но этот случай не имеет практического значения. Получить же решение для закрепленного края $\alpha = 0$ таким способом не удастся — трудности здесь совершенно аналогичны затруднениям, возникающим при попытках точного решения задачи об изгибе прямоугольной пластины с закрепленным контуром.

² Собственно из нечетности функции $u(\alpha)$ следуют равенства:

$$u \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

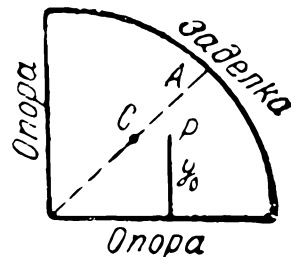
Но последние равносильны условиям (26,2), ибо

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

же получается наложением двух решений: от силы $+P$ в точке (α_0, β_0) и от силы $-P$ в точке $(-\alpha_0, \beta_0)$, что и дает в точности (26,4).

Рассмотрим несколько приложений полученного результата.

1°. Плита в виде четверти круга с опертymi радиусами и закрепленной дугой (фиг. 32).



Фиг. 32.

Решение этой задачи сразу получается из формул § 22 при $\gamma = \pi/2$.

Приводим значение изгибающего момента на дуговой заделке, получающееся из формулы (22,9):

$$-\frac{M}{P} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_0}{R} \operatorname{ch} \alpha \cos^2 \beta_0 \left[\frac{1}{\operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0) + \cos 2\beta_0} - \frac{1}{\operatorname{ch} 2(\alpha + \alpha_0) + \cos 2\beta_0} \right]$$

или

$$-\frac{M}{P} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{y_0}{R} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos^2 \beta_0 \operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha_0}{[\operatorname{ch} 2(\alpha - \alpha_0) + \cos 2\beta_0] \cdot [\operatorname{ch} 2(\alpha + \alpha_0) + \cos 2\beta_0]} \quad (26,5)$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$, т. е. в углах плиты, изгибающий момент равен нулю.

Если сила P приложена в точке оси симметрии плиты — биссектрисы центрального угла сектора, уравнение которой $x = y$ или

$$\operatorname{sh} \alpha = \sin \beta, \quad (26,6)$$

то максимальный изгибающий момент будет в точке А, где $\operatorname{sh} \alpha = 1$ ($\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{2}$):

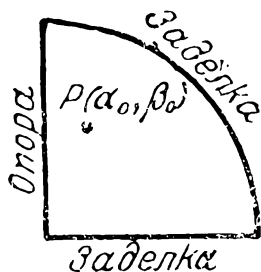
$$-\frac{M_{\max}}{P} = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{y_0}{R} \cdot \frac{\cos^2 \beta_0 \operatorname{sh} 2\alpha_0}{(3 \operatorname{ch} 2\alpha_0 + \cos 2\beta_0)^2 - 8 \operatorname{sh}^2 2\alpha_0}, \quad (26,7)$$

причем числа α_0 и β_0 связаны зависимостью $\operatorname{sh} \alpha_0 = \sin \beta_0$.

Для случая силы, приложенной в центре плиты С, для определения β_0 имеем уравнение:

$$\frac{2y_0}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 \sin \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} = \frac{2 \sin \beta_0}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_0} + \sqrt{1 - \sin^2 \beta_0}},$$

решая которое, получаем $\sin \beta_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. Для максимального изгибающего момента из (26,7) получаем $M_{\max} \approx 0,165 P$.



Фиг. 33.

2°. Плита в виде четверти круга с закрепленной дугой и одним закрепленным, а другим опертым радиусом (фиг. 33).

В этом случае решение получается сразу из формул § 20 при $\gamma = \pi/2$.

Изгибающий момент на закрепленном радиусе, согласно (20,5), дается выражением:

$$\frac{M}{P} \Big|_{\beta=0} = \frac{y_0}{R} \cdot \frac{2(\operatorname{ch} \alpha + 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - m \operatorname{ctg} \beta_0 \operatorname{sh} m\beta_0 \right] \frac{\sin m\alpha \sin m\alpha_0}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} dm, \quad (26,8)$$

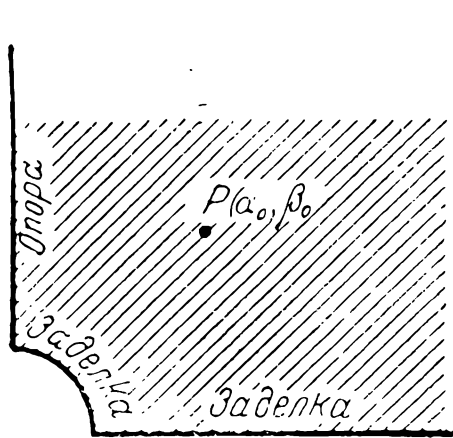
а изгибающий момент на дуговой заделке, согласно (20,7), выражается формулой:

$$-\frac{M}{P} \Big|_{\beta=\pi/2} = \frac{y_0}{R} \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m\beta_0 \operatorname{ctg} \beta_0 - m \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \right] \frac{\sin m\alpha \sin m\alpha_0}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2} dm. \quad (26,9)$$

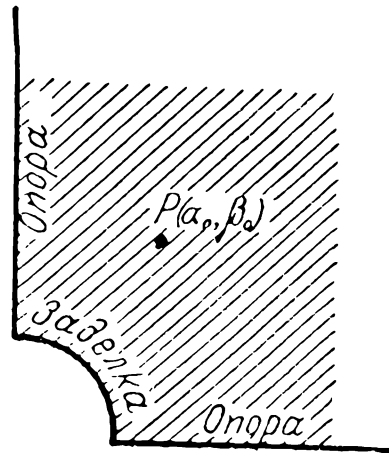
3°. Указанным способом можно из результатов § 21, 23, 24 получить решение задачи изгиба сосредоточенной силой плит, изображенных на фиг. 34, 35, 36, 37 и представляющих собой четверть плоскости при различного рода смешанных граничных условиях. Изгибающие моменты и перерезывающие силы для случаев, изображенных на фиг. 35—37, даются в замкнутой форме, а для случая, изображенного на фиг. 34, — в виде определенных интегралов.

В заключение гл. IV сделаем следующее замечание. Мы видели на целом ряде примеров, что задачи изгиба полукруглых плит или плит в виде полуплоскости с полукруглой выемкой имеют существенное различие в их решении в зависи-

мости от того — закреплена или оперта прямолинейная часть контура, а именно: в случае закрепления решение дается в виде определенных интегралов, в то время как в случае

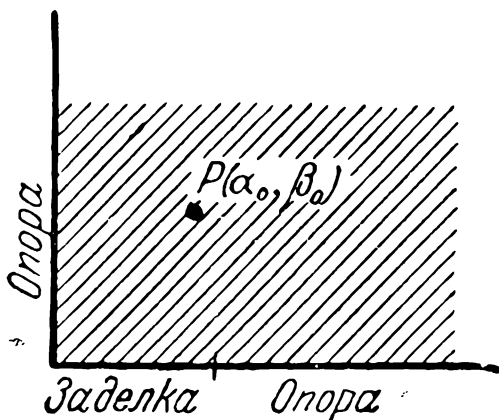


Фиг. 34.

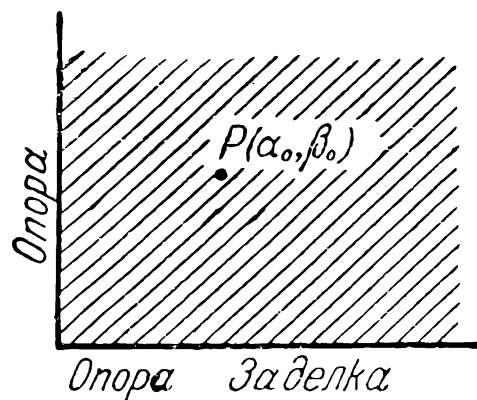


Фиг. 35.

опертого прямолинейного края решение дается в замкнутой форме. Нам хотелось провести здесь аналогию с теорией изгиба прямоугольных плит, ибо там имеет место сходное



Фиг. 36.



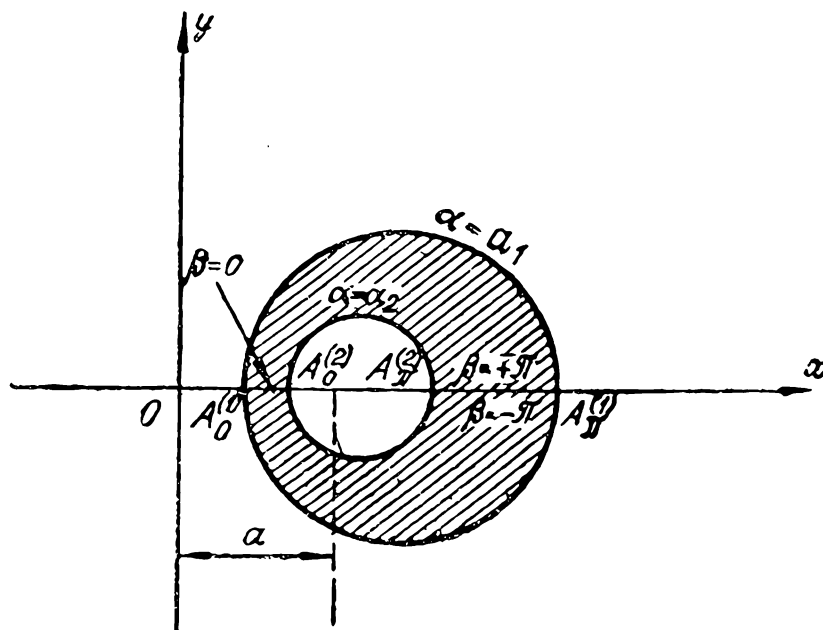
Фиг. 37.

обстоятельство: случай опертых краев допускает точное решение, а в случае четырех закрепленных краев приходится прибегать к различным искусственным приемам (см. например, [22]).

ГЛАВА V
ИЗГИБ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ

§ 27. Общее решение задачи об изгибе эксцентрического кольца с закрепленным контуром

Пусть контур упругой тонкой плиты ограничен двумя эксцентрическими окружностями (фиг. 38).



Фиг. 38.

В биполярных координатах уравнения этих окружностей будут

$$\alpha = \alpha_1 \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_2 \quad (0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq +\infty).$$

Введем, как в (15,3), приведенный изгиб $u(\alpha, \beta)$, удовлетворяющий уравнению:

$$\Delta^2 u = q(\alpha, \beta),$$

или уравнению:

$$g^3 \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (gu) = \\ = q(\alpha, \beta). \quad (27,1)$$

В соответствии с (3,3), ищем $u(\alpha, \beta)$ в виде периодической функции переменной β ($-\pi < \beta < +\pi$):

$$gu = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^c(\alpha) \cos n\beta + f_n^s(\alpha) \sin n\beta]. \quad (27,2)$$

Подставляя (27,2) в (27,1), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{d^4}{d\alpha^4} - 2(n^2 + 1) \frac{d^2}{d\alpha^2} + (n^2 - 1)^2 \right] f_n^c(\alpha) \cos n\beta + \right. \\ \left. + \left[\frac{d^4}{d\alpha^4} - 2(n^2 + 1) \frac{d^2}{d\alpha^2} + (n^2 - 1)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times f_n^s(\alpha) \sin n\beta \right\} = \frac{q(\alpha, \beta)}{g^3}. \quad (27,3)$$

Разложим функцию $q(\alpha, \beta)/g^3$ в тригонометрический ряд

$$\left. \begin{aligned} q(\alpha, \beta)/g^3 &= \sum_{n=0}^{\infty} [p_n^c(\alpha) \cos n\beta + p_n^s(\alpha) \sin n\beta], \\ p_n^c(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{q(\alpha, \beta)}{g^3} \cos n\beta d\beta, \\ p_n^s(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{q(\alpha, \beta)}{g^3} \sin n\beta d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (27,4)$$

Тогда из (27,3) получим для $f_n(\alpha)$ ¹ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left[\frac{d^4}{d\alpha^4} - 2(n^2 + 1) \frac{d^2}{d\alpha^2} + (n^2 - 1)^2 \right] f_n(\alpha) = p_n(\alpha). \quad (27,5)$$

¹ Под $f_n(\alpha)$ подразумеваем $f_n^c(\alpha)$ или $f_n^s(\alpha)$. Аналогично надо понимать функцию $p_n^i(\alpha)$.

Общий интеграл этого неоднородного уравнения ищем в виде суммы общего интеграла $F_n(\alpha)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $\Phi_n(\alpha)$ неоднородного уравнения, т. е. полагаем

$$f_n(\alpha) = F_n(\alpha) + \Phi_n(\alpha). \quad (27,6)$$

Общий интеграл однородного уравнения на основании (3,5) берем в форме:

$$\left. \begin{aligned} F_n(\alpha) &= A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + \\ &\quad + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha \quad (n \geq 2), \\ F_0(\alpha) &= A_0 \operatorname{ch} \alpha + B_0 \alpha \operatorname{ch} \alpha + C_0 \operatorname{sh} \alpha + C_0 \alpha \operatorname{sh} \alpha, \\ F_1(\alpha) &= A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha + D_1 \alpha. \end{aligned} \right\} (27,7)$$

Частное решение неоднородного уравнения (27,5) находим методом вариаций произвольных постоянных.

Считая A_n, B_n, C_n и D_n функциями α , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A'_n(\alpha) \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B'_n(\alpha) \operatorname{ch}(n-1)\alpha + \\ + C'_n(\alpha) \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D'_n(\alpha) \operatorname{sh}(n-1)\alpha &= 0, \\ A'_n(\alpha)(n+1) \operatorname{sh}(n+1)\alpha + B'_n(\alpha) \times \\ \times (n-1) \operatorname{sh}(n-1)\alpha + C'_n(\alpha)(n+1) \times \\ \times \operatorname{ch}(n+1)\alpha + D'_n(\alpha)(n-1) \operatorname{ch}(n-1)\alpha &= 0, \\ A'_n(\alpha)(n+1)^2 \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B'_n(\alpha)(n-1)^2 \times \\ \times \operatorname{ch}(n-1)\alpha + C'_n(\alpha)(n+1)^2 \operatorname{sh}(n+1)\alpha + \\ + D'_n(\alpha)(n-1)^2 \operatorname{sh}(n-1)\alpha &= 0, \\ A'_n(\alpha)(n+1)^3 \operatorname{sh}(n+1)\alpha + B'_n(\alpha)(n-1)^3 \times \\ \times \operatorname{sh}(n-1)\alpha + C'_n(\alpha)(n+1)^3 \operatorname{ch}(n+1)\alpha + \\ + D'_n(\alpha)(n-1)^3 \operatorname{ch}(n-1)\alpha &= p_n(\alpha). \end{aligned} \right\} (27,8)$$

Решая эту систему, найдем A'_n, B'_n, C'_n и D'_n , а затем интегрированием и сами функции A_n, B_n, C_n и D_n .

Опуская выкладки, приводим окончательное выражение для $\Phi_n(\alpha)$ при $n \geq 2$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(\alpha) &= \frac{1}{4n(n^2-1)} \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} K_n(\alpha, t) p_n(t) dt, \\ K_n(\alpha, t) &= (n-t) \operatorname{sh}(n+1)(\alpha-t) - \\ &\quad - (n+1) \operatorname{sh}(n-1)(\alpha-t). \end{aligned} \right\} (27,9)$$

При $n=0$ и $n=1$ частные решения уравнения (27,5) записываются так:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\alpha) &= \frac{1}{4} \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} K_0(\alpha, t) p_0(t) dt, \\ K_0(\alpha, t) &= (\alpha-t) \operatorname{ch}(\alpha-t) - \operatorname{sh}(\alpha-t),^1 \\ \Phi_1(\alpha) &= \frac{1}{4} \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} K_1(\alpha, t) p_1(t) dt, \\ K_1(\alpha, t) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2(\alpha-t) - (\alpha-t). \end{aligned} \right\} (27,10)$$

Здесь $\bar{\alpha}$ — произвольное число в промежутке (α_1, α_2) .

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n (для индексов c и s) должны определяться четырьмя граничными условиями: по два на каждой из окружностей $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$.

Решение в общем виде удастся дать лишь для случая закрепленных краев. При этом граничные условия будут:

$$u|_{\alpha=\alpha_1} = u|_{\alpha=\alpha_2} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_1} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_2} = 0. \quad (27,11)$$

Этим условиям можно удовлетворить, полагая

$$f_n(\alpha_1) = f_n(\alpha_2) = \frac{\partial f_n}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_1} = \frac{\partial f_n}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_2} = 0. \quad (27,12)$$

¹ Здесь учтен коэффициент $\frac{1}{2}$, на который следует умножить величину $\rho_0^c(\alpha)$ в (27,4).

Система (27,12) служит для определения восьми неизвестных постоянных $A_n^c, B_n^c, \dots, D_n^s$.

В развернутом виде при $n \geq 2$ эта система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 + \\ + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1 + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha_1 &= -\Phi_n(\alpha_1), \\ A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha_2 + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha_2 + \\ + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha_2 + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha_2 &= -\Phi_n(\alpha_2), \\ (n+1)A_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1 + (n-1) \times \\ \times B_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha_1 + (n+1)C_n \times \\ \times \operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 + (n-1)D_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 &= -\Phi'_n(\alpha_1), \\ (n+1)A_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha_2 + (n-1) \times \\ \times B_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha_2 + (n+1)C_n \operatorname{ch} \times \\ \times (n+1)\alpha_2 + (n-1)D_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha_2 &= -\Phi'_n(\alpha_2). \end{aligned} \right\} (27,13)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_n(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \Phi_n(\alpha) = \frac{1}{4n(n^2-1)} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} K'_n(\alpha, t) p_n(t) dt, \\ K'_n(\alpha, t) &= \frac{\partial K_n(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \\ &= (n^2-1) [\operatorname{ch}(n+1)(\alpha-t) - \operatorname{ch}(n-1)(\alpha-t)]. \end{aligned} \right\} (27,14)$$

Определитель системы (27,13) будет:

$$D = 4 [n^2 \operatorname{sh}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 n\xi], \quad \xi = \alpha_2 - \alpha_1, \quad (27,15)$$

откуда видно, что соответствующие ряды, вообще говоря, не суммируются в конечном виде.¹

Приводим формулы для коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n , получаемых в результате решения системы (27,13):

$$A_n = \frac{\Delta_a}{D}, \quad B_n = \frac{\Delta_b}{D}, \quad C_n = \frac{\Delta_c}{D}, \quad D_n = \frac{\Delta_d}{D}, \quad (27,16)$$

¹ Исключение представляет случай $\alpha_2 = \infty$, когда внутренняя окружность переходит в точку (см. § 29 и 31).

$$\begin{aligned}
\Delta_a &= \Phi_n(\alpha_1) \Delta_{a1} - \Phi_n(\alpha_2) \Delta_{a2} + \\
&\quad + \Phi'_n(\alpha_1) \Delta'_{a1} - \Phi'_n(\alpha_2) \Delta'_{a2}, \\
\Delta_{a1} &= (n-1)^2 \operatorname{sh}(n+1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n-1) \xi + \\
&\quad + (n^2-1) [\operatorname{ch}(n+1) \alpha_1 - \operatorname{ch}(n+1) \alpha_2 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi], \\
\Delta_{a2} &= (n-1)^2 \operatorname{sh}(n+1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n-1) \xi - \\
&\quad - (n^2-1) [\operatorname{ch}(n+1) \alpha_2 - \operatorname{ch}(n+1) \alpha_1 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi], \\
\Delta'_{a1} &= - (n+1) \operatorname{ch}(n+1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n-1) \xi - \\
&\quad - (n-1) [\operatorname{sh}(n+1) \alpha_1 - \operatorname{sh}(n+1) \alpha_2 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi], \\
\Delta'_{a2} &= - (n+1) \operatorname{ch}(n+1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n-1) \xi + \\
&\quad + (n+1) [\operatorname{sh}(n+1) \alpha_2 - \operatorname{sh}(n+1) \alpha_1 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi].
\end{aligned}
\tag{27,17}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_b &= - \Phi_n(\alpha_1) \Delta_{b1} + \Phi_n(\alpha_2) \Delta_{b2} - \\
&\quad - \Phi'_n(\alpha_1) \Delta'_{b1} + \Phi'_n(\alpha_2) \Delta'_{b2}, \\
\Delta_{b1} &= - (n+1)^2 \operatorname{sh}(n-1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n+1) \xi - \\
&\quad - (n^2-1) [\operatorname{ch}(n-1) \alpha_1 - \operatorname{ch}(n-1) \alpha_2 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi], \\
\Delta_{b2} &= - (n+1)^2 \operatorname{sh}(n-1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n+1) \xi + \\
&\quad + (n^2-1) [\operatorname{ch}(n-1) \alpha_2 - \operatorname{ch}(n-1) \alpha_1 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi], \\
\Delta'_{b1} &= (n-1) \operatorname{ch}(n-1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n+1) \xi + \\
&\quad + (n+1) [\operatorname{sh}(n-1) \alpha_1 - \operatorname{sh}(n-1) \alpha_2 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi], \\
\Delta'_{b2} &= (n-1) \operatorname{ch}(n-1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n+1) \xi - \\
&\quad - (n+1) [\operatorname{sh}(n-1) \alpha_2 - \operatorname{sh}(n-1) \alpha_1 \times \\
&\quad\quad\quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi].
\end{aligned}
\tag{27,18}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_c &= \Phi_n(\alpha_1) \Delta_{c1} - \Phi_n(\alpha_2) \Delta_{c2} + \\
&\quad + \Phi'_n(\alpha_1) \Delta'_{c1} - \Phi'_n(\alpha_2) \Delta'_{c2}, \\
\Delta_{c1} &= - (n-1)^2 \operatorname{ch}(n+1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n-1) \xi - \\
&\quad - (n^2-1) [\operatorname{sh}(n+1) \alpha_1 - \operatorname{sh}(n+1) \alpha_2 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi], \\
\Delta_{c2} &= - (n-1)^2 \operatorname{ch}(n+1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n-1) \xi + \\
&\quad + (n^2-1) [\operatorname{sh}(n+1) \alpha_2 - \operatorname{sh}(n+1) \alpha_1 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi], \\
\Delta'_{c1} &= (n+1) \operatorname{sh}(n+1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n-1) \xi + \\
&\quad + (n-1) [\operatorname{ch}(n+1) \alpha_1 - \operatorname{ch}(n+1) \alpha_2 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi], \\
\Delta'_{c2} &= (n+1) \operatorname{sh}(n+1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n-1) \xi - \\
&\quad - (n+1) [\operatorname{ch}(n+1) \alpha_2 - \operatorname{ch}(n+1) \alpha_1 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n-1) \xi]. \\
\Delta_d &= - \Phi_n(\alpha_1) \Delta_{d1} + \Phi_n(\alpha_2) \Delta_{d2} - \\
&\quad - \Phi'_n(\alpha_1) \Delta'_{d1} + \Phi'_n(\alpha_2) \Delta'_{d2}, \\
\Delta_{d1} &= (n+1)^2 \operatorname{ch}(n-1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n+1) \xi + \\
&\quad + (n^2-1) [\operatorname{sh}(n-1) \alpha_1 - \operatorname{sh}(n-1) \alpha_2 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi], \\
\Delta_{d2} &= (n+1)^2 \operatorname{ch}(n-1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n+1) \xi - \\
&\quad - (n^2-1) [\operatorname{sh}(n-1) \alpha_2 - \operatorname{sh}(n-1) \alpha_1 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi], \\
\Delta'_{d1} &= - (n-1) \operatorname{sh}(n-1) \alpha_2 \operatorname{sh}(n+1) \xi - \\
&\quad - (n+1) [\operatorname{ch}(n-1) \alpha_1 - \operatorname{ch}(n-1) \alpha_2 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi], \\
\Delta'_{d2} &= - (n-1) \operatorname{sh}(n-1) \alpha_1 \operatorname{sh}(n+1) \xi + \\
&\quad + (n+1) [\operatorname{ch}(n-1) \alpha_2 - \operatorname{ch}(n-1) \alpha_1 \times \\
&\quad \quad \quad \times \operatorname{ch}(n+1) \xi].
\end{aligned}
\tag{27,19}$$

(27,19)

(27,20)

Выпишем еще соответствующие системы при $n = 0$ и $n = 1$:

$$\left. \begin{aligned} A_0 \operatorname{ch} \alpha_1 + B_0 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 + C_0 \operatorname{sh} \alpha_1 + \\ + D_0 \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1 = -\Phi_0(\alpha_1), \\ A_0 \operatorname{ch} \alpha_2 + B_0 \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_2 + C_0 \operatorname{sh} \alpha_2 + \\ + D_0 \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 = -\Phi_0(\alpha_2), \\ A_0 \operatorname{sh} \alpha_1 + B_0 (\operatorname{ch} \alpha_1 + \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1) + \\ + C_0 \operatorname{ch} \alpha_1 + D_0 (\operatorname{sh} \alpha_1 + \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1) = -\Phi'_0(\alpha_1), \\ A_0 \operatorname{sh} \alpha_2 + B_0 (\operatorname{ch} \alpha_2 + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2) + \\ + C_0 \operatorname{ch} \alpha_2 + D_0 (\operatorname{sh} \alpha_2 + \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_2) = -\Phi'_0(\alpha_2). \end{aligned} \right\} (27,21)$$

Определитель системы: $D_0^* = \operatorname{sh}^2 \xi - \xi^2$.

$$\left. \begin{aligned} A_1 \operatorname{ch} 2\alpha_1 + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha_1 + D_1 \alpha_1 = -\Phi_1(\alpha_1), \\ A_1 \operatorname{ch} 2\alpha_2 + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha_2 + D_1 \alpha_2 = -\Phi_1(\alpha_2), \\ 2A_1 \operatorname{sh} 2\alpha_1 + 2C_1 \operatorname{ch} 2\alpha_1 + D_1 = -\Phi'_1(\alpha_1), \\ 2A_1 \operatorname{sh} 2\alpha_2 + 2C_1 \operatorname{ch} 2\alpha_2 + D_1 = -\Phi'_1(\alpha_2). \end{aligned} \right\} (27,22)$$

Определитель системы: $D_1^* = 2 \operatorname{sh} \xi [\operatorname{sh} \xi - \xi \operatorname{ch} \xi]$

Приводим значения величин Δ_{a1} , Δ_{a2} , ..., Δ'_{d2} , входящих в формулы (27,16) — (27,20), для особых случаев $n = 0$ и $n = 1$.

а) $n = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{a1} &= (\alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1 - \\ &\quad - \operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{ch} \xi) \xi + \\ &\quad + (\alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_2 - \\ &\quad - \operatorname{sh} \alpha_2) \operatorname{sh} \xi; \\ \Delta'_{a1} &= \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{sh} \xi - \\ &\quad - \xi \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1; \\ \Delta_{b1} &= \operatorname{ch} \alpha_2 \operatorname{sh} \xi + \xi \operatorname{ch} \alpha_1; \\ \Delta'_{b1} &= \operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{sh} \xi - \xi \operatorname{sh} \alpha_1; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Delta_{a2} &= (\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 - \\ &\quad - \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} \xi) \xi + \\ &\quad + (\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 - \\ &\quad - \operatorname{sh} \alpha_1) \operatorname{sh} \xi; \\ \Delta'_{a2} &= \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \xi - \\ &\quad - \xi \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2; \\ \Delta_{b2} &= \operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{sh} \xi + \xi \operatorname{ch} \alpha_2; \\ \Delta'_{b2} &= \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \xi - \xi \operatorname{sh} \alpha_2; \end{aligned} \right\} (27,23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_{c1} &= (-\alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 + \operatorname{ch} \alpha_2 \operatorname{ch} \xi) \xi + \\
 &+ (\operatorname{ch} \alpha_2 - \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2) \operatorname{sh} \xi; \\
 \Delta'_{c1} &= -\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 \operatorname{sh} \xi + \xi \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1; \\
 \Delta_{d1} &= -\operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \alpha_1; \\
 \Delta'_{d1} &= -\operatorname{ch} \alpha_2 \operatorname{sh} \xi + \xi \operatorname{ch} \alpha_1; \\
 \Delta_{c2} &= (-\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 + \operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{ch} \xi) \xi + \\
 &+ (\operatorname{ch} \alpha_1 - \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1) \operatorname{sh} \xi; \\
 \Delta'_{c2} &= -\alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{sh} \xi + \xi \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2; \\
 \Delta_{d2} &= -\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \xi - \xi \operatorname{sh} \alpha_2; \\
 \Delta'_{d2} &= -\operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{sh} \xi + \xi \operatorname{ch} \alpha_2.
 \end{aligned} \right\} (27,23)$$

б) $n = 1$.

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_{a1} &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \operatorname{ch} 2\alpha_2); & \Delta_{a2} &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \operatorname{ch} 2\alpha_2); \\
 \Delta'_{a1} &= \frac{1}{4} (\operatorname{sh} 2\alpha_2 - \operatorname{sh} 2\alpha_1 - 2\xi \operatorname{ch} 2\alpha_2); & \Delta'_{a2} &= \frac{1}{4} (\operatorname{sh} 2\alpha_2 - \operatorname{sh} 2\alpha_1 - 2\xi \operatorname{ch} 2\alpha_1); \\
 \Delta_{b1} &= (\operatorname{sh} \xi - 2\alpha_2 \operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi; & \Delta_{b2} &= -(\operatorname{sh} \xi + 2\alpha_1 \operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi; \\
 \Delta'_{b1} &= \frac{1}{4} (2\alpha_1 - 2\alpha_2 \operatorname{ch} 2\xi + \operatorname{sh} 2\xi); & \Delta'_{b2} &= \frac{1}{4} (-2\alpha_2 + 2\alpha_1 \operatorname{ch} 2\xi + \operatorname{sh} 2\xi); \\
 \Delta_{c1} &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\alpha_2 - \operatorname{sh} 2\alpha_1); & \Delta_{c2} &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\alpha_2 - \operatorname{sh} 2\alpha_1); \\
 \Delta'_{c1} &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \operatorname{ch} 2\alpha_2 + 2\xi \operatorname{sh} 2\alpha_2); & \Delta'_{c2} &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \operatorname{ch} 2\alpha_2 + 2\xi \operatorname{sh} 2\alpha_1); \\
 \Delta_{d1} &= \operatorname{sh} 2\xi; & \Delta_{d2} &= \operatorname{sh} 2\xi; \\
 \Delta'_{d1} &= \operatorname{sh}^2 \xi; & \Delta'_{d2} &= -\operatorname{sh}^2 \xi.
 \end{aligned} \right\} (27,24)$$

Способом, развитым в § 16, можно показать, что изгибающий момент на закрепленной линии $\alpha = \alpha^* = \text{const}$ будет:

$$-aM = (\text{ch } \alpha^* + \cos \beta) \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (gu) \right]_{\alpha = \alpha^*}. \quad (27,25)$$

Формула (27,25) будет служить нам для расчета изгибающих моментов.¹

Выведем граничные условия для прямолинейного опертого края ($\alpha = 0$ — ось oy). На прямолинейном опертом краю $u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$. Но так как

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0,$$

то условие $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$ можно записать так:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (gu) = 0,$$

и мы имеем, таким образом, на опертом краю $\alpha = 0$ следующие граничные условия:

$$gu \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^2 (gu)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (27,26)$$

Эти граничные условия будут использованы в §§ 33—34. В ближайших §§ 28—32 мы будем иметь дело исключительно с закрепленными краями.

§ 28. Эксцентрическое кольцо под равномерной нагрузкой

Для случая равномерной нагрузки, отступая от общего метода, данного в предыдущем параграфе, воспользуемся сразу следующим частным решением уравнения (27,1):²

$$u_0(\alpha, \beta) = \frac{qa^4}{16(\text{ch } \alpha + \cos \beta)^2}. \quad (28,1)$$

¹ Знак минус годен для внешней окружности ($\sigma = \alpha_1$); для внутренней окружности ($\alpha = \alpha_2$) в формуле (27,25) слева надо брать знак плюс.

² См. (25,2).

Добавляя общий интеграл соответствующего однородного уравнения, запишем решение задачи в таком виде:¹

$$u(\alpha, \beta) = \frac{qa^4}{16(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\alpha) \cos n\beta \right], \quad (28,2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(\alpha) &= A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + \\ &+ C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha, \quad (n \geq 2) \\ \varphi_0(\alpha) &= A_0 \operatorname{ch} \alpha + B_0 \alpha \operatorname{ch} \alpha + C_0 \operatorname{sh} \alpha + D_0 \alpha \operatorname{sh} \alpha, \\ \varphi_1(\alpha) &= A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha + D_1 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (28,3)$$

Воспользовавшись разложением:

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} = 2 \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} \cos n\beta \right], \quad (28,4)$$

можно (28,2) привести еще к виду:

$$\left. \begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \frac{qa^4}{8(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(\alpha) + \psi_n(\alpha)], \\ \psi_n(\alpha) &= (-1)^n \frac{e^{-n\alpha}}{\operatorname{sh} \alpha}, \quad \psi_0(\alpha) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (28,5)$$

Считая контур плиты закрепленным, получим для определения постоянных A_n, B_n, C_n, D_n систему (27,13) при $n \geq 2$ и системы (27,21) — (27,22) при $n=0$ и $n=1$, причем в правые части этих систем вместо функций $\Phi_n(\alpha)$ и $\Phi'_n(\alpha)$ надо подставлять функции $\psi_n(\alpha)$ и $\psi'_n(\alpha)$, где

$$\begin{aligned} \psi'_n(\alpha) &= (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\alpha}}{\operatorname{sh}^2 \alpha} (n \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha), \\ \psi'_0(\alpha) &= -\frac{\operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (28,6)$$

¹ Четность по β обеспечивается видом области и характером нагрузки.

Ряды, через которые выражается приведённый прогиб $u(\alpha, \beta)$, имеют весьма сложный вид; поэтому, не останавливаясь на нахождении прогибов, переходим сразу к вычислению изгибающих моментов на контуре плиты по формуле (27,25).

Из (28,2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2(gu)}{\partial \alpha^2} &= \frac{qa^3}{16} \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha - 1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n''(\alpha) \cos n\beta \right], \\ \varphi_n''(\alpha) &= (n+1)^2 [A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha] + \\ &\quad + (n-1)^2 [B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha], \\ \varphi_0''(\alpha) &= A_0 \operatorname{ch} \alpha + B_0 (2 \operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) + C_0 \operatorname{sh} \alpha + \\ &\quad + D_0 (2 \operatorname{ch} \alpha + \alpha \operatorname{sh} \alpha), \\ \varphi_1''(\alpha) &= 4A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + 4C_1 \operatorname{sh} 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (28,7)$$

Если подставить постоянные A_n, B_n, C_n, D_n из (27,16) — (27,20), (27,23) — (27,24) в выражение для $\varphi_n''(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_1$, то получим:

$$\begin{aligned} D\varphi_n''(\alpha_1) &= \Phi_n(\alpha_1) \{ (n+1)^2 [\Delta_{a1} \operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 + \\ &\quad + \Delta_{c1} \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1] - (n-1)^2 [\Delta_{b1} \operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 + \\ &\quad + \Delta_{d1} \operatorname{sh}(n-1)\alpha_1] \} + \Phi_n(\alpha_2) \{ -(n+1)^2 \times \\ &\quad \times [\Delta_{a2} \operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 + \Delta_{c2} \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1] + \\ &\quad + (n-1)^2 [\Delta_{b2} \operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 + \Delta_{d2} \operatorname{sh}(n-1)\alpha_1] \} + \\ &\quad + \Phi_n'(\alpha_1) \{ (n+1)^2 [\Delta'_{a1} \operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 + \\ &\quad + \Delta'_{c1} \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1] - (n-1)^2 [\Delta'_{b1} \operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 + \\ &\quad + \Delta'_{d1} \operatorname{sh}(n-1)\alpha_1] \} + \Phi_n'(\alpha_2) \{ -(n+1)^2 \times \\ &\quad \times [\Delta'_{a2} \operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 + \Delta'_{c2} \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1] - \\ &\quad + (n-1)^2 [\Delta'_{b2} \operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 + \Delta'_{d2} \operatorname{sh}(n-1)\alpha_1] \}, \end{aligned}$$

или после преобразований:

$$\begin{aligned}
 D\varphi_n''(\alpha_1) &= \lambda_n \psi_n(\alpha_1) + \mu_n \psi_n(\alpha_2) - \lambda_n' \psi_n'(\alpha_1) - \\
 &\quad - \mu_n' \psi_n'(\alpha_2), \\
 \left. \begin{aligned}
 \lambda_n &= -4(n^2 - 1) [n^2 \operatorname{sh}^2 \xi + \\
 &\quad + \operatorname{sh}^2 n\xi], \\
 \mu_n &= 8n(n^2 - 1) \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} n\xi, \\
 \lambda_n' &= 4n [\operatorname{sh} 2n\xi - n \operatorname{sh} 2\xi], \\
 \mu_n' &= 8n [n \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} n\xi - \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} n\xi], \\
 \lambda_0 &= \operatorname{sh}^2 \xi + \xi^2, \quad \mu_0 = -2\xi \operatorname{sh} \xi, \\
 \lambda_0' &= 2\xi - \operatorname{sh} 2\xi, \quad \mu_0' = 2 [\operatorname{sh} \xi - \xi \operatorname{ch} \xi], \\
 \lambda_1 &= -2 \operatorname{sh}^2 \xi, \quad \mu_1 = 2 \operatorname{sh}^2 \xi, \\
 \lambda_1' &= \xi \operatorname{ch} 2\xi - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi, \\
 \mu_1' &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi - \xi, \quad \xi = \alpha_2 - \alpha_1.
 \end{aligned} \right\} (n \geq 2) \quad (28,8)
 \end{aligned}$$

Точно таким же образом можно получить значение $\varphi_n''(\alpha_2)$:

$$\begin{aligned}
 D\varphi_n''(\alpha_2) &= \mu_n \psi_n(\alpha_1) + \lambda_n \psi_n(\alpha_2) + \\
 &\quad + \mu_n' \psi_n'(\alpha_1) + \lambda_n' \psi_n'(\alpha_2). \quad (28,9)
 \end{aligned}$$

Имея выражения $\varphi_n''(\alpha_1)$ и $\varphi_n''(\alpha_2)$, получаем из (27,25):

$$\begin{aligned}
 -M_1(\beta) &= -M(\alpha_1, \beta) = \\
 &= \frac{qa^2}{16} (\operatorname{ch} \alpha_1 + \cos \beta) \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - 1 - \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha_1 + \cos \beta)^3} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n''(\alpha_1) \cos n\beta \right], \\
 +M_2(\beta) &= +M(\alpha_2, \beta) = \\
 &= \frac{qa^2}{16} (\operatorname{ch} \alpha_2 + \cos \beta) \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_2 - 1 - \operatorname{ch} \alpha_2 \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha_2 + \cos \beta)^3} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n''(\alpha_2) \cos n\beta \right]. \quad (28,10)
 \end{aligned}$$

Благодаря наличию экспоненциальных членов $\psi_n(\alpha_i)$ и $\psi'_n(\alpha_i)$, ряды, входящие в формулу (28,10), сходятся довольно быстро.

Приимая во внимание равенство $a = r_i \operatorname{sh} \alpha_i$,¹ можем формулы (28,10) для изгибающих моментов на контуре плиты записать еще так²

$$\left. \begin{aligned} M_i(\beta) &= \kappa_i(\beta) \cdot q r_1^2, \\ \kappa_i(\beta) &= \frac{(\operatorname{ch} \alpha_i + \cos \beta) \operatorname{sh}^2 \alpha_i}{16} \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_i - 1 - \operatorname{ch} \alpha_i \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha_i + \cos \beta)^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n''(\alpha_i) \cos n\beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (28,11)$$

($i = 1, 2$; знак плюс при $i = 1$, знак минус при $i = 2$).

Коэффициенты $\kappa_1(0)$, $\kappa_2(0)$, $\kappa_1(\pi)$ и $\kappa_2(\pi)$, характеризующие изгибающие моменты в точках $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_\pi^{(1)}$, $A_\pi^{(2)}$ (фиг. 38), даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1(0) &= \frac{1}{16} (\operatorname{ch} \alpha_1 + 1) \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - 1 - \operatorname{ch} \alpha_1}{(\operatorname{ch} \alpha_1 + 1)^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n''(\alpha_1) \right], \\ \kappa_2(0) &= \frac{1}{16} (\operatorname{ch} \alpha_2 + 1) \operatorname{sh}^2 \alpha_2 \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_2 - 1 - \operatorname{ch} \alpha_2}{(\operatorname{ch} \alpha_2 + 1)^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n''(\alpha_2) \right], \\ \kappa_1(\pi) &= \frac{1}{16} (\operatorname{ch} \alpha_1 - 1) \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - 1 + \operatorname{ch} \alpha_1}{(\operatorname{ch} \alpha_1 - 1)^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n''(\alpha_1) \right], \end{aligned} \right\} \quad (28,12)$$

¹ См. (1,7).

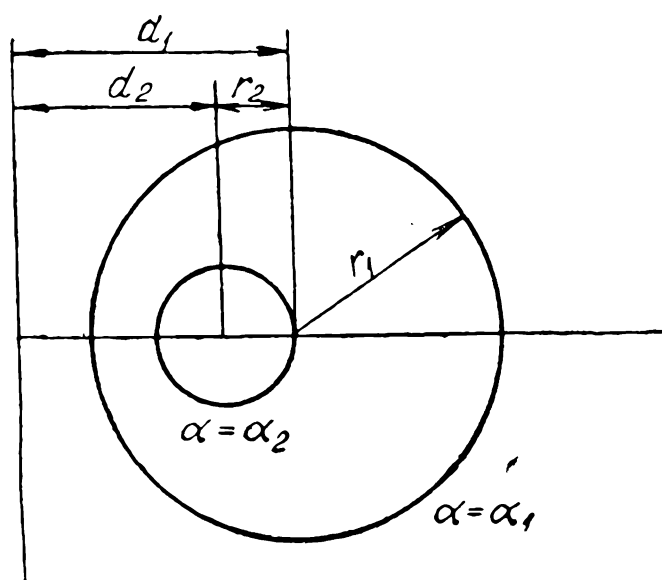
² Во всех расчетах изгибающие моменты относим к величине $q r_1^2$.

$$\chi_2(\pi) = \frac{1}{16} (\operatorname{ch} \alpha_2 - 1) \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_2 - 1 + \operatorname{ch} \alpha_2}{(\operatorname{ch} \alpha_2 - 1)^3} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n''(\alpha_2) \right]. \quad (28,12)$$

Вычисление коэффициентов $\chi_i(0)$ и $\chi_i(\pi)$ производилось для двух значений отношения $r_1/r_2 = 4$ и $r_1/r_2 = 10$,¹ причем было принято

$$\alpha_2 = 2\alpha_1. \quad (28,13)$$

Это условие соответствует тому, что внутренняя окружность ($\alpha = \alpha_2$) проходит через центр внешней окружности ($\alpha = \alpha_1$),



Фиг. 39.

(фиг. 39). В самом деле, при этих условиях имеем соотношение $d_1 = d_2 + r_2$.

Воспользовавшись формулами (1,7) и (1,8), получаем $\operatorname{cth} \alpha_1 = \operatorname{cth} \alpha_2 + 1/\operatorname{sh} \alpha_2$, или $\operatorname{cth} \alpha_1 = \operatorname{cth} \alpha_2/2$, откуда и следует справедливость (28,13). Кроме того, в рассматриваемом случае $r_1/r_2 = \operatorname{sh} \alpha_2/\operatorname{sh} \alpha_1 = 2\operatorname{ch} \alpha_1$, что можно записать в виде соотношений:

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{k}{2}, \quad k = r_1/r_2. \quad (28,14)$$

При нашем расчете, следовательно, $\operatorname{ch} \alpha_1 = 2$ и $\operatorname{ch} \alpha_1 = 5$.

Результаты вычислений сведены в табл. 14 (цифры без скобок) и сравнены с соответствующими значениями (цифры в скобках) для закрепленного концентрического кольца. Решение задачи изгиба для последнего случая получается в полярных координатах ($u \equiv u(r)$), и окончательные формулы для коэффициентов χ (не зависящих от полярного угла)

¹ В первом случае в рядах удерживалось шесть членов, а во втором достаточно было ограничиться двумя членами ряда.

имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{M_1}{qr_1^2} = \frac{1}{16} \left\{ 3 + \frac{k^2 - 1}{k^4 \delta} \left[(3 - k^2 - 2k^4) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2 + 7k^2) \lg k + \frac{4k^4}{k^2 - 1} \lg^2 k \right] \right\}, \\ x_2 &= \frac{M_2}{qr_2^2} = \frac{1}{16} \left\{ \frac{3}{k^2} + \frac{k^2 - 1}{k^4 \delta} \left[2 + k^2 - 3k^4 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k^2 (3k^2 + 8) \lg k + \frac{4k^2}{k^2 - 1} \lg^2 k \right] \right\}, \\ \delta &= \frac{1}{k^2} (1 - k^2)^2 - 4 \lg^2 k. \end{aligned} \right\} \quad (28,15)$$

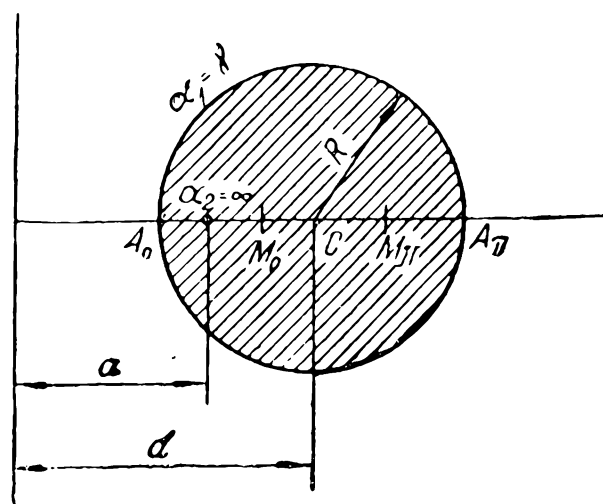
Полученные результаты показывают, что при передвижении внутреннего отверстия от центрального положения к краю, изгибающие моменты возрастают в точках $\beta = \pi$ („широкая“ часть эксцентрического кольца) и убывают в точках $\beta = 0$ („узкая“ часть).

Таблица 14

| x | $k = 4$ | $k = 10$ |
|------------|--------------------|--------------------|
| $x_1(\pi)$ | 0,0637 (0,0520) | 0,0710 (0,0559) |
| $x_2(\pi)$ | 0,128 (0,0823) | 0,187 (0,145) |
| $x_2(0)$ | 0,0280 (0,0823) | 0,124 (0,145) |
| $x_1(0)$ | 0,0199 (0,0520) | 0,0530 (0,0559) |

§ 29. Равномерно нагруженная круглая плита с закрепленной внутренней точкой

Исследуем теперь предельный случай $\alpha_2 = \infty$, соответствующий равномерно нагруженной круглой плите с закрепленным краем, содержащей закрепленную точку (фиг. 40).



Фиг. 40.

Полагая $\alpha_1 = \gamma$ и переходя в (27,16) — (27,20) к пределу

при $\alpha_2 \rightarrow \infty$, получим при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \psi_n(\alpha_2) &= \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \psi'_n(\alpha_2) = 0; & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{a1}}{D} &= -\frac{n-1}{2} e^{-(n-3)\gamma}, \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{a1}}{D} &= -\frac{1}{2} e^{-(n-3)\gamma}, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{a2}}{D} &= \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{a2}}{D} = 0; \\ & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{b1}}{D} = -\frac{n+1}{2} e^{-(n-1)\gamma}, & & \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{b1}}{D} &= -\frac{1}{2} e^{-(n-1)\gamma}, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{b2}}{D} &= \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{b2}}{D} = 0; \\ & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{c1}}{D} = \frac{n-1}{2} e^{-(n-3)\gamma}, & & \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{c1}}{D} &= \frac{1}{2} e^{-(n-3)\gamma}, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{c2}}{D} &= \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{c2}}{D} = 0; \\ & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{d1}}{D} = \frac{n+1}{2} e^{-(n-1)\gamma}, & & \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{d1}}{D} &= \frac{1}{2} e^{-(n-1)\gamma}, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{d2}}{D} &= \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{d2}}{D} = 0. \end{aligned}$$

С учетом полученных соотношений имеем после выкладок:

$$\varphi_n(\alpha) = (-1)^n \operatorname{sh}(\alpha - 2\gamma) \frac{e^{-n\alpha}}{\operatorname{sh}^2 \gamma}, \quad (n \geq 2) \quad (29,1)$$

причем, как показывает непосредственная проверка, полученное равенство справедливо и для случая $n = 1$.

При $n = 0$ имеем из (27,23):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{a1}}{D_0^*} &= (\gamma - 1) e^\gamma, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{a1}}{D_0^*} &= \gamma e^\gamma; \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{b1}}{D_0^*} &= e^\gamma, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{b1}}{D_0^*} &= e^\gamma; \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{c1}}{D_0^*} &= (1 - \gamma) e^\gamma, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{c1}}{D_0^*} &= -\gamma e^\gamma; \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{d1}}{D_0^*} &= -e^\gamma, & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{d1}}{D_0^*} &= -e^\gamma; \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{a2}}{D_0^*} &= \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{a2}}{D_0^*} = \dots = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta'_{d2}}{D_0^*} = 0, \end{aligned}$$

или, после преобразований

$$\varphi_0(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{2 \operatorname{sh}^2 \gamma} [\alpha - \gamma - e^{\gamma} \operatorname{sh} \gamma]. \quad (29,2)$$

Подсчитаем сумму ряда

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\alpha) \cos n\beta = \frac{\operatorname{sh}(\alpha - 2\gamma)}{\operatorname{sh}^2 \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} \cos n\beta.$$

Применяя (28,4), получаем:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\alpha - 2\gamma)}{\operatorname{sh}^2 \gamma} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - 1 \right). \quad (29,3)$$

Теперь по формуле (28,2) получаем приведенный прогиб:

$$u(\alpha, \beta) = \frac{q\alpha^4}{16(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + 2\varphi_0(\alpha) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\operatorname{sh}(\alpha - 2\gamma)}{\operatorname{sh}^2 \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\alpha) \cos n\beta \right]$$

или

$$u(\alpha, \beta) = \frac{qR^4}{16(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ \begin{aligned} & e^{-\alpha}(\alpha - \gamma) + \\ & + \frac{1}{2} e^{\alpha} (e^{-2\alpha} - e^{-2\gamma}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2(\alpha - \gamma) - 1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \end{aligned} \right\}, \quad (29,4)$$

$$R = \alpha / \operatorname{sh} \gamma.$$

Таким образом, в этом случае решение дается в конечном виде.

Изгибающий момент на контуре, согласно (27,25), будет:

$$\chi(\beta) = \frac{M}{qR^2} \Big|_{\alpha=\gamma} = \frac{1}{8} [1 - e^{-\gamma} (\operatorname{ch} \gamma + \cos \beta)]. \quad (29,5)$$

При $\gamma \rightarrow \infty$ (закрепленная точка стремится к центру круга) $\chi(\beta) \rightarrow 1/16$, как и должно быть, ибо для круглой плиты с закрепленным центром решение в полярных координатах имеет вид:

$$u = \frac{qr^2}{64} \left(r^2 - R^2 + 2R^2 \lg \frac{R}{r} \right) \quad \text{и} \quad \chi = \frac{M(R)}{qR^2} = \frac{1}{16}.$$

При $\gamma \rightarrow 0$ ($a \rightarrow 0$, R — конечен) $\kappa(\pi) \rightarrow \frac{1}{8}$, как и должно быть, так как в этом случае закрепленная точка попадает на контур плиты. [Решение будет $u = \frac{q}{64}(R^2 - r^2)^2$ и $\kappa = 1/8$].

§ 30. Изгиб эксцентрического кольца сосредоточенной силой¹

Пусть внешняя нагрузка $q(\alpha, \beta)$, действующая на плиту в виде эксцентрического кольца, представляет собой силу P , сосредоточенную в точке (α_0, β_0) .

Нагрузка $q(\alpha, \beta)$ будет:

$$q(\alpha, \beta) = \begin{cases} P g^2 / 4 \varepsilon^2 & \text{при } \alpha_0 - \varepsilon < \alpha < \alpha_0 + \varepsilon, \\ & \beta_0 - \varepsilon < \beta < \beta_0 + \varepsilon, \\ 0 & \text{при прочих } \alpha \text{ и } \beta, \end{cases} \quad (30,1)$$

причем $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для коэффициентов $p_n^c(\alpha)$ и $p_n^s(\alpha)$ [см. (27,4)] будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} p_n^c(\alpha) &= \frac{Pa}{2\pi\varepsilon} \frac{\cos n\beta_0}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0}, & p_n^s(\alpha) &= \frac{Pa}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\sin n\beta_0}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0} \\ \text{при } \alpha_0 - \varepsilon < \alpha < \alpha_0 + \varepsilon; \\ p_n^c(\alpha) &= p_n^s(\alpha) = 0 & \text{при прочих } \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (30,2)$$

Частные решения $\Phi_n^c(\alpha)$ и $\Phi_n^s(\alpha)$ неоднородного уравнения (27,5) в этом случае будут (при $\alpha \geq \alpha_0$):²

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n^c(\alpha) &= \frac{Pa \cos n\beta_0}{4\pi n(n^2-1)} \cdot \frac{K_n(\alpha, \alpha_0)}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0}, & (n \geq 2), \\ \Phi_n^s(\alpha) &= \frac{Pa \sin n\beta_0}{4\pi n(n^2-1)} \cdot \frac{K_n(\alpha, \alpha_0)}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \\ \Phi_0^c(\alpha) &= \frac{Pa}{4\pi} \cdot \frac{K_0(\alpha, \alpha_0)}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0}, & \Phi_0^s(\alpha) = 0, \\ \Phi_1^c(\alpha) &= \frac{Pa}{4\pi} \cdot \frac{K_1(\alpha, \alpha_0)}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \cos \beta_0, \\ \Phi_1^s(\alpha) &= \frac{Pa}{4\pi} \cdot \frac{K_1(\alpha, \alpha_0)}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \sin \beta_0. \end{aligned} \right\} \quad (30,3)$$

¹ Эта задача была решена Н. В. Кудрявцевым [4] способом, несколько отличающимся от нашего.

² В (27,9) и (27,10) выбираем $\bar{\alpha} = \alpha_1$.

При $\alpha \leq \alpha_0$ все частные решения суть тождественные нули.

Таким образом, приведенный прогиб в этом случае дается окончательной формулой:

$$u(\alpha, \beta) = \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \left\{ \varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) \times \right. \\ \left. \times \cos(\beta - \beta_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(\alpha)}{n(n^2 - 1)} \cos n(\beta - \beta_0) \right\}. \quad (30,4)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(\alpha) &= K_n(\alpha, \alpha_0) + A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + \\ &+ B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha + \\ &+ D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha, \\ \varphi_0(\alpha) &= K_0(\alpha, \alpha_0) + A_0 \operatorname{ch} \alpha + B_0 \alpha \operatorname{ch} \alpha + \\ &+ C_0 \operatorname{sh} \alpha + D_0 \alpha \operatorname{sh} \alpha, \\ \varphi_1(\alpha) &= K_1(\alpha, \alpha_0) + A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha + \\ &+ D_1 \alpha, \end{aligned} \right\}, \quad (30,5)$$

причем в равенствах (30,5) и им подобных первые члены справа [$K_n(\alpha, \alpha_0)$] суть тождественные нули при $\alpha \leq \alpha_0$, что в дальнейшем оговариваться не будет.

При закрепленных краях коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n даются формулами (27,16) — (27,20), (27,23) — (27,24), если вместо функций $\Phi_n(\alpha_2)$ и $\Phi'_n(\alpha_2)$ подставить $K_n(\alpha, \alpha_0)$ и $K'_n(\alpha, \alpha_0)$, а вместо $\Phi_n(\alpha_1)$ и $\Phi'_n(\alpha_1)$ — нули.

Решение такой задачи дает функцию Грина для изгиба эксцентрического кольца с закрепленным контуром.

Общее решение задачи, ввиду его громоздкости, мы здесь приводить не будем,¹ а обратимся сразу к предельному случаю $\alpha_2 = \infty$.

§ 31. Круглая плита, содержащая закрепленную точку и нагруженная сосредоточенной силой

Как уже указывалось в § 29, при $\alpha_2 = \infty$ внутреннее отверстие стягивается в точку, и мы имеем дело с круглой плитой, содержащей закрепленную точку.

¹ Даже в случае концентрического кольца оно имеет достаточно сложный вид. См., например, [23].

Если край плиты при этом закреплен, то, заменяя в (27,16) — (27,20), (27,23) — (27,24) $\Phi_n(\alpha_2)$ и $\Phi'_n(\alpha_2)$ на $K_n(\alpha_2, \alpha_0)$ и $K'_n(\alpha_2, \alpha_0)$ и полагая $\Phi_n(\alpha_1) = \Phi'_n(\alpha_1) = 0$, получим в пределе при $\alpha_2 \rightarrow \infty$ ($\alpha_1 = \gamma$):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{\Delta_{a_2} K_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} + \frac{\Delta'_{a_2} K'_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} \right] &= \\ &= \frac{n-1}{2} e^{n(2\gamma-\alpha_0)} [(n+1) e^{\alpha_0} - g_n e^{-\alpha_0-(n-1)\gamma}], \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{\Delta_{b_2} K_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} + \frac{\Delta'_{b_2} K'_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} \right] &= \\ &= \frac{n+1}{2} e^{n(2\gamma-\alpha_0)} [(n-1) e^{-\alpha_0} - h_n e^{+\alpha_0-(n+1)\gamma}], \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{\Delta_{c_2} K_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} + \frac{\Delta'_{c_2} K'_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} \right] &= \\ &= \frac{n-1}{2} e^{n(2\gamma-\alpha_0)} [(n+1) e^{\alpha_0} - p_n e^{-\alpha_0-(n-1)\gamma}], \\ \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{\Delta_{d_2} K_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} + \frac{\Delta'_{d_2} K'_n(\alpha_2, \alpha_0)}{D} \right] &= \\ &= \frac{n+1}{2} e^{n(2\gamma-\alpha_0)} [(n-1) e^{-\alpha_0} - q_n e^{+\alpha_0-(n+1)\gamma}]. \end{aligned} \right\} (31,1)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} g_n &= (n+1) \operatorname{ch}(n+1)\gamma + (n-1) \operatorname{sh}(n+1)\gamma, \\ h_n &= (n+1) \operatorname{sh}(n-1)\gamma + (n-1) \operatorname{ch}(n-1)\gamma, \\ p_n &= (n-1) \operatorname{ch}(n+1)\gamma + (n+1) \operatorname{sh}(n+1)\gamma, \\ q_n &= (n-1) \operatorname{sh}(n-1)\gamma + (n+1) \operatorname{ch}(n-1)\gamma. \end{aligned} \right\} (31,2)$$

После вычисления постоянных A_n , B_n , C_n и D_n , получим для функции $\varphi_n(\alpha)$ при $n \geq 2$ выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\alpha) &= K_n(\alpha, \alpha_0) - \frac{1}{2} e^{n(2\gamma-\alpha_0)} \{ e^{-n\gamma} [(n-1) \times \\ &\times (g_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha - p_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha) e^{\gamma-\alpha_0} + \\ &+ (n+1) (h_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha - q_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha)] - \\ &- (n^2-1) e^{-n\alpha} [e^{\alpha_0-\alpha} + e^{-(\alpha_0-\alpha)}] \}. \end{aligned} \quad (31,3)$$

Продельвая аналогичные выкладки для случаев $n = 0$ и $n = 1$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\alpha) &= e^{-\alpha_0} \{ (\gamma - \alpha) (\alpha_0 + 1 - \gamma) e^{2\gamma - \alpha} + \\ &+ e^{\gamma - \alpha} \operatorname{sh} \gamma (\alpha - \alpha_0 + 1) + \operatorname{sh} \alpha (1 + \alpha_0 - \alpha) \}, \\ \varphi_1(\alpha) &= \alpha - \gamma + \frac{1}{2} e^{2\gamma} \{ e^{-2\alpha} - e^{-2\gamma} + \\ &+ e^{-2\alpha_0} [1 - \operatorname{ch} 2(\gamma - \alpha)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (31,4)$$

Выражение (31,3) для $\varphi_n(\alpha)$ при $\alpha \leq \alpha_0$ можно привести к удобному для суммирования виду:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\alpha) &= e^{-n\alpha_0} \left\{ (n^2 - 1) \operatorname{ch} (\alpha_0 - \alpha) e^{n(2\gamma - \alpha)} - \right. \\ &- \frac{1}{2} (n - 1) e^{-\alpha_0} [e^{(n+1)\alpha} + ne^{(n+1)(2\gamma - \alpha)}] + \\ &+ \left. \frac{1}{2} (n + 1) e^{\alpha_0} [e^{(n-1)\alpha} - ne^{(n-1)(2\gamma - \alpha)}] \right\}. \end{aligned} \quad (31,5)$$

Вычисляя сумму

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)} \varphi_n(\alpha) \cos n(\beta - \beta_0)$$

при помощи соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \frac{\cos ny}{n} = \frac{1}{2} [x - \lg 2 - \lg (\operatorname{ch} \alpha + \cos y)], \quad (31,6)$$

подставляя ее в (30,4) и учитывая еще (31,4), после выкладок получим для приведенного прогиба круглой плиты с закрепленным краем, содержащей закрепленную точку и нагруженной сосредоточенной силой P в точке (α_0, β_0) , выражение:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \left\{ \frac{1}{2} [\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) - \right. \\ &- \left. \cos (\beta - \beta_0)] \lg \frac{\operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) - \cos (\beta - \beta_0)}{\operatorname{ch} (\alpha + \alpha_0 - 2\gamma) - \cos (\beta - \beta_0)} + \right. \\ &+ (\alpha - \gamma) \operatorname{ch} (\alpha - \alpha_0) + e^{-(\alpha + \alpha_0)} \times \\ &\times \left. \left[(\gamma - \alpha) (\alpha_0 - \gamma + 1) e^{2\gamma} + \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_0) (e^{2\gamma} - e^{2\alpha}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31,7)$$

Непосредственной проверкой можно показать, что такое же выражение получится при $\alpha > \alpha_0$.

Для прогиба под силой получим:

$$u_0 = u(\alpha_0, \beta_0) = \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{\alpha_0 - \gamma}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)^2} [1 - (\alpha_0 - \gamma + 1) e^{2(\gamma - \alpha_0)}]. \quad (31,8)$$

Если сила приложена в точке оси симметрии плиты (например, в точке M_π линии $\beta = \pm \pi$ (фиг. 40), то прогиб под силой дается формулой:¹

$$u(\alpha_0, \pi) = \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{\alpha_0 - \gamma}{(\operatorname{ch} \alpha_0 - 1)^2} [1 - (\alpha_0 - \gamma + 1) e^{2(\gamma - \alpha_0)}]. \quad (31,9)$$

Если же сила приложена в точке M_0 ($\beta_0 = 0$), то

$$u(\alpha_0, 0) = \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{\alpha_0 - \gamma}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + 1)^2} [1 - (\alpha_0 - \gamma + 1) e^{2(\gamma - \alpha_0)}]. \quad (31,10)$$

Подсчитаем изгибающие моменты на контуре плиты.

Дифференцируя (31,7) дважды по переменной α и применяя (27,25), будем иметь:

$$\begin{aligned} -\frac{M(\beta)}{P} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} & \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha_0 - \gamma)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 - \gamma) - \cos(\beta - \beta_0)} + \right. \\ & \left. + (\alpha_0 - \gamma) e^{\gamma - \alpha_0} + \operatorname{sh}(\gamma - \alpha_0) \right\}. \quad (31,11) \end{aligned}$$

При $\beta_0 = \pi$ моменты в точках A_π и A_0 будут:

$$\begin{aligned} -\frac{M(\pi)}{P} \Big|_{\beta_0 = \pi} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma - 1}{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha_0 - \gamma)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 - \gamma) - 1} + \right. \\ & \left. + (\alpha_0 - \gamma) e^{\gamma - \alpha_0} + \operatorname{sh}(\gamma - \alpha_0) \right\}, \\ -\frac{M(0)}{P} \Big|_{\beta_0 = \pi} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma + 1}{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha_0 - \gamma)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 - \gamma) + 1} + \right. \\ & \left. + (\alpha_0 - \gamma) e^{\gamma - \alpha_0} + \operatorname{sh}(\gamma - \alpha_0) \right\}. \end{aligned} \quad (31,12)$$

¹ В таком виде эта формула, по существу, совпадает с формулой Н. В. Кудрявцева (см. [4], формула 14).

При $\beta_0 = 0$ моменты в тех же точках таковы:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M(\pi)}{P} \Big|_{\beta_0=0} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{ch} \gamma - 1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha_0 - \gamma)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 - \gamma) + 1} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_0 - \gamma) e^{\gamma - \alpha_0} + \operatorname{sh}(\gamma - \alpha_0) \right\}, \\ -\frac{M(0)}{P} \Big|_{\beta_0=0} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{ch} \gamma + 1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha_0 - \gamma)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 - \gamma) - 1} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_0 - \gamma) e^{\gamma - \alpha_0} + \operatorname{sh}(\gamma - \alpha_0) \right\}. \end{aligned} \right\} (31,13)$$

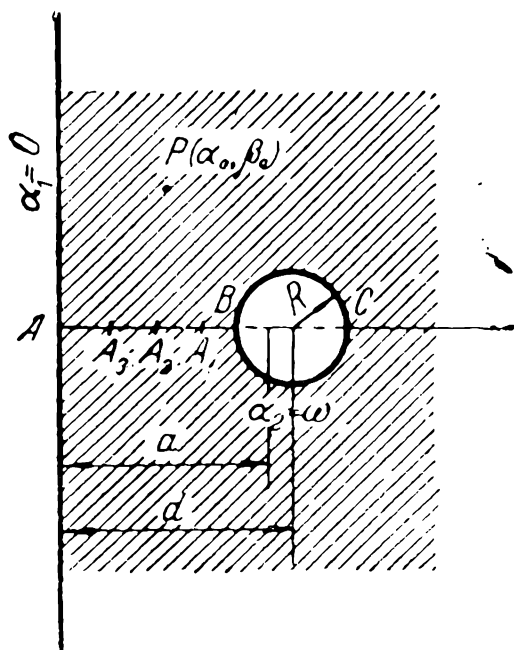
§ 32. Влияние закрепленного круглого отверстия на напряжения в изогнутой полуплоскости с закрепленным краем

Если считать $\alpha_1 = 0$, то рассматриваемое эксцентрическое кольцо вырождается в полуплоскость с круглым отверстием, на обводе которого $\alpha = \alpha_2 = \omega$, нагруженную сосредоточенной силой P в точке (α_0, β_0) — фиг. 41.

Постоянные A_n, B_n, C_n и D_n получаются при этом из формул (27,16)—(27,20), (27,23)—(27,24) при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \omega$ и соответствующей заменой функций Φ_n и Φ'_n на K_n и K'_n (см. стр. 155).

Приводим окончательное выражение для функции $\varphi_n(\alpha)$, входящей в основную формулу (30,4):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(\alpha) &= K_n(\alpha, \alpha_0) + \frac{1}{D_n} [K_n(\omega, \alpha_0) H_n(\alpha) + \\ &\quad + K'_n(\omega, \alpha_0) G_n(\alpha)], \\ H_n(\alpha) &= \frac{1}{n^2 - 1} [K'_n(\omega, 0) K'_n(\alpha, 0) - \\ &\quad - K''_n(\omega, 0) K_n(\alpha, 0)], \\ G_n(\alpha) &= \frac{1}{n^2 - 1} [K'_n(\omega, 0) K_n(\alpha, 0) - K_n(\omega, 0) K'_n(\alpha, 0)], \\ K''_n(\alpha, t) &= \frac{\partial^2 K_n(\alpha, t)}{\partial \alpha^2} = (n^2 - 1) [(n + 1) \times \\ &\quad \times \operatorname{sh}(n + 1)(\alpha - t) - (n - 1) \operatorname{sh}(n - 1)(\alpha - t)], \\ D_n &= 4 [n^2 \operatorname{sh}^2 \omega - \operatorname{sh}^2 n\omega]. \end{aligned} \right\} (32,1)$$



Фиг. 41.

Ряды, дающие прогиб такой плиты, весьма сложны. Поэтому перейдем сразу к вычислению изгибающих моментов, для чего воспользуемся формулами (28,8) — (28,9), где надо положить:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \omega, \\ \psi_n(\alpha_1) &= \psi_n'(\alpha_1) = 0, \\ \psi_n(\alpha_2) &= K_n(\omega, \alpha_0), \\ \psi_n'(\alpha_2) &= K_n'(\omega, \alpha_0). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, на прямолинейном краю

$$\left. \begin{aligned} -M_0 &= \frac{P}{4\pi} \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \left[\varphi_0''(0) + \varphi_1''(0) \cos(\beta - \beta_0) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n''(0)}{n(n^2 - 1)} \cos n(\beta - \beta_0) \right], \\ D_n \varphi_n''(0) &= \mu_n K_n(\omega, \alpha_0) - \mu_n' K_n'(\omega, \alpha_0), \end{aligned} \right\} \quad (32,2)$$

а на контуре отверстия:

$$\left. \begin{aligned} M_\omega &= \frac{P}{4\pi} \frac{\operatorname{ch} \omega + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \left[\varphi_0''(\omega) + \varphi_1''(\omega) \cos(\beta - \beta_0) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n''(\omega)}{n(n^2 - 1)} \cos n(\beta - \beta_0) \right], \\ D_n \varphi_n''(\omega) &= K_n''(\omega, \alpha_0) \cdot D_n + \lambda_n K_n(\omega, \alpha_0) + \\ &\quad + \lambda_n' K_n'(\omega, \alpha_0). \end{aligned} \right\} \quad (32,3)$$

Вводя обозначения:¹

$$x_0(\beta) = -\frac{M_0}{P/\pi}, \quad x_\omega(\beta) = \frac{M_\omega}{P/\pi}, \quad (32,4)$$

¹ Момент мы относим к максимальному моменту на краю полу-плоскости без отверстия, равному P/π [см. (20,13)].

после выкладок имеем:

$$\left. \begin{aligned} \chi_0(\beta) &= 4 \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{D_n} \cos n(\beta - \beta_0), \\ P_n &= n \operatorname{sh} n\alpha_0 \operatorname{sh} \omega \operatorname{sh}(\alpha_0 - \omega) - \\ &\quad - \operatorname{sh} \alpha_0 \operatorname{sh} n\omega \operatorname{sh} n(\omega - \alpha_0) \quad (n \geq 2), \\ P_0 &= \frac{1}{8} [\omega(\alpha_0 - \omega) \operatorname{sh} \alpha_0 + \alpha_0 \operatorname{sh} \omega \operatorname{sh}(\omega - \alpha_0)], \\ D_0 &= \operatorname{sh}^2 \omega - \omega^2, \\ P_1 &= \frac{1}{8} \{ \operatorname{sh} \omega [\operatorname{sh}(\omega - \alpha_0) \operatorname{ch}(\omega - \alpha_0) - \\ &\quad - (\omega - \alpha_0)] - \operatorname{sh}^2(\omega - \alpha_0) (\operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega - \omega) \}, \\ D_1 &= \operatorname{sh} \omega (\operatorname{sh} \omega - \omega \operatorname{ch} \omega). \end{aligned} \right\} (32,5)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_\omega(\beta) &= 4 \frac{\operatorname{ch} \omega + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{D_n} \cos n(\beta - \beta_0), \\ Q_n &= n \operatorname{sh} n(\omega - \alpha_0) \operatorname{sh} \omega \operatorname{sh} \alpha_0 - \\ &\quad - \operatorname{sh}(\omega - \alpha_0) \operatorname{sh} n\omega \operatorname{sh} n\alpha_0, \\ Q_0 &= \frac{1}{8} [(\omega - \alpha_0) \operatorname{sh} \omega \operatorname{sh} \alpha_0 - \alpha_0 \omega \operatorname{sh}(\omega - \alpha_0)], \\ Q_1 &= \frac{1}{8} [\operatorname{sh}^2 \omega (\operatorname{sh} \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 - \alpha_0) - \\ &\quad - \operatorname{sh}^2 \alpha_0 (\operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega - \omega)]. \end{aligned} \right\} (32,6)$$

Если сила P приложена по линии $\beta = 0$, т. е. $\beta_0 = 0$, то максимальный изгибающий момент имеет место в точках A и B ($\beta = 0$) соответственно.

Расчеты коэффициентов $\chi_0(0)$ и $\chi_\omega(0)$ производились по формулам:

$$\chi_0(0) = \frac{8}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{D_n}, \quad \chi_\omega(0) = 4 \frac{\operatorname{ch} \omega + 1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{D_n}, \quad (32,7)$$

причем было принято $b = 2R$ (т. е. $\operatorname{ch} \omega = 2$), а сила P считалась приложенной в точках A_1, A_2, A_3 ($\alpha_0 = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), делящих отрезок AB на четыре равные части.

Результаты вычислений представлены табл. 15,¹ из рассмотрения которой можно сделать вывод, что изгибающие моменты на контуре во всех случаях меньше, чем изгибающий момент на краю полуплоскости без отверстия.

Таблица 15

| α_0 | $\chi_0(0)$ | $\chi_\omega(0)$ |
|--------------------|-------------|------------------|
| ∞ | 0 | 1 |
| $\alpha_1 = 0,927$ | 0,185 | 0,899 |
| $\alpha_2 = 0,594$ | 0,525 | 0,605 |
| $\alpha_3 = 0,291$ | 0,760 | 0,211 |
| 0 | 1 | 0 |

Выведем еще формулы для изгибающих моментов в том случае, когда сила P приложена по линии $\beta = \pm \pi$, т. е. $\beta_0 = \pm \pi$.

Изгибающий момент в точке C , являющийся при этом максимальным моментом на контуре отверстия, выражается так:

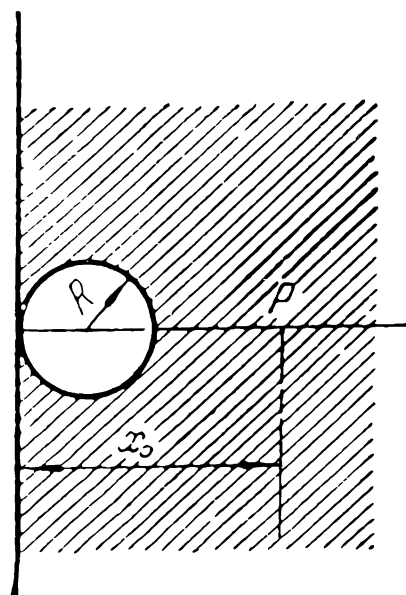
$$M_c = \frac{P}{4\pi} \frac{\operatorname{ch} \omega - 1}{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \left[\varphi_0''(\omega) + \varphi_1''(\omega) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n''(\omega)}{n(n^2-1)} \right]$$

или

$$\chi_c = \frac{M_c}{P/\pi} = 4 \frac{\operatorname{ch} \omega - 1}{\operatorname{ch} \alpha_0 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{D_n}. \quad (32,8)$$

Интерес представляет случай $\omega \rightarrow 0$ и одновременно $\alpha \rightarrow 0$, так что $R = a/\operatorname{sh} \omega$ остается конечной величиной. При этом получается плита в виде полуплоскости, содержащей круглое отверстие, касательное к краю (фиг. 42).

Чтобы совершить предельный переход в формуле (32,8), положим, как это обычно делают, $n\omega = \theta$, $\omega = d\theta$, после чего ряд перейдет в интеграл.



Фиг. 42.

¹ Можно показать, что при стремлении точки приложения силы к точке контура $\alpha = 0$ момент в последней точке стремится к пределу P/π ; момент же на краю $\alpha = \omega$ при этом исчезает. Обратное, если точка приложения силы стремится к точке контура $\alpha = \omega$, то в последней момент стремится к P/π , а момент в точке $\alpha = 0$ при этом исчезает, что и отражено в табл. 15.

Заметим еще, что, так как

$$x_0 = a \frac{\text{sh } \alpha_0}{\text{ch } \alpha_0 - 1} \approx \frac{2a}{\alpha_0} \text{ и } a \approx \omega R,$$

то $\alpha_0 \approx \frac{2R}{x_0} \omega$.

Теперь имеем из (32,8):

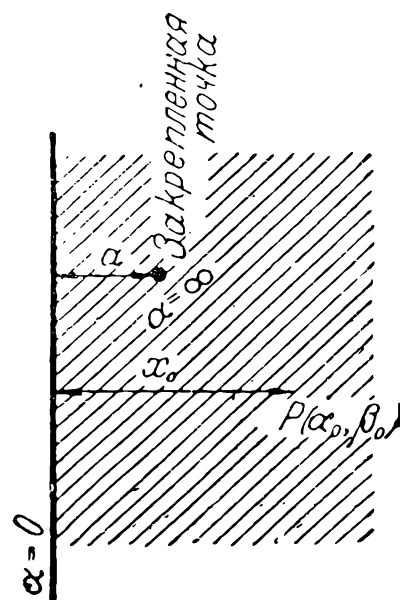
$$\chi_{e \omega=0} \Big| \approx \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\omega\alpha_0 \text{sh } n\omega \left(1 - \frac{\alpha_0}{\omega}\right) - \omega \left(1 - \frac{\alpha_0}{\omega}\right) \text{sh } n\omega \text{sh } n\alpha_0}{n^2\omega^2 - \text{sh}^2 n\omega},$$

или

$$\chi_{e \omega=0} \Big| = \frac{x_0}{2R} \int_0^{\infty} \left[\theta \text{sh} \left(\frac{2R}{x_0} - 1 \right) \theta - \left(1 - \frac{x_0}{2R} \right) \times \right. \\ \left. \times \text{sh } \theta \text{sh} \frac{2R\theta}{x_0} \right] \frac{d\theta}{\text{sh}^2 \theta - \theta^2}. \quad (32,9)$$

Эта формула совпадает с формулой (21,7) (в ней $x_0/2R$ заменено на $y_0/2R$), как и должно быть, ибо рассматривалась в точности такая же задача.

Рассматриваемый случай полуплоскости с отверстием, касательным к краю, является, следовательно, предельным как для эксцентрического кольца, вырожденного в полуплоскость с круглым отверстием, так и для областей луночного типа (полуплоскость с сегментной выемкой на краю), рассмотренных в гл. IV. Аналогичное обстоятельство будет иметь место и в плоских задачах теории упругости (см. ниже, § 40 и 45).



Фиг. 43.

Рассмотрим еще предельный случай $\omega = \infty$, соответствующий изгибу плиты в виде полуплоскости, содержащей закрепленную точку (фиг. 43).

При этом ряды, входящие в решение предыдущего параграфа, суммируются.

Приводим окончательную формулу для приведенного прогиба.¹

$$u(\alpha, \beta) = \frac{Pa^2}{4\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)] \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)}{\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)} + \right. \\ \left. + \alpha e^{-\alpha} \operatorname{sh} \alpha_0 + \alpha_0 e^{-\alpha_0} \operatorname{sh} \alpha - \alpha \alpha_0 e^{-(\alpha + \alpha_0)} \right\}. \quad (32,10)$$

Дифференцируя это выражение дважды по переменной α и применяя формулу (27,25), или же полагая $\gamma = 0$ в формуле (31,11), получаем для изгибающего момента на закрепленном прямолинейном краю:

$$-\frac{M_0}{P} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta} \left\{ \alpha_0 e^{-\alpha_0} - \operatorname{sh} \alpha_0 + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos(\beta - \beta_0)} \right\}. \quad (32,11)$$

$M_0 \rightarrow \frac{P}{\pi}$ при $\alpha_0 \rightarrow 0$ ($\beta = \beta_0 = 0$), как и должно быть для полуплоскости без закрепленной точки.

§ 33. Полуплоскость с опертым краем, содержащая закрепленное круглое отверстие

Исследуем изгиб плиты в виде полуплоскости с опертым краем, содержащей закрепленное круглое отверстие ($\alpha = \omega$) и нагруженной сосредоточенной силой P в точке (α_0, β_0) .

Согласно (27,26), имеем граничные условия:

$$\varphi_n(0) = \varphi_n''(0) = \varphi_n(\omega) = \varphi_n'(\omega) = 0, \quad (33,1)$$

¹ Этот же результат получится, если положить $\gamma = 0$ в формуле (31,7).

из которых определяются постоянные A_n, B_n, C_n, D_n :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= B_n = 0; \\ C_n &= \frac{\Delta_c}{\Delta}, \quad D_n = \frac{\Delta_d}{\Delta}; \\ \Delta_c &= \operatorname{sh}(n-1)\omega \cdot K'_n(\omega, \alpha_0) - \\ &\quad - (n-1) \operatorname{ch}(n-1)\omega \cdot K_n(\omega, \alpha_0), \\ \Delta_d &= (n+1) \operatorname{ch}(n+1)\omega \cdot K_n(\omega, \alpha_0) - \\ &\quad - \operatorname{sh}(n+1)\omega \cdot K'_n(\omega, \alpha_0), \\ \Delta &= n \operatorname{sh} 2\omega - \operatorname{sh} 2n\omega. \end{aligned} \right\} \quad (33,2)$$

Вид определителя системы Δ показывает, что и в этом случае соответствующие ряды не суммируются.

Обратимся к предельному случаю $\omega = \infty$, соответствующему полуплоскости с опертым краем, содержащей зацепленную точку.

После перехода к пределу имеем:

$$\varphi_n(\alpha) = K_n(\alpha, \alpha_0) + e^{-n\alpha_0} [e^{\alpha_0} (n+1) \operatorname{sh}(n-1)\alpha - e^{-\alpha_0} (n-1) \operatorname{sh}(n+1)\alpha] \quad (33,3)$$

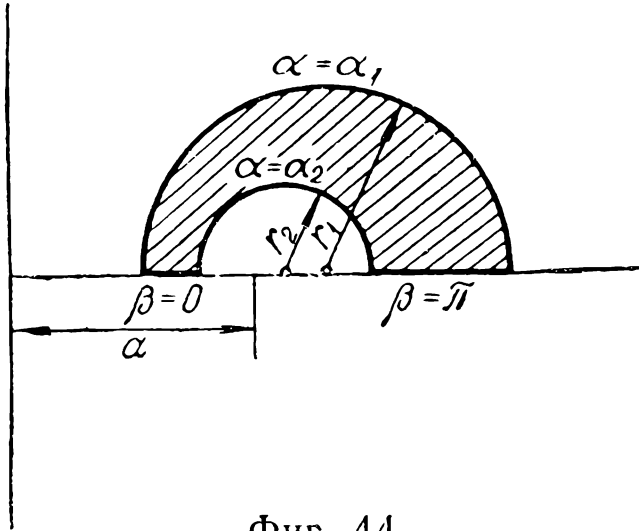
и после суммирования получаем окончательную формулу для приведенного прогиба:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \{ \alpha \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha_0 + \\ &\quad + \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha_0 + \frac{1}{2} [(\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)) \times \\ &\quad \times \lg 2(\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)) - (\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \\ &\quad - \cos(\beta - \beta_0)) \lg 2(\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0))] \}. \quad (33,4) \end{aligned}$$

§ 34. Некоторые случаи изгиба плиты, имеющей форму половины эксцентрического кольца

Рассмотрим плиту, имеющую форму половины эксцентрического кольца (фиг. 44).

Если считать прямолинейные края $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ свободно опертыми, то этим условиям можно сразу удовлетворить, если взять решение задачи в форме:



Фиг. 44.

$$gu(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha) \sin n\beta. \quad (34,1)$$

Применяя к этому выражению методику, изложенную в § 30, получим сразу решение, если внешняя нагрузка представляет собой силу P , сосредоточенную в точке (α_0, β_0) :

$$u(\alpha, \beta) = \frac{Pa^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left[\varphi_1(\alpha) \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(\alpha)}{n(n^2-1)} \sin n\beta \right], \quad (34,2)$$

$$\varphi_n(\alpha) = K_n(\alpha, \alpha_0) + A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha,$$

$$\varphi_1(\alpha) = K_1(\alpha, \alpha_0) + A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + B_1 + C_1 \operatorname{sh} 2\alpha + D_1 \alpha.$$

Это решение можно еще представить так:

$$u = u_- - u_+,$$

$$u_{\pm} = \frac{Pa^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \times \left[\varphi_1(\alpha) \cos(\beta \pm \beta_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(\alpha)}{n(n^2-1)} \cos n(\beta \pm \beta_0) \right]. \quad (34,3)$$

Отсюда видно, что это решение является разностью двух решений, первое из которых совпадает с решением для полного кольца, а второе получается из первого заменой параметра $\beta - \beta_0$ на $\beta + \beta_0$.

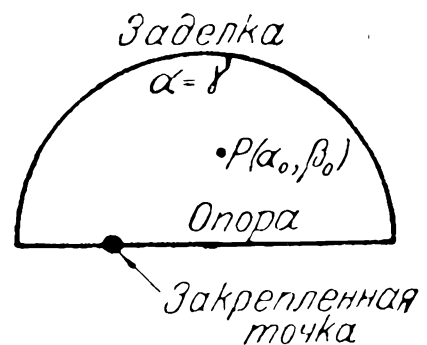
Таким образом, можно сразу написать решения для следующих случаев:

1°. Полукруг с закрепленной дугой и опертым диаметром, содержащим закрепленную точку (фиг. 45). Приведенный прогиб на основании (31,7) дается следующей формулой:

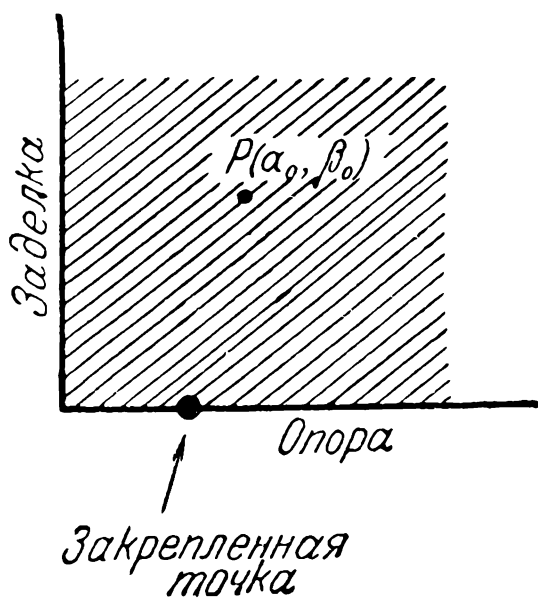
$$u(\alpha, \beta) = \frac{Pa^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)] \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)}{\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0 - 2\gamma) - \cos(\beta - \beta_0)} - [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta + \beta_0)] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta + \beta_0)}{\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0 - 2\gamma) - \cos(\beta + \beta_0)} \right\}. \quad (34,4)$$

2°. Полагая в предыдущем пункте $\gamma = 0$, получим решение задачи изгиба для плиты в виде четверти плоскости с одним закрепленным и одним опертым краем, причем последний содержит закрепленную точку (фиг. 46).

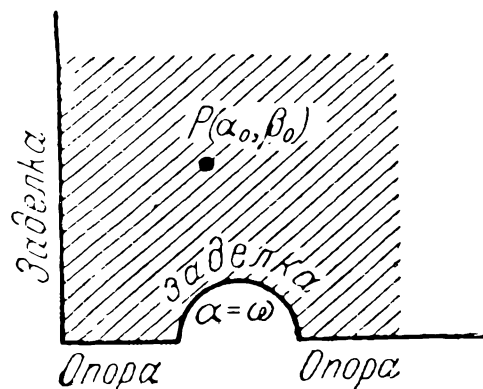
3°. Из решения, данного в § 32, можно получить решение задачи об изгибе плиты в виде четверти плоскости с одним закрепленным и одним опертым краем, содержащим закрепленную полукруглую выемку (фиг. 47). При $\omega = \infty$ получится решение предыдущего пункта.



Фиг. 45.



Фиг. 46.

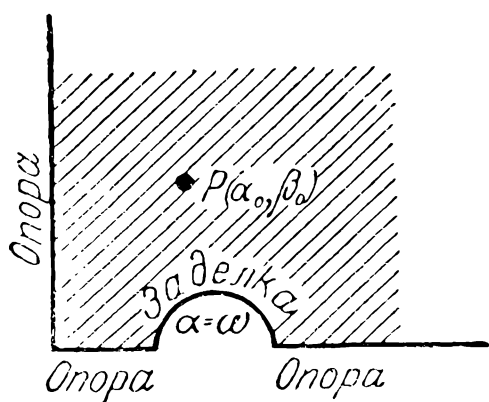


Фиг. 47.

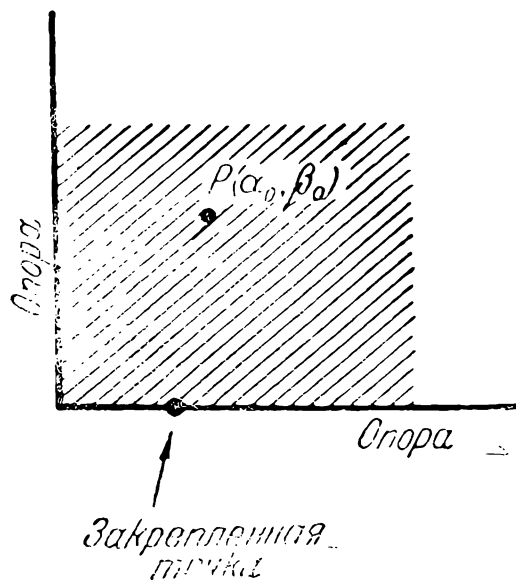
4°. Формулы § 33 дают возможность решить задачу об изгибе плиты в виде четверти плоскости с опертыми краями

и с закрепленной полукруглой выемкой на одном из краев (фиг. 48).

5°. Полагая $\omega = \infty$ в предыдущем случае, получим решение задачи изгиба для плиты, изображенной на фиг. 49.



Фиг. 48.



Фиг. 49.

Приведенный изгиб в этом случае дается, согласно (33,4), формулой:

$$u(\alpha, \beta) = \frac{Pa^2}{8\pi} \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} \left\{ [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)] \lg 2 [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)] - [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta + \beta_0)] \lg 2 [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta + \beta_0)] - [\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)] \lg 2 [\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)] + [\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \cos(\beta + \beta_0)] \lg 2 [\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \cos(\beta + \beta_0)] \right\}. \quad (34,5)$$

Г Л А В А VI

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВНЕШНОСТИ КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

§ 35. Видоизменение системы биполярных координат

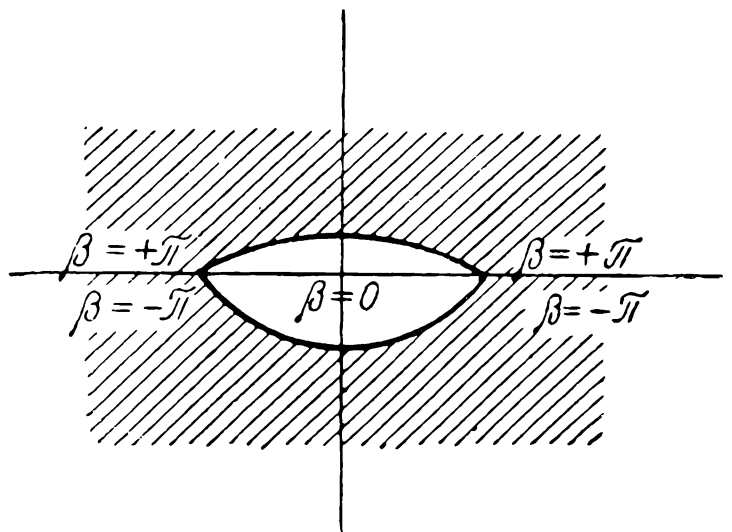
Ввиду того, что в настоящей главе мы будем иметь дело исключительно с внешними задачами, а именно, будут рассматриваться области, занимающие внешность круговой луночки, нам придется вводить биполярные координаты несколько иным способом, чем это делалось до сих пор.

В самом деле, координаты, введенные в § 1 при помощи конформного преобразования (1, 2), обладали тем свойством, что на отрезках $-\infty < x < -a$, $+a < x < +\infty$ оси ox координата β имела скачок, равный 2π , и пока мы имели

дело с внутренними задачами, этот разрез не попадал в рассматриваемую область. Теперь же этот разрез в рассматриваемую область попадает (см. фиг. 50).

Чтобы этого избежать, мы несколько видоизменим преобразование (1, 2), а именно, введем биполярные координаты при помощи соотношения:

$$x + iy = ai \operatorname{th} \frac{\alpha + i\beta}{2}. \quad (35,1)$$



Фиг. 50.

Разделяя вещественную и мнимую части, получим следующие связи между биполярными и прямоугольными координатами:

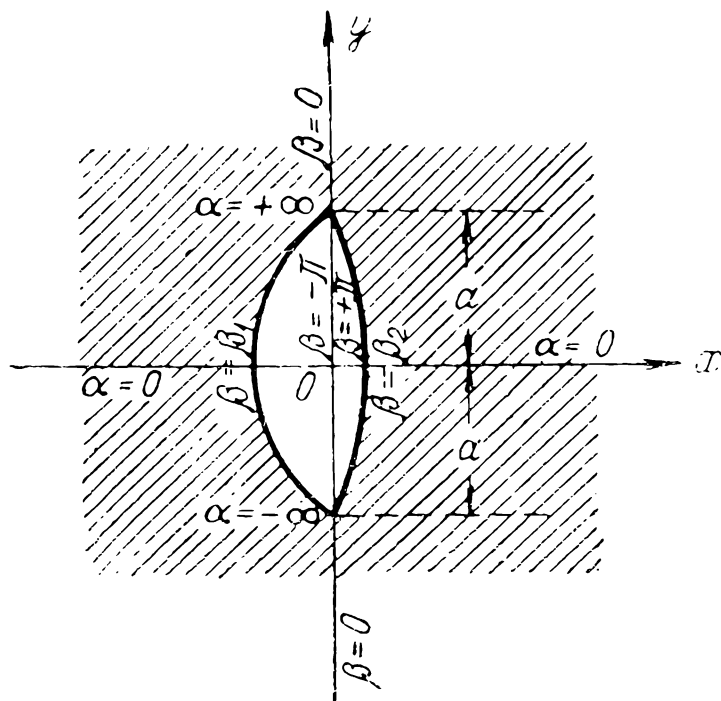
$$\frac{x}{a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}. \quad (35,2)$$

При этом коэффициент g , входящий в гармонический оператор (2,1), будет определяться формулой

$$g = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{a}, \quad (35,3)$$

а для полярного радиуса r будем иметь:

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}. \quad (35,4)$$



Фиг. 51.

$\beta = 0$, ось ox является линией $\alpha = 0$, точки $(0, \pm a)$ соответствуют $\alpha = \pm \infty$ (фиг. 51).

Бигармоническое уравнение (3,2) не изменяет своего вида, и все сказанное в § 3 про его интегрирование остается в силе. Формулы (2,3) заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta} &= -a \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha} &= a \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (35,5)$$

Бесконечно удаленная точка плоскости имеет при этом координаты $\alpha = \beta = 0$.

§ 36. Уравнения плоской задачи теории упругости в биполярных координатах

Будем решать плоскую задачу теории упругости в напряжениях, а именно, все три плоских напряжения σ_α , σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$

будем выражать через бигармоническую функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$.

Это можно сразу сделать, воспользовавшись известными формулами¹ для напряжений в криволинейных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= g \frac{\partial}{\partial \beta} \left(g \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) - g \frac{\partial g}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \\ \sigma_\beta &= g \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(g \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) - g \frac{\partial g}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= -g \frac{\partial^2 (g\Phi)}{\partial \alpha \partial \beta} + g\Phi \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \right\} (36,1)$$

Так как бигармонический оператор в биполярных координатах является, согласно (3,2), оператором над функцией $g\Phi$, то удобно соотношения (36,1) преобразовать к виду:

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g\Phi), \\ a\sigma_\beta &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (g\Phi), \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi). \end{aligned} \right\} (36,2)$$

Функция Φ является бигармонической, т. е. она удовлетворяет уравнению $\Delta^2 \Phi = 0$, или, согласно (3,2), уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\Phi) = 0. (36,3)$$

Уравнения (36,2) — (36,3) и будут служить в качестве основных уравнений плоской задачи теории упругости.

Выведем еще общие формулы для упругих смещений в биполярных координатах.

Воспользуемся связями между напряжениями и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= (\lambda + 2\mu) e_{\alpha\alpha} + \lambda e_{\beta\beta}, \\ \sigma_\beta &= (\lambda + 2\mu) e_{\beta\beta} + \lambda e_{\alpha\alpha}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= \mu e_{\alpha\beta}, \end{aligned} \right\} (36,4)$$

¹ См., например, [24], стр. 144.

а также выражениями деформаций через перемещения¹

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= g \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \frac{\partial g}{\partial \beta}, & e_{\beta\beta} &= g \frac{\partial v}{\partial \beta} - u \frac{\partial g}{\partial \alpha}, \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (gv) + \frac{\partial}{\partial \beta} (gu). \end{aligned} \right\} \quad (36,5)$$

Складывая и вычитая первые два уравнения (36,4) и используя (36,1), можно (36,4) преобразовать в три соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - 2(\lambda + \mu) \frac{u}{g} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - 2(\lambda + \mu) \frac{v}{g} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[g^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + 2\mu gu \right] - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[g^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + 2\mu gv \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[g^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + 2\mu gv \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[g^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + 2\mu gu \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36,6)$$

Для того чтобы отсюда выразить перемещения u и v через функцию напряжений Φ , введем функцию Ψ соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} &= \frac{2\mu}{g} v + \left(1 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} &= -\frac{2\mu}{g} u - \left(1 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (36,7)$$

Непосредственной подстановкой (36,7) в (36,6) можно проверить, что последние два уравнения (36,6) будут удовлетворены, если Ψ — бигармоническая функция.

Первое же из уравнений (36,6) дает связь между функцией Ψ и функцией напряжений Φ :

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Psi) = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] (g\Phi),$$

откуда имеем:

$$g\Psi = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] (g\Phi) d\alpha d\beta. \quad (36,8)$$

¹ См. [21], стр. 65. Здесь λ и μ — коэффициенты Ламе.

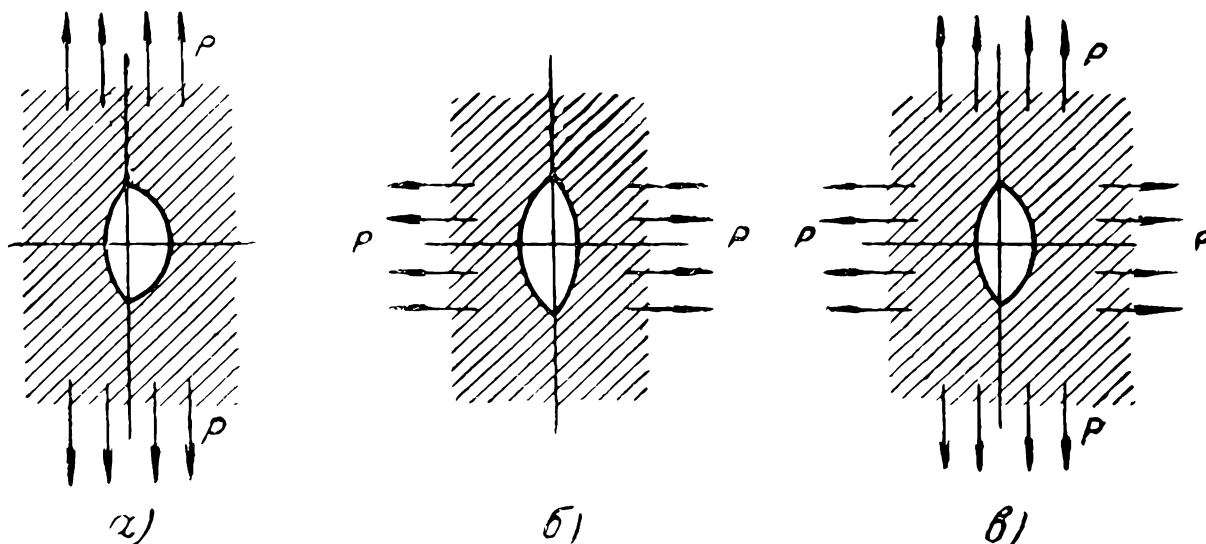
Согласно (36,7), оба перемещения u и v могут быть теперь выражены через введенную функцию Ψ и функцию напряжений Φ следующим образом:¹

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{g}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right], \\ v &= \frac{g}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (36,9)$$

Эти выражения будут использованы ниже при выяснении условий однозначности смещений (§ 41).

§ 37. Постановка задачи о растяжении бесконечной упругой плоскости, содержащей отверстие, имеющее форму круговой луночки

Рассмотрим бесконечную упругую плоскость, содержащую криволинейное отверстие, контур которого ограничен дугами двух пересекающихся окружностей (круговая луночка, фиг. 51).



Фиг. 52.

Наибольший практический интерес представляют задачи о растяжении упругой плоскости, содержащей отверстие указанной формы. В соответствии с этим, будем рассматривать внешние усилия, сводящиеся к равномерному растяжению p на бесконечности, причем растяжение может быть продольным (вдоль оси ou ; фиг. 52 а), поперечным (вдоль оси ox ; фиг. 52 б) и всесторонним (фиг. 52 в).

¹ Эти формулы получены Джеффери [2].

При этих условиях на контуре отверстия должны выполняться условия:

$$\sigma_{\beta} |_{\beta=\beta_i} = \tau_{\alpha\beta} |_{\beta=\beta_i} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (37,1)$$

которые и будут являться граничными условиями рассматриваемой задачи.

Функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$ будем представлять в виде суммы двух функций:

$$g\Phi = g\Phi_0 + apF, \quad (37,2)$$

где функция Φ_0 соответствует заданным напряжениям на бесконечности, а функция F должна снять усилия, возникающие от функции Φ_0 на контуре отверстия. Разумеется, функция F не должна изменять заданное напряженное состояние на бесконечности.

Положим

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = b \cos \beta + c \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \quad (37,3)$$

и проверим, что случаи a , b , v (фиг. 52) получаются при частных значениях: a) $b = 0$, $c = 1/2$; b) $b = 1$, $c = -1/2$ и v) $b = 1$, $c = 0$.

В самом деле, если $b = 0$, $c = 1/2$, то

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad \frac{\Phi_0}{a^2 p} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2},$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} p x^2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = p, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0,$$

что соответствует продольному растяжению¹ (случай a).

Если $b = 1$, $c = -1/2$, то

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \cos \beta - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha - (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)},$$

$$\Phi_0 = p \left(\frac{y^2}{2} - a^2 \right), \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = p, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0,$$

что соответствует поперечному растяжению (случай b).

¹ Термины „продольный“ и „поперечный“ носят здесь условный характер.

Наконец, при $b = 1$, $c = 0$ имеем:

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \cos \beta, \quad \frac{\Phi_0}{a^2p} = \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{r^2}{a^2} - 1 \right],$$

$$\Phi_0 = \frac{p}{2} (r^2 - a^2), \quad \sigma_x = \sigma_y = p, \quad \tau_{xy} = 0,$$

что дает случай ν — всестороннее растяжение.

Таким образом, формула (37,3) исчерпывает все три рассматриваемых случая.

Итак, задача о растяжении бесконечной плоскости с отверстием в виде круговой луночки сводится к нахождению функции $F(\alpha, \beta)$, удовлетворяющей уравнению (36,3) и исчезающей на бесконечности, т. е. при $\alpha = \beta = 0$. При этом должны выполняться граничные условия (37,1).

§ 38. Общее решение задачи о растяжении бесконечной плоскости с луночным отверстием

Если искать функцию $F(\alpha, \beta)$ в обычной форме (четность по α очевидна):

$$\int_0^{\infty} f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm;$$

$$f(\beta, m) = A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + \\ + C(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta, \quad (38,1)$$

то четыре функции $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ позволяют удовлетворить четырем граничным условиям (37,1). Однако, при этом останется невыполненным условие обращения в нуль функции $F(\alpha, \beta)$ на бесконечности. Поэтому к интегралу Фурье (38,1) добавляем еще особое решение типа $K(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$, получающееся из (2,11) умножением на g ; постоянная K и позволяет удовлетворить условию на бесконечности.¹

Кроме того, для дальнейшего будет удобно поставить требование

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (g\Phi) = 0. \quad (38,2)$$

¹ По поводу выбора этого особого решения см. еще стр. 198.

Замечая, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} = -2 \cos \beta$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm = 0,^1$$

положим окончательно:

$$F = (2K - b) \cos \beta + K (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \int_0^{\infty} f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm. \quad (38,3)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{g\Phi}{ap} &= 2K \cos \beta + C \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + K (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \times \\ &\times \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \int_0^{\infty} f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm = \frac{g\varphi_0}{ap} + \varphi, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{g\varphi_0}{ap} &= 2K \cos \beta + C \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \\ &+ K (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (38,4)$$

и

$$\varphi = \int_0^{\infty} f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm.$$

Обратимся к граничным условиям (37,1), которые с учетом (36,2) можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{g\Phi}{ap} \right) \Big|_{\beta = \beta_i} &= \left\{ \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \cos \beta \right] \left(\frac{g\Phi}{ap} \right) \right\} \Big|_{\beta = \beta_i} = 0, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (38,5)$$

¹ Это вытекает из требования абсолютной сходимости бесконечных интегралов.

Условие равенства нулю функции F на бесконечности [$F(0, 0) = 0$] согласно (38,3), имеет вид:

$$\int_0^{\infty} f(0, m) dm = b - 2K,$$

или, согласно (38,1):

$$\int_0^{\infty} A(m) dm = b - 2K. \quad (38,6)$$

Равенства (38,5) служат для определения функций $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$, а условие (38,6) — для определения постоянной K .

Из первого условия (38,5) и равенств (38,4) следует, что

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{\beta=\beta_i} = - \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) \right]_{\beta=\beta_i}. \quad (38,7)$$

Левая часть последнего равенства представляет некоторый интеграл Фурье. Однако второе условие (38,5) непосредственно не дает аналогичного интеграла Фурье, ибо в нем перед знаком интегралов имеются функции от переменной α . С целью преодоления этой трудности дифференцируем второе из условий (38,5) по α . С учетом первого условия (38,5) получаем:

$$\left[\left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{g\Phi}{ap} \right) \right]_{\beta=\beta_i} = 0,$$

а интегрируя последнее равенство по α , будем иметь:¹

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right) \left(\frac{g\Phi}{ap} \right) \right]_{\beta=\beta_i} = 0,$$

или

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right) \varphi \right]_{\beta=\beta_i} = - \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right) \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) \right]_{\beta=\beta_i}. \quad (38,8)$$

В таком виде это условие аналогично условию (38,7), ибо слева здесь стоит также интеграл Фурье.

¹ Аддитивная постоянная интегрирования равна нулю в силу условия (38,2).

Правые части условий (38,7) — (38,8) можно преобразовать, пользуясь равенствами, получаемыми дифференцированием (37,3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) = 2c \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} (1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta) + \\ + K \frac{\operatorname{sh} 2\alpha \sin 2\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2}, \end{aligned} \quad (38,9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right) \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) = K \cos \beta \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + 2K \frac{\cos^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} - \\ - K \frac{\sin^2 2\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \\ + c \sin^2 \beta \left[\frac{3 \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} - \frac{2 \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} \right]. \end{aligned} \quad (38,10)$$

Для того чтобы из условий (38,7) — (38,8) определить величины $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$, $D(m)$, требуется правые части равенств (38,9) — (38,10) разложить в интегралы Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) &= \int_0^\infty G(\beta, m) \sin m\alpha \, dm, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right) \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) &= \int_0^\infty H(\beta, m) \cos m\alpha \, dm, \end{aligned} \right\} \quad (38,11)$$

где функции $G(\beta, m)$ и $H(\beta, m)$ определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} G(\beta, m) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) \right] \sin m\alpha \, d\alpha, \\ H(\beta, m) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right] \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) \cos m\alpha \, d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (38,12)$$

Для удобства интегрирования преобразуем (38,9) — (38,10) еще к следующей форме:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \right) = 2c \sin \beta \left[\frac{\sin^2 \beta \operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} - \frac{\cos \beta \operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} \right] + \\ + K \sin 2\beta \left[\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta} + \frac{\operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \right], \quad (38,13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right) \left(\frac{g \varphi_0}{\partial p} \right) = c \sin^2 \beta \left[\frac{3 \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} - \frac{2 \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} \right] + \\ + 2K \cos \beta \sin^2 \beta \left[\frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta} \right] + \\ + 2K \frac{\cos^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + K \cos \beta \lg \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (38,14)$$

Теперь коэффициент $G(\beta, m)$ вычисляется с помощью $\Pi(11)$, $\Pi(12)$, $\Pi(2)$ и $\Pi(15)$, а коэффициент $H(\beta, m)$ — с помощью $\Pi(11)$ — $\Pi(14)$ и $\Pi(1)$ — $\Pi(2)$, после чего условия (38,7) — (38,8) окончательно запишутся так:¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} &= \frac{1}{m \operatorname{sh} m\pi} \left\{ 2cm [m \sin \beta_1 \operatorname{ch} m(\pi + \beta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \beta_1 \operatorname{sh} m(\pi + \beta_1)] + \right. \\ &\quad \left. + 4K \left[\sin \beta_1 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} + \beta_1 \right) + m \cos \beta_1 \operatorname{sh} m\beta_1 \right] \right\}, \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} &= \frac{1}{m \operatorname{sh} m\pi} \left\{ 2cm [m \sin \beta_2 \operatorname{ch} m(\pi - \beta_2) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \beta_2 \operatorname{sh} m(\pi - \beta_2)] + \right. \\ &\quad \left. + 4K \left[\sin \beta_2 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m \cos \beta_2 \operatorname{sh} m\beta_2 \right] \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (38,15)$$

¹ Для определенности считаем $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 0$.

$$\left. \begin{aligned}
 f(\beta_1, m) &= \frac{1}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} m\pi} \left\{ -2c(m^2 + 1) \sin \beta_1 \times \right. \\
 &\quad \times \operatorname{sh} m(\pi + \beta_1) + 4Km \operatorname{ch} m\beta_1 \cos \beta_1 + \\
 &\quad \left. + 4K \left[\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \sin \beta_1 - \frac{1}{m} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \cos \beta_1 \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} + \beta_1 \right) \right\}, \\
 f(\beta_2, m) &= \frac{1}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} m\pi} \left\{ 2c(m^2 + 1) \sin \beta_2 \times \right. \\
 &\quad \times \operatorname{sh} m(\pi - \beta_2) + 4Km \operatorname{ch} m\beta_2 \cos \beta_2 - \\
 &\quad \left. - 4K \left[\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \sin \beta_2 + \frac{1}{m} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \cos \beta_2 \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2 \right) \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (38,16)$$

Уравнения (38,15) — (38,16)¹ и дают систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными величинами $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$, $D(m)$, причем вид этой системы:

$$f(\beta_i, m) = \psi(\beta_i, m), \quad f'(\beta_i, m) = \psi'(\beta_i, m) \quad (38,17)$$

в точности совпадает с видом систем (25,8) — (25,9), с которыми мы имели дело при изгибе луночной плиты под равномерной нагрузкой; различие здесь лишь в функциях ψ и ψ' .

Не останавливаясь на решении системы (38,17) в общем виде, переходим к важнейшим частным случаям.

§ 39. Растяжение бесконечной плоскости, ослабленной отверстием в виде симметричной круговой луночки²

Рассмотрим случай, когда отверстие представляет собой симметричную круговую луночку ($\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$).

¹ Полагать в (38,15) — (38,16) $\beta_i = 0$ нельзя, ибо при этом интегралы П (10) — П (15) расходятся.

² Эта задача, так же, как и задача, рассматриваемая в § 40, решены Вайнелем [⁹] и Лингом [^{10, 11}] независимо друг от друга.

Так как при этом напряженное состояние симметрично в отношении обеих переменных α и β , то имеем сразу:

$$B(m) = C(m) = 0, \quad (39,1)$$

и система (38,17) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma + D \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma &= \psi(\gamma, m), \\ A(m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) + D(m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \\ &+ \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) = \psi'(\gamma, m), \end{aligned} \right\} \quad (39,2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi(\gamma, m) &= \frac{1}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} m\pi} \left[2c(m^2 + 1) \sin \gamma \times \right. \\ &\quad \times \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) + 4Km \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \\ &\quad \left. - 4K \operatorname{sh} m\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \left(\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \sin \gamma + \frac{1}{m} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \cos \gamma \right) \right], \\ \psi'(\gamma, m) &= \frac{1}{m \operatorname{sh} m\pi} \left\{ 2cm [\cos \gamma \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - m \sin \gamma \operatorname{ch} m(\pi - \gamma)] - 4K \left[\sin \gamma \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + m \cos \gamma \operatorname{sh} m\gamma \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (39,3)$$

Решая систему (39,2) и вводя обозначение

$$\Delta = \operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma, \quad (39,4)$$

имеем после преобразований:

$$\left. \begin{aligned} A(m) &= -4c \frac{m \sin^2 \gamma}{\Delta} - \frac{4K}{m(m^2 + 1)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 + 1}{\operatorname{sh} m\pi} - \frac{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{\Delta} \right), \\ D(m) &= 2c \left(\operatorname{cth} m\pi - 2 \frac{\operatorname{ch}^2 m\gamma}{\Delta} \right) + \frac{4K}{m^2 + 1} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} - \frac{\operatorname{sh}^2 m\gamma + m^2 \sin^2 \gamma}{\Delta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (39,5)$$

Остается определить постоянную K из условия (38,6).

Подставляя значение $A(m)$ из (39,5) в (38,6), получим:

$$-4K \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} - \frac{m^2 + 1}{\operatorname{sh} m\pi} \right) \frac{dm}{m(m^2 + 1)} +$$

$$+ 4K \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{m\Delta(m^2 + 1)} dm - 4c \sin^2 \gamma \int_0^{\infty} \frac{mdm}{\Delta} = b - 2K,$$

а применяя еще П(49), получим условие для определения постоянной K :

$$4K \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}{m(m^2 + 1)(\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma)} dm =$$

$$= b + 4c \sin^2 \gamma \int_0^{\infty} \frac{mdm}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma}. \quad (39,6)$$

Итак, окончательное решение задачи имеет вид:

$$\frac{g^{\Phi}}{ap} = 2K \cos \beta + c \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + K (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} +$$

$$+ \int_0^{\infty} [A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta] \cos m\alpha dm, \quad (39,7)$$

причем $A(m)$ и $D(m)$ даются формулами (39,5), а постоянная K определяется равенством (39,6).

Наибольший практический интерес представляет, конечно, нормальное напряжение σ_{α} по площадкам, перпендикулярным контуру отверстия, т. е. значение $\sigma_{\alpha}(\alpha, \gamma)$.

Нетрудно показать, что при выполнении граничных условий (38,5) напряжение σ_{α} из (36,2) при $\beta = \gamma$ может быть представлено еще в форме:

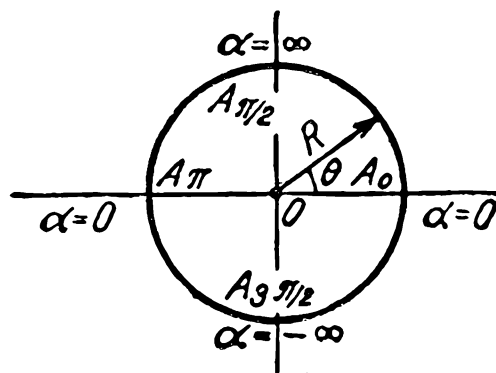
$$\frac{\sigma_{\alpha}}{p} \Big|_{\beta=\gamma} = \left\{ (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 1 \right] \left(\frac{g^{\Phi}}{ap} \right) \right\} \Big|_{\beta=\gamma}. \quad (39,8)$$

Выполняя дифференцирование, получим после преобразований:

$$\frac{\sigma_\alpha}{p} \Big|_{\beta=\gamma} = 8 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \sin \gamma \times \\ \times \int_0^\infty \frac{[K + cm (m - \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{cth} m\gamma)] \operatorname{sh} m\gamma}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \cos m\alpha \, dm. \quad (39,9)$$

Произведем контроль для случая $\gamma = \pi/2$, когда отверстие превращается в круг. При этом

$$\frac{\sigma_\alpha}{p} \Big|_{\beta=\pi/2} = \\ = 4 \operatorname{ch} \alpha \int_0^\infty \frac{K + cm^2}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \cos m\alpha \, dm,$$



Фиг. 53.

или, после применения П (24) и П(35):

$$\frac{\sigma_\alpha}{p} \Big|_{\beta=\pi/2} = 4 \left[K + c \frac{1 - \operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \right]. \quad (39,10)$$

Для определения постоянной K имеем из (39,6):

$$4K \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2} - m^2}{m (m^2 + 1) \operatorname{sh} m\pi} \, dm = b + 4c \int_0^\infty \frac{m \, dm}{\operatorname{sh} m\pi},$$

или с учетом П (28) и П (47):

$$K = \frac{1}{2} (b + c),$$

после чего (39,10) превращается в равенство:

$$\frac{\sigma_\alpha}{p} \Big|_{\beta=\pi/2} = 4 \left[\frac{b + c}{2} + c \frac{1 - \operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \right]. \quad (39,11)$$

Легко выразить α через полярный угол θ (фиг. 53). В самом деле, полагая $\beta = \pi/2$ в (35,2), получим ($a = R$):

$$\cos \theta = \frac{x}{R} = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}, \quad \sin \theta = \frac{y}{R} = \operatorname{th} \alpha, \quad (39,12)$$

Теперь равенство (39,11) можно переписать в полярных координатах:

$$\frac{\sigma_{\theta}}{R} \Big|_{r=R} = 4 \left[\frac{b+c}{2} + c \cos 2\theta \right]. \quad (39,13)$$

В случае продольного растяжения, когда $b = 0$, $c = 1/2$, имеем:

$$\frac{1}{p} \sigma_{\theta} \Big|_{r=R} = 1 + 2 \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta}^{\max} = 3p \quad (\text{при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \pi \text{ — точки } A_0 \text{ и } A_{\pi}),$$

$$\sigma_{\theta}^{\min} = -p \quad (\text{при } \theta = \pi/2 \text{ и } \theta = 3\pi/2 \text{ — точки } A_{\pi/2} \text{ и } A_{3\pi/2}).$$

В случае поперечного растяжения, когда $b = 1$, $c = -1/2$, получаем:

$$\frac{1}{p} \sigma_{\theta} \Big|_{r=R} = 1 - 2 \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta}^{\max} = 3p \quad (\text{в точках } A_{\pi/2} \text{ и } A_{3\pi/2}),$$

$$\sigma_{\theta}^{\min} = -p \quad (\text{в точках } A_0 \text{ и } A_{\pi}).$$

Наконец, $(\sigma_{\theta})_{r=R} = 2p$ не зависит от полярного угла в случае всестороннего растяжения ($b = 1$, $c = 0$).

Таким образом, в случае круглого отверстия имеем известные результаты, легко получающиеся применением полярных координат.

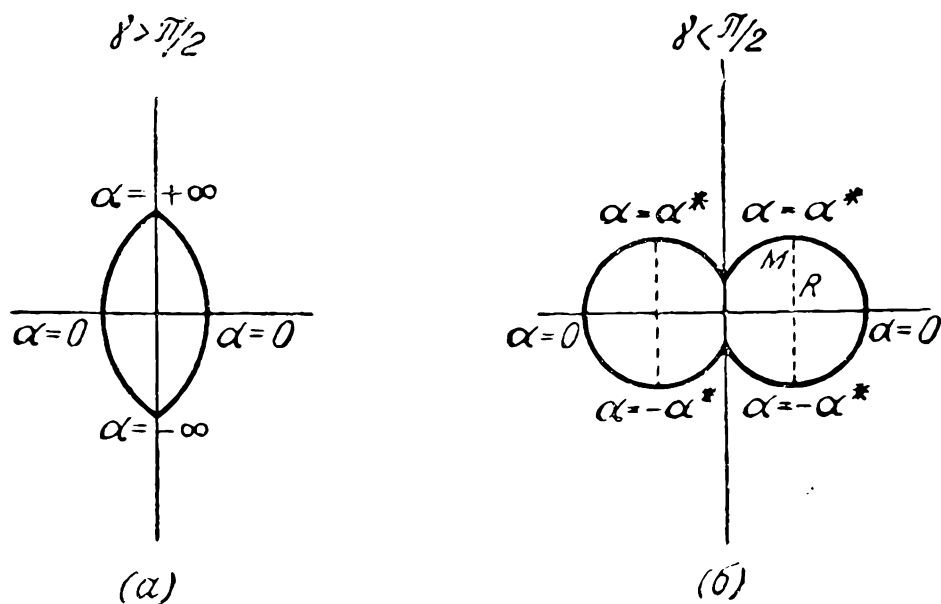
Повторяя рассуждения, развитые в § 18 для симметричной луночной плиты (см. стр. 82), можно показать, что в углах отверстия, где $\alpha = \pm \infty$, напряжение $\sigma_{\alpha}(\alpha, \gamma)$, даваемое формулой (39,9), равно нулю при $\gamma > \pi/2$ и бесконечно велико при $\gamma < \pi/2$.

Однако, в связи со сделанным в § 35 видоизменением системы биполярных координат, случай $\gamma > \pi/2$, в отличие от § 18, соответствует теперь отверстиям, изображенным на фиг. 54а, а случай $\gamma < \pi/2$ — отверстиям, изображенным на фиг. 54б. Поэтому для случая $\gamma > \pi/2$ расчеты производились лишь для продольного растяжения, когда бесконечное напряжение в точках $\alpha = \pm \infty$ является сжимающим,

и за максимальное значение напряжения σ_α на контуре можно принять максимальное растягивающее напряжение σ_α в точках $\alpha = 0$, даваемое, согласно (39,9), формулой:

$$\frac{1}{p} \sigma_\alpha^{\max} = 8 (1 - \cos \gamma) \sin \gamma \times \int_0^\infty \frac{K + cm (m - \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{cth} m\gamma)}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \operatorname{sh} m\gamma \, dm. \quad (39,14)$$

В прочих же двух случаях поперечного и всестороннего растяжения при $\gamma > \pi/2$ максимальное растягивающее напряжение имеет место в углах и равно бесконечности.



Фиг. 54.

Физически очевидно, что для случая $\gamma < \pi/2$ при продольном и всестороннем растяжении максимальное значение напряжения σ_α на контуре достигается в точках $\alpha = 0$ и дается, следовательно, формулой (39,14).

Непосредственные расчеты показывают, что при поперечном растяжении максимальное значение напряжения σ_α на контуре достигается при всех $\gamma < \pi/2$ в очень близком соседстве от точки $\alpha = \pm \alpha^*$ (фиг. 54б), так что с достаточной точностью можно принять эту точку за место, где напряжения максимальны.

Расчетная формула (39,14) для этого последнего случая заменяется следующей:

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{\alpha}^{\max} = 8 (\operatorname{ch} \alpha^* - \cos \gamma) \sin \gamma \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{K + cm (m - \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{cth} m\gamma)}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \operatorname{sh} m\gamma \cos m\alpha^* dm. \quad (39,15)$$

Значение α^* легко определить в зависимости от значения γ , если воспользоваться равенствами, вытекающими из (1,4) и (35,2):

$$y_M = R = \frac{a}{\sin \gamma} = a \frac{\operatorname{sh} \alpha^*}{\operatorname{ch} \alpha^* - \cos \gamma},$$

или

$$\sin \gamma \operatorname{sh} \alpha^* = \operatorname{ch} \alpha^* - \cos \gamma.$$

Решая последнее уравнение относительно α^* , находим:

$$\operatorname{ch} \alpha^* = 1/\cos \gamma. \quad (39,16)$$

В табл. 16 приведены значения отношения $\frac{\sigma_{\max}}{\rho}$ для различных случаев.

Таблица 16

| Растяжение | $\lambda = \cos \gamma$ | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 |
|----------------|--|----|------|---|------|------|
| Продольное . . | $\frac{1}{\rho} \sigma_{\max} \Big _{\alpha=0}$ | 1 | 2,10 | 3 | 3,49 | 3,87 |
| Поперечное . . | $\frac{1}{\rho} \sigma_{\max} \Big _{\alpha=\alpha^*}$ | — | — | 3 | 2,63 | 2,57 |
| Всестороннее . | $\frac{1}{\rho} \sigma_{\max} \Big _{\alpha=0}$ | — | — | 2 | 2,52 | 2,89 |

Приближенное вычисление определенных интегралов типа (39,15) производилось способом, аналогичным ранее приме-

ненному в § 20 (стр. 102), а именно, интеграл разбивался на два:

$$\int_0^{\infty} \frac{K + cm(m - \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{cth} m\gamma)}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \operatorname{sh} m\gamma \cos m\alpha^* dm = J_N + J_{\infty} =$$

$$= \int_0^N \frac{K + cm(m - \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{cth} m\gamma)}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \operatorname{sh} m\gamma \cos m\alpha^* dm +$$

$$+ \int_N^{\infty} \frac{K + cm(m - \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{cth} m\gamma)}{\operatorname{sh} 2m\gamma + m \sin 2\gamma} \operatorname{sh} m\gamma \cos m\alpha^* dm,$$

причем интеграл J_N подсчитывался численно, а в интеграле J_{∞} , в соответствии с выбором достаточно большого числа N , полагаем

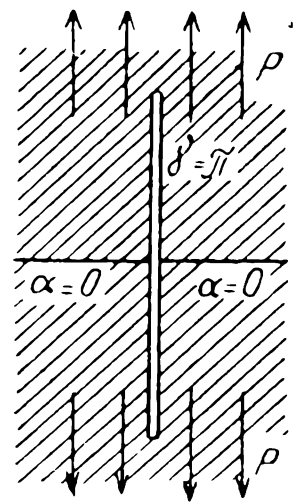
$$\operatorname{sh} 2m\gamma \approx \frac{1}{2} e^{2m\gamma}, \quad \operatorname{sh} m\gamma \approx \frac{1}{2} e^{m\gamma},$$

$$\operatorname{cth} m\gamma \approx 1,$$

а членом $m \sin 2\gamma$ пренебрегаем по сравнению с членом $\operatorname{sh} 2m\gamma$.

Тогда

$$J_{\infty} \approx \int_N^{\infty} [K + cm(m - \operatorname{ctg} \gamma)] e^{-m\gamma} \cos m\alpha^* dm,$$



Фиг. 55.

и квадратуры здесь могут быть выполнены.

Остановимся на предельных случаях $\gamma = \pi$ и $\gamma = 0$.

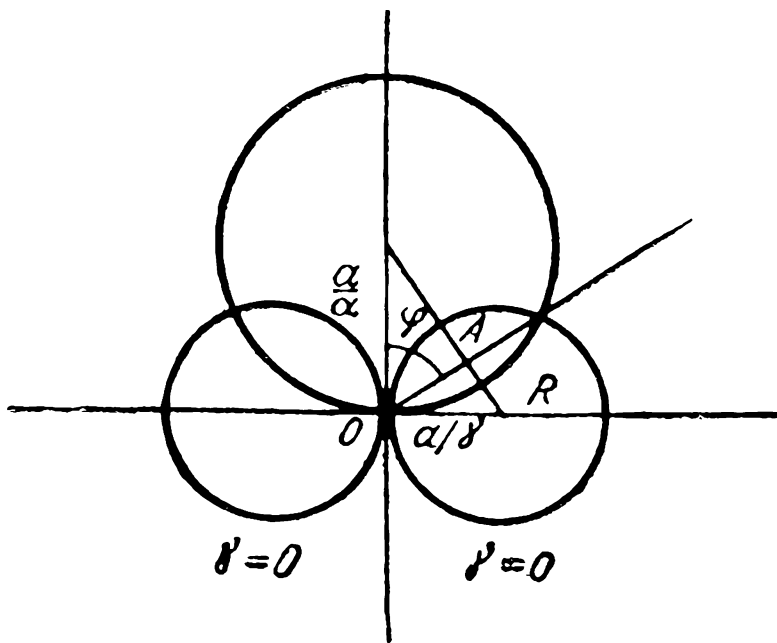
Случай $\gamma = \pi$ соответствует прямолинейной щели (фиг. 55). Так как при $\gamma > \pi/2$ рассматривается лишь продольное растяжение ($b = 0, c = 1/2$), то из (39,6) при $\gamma = \pi$ следует, что $K = 0$. Тогда формула (39,9) дает:

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{\rho} \Big|_{\beta=\gamma=\pi} = 2 (\operatorname{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm,$$

или после применения II (17):

$$(\sigma_{\alpha})_{\beta=\gamma=\pi} = \rho, \quad (39,17)$$

т. е. напряжение на контуре постоянно и равно заданному растягивающему напряжению, как и должно быть.



Фиг. 56.

Весьма интересен другой предельный случай $\gamma = 0$. Если при этом и $a \rightarrow 0$, то в пределе получается отверстие, образованное двумя взаимно касающимися кругами (фиг. 56).

Обозначая, как обычно в таких случаях, $m\gamma$ через θ , получим из (39,6), введя вместо K постоянную $L = \gamma^2 K$, уравнение для определения L :

$$4L \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \theta - \theta^2}{\theta^3 (\text{sh} 2\theta + 2\theta)} d\theta = b + 4c \int_0^{\infty} \frac{\theta d\theta}{\text{sh} 2\theta + 2\theta}. \quad (39,18)$$

Вводя вместо координаты α угол φ (фиг. 56), без труда получаем

$$OA = \frac{a}{\alpha} \cos \varphi = \frac{a}{\gamma} \sin \varphi,$$

или $\alpha \sin \varphi = \gamma \cos \varphi$, после чего (39,9) дает:

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{p} \Big|_{\gamma=0} = \frac{4}{\sin^2 \varphi} \int_0^{\infty} \frac{L + c\theta (\theta - \text{cth} \theta)}{\text{sh} 2\theta + 2\theta} \text{sh} \theta \cos (\theta \text{ctg} \varphi) d\theta. \quad (39,19)$$

Максимальное напряжение на контуре для случаев продольного и всестороннего растяжения достигается в точке $\varphi = \pi/2$:

$$\frac{\sigma_{\alpha}^{\max}}{p} = 4 \int_0^{\infty} \frac{L + c\theta (\theta - \text{cth} \theta)}{\text{sh} 2\theta + 2\theta} \text{sh} \theta d\theta. \quad (39,20)$$

Для случая поперечного растяжения максимальное напряжение будет почти в точке $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\sigma_{\alpha}^{\max}}{p} = 8 \int_0^{\infty} \frac{L + c\theta (0 - \operatorname{cth} \theta)}{\operatorname{sh} 2\theta + 2\theta} \operatorname{sh} \theta \cos \theta d\theta. \quad (39,21)$$

Из рассмотрения табл. 16 можно сделать вывод, что при продольном и всестороннем растяжении концентрация напряжений (3,87) в случае отверстия в виде двух взаимно касающихся кругов заметно выше, чем для случая одного круглого отверстия (3,00).

§ 40. Растяжение полуплоскости с луночной выемкой на краю

Полагая в общих формулах § 38 $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \gamma \leq \pi$, будем иметь дело с полуплоскостью, имеющей на краю выемку, ограниченную дугой окружности (фиг. 57).

Для такой области, очевидно, имеет смысл ставить задачу лишь о продольном растяжении, когда $b = 0$, $c = 1/2$.

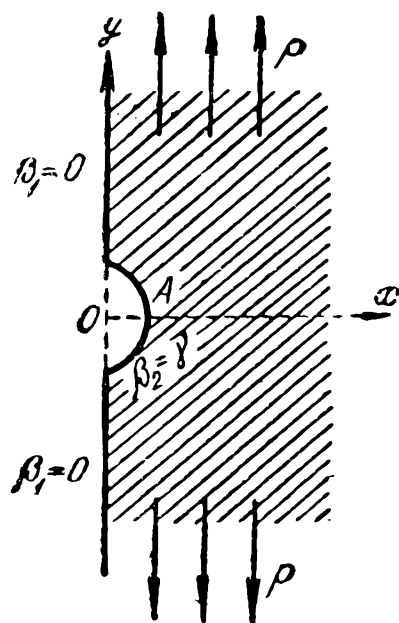
Условия (38,15) — (38,16) можно применять только при $\beta = \beta_2$ (см. сноску на стр. 180).

Для $\beta = \beta_1 = 0$ соответствующие условия можно записать сразу, ибо, согласно (38,9) — (38,10):

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) \right]_{\beta=\beta_1=0} &= 0, \\ \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1 \right] \left(\frac{g\varphi_0}{ap} \right) \right\}_{\beta=\beta_1=0} &= 2 \frac{K}{\operatorname{ch} \alpha + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (40,1)$$

Таким образом, вместо (38,15) — (38,16), будем иметь такую систему уравнений для определения величин A , B , C , D :

$$\left. \begin{aligned} - \int_0^{\infty} (m^2 + 1) A(m) \cos m\alpha dm &= 2 \frac{K}{\operatorname{ch} \alpha + 1}, \\ B(m) + mC(m) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (40,2)$$



Фиг. 57.

$$\left. \begin{aligned}
 & A \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma + B \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \\
 & \quad + C \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma + D \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma = \psi(\gamma, m), \\
 & A (m \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) + \\
 & \quad + B (m \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma) + \\
 & \quad + C (m \operatorname{ch} m\gamma \cos \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma) + \\
 & \quad + D (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) = \psi'(\gamma, m),
 \end{aligned} \right\} (40,2)$$

причем значения ψ и ψ' следует брать из (39,3).

Условие на бесконечности (38,6) принимает вид:

$$\int_0^{\infty} A(m) dm = -2K. \quad (40,3)$$

Условию (40,3) и первому из уравнений (40,2) можно сразу удовлетворить, положив

$$A(m) = K = 0. \quad (40,4)$$

Кроме того, из второго уравнения (40,2) имеем:

$$B(m) = -mC(m), \quad (40,5)$$

так что последние два уравнения (40,2) дают для определения $C(m)$ и $D(m)$ систему:

$$\left. \begin{aligned}
 & C (\operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) + D \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma = \psi(\gamma, m), \\
 & -C (m^2 + 1) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma + \\
 & \quad + D (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) = \psi'(\gamma, m).
 \end{aligned} \right\} (40,6)$$

Определитель этой системы равен:

$$\Delta = \operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma, \quad (40,7)$$

а правые части уравнений (40,6), согласно (39,3) и (40,4), имеют вид ($c = 1/2$):

$$\left. \begin{aligned}
 \psi(\gamma, m) &= \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} m(\pi - \gamma)}{\operatorname{sh} m\pi}, \\
 \psi'(\gamma, m) &= \frac{1}{\operatorname{sh} m\pi} [\cos \gamma \operatorname{sh} m(\pi - \gamma) - \\
 & \quad - m \sin \gamma \operatorname{ch} m(\pi - \gamma)].
 \end{aligned} \right\} (40,8)$$

Решая систему (40,6), получаем:

$$\Delta \cdot C = (m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma + \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma) \psi(\gamma, m) - \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma \psi'(\gamma, m),$$

$$\Delta \cdot D = (\operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma - m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma) \psi'(\gamma, m) + (m^2 + 1) \operatorname{sh} m\gamma \sin \gamma \psi(\gamma, m),$$

или после выкладок:

$$\left. \begin{aligned} C(m) &= -\frac{m \sin^2 \gamma}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}, \\ D(m) &= \operatorname{cth} m\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2m\gamma - m \sin 2\gamma}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (40,9)$$

Таким образом, окончательное решение задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{g\Phi}{ap} &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \int_0^\infty f(\beta, m) \cos m\alpha \, dm, \\ f(\beta, m) &= C(m) (\operatorname{sh} m\beta \cos \beta - m \operatorname{ch} m\beta \sin \beta) + \\ &\quad + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (40,10)$$

Для получения интересующей нас величины напряжения σ_α на контуре выемки воспользуемся формулой (39,8).

Произведя требуемые дифференцирования, имеем после выкладок:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\alpha}{p} \Big|_{\beta=\gamma} &= 2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma} m \cos m\alpha \, dm. \end{aligned} \quad (40,11)$$

Максимальное напряжение, имеющее место при $\alpha = 0$ (в точке А — „вершине“ выемки), дается формулой:

$$\frac{\sigma_\alpha^{\max}}{p} = 2 (1 - \cos \gamma) \int_0^\infty \frac{m \operatorname{ch} m\gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} m\gamma \cos \gamma}{\operatorname{sh}^2 m\gamma - m^2 \sin^2 \gamma} m \, dm. \quad (40,12)$$

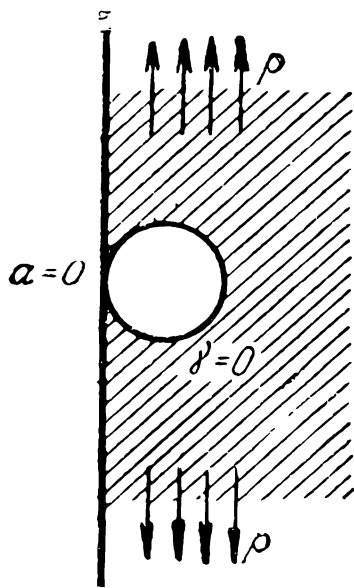
В предельном случае $\gamma = \pi$ имеем полуплоскость без

192 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВНЕШНОСТИ КРУГОВОЙ ДУНОЧКИ [гл. VI
 выемки и из (40,11) получаем [см. II(17)]:

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{\alpha} |_{\beta=\gamma=\pi} = 2 (\operatorname{ch} \alpha + 1) \int_0^{\infty} \frac{m \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm = 1,$$

как и должно быть.

В другом предельном случае $\gamma = 0$ (одновременно $\alpha \rightarrow 0$) получаем полуплоскость с круглым отверстием, касательным к краю (фиг. 58).



Фиг. 58.

Полагая, как обычно, $m\theta = \gamma$, получаем из (40,12):

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{\alpha}^{\max} |_{\gamma=0} = \int_0^{\infty} \frac{\theta \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{sh}^2 \theta - \theta^2} \theta d\theta. \quad (40,13)$$

В табл. 17 для различных γ приводятся значения отношения $\sigma_{\alpha}^{\max}/\rho$, характеризующие концентрацию напряжений на краю полуплоскости, вызванную наличием сегментной выемки.

Числовые данные показывают, что концентрация в полуплоскости несколько выше, чем в соответствующих случаях для полной плоскости (ср. например, случай $\gamma = 0$, когда полуплоскость дает 3,999, а плоскость 3,87).

Таблица 17

| $\lambda = \cos \gamma$ | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 |
|--------------------------------|----|------|------|------|-------|
| $\frac{1}{\rho} \sigma_{\max}$ | 1 | 2,42 | 3,07 | 3,57 | 3,999 |

Любопытно отметить, что формула (40,12) в точности совпадает с формулой (21,5)¹ для предельного значения максимального изгибающего момента, возникающего на контуре закрепленной сегментной выемки, сделанной на закрепленном краю полуплоскости; роль отношения $\sigma_{\alpha}^{\max}/\rho$ там играло отношение $M_{\max}/\frac{P}{\pi}$, где P — величина сосредоточенной силы, приложенной на достаточно далеком расстоянии от края.

¹ Если заменить γ на $\pi - \gamma$, что связано с видоизменением системы координат.

ГЛАВА VII

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

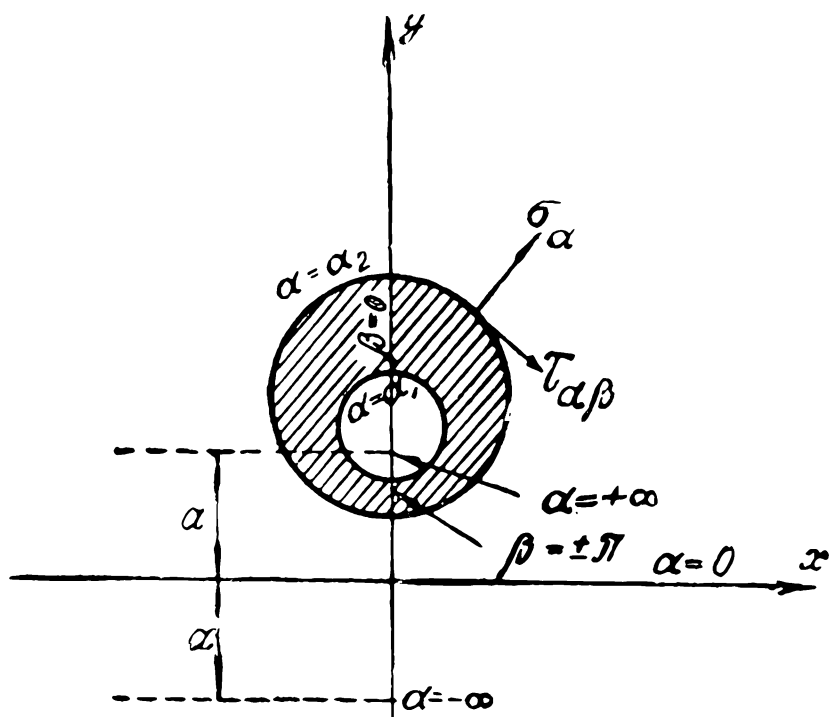
§ 41. Постановка задачи о равновесии эксцентрического кольца под действием заданных усилий

Рассмотрим плоскую область, ограниченную координатными линиями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$,¹ т. е. эксцентрическое кольцо (фиг. 59).

Предположим, что такое эксцентрическое кольцо находится под действием внешних усилий: нормального $\sigma_\alpha(\beta)$ и касательного $\tau_{\alpha\beta}(\beta)$, приложенных по контурам $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$.²

Плоское напряженное состояние такого кольца характеризуется тремя напряжениями σ_α , σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$, которые можно выразить через одну бигармоническую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$ формулами (36,2).

Функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$ будем,



Фиг. 59.

¹ Считаем, что $-\infty < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty$. Систему координат сохраняем той же, как и в гл. VI.

² Функции $\sigma_\alpha(\beta)$ и $\tau_{\alpha\beta}(\beta)$ должны, вообще говоря, удовлетворять условиям статики. Однако в случае бесконечной области условия статики могут быть не выполнены (см., например, [25], стр. 141).

согласно (3,3) и (3,5), искать в виде тригонометрического ряда:

$$g\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^c(\alpha) \cos n\beta + f_n^s(\alpha) \sin n\beta], \quad (41,1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_n^c(\alpha) &= A_n^c \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n^c \operatorname{ch}(n-1)\alpha + \\ &+ C_n^c \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n^c \operatorname{sh}(n-1)\alpha, \quad (n \geq 2) \\ f_0^c(\alpha) &= A_0^c \operatorname{ch} \alpha + B_0^c \alpha \operatorname{ch} \alpha + C_0^c \operatorname{sh} \alpha + D_0^c \alpha \operatorname{sh} \alpha, \\ f_1^c(\alpha) &= A_1^c \operatorname{ch} 2\alpha + B_1^c + C_1^c \operatorname{sh} 2\alpha + D_1^c \alpha, \\ f_n^s(\alpha) &= A_n^s \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n^s \operatorname{ch}(n-1)\alpha + \\ &+ C_n^s \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n^s \operatorname{sh}(n-1)\alpha, \quad (n \geq 2) \\ f_1^s(\alpha) &= A_1^s \operatorname{ch} 2\alpha + B_1^s + C_1^s \operatorname{sh} 2\alpha + D_1^s \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (41,2)$$

Постоянные C_0^c и B_1^s можно принять равными нулю, ибо они соответствуют линейным относительно x и y функциям напряжений и дают, следовательно, нулевые напряжения. В самом деле, $g\Phi = C_0^c \operatorname{sh} \alpha$, т. е. $\Phi = C_0^c y$, и $g\Phi = B_1^s \sin \beta$, т. е. $\Phi = B_1^s x$.

Постоянную A_0^c также можно считать нулем, так как решение $g\Phi = A_0^c \operatorname{ch} \alpha$ может быть представлено в форме:

$$g\Phi = A_0^c (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta + \cos \beta), \quad \frac{1}{\alpha} \Phi = A_0^c + A_0^c \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

причем постоянное слагаемое не влияет на напряжения, а решения типа $g\Phi = A_0^c \cos \beta$ эквивалентны решениям типа $g\Phi = B_1^c \cos \beta$, включенным в функцию $f_1^c(\alpha) \cos \beta$.

Учитывая еще особые решения типа (3,9), (3,10), (3,11), можно самое общее выражение для функции напряжений записать так:

$$\begin{aligned} g\Phi &= \alpha (B_0 \operatorname{ch} \alpha + D_0 \operatorname{sh} \alpha) + (E \cos \beta + F \sin \beta + G \operatorname{ch} \alpha + \\ &+ H \operatorname{sh} \alpha) \beta + (M \cos \beta + N \sin \beta + P \operatorname{ch} \alpha + Q \operatorname{sh} \alpha) \alpha \beta + \\ &+ (T \cos \beta + U \sin \beta + V \operatorname{ch} \alpha + W \operatorname{sh} \alpha) \operatorname{lg} \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_1^c \operatorname{ch} 2\alpha + B_1^c + C_1^c \operatorname{sh} 2\alpha + D_1^c \alpha) \cos \beta + (A_1^s \operatorname{ch} 2\alpha + \\
& + C_1^s \operatorname{sh} 2\alpha + D_1^s \alpha) \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} [f_n^c(\alpha) \cos n\beta + \\
& + f_n^s(\alpha) \sin n\beta]. \quad (41,3)
\end{aligned}$$

Так как смещения должны быть однозначными функциями, то члены, содержащие β , в выражениях для смещений должны отсутствовать. Посмотрим, какие связи должны быть между коэффициентами, чтобы выполнялись указанные условия однозначности смещений.

Подставляя (41,3) в (36,8), видим, что многозначность смещений может вызвать следующая часть функции $g\Phi$:

$$\begin{aligned}
g\Phi^* = & (E \cos \beta + F \sin \beta) \beta + (G \operatorname{ch} \alpha + H \operatorname{sh} \alpha) \beta + \\
& + (B_0 \operatorname{ch} \alpha + D_0 \operatorname{sh} \alpha) \alpha + (D_1^c \cos \beta + D_1^s \sin \beta) \alpha + \\
& + (M \cos \beta + N \sin \beta + P \operatorname{ch} \alpha + Q \operatorname{sh} \alpha) \alpha \beta. \quad (41,4)
\end{aligned}$$

В выражении для функции $g\Psi$ ей соответствуют члены:

$$\begin{aligned}
g\Psi^* = & - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} [(E \cos \beta + F \sin \beta) \alpha + (G \operatorname{ch} \alpha + H \operatorname{sh} \alpha) \alpha - \\
& - (B_0 \operatorname{ch} \alpha + D_0 \operatorname{sh} \alpha) \beta + (D_1^c \cos \beta + D_1^s \sin \beta) \beta + \\
& + (M \cos \beta + N \sin \beta) \alpha^2 - (P \operatorname{ch} \alpha + Q \operatorname{sh} \alpha) \beta^2]. \quad (41,5)
\end{aligned}$$

Составляя смещения u и v по формулам (36,9) и приравнявая нулю коэффициенты при β и β^2 , получим связи между коэффициентами:

$$\begin{aligned}
E + G = B_0 + D_1^c = M = N = P = Q = \\
= \mu F - (\lambda + 2\mu) D_0 = \mu H + (\lambda + 2\mu) D_1^s = 0. \quad (41,6)
\end{aligned}$$

Учитывая эти связи, вместо (41,4) будем иметь:¹

$$\begin{aligned}
g\Phi^* = & G (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \beta + B_0 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \alpha + F (\beta \sin \beta + \\
& + \nu \alpha \operatorname{sh} \alpha) + H (\beta \operatorname{sh} \alpha - \nu \alpha \sin \beta) \quad (41,7)
\end{aligned}$$

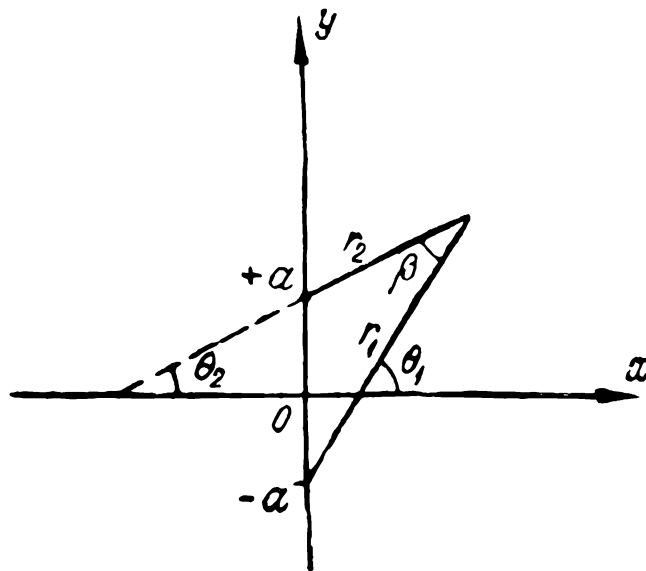
или

$$\Phi^* = aG\beta + aB_0\alpha + F(x\beta + \nu y\alpha) + H(y\beta - \nu x\alpha). \quad (41,8)$$

¹ $\nu = \mu/\lambda + 2\mu$ — коэффициент Пуассона.

Нетрудно установить физический смысл отдельных слагаемых в последнем выражении.

Так как $\beta = \theta_1 - \theta_2$ (фиг. 60), а функция напряжений



Фиг. 60.

$\Phi = -\frac{M}{2\pi} \theta$ соответствует сосредоточенному моменту M , приложенному в начале координат, то член $G\beta$ соответствует двум сосредоточенным моментам величины $2\pi G$ и разных знаков, приложенным в точках $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ соответственно.

Далее, так как $\alpha = \lg r_1 - \lg r_2$, а функция напряжений $\Phi = \lg r$ соответствует сосредоточенному всестороннему да-

влению, то член $B_0\alpha$ дает такое давление в точке $\alpha = +\infty$ и равное ему сжатие в точке $\alpha = -\infty$.

Остающиеся члены переписываем так:

$$\left. \begin{aligned} H(y\beta - vx\alpha) &= H[(y+a)\theta_1 - vx \lg r_1] - \\ &- H[(y-a)\theta_2 - vx \lg r_2] - aH(\theta_1 + \theta_2), \\ F(x\beta + vy\alpha) &= F[x\theta_1 + v(y+a) \lg r_1] - \\ &- F[x\theta_2 + v(y-a) \lg r_2] - avF \lg(r_1 r_2). \end{aligned} \right\} (41,9)$$

Известно, что функция напряжений вида

$$\Phi = -\frac{X}{2\pi} (y\theta - vx \lg r)$$

соответствует сосредоточенной силе, приложенной в начале координат и направленной по оси x , и, аналогично, функция напряжений

$$\Phi = -\frac{Y}{2\pi} (x\theta + vy \lg r)$$

соответствует сосредоточенной силе, приложенной в начале координат и направленной по оси y .

Отсюда следует, что выражения (41,9) дают сосредоточенные силы величины $2\pi H$, приложенные в соответствующих

точках; кроме того, первое из выражений (41,9) дает сумму моментов величины $2\pi aH$, приложенных в точках $\alpha = \pm\infty$, а второе из выражений (41,9) содержит еще решение типа $\lg(r_1 r_2)$ или эквивалентное ему решение:

$$g\Phi = K (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \lg (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta). \quad (41,10)$$

Когда мы имеем дело с эксцентрическим кольцом, область которого расположена по одну сторону линии $\alpha = 0$, и $\alpha_2 \neq 0$,¹ то все решения типа (41,8), кроме $B_0\alpha$ и (41,10), соответствуют внешним усилиям, статически неуравновешенным, и должны быть отброшены, так что для такого случая функция напряжений имеет вид:

$$g\Phi = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) [J\alpha + K \lg (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)] + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{n=1}^{\infty} [f_n^c(\alpha) \cos n\beta + f_n^s(\alpha) \sin n\beta], \\ f_n^c(\alpha) &= A_n^c \operatorname{ch} (n+1)\alpha + B_n^c \operatorname{ch} (n-1)\alpha + \\ &+ C_n^c \operatorname{sh} (n+1)\alpha + D_n^c \operatorname{sh} (n-1)\alpha \\ f_n^s(\alpha) &= A_n^s \operatorname{ch} (n+1)\alpha + B_n^s \operatorname{ch} (n-1)\alpha + \\ &+ C_n^s \operatorname{sh} (n+1)\alpha + D_n^s \operatorname{sh} (n-1)\alpha \end{aligned} \right\} n \geq 2, \quad (41,11)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1^c(\alpha) &= A_1^c \operatorname{ch} 2\alpha + B_1^c + C_1^c \operatorname{sh} 2\alpha, \\ f_1^s(\alpha) &= A_1^s \operatorname{ch} 2\alpha + C_1^s \operatorname{sh} 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (41,12)$$

Задача о равновесии такого эксцентрического кольца ставится следующим образом: заданы внешние нагрузки — σ_α и $\tau_{\alpha\beta}$ на обеих границах $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$.

¹ Если $\alpha_2 = 0$, то рассматриваемое кольцо вырождается в полуплоскость с круглым отверстием, т. е. в бесконечную область, для которой отбрасывание решений типа (41,8) не обязательно (см.

сноску на стр. 194). Что касается особого решения $\lg \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$,

то оно годится только для того случая, когда начало координат не входит в область, расположенную по обе стороны линии $\alpha = 0$ (см. стр. 175).

Предполагаем, что их можно разложить в тригонометрические ряды:

$$\left. \begin{aligned} a\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta) &= a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^{(1)} \cos n\beta + b_n^{(1)} \sin n\beta], \\ a\sigma_{\alpha}(\alpha_1, \beta) &= c_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n^{(1)} \cos n\beta + d_n^{(1)} \sin n\beta], \\ a\tau_{\alpha\beta}(\alpha_2, \beta) &= a_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^{(2)} \cos n\beta + b_n^{(2)} \sin n\beta], \\ a\sigma_{\alpha}(\alpha_2, \beta) &= c_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n^{(2)} \cos n\beta + d_n^{(2)} \sin n\beta]. \end{aligned} \right\} (41,13)$$

Требуется подобрать коэффициенты, входящие в (41,11) — (41,12), таким образом, чтобы напряжения на контуре совпадали бы с заданными внешними напряжениями (41,13).

Для решения поставленной задачи, которое дается в следующем параграфе, нам необходимо установить связи между коэффициентами a_n, b_n, c_n, d_n , обусловленные тем обстоятельством, что внешние усилия статически эквивалентны нулю.

Предположим, что внешние нагрузки статически уравновешиваются на каждом из контуров $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, т. е. что имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \pm \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sigma_{\alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0, \\ Y_i &= \pm \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sigma_{\alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0, \\ M_i &= \pm \frac{a^2}{\operatorname{sh} \alpha_i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\tau_{\alpha\beta}}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \Big|_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0 \end{aligned} \right\} (41,14)$$

($i = 1, 2$; верхний знак при $i = 1$).

Если $\alpha_2 > 0$, то имеют место разложения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_i} &= -a \frac{\operatorname{sh} \alpha_i \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} = -2a \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\alpha_i} \sin n\beta, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_i} &= -a \frac{\operatorname{ch} \alpha_i \cos \beta - 1}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} = -2a \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\alpha_i} \cos n\beta, \\ \frac{\operatorname{sh} \alpha_i}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha_i} \cos n\beta. \end{aligned} \right\} (41,15)$$

Подставляя (41,15) в (41,14) и производя интегрирование по β , получаем:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \pm 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n^{(i)} - d_n^{(i)}] e^{-n\alpha_i}, \\ Y_i &= \pm 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n [b_n^{(i)} + c_n^{(i)}] e^{-n\alpha_i}, \\ M_i &= \mp \frac{2\pi a}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} e^{-n\alpha_i}. \end{aligned} \right\} (41,16)$$

Если $\alpha_2 < 0$, то (41,16) надо заменить соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n^{(2)} + d_n^{(2)}] e^{n\alpha_2}, \\ Y_2 &= -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n [b_n^{(2)} - c_n^{(2)}] e^{n\alpha_2}, \\ M_2 &= -\frac{2\pi a}{\operatorname{sh}^2 \alpha_2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} e^{n\alpha_2}. \end{aligned} \right\} (41,17)$$

Из (41,16) — (41,17) сразу видно, что при статическом равновесии внешних нагрузок порознь на каждой из окруж-

ностей $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ должны быть выполнены связи:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n^{(1)} - d_n^{(1)}] e^{-n\alpha_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n [b_n^{(1)} + c_n^{(1)}] e^{-n\alpha_1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} e^{-n\alpha_1} = 0; \end{aligned} \quad (41,18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n^{(2)} - d_n^{(2)}] e^{-n\alpha_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n [b_n^{(2)} + c_n^{(2)}] e^{-n\alpha_2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} e^{-n\alpha_2} = 0 \quad (\alpha_2 > 0); \end{aligned} \quad (41,19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n^{(2)} + d_n^{(2)}] e^{n\alpha_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n [b_n^{(2)} - c_n^{(2)}] e^{n\alpha_2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} e^{n\alpha_2} = 0 \quad (\alpha_2 < 0). \end{aligned} \quad (41,20)$$

§ 42. Нахождение функции напряжений

Составим выражения для напряжений σ_α и $\tau_{\alpha\beta}$, пользуясь формулами (36,2) и беря функцию напряжений из (41,11) — (41,12). Имеем:

$$\begin{aligned} 2a\sigma_\alpha &= K(1 - 2\operatorname{ch}^2 \alpha) - 2J \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha + \\ &+ 2f_1^c(\alpha) + 2(K \operatorname{ch} \alpha + J \operatorname{sh} \alpha) \cos \beta - K \cos 2\beta + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \{ [(n+1)(n+2)f_{n+1}^c(\alpha) - 2\operatorname{ch} \alpha (n^2 - 1)f_n^c(\alpha) + \\ &+ (n-1)(n-2)f_{n-1}^c(\alpha)] \cos n\beta + \\ &+ [(n+1)(n+2)f_{n+1}^s(\alpha) - 2\operatorname{ch} \alpha (n^2 - 1)f_n^s(\alpha) + \\ &+ (n-1)(n-2)f_{n-1}^s(\alpha)] \sin n\beta - \\ &- 2\operatorname{sh} \alpha [f_n^{c'}(\alpha) \cos n\beta + f_n^{s'}(\alpha) \sin n\beta] \}; \end{aligned} \quad (42,1)$$

$$\begin{aligned} 2a\tau_{\alpha\beta} &= f_1^{s'}(\alpha) - 2(K \operatorname{sh} \alpha + J \operatorname{ch} \alpha) \sin \beta + J \sin 2\beta + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \{ [(n+1)f_{n+1}^{s'}(\alpha) - 2n \operatorname{ch} \alpha f_n^{s'}(\alpha) + (n-1)f_{n-1}^{s'}(\alpha)] \cos n\beta - \\ &- [(n+1)f_{n+1}^{c'}(\alpha) - 2n \operatorname{ch} \alpha f_n^{c'}(\alpha) + \\ &+ (n-1)f_{n-1}^{c'}(\alpha)] \sin n\beta \}. \end{aligned} \quad (42,2)$$

Подставляя (42,1) — (42,2) при $\alpha = \alpha_1$ в первые два уравнения (41,13) и приравнявая коэффициенты при $\cos n\beta$ и $\sin n\beta$, получим:

$$\left. \begin{aligned} f_1^c(\alpha_1) &= 2c_0^{(1)} + 2J \operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1 + 2K \operatorname{ch}^2 \alpha_1 - K, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot f_2^c(\alpha_1) &= 2c_1^{(1)} - 2(K \operatorname{ch} \alpha_1 + J \operatorname{sh} \alpha_1) + \\ &+ 2 \operatorname{sh} \alpha_1 \cdot f_1^{c'}(\alpha_1), \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot f_3^c(\alpha_1) - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot f_2^c(\alpha_1) &= \\ &= 4c_2^{(1)} + 2K + 4 \operatorname{sh} \alpha_1 \cdot f_2^{c'}(\alpha_1), \\ \dots\dots\dots \\ n(n+1)(n+2) f_{n+1}^c(\alpha_1) - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 (n-1) n(n+1) \times \\ \times f_n^c(\alpha_1) + (n-2)(n-1) n f_{n-1}^c(\alpha_1) &= 2n c_n^{(1)} + \\ &+ 2n \operatorname{sh} \alpha_1 f_n^{c'}(\alpha_1) \quad (n \geq 3); \end{aligned} \right\} (42,3)$$

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) f_{n+1}^s(\alpha_1) - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 (n-1) n(n+1) f_n^s(\alpha_1) + \\ + (n-2)(n-1) n f_{n-1}^s(\alpha_1) = \\ = 2n d_n^{(1)} + 2n \operatorname{sh} \alpha_1 f_n^{s'}(\alpha_1) \quad (n \geq 1); \end{aligned} \quad (42,4)$$

$$\left. \begin{aligned} f_n^{s'}(\alpha_1) &= 2a_0^{(1)}, \\ (n+1) f_{n+1}^{s'}(\alpha_1) - 2n \operatorname{ch} \alpha_1 f_n^{s'}(\alpha_1) + \\ + (n-1) f_{n-1}^{s'}(\alpha_1) &= 2a_n^{(1)} \quad (n \geq 1); \end{aligned} \right\} (42,5)$$

$$\left. \begin{aligned} 2f_2^{c'}(\alpha_1) - 2 \operatorname{ch} \alpha_1 f_1^{c'}(\alpha_1) &= -2b_1^{(1)} (K \operatorname{sh} \alpha_1 + J \operatorname{ch} \alpha_1), \\ 3f_3^{c'}(\alpha_1) - 4 \operatorname{ch} \alpha_1 f_2^{c'}(\alpha_1) + f_1^{c'}(\alpha_1) &= -2b_2^{(1)} + J, \\ \dots\dots\dots \\ (n+1) f_{n+1}^{c'}(\alpha_1) - 2n \operatorname{ch} \alpha_1 f_n^{c'}(\alpha_1) + \\ + (n-1) f_{n-1}^{c'}(\alpha_1) &= -2b_n^{(1)} \quad (n \geq 3). \end{aligned} \right\} (42,6)$$

Умножая (42,5) на $e^{-n\alpha_1}$ и складывая, получим:

$$(n+1) f_{n+1}^{s'}(\alpha_1) - n f_n^{s'}(\alpha_1) e^{-\alpha_1} = 2e^{n\alpha_1} \sum_{p=0}^n a_p^{(1)} e^{-p\alpha_1}. \quad (42,7)$$

Но из (41,18) имеем:

$$2e^{n\alpha_1} \sum_{p=0}^n a_p^{(1)} e^{-p\alpha_1} = -2e^{n\alpha_1} \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p^{(1)} e^{-p\alpha_1} = -2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{n+r}^{(1)} e^{-r\alpha_1},$$

и так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \cos n\beta$ предположен сходящимся, то правая часть (42,7) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. функции $f_n^{s'}(\alpha_1)$, будучи конечными для всех n , стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Умножая (42,7) на $e^{n\alpha_1}$ и складывая, будем иметь:

$$nf_n^{s'}(\alpha_1) e^{(n-1)\alpha_1} = 2 \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=p}^{n-1} a_p^{(1)} e^{(2q-p)\alpha_1},$$

или после суммирования по q :

$$nf_n^{s'}(\alpha_1) = \frac{2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(1)} \operatorname{sh} (n-p)\alpha_1 \quad (n \geq 1). \quad (42,8)$$

Точно так же из (42,4) имеем:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)f_{n+1}^s(\alpha_1) - (n-1)n(n+1)f_n^s(\alpha_1) e^{-\alpha_1} &= \\ &= 2e^{n\alpha_1} \sum_{p=1}^n p [a_p^{(1)} + \operatorname{sh} \alpha_1 \cdot f_p^{s'}(\alpha_1)] e^{-p\alpha_1}, \end{aligned}$$

или с учетом (42,5):

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)f_{n+1}^s(\alpha_1) - (n-1)n(n+1)f_n^s(\alpha_1) e^{-\alpha_1} &= \\ &= n(n+1) [f_{n+1}^{s'}(\alpha_1) + e^{-\alpha_1} f_n^{s'}(\alpha_1)] + \\ &\quad + 2e^{n\alpha_1} \sum_{p=1}^n p [a_p^{(1)} - a_p^{(1)}] e^{-p\alpha_1}. \end{aligned}$$

Можно показать, пользуясь (41,18), что правая часть последнего равенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$,

После выкладок имеем окончательное выражение для $f_n^s(x_1)$ при $n \geq 2$:

$$n(n^2 - 1) f_n^s(x_1) = \frac{2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \sum_{p=0}^{n-1} [(n-p) a_p^{(1)} \operatorname{ch} (n-p) \alpha_1 + \\ + (p d_p^{(1)} - \operatorname{cth} \alpha_1 a_p^{(1)}) \operatorname{sh} (n-p) \alpha_1]. \quad (42,9)$$

Функция $f_1^s(x_1)$ остается неопределенной.

Точно таким же образом, пользуясь (42,3), (42,6) и (41,18), можно получить формулы:

$$n \operatorname{sh} \alpha_1 f_n^{c'}(x_1) = [f_1^{c'}(x_1) - J] \operatorname{sh} n \alpha_1 - \\ - 2K \operatorname{sh} (n-1) \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1 - \\ - 2 \sum_{p=1}^{n-1} b_p^{(1)} \operatorname{sh} (n-p) \alpha_1 \quad (n \geq 2), \quad (42,10)$$

$$f_1^{c'}(x_1) = J + 2K e^{-\alpha_1} \operatorname{sh} \alpha_1 + 2 \sum_{p=1}^n b_p^{(1)} e^{-p \alpha_1};$$

$$n(n^2 - 1) \operatorname{sh} \alpha_1 f_n^c(x_1) = [f_1^{c'}(x_1) - J] (n \operatorname{ch} n \alpha_1 - \\ - \operatorname{cth} \alpha_1 \operatorname{sh} n \alpha_1) - K[(n-1) \operatorname{sh} n \alpha_1 - \\ - (n+1) \operatorname{sh} (n-2) \alpha_1] + 2 \sum_{p=1}^{n-1} [(p c_p^{(1)} + \\ + b_p^{(1)} \operatorname{cth} \alpha_1) \operatorname{sh} (n-p) \alpha_1 - \\ - (n-p) b_p^{(1)} \operatorname{ch} (n-p) \alpha_1] \quad (n \geq 2), \quad (42,11)$$

$$2f_1^c(x_1) = 2c_0^{(1)} + J \operatorname{sh} 2\alpha_1 + K(2\operatorname{ch}^2 \alpha_1 - 1).$$

Если $\alpha_2 > 0$, то формулы (42,8) — (42,11) при выполнении условий (41,19) сохраняют свой вид при замене α_1 на α_2 , причем коэффициенты $a_n \dots d_n$ будут иметь индекс (2).

Если же $\alpha_2 < 0$, то нужно лишь заменить во втором уравнении (42,10) $e^{-\alpha_1}$ на e^{α_2} и $e^{-p \alpha_1}$ на $e^{p \alpha_2}$.¹

Равенства (42,8) — (42,11) при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ дают систему уравнений для определения неизвестных констант A_n^c , B_n^c , C_n^c , D_n^c , A_n^s , B_n^s , C_n^s , D_n^s , если считать J и K заданными.

¹ При этом предполагается, что выполнены условия (41,20).

При $n = 1$ уравнение (42,8) при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ дает систему двух уравнений с двумя неизвестными A_1^s и C_1^s . Далее, вторые уравнения (42,10)—(42,11), числом четыре, содержат пять неизвестных величин: J , K , A_1^c , B_1^c , и C_1^c .

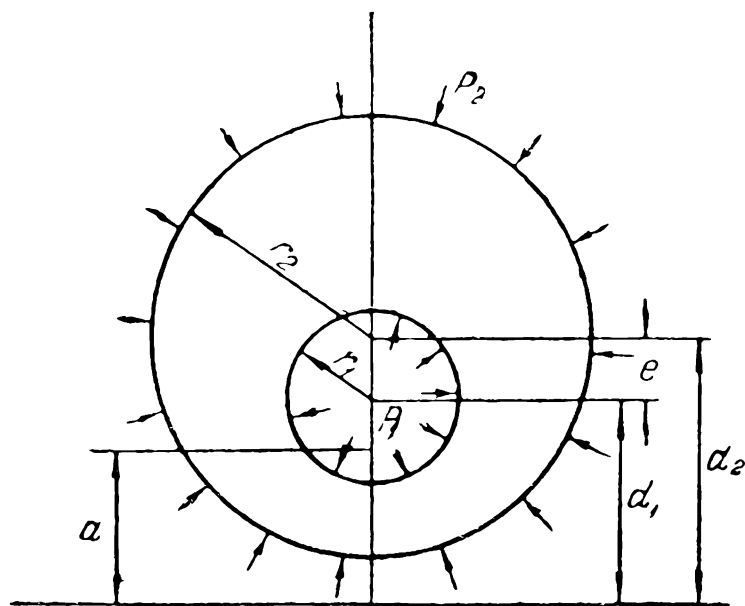
Недостающее уравнение получается из условия на бесконечности, если область содержит линию $\alpha = 0$; в противном случае будем полагать $K = 0$.

Таким образом, задача о плоском напряженном состоянии эксцентрического кольца полностью решена для того случая, когда внешние усилия статически уравновешиваются порознь на каждой из окружностей $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$.

Переходим к частным случаям внешней нагрузки.

§ 43. Эксцентрическая труба под равномерным давлением

Пусть по контуру $\alpha = \alpha_1$ действует равномерное нормальное давление, равное p_1 , а по контуру $\alpha = \alpha_2$ —давление, равное p_2 (фиг. 61).



Фиг. 61.

Граничные условия такой задачи имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha |_{\alpha=\alpha_1} &= -p_1, & \sigma_\alpha |_{\alpha=\alpha_2} &= -p_2, \\ \tau_{\alpha\beta} |_{\alpha=\alpha_1} &= \tau_{\alpha\beta} |_{\alpha=\alpha_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43,1)$$

Рассмотрим функцию напряжений Φ , четную по переменной β и содержащую четыре неопределенных коэффициента:

$$g\Phi = J\alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + (A \operatorname{ch} 2\alpha + B + C \operatorname{sh} 2\alpha) \cos \beta. \quad (43,2)$$

Покажем, что величины A, B, C, J могут быть определены из условий¹ (43,1).

В самом деле, из (36,2) и (41,1) получаем:

$$a\sigma_\alpha = -J \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + A \operatorname{ch} 2\alpha + C \operatorname{sh} 2\alpha - \\ - 2 \operatorname{sh} \alpha \cos \beta (A \operatorname{sh} 2\alpha + C \operatorname{ch} 2\alpha) + B,$$

$$a\tau_{\alpha\beta} = -(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) [J - 2(A \operatorname{sh} 2\alpha + C \operatorname{ch} 2\alpha)] \sin \beta,$$

что после подстановки в (43,1) дает систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} 2\alpha_1 + B + C \operatorname{sh} 2\alpha_1 - \frac{1}{2} J \operatorname{sh} 2\alpha_1 &= -ap_1, \\ A \operatorname{ch} 2\alpha_2 + B + C \operatorname{sh} 2\alpha_2 - \frac{1}{2} J \operatorname{sh} 2\alpha_2 &= -ap_2, \\ A \operatorname{sh} 2\alpha_1 + C \operatorname{ch} 2\alpha_1 - \frac{1}{2} J &= 0, \\ A \operatorname{sh} 2\alpha_2 + C \operatorname{ch} 2\alpha_2 - \frac{1}{2} J &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} = p_y \\ = p_x \\ (43,3) \end{array}$$

Решая эту систему, получим значения постоянных:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{a}{D} (p_1 - p_2) \operatorname{sh} (\alpha_1 + \alpha_2), \\ B &= \frac{a}{D} [p_1 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh} 2\alpha_2 - p_2 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh} 2\alpha_1 + \\ &\quad + (p_1 + p_2) \operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2)], \\ C &= \frac{a}{D} (p_1 - p_2) \operatorname{ch} (\alpha_1 + \alpha_2), \\ J &= \frac{2a}{D} (p_1 - p_2) \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2), \\ D &= 2 \operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2), \end{aligned} \right\} (43,4)$$

что и дает решение поставленной задачи.

¹ Можно было бы, конечно, исходить из общего решения, полученного в предыдущем параграфе.

Подсчитаем напряжение σ_β на контуре с помощью (36,2), (43,2) и (43,4). После выкладок будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\beta^{(1)} = \sigma_\beta \Big|_{\alpha=\alpha_1} &= -p_1 + \frac{4}{D} (p_1 - p_2) (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta) \times \\ &\quad \times [\operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta + \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2)], \\ \sigma_\beta^{(2)} = \sigma_\beta \Big|_{\alpha=\alpha_2} &= -p_2 - \frac{4}{D} (p_1 - p_2) (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta) \times \\ &\quad \times [\operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta - \operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2)]. \end{aligned} \right\} (43,5)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. Эксцентрическая труба под внутренним давлением. Полагая $p_2 = 0$, $p_1 = p$, получаем из (43,5):

$$\frac{1}{p} \sigma_\beta^{(1)} = \frac{4}{D} (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta) [\operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta + \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2)] - 1, \quad (43,6)$$

$$\frac{1}{p} \sigma_\beta^{(2)} = -\frac{4}{D} (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta) [\operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta - \operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2)]. \quad (43,7)$$

Если ввести радиусы кругов r_1 и r_2 , расстояния d_1 и d_2 от начала координат до центров соответствующих окружностей и расстояние e между центрами (эксцентриситет), то, согласно (1,7):

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= a \operatorname{cth} \alpha_1, \quad d_2 = a \operatorname{cth} \alpha_2, \quad e = d_2 - d_1, \\ 2ed_1 &= r_2^2 - r_1^2 - e^2, \quad 2ed_2 = r_2^2 - r_1^2 + e^2, \end{aligned} \right\} (43,8)$$

после чего (43,6) и (43,7) переписываются так:

$$\frac{1}{p} \sigma_\beta^{(1)} = 2 \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{(r_2^2 - e^2)^2 - r_1^2 (r_1 + 2e \cos \beta)^2}{[r_2^2 - (r_1 - e)^2] \cdot [r_2^2 - (r_1 + e)^2]} - 1, \quad (43,9)$$

$$\frac{1}{p} \sigma_\beta^{(2)} = 2 \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{r_2^2 (r_2 - 2e \cos \beta)^2 - (r_1^2 - e^2)^2}{[r_2^2 - (r_1 - e)^2] \cdot [r_2^2 - (r_1 + e)^2]}. \quad (43,10)$$

Из рассмотрения (43,9) можно сделать следующие выводы:

а) Если эксцентриситет больше, чем половина внутреннего радиуса ($e > \frac{1}{2} r_1$), то максимальное напряжение на внутреннем краю достигается в точке, где $\cos \beta = -r_1/2e$:

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(1)}]_{\max} = \frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{(r_2^2 - e^2)^2}{[r_2^2 - (r_1 - e)^2] \cdot [r_2^2 - (r_1 + e)^2]} - 1. \quad (43,11)$$

б) Если эксцентриситет меньше, чем половина внутреннего радиуса ($e < \frac{1}{2} r_1$), то максимальное напряжение на внутреннем краю будет в точке $\beta = \pm \pi$ („тонкая“ часть):

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(1)}]_{\max} = \frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1e - e^2}{r_2^2 - r_1^2 - 2r_1e - e^2} - 1. \quad (43,12)$$

в) Минимальное напряжение на внутреннем краю будет в точке $\beta = 0$ („толстая“ часть):

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(1)}]_{\min} = \frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2 + 2r_1e - e^2}{r_2^2 - r_1^2 + 2r_1e - e^2} - 1. \quad (43,13)$$

В предельном случае $e = 0$ (концентрическое кольцо под внутренним давлением) получаем из (43,9):

$$\frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(1)} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (43,14)$$

что совпадает с известными результатами, получаемыми в полярных координатах (см. [14], стр. 69).

Из рассмотрения (43,10) заключаем следующее:

а) Наибольшее напряжение на внешнем краю будет при $\beta = \pm \pi$ („тонкая“ часть):

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(2)}]_{\max} = \frac{2r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2 + 2r_2e - e^2}{r_2^2 - r_1^2 - 2r_2e + e^2}. \quad (43,15)$$

б) Если эксцентриситет больше, чем половина внешнего радиуса ($e > \frac{1}{2} r_2$), то минимальное напряжение на внешнем

краю будет в точке $\cos \beta = r^2/2e$. Это напряжение отрицательно и по абсолютной величине равно:

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(2)}]_{\min} = \frac{2r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{(r_1^2 - e^2)^2}{[r_2^2 - (r_1 + e)^2] \cdot [r_2^2 - (r_1 - e)^2]}. \quad (43,16)$$

в) Если эксцентриситет меньше, чем половина внешнего радиуса ($e < \frac{1}{2} r_2$), то минимальное напряжение¹ на внешнем краю будет при $\beta = 0$ („толстая“ часть):

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(2)}]_{\min} = \frac{2r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2e - e^2}{r_2^2 - r_1^2 + 2r_2e + e^2}. \quad (43,17)$$

Таким образом, если эксцентриситет не очень велик, то максимум напряжений как на внутренней, так и на внешней поверхностях трубы достигается соответственно в тех точках, где толщина стенок наименьшая ($\beta = \pm \pi$).

Сравнивая (43,12) и (43,15), можно показать, что при выполнении неравенства

$$e < \frac{r_2 - r_1}{2} \quad (43,18)$$

имеет место неравенство:

$$8r_2^3 r_1^2 e < (r_1^2 + r_2^2) (r_2 - r_1 - e) [(r_1 + r_2)^2 - e^2], \quad (43,19)$$

из которого следует, что максимум напряжений на внутреннем краю превышает соответствующий максимум на внешнем краю. В предельном случае $e = 0$ получаем из (43,10);

$$\frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(2)} = \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (43,20)$$

как и должно быть для концентрической трубы.

¹ Это напряжение будет растягивающим при $e < \sqrt{2r_2^2 + r_1^2} - r_2$, сжимающим — в противном случае и нулем при $e = \sqrt{2r_2^2 + r_1^2} - r_2$.

2°. Эксцентрисическая труба под внешним давлением. При этом в (43,5) надо положить $p_1 = 0$, $p_2 = p$. Получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(1)} &= -\frac{4}{D} (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta) [\operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta + \\ &\quad + \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2)], \\ \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(2)} &= \frac{4}{D} (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta) [\operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta - \\ &\quad - \operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2)] - 1 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(1)} &= -\frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{(r_2^2 - e^2)^2 - r_1^2 (r_1 + 2e \cos \beta)^2}{[r_2^2 - (r_1 - e)^2] \cdot [r_2^2 - (r_1 + e)^2]}, \\ \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(2)} &= -\frac{2r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{r_2^2 (r_2 - 2e \cos \beta)^2 - (r_1^2 - e^2)^2}{[r_2^2 - (r_1 - e)^2] \cdot [r_2^2 - (r_1 + e)^2]} - 1. \end{aligned} \right\} (43,21)$$

Точно так же, как в п. 1°, можно установить, что, если эксцентриситет меньше, чем половина внутреннего радиуса ($e < \frac{1}{2} r_1$), то сжатие на внутренней поверхности достигает максимума в тонкой части трубы и минимума — в толстой ее части; если же эксцентриситет больше, чем половина внутреннего радиуса ($e > \frac{1}{2} r_1$), то на внутреннем краю сжатие достигает максимума в точке $\cos \beta = -r_1/2e$. На внешнем краю максимум сжатия достигается всегда в тонкой части трубы, а минимум в толстой части, если $e < \frac{1}{2} r_2$, и в точке $\cos \beta = \frac{r_2}{2e}$, если $e > \frac{1}{2} r_2$.

Аналогично, при выполнении неравенства (43,18) максимум напряжений достигается на внутренней поверхности трубы.

Таким образом, в нормальных случаях, когда эксцентриситет e не очень велик, максимальное напряжение всегда будет достигаться на внутренней поверхности трубы. В случае внутреннего давления это максимальное напряжение

дается формулой (43,12), а в случае внешнего давления — формулой:

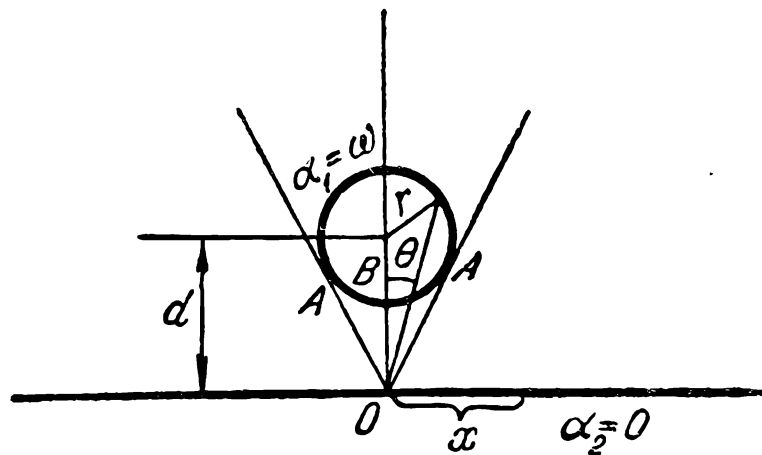
$$-\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(1)}]_{\max} = \frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2 - e^2 - 2er_1}{r_2^2 - r_1^2 - e^2 - 2er_1}. \quad (43,22)$$

Описание экспериментальных исследований, относящихся к задаче о деформации эксцентрической трубы под внутренним давлением и полностью подтверждающих теоретическое решение вопроса, читатель может найти в книге Э. Кокера и Л. Файлона [24].

§ 44. Полуплоскость с круглым отверстием, подверженное равномерному давлению¹

Рассмотрим плоскую область, имеющую форму полуплоскости с круглым отверстием.

Если по контуру отверстия приложено равномерное нормальное давление (фиг. 62), то можно сразу написать выра-



Фиг. 62.

жение для напряжения σ_{β} на контуре, если положить в (43,6) — (43,7) $\alpha_2 = 0$ ($\alpha_1 = \omega$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(0)} &= \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(2)} = -\frac{2}{\operatorname{sh}^2 \omega} \cos \beta (1 - \cos \beta), \\ \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(\omega)} &= \frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(1)} = \frac{2}{\operatorname{sh}^2 \omega} (\operatorname{ch}^2 \omega - \cos^2 \beta) - 1. \end{aligned} \right\} \quad (44,1)$$

¹ Решение этой задачи имеет практическое значение для изучения напряжений, возникающих у заклепочной дыры вблизи прямолинейного края, когда раскаленная заклепка расклепывается под давлением.

Пользуясь соотношениями (фиг. 62):

$$d = \operatorname{cth} \omega, \quad r = \frac{a}{\operatorname{sh} \omega}, \quad x = x \Big|_{\alpha=0} = a \frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta}, \quad (44,2)$$

можно напряжение на прямолинейном краю представить в виде:

$$\frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(0)} = -4r^2 \frac{x^2 - d^2 + r^2}{(x^2 + d^2 - r^2)^2}. \quad (44,3)$$

Максимальное растяжение достигается в точке $x = 0$:

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(0)}]_{\max} = 4 \frac{r^2}{d^2 - r^2} \quad (44,4)$$

В точках $x = \pm \sqrt{d^2 - r^2}$ напряжение обращается в нуль; затем напряжение делается сжимающим, достигающим по абсолютной величине максимального значения при $x = \pm \sqrt{3(d^2 - r^2)}$, равного $1/8$ значения, даваемого (44,4); при дальнейшем возрастании x до ∞ , напряжение монотонно убывает до нуля.

Напряжение на обводе отверстия можно записать так:

$$\frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(\omega)} = 1 + 2 \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{sh}^2 \omega},$$

после чего оно очень удобно выражается через полярный угол θ (фиг. 62). В самом деле,

$$\operatorname{tg} \theta = x/y = \sin \beta / \operatorname{sh} \omega,$$

т. е.

$$\frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(\omega)} = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \theta, \quad (44,5)$$

Отсюда ясно, что растяжение на обводе отверстия имеет минимум при $\theta = 0$ (точка B), равный p , и достигает максимума в точках A , где $\operatorname{tg} \theta$ максимален и равен $r/\sqrt{d^2 - r^2}$.

Имеем

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(\omega)}]_{\max} = \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2}. \quad (44,6)$$

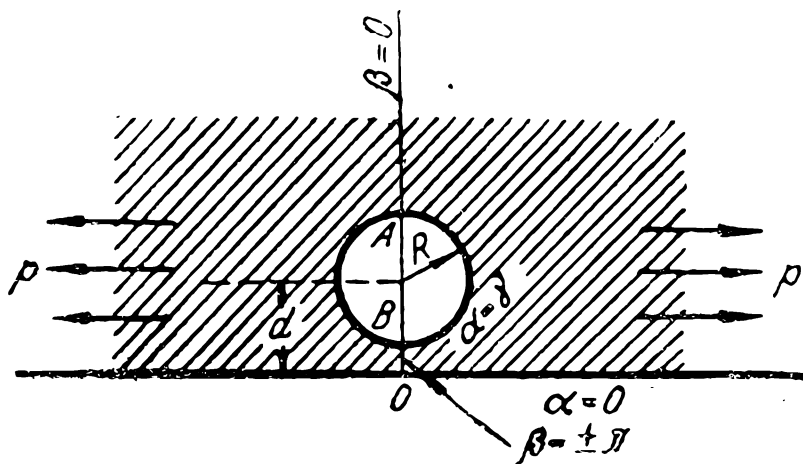
Сравнивая (44,6) с (44,4), видим, что максимальные напряжения на прямолинейном краю и на обводе отверстия совпадают при $d/r = \sqrt{3}$:

$$\frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(0)}]_{\max} = \frac{1}{p} [\sigma_{\beta}^{(\omega)}]_{\max} = 2. \quad (44,7)$$

Если $d/r > \sqrt{3}$, то максимальное напряжение будет на окружности отверстия (в точках A); если же $d/r < \sqrt{3}$, то максимальное напряжение будет на прямолинейном краю в точке O ,

§ 45. Влияние круглого отверстия на напряжения в растянутой полуплоскости

Рассмотрим полуплоскость, содержащую круглое отверстие ($\alpha = \gamma$) и растягиваемую постоянным усилием p на бесконечности (фиг. 63).



Фиг. 63.

Требуется разыскать бигармоническую функцию напряжений, удовлетворяющую условиям:

$$\sigma_{\alpha} |_{\alpha=0} = \tau_{\alpha\beta} |_{\alpha=0} = \sigma_{\alpha} |_{\alpha=\gamma} = \tau_{\alpha\beta} |_{\alpha=\gamma} = 0 \quad (45,1)$$

и обеспечивающую заданную систему напряжений на бесконечности.

Положим:

$$\Phi = \Phi_0 + ap F, \quad (45,2)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} p y^2. \quad (45,3)$$

Эта последняя функция дает $\sigma_x = p$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, т. е. удовлетворяет условию на бесконечности.

Следовательно, бигармоническая функция F должна быть подобрана так, чтобы снять напряжения σ_{α} и $\tau_{\alpha\beta}$, возникающие на краю отверстия от наличия функции Φ_0 ; кроме того,

функция F не должна изменять напряжения на бесконечности. Наконец, F должна быть четной функцией переменной β .

В соответствии с этим, имеем из (41,11):¹

$$\left. \begin{aligned} gF &= J\alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + (A_1 \operatorname{ch} 2\alpha + B_1 + \\ &+ C_1 \operatorname{sh} 2\alpha) \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(\alpha) \cos n\beta, \\ f_n(\alpha) &= A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + \\ &+ C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (45,4)$$

Полагая в (42,1) и (42,2) $\alpha = 0$ и учитывая, что напряжения σ_α^0 и $\tau_{\alpha\beta}^0$, происходящие от функции Φ_0 , равны нулю при $\alpha = 0$, имеем из первых двух условий (45,1):

$$A_n + B_n = (n+1)C_n + (n-1)D_n = 0, \quad (n \geq 1), \quad (45,5)$$

после чего (45,4) можно записать:

$$\begin{aligned} gF &= J\alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + A_1 (\operatorname{ch} 2\alpha - 1) \cos \beta + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \{A_n [\operatorname{ch}(n+1)\alpha - \operatorname{ch}(n-1)\alpha] + E_n [(n-1) \operatorname{sh}(n+1) \\ &+ 1)\alpha - (n+1) \operatorname{sh}(n-1)\alpha]\} \cos n\beta. \end{aligned} \quad (45,6)$$

Из (45,6) видно, что условия на бесконечности

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

не нарушены наличием функции F , ибо

$$(gF)_\infty = (gF)_{\alpha=\beta=0} = 0.$$

Остается удовлетворить еще двум условиям (45,1), которые, согласно (36,2), можно записать так:

$$\begin{aligned} \left\{ \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g\Phi) \right\}_{\alpha=\gamma} &= \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi) \right]_{\alpha=\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (45,7)$$

¹ $K = 0$ в соответствии с замечанием, сделанным в конце § 42 (стр. 205).

Применяя (45,2), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (gF) \right]_{\alpha=\gamma} &= - \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{g\Phi_0}{ap} \right) \right]_{\alpha=\gamma}, \\ \left\{ \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (gF) \right\}_{\alpha=\gamma} &= \\ &= - \left\{ \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] \left(\frac{g\Phi_0}{ap} \right) \right\}_{\alpha=\gamma}. \end{aligned} \right\} (45,8)$$

Второе из этих условий можно было бы преобразовать так же, как это было сделано в § 38 (стр. 177); однако, в данном случае это не является необходимостью, ибо здесь мы имеем дело с рядами, которые, будучи умножены на $\cos \beta$ или $\sin \beta$, могут быть снова преобразованы в некоторый ряд Фурье.

Разложим функцию

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}$$

в тригонометрический ряд, пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} \cos n\beta.$$

Имеем:

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} \cos n\beta \right). \quad (45,9)$$

Подставляя (45,6) и (45,9) в (45,8), имеем систему уравнений, в результате решения которой получаются значения постоянных:

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{1}{\operatorname{ch} 2\gamma}, \quad A_1 = \frac{e^{-2\gamma}}{2 \operatorname{ch} 2\gamma}, \\ A_n &= - \frac{n^2 \operatorname{sh}^2 \gamma - n \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma + e^{-n\gamma} \operatorname{sh} n\gamma}{2 [\operatorname{sh}^2 n\gamma - n^2 \operatorname{sh}^2 \gamma]}, \\ E_n &= \frac{n \operatorname{sh}^2 \gamma}{2 [\operatorname{sh}^2 n\gamma - n^2 \operatorname{sh}^2 \gamma]}. \end{aligned} \right\} (45,10)$$

Подставляя (45,10) в (45,6), имеем из (45,2) и (45,3)

$$\begin{aligned} \frac{g\Phi}{ap} = & \frac{1}{\operatorname{ch} 2\gamma} [\alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + \operatorname{ch} (2\gamma - \alpha) \operatorname{sh} \alpha \cos \beta] + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} [n \operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} (\alpha - \gamma) \operatorname{sh} n\alpha - \\ & - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} n (\alpha - \gamma) \operatorname{sh} n\gamma] \frac{\cos n\beta}{\operatorname{sh}^2 n\gamma - n^2 \operatorname{sh}^2 \gamma}. \end{aligned} \quad (45,11)$$

Подсчитываем напряжение σ_β на контуре, применяя формулу (36,2). После выкладок получаем:

На обводе отверстия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} \sigma_\beta^{(i)} = & 2 (\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta) \left[\frac{\operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch}^2 \gamma} + \sum_{n=2}^{\infty} P_n \cos n\beta \right], \\ P_n = & n \frac{(n-1) \operatorname{sh} (n+1)\gamma - (n+1) \operatorname{sh} (n-1)\gamma}{2 (\operatorname{sh}^2 n\gamma - n^2 \operatorname{sh}^2 \gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (45,12)$$

На прямолинейном краю:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} \sigma_\beta^{(0)} = & 1 - (1 - \cos \beta) \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\beta, \\ Q_n = & 4n \frac{n^2 \operatorname{sh}^2 \gamma - n \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma + e^{-n\gamma} \operatorname{sh} n\gamma}{2 (\operatorname{sh}^2 n\gamma - n^2 \operatorname{sh}^2 \gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (45,13)$$

Ряд, входящий в (45,12), сходится плохо. Но если положить

$$P_n = 2n (n \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma) e^{-n\gamma} + T_n \quad (45,14)$$

и воспользоваться суммой ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n (n \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma) e^{-n\gamma} \cos n\beta = & \frac{1}{2 (\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta)} \times \\ & \times \left[1 - 2 \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta)^2} \right], \end{aligned} \quad (45,15)$$

то, вместо (45,12), будем иметь:

$$\frac{1}{p} \sigma_{\beta}^{(\gamma)} = 2 \left[1 - 2 \frac{\text{sh}^2 \gamma \sin^2 \beta}{(\text{ch} \gamma - \cos \beta)^2} + 2 (\text{ch} \gamma - \cos \beta) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\text{sh} \gamma}{\text{ch} 2\gamma} + 2e^{-2\gamma} \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} T_n \cos n\beta \right] \right], \quad (45,16)$$

причем ряд, входящий в последнее выражение, сходится очень быстро.

Приводим табл. 18 напряжений σ_{β} для точек O , B и A (фиг. 63), причем значения γ брались от 0,6 до 2,2 через 0,2.

Таблица 18

| γ | $\lambda = \frac{d}{r} = \text{ch} \gamma$ | $\left[\frac{\sigma_{\beta}}{p} \right]_O$ | $\left[\frac{\sigma_{\beta}}{p} \right]_B$ | $\left[\frac{\sigma_{\beta}}{p} \right]_A$ |
|----------|--|---|---|---|
| 0 | 1 | — | — | 3,999 |
| 0,6 | 1,19 | — 4,08 | 5,06 | 3,36 |
| 0,8 | 1,34 | — 1,96 | 4,37 | 3,27 |
| 1,0 | 1,54 | — 0,902 | 3,92 | 3,20 |
| 1,2 | 1,81 | — 0,270 | 3,61 | 3,15 |
| 1,4 | 2,15 | 0,134 | 3,40 | 3,12 |
| 1,6 | 2,58 | 0,405 | 3,25 | 3,09 |
| 1,8 | 3,11 | 0,591 | 3,16 | 3,07 |
| 2,0 | 3,76 | 0,721 | 3,10 | 3,05 |
| 2,2 | 4,57 | 0,810 | 3,06 | 3,04 |
| ∞ | ∞ | 1 | 3 | 3 |

Расчеты производились по формулам, вытекающим из (45,12)—(45,13):

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\sigma_{\beta}}{p} \right]_O &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_n, \\ \left[\frac{\sigma_{\beta}}{p} \right]_B &= 2 (\text{ch} \gamma + 1) \left[\frac{\text{sh} \gamma}{\text{ch} 2\gamma} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n P_n \right], \\ \left[\frac{\sigma_{\beta}}{p} \right]_A &= 2 (\text{ch} \gamma - 1) \left[\frac{\text{sh} \gamma}{\text{ch} 2\gamma} + \sum_{n=2}^{\infty} P_n \right]. \end{aligned} \right\} \quad (45,17)$$

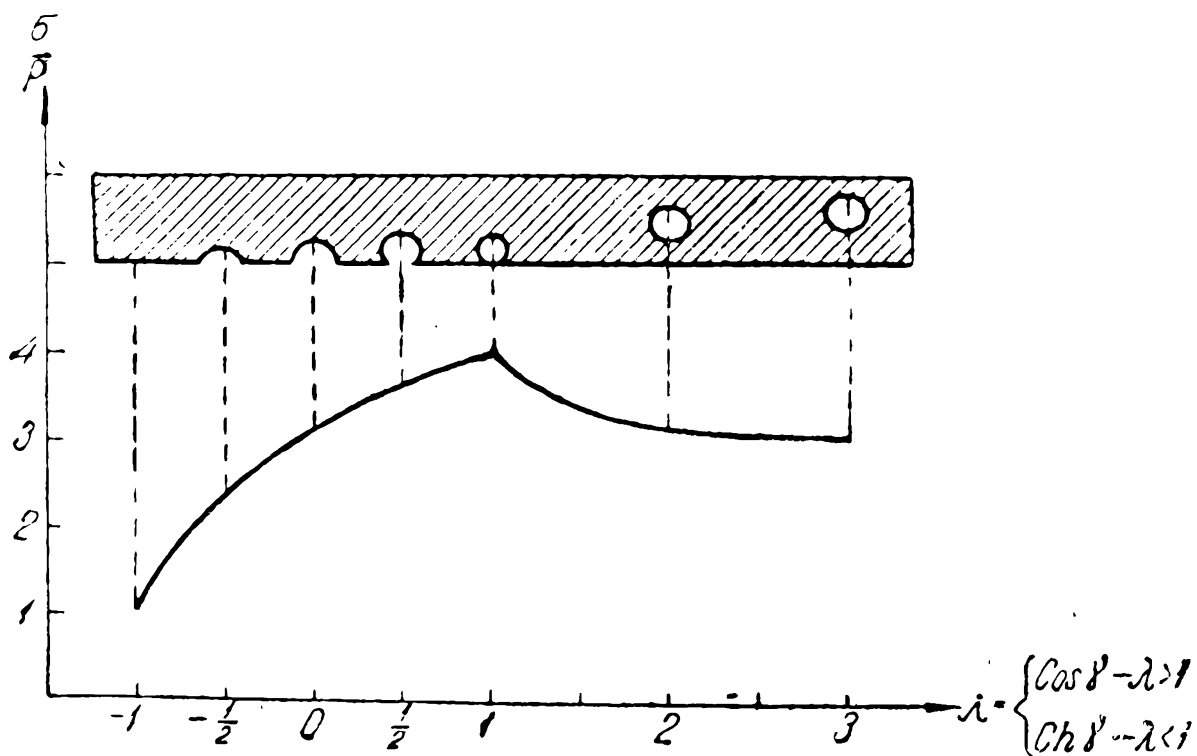
Из рассмотрения этой таблицы видно, что максимальное растягивающее напряжение всегда будет в той точке контура отверстия, которая ближе всего отстоит от прямолинейного края.

При $\gamma \rightarrow \infty$ отверстие удаляется на бесконечно далекое расстояние от прямолинейного края, т. е. мы имеем дело с растянутой бесконечной плоскостью, содержащей круглое отверстие. Результат

$$\left[\frac{\sigma_{\beta}}{\rho} \right]_B = \left[\frac{\sigma_{\beta}}{\rho} \right]_A = 3, \quad \left[\frac{\sigma_{\beta}}{\rho} \right]_0 = 1$$

соответствует известному факту, что концентрация напряжений на краю круглого отверстия в бесконечной растянутой полосе равна 3.

Предельный случай $\gamma = 0$, если при этом и $a = 0$ ($d = r$ — конечные величины), соответствует растянутой полуплоскости, содержащей круглое отверстие, касательное к прямолинейному краю.



Фиг. 64.

Полагая, как обычно, $n\gamma = 0$, $\gamma = d()$, вместо ряда в третьем равенстве (45,17), получаем интеграл:

$$\left[\frac{\sigma_{\beta}}{\rho} \right]_A = \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } \theta - \text{sh } \theta}{\text{sh}^2 \theta - \theta^2} (\theta) d\theta, \quad (45,18)$$

Формула (45,18) совпадает с формулой (40,13), как и должно быть.

Экспериментальное исследование напряжений в широкой полосе с круглым отверстием вблизи края, произведенное Кокером [26], подтверждает результаты, полученные теоретически.

Числовые данные табл. 17 и 18 позволяют построить непрерывный график концентрации напряжений в полуплоскости, содержащей как сегментную выемку на краю, так и круглое отверстие (фиг. 64). Следует только помнить, что при $\lambda > 1$ на этом графике даны напряжения в точках A (фиг. 63), в то время как максимальное напряжение достигается в точках B .

§ 46. Растяжение бесконечной плоскости с двумя круглыми отверстиями

Общее решение, данное в § 42, позволяет получить решение задачи о напряженном состоянии в бесконечной плоскости, ослабленной двумя круглыми отверстиями, если на контурах отверстий заданы внешние усилия.

Нетрудно приспособить, так же, как это сделано в предыдущем параграфе, это решение на тот случай, когда контуры отверстий свободны от усилий, но зато заданы усилия на бесконечности.

Мы приводим принадлежащее Лингу [27] непосредственное решение такой задачи в том случае, когда радиусы отверстий и расстояния их центров от оси симметрии равны между собой (фиг. 65).

Полагая, как обычно,

$$\Phi = \Phi_0 + a\rho F, \quad (46,1)$$

ищем F в виде четной функции переменных α и β :

$$\left. \begin{aligned} gF &= K (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \lg (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha) \cos n\beta, \end{aligned} \right\} \quad (46,2)$$

$$f_n(\alpha) = A_n \operatorname{ch} (n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch} (n-1)\alpha.$$

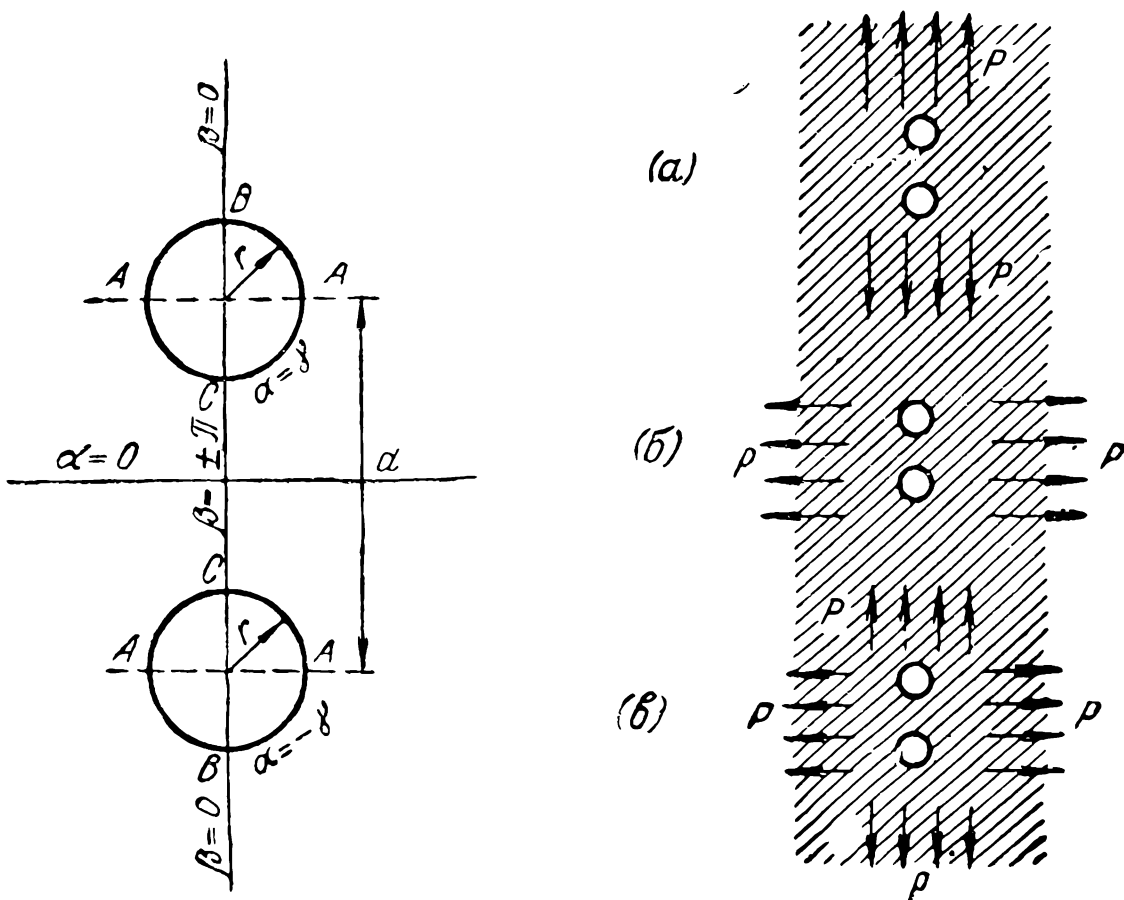
Точно так же, как в § 37, имеем:

1) в случае продольного растяжения (фиг. 65а):

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}; \quad (46,3)$$

2) в случае поперечного растяжения (фиг. 65б):

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}; \quad (46,4)$$



Фиг. 65.

3) в случае всестороннего растяжения (фиг. 65в):

$$\frac{g\Phi_0}{ap} = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta). \quad (46,5)$$

Граничные условия задачи таковы:

$$\sigma_\alpha |_{\alpha = \pm \gamma} = \tau_{\alpha\beta} |_{\alpha = \pm \gamma} = 0. \quad (46,6)$$

Кроме того, на бесконечности ($\alpha = \beta = 0$) должно иметь место равенство $gF|_\infty = 0$, или

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) = 0. \quad (46,7)$$

Условия (46,6) послужат нам для выражения постоянных A_n и B_n через коэффициент K , который будет определен впоследствии при помощи равенства (46,7).

Составим по формулам (36,2) напряжения σ_α^0 и $\tau_{\alpha\beta}^0$, соответствующие функции напряжений Φ_0 , и разложим их в тригонометрические ряды:

$$\frac{1}{p} \sigma_\alpha^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\alpha) \cos n\beta, \quad \frac{1}{p} \tau_{\alpha\beta}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(\alpha) \sin n\beta. \quad (46,8)$$

В первом случае:

$$\frac{1}{p} \sigma_\alpha^0 = \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta)^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}, \quad \frac{1}{p} \tau_{\alpha\beta}^0 = - \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta (1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta)}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}; \quad (46,9)$$

во втором случае:

$$\frac{1}{p} \sigma_\alpha^0 = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}, \quad \frac{1}{p} \tau_{\alpha\beta}^0 = \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta (1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \beta)}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}; \quad (46,10)$$

в третьем случае:

$$\frac{1}{p} \sigma_\alpha^0 = 1, \quad \frac{1}{p} \tau_{\alpha\beta}^0 = 0. \quad (46,11)$$

Поэтому для получения коэффициентов $\sigma_n(\alpha)$ и $\tau_n(\alpha)$ вычисляем интегралы:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n\beta \, d\beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} = (-1)^{n+1} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin \beta \sin n\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} \, d\beta = \frac{2\pi}{\operatorname{sh} \alpha} \cdot e^{-n\alpha},$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n\beta \, d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} = \frac{2\pi}{\operatorname{sh}^3 \alpha} e^{-n\alpha} (n \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha),$$

после чего имеем в первом случае:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= e^{-\alpha} \operatorname{ch} \alpha, \\ \sigma_n &= \tau_n = 2e^{-n\alpha} \operatorname{sh} \alpha (n \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{ch} \alpha) \quad (n \geq 1); \end{aligned} \right\} \quad (46,12)$$

во втором случае:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= e^{-\alpha} \operatorname{sh} \alpha, \\ \sigma_n &= \tau_n = 2e^{-n\alpha} \operatorname{sh} \alpha (n \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{ch} \alpha) \quad (n \geq 1); \end{aligned} \right\} \quad (46,13)$$

в третьем случае:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_n = \tau_n = 0 \quad (n \geq 1). \quad (46,14)$$

Выпишем по формулам (36,2) напряжения σ_α и $\tau_{\alpha\beta}$, соответствующие функции напряжений F :

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= -\frac{1}{2}K(\operatorname{ch} 2\alpha - 2\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - \cos 2\beta) + f_1(\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)(n-2)f_{n-1}(\alpha) - \\ &- 2(n^2-1)f_n(\alpha)\operatorname{ch} \alpha + (n+1)(n+2) \times \\ &\quad \times f_{n+1}(\alpha) - 2\operatorname{sh} \alpha f'_n(\alpha)] \cos n\beta, \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -K \operatorname{sh} \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)f'_{n-1}(\alpha) - \\ &\quad - 2n \operatorname{ch} \alpha f'_n(\alpha) + (n+1)f'_{n+1}(\alpha)] \sin n\beta. \end{aligned} \right\} (46,15)$$

Применяя теперь граничные условия (46,6) и используя равенства (46,15) и (46,8), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} -2\sigma_0 &= 2f_1(\gamma) - K \operatorname{ch} 2\gamma, \\ -2n\tau_n &= \psi_{n-1} - 2\psi_n \operatorname{ch} \gamma + \psi_{n+1} - \\ &\quad - 2\psi'_n \operatorname{sh} \gamma + 2K(\delta_{1n} \operatorname{ch} \gamma - \delta_{2n}), \\ 2\tau_n &= \psi'_{n-1} - 2\psi'_n \operatorname{ch} \gamma + \psi'_{n+1} + \\ &\quad + 2K\delta_{1n} \operatorname{sh} \gamma, \\ \psi_n &= (n-1)n(n+1)f_n(\gamma), \quad \psi'_n = nf'_n(\gamma). \end{aligned} \right\} (n \geq 1) \quad (46,16)$$

Здесь

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n. \end{cases} \quad (46,17)$$

Решая систему (46,16), получим:

$$\left. \begin{aligned} 2f_1(\alpha) &= K \operatorname{ch} 2\alpha - 2\sigma_0, \\ \psi'_1 &= 2Ke^{-\gamma} \operatorname{sh} \gamma - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \tau_m e^{-m\gamma} \end{aligned} \right\} (46,18)$$

и для $n \geq 2$

$$\left. \begin{aligned} \psi'_n \operatorname{sh} \gamma &= \psi'_1 \operatorname{sh} n\gamma - 2K \operatorname{sh} (n-1)\gamma \operatorname{sh} \gamma + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{n-1} \tau_m \operatorname{sh} (n-m)\gamma, \end{aligned} \right\} (46,19)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_n \operatorname{sh} \gamma &= \psi'_1 (n \operatorname{ch} n\gamma - \operatorname{cth} \gamma \operatorname{sh} n\gamma) + \\ &+ K [(n+1) \operatorname{sh} (n-2) \gamma - (n-1) \operatorname{sh} n\gamma] - \\ &- 2 \sum_{m=1}^{n-1} [(n-m) \tau_m \operatorname{ch} (n-m) \gamma - \\ &- (m\sigma_m + \tau_m \operatorname{cth} \gamma) \operatorname{sh} (n-m) \gamma]. \end{aligned} \right\} (46,19)$$

Подставляя коэффициенты σ_n и τ_n из (46,12) — (46,14), получим:

$$\left. \begin{aligned} 2f_1(\gamma) &= K \operatorname{ch} 2\gamma - 2\sigma_0, \\ \psi_n e^{n\gamma} &= -2K (n \operatorname{sh} \gamma + \operatorname{ch} \gamma) \pm n(n^2 - 1) \operatorname{sh} \gamma, \\ &\quad (n \geq 2) \\ \psi'_n e^{n\gamma} &= 2K \operatorname{sh} \gamma \mp n(n \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma), \quad (n \geq 1), \end{aligned} \right\} (46,20)$$

причем верхний знак относится к случаю продольного растяжения, а нижний — к случаю поперечного растяжения; для случая всестороннего растяжения члены, перед которыми стоит двойной знак, вообще отсутствуют.

Решая систему (46,20) относительно A_n и B_n , будем иметь после выкладок:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2K(e^{-n\gamma} \operatorname{sh} n\gamma + ne^{-\gamma} \operatorname{sh} \gamma) \pm n(n+1)(e^{-n\gamma} \operatorname{ch} n\gamma - ne^{-\gamma} \operatorname{sh} \gamma)}{n(n+1)(\operatorname{sh} 2n\gamma + n \operatorname{sh} 2\gamma)}, \\ B_n &= \frac{2K(e^{-n\gamma} \operatorname{sh} n\gamma + ne^{\gamma} \operatorname{sh} \gamma) \pm n(n-1)(e^{-n\gamma} \operatorname{ch} n\gamma - ne^{\gamma} \operatorname{sh} \gamma)}{n(n-1)(\operatorname{sh} 2n\gamma + n \operatorname{sh} 2\gamma)}, \\ B_1 &= \frac{1}{2} (K \operatorname{th} \gamma \operatorname{ch} 2\gamma - 2\sigma_0 \mp e^{-2\gamma} \operatorname{cth} 2\gamma). \end{aligned} \right\} (46,21)$$

Подставляя (46,21) в (46,7), получим для определения постоянной K в случае всестороннего растяжения уравнение:

$$K \left[\frac{1}{2} + \operatorname{th} \gamma \operatorname{sh}^2 \gamma - \right. \\ \left. - 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-n\gamma} \operatorname{sh} n\gamma + n \operatorname{sh} \gamma (n \operatorname{sh} \gamma + \operatorname{ch} \gamma)}{n(n^2 - 1)(\operatorname{sh} 2n\gamma + n \operatorname{sh} 2\gamma)} \right] = 1. \quad (46,22)$$

В случае продольного или поперечного растяжений в (46,22) справа вместо единицы нужно подставить:

$$\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} - 2 \operatorname{sh}^2 \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{sh} 2n\gamma + n \operatorname{sh} 2\gamma}. \quad (46,23)$$

Напряжение σ_3 на обводе отверстия дается формулой:¹

$$\frac{1}{p} [\sigma_3]_{\alpha=\gamma} = 2 (\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta) \times \\ \times \left[K \operatorname{sh} \alpha \left(1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n\gamma \cos n\beta}{\operatorname{sh} 2n\gamma + n \operatorname{sh} 2\gamma} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (n \operatorname{sh} n\gamma \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} n\gamma \operatorname{ch} \gamma) \cos n\beta}{\operatorname{sh} 2n\gamma + n \operatorname{sh} 2\gamma} \right]. \quad (46,24)$$

Расчеты максимального значения напряжения $(\sigma_\beta)_{\alpha=\gamma}$ производились для всех трех случаев, причем для продольного растяжения оно имеет место почти в точках *A* (фиг. 65), для поперечного растяжения — в точках *B* или *C*, в зависимости от размеров отверстий и их взаимного расположения, и для всестороннего растяжения — всегда в точках *C* (см. табл. 19).

Таблица 19

| $\frac{d}{2r} = \operatorname{ch} \gamma$ | Растяжение | | | | |
|---|------------|---------------------------------------|---|---|---|
| | продольное | поперечное | | всестороннее | |
| | | $\left[\frac{\sigma_3}{p} \right]_A$ | $\left[\frac{\sigma_\beta}{p} \right]_B$ | $\left[\frac{\sigma_\beta}{p} \right]_C$ | $\left[\frac{\sigma_\beta}{p} \right]_B$ |
| 1 | 2,57 | 3,87 | ∞ | 2,89 | ∞ |
| 1,5 | 2,62 | 3,15 | 3,26 | 2,26 | 2,89 |
| 2 | 2,70 | 3,07 | 3,02 | 2,16 | 2,41 |
| 3 | 2,83 | 3,02 | 2,99 | 2,08 | 2,16 |
| 5 | 2,93 | 3,004 | 2,997 | 2,03 | 2,05 |
| 8 | 2,97 | 3,001 | 2,999 | 2,01 | 2,02 |
| ∞ | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |

Значение β^* , соответствующее точкам *A*, определяется условием

$$x_A = \frac{a \sin \beta^*}{\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta^*} = r = \frac{a}{\operatorname{sh} \gamma},$$

или после выкладок:

$$\cos \beta^* = 1/\operatorname{ch} \gamma. \quad (46,25)$$

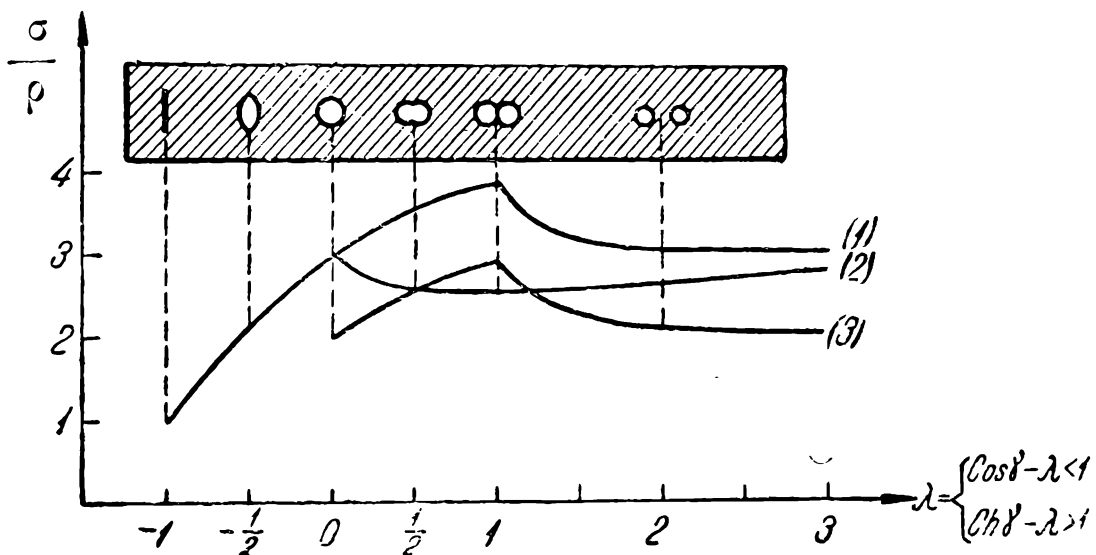
¹ Знаки следует выбирать в соответствии с пояснением, данным к формуле (46,20).

Предельный случай $\gamma = \infty$ соответствует тому, что наличие одного отверстия не влияет на распределение напряжений в плоскости с другим отверстием, т. е. мы имеем дело с плоскостью, содержащей одно круглое отверстие. Численные результаты в этом случае совпадают с известными результатами, получаемыми с помощью полярных координат.

Предельный случай $\gamma = 0$, если при этом $a = 0$ ($d = 2r$), соответствует бесконечной плоскости, содержащей два взаимно касательных круглых отверстия.

Обозначая $n\gamma = \theta$, $\gamma = d\theta$, $K\gamma^2 = L$, получим из (46,22) для определения L уравнение, совпадающее с (39,18) а из (46,24) — формулы для напряжений, совпадающие с (39,20) — (39,21), как и должно быть.

Результаты, полученные в табл. 16 и 19, изображены на фиг. 66, дающей непрерывный график концентрации напряжений в плоскости, содержащей как отверстие в виде круговой луночки, так и два круглых отверстия. Кривая 1 соответствует случаю продольного растяжения, 2 — поперечного растяжения и 3 — всестороннего растяжения (в терминах § 37).



Фиг. 66.

Следует помнить, что здесь, так же, как и на фиг. 64, в случае $\lambda > 1$ на кривых 1 и 3 даны напряжения в точках B (фиг. 65), не являющиеся максимальными для случая всестороннего растяжения, а также не всегда максимальные для продольного растяжения.

В заключение гл. VII заметим, что она написана нами по материалам работ С. А. Чаплыгина и Н. С. Аржаникова [1] и Джеффри [2].

ТАБЛИЦА НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ
(пределы 0 и ∞)

$$m \int \frac{\cos m\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} d\alpha = \int \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} d\alpha =$$

$$= \frac{m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} \frac{\operatorname{sh} m\beta}{\sin \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (1)$$

$$m \int \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} d\alpha = 2 \int \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} d\alpha =$$

$$= \frac{m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} \frac{m \operatorname{ch} m\beta \sin \beta - \operatorname{sh} m\beta \cos \beta}{\sin^3 \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (2)$$

$$m \int \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} d\alpha = 3 \int \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^4} d\alpha =$$

$$= \frac{m\pi}{2 \operatorname{sh} m\pi \sin^5 \beta} [m^2 \operatorname{sh} m\beta \sin^2 \beta - 3m \operatorname{ch} m\beta \sin \beta \cos \beta +$$

$$+ \operatorname{sh} m\beta (3 - 2 \sin^2 \beta)] \quad (|\beta| < \pi) \quad (3)$$

$$\int \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^4} d\alpha = \frac{\pi}{6 \operatorname{sh} m\pi \sin^7 \beta} [m^3 \operatorname{ch} m\beta \sin^3 \beta -$$

$$- 6m^2 \operatorname{sh} m\beta \sin^2 \beta \cos \beta + m \operatorname{ch} m\beta \sin \beta (15 - 11 \sin^2 \beta) +$$

$$+ 3 \operatorname{sh} m\beta \cos \beta (2 \sin^2 \beta - 5)] \quad (|\beta| < \pi) \quad (4)$$

$$\int \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} = \frac{\beta}{\sin \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (5)$$

$$\int \frac{d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} = \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\sin^3 \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (6)$$

$$\int \frac{d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} = \frac{\beta (3 - 2 \sin^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta}{2 \sin^5 \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (7)$$

$$\int \frac{d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^4} = \frac{1}{6 \sin^7 \beta} [3\beta \cos \beta (2 \sin^2 \beta - 5) + \sin \beta (15 - 11 \sin^2 \beta)] \quad (|\beta| < \pi) \quad (8)$$

$$\int \frac{d\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^5} = \frac{1}{24 \sin^9 \beta} [3\beta (35 - 40 \sin^2 \beta + 8 \sin^4 \beta) + 5 \sin \beta \cos \beta (10 \sin^2 \beta - 21)] \quad (|\beta| < \pi) \quad (9)$$

$$m \int \frac{\cos m\alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} d\alpha = \int \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} d\alpha = \begin{cases} \frac{m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} \cdot \frac{\operatorname{sh} m(\pi - \beta)}{\sin \beta} & (0 < \beta < \pi) \\ -\frac{m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} \cdot \frac{\operatorname{sh} m(\pi + \beta)}{\sin \beta} & (-\pi < \beta < 0) \end{cases} \quad (10)$$

$$m \int \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} d\alpha = \int \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} d\alpha = \begin{cases} \frac{m\pi}{\operatorname{sh} m\pi \sin^3 \beta} [m \operatorname{ch} m(\pi - \beta) \sin \beta + \operatorname{sh} m(\pi - \beta) \cos \beta] & (0 < \beta < \pi) \\ \frac{m\pi}{\operatorname{sh} m\pi \sin^3 \beta} [m \operatorname{ch} m(\pi + \beta) \sin \beta - \operatorname{sh} m(\pi + \beta) \cos \beta] & (-\pi < \beta < 0) \end{cases} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} d\alpha &= \\ &= \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} m\pi \sin^5 \beta} [m^2 \operatorname{sh} m(\pi - \beta) \sin^2 \beta + \\ &+ 3m \operatorname{ch} m(\pi - \beta) \sin \beta \cos \beta + \\ &+ (\sin^2 \beta + 3 \cos^2 \beta) \operatorname{sh} m(\pi - \beta)] \quad (0 < \beta < \pi) \\ \int \frac{\cos m\alpha}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} d\alpha &= \\ &= \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} m\pi \sin^5 \beta} [-m^2 \operatorname{sh} m(\pi + \beta) \sin^2 \beta + \\ &+ 3m \operatorname{ch} m(\pi + \beta) \sin \beta \cos \beta - \\ &- (\sin^2 \beta + 3 \cos^2 \beta) \operatorname{sh} m(\pi + \beta)] \quad (-\pi < \beta < 0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\int \lg \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \cos m\alpha \, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) & (0 < \beta < \pi) \\ -\frac{\pi}{m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) & (-\pi < \beta < 0) \end{cases} \quad (13)$$

$$\int \frac{\cos m\alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta} \, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \sin 2\beta} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) & (0 < \beta < \pi) \\ -\frac{\pi}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \sin 2\beta} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) & (-\pi < \beta < 0) \end{cases} \quad (14)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin m\alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta} \, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \cos \beta} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) & (0 < \beta < \pi) \\ \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \cos \beta} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) & (-\pi < \beta < 0) \end{cases} \quad (15)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \, dm = \frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (16)$$

$$\int \frac{m \operatorname{ch} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \, dm = \frac{1}{2} \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \quad (|\beta| < \pi) \quad (17)$$

$$\int \frac{m^2 \operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \, dm =$$

$$= \frac{1}{2} \sin \beta \frac{2 - \operatorname{ch}^2 \alpha + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} \quad (|\beta| < \pi) \quad (18)$$

$$\int \frac{\operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \, dm = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (19)$$

$$\int \frac{m \operatorname{sh} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} \, dm = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \quad (|\beta| < \pi) \quad (20)$$

$$\int \frac{m^2 \operatorname{ch} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^3} (\sin^2 \beta + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + 1) \quad (|\beta| < \pi) \quad (21)$$

$$\int \frac{\operatorname{ch} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{ch} m\pi} dm = \frac{\cos \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (22)$$

$$\int \frac{m \operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{ch} m\pi} dm = \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \frac{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} \quad (|\beta| < \pi) \quad (23)$$

$$\int \frac{m^2 \cos m\alpha}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{1 - \operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch}^3 \alpha} \quad (24)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{ch} m\pi} dm = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (|\beta| < \pi) \quad (25)$$

$$\int \frac{\operatorname{ch} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} dm = 2 \frac{\cos \beta \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta} \quad \left(|\beta| < \frac{\pi}{2}\right) \quad (26)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta} \quad \left(|\beta| < \frac{\pi}{2}\right) \quad (27)$$

$$\int \frac{m}{\operatorname{sh} m\pi} dm = \frac{1}{4} \quad (28)$$

$$\int \frac{m^3}{\operatorname{sh} m\pi} dm = \frac{1}{8} \quad (29)$$

$$\int \frac{dm}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} = 1 \quad (30)$$

$$\int \frac{m^2}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} dm = 1 \quad (31)$$

$$\int \frac{m}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} dm = 1 \quad (32)$$

$$\int \frac{m \operatorname{ch} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh} 2m\pi} dm = \frac{1}{8} \frac{1 + \operatorname{ch} \alpha/2 \cos \beta/2}{\left(\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2}\right)^2} \quad (|\beta| < 2\pi) \quad (33)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} m\beta \sin m\alpha}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} dm = 2 \frac{\sin \beta \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta} \quad (|\beta| < \pi/2) \quad (34)$$

$$\int \frac{\cos m\alpha}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \quad (35)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh}^2 mp}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm = \frac{1}{2\pi} (1 - p \operatorname{ctg} p) \quad (|p| < \pi) \quad (36)$$

$$\int \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm = \frac{1}{6\pi} \quad (37)$$

$$\int \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{4}{3\pi} \quad (38)$$

$$\int \frac{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{4}{\pi} \quad (39)$$

$$\int \frac{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sh}^3 \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{4}{\pi^2} \quad (40)$$

$$\int \frac{m \operatorname{sh} mp}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{p}{2 \sin^2 \frac{p}{2}} - \operatorname{ctg} \frac{p}{2} \right] \quad (|p| < 2\pi) \quad (41)$$

$$\int \frac{m^2 \operatorname{ch} mp}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm = \frac{1}{2\pi \sin^2 p/2} \left[1 - \frac{p}{2} \operatorname{ctg} p/2 \right] \quad (|p| < 2\pi) \quad (42)$$

$$\int \frac{m^2 \operatorname{sh}^2 mp}{\operatorname{sh}^2 m\pi} dm = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin p - p \cos p}{\sin^3 p} - \frac{1}{3} \right] \quad (|p| < \pi) \quad (43)$$

$$\int \frac{\operatorname{th} m\pi}{m(m^2 + 1)} dm = 2 \quad (44)$$

$$\int \frac{m dm}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} m\pi} = \lg 2 - 1/2 \quad (45)$$

$$\int \frac{\operatorname{th} m\pi/2}{m(m^2 + 1)} dm = 2 \lg 2 \quad (46)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - p \right) - m^2 \operatorname{ch} mp}{m(m^2 + 1) \operatorname{sh} m\pi} \cos m\alpha dm =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \pi e^{-\alpha} \sin p + \right.$$

$$\left. + (\cos p \operatorname{ch} \alpha - 1) \lg \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos p}{\operatorname{ch} \alpha + \cos p} \right] \quad (|\rho| < \pi) \quad (47)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} mp \cos m\alpha}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} 2m\pi} dm = \sin \frac{p}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} e^{-|\alpha|} p \cos p +$$

$$+ \frac{1}{4} |\alpha| \sin p \operatorname{sh} |\alpha| - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \alpha \sin p \lg \left[2 \left(\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{p}{2} \right) \right] +$$

$$+ \operatorname{sh} |\alpha| \cos p \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin p/2}{e^{|\alpha|/2} + \cos p/2} \quad (|\rho| < 2\pi) \quad (48)$$

$$\int \left[\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{m\pi}{2} - \frac{m^2 + 1}{\operatorname{sh} m\pi} \right] \frac{dm}{m(m^2 + 1)} = \frac{1}{2} \quad (49)$$

$$\int \frac{m \operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{2}} dm = \frac{2}{\pi} \left[2 \frac{\beta (1 - \operatorname{ch} 2\alpha \cos 2\beta) + \alpha \operatorname{sh} 2\alpha \sin 2\beta}{(\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta} \right] \quad (|\beta| < \pi) \quad (50)$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} m\beta \cos m\alpha}{(m^2 + 1) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} dm =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\pi e^{-|\alpha|} \sin \beta + \cos \beta \operatorname{ch} \alpha \lg \frac{\operatorname{ch} \alpha - \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \sin \beta} \right] \quad (|\beta| < \frac{\pi}{2}) \quad (51)$$

$$\int \frac{m^3 \cos m\alpha}{\operatorname{sh} m\pi} dm = \frac{1}{2} \frac{1 - \operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{ch} \alpha}{(\operatorname{ch} \alpha + 1)^3} \quad (52)$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин и Н. С. Аржаников. К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением. Труды ЦАГИ, вып. 123, 1933.
2. G. B. Jeffery. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, ser. A, vol. 221, 1921, p. 265.
3. E. Weinel. Über einige ebene Randwertprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für ang. Math. und Mech., B. 17, H. 5, 1937, s. 276.
- ✓ 4. Н. В. Кудрявцев. Изгиб круглой пластины с эксцентричным отверстием под действием сосредоточенной силы. ДАН СССР, т. 53, 1946, стр. 107.
5. Macdonald. On the torsional strength of a hollow shaft. Cambr. Phil. Soc. Proc., vol. 8, 1895, p. 62.
6. П. Ф. Папкович. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
7. E. Weinel. Das Torsionsproblem für den exzentrischen Kreisung. Ingenieur Archiv, Bd. III, H. 1, 1932, s. 67.
8. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М. — Л., 1948, § 52.
9. E. Weinel. Die Spannungserhöhung durch Kreisbogenkerben. Zeitschrift für ang. Math. und Mech., Bd. 21, H. 4, 1941, p. 228.
10. Chin-Bing Ling. On the stresses in a notched plate under Tension. Journ. of Math. and Phys., vol. 26, No 4, 1947, p. 284.
11. Chin-Bing Ling. The stresses in a plate containing an overlapped circular hole. Journ. of appl. Phys., vol. 19, No 4, 1948, p. 405.
12. Я. С. Уфлянд. Кручение призматического стержня с профилем, ограниченным дугами двух пересекающихся окружностей. ДАН СССР, т. 68, вып. 1, 1949.
13. Я. С. Уфлянд. Точное решение задачи изгиба призматического стержня для одного класса несимметричных поперечных сечений. ДАН СССР, т. 69, вып. 6, 1949.
14. С. П. Тимошенко. Теория упругости. ОНТИ, Л. — М., 1937.
15. Saint Venant. „Compt. Rend.“, t. 87, 1878, p. 849.
16. А. Н. Динник. Приложение функций Бесселя. Изв. Дон. политехн. ин-та, т. 1, 1912, стр. 309.

17. C. Weber. Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungshefte N. 249, 1921.
 18. Л. С. Лейбензон. Курс теории упругости, ОГИЗ, Гостехиздат, М. — Л., 1947.
 19. Л. С. Лейбензон. Технические заметки ЦАГИ, № 45, 1933.
 20. Б. Г. Галеркин. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, 1933.
 21. А. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ, М. — Л., 1935.
 22. Г. А. Гринберг и Я. С. Уфлянд. Об изгибе прямоугольной пластины с закрепленным контуром под действием произвольной нагрузки. ПММ, т. XIII, вып. 4, 1949, стр. 413.
 23. Н. В. Кудрявцев. Изгиб круглой пластины с центральным отверстием под действием сосредоточенной силы. ДАН СССР, т. 50, 1945, стр. 111.
 24. Э. Кокер и Л. Файлон. Оптический метод исследования напряжений. ОНТИ, Л. — М., 1936.
 25. Н. И. Мухелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М. — Л., 1949.
 26. Э. Кокер, К. Чакко and J. Satake. Trans. of the Inst. of Eng. and Shipb. in Scotland, vol. 63, P. 1, 1919, p. 33.
 27. Chin-Bing Ling. On the stresses in a plate containing two circular holes. Journ. of appl. Phys., vol. 19, No 1, 1948, p. 77.
-