

О. В. БИРЮКОВА, Б. В. ЕРМАКОВ, И. В. КОРЕЦКАЯ

ФИЗИКА ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Под редакцией Б. В. Ермакова

Учебное пособие



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2018 •

ББК 22.33я73

Б 64

Бирюкова О. В., Ермаков Б. В., Корецкая И. В.

Б 64 Физика. Электричество и магнетизм. Задачи с решениями: Учебное пособие / Под ред. Б. В. Ермакова. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 180 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-3164-9

Настоящее пособие включает в себя методические рекомендации и подробные решения задач по разделам «Электростатика», «Постоянный ток» и «Магнетизм», соответствующие учебному плану и рабочим программам по дисциплине «Физика» в МЭИ. В каждом разделе рассмотрены задачи различной степени трудности, для наиболее важных задач приведены разные способы решения.

Пособие предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки и специальностям, входящим в УГСН: «Математика и механика», «Физика и астрономия», «Информатика и вычислительная техника», «Электроника, радиотехника и системы связи», «Фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии», «Электро- и теплотехника», «Ядерная энергетика и технологии», «Машиностроение» и другим техническим направлениям подготовки.

ББК 22.33я73

Рецензенты:

В. А. НИКИТЕНКО — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой физики Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II;

О. А. ЕВТИХИЕВА — кандидат технических наук, профессор, зав. кафедрой физики им. В. А. Фабриканта Национального исследовательского университета «МЭИ».

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2018

© Коллектив авторов, 2018

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2018

Предисловие

Настоящее пособие включает в себя решения задач по общему курсу физики с учетом методики преподавания кафедрой физики им. В. А. Фабриканта Московского энергетического института.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов 1–2-го курсов, поскольку представленный набор задач является необходимым для успешного освоения дисциплины.

При решении задач подробно обсуждаются возможности применения тех или иных физических законов или формул, приводятся пояснения по поводу использованных в решении математических приемов. Ко всем задачам приведены ответы в общем виде с необходимым графическим дополнением, что должно способствовать более глубокому пониманию и усвоению студентами материала каждого раздела.

Во всех условиях задач сборника подразумевается, что рассматривается идеализированный объект:

длинная нить, стержень, цилиндр, соленоид – имеют длину, значительно превосходящую расстояние до точек, где рассматривается поле (электрическое или магнитное) этих объектов; можно считать, что их поле обладает осевой симметрией, краевые эффекты можно не учитывать. Характеристики поля, обладающего осевой симметрией, не зависят от координаты вдоль оси и от угла поворота вокруг оси, могут зависеть от расстояния от оси;

тонкий стержень, нить, соленоид – имеют поперечные сечения таких линейных размеров, что они значительно меньше расстояний до тех точек, где рассматривается поле; характеристики поля не зависят от размеров поперечных сечений;

большая плоскость, большая пластина имеют линейные размеры, значительно превосходящие расстояние до тех точек, где рассматривается поле зарядов, на них распределенных; можно считать, что поле обладает плоской симметрией. Характеристики такого поля могут зависеть только от расстояния от плоскости симметрии;

маленькая рамка, маленький стержень имеют такие размеры, что в их пределах внешнее поле можно считать однородным.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Принцип суперпозиции

Задача 1.1. Два точечных заряда Q_1 и Q_2 находятся на расстоянии ℓ друг от друга (см. рис. 1.1). Для двух случаев: а) $Q_1 = Q_2$; б) $Q_1 = -Q_2$.

1. Определите напряженность поля в произвольной точке, лежащей на оси X , и постройте график $E_x(x)$.

2. Найдите напряженность поля в произвольной точке, лежащей на оси Y .

3. Найдите потенциал поля в точке с координатами (x, y) . Постройте график $\varphi(x, 0)$.

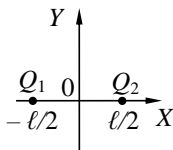


Рис. 1.1

Решение. Согласно принципу суперпозиции полей, результирующая напряженность электростатического поля в любой точке пространства определяется векторной суммой напряженностей поля каждого заряда:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i.$$

Поскольку заряды по условию точечные, сила их взаимодействия в вакууме подчиняется закону Кулона:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2},$$

где r – расстояние между зарядами.

Напряженность электростатического поля определяется как отношение силы, действующей на пробный заряд к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}.$$

Следовательно, для модуля вектора напряженности поля

точечного заряда справедливо выражение

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}.$$

Анализ знаков зарядов и их расположения показывает, что для любой точки оси X вектора напряженности зарядов Q_1 и Q_2 коллинеарны и не имеют проекции на ось Y . Поскольку переход от векторной суммы к скалярному равенству необходимо осуществлять с учетом расположения и знаков зарядов, для определения результирующей напряженности электростатического поля удобно выделить три области: $x \in \left(-\infty; -\frac{\ell}{2}\right)$, $x \in \left(-\frac{\ell}{2}; \frac{\ell}{2}\right)$ и $x \in \left(\frac{\ell}{2}; +\infty\right)$.

Потенциал поля, созданного точечным зарядом на расстоянии r , может быть определен из соотношения

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Потенциал электростатического поля некоторой системы из N точечных зарядов или заряженных тел в вакууме также находится с помощью принципа суперпозиции

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i.$$

При этом предполагается одинаковый выбор точки нулевого потенциала для всех накладывающихся полей.

Определим напряженность поля в произвольной точке, лежащей на оси X , для чего отдельно рассмотрим каждую область (см. рис. 1.2).

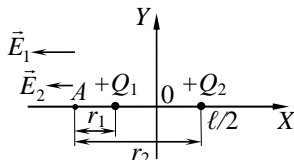


Рис. 1.2

В области $x \in \left(-\infty; -\frac{\ell}{2}\right)$ выделим точку $A(x,0)$. Учет знаков зарядов и их расположения показывает, что вектора напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в любой точке области параллельны оси X и сонаправлены. Тогда

$$E_x(x,0) = E_{1x} + E_{2x},$$

$$E_y(x,0) = 0.$$

Расстояния между зарядами Q_1 , Q_2 и точкой A равны соответственно

$$r_1 = |x + \ell/2|,$$

$$r_2 = |x - \ell/2|.$$

Проекции векторов напряженности поля каждого заряда на ось X отрицательные, следовательно,

$$E_{1x}(x,0) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(x + \ell/2)^2},$$

$$E_{2x}(x,0) = -\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(x - \ell/2)^2}.$$

Поскольку при переходе от векторной суммы к скалярному равенству мы учли знак зарядов, то в дальнейшем будем использовать только абсолютное значение зарядов

$$E_x(x,0) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(x + \ell/2)^2} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(x - \ell/2)^2}.$$

По условию задачи $Q_1 = Q_2$, поэтому полученное выражение можно упростить

$$E_x(x,0) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x + \ell/2)^2} + \frac{1}{(x - \ell/2)^2} \right).$$

Рассмотрим область $x \in \left(-\frac{\ell}{2}; \frac{\ell}{2}\right)$ (см. рис. 1.3). В отличие от предыдущей области, в точке $A(x,0)$, проекции напряженностей зарядов будут отличаться не только по модулю, но и по знаку.

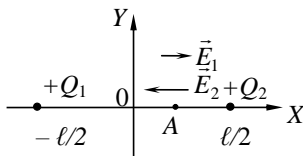


Рис. 1.3

$$E_{1x}(x,0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(\ell/2 + x)^2},$$

$$E_{2x}(x,0) = -\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(\ell/2-x)^2}.$$

Следовательно, результирующее поле в произвольной точке данной области

$$E_x(x,0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(x+\ell/2)^2} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(\ell/2-x)^2}.$$

Или, учитывая равенство зарядов,

$$E_x(x,0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x+\ell/2)^2} - \frac{1}{(\ell/2-x)^2} \right),$$

$$E_y(x,0) = 0.$$

Область $x \in \left(\frac{\ell}{2}; +\infty\right)$ (см. рис. 1.4). Векторы напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 сонаправлены и имеют положительные проекции на ось X.

$$E_{1x}(x,0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(x+\ell/2)^2},$$

$$E_{2x}(x,0) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(x-\ell/2)^2}.$$

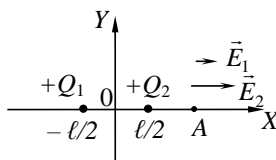


Рис. 1.4

Результирующее поле в рассматриваемой области:

$$E_x(x,0) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x+\ell/2)^2} + \frac{1}{(x-\ell/2)^2} \right),$$

$$E_y(x,0) = 0.$$

Полученные выражения оказываются верными и для системы отрицательных зарядов. Действительно, задачу можно решить, не задавая заранее направление векторов напряженности поля, поскольку знак заряда определяет и знак проекции вектора напряженности.

Построим график функции $E_x(x)$. Поскольку аналитические выражения зависимости проекции вектора напряженности электростатического поля от координаты получились достаточно сложными, воспользуемся графическим сложением (см. рис. 1.5).

Изобразим отдельно (с учетом знака проекции) зависимость модуля напряженности поля каждого из зарядов, образующих данную систему.

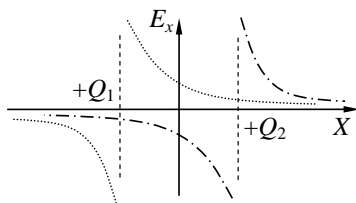


Рис. 1.5

На рисунке 1.5 пунктирная линия соответствует E_{1x} , штрихпунктирная – E_{2x} . Складывая проекции напряженностей в каждой области, получим результирующий график, изображенный на рисунке 1.6.

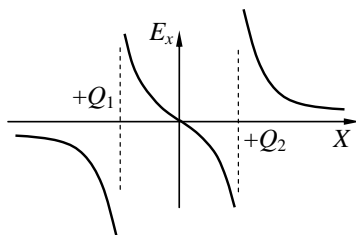


Рис. 1.6

Найдем напряженность поля в произвольной точке, лежащей на оси Y . Для этого выберем на оси Y произвольную точку $B(0, y)$ (см. рис. 1.7).

По принципу суперпозиции результирующая напряженность

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

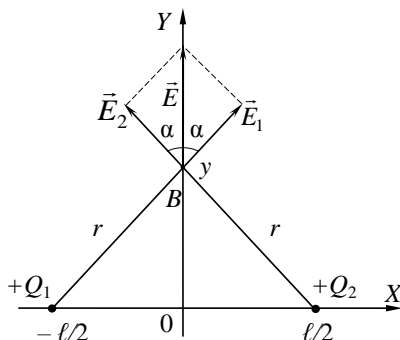


Рис. 1.7

Модули векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 равны, поскольку заряды одинаковы по величине и равноудалены от точки B на расстояние

$$r = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Как видно из рисунка 1.7, вектор \vec{E} направлен вдоль оси Y . Равенство нулю проекции напряженности поля на ось X обусловлено знаками и симметричным расположением зарядов.

Напряженность электростатического поля в исследуемой точке определяется выражением

$$E_y = 2E_1 \cos \alpha,$$

где

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Учитывая, что

$$\cos \alpha = \frac{y}{r},$$

результатирующая напряженность в произвольной точке оси Y :

$$E_y(0, y) = \frac{Q_1 y}{2\pi\epsilon_0 \left(\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}},$$

$$E_x(0, y) = 0.$$

Определим с помощью метода суперпозиции потенциал электростатического поля в произвольной точке M с координатами (x, y) , изображенной на рисунке 1.8.

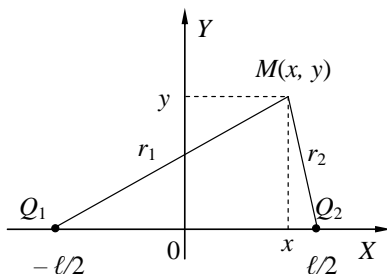


Рис. 1.8

Потенциал поля, создаваемый точечным зарядом Q_1 в рассматриваемой точке, равен

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1},$$

где расстояние от заряда до точки M :

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2} + x\right)^2 + y^2}.$$

Аналогично, потенциал, создаваемый зарядом Q_2 в точке M :

$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2 + y^2}}.$$

Поскольку потенциал – скалярная величина, принцип суперпозиции позволяет рассчитать потенциал произвольной точки поля как алгебраическую сумму потенциалов каждого заряда, образующего рассматриваемую систему:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Учитывая, что $Q_1 = Q_2$, получим выражение для потенциала электростатического поля в точке с координатами (x, y) :

$$\varphi(x, y) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(\ell/2 + x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\ell/2 - x)^2 + y^2}} \right).$$

График распределения потенциала $\varphi(x, 0)$ построим тем же способом, что и напряженность. Значение потенциала поля точечного заряда убывает по гиперболическому закону. Для каждого из двух равных по величине положительных зарядов построим зависимость

$\varphi(x,0)$. На рисунке 1.9 пунктирная линия соответствует φ_1 , штрихпунктирная – φ_2 .

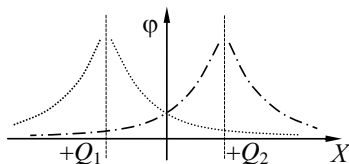


Рис. 1.9

Сложив графики, получим распределение потенциала рассматриваемой системы, представленное на рисунке 1.10.

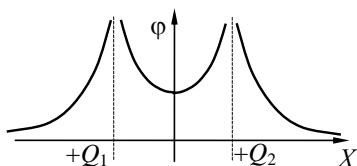


Рис. 1.10

Задача 1.2. По тонкому полукольцу радиусом R равномерно распределен положительный заряд Q .

1. Определите напряженность поля в центре полукольца.
2. Найдите потенциал в центре полукольца.

Решение. Так как заряженное тело не является точечным, представим полукольцо как совокупность достаточно малых равных элементов длины $d\ell$. В силу того, что заряд распределен по полукольцу равномерно, на каждый элемент $d\ell$ приходится заряд

$$dQ = \frac{Q}{\pi R} d\ell,$$

который можно считать точечным зарядом. Определим создаваемую им напряженность поля в точке, отстоящей от него на расстояние r :

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|dQ|}{r^2}.$$

Результирующая напряженность электростатического поля находится с помощью принципа суперпозиции

$$\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E}.$$

Направления векторов напряженности $d\vec{E}$ при переходе от одного элемента полукольца к другому будут изменяться. Следовательно, необходимо отдельно найти проекции результирующей напряженности на оси координат. Поскольку все вектора напряженности лежат в плоскости полукольца, достаточно ввести две оси X и Y (см. рис. 1.11). Соответствующие проекции напряженностей:

$$E_x = \int_{(\text{по полукольцу})} dE_x, \quad E_y = \int_{(\text{по полукольцу})} dE_y.$$

Модуль суммарной напряженности поля

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

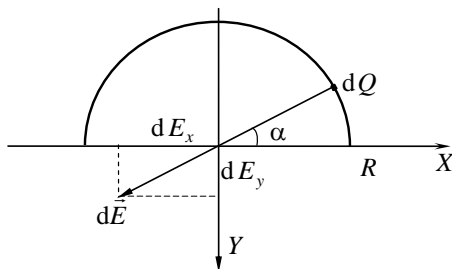


Рис. 1.11

Определим проекции вектора напряженности на выбранные оси:

$$dE_x = dE \cos \alpha,$$

$$dE_y = dE \sin \alpha,$$

где

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|dQ|}{R^2} = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^3} d\ell.$$

Определим проекции результирующей напряженности, интегрируя проекции элементарных напряженностей поля по полукольцу. Учитывая, что $d\ell = R d\alpha$, можно перейти к интегрированию по углу α .

$$E_x = \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \cos \alpha d\alpha = \frac{Q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} (\sin \alpha) \Big|_0^\pi = 0,$$

$$E_y = \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} \sin \alpha d\alpha = \frac{Q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{Q}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^2}.$$

Направление результирующей напряженности вдоль оси Y и равенство нулю ее проекции на ось X можно было предсказать из соображений симметрии, не проводя интегрирования.

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_y,$$

$$E = \frac{Q}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^2}.$$

Определим методом суперпозиции потенциал электростатического поля в центре заряженного полукольца. Каждый заряд dQ находится на расстоянии R от исследуемой точки и создает в ней потенциал

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{dQ}{R}.$$

Результирующий потенциал найдем, проинтегрировав по всему полукольцу:

$$\varphi = \int_{(\text{по полукольцу})} d\varphi = \int_0^{\pi R} \frac{Q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R^2} d\ell = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R}.$$

Задача 1.3. Тонкий стержень длиной ℓ заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = \alpha x$, где α – заданная константа.

1. Найдите заряд стержня.
2. Найдите напряженность поля в точке, лежащей на продолжении стержня на расстоянии x_0 от его ближайшего конца.
3. Определите потенциал поля в точке, лежащей на продолжении стержня.

Решение. Как и в задаче 1.2, искомую напряженность можно найти методом суперпозиции, представив стержень совокупностью отдельных малых элементов dx . Заряд каждого такого элемента dQ можно считать точечным. В силу неравномерности распределения заряда по стержню значение заряда каждого элемента длины будет различным. Направления векторов напряженности электростати-

ческого поля каждого заряда dQ в произвольной точке на продолжении стержня совпадают, для определения результирующей напряженности достаточно ввести одну ось X (см. рис. 1.12).

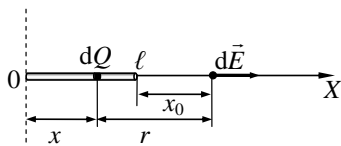


Рис. 1.12

Заряд элемента стержня длиной dx можно выразить через линейную плотность заряда:

$$dQ = \tau dx = \alpha dx.$$

Заряд всего стержня:

$$Q = \int_{\text{(по стержню)}} dQ = \int_0^{\ell} \alpha dx = \frac{\alpha \ell^2}{2}.$$

Положение каждого элемента dQ определяется координатой x , а расстояние от него до рассматриваемой точки равно

$$r = \ell + x_0 - x.$$

Следовательно, напряженность электростатического поля, создаваемая точечным зарядом dQ , равна

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\alpha dx}{4\pi\epsilon_0 (\ell + x_0 - x)^2}.$$

Результирующая напряженность поля стержня:

$$E = \int_{\text{(по стержню)}} dE = \int_0^{\ell} \frac{\alpha dx}{4\pi\epsilon_0 (\ell + x_0 - x)^2}.$$

Чтобы определить первообразную, преобразуем числитель:

$$E = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\ell} \frac{(x - \ell - x_0 + \ell + x_0) dx}{(\ell + x_0 - x)^2},$$

$$E = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{\ell} \frac{(x - \ell - x_0) dx}{(\ell + x_0 - x)^2} + \int_0^{\ell} \frac{(\ell + x_0) dx}{(\ell + x_0 - x)^2} \right),$$

$$E = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(- \int_0^{\ell} \frac{dx}{(\ell + x_0 - x)} + \int_0^{\ell} \frac{(\ell + x_0) dx}{(\ell + x_0 - x)^2} \right),$$

$$E = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln|\ell + x_0 - x| \Big|_0^\ell + \frac{(\ell + x_0)}{\ell + x_0 - x} \Big|_0^\ell \right),$$

$$E = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{x_0}{\ell + x_0} + \frac{(\ell + x_0)}{x_0} - 1 \right),$$

$$E = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{x_0}{\ell + x_0} + \frac{\ell}{x_0} \right).$$

Замечание. Такой же результат можно получить, проводя интегрирование по переменной r . Определим связь между dx и dr :

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d(\ell + x_0 - x)}{dx} = -1.$$

Следовательно, $dr = -dx$. Пределы интегрирования также изменятся:

$$\begin{aligned} x = 0, & & r = \ell + x_0; \\ x = \ell, & & r = x_0. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение для результирующей напряженности, заменяя $x = \ell + x_0 - r$:

$$E = \int_{\text{(по стержню)}} dE = - \int_{\ell + x_0}^{x_0} \frac{\alpha(\ell + x_0 - r)dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Удобно представить такое соотношение в виде суммы интегралов:

$$E = - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\ell + x_0}^{x_0} \frac{(\ell + x_0)dr}{r^2} - \int_{\ell + x_0}^{x_0} \frac{dr}{r} \right).$$

Легко видеть, что мы пришли к такому же ответу:

$$E = - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(- \frac{(\ell + x_0)}{r} \Big|_{\ell + x_0}^{x_0} - \ln|r| \Big|_{\ell + x_0}^{x_0} \right) = - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{\ell + x_0}{x_0} + \ln \frac{\ell + x_0}{x_0} \right),$$

$$E = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{x_0}{\ell + x_0} + \frac{\ell}{x_0} \right).$$

Определим потенциал точки, лежащей на продолжении стержня, воспользовавшись представлением стержня как совокупности точечных зарядов. Потенциал поля каждого элемента dQ

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где $dQ = \alpha x dx$ и $\varphi(\infty) = 0$.

Согласно принципу суперпозиции, потенциал электростатического поля всей системы:

$$\varphi = \int_{\text{(по стержню)}} d\varphi.$$

Чтобы не вводить новую систему координат, вначале найдем потенциал поля в точке, отстоящей от конца стержня на расстоянии x_0 :

$$\varphi(x_0) = \int_0^\ell \frac{\alpha x dx}{4\pi\epsilon_0 (\ell + x_0 - x)},$$

$$\varphi(x_0) = \int_0^\ell \frac{\alpha(\ell + x_0 + x - \ell - x_0) dx}{4\pi\epsilon_0 (\ell + x_0 - x)}.$$

Перегруппируем слагаемые в числителе и представим как разность двух интегралов

$$\varphi(x_0) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^\ell \frac{(\ell + x_0) dx}{(\ell + x_0 - x)} - \int_0^\ell dx \right),$$

$$\varphi(x_0) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(-(\ell + x_0) \ln(\ell + x_0 - x) \Big|_0^\ell - \ell \right),$$

$$\varphi(x_0) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left((\ell + x_0) \ln \frac{x_0 + \ell}{x_0} - \ell \right).$$

Мы получили значение потенциала в точке, отстоящей от конца стержня на расстоянии x_0 . Этот результат можно обобщить на любую точку, лежащую на продолжении стержня и удаленную от его конца на произвольное расстояние.

Задача 1.4. Большая плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ . В середине плоскости имеется круглое отверстие, радиус которого R мал по сравнению с размерами плоскости. Ось X совпадает с перпендикуляром к плоскости, восстановленным из центра отверстия.

1. Найдите напряженность поля в произвольной точке, лежащей на оси X . Постройте график зависимости $E_x(x)$.

2. Определите распределение потенциала вдоль оси X , если

$\varphi(0) = 0$.

Решение. Заданное в условии соотношение между радиусом отверстия и размерами плоскости позволяет считать плоскость бесконечно большой. Так как заряд системы не является точечным, для расчета напряженности необходимо представление плоскости как системы точечных зарядов. Различие модулей и направлений вектора элементарной напряженности каждого из зарядов вызовет математические трудности при интегрировании.

В данном случае удобно рассмотреть плоскость как совокупность тонких концентрических колец переменного радиуса r . Суммарная напряженность поля равномерно заряженного кольца направлена вдоль оси, перпендикулярной его плоскости. Поэтому при использовании принципа суперпозиции для расчета напряженности электростатического поля всей системы зарядов достаточно ввести одну ось X (см. рис. 1.13).

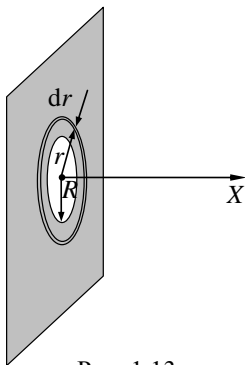


Рис. 1.13

Результирующую напряженность поля можно определить, используя принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E}.$$

В отличие от примеров, рассмотренных выше, здесь $d\vec{E}$ – напряженность поля тонкого кольца, а не точечного заряда.

Эту задачу можно решить и иначе. Круглое отверстие, находящееся в середине плоскости, можно представить как сплошной диск, заряженный с такой же по величине и противоположной по знаку поверхностной плотностью, что и плоскость. Напряженность

поля заданной системы можно определить как суперпозицию полей сплошной бесконечной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью σ и диска, заряженного с поверхностной плотностью $-\sigma$.

Потенциал электростатического поля найдем, используя интегральную связь между потенциалом и напряженностью поля.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{\ell}) = \int_1^2 E_{\ell} d\ell.$$

Вначале определим напряженность поля тонкого равномерно заряженного кольца радиусом r в произвольной точке оси X .

Кольцо, аналогично задаче 1.2, можно представить как последовательность достаточно малых элементов dQ . Заряд каждого такого элемента dQ создает в точке, удаленной от плоскости кольца на расстояние x , напряженность электростатического поля $d\vec{E}$ (см. рис. 1.14).

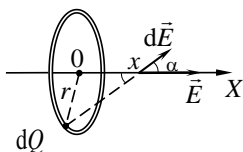


Рис. 1.14

Расстояние от dQ до выбранной точки рассчитаем по теореме Пифагора, тогда

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)}.$$

Учтем направление вектора $d\vec{E}$. Вследствие симметричного распределения заряда суммарный вектор напряженности имеет проекцию только на ось X , следовательно,

$$E_x = \int_{(\text{по кольцу})} dE_x = \int_{(\text{по кольцу})} dE \cos \alpha,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Поскольку для всех элементов кольца значения x и r одинаковы,

результатирующая напряженность поля заряженного кольца в рассматриваемой точке

$$E_x(x) = \int_0^Q \frac{x dQ}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Представим плоскость как совокупность концентрических колец, радиусы которых изменяются от R до ∞ (см. рис. 1.12). Выделим на плоскости одно кольцо произвольного радиуса r и шириной dr . Заряд такого кольца $dQ_{\text{кольца}} = \sigma dS_{\text{кольца}} = \sigma 2\pi r dr$.

Напряженность поля, создаваемую таким кольцом в произвольной точке оси X , определим, воспользовавшись полученным ранее выражением

$$dE_x = \frac{\sigma 2\pi r x dr}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Просуммируем по всей плоскости:

$$E_x(x) = \int_R^\infty \frac{\sigma 2\pi r x dr}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0\sqrt{x^2 + r^2}} \Big|_R^\infty = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

График полученной зависимости $E(x)$ представлен на рисунке 1.15.

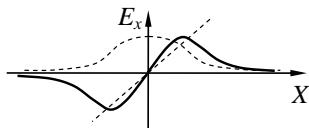


Рис. 1.15

Проверим полученное выражение, решив задачу вторым способом.

Прежде всего, определим напряженность поля сплошного диска, представив его как набор концентрических колец, радиус которых меняется от 0 до R . Воспользуемся полученным ранее выражением для напряженности поля тонкого кольца.

$$E_{x\text{ диска}} = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r x dr}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0\sqrt{x^2 + r^2}} \Big|_0^R = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right),$$

$$E_{\text{диска}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$

Эта формула позволяет определить и напряженность поля бесконечной плоскости (без отверстия). Преобразуем выражение в скобках:

$$E_{\text{диска}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \frac{x}{|x|}.$$

Определим предел, к которому стремится данное соотношение при $x \ll R$. Очевидно, что

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \rightarrow 1.$$

Мы получили выражение, которое определяет напряженность поля равномерно заряженной плоскости:

$$E_{\text{плоскости}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}.$$

Согласно принципу суперпозиции, напряженность в любой точке будет создаваться обоими заряженными телами:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{плоскости}} + \vec{E}_{\text{диска}}.$$

Из соображений симметрии можно предположить, что в точках, достаточно близких к плоскости, силовые линии поля направлены перпендикулярно плоскости. Учет расположения и знаков зарядов плоскости (σ) и сплошного диска ($-\sigma$) показывает, что векторы $\vec{E}_{\text{плоскости}}$ и $\vec{E}_{\text{диска}}$ коллинеарны и направлены в разные стороны.

Следовательно, в произвольной точке оси X результирующая напряженность поля заданной системы зарядов равна

$$E_x = E_{\text{плоскости}} - E_{\text{диска}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Найдем распределение потенциала вдоль оси X . В данном случае проводить расчет потенциала методом суперпозиции нецелесообразно, поскольку в условии задачи точка нулевого

потенциала задана в центре отверстия ($\varphi(0) = 0$). При использовании метода суперпозиции потенциал поля точечного заряда определяется

соотношением $d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}$ при условии, что $\varphi(\infty) = 0$.

Воспользуемся интегральной связью \vec{E} и φ

$$\varphi(x) = \int_x^0 E_x dx = \int_x^0 \frac{\sigma x}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} dx$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_x^0 \frac{d(x^2 + R^2)}{2\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{x^2 + R^2} \Big|_x^0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - \sqrt{x^2 + R^2}).$$

Задача 1.5. Две большие параллельные плоскости равномерно заряжены с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 2\sigma$). Расстояние между плоскостями d много меньше их линейных размеров.

1. Определите напряженность поля в произвольной точке и постройте график зависимости $E_x(x)$. Ось X направлена перпендикулярно плоскостям.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, найдите зависимость потенциала поля от координаты x и постройте график $\varphi(x)$. Примите $\varphi(0) = 0$.

Решение. Напряженность поля одной равномерно заряженной плоскости находится при помощи теоремы Остроградского – Гаусса, применение которой будет подробно рассмотрено в задаче 2.4. При малых расстояниях до плоскости поле однородно и напряженность его определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Это же соотношение можно получить и методом суперпозиции (см. задачу 1.4). Отметим, что в этом случае вывод формулы значительно более трудоемкий.

В условии задачи оговорено, что расстояние между плоскостями d много меньше их линейных размеров. Поэтому можно считать, что каждая из пластин создает однородное поле, определяемое данной формулой.

Согласно принципу суперпозиции, в произвольной точке напряженность результирующего поля:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Силовые линии поля равномерно заряженной плоскости направлены перпендикулярно самой плоскости.

На рисунке 1.16 изображены две большие заряженные плоскости. Первая пластина заряжена положительно, силовые линии поля \vec{E}_1 в любой точке направлены от нее. Вектор \vec{E}_2 изображен с учетом того, что заряды пластин одного знака и $\sigma_2 = 2\sigma_1$.

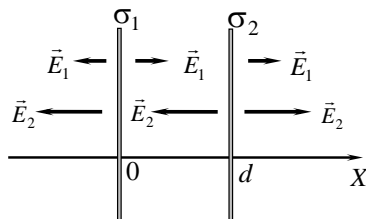


Рис. 1.16

Найдем результирующую напряженность поля для каждой из областей:

$$x < 0 \quad E_x = E_{1x} + E_{2x} = -\frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} = -\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{2 \cdot \sigma}{2 \cdot \epsilon_0} = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0},$$

$$0 < x < d \quad E_x = E_{1x} + E_{2x} = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{2 \cdot \sigma}{2 \cdot \epsilon_0} = -\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0},$$

$$x > d \quad E_x = E_{1x} + E_{2x} = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} + \frac{2 \cdot \sigma}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{3 \cdot \sigma}{2\epsilon_0}.$$

Соответствующий график $E_x(x)$ представлен на рисунке 1.17.

Из графика видно, что на каждой заряженной поверхности вектор напряженности терпит разрыв, причем величина скачка определяется поверхностной плотностью заряда:

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Поскольку однородность электростатического поля бесконечно большой плоскости имеет место только для точек, расстояния до которых от плоскости малы по сравнению с ее размерами, приведенный график при удалении от пластин должен менять свой характер.

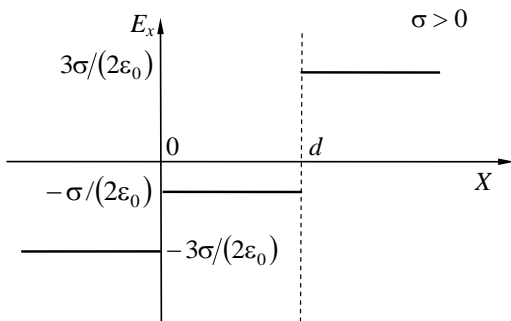


Рис. 1.17

Зависимость потенциала поля от координаты x найдем, используя интегральную связь между \vec{E} и φ . По определению, потенциал электростатического поля численно равен работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из рассматриваемой точки с координатой x в точку, где потенциал принят равным нулю (в данном случае $\varphi(0) = 0$):

$$\varphi(x) = \int_x^0 E_x dx.$$

Рационально начинать расчет потенциала с области, расположенной ближе к точке нулевого потенциала, поэтому вначале определим потенциал точек поля для которых $x \in (-\infty; 0)$. Учтем, что проекция вектора результирующей напряженности поля в этой области отрицательная:

$$E_x = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \int_x^0 -\frac{3 \cdot \sigma}{2\epsilon_0} dx = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \int_x^0 dx = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} x.$$

Аналогично для всех точек, расположенных между плоскостями $x \in (0; d)$:

$$\varphi(x) = \int_x^0 -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_x^0 dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x.$$

Для последней области $x \in (d; +\infty)$ подынтегральная функция $E_x(x)$ терпит разрыв в точке $x = d$, поэтому интеграл необходимо разбить на два. С учетом знака проекции вектора результирующей напряженности получим

$$\varphi(x) = \int_x^d \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot dx + \int_d^0 \left(\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \right) dx,$$

$$\varphi(x) = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} (d - x) + \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}.$$

По полученной аналитической зависимости можно построить график $\varphi(x)$ (см. рис. 1.18). Такой способ не требует дополнительных пояснений. Рассмотрим второй способ, позволяющий качественно изобразить зависимость $\varphi(x)$, используя построенный ранее график $E_x(x)$.

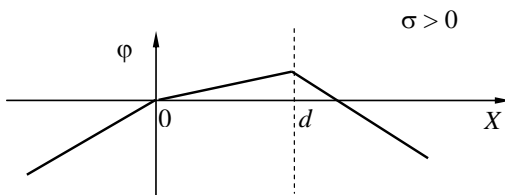


Рис. 1.18

Для всех точек $x < 0$ проекция напряженности $E_x < 0$, следовательно, при движении в положительном направлении оси X потенциал будет возрастать. Используя дифференциальную связь между напряженностью поля и потенциалом

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},$$

легко установить, что зависимость $\varphi(x)$ будет линейной. По условию задачи точка нулевого потенциала имеет координату $x = 0$. В этой точке график пересекает ось абсцисс и наблюдается его излом. В области $0 < x < d$ потенциал продолжает расти, однако угол наклона прямой будет меньше. В точке $x = d$ $E_x(x)$ терпит разрыв, $E_x > 0$ и $\varphi(x)$ будет убывающей функцией. Используя дифференциальную связь, можно также проверить правильность

построения графика потенциала, проведенного по аналитической зависимости.

Особое внимание необходимо обратить на тот факт, что потенциал является неразрывной функцией.

Задача 1.6. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен положительный заряд $Q = 1,0 \cdot 10^{-6}$ Кл. Рассчитайте силу, действующую на тонкий стержень длиной $\ell = 12$ см, расположенный вдоль оси кольца. По стержню равномерно распределен заряд $q = 1,0 \cdot 10^{-8}$ Кл. Ближайший к кольцу конец стержня имеет координату x_0 .

Решение. Стержень находится в неоднородном электростатическом поле, созданном зарядом, непрерывно распределенным с постоянной линейной плотностью по кольцу. Распределение напряженности поля $E_x(x)$ такой системы зарядов вдоль оси кольца можно найти методом суперпозиции (см. задачу 1.4). На все элементы заряженного стержня будет действовать различная по величине и одинаковая по направлению элементарная сила

$$dF_x = E_x(x)dq,$$

где dq – заряд рассматриваемого элемента. Результирующую силу определим, проинтегрировав выражение dF_x по всему стержню.

Воспользуемся результатами, полученными при решении задачи 1.4. Результирующая напряженность поля заряженного кольца радиусом R в произвольной точке с координатой x оси, перпендикулярной к его плоскости, определяется выражением

$$E_x(x) = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

На выделенный элементарный заряд стержня $dq = \frac{q}{\ell}dx$ (см. рис. 1.19) будет действовать сила величиной

$$dF_x = E_x(x)\frac{q}{\ell}dx.$$

При переходе от одного элемента стержня к другому направление элементарных сил остается неизменным. Следовательно, результирующую силу можно определить, интегрируя выражения dF_x по всему стержню.

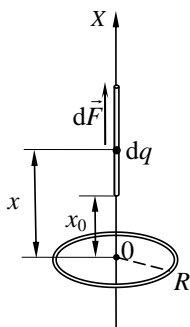


Рис. 1.19

$$F_x = \int_{\text{(по стержню)}} dF_x = \int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}} \frac{q}{\ell} dx$$

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\ell} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)_{x_0}^{x_0+\ell} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(x_0+\ell)^2}} \right) =$$

$$= 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Задача 1.7. По тонкой полусфере радиусом R равномерно распределен положительный заряд Q . Определите напряженность поля в центре полусферы.

Решение. Заряженную по поверхности полусферу можно мысленно разделить на элементарные заряженные кольца радиуса r . Расстояние x от каждого кольца до центра полусферы оказывается различным и изменяется от нуля до R . Определив заряд каждого выделенного кольца и используя результаты задачи 1.4, можно рассчитать напряженность $d\vec{E}_k$, создаваемую в рассматриваемой точке одним кольцом (см. рис. 1.9). Результирующую напряженность электростатического поля найдем, воспользовавшись принципом суперпозиции

$$\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E}_k.$$

Выделим на поверхности полусферы кольцо радиусом r и шириной $d\ell$, плоскость которого находится на расстоянии x от

центра полусферы (см. рис. 1.20).

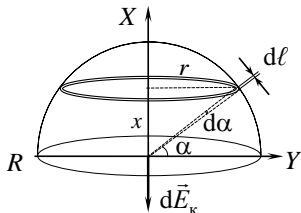


Рис. 1.20

Поскольку площадь поверхности кольца $dS = 2\pi r d\ell$, его заряд легко выразить через поверхностную плотность заряда полусферы σ :

$$dQ = \sigma dS = \frac{Q}{2\pi R^2} dS.$$

Если ввести угол α , то радиус кольца будет равен $r = R \cos \alpha$. Расстояние от центра полусферы до плоскости кольца $x = R \sin \alpha$. Поскольку $d\ell = R d\alpha$, площадь поверхности кольца равна

$$dS = 2\pi r R d\alpha = 2\pi R^2 \cos \alpha d\alpha,$$

а заряд

$$dQ = Q \cos \alpha d\alpha.$$

Воспользуемся полученным в задаче 1.4 выражением для напряженности поля на оси кольца

$$dE_k = \frac{dQ \cdot x}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Результирующую напряженность электростатического поля в центре полусферы вычислим интегрированием по углу α , значение которого изменяется от 0 до $\pi/2$:

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{Q \cos \alpha R \sin \alpha d\alpha}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Учтем, что $x^2 + r^2 = R^2$.

Тогда

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{Q \cos \alpha R \sin \alpha d\alpha}{4\pi \epsilon_0 R^3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 R^2}.$$

Поскольку поверхностная плотность заряда полусферы

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R^2},$$

полученное выражение для напряженности поля можно представить в виде

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}.$$

Задача 1.8. По тонкому кольцу радиусом R равномерно распределен положительный заряд Q . Определите потенциал электростатического поля в точке, лежащей на оси кольца, на расстоянии z от его центра. Ось перпендикулярна плоскости кольца.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся принципом суперпозиции для потенциала электростатического поля. Если заряды рассматриваемой системы распределены в пространстве непрерывно, то в заряженном объекте выделяют элемент заряда dQ , который в условии задачи можно считать точечным, и выражают потенциал $d\varphi$ его поля в рассматриваемой точке. Тогда потенциал поля всей системы зарядов

$$\varphi = \int_Q d\varphi.$$

Представим кольцо как совокупность точечных зарядов dQ (см. рис. 1.21). Потенциал поля, созданного таким точечным зарядом на расстоянии r , может быть определен из соотношения

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}.$$

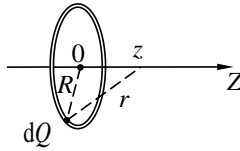


Рис. 1.21

Заметим, что расстояние от любого заряда dQ , выделенного на кольце, до рассматриваемой точки одинаковое и равно $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Тогда

$$\varphi = \int_Q d\varphi = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

По полученной зависимости потенциала от координаты $\varphi(z)$, используя дифференциальную связь между напряженностью и потенциалом ($\vec{E} = -\text{grad}\varphi$), можно определить зависимость $E(z)$:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

2. Теорема Остроградского – Гаусса для вакуума

Задача 2.1. Сфера радиусом R равномерно заряжена положительным зарядом Q .

1. Найдите зависимость проекции вектора напряженности на радиальную ось и постройте график $E_r(r)$.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал как функцию радиальной координаты и постройте график $\varphi(r)$. Примите $\varphi(\infty) = 0$.

Решение. Электростатическое поле создается в вакууме известным зарядом, равномерно распределенным по сферической поверхности. Электростатическое поле такой системы является центрально симметричным, силовые линии располагаются радиально. Для определения напряженности поля воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Вспомогательная поверхность интегрирования S должна повторять симметрию поля, т.е. являться сферой с тем же центром.

Потенциал электростатического поля, по определению, численно равен работе сил поля по перемещению единичного положительного заряда из рассматриваемой точки r в точку, где потенциал принят равным нулю (в данном случае в бесконечность):

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

Решение задачи начнем с определения зависимости проекции вектора напряженности на радиальную ось.

Рассмотрим точки, находящиеся внутри заряженной сферы. Выберем произвольную точку с координатой $r < R$ и проведем вспомогательную поверхность S_1 так, чтобы она проходила через выбранную для рассмотрения точку (см. рис. 2.1).

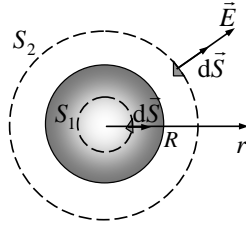


Рис. 2.1

Внутри поверхности S_1 заряд $Q_{\text{овв}} = 0$. Поток вектора напряженности сквозь выбранную поверхность будет равным нулю. При данной симметрии зарядов это означает, что внутри заряженной сферы электростатическое поле отсутствует ($E = 0$).

Рассмотрим точку, находящуюся снаружи сферы и имеющую координату $r > R$. Рассчитаем поток вектора напряженности сквозь поверхность S_2 , проходящую через данную точку. Для этого разобьем вспомогательную поверхность на бесконечно малые элементы $d\vec{S} = dS\vec{n}$, где \vec{n} – единичный вектор, внешняя нормаль к площадке $d\vec{S}$.

Векторы \vec{E} и $d\vec{S}$ во всех точках поверхности коллинеарны, следовательно, поток вектора напряженности:

$$\oint_{(S_2)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_{(S_2)} E dS \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) = \oint_{(S_2)} E_r dS,$$

где $E \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) = E_r$ – проекция вектора напряженности на направление радиальной оси. В силу симметрии поля значение напряженности во всех точках поверхности S_2 одинаковое и может быть вынесено за знак интеграла.

$$\oint_{(S_2)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r \oint_{(S_2)} dS = E_r 4\pi r^2.$$

При этом заряд, охваченный поверхностью интегрирования, равен Q . Подставив полученные выражения в теорему Остроградского – Гаусса, получим напряженность поля в произвольной точке, находящейся вне сферы:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} r \in (0; R), \quad E_r &= 0; \\ r \in (R; +\infty), \quad E_r(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

На основании данных выражений может быть построен график зависимости проекции вектора напряженности на радиальную ось $E_r(r)$. Как видно из графика, на заряженной поверхности $r = R$ функция $E_r(r)$ терпит разрыв – напряженность поля изменяется скачком (см. рис. 2.2).

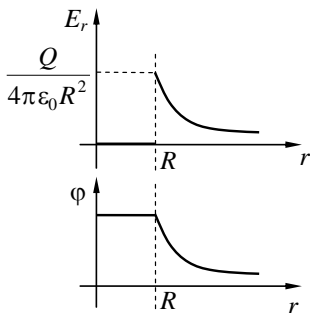


Рис. 2.2

Для расчета потенциала в любой точке воспользуемся полученным распределением напряженности и интегральной связью между \vec{E} и φ

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^{\infty} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

По условию $\varphi(\infty) = 0$, поэтому потенциал произвольной точки с координатой r :

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

Расчет потенциала удобно начинать с области, ближней к выбранной точке нулевого потенциала. В нашем случае это интервал $r \in (R; +\infty)$.

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} E_r dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Поскольку выражения для напряженности поля различны для двух указанных выше областей, при определении потенциала в произвольной точке области $r \in (0; R)$ интеграл следует разбить на два:

$$\varphi(r) = \int_r^R E_r dr + \int_R^{\infty} E_r dr = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Таким образом,

$$r \in (0; R), \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R};$$

$$r \in (R; +\infty), \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Для построения графика $\varphi(r)$ можно воспользоваться полученными аналитическими выражениями.

Качественно проверить правильность изображенной зависимости $\varphi(r)$ можно, используя дифференциальную связь между \vec{E} и φ

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

При $r \in (0; R)$ $E_r = 0$. Следовательно, в этой области $\varphi = const$.

При $r \in (R; +\infty)$ $E_r > 0$ и потенциал с расстоянием убывает (увеличение r соответствует движению вдоль силовых линий). Модуль напряженности уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, следовательно, вид функции $\varphi(r)$ для этой области – гипербола. Поскольку потенциал – функция неразрывная, точка $r = R$, в которой характер зависимости $E_r(r)$ меняется скачком, является точкой излома на графике $\varphi(r)$.

Задача 2.2. Скопление положительных зарядов имеет форму шара радиусом R_1 и заряд Q_1 . Скопление окружено тонкой оболочкой радиусом R_2 . Заряд распределен по оболочке равномерно и равен $Q_2 = -Q_1$.

1. Найдите зависимость проекции вектора напряженности на радиальную ось $E_r(r)$ и постройте график.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом,

определите потенциал как функцию радиальной координаты и постройте график $\varphi(r)$. Примите $\varphi(\infty) = 0$.

Решение. Электростатическое поле рассматриваемой системы зарядов является центрально симметричным. Следовательно, исследование распределения напряженности поля вдоль радиального направления $E_r(r)$ можно провести, применив теорему Остроградского – Гаусса для вакуума

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0}.$$

Введем систему координат – радиальную ось r , ноль которой совпадает с центром заряженной системы (см. рис. 2.3).

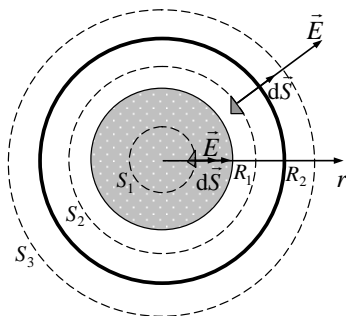


Рис. 2.3

Во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии r от центра системы, векторы напряженности \vec{E} численно равны и направлены радиально. В качестве вспомогательной поверхности интегрирования возьмем сферу с центром, совпадающим с центром заряженной системы.

Распределение потенциала определим, используя интегральную связь \vec{E} и φ .

Обозначим области пространства, где напряженность подчиняется разным законам:

I – $r \in (0; R_1)$, область внутри скопления зарядов;

II – $r \in (R_1; R_2)$, область между шаром и оболочкой;

III – $r \in (R_2; +\infty)$, область снаружи системы.

Область I. Выберем произвольную точку, расположенную на

расстоянии r от центра системы внутри скопления зарядов. Мысленно проведем через эту точку сферическую поверхность, концентрическую с шаром (см. рис. 2.3). Поток вектора напряженности через поверхность S_1 радиусом $r < R_1$ равен

$$\oint_{(S_1)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r \oint_{(S_1)} dS = E_r 4\pi r^2.$$

Заряд, охваченный поверхностью S_1 , проведенной внутри заряженного с постоянной объемной плотностью скопления зарядов, зависит от радиуса этой поверхности r :

$$Q_{\text{охв}} = \frac{Q_1}{(4/3)\pi R^3} (4/3)\pi r^3 = Q_1 \frac{r^3}{R^3}.$$

Подставим полученные выражения в формулу теоремы Остроградского – Гаусса:

$$E_r 4\pi r^2 = Q_1 \frac{r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

Следовательно, в точке, отстоящей на расстоянии r от центра системы и находящейся внутри шара, значение проекции вектора напряженности определяется выражением

$$E_r = Q_1 \frac{r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Рассмотрим область II. Для определения напряженности поля в точке с координатой $R_1 < r < R_2$ мысленно проведем через эту точку сферическую поверхность. Поток вектора напряженности через поверхность S_2

$$\oint_{(S_2)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r \oint_{(S_2)} dS = E_r 4\pi r^2$$

создается зарядом, охваченным данной поверхностью, т.е.

$$Q_{\text{охв}} = Q_1.$$

Тогда

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}.$$

Следовательно, для всех точек, расположенных между шарообразным скоплением зарядов и тонкой оболочкой, проекция напряженности определяется соотношением

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Для исследования области III через точку с координатой $r > R_2$ проведем вспомогательную поверхность S_3 . Поток вектора напряженности через эту поверхность

$$\oint_{(S_3)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r \int_{(S_3)} dS = E_r 4\pi r^2.$$

Сумма зарядов, охваченных поверхностью S_3 , равна алгебраической сумме зарядов шарового скопления Q_1 и заряда тонкой оболочки Q_2 . По условию $Q_2 = -Q_1$. Следовательно, $Q_{\text{оХВ}} = 0$ и в рассматриваемой области $E_r = 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} r \in (0; R_1) \quad E_r(r) &= \frac{Q_1 r}{4\pi \epsilon_0 R_1^3}; \\ r \in (R_1; R_2) \quad E_r(r) &= \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2}; \\ r \in (R_2; +\infty) \quad E_r(r) &= 0. \end{aligned}$$

Определим потенциал как функцию радиальной координаты, используя интегральную связь между \vec{E} и φ :

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^{\infty} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

По условию $\varphi(\infty) = 0$, поэтому потенциал в произвольной точке с координатой $r \in (R_2; +\infty)$:

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} (\vec{E}, d\vec{r}) = 0.$$

Потенциал в точке с координатой $r \in (R_1; R_2)$:

$$\varphi(r) = \int_r^{R_2} (\vec{E}, d\vec{r}) + \int_{R_2}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{r}) = \int_r^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Потенциал в точке с координатой $r \in (0; R_1)$:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{R_1} (\vec{E}, d\vec{r}) + \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{r}) + \int_{R_2}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{r}) = \int_r^{R_1} \frac{Q_1 r}{4\pi \epsilon_0 R_1^3} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \\ &= \frac{Q_1 (R_1^2 - r^2)}{8\pi \epsilon_0 R_1^3} + \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для точек, лежащих в областях

$$\begin{aligned}
 r \in (0; R_1) & \quad \varphi(r) = \frac{Q_1(R_1^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R_1^3} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right); \\
 r \in (R_1; R_2) & \quad \varphi(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right); \\
 r \in (R_2; +\infty) & \quad \varphi(r) = 0.
 \end{aligned}$$

Зависимости $E_r(r)$ приведены на рисунке 2.4 для случая $Q_1 > 0$.

Для построения графика $\varphi(r)$ воспользуемся построенным графиком $E_r(r)$. В области $r \in (R_2; +\infty)$ напряженность поля равна нулю, потенциал постоянен и, поскольку $\varphi(\infty) = 0$, во всех точках данной области $\varphi(r) = 0$. График – прямая, совпадающая с осью абсцисс.

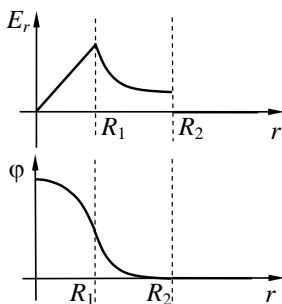


Рис. 2.4

На участках $r \in (0; R_1)$ и $r \in (R_1; R_2)$ проекция напряженности положительная (т.е. \vec{E} сонаправлен с радиальной осью r). Следовательно, по мере удаления от центра системы зарядов потенциал будет убывать от некоторого значения $\varphi(r=0)$ до нуля. В точке $r = R_1$ изменяется вид функции $E_r(r)$, поэтому на графике $\varphi(r)$ в этой точке перегиб. При $r = R_2$ напряженность терпит разрыв. На графике потенциала это точка, где функция $\varphi(r)$ имеет излом (см. рис. 2.4).

Задача 2.3. Объемный заряд постоянной плотностью $\rho < 0$ имеет форму длинного цилиндра радиусом R_1 . Коаксиально цилиндру расположена цилиндрическая поверхность той же длины. Радиус поверхности R_2 , поверхностная плотность заряда $\sigma > 0$. Суммарный

заряд системы считайте положительным.

1. Найдите зависимость проекции вектора напряженности на радиальную ось $E_r(r)$ и постройте график.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал как функцию радиальной координаты и постройте график $\varphi(r)$. Примите $\varphi(0) = 0$.

Решение. Электростатическое поле рассматриваемой системы, состоящей из двух коаксиальных заряженных цилиндров, обладает осевой симметрией. Силовые линии лежат в плоскости, перпендикулярной оси системы и коллинеарны радиальной оси r . Это остается верным для точек поля, отстоящих от оси системы на расстояниях, значительно меньших длины заряженного цилиндра. Величина напряженности поля, обладающего осевой симметрией, зависит только от расстояния до оси системы, поэтому для решения задачи достаточно ввести только радиальную ось r .

Установленная симметрия позволяет для расчета напряженности применить теорему Остроградского – Гаусса в вакууме

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0}.$$

Вспомогательные поверхности интегрирования удобно выбрать в виде цилиндрических поверхностей, коаксиальных с рассматриваемой системой зарядов. Высота этих поверхностей должна быть много меньше высоты заряженных цилиндров, в противном случае придется учитывать краевые эффекты.

Выделим три области пространства, в которых предполагаются различные распределения напряженности:

I – $r \in (0; R_1)$, область внутри скопления зарядов;

II – $r \in (R_1; R_2)$, область между электронным облаком и заряженной цилиндрической поверхностью;

III – $r \in (R_2; +\infty)$, область вне системы.

Рассмотрим каждую выделенную область отдельно.

Область I. Для расчета напряженности поля в первой области рассмотрим произвольную точку с координатой r ($0 < r < R_1$). Через эту точку проведем вспомогательную цилиндрическую поверхность высотой h и радиусом r (см. рис 2.5). Направление вектора напряженности изобразим качественно, без учета знаков зарядов тел, образующих рассматриваемую систему.

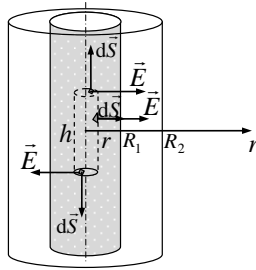


Рис. 2.5

Вычислим поток вектора напряженности через вспомогательную замкнутую поверхность, представив его в виде суммы потоков через отдельные ее части:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{в.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{н.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{E}, d\vec{S}).$$

Для любой точки верхнего и нижнего оснований $\cos(\vec{E}, d\vec{S}) = 0$, следовательно, потока через основания нет. Тогда

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{бок}})} E_r dS_{\text{бок}},$$

где E_r – проекция вектора напряженности поля на ось r . Вследствие рассматриваемой симметрии $E_r = \text{const}$ во всех точках боковой поверхности вспомогательного цилиндра, поэтому E_r можно вынести за знак интеграла.

Поток вектора напряженности равен

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r \int_{(S_{\text{бок}})} dS_{\text{бок}} = E_r 2\pi r h.$$

Сумма зарядов, охваченных вспомогательной поверхностью, зависит от объема этой поверхности:

$$Q_{\text{охв}} = \rho \pi r^2 h.$$

Подставим полученные выражения в формулу теоремы Остроградского – Гаусса

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0},$$

$$E_r 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0},$$

$$E_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

Поскольку объемная плотность заряда $\rho < 0$, в области I проекция вектора напряженности на радиальную ось отрицательная, поскольку знак проекции определяется знаком заряда. Действительно, поле отрицательно заряженного цилиндра отличается от поля цилиндра, заряженного положительно, только направлением \vec{E} . Модуль вектора напряженности внутри объемного заряда, имеющего форму цилиндра, связан с расстоянием от оси системы r линейной зависимостью.

Для областей II и III поверхность интегрирования строится по тем же правилам, следовательно, и выражение для расчета потока вектора напряженности не изменится:

$$\oint_{(s)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r 2\pi r h.$$

Для расчета напряженности поля в области II через произвольную точку, находящуюся в этой области, проведем коаксиальную цилиндрическую поверхность высотой h (см. рис. 2.6).

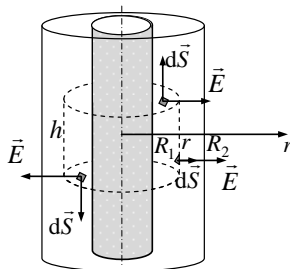


Рис. 2.6

Суммарный заряд, охваченный вспомогательной поверхностью радиусом $R_1 < r < R_2$, равен

$$Q_{\text{охв}} = \rho \pi R_1^2 h.$$

Следовательно, по теореме Остроградского – Гаусса

$$E_r 2\pi r h = \frac{\rho \pi R_1^2 h}{\varepsilon_0}$$

и

$$E_r = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Как и в области I, в рассматриваемом интервале II линии напряженности направлены к оси системы ($E_r < 0$), модуль же напряженности здесь убывает обратно пропорционально r .

Иследуем электростатическое поле снаружи заряженной системы. Заряд, охваченный вспомогательной цилиндрической поверхностью высотой h и радиусом $R_2 < r$ (см. рис. 2.7), равен

$$Q_{\text{охв}} = \rho \pi R_1^2 h + \sigma 2\pi R_2 h.$$

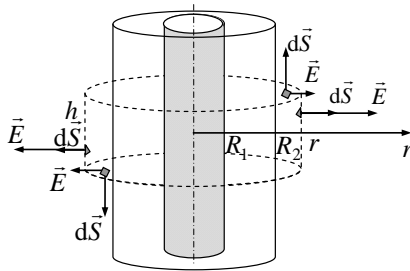


Рис. 2.7

Тогда в области III

$$E_r = \frac{\rho R_1^2 + 2\sigma R_2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Знак проекции вектора напряженности определяется суммарным зарядом системы, который, по условию задачи, является положительным. Следовательно, вне заряженной системы направление силовых линий поля совпадает с направлением радиальной оси r .

Итак,

$$r \in (0; R_1), \quad E_r(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0};$$

$$r \in (R_1; R_2), \quad E_r(r) = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r};$$

$$r \in (R_2; +\infty), \quad E_r(r) = \frac{\rho R_1^2 + 2\sigma R_2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Расчет $\varphi(r)$ начнем с области I. Определим потенциал как функцию радиальной координаты, используя интегральную связь между напряженностью и потенциалом

$$\varphi(r) - \varphi(0) = \int_r^0 (\vec{E}, d\vec{r}).$$

Поскольку точка нулевого потенциала совпадает с осью системы ($\varphi(0) = 0$), для любой точки в интервале $r \in (0; R_1)$:

$$\varphi(r) = \int_r^0 (\vec{E}, d\vec{r}) = \int_r^0 E_r dr = \int_r^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}.$$

Область $r \in (R_1; R_2)$:

$$\varphi(r) = \int_r^{R_1} E_r dr + \int_{R_1}^0 E_r dr = \int_r^{R_1} \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} dr + \int_{R_1}^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left(\ln \frac{R_1}{r} - \frac{1}{2} \right)$$

Область $r \in (R_2; +\infty)$:

$$\varphi(r) = \int_r^{R_2} E_r dr + \int_{R_2}^{R_1} E_r dr + \int_{R_1}^0 E_r dr = \int_r^{R_2} \frac{\rho R_1^2 + 2\sigma R_2}{2\varepsilon_0 r} dr + \int_{R_2}^{R_1} \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} dr + \int_{R_1}^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho R_1^2 + 2\sigma R_2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left(\ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right).$$

Построим графики $E_r(r)$ с учетом знака проекции вектора напряженности на радиальную ось (см. рис. 2.8).

График распределения потенциала можно построить по графику $E_r(r)$.

В области I $E_r < 0$. Согласно дифференциальной связи, $E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$ и $\frac{d\varphi}{dr} > 0$. Следовательно, в рассматриваемой области $\varphi(r)$ – возрастающая функция. Поскольку модуль $E_r(r)$ линейно зависит от r , график $\varphi(r)$ на этом участке – парабола, причем $\varphi(0) = 0$.

В области II $E_r < 0$ и потенциал продолжает повышаться при увеличении расстояния до оси системы. В точке $r = R_1$ наблюдается

перегиб графика $\varphi(r)$, поскольку она соответствует точке, где изменяется характер зависимости $E_r(r)$. Для точек $r \in (R_1; R_2)$ $\frac{d^2\varphi}{dr^2} < 0$ и кривая $\varphi(r)$ обращена вогнутостью вниз. В этой области модуль напряженности убывает пропорционально $\frac{1}{r}$, следовательно, $\varphi(r) \sim \ln r$.

В области III $E_r > 0$, и $\varphi(r)$ – убывающая функция. Точка $r = R_2$, в которой напряженность терпит разрыв, соответствует точке излома графика $\varphi(r)$.

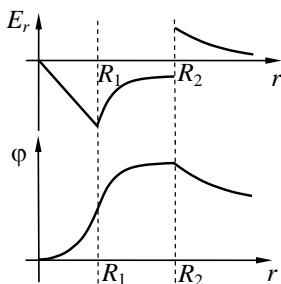


Рис. 2.8

Задача 2.4. Большая плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 6 \cdot 10^{-9}$ Кл/м².

1. Найдите зависимость проекции вектора напряженности на ось X , перпендикулярную плоскости, и постройте график $E_x(x)$.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал как функцию координаты и постройте график $\varphi(x)$. Примите $\varphi(0) = 0$.

Решение. Силовые линии электростатического поля, создаваемого рассматриваемой системой, направлены перпендикулярно равномерно заряженной плоскости, которая является плоскостью симметрии поля (см. рис. 2.9а). Следовательно, значение напряженности поля одинаково во всех точках, удаленных от плоскости на одинаковое расстояние. Введем ось X так, как показано на рисунке 2.9б. Тогда $E_x(x) = -E_x(x)$.

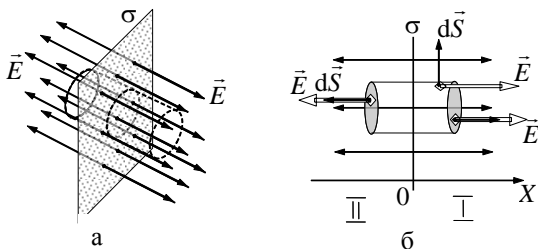


Рис. 2.9

Решение задачи проведем с помощью теоремы Остроградского – Гаусса

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0},$$

выбрав в качестве вспомогательной поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны плоскости, а основания площадью $S_{\text{осн}}$ параллельны ей и лежат на одинаковом расстоянии по разные стороны от плоскости (см. рис. 2.9б). Поток вектора напряженности через вспомогательную поверхность S

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{лев.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{прав.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{E}, d\vec{S}).$$

Для любой точки на боковой поверхности цилиндра $\cos(\vec{E}, d\vec{S}) = 0$, следовательно, поток вектора \vec{E} равен нулю. Тогда

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{лев.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{прав.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) = 2 \int_{(S_{\text{осн}})} E_x dS_{\text{осн}} = 2E_x S_{\text{осн}},$$

где E_x – проекция вектора напряженности поля на ось X в точках, координаты которых $x > 0$ (область I). На заряженной плоскости цилиндрическая поверхность вырезает круг площадью $S_{\text{осн}}$, следовательно, охваченный заряд равен $Q_{\text{охв}} = \sigma S_{\text{осн}}$. Тогда по теореме Остроградского – Гаусса:

$$2E_x S_{\text{осн}} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\epsilon_0},$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Для точек с координатами $x < 0$ (область II)

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Таким образом, поле большой заряженной плоскости является однородным. При переходе через эту плоскость из области II в область I (см. рис. 2.9), вектор напряженности изменяет скачком свое направление на противоположное. Полученные выражения можно обобщить и записать общую формулу для напряженности электростатического поля в произвольной точке оси X:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}.$$

График $E_x(x)$ представлен на рисунке 2.10.

Используя интегральную связь между напряженностью и потенциалом

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx,$$

определим потенциал как функцию координаты x . По условию задачи $\varphi(0) = 0$, поэтому потенциал любой точки:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_x^0 E_x dx.$$

В области I
$$\varphi(x) = \int_x^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x.$$

В области II
$$\varphi(x) = \int_x^0 -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x.$$

Общая формула для потенциала, справедливая для любой точки с координатой x :
$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |x|.$$

График зависимости $\varphi(x)$ показан на рисунке 2.10. В области I $E_x > 0$. Так как $E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$, то в этой области с увеличением расстояния от заряженной плоскости потенциал убывает. Для точек $x < 0$ проекция напряженности поля $E_x < 0$ и функция $\varphi(x)$ является растущей. Точка $x = 0$ является точкой излома графика $\varphi(x)$, поскольку в ней напряженность поля меняется скачком.

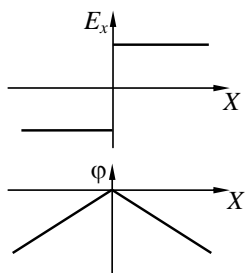


Рис. 2.10

Задача 2.5. Объемный заряд постоянной плотностью ρ имеет форму большого плоского слоя толщиной d .

1. Найдите зависимость проекции вектора напряженности на ось, перпендикулярную плоскому слою, и постройте график $E_x(x)$.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал как функцию координаты и постройте график $\varphi(x)$. Примите $\varphi(0) = 0$.

Решение. Большой плоский слой имеет линейные размеры, значительно превосходящие толщину слоя и расстояние до тех точек, где рассчитывается напряженность поля. Поэтому можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что силовые линии напряженности поля такой системы зарядов располагаются перпендикулярно слою (см. рис. 2.11).

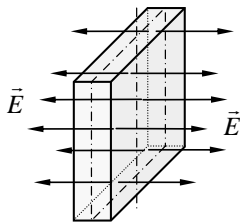


Рис. 2.11

Поле рассматриваемой системы зарядов обладает плоской симметрией. Характеристики такого поля зависят только от расстояния от средней плоскости слоя, являющейся плоскостью симметрии заряженного тела. Для определения напряженности

электростатического поля в произвольной точке можно использовать теорему Остроградского – Гаусса, выбрав в качестве вспомогательной цилиндрическую поверхность, основания которой параллельны слою и симметричны относительно его средней плоскости.

Для определения положения точки в пространстве по отношению к бесконечной плоскости введем ось X , направленную перпендикулярно поверхности слоя с началом на средней плоскости слоя (см. рис. 2.12). Выделим две области пространства, где напряженность подчиняется разным законам.

Обозначим:

I – область внутри слоя $|x| \leq \frac{d}{2}$,

II – область вне слоя $|x| \geq \frac{d}{2}$.

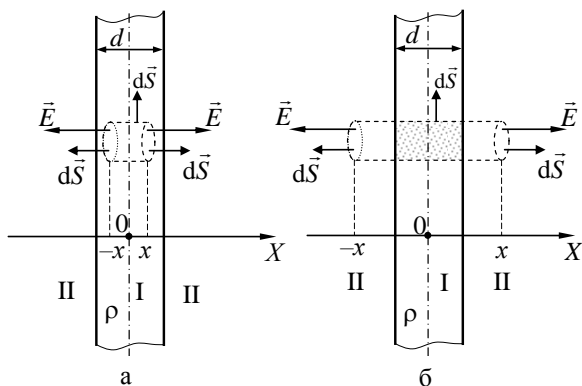


Рис. 2.12

Применим теорему Остроградского – Гаусса для вакуума

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{овв}}}{\epsilon_0}$$

для каждой из областей.

Для I области: $\left(-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\right)$ изобразим вспомогательную

поверхность интегрирования в виде горизонтально расположенного цилиндра с основаниями, симметричными относительно средней плоскости слоя (см. рис. 2.12а). Его основания будут иметь равные по модулю координаты x и $-x$ (именно в этих точках будем определять напряженность электростатического поля) и во всех точках этих поверхностей модуль вектора напряженности поля одинаков. Поток вектора напряженности через боковую поверхность такого цилиндра равен нулю ($d\vec{S} \perp \vec{E}$). Выражение для потока вектора \vec{E} имеет вид

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = 2 \int_{S_{\text{осн}}} E_x \cdot dS = 2E_x \int_{S_{\text{осн}}} dS = 2E_x \cdot S_{\text{осн}}.$$

Заряд, охваченный поверхностью интегрирования, т.е. заключенный внутри цилиндра с площадью основания $S_{\text{осн}}$ и высотой $2x$ (см. рис. 3.12а).

$$Q_{\text{охв}}^{\text{своб}} = \rho \cdot S_{\text{осн}} \cdot 2x.$$

Подставляя выражения для потока и охваченного заряда в формулу теоремы Остроградского – Гаусса, получим

$$2E_x \cdot S_{\text{осн}} = \frac{\rho \cdot S_{\text{осн}} \cdot 2x}{\epsilon_0},$$

$$E_x = \frac{\rho \cdot x}{\epsilon_0}.$$

Для области II $\left(x \geq \frac{d}{2}\right)$ и $\left(x \leq -\frac{d}{2}\right)$ поверхность интегрирования

строится по тем же правилам, следовательно, и выражение для расчета потока вектора напряженности не изменится.

Охваченный вспомогательной цилиндрической поверхностью заряд – заряд, вырезанный из слоя поверхностью интегрирования, т.е. заключенный внутри цилиндра с площадью основания $S_{\text{осн}}$ и высотой d (см. рис. 2.12б):

$$Q_{\text{охв}}^{\text{своб}} = \rho \cdot S_{\text{осн}} \cdot d,$$

$$2E \cdot S_{\text{осн}} = \frac{\rho \cdot S_{\text{осн}} \cdot d}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}.$$

Проекция вектора напряженности вне слоя не зависит от координаты x (поле является однородным). Таким образом,

$$\begin{aligned} |x| < \frac{d}{2}, & \quad E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}; \\ x < -\frac{d}{2}, & \quad E_x(x) = -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

(если $\rho > 0$ слева от слоя силовые линии направлены противоположно оси X).

$$x > \frac{d}{2}, \quad E_x(x) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}.$$

Рассчитаем зависимость потенциала от координаты $\varphi(x)$. Расчет начнем с определения точки нулевого потенциала: по условию задачи $\varphi(0) = 0$. Полученные выражения $E_x(x)$ имеют смысл только для точек, расположенных вблизи заряженного слоя, поэтому начало отсчета потенциала нельзя брать на бесконечности. Если положение точки нулевого потенциала не задано в условии, то $\varphi = 0$ выбирают в точке, расположенной на конечном расстоянии от средней плоскости слоя.

Поскольку нуль потенциала (опорная точка) выбран в области I, следовательно, расчет удобно начать для точек этой области.

Для произвольной точки с координатой $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$ справедливо:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= \int_x^0 E_x dx, \\ \varphi(x) &= \int_x^0 \frac{\rho x}{\varepsilon_0} dx = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \int_x^0 x dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Получена зависимость для первой области $\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$.

Чтобы перейти к расчету потенциала поля во второй области, вычислим потенциалы на границах этой области:

$$\varphi\left(\frac{d}{2}\right) = -\frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}, \quad \varphi\left(-\frac{d}{2}\right) = -\frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}.$$

Тогда для произвольной точки с координатой $x < -\frac{d}{2}$:

$$\varphi(x) - \varphi\left(-\frac{d}{2}\right) = \int_x^{-d/2} E_x dx, \text{ где } E_x = -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} - \text{поле в этой области.}$$

$$\varphi(x) = \varphi\left(-\frac{d}{2}\right) + \int_x^{-d/2} \left(-\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right) dx = \varphi\left(-\frac{d}{2}\right) - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \int_x^{-d/2} dx =$$

$$= \varphi\left(-\frac{d}{2}\right) - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \left(-\frac{d}{2} - x\right),$$

$$\varphi(x) = -\frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho d^2}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{2\varepsilon_0}.$$

Аналогично, для произвольной точки с координатой $x > \frac{d}{2}$

$$\varphi(x) - \varphi\left(\frac{d}{2}\right) = \int_x^{d/2} E_x dx, \text{ где } E_x = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} - \text{поле в этой области.}$$

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{d}{2}\right) + \int_x^{d/2} \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} dx = \varphi\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \int_x^{d/2} dx = \varphi\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \left(\frac{d}{2} - x\right),$$

$$\varphi(x) = -\frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho d^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho x}{2\varepsilon_0}.$$

Итак,

$$|x| < \frac{d}{2} \quad \varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} x^2;$$

$$x < -\frac{d}{2} \quad \varphi(x) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \left(\frac{d}{4} + x\right);$$

$$x > \frac{d}{2} \quad \varphi(x) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \left(\frac{d}{4} - x\right).$$

Построим графики проекции вектора \vec{E} на направление оси X E_x . Для определенности будем считать заряд слоя положительным (см. рис. 2.13).

Построение графика $\varphi(x)$ проведем по известному графику E_x .

В области $0 < x < \frac{d}{2}$ проекция напряженности положительная (силовые линии поля сонаправлены с осью X) и модуль E линейно увеличивается. Поскольку $E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$ и $dx > 0$, то $d\varphi < 0$. Таким

образом, в положительном направлении оси X (что соответствует движению вдоль силовых линий) потенциал убывает. Зависимость $\varphi(x)$ – парабола с вершиной в точке $x = 0$.

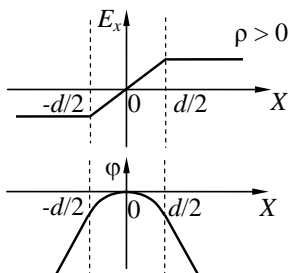


Рис. 2.13

Точка $x = \frac{d}{2}$ является точкой излома для функции $E_x(x)$.

Соответствующая точка графика $\varphi(x)$ является точкой перегиба.

За пределами слоя направление силовых линий не меняется, проекция вектора напряженности $E_x > 0$, следовательно, с увеличением x потенциал будет уменьшаться. Здесь зависимость $\varphi(x)$ линейная и график представляет собой прямую.

Задача 2.6. Шар радиусом R равномерно заряжен положительным зарядом Q . На продолжении радиуса шара расположен тонкий стержень длиной ℓ , по которому равномерно распределен заряд q . Расстояние от поверхности шара до ближайшего конца стержня b . Определите силу, действующую на стержень.

Решение. Сила, действующая на заряженный стержень, обусловлена тем, что он находится во внешнем поле, создаваемом зарядом Q . Электростатическое поле равномерно распределенного по объему шара заряда обладает центральной симметрией, поэтому определить распределение напряженности вдоль радиального направления можно с помощью теоремы Остроградского – Гаусса. Сложность расчета силы, действующей на стержень, заключается в том, что поле заряженного шара неоднородное. Следовательно, для расчета силы, действующей на заряженный стержень, необходимо воспользоваться принципом суперпозиции.

Совместим начало отсчета с центром шара и введем радиальную ось r (см. рис. 2.14).

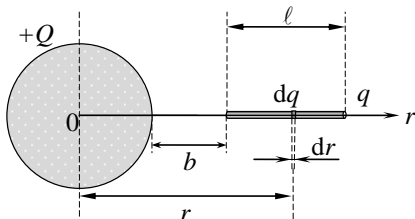


Рис. 2.14

Выделим на стержне элемент dr , расположенный на расстоянии r от центра шара. Участок dr настолько мал, что в его пределах поле заряженного шара можно считать однородным. Заряд рассматриваемого элемента $dq = \frac{q}{\ell} dr$. Сила, действующая на элемент:

$$dF = E_r(r) \cdot dq.$$

Силу, действующую на весь стержень, определим по принципу суперпозиции:

$$\vec{F} = \int_{(\text{постержню})} d\vec{F}$$

Решение задачи начнем с определения напряженности поля заряженного шара в точке с координатой $r > R$. Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса для вакуума

$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0},$$

выбрав в качестве вспомогательной поверхности интегрирования концентрическую сферическую поверхность радиуса r (см. рис. 2.15).

Поток вектора напряженности через поверхность S равен

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r \int_{(S)} dS = E_r 4\pi r^2.$$

При этом заряд, охваченный поверхностью интегрирования, равен Q . Подставив полученные выражения в теорему Остроградского – Гаусса, получим напряженность поля заряженного шара в точке r :

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

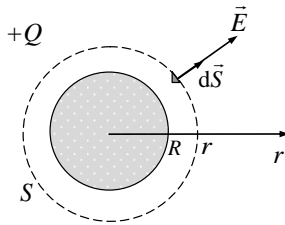


Рис. 2.15

Теперь рассчитаем силу, действующую на стержень. Все силы $d\vec{F}$, действующие на элементарные заряды dq , сонаправлены, поэтому результирующая сила, действующая на стержень, равна

$$F = \int_{R+b}^{R+b+\ell} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\ell r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\ell} \left(\frac{1}{R+b} - \frac{1}{R+b+\ell} \right).$$

3. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в среде

Задача 3.1. Диполь с электрическим моментом $p_e = 1 \cdot 10^{-10}$ Кл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E = 10$ кВ/м.

1. Определите изменение потенциальной энергии диполя при его повороте на угол $\alpha = 60^\circ$.

2. Рассчитайте момент силы, действующей на диполь в конечном положении.

Решение. Момент сил, действующих на диполь с электрическим моментом \vec{p}_e со стороны внешнего поля напряженностью \vec{E} , равен

$$\vec{M} = [\vec{p}_e \vec{E}].$$

Момент сил, действующих на диполь, стремится повернуть его дипольный момент в направлении внешнего поля. Такая ориентация \vec{p}_e соответствует положению устойчивого равновесия диполя, при котором его потенциальная энергия минимальна. Элементарная работа сил электростатического поля по повороту диполя на малый угол $d\theta$ (см. рис. 3.1) совершается за счет уменьшения его потенциальной энергии

$$\delta A = M \cdot d\theta = -dW_{\text{п}}.$$

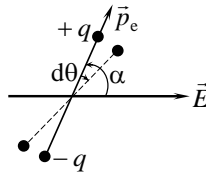


Рис. 3.1

Поскольку $M = p_e E \sin \alpha$, где α – угол между векторами дипольного момента \vec{p}_e и напряженностью внешнего поля \vec{E} , то

$$\delta A = p_e E \sin \alpha \cdot d\theta.$$

Поскольку $d\theta = -d\alpha$ (см. рис. 3.1), элементарная работа сил электростатического поля

$$\delta A = -p_e E \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Тогда

$$dW_{\text{п}} = p_e E \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Изменение потенциальной энергии диполя при его повороте из положения устойчивого равновесия ($\vec{p}_e \uparrow \uparrow \vec{E}$) на угол α равно

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{п}} &= W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1} = \int_0^{\alpha} p_e E \sin \alpha \cdot d\alpha = -p_e E \cos \alpha \Big|_0^{\alpha} = \\ &= -p_e E \cos \alpha - (-p_e E \cos 0), \\ \Delta W_{\text{п}} &= p_e E \cos 0^\circ - p_e E \cos \alpha = p_e E (1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Рассчитаем изменение потенциальной энергии диполя при его повороте на угол $\alpha = 60^\circ$ и момент силы, действующей на диполь в конечном положении:

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{п}} &= p_e E (1 - \cos \alpha) = 0,5 \text{ мкДж}, \\ M &= p_e E \sin \alpha = 0,87 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Задача 3.2. В пространстве, наполовину заполненном парафином (ϵ), создано однородное электрическое поле, напряженность которого в воздухе E_1 . Граница воздух – парафин плоская и образует угол α с силовыми линиями поля в воздухе.

1. Определите модули векторов электрического смещения, напряженности поля и поляризованности в парафине и углы, которые они составляют с границей раздела сред.

2. Найдите плотность связанных зарядов на границе парафин – воздух.

Решение. Для определения модулей векторов электрического смещения, напряженности поля и поляризованности в парафине необходимо вспомнить граничные условия для этих векторов. Известно, что в отсутствие свободных зарядов на границе раздела двух сред нормальная компонента вектора электрического смещения является непрерывной, а тангенциальная – претерпевает разрыв

$\left(\frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2} \right)$. Тангенциальная составляющая вектора напряженности на незаряженной границе раздела сред непрерывна, а нормальная изменяется скачком $\left(\frac{E_{1n}}{\epsilon_2} = \frac{E_{2n}}{\epsilon_1} \right)$.

Разложим вектор напряженности электростатического поля \vec{E}_1 в вакууме на две составляющие: $E_{1\tau}$ – тангенциальную и E_{1n} – нормальную (см. рис. 3.2).

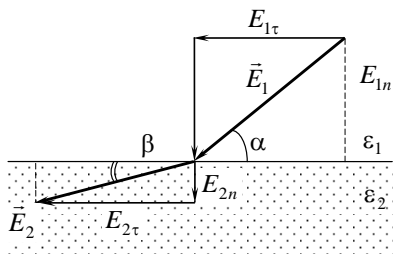


Рис. 3.2

Величины этих составляющих в воздухе известны:

$$E_{1\tau} = E_1 \cos \alpha,$$

$$E_{1n} = E_1 \sin \alpha.$$

Используя граничные условия, определим соответствующие компоненты вектора напряженности в диэлектрике. По условию задачи $\epsilon_1 = 1$ (воздух), а $\epsilon_2 = \epsilon$ (парафин). Тогда

$$E_{2\tau} = E_{1\tau},$$

$$E_{2n} = \frac{1}{\epsilon} E_{1n}.$$

Следовательно,

$$E_{2\tau} = E_1 \cos \alpha,$$

$$E_{2n} = \frac{1}{\epsilon} E_1 \sin \alpha.$$

Напряженность поля в диэлектрике

$$E_2 = \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = E_1 \sqrt{(\cos \alpha)^2 + \frac{(\sin \alpha)^2}{\epsilon^2}}.$$

Определим угол β , который вектор \vec{E}_2 составляет с границей раздела сред.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_{2n}}{E_{2\tau}} = \frac{\sin \alpha}{\epsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{tg} \alpha$$

Определим модуль вектора электрического смещения в воздухе D_1 , используя связь между векторами \vec{E} и \vec{D} :

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \vec{E}_1.$$

Диэлектрическую проницаемость воздуха можно принять равной единице. Тогда

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1.$$

Соответствующие компоненты вектора электрического смещения определим из граничных условий (см. рис. 3.3).

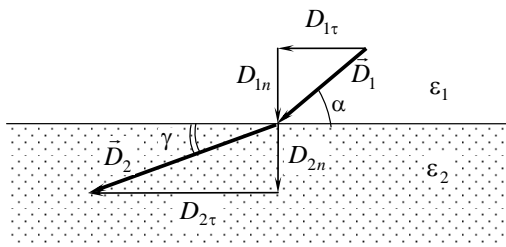


Рис. 3.3

$$D_{2\tau} = \varepsilon_2 D_{1\tau}, \text{ где } D_{1\tau} = D_1 \cos \alpha \text{ и } D_{2\tau} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_1 \cos \alpha.$$

$$D_{2n} = D_{1n}, \text{ где } D_{1n} = D_1 \sin \alpha \text{ и } D_{2n} = \varepsilon_0 E_1 \sin \alpha.$$

Следовательно, значение вектора электрического смещения в парафине

$$D_2 = \sqrt{D_{2\tau}^2 + D_{2n}^2} = D_1 \sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

Угол, который составляет вектор электрического смещения в парафине с границей:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{D_{2n}}{D_{2\tau}} = \frac{\sin \alpha}{\varepsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta,$$

т.е. $\gamma = \beta$. Поскольку $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, векторы электрического смещения и напряженности в изотропном диэлектрике сонаправлены.

Для определения значения вектора поляризованности в диэлектрике воспользуемся связью между векторами \vec{P} , \vec{D} и \vec{E} :

$$\vec{P} = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2.$$

Вектор \vec{P} сонаправлен с векторами \vec{D} и \vec{E} (см. рис. 3.4) и равен

$$P = \varepsilon_0 E_2 (\varepsilon - 1) = \varepsilon_0 E_1 (\varepsilon - 1) \sqrt{(\cos \alpha)^2 + \frac{(\sin \alpha)^2}{\varepsilon^2}}.$$

Плотность связанных зарядов, появляющихся на границе раздела сред вследствие поляризации диэлектрика, определим по величине проекции вектора поляризации на нормаль \vec{n} к границе раздела (см. рис. 3.3).

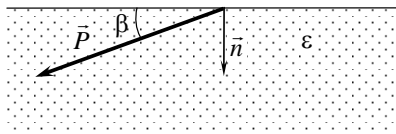


Рис. 3.4

Так как вектор поляризованности сонаправлен с вектором электрического смещения и напряженности, то

$$\sigma_{\text{связ}} = P \sin \beta = \varepsilon_0 E_2 (\varepsilon - 1) \sin \beta = \varepsilon_0 E_1 (\varepsilon - 1) \sin \beta \sqrt{(\cos \alpha)^2 + \frac{(\sin \alpha)^2}{\varepsilon^2}}.$$

Задача 3.3. Сфера радиусом R_1 заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$. С внешней стороны к сфере примыкает слой диэлектрика ($\varepsilon = 2$) с внешним радиусом R_2 .

1. Найдите зависимости проекций векторов электрического смещения и напряженности на радиальную ось $D_r(r)$ и $E_r(r)$ и постройте графики.

2. Определите поляризованность диэлектрика как функцию радиальной координаты и постройте график $P_r(r)$.

3. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал как функцию радиальной координаты и постройте график $\varphi(r)$. Примите $\varphi(0) = 0$.

Решение. Распределение напряженности поля внутри слоя незаряженного диэлектрика, окружающего заряженную сферу, будет отличаться от $E_r(r)$ в вакууме вследствие поляризации. Величину напряженности поля внутри диэлектрика можно найти с помощью обобщенной теоремы Остроградского – Гаусса для вектора электрического смещения \vec{D} :

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = \sum Q_{\text{охв.своб.}}$$

Поле рассматриваемой системы зарядов центрально симметричное, поэтому линии \vec{D} так же, как и силовые линии поля,

будут направлены радиально. В качестве вспомогательной поверхности интегрирования выберем сферическую поверхность, центр которой совпадает с центром системы.

Выделим для рассмотрения три области с различным распределением напряженности и проведем расчет для каждой в отдельности (см. рис. 3.5).

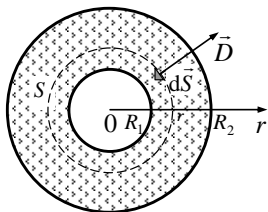


Рис. 3.5

Область $r \in (0; R_1)$. В силу симметрии распределения заряда по поверхности, электростатическое поле внутри сферы отсутствует (см. задачу 2.1). Следовательно, $E_r(r) = 0$ и $D_r(r) = 0$.

Область $r \in (R_1; R_2)$. Выберем в этой области произвольную точку с координатой r . Для определения проекции вектора электрического смещения в выбранной точке проведем через нее сферическую поверхность S . Из соображений симметрии следует, что угол между векторами \vec{D} и $d\vec{S}$ во всех точках поверхности равен нулю и абсолютное значение \vec{D} во всех точках поверхности одинаково. Тогда поток вектора электрического смещения через вспомогательную поверхность равен

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = D_r \oint_{(S)} dS = D_r 4\pi r^2.$$

Свободный заряд, охваченный поверхностью S :

$$Q_{\text{охв. своб.}} = \sigma 4\pi R_1^2.$$

Следовательно,

$$D_r(r) = \frac{\sigma R_1^2}{r^2}.$$

Значение проекции вектора напряженности найдем, используя связь между \vec{E} и \vec{D} :

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Учитывая, что в изотропном диэлектрике вектора напряженности и электрического смещения сонаправлены, получим

$$E_r(r) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0 r^2}.$$

Определим поляризованность диэлектрика как функцию радиальной координаты, воспользовавшись связью:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

$$P_r(r) = \frac{\sigma R_1^2}{r^2} - \varepsilon_0 \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R_1^2}{r^2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right)$$

Очевидно, что в остальных областях $P_r(r) = 0$.

Область $r \in (R_2; +\infty)$. Проведя через произвольную точку рассматриваемой области сферическую поверхность S , получим выражение для потока \vec{D} :

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{s}) = D_r 4\pi r^2.$$

Свободный заряд, охваченный вспомогательной поверхностью, равен суммарному заряду внутренней сферы радиусом R_1 :

$$Q_{\text{своб.}} = \sigma 4\pi R_1^2.$$

Тогда, учитывая, что относительная диэлектрическая проницаемость вакуума равна единице, получим

$$D_r(r) = \frac{\sigma R_1^2}{r^2},$$

$$E_r(r) = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Используя полученные аналитические зависимости, можно построить графики распределения проекций векторов электрического смещения, напряженности и поляризованности на радиальную ось $D_r(r)$, $E_r(r)$ и $P_r(r)$ (см. рис. 3.6).

Следует обратить внимание, что вектор смещения терпит разрыв только на поверхностях, заряженных свободным зарядом. Вектор напряженности изменяется скачком на поверхностях, по которым распределяется как свободный, так и связанный заряд. Поверхностные плотности связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика различны, однако суммарные связанные заряды этих поверхностей равны по величине и имеют

противоположные знаки. Поэтому наличие диэлектрического слоя не изменило распределения напряженности поля в области $r \in (R_2; +\infty)$.

Определим потенциал как функцию радиальной координаты, приняв $\varphi(0) = 0$. Расчет начнем с области $r \in (0; R_1)$.

$$\varphi(r) = \int_r^0 E_r dr = 0.$$

Область I $r \in (R_1; R_2)$. Учитывая, что $\varphi(R_1) = 0$,

$$\varphi(r) - \varphi(R_1) = \int_r^{R_1} E_r dr = \int_r^{R_1} \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right).$$

В области II $r \in (R_2; +\infty)$ распределение потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{R_2} \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0 r^2} dr, \\ \varphi(r) &= \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \end{aligned}$$

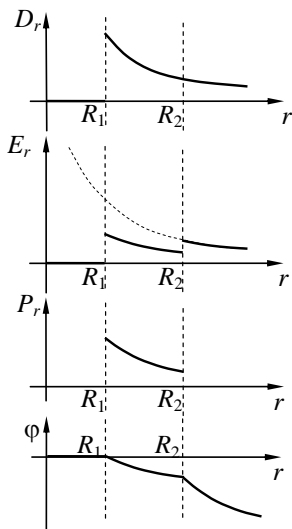


Рис. 3.6

График $\varphi(r)$ построим на основании графика $E_r(r)$ (см. рис. 3.6). В точках, лежащих внутри заряженной по поверхности сферы, поля нет, потенциал неизменен и равен потенциалу в центре системы, т.е. $\varphi(r) = 0$.

В области $r \in (R_1; R_2)$ проекция вектора напряженности положительна, следовательно, по мере удаления от заряженной сферы потенциал будет уменьшаться. Модуль вектора напряженности убывает пропорционально $\frac{1}{r^2}$, следовательно, потенциал убывает пропорционально $\frac{1}{r}$ и функция $\varphi(r)$ является вогнутой. В области $r \in (R_2; +\infty)$ вид распределения потенциала не изменяется, однако кривая зависимости $\varphi(r)$ будет круче, чем в области $r \in (R_1; R_2)$, так как в точке $r = R_2$ величина напряженности увеличивается скачком в ε раз.

Задача 3.4. Длинный диэлектрический цилиндр ($\varepsilon = 3$) радиусом $R = 4$ см равномерно заряжен с положительной объемной плотностью $\rho = 7 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^3$.

1. Найдите зависимости проекций векторов электрического смещения и напряженности поля на радиальную ось $D_r(r)$ и $E_r(r)$ и постройте графики.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал как функцию радиальной координаты и постройте график $\varphi(r)$. Примите $\varphi(0) = 0$.

3. Рассчитайте поляризованность диэлектрика как функцию радиальной координаты и постройте график $P_r(r)$.

4. Определите поверхностную плотность связанных зарядов на внешней поверхности диэлектрика.

Решение. По условию заряд равномерно распределен по объему диэлектрика, имеющего форму цилиндра. Во всех точках, отстоящих на одинаковом расстоянии r от оси системы, векторы электрического смещения \vec{D} численно равны и направлены радиально. Такое поле является осесимметричным, что позволяет воспользоваться обобщенной теоремой Остроградского – Гаусса

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = \sum Q_{\text{охв. своб.}}$$

для определения зависимости проекций векторов электрического смещения и напряженности поля на радиальную ось. В качестве вспомогательной поверхности интегрирования S возьмем коаксиальную цилиндрическую поверхность.

Расчет поля придется проводить дважды: для точек, находящихся внутри цилиндра, и точек, лежащих снаружи цилиндра. В обоих случаях поток вектора электрического смещения через основания вспомогательной поверхности интегрирования равен нулю, т.к. в любой точке основания $\vec{D} \perp d\vec{S}$ (см. рис. 3.7).

Модули векторов \vec{E} и \vec{P} определим по полученному значению \vec{D} , т.к. вектор электрического смещения, напряженность электростатического поля и поляризованность диэлектрика связаны соотношениями

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.\end{aligned}$$

Найти поверхностную плотность связанного заряда, образовавшегося вследствие поляризации на границе диэлектрик – вакуум, можно двумя способами.

Первый позволяет определить $\sigma_{\text{связ}}$, зная нормальную составляющую вектора \vec{P} по известному соотношению

$$\sigma_{\text{связ}} = P_n,$$

где P_n – проекция вектора поляризованности на внешнюю нормаль к рассматриваемому участку поверхности диэлектрика.

Второй способ позволяет определить $\sigma_{\text{связ}}$ по величине скачка напряженности на рассматриваемой поверхности:

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда границы раздела сред $\sigma = \sigma_{\text{своб}} + \sigma_{\text{связ}} + \sigma_{\text{индуц}}$, где $\sigma_{\text{индуц}}$ – заряды, появляющиеся на поверхности проводников.

Выделим для рассмотрения две области I ($r \in (0; R)$) и II ($r \in (R; +\infty)$). Для расчета значения вектора электрического смещения поля в первой области, рассмотрим произвольную точку с координатой r ($0 < r < R$). Через эту точку проведем вспомогательную цилиндрическую поверхность высотой h и радиусом r (см. рис. 3.7).

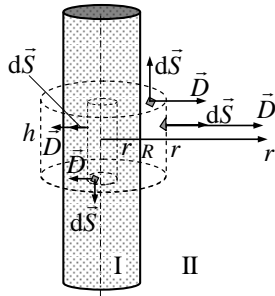


Рис. 3.7

Вычислим поток вектора электрического смещения через вспомогательную замкнутую поверхность, представив его в виде суммы потоков через отдельные ее части:

$$\oint_{(S)} (\vec{D}_1, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{в.осн}})} (\vec{D}_1, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{н.осн}})} (\vec{D}_1, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{D}_1, d\vec{S}).$$

Как отмечалось выше, для любой точки верхнего и нижнего основания $\cos(\vec{D}, \hat{d\vec{S}}) = 0$, следовательно, потока через основания нет. Тогда

$$\oint_{(S)} (\vec{D}_1, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{D}_1, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{бок}})} D_{1r} dS_{\text{бок}},$$

где D_r – проекция вектора электрического смещения поля на ось r . Поток \vec{D} равен

$$\oint_{(S)} (\vec{D}_1, d\vec{S}) = D_{1r} \int_{(S_{\text{бок}})} dS_{\text{бок}} = D_{1r} 2\pi r h.$$

Свободный заряд, охваченный вспомогательной поверхностью:

$$\sum Q_{\text{о.хв. своб.}} = \rho \pi r^2 h.$$

Тогда по теореме Остроградского – Гаусса для поля в веществе:

$$D_{1r} 2\pi r h = \rho \pi r^2 h.$$

Зависимости проекций векторов электрического смещения, напряженности поля и вектора поляризованности на радиальную ось в области I имеют вид

$$D_{lr} = \frac{\rho r}{2},$$

$$E_{lr} = \frac{D_{lr}}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{2\varepsilon \varepsilon_0},$$

$$P_{lr} = \frac{\rho r}{2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right).$$

Область II. Рассмотрим произвольную точку с координатой $r \in (R; +\infty)$.

Поток вектора \vec{D} сквозь цилиндрическую поверхность, проходящую через выделенную точку r , равен

$$\oint_{(S)} (\vec{D}_{II} \cdot d\vec{S}) = D_{IIr} \int_{(S_{бок})} dS_{бок} = D_{IIr} 2\pi r h.$$

Свободный заряд, охваченный вспомогательной поверхностью:

$$\sum Q_{охв. \text{ своб.}} = \rho \pi R^2 h.$$

Следовательно, для произвольной точки в области II можно записать:

$$D_{IIr}(r) = \frac{\rho R^2}{2r}, \quad E_{IIr}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Все точки рассматриваемой области находятся в вакууме, поэтому $P_r(r) = 0$.

Используя интегральную связь между \vec{E} и φ , определим потенциал как функцию радиальной координаты. По условию задачи $\varphi(0) = 0$, поэтому

$$\varphi(r) - \varphi(0) = \int_r^0 E_r dr.$$

При заданной точке нулевого потенциала расчет удобно начинать с области I:

$$\varphi(r) = \int_r^0 E_r dr,$$

$$\varphi_1(r) = \int_r^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon \varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon \varepsilon_0}.$$

В области II

$$\varphi_{II}(r) = \int_r^R \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0 r} dr + \int_R^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon\varepsilon_0} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r} - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Используя полученные аналитические выражения, построим графики зависимости проекций на радиальную ось r векторов $D_r(r)$, $E_r(r)$, $P_r(r)$ и распределение потенциала $\varphi(r)$ (см. рис. 3.8).

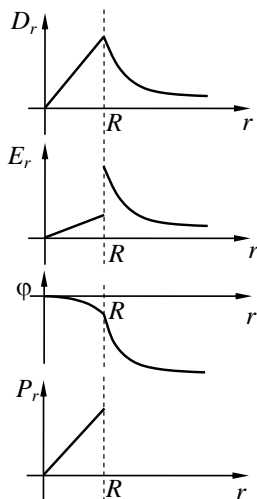


Рис. 3.8

Вектор электрического смещения терпит разрыв только на поверхностях, заряженных свободным зарядом. Вектор напряженности терпит разрыв на любой заряженной поверхности, причем величина скачка определяется поверхностной плотностью заряда (свободного, связанного или индуцированного) рассматриваемой поверхности.

Определим поверхностную плотность связанных зарядов на внешней поверхности диэлектрика. При переходе из диэлектрика в вакуум значение проекции напряженности изменяется на величину

$$\Delta E = E_{IIr}(R) - E_{I r}(R)$$

$$\Delta E = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho R}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right)$$

Поскольку на поверхности цилиндра располагается только связанный заряд, то

$$\Delta E = \frac{\sigma_{\text{связ}}}{\epsilon_0}$$

и

$$\sigma_{\text{связ}} = \Delta E \cdot \epsilon_0 = \frac{\rho R}{2} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \right).$$

Задача 3.5. Шар из диэлектрика, диэлектрическая проницаемость которого меняется по закону $\epsilon = 2 + \frac{r}{R}$, равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 8,7 \cdot 10^{-9}$ Кл/м³. Радиус шара $R = 4$ см.

1. Найдите зависимости проекций векторов электрического смещения и напряженности поля на радиальную ось $D_r(r)$ и $E_r(r)$ и постройте графики.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал поля как функцию радиальной координаты и постройте график $\varphi(r)$. Примите $\varphi(\infty) = 0$.

3. Получите зависимость проекции вектора поляризации на радиальную ось и постройте график $P_r(r)$.

4. Определите объемную плотность связанных зарядов.

5. Найдите поверхностную плотность связанных зарядов на внешней поверхности диэлектрика.

Решение. Заряженный шар выполнен из диэлектрика, следовательно, расчет проекции вектора электрического смещения электростатического поля можно провести, используя теорему Остроградского – Гаусса для поля в веществе:

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = \sum Q_{\text{охв. своб.}}$$

При расчете зависимости проекций напряженности поля на радиальную ось необходимо учитывать линейный характер зависимости диэлектрической проницаемости от расстояния до центра шара. Объемную плотность связанных зарядов можно найти, используя теорему Остроградского – Гаусса для вектора поляризованности в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}.$$

Поверхностную плотность связанных зарядов найдем по известному соотношению

$$\sigma_{\text{связ}} = P_n.$$

Решение. Поскольку поле рассматриваемой системы зарядов имеет центральную симметрию, в качестве вспомогательной поверхности интегрирования выберем концентрическую сферическую поверхность. Рассмотрим отдельно области внутри и вне шара.

Область I $r \in (0; R)$.

Выберем произвольную точку с координатой $r_1 < R$ и проведем вспомогательную поверхность S_I так, чтобы она проходила через выбранную для рассмотрения точку (см. рис. 3.9).

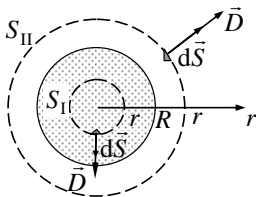


Рис. 3.9

Рассчитаем поток вектора электрического смещения через вспомогательную поверхность. Векторы \vec{D} и $d\vec{S}$ во всех точках поверхности коллинеарны, следовательно, внутри заряженного шара поток равен

$$\oint_{(S_I)} (\vec{D}_I, d\vec{S}) = \oint_{(S_I)} D_{Ir} dS = D_{Ir} \cdot 4\pi r^2.$$

Охваченный поверхностью S_I свободный заряд определяется объемом внутри поверхности интегрирования:

$$\sum Q_{\text{охв. своб.}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Тогда

$$D_{Ir}(r) = \frac{\rho r}{3}.$$

Проекция напряженности в рассматриваемой области

$$E_{lr}(r) = \frac{D_{lr}}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\left(2 + \frac{r}{R}\right)\varepsilon_0}.$$

Или

$$E_{lr}(r) = \frac{\rho r R}{3(2R + r)\varepsilon_0}.$$

Проекцию вектора поляризации на радиальное направление найдем, используя связь

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

$$P_{lr}(r) = D_{lr}(r) - \varepsilon_0 E_{lr}(r) = \frac{\rho r}{3} - \frac{\rho r R}{3(2R + r)\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3} \left(\frac{R + r}{2R + r} \right).$$

Рассмотрим область II вне шара: $r \in (R; +\infty)$.

Проведем вспомогательную поверхность S_{II} через произвольную точку с координатой $r_2 < R$ (см. рис. 3.9). Поток вектора электрического смещения сквозь поверхность S_2 , равен

$$\oint_{(S_2)} (\vec{D}_{II}, d\vec{S}) = \oint_{(S_2)} D_{IIr} dS = D_{IIr} 4\pi r^2$$

Охваченный поверхностью S_{II} свободный заряд не зависит от радиуса поверхности интегрирования

$$\sum Q_{\text{охв. своб.}} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Используя теорему Остроградского – Гаусса, получим

$$D_{IIr}(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2}.$$

Проекция вектора напряженности электростатического поля (в вакууме $\varepsilon_{\text{вакуум}} = 1$):

$$E_{IIr}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Очевидно, что $P_{IIr}(r) = 0$.

Используя связь между напряженностью и потенциалом, определим потенциал поля как функцию радиальной координаты. Поскольку по условию $\varphi(\infty) = 0$, расчет потенциала удобнее начинать с области II.

$$\varphi_{II}(r) = \int_r^{\infty} E_{IIr} dr = \int_r^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}.$$

Потенциал точки с координатой $r < R$ области I:

$$\varphi_I(r) = \int_r^R E_{Irr} dr + \int_R^{\infty} E_{IIr} dr = \int_r^R \frac{\rho r R}{3(2R+r)\epsilon_0} dr + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R},$$

$$\varphi_I(r) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \left((R-r) - 2R \ln \frac{3R}{r+2R} \right) + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}.$$

Определим объемную плотность связанных зарядов, используя теорему Остроградского – Гаусса для вектора поляризованности в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}.$$

В сферической системе координат дивергенция вектора \vec{P} , имеющего в нашем случае только радиальную составляющую, рассчитывается следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{P}_I = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r(r)) \right].$$

Подставим полученное выше выражение для проекции вектора поляризации на радиальную ось в области I:

$$\operatorname{div} \vec{P}_I = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho r}{3} \left(\frac{R+r}{2R+r} \right) \right) \right] = \frac{\rho}{3} \left(\frac{6R+10Rr+3r^2}{(2R+r)^2} \right).$$

Следовательно,

$$\rho_{\text{связ}} = \frac{\rho}{3} \left(\frac{6R+10Rr+3r^2}{(2R+r)^2} \right).$$

Поверхностную плотность связанных зарядов найдем по известной величине нормальной проекции вектора поляризации на границе диэлектрика:

$$\sigma_{\text{связ}} = P_{In}(R) - P_{IIn}(R) = P_{In}(R),$$

$$\sigma_{\text{связ}} = \frac{\rho R}{3} \left(\frac{R+R}{2R+R} \right) = \frac{2\rho R}{9}.$$

Графики распределений $D_r(r)$, $E_r(r)$, $\varphi(r)$ и $P_r(r)$ на радиальную ось представлены на рисунке 3.10.

Изображенные на рисунке 3.10 зависимости соответствуют положительной объемной плотности заряда шара ρ . Поскольку вектор \vec{D} нормален к границе раздела диэлектрик – вакуум, график

зависимости $D_r(r)$ не терпит разрыва при $r=R$. Вектор напряженности также перпендикулярен границе раздела сред, но его нормальная составляющая в точке $r=R$ терпит разрыв. Проекция напряженности положительная, потенциал – убывающая функция. Необходимо еще раз подчеркнуть, что, являясь энергетической характеристикой электростатического поля, потенциал будет непрерывной функцией. В точках, где зависимость график $E_r(r)$ изменяется скачком, график $\varphi(r)$ имеет излом.

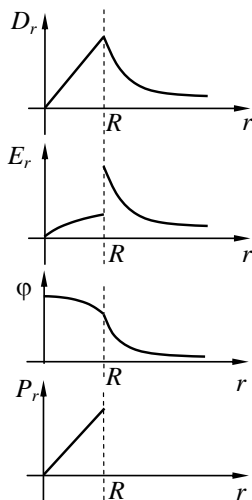


Рис. 3.10

Задача 3.6. Металлический шар радиусом R_1 с зарядом Q_1 находится в центре толстостенного металлического шарового слоя внутренним радиусом R_2 и внешним R_3 . Заряд шарового слоя $Q_2 = -2Q_1$.

1. Найдите зависимость проекции вектора напряженности поля на радиальную ось $E_r(r)$ и постройте график.
2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал как функцию радиальной координаты и постройте график $\varphi(r)$. Примите $\varphi(\infty) = 0$.
3. Рассчитайте поверхностную плотность заряда на внутренней и внешней поверхностях шарового слоя.

Решение. Известно, что вследствие электрической индукции, свободные заряды располагаются на внешней поверхности проводника и электростатическое поле внутри металлического тела отсутствует. Как следствие, разность потенциалов между двумя любыми точками в металле равна нулю, т.е. поверхность и объем металлического тела эквипотенциальны.

Электростатическое поле рассматриваемой системы центрально симметричное, что позволяет воспользоваться при решении теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{оXB}}}{\epsilon_0}.$$

Исследовать распределение напряженности будем с помощью вспомогательной поверхности – сферы, центр которой совпадает с центром проводящего шара (см. рис. 3.11). Направление вектора напряженности изображено качественно (для положительного заряда шара и слоя). Знак проекции вектора напряженности определится знаком суммарного заряда, охваченного поверхностью интегрирования. Из соображений симметрии следует, что вектора \vec{E} и $d\vec{S}$ во всех точках вспомогательной поверхности коллинеарны, а абсолютное значение \vec{E} во всех точках поверхности одинаково.

Опыт показывает, что при внесении металлического тела во внешнее электростатическое поле вследствие электростатической индукции на противоположных сторонах его поверхности появляются заряды одинаковой величины и разного знака. При индукции перемещение электронов в металле прекращается тогда, когда поле индукционного заряда в каждой точке внутри металла скомпенсирует внешнее поле. В нашем случае внешним электростатическим полем для проводящего слоя является поле заряда Q_1 .

Заряд на внутренней и внешней поверхности шарового слоя окажется различным, поскольку, помимо индукционного заряда, на внешней поверхности распределен свободный заряд Q_2 .

Поверхностную плотность заряда на внутренней и внешней поверхности шарового слоя определим по величине изменения модуля напряженности на соответствующей границе раздела:

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

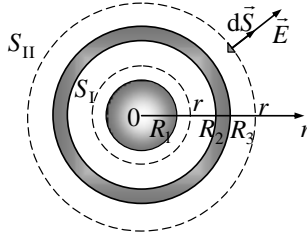


Рис. 3.11

Начнем расчет напряженности поля с области I $r \in (0; R_1)$. Эта область находится в металле, следовательно, здесь электростатическое поле отсутствует

$$E_{I,r}(r) = 0.$$

Область II $r \in (R_1; R_2)$. Вычислим поток вектора напряженности электростатического поля через поверхность S_I , проходящую через точку с координатой r , напряженность поля в которой мы будем определять.

$$\oint_{(S_I)} (\vec{E}_{II}, d\vec{S}) = \oint_{(S_I)} E_{II,r} dS = E_{II,r} 4\pi r^2.$$

Охваченный вспомогательной поверхностью интегрирования S_I заряд равен Q_1 . Подставив полученные выражения в теорему Остроградского – Гаусса, получим напряженность поля в произвольной точке r рассматриваемой области:

$$E_{II,r}(r) = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Область III $r \in (R_2; R_3)$. Аналогично первой области:

$$E_{III,r}(r) = 0.$$

Область IV $r \in (R_3; +\infty)$. Через произвольную точку r проведем сферическую поверхность S_{II} . Поток вектора напряженности через вспомогательную поверхность

$$\oint_{(S_{II})} (\vec{E}_{IV}, d\vec{S}) = E_{IV,r} 4\pi r^2,$$

а охваченный этой поверхностью заряд равен

$$Q_{\text{охв}} = Q_1 + q'_{\text{инд}} + q''_{\text{инд}} + Q_2,$$

где $q'_{\text{инд}}$ и $q''_{\text{инд}}$ – индукционные заряды на внутренней и внешней поверхности слоя соответственно. Поскольку $q'_{\text{инд}} = -q''_{\text{инд}}$ и по условию заряд шарового слоя $Q_2 = -2 Q_1$:

$$Q_{\text{о.х.в.}} = Q_1 + Q_2 = -Q_1.$$

Проекция вектора напряженности поля на радиальную ось имеет вид

$$E_{\text{IV}r}(r) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Определим потенциал как функцию радиальной координаты, используя интегральную связь между напряженностью и потенциалом. По условию задачи $\varphi(\infty) = 0$, следовательно, расчет потенциала начнем с области IV:

$$r \in (R_3; +\infty) \quad \varphi_{\text{IV}}(r) = \int_r^{\infty} E_{\text{IV}r} dr = \int_r^{\infty} -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Рассчитаем потенциал произвольной точки области III (в металлическом слое):

$$r \in (R_2; R_3) \\ \varphi_{\text{III}}(r) = \int_r^{R_3} E_{\text{III}r} dr + \int_{R_3}^{\infty} E_{\text{IV}r} dr = \int_{R_3}^{\infty} \left(-\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3}.$$

В выражение для распределения потенциала $\varphi_{\text{IV}}(r)$ не вошла координата r , мы получили константу, величина которой определяется зарядом системы тел и их геометрией. Полученный результат позволяет еще раз подчеркнуть, что все точки на поверхности и внутри металлического тела имеют равный потенциал.

Область II $r \in (R_1; R_2)$:

$$\varphi_{\text{II}}(r) = \int_r^{R_2} E_{\text{II}r} dr + \int_{R_2}^{R_3} E_{\text{III}r} dr + \int_{R_3}^{\infty} E_{\text{IV}r} dr = \int_r^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \left(-\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr, \\ \varphi_{\text{II}}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3}.$$

Область I $r \in (0; R_1)$

$$\varphi_{\text{I}}(r) = \int_r^{R_1} E_{\text{I}r} dr + \int_{R_1}^{R_2} E_{\text{II}r} dr + \int_{R_2}^{R_3} E_{\text{III}r} dr + \int_{R_3}^{\infty} E_{\text{IV}r} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right).$$

Графики зависимостей $E_r(r)$ и $\varphi(r)$, построенные по полученным аналитическим выражениям, изображены на рисунке 3.12.

Проанализируем график распределения потенциала на основании уже имеющегося графика $E_r(r)$. В точках, лежащих внутри заряженного шара, потенциал постоянен и равен потенциалу на поверхности шара ($r = R_1$).

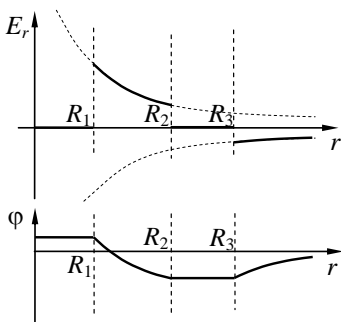


Рис. 3.12

В точках $R_1 < r < R_2$ проекция вектора напряженности на радиальную ось положительная. Следовательно, при удалении от поверхности шара потенциал будет убывать, достигнув отрицательных значений. Уменьшение модуля напряженности (т.е. уменьшение по модулю тангенса угла наклона касательной) обуславливает вогнутый характер графика $\phi(r)$. В области $R_2 < r < R_3$ напряженность электростатического поля $E_r = 0$, и потенциал имеет постоянное отрицательное значение. Для точек с координатой $r > R_3$ проекция напряженности отрицательная, следовательно, потенциал в этой области стремится к нулю ($\phi(\infty) = 0$), увеличиваясь с ростом r . Изломы на графике $\phi(r)$ соответствуют точкам, где функция $E_r(r)$ терпит разрыв.

Найдем поверхностную плотность заряда на внутренней поверхности металлического слоя. Для этого воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса. Мысленно расположим вспомогательную концентрическую сферическую поверхность в проводнике. Поток вектора напряженности определяется алгебраической суммой всех зарядов, охваченных данной поверхностью, т.е. зарядом шара и зарядом, индуцированным на внутренней поверхности слоя:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_1 + q'_{\text{индуц}}}{\epsilon_0}.$$

Поскольку электростатическое поле в металле отсутствует,

$$\frac{Q_1 + q'_{\text{индуц}}}{\epsilon_0} = 0.$$

Следовательно,

$$q'_{\text{индуц}} = -Q_1.$$

На внутренней поверхности проводящего слоя индуцируется заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шара Q_1 . Поверхностная плотность индуцированного заряда q' :

$$\sigma' = \frac{q'}{4\pi R_2^2} = -\frac{Q_1}{4\pi R_2^2}.$$

На внешней поверхности металлического слоя располагаются индуцированный заряд q'' и свободный заряд Q_2 . Величина индуцированного заряда $q''_{\text{инд}} = -q'_{\text{инд}} = Q_1$, следовательно, суммарная поверхностная плотность заряда внешней поверхности слоя

$$\sigma'' = \frac{q'' + Q_2}{4\pi R_3^2} = -\frac{Q_1}{4\pi R_3^2}.$$

Задача 3.7. Две большие квадратные металлические пластины, толщиной b каждая, расположены параллельно друг другу на расстоянии d . Одной пластине сообщают заряд Q , второй пластине сообщен заряд q .

1. Определите поверхностные плотности зарядов на каждой стороне пластин, если площадь пластины S .

2. Найдите разность потенциалов между пластинами.

Свободным зарядом на торцах пластин можно пренебречь.

Решение. Свободный заряд, сообщенный пластине, распределится на вертикальных гранях (по условию, свободным зарядом на торцах пластин можно пренебречь). Каждая из пластин окажется во внешнем электростатическом поле, созданном зарядом соседней пластины. Вследствие электрической индукции перемещение электронов в металле прекратится тогда, когда индукционное поле скомпенсирует внутри проводника поле внешнее. В результате чего электростатическое поле в пластинах будет отсутствовать, а грани пластин окажутся заряженными с разной поверхностной плотностью.

Таким образом, задача сводится к рассмотрению электростатического поля четырех больших параллельных равномерно заряженных плоскостей. Известно, что поле каждой такой плоскости является однородным на расстояниях, много меньших их линейных размеров, а модуль напряженности зависит только от поверхностной плотности заряда: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Обозначим поверхностные плотности заряда каждой из граней пластин $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,$ и σ_4 соответственно (см. рис. 3.13).

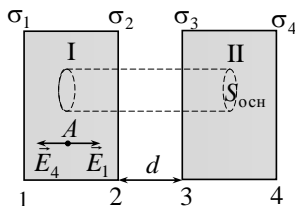


Рис. 3.13

Составим систему из четырех уравнений относительно неизвестных поверхностных плотностей заряда. Первые два уравнения очевидны: поскольку сумма индуцированных зарядов на каждой пластине равна нулю, суммарный заряд пластин равен Q и q соответственно. Площадь граней обеих пластин одинаковая и равна b^2 . Тогда

$$\sigma_1 b^2 + \sigma_2 b^2 = Q,$$

$$\sigma_3 b^2 + \sigma_4 b^2 = q.$$

Составим третье уравнение, воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0}.$$

Выберем в качестве вспомогательной поверхности интегрирования цилиндрическую поверхность, ось которой перпендикулярна граням пластин. Расположим ее так, как показано на рисунке 3.13, и найдем поток вектора напряженности через выбранную поверхность:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{лев.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{прав.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{E}, d\vec{S}).$$

Известно, что линии напряженности перпендикулярны поверхности проводника (граням пластин), следовательно, поток вектора \vec{E} через боковую поверхность равен нулю. С другой стороны, цилиндрическая поверхность расположена таким образом, что ее основания находятся в металле, где $\vec{E} = 0$. Таким образом, поток вектора напряженности равен нулю:

$$\frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0} = 0.$$

Рассчитаем заряд, охваченный вспомогательной поверхностью. На второй и третьей гранях гауссова поверхность «вырезает» круги, площадь которых равна площади основания цилиндра, а поверхностная плотность заряда σ_2 и σ_3 соответственно. Тогда

$$Q_{\text{охв}} = \sigma_2 S_{\text{осн}} + \sigma_3 S_{\text{осн}}.$$

Мы получили третье уравнение:

$$\sigma_2 = -\sigma_3.$$

Полученное выражение означает, что вторая и третья грани заряжены одинаковым по величине и противоположным по знаку зарядом. Вектора напряженности электростатического поля этих граней также равны по величине и противоположно направлены, т.е. $\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$.

Составим последнее четвертое уравнение, используя принцип суперпозиции полей. Выберем произвольную точку A внутри первой пластины (см. рис. 3.14). Суммарное электростатическое поле, создаваемое каждой заряженной гранью в рассматриваемой точке, можно найти, применив принцип суперпозиции полей:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4.$$

Поскольку в металле электростатическое поле отсутствует, $\vec{E}_A = 0$. Учитывая, что $\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$, получим $\vec{E}_1 + \vec{E}_4 = 0$. Следовательно, заряды первой и четвертой пластин должны быть одинаковыми. На рисунке 3.14 изображены силовые линии \vec{E}_1 и \vec{E}_4 в случае положительного заряда пластин.

Четвертое уравнение, связывающее поверхностные плотности зарядов первой и четвертой пластин:

$$\sigma_1 = \sigma_4.$$

Запишем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_1 b^2 + \sigma_2 b^2 = Q, \\ \sigma_3 b^2 + \sigma_4 b^2 = q, \\ \sigma_2 = -\sigma_3, \\ \sigma_1 = \sigma_4, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_4 &= \frac{Q+q}{2b^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{Q-q}{2b^2}, \\ \sigma_3 &= -\sigma_2. \end{aligned}$$

Разность потенциалов между пластинами найдем, используя дифференциальную связь между напряженностью и потенциалом:

$$\varphi_I - \varphi_{II} = \int_0^d E_x dx,$$

где E_x – результирующая напряженность поля между пластинами (см. рис. 3.14.). Определим E_x методом суперпозиции. Выберем ось X , начало которой совпадает со второй гранью. Напряженность поля каждой грани изображена с учетом полученных выражений для плотности заряда каждой грани при условии $Q > q$.

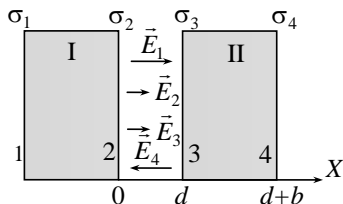


Рис. 3.14

Тогда

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} + E_{4x}.$$

Учитывая, что абсолютное значение напряженности поля одной большой плоскости $E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$, для проекции на выбранную ось X получим

$$E_x = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_3|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}.$$

Подставим значения поверхностных плотностей зарядов граней

$$E_x = \frac{Q+q}{4\varepsilon_0 b^2} + 2 \frac{Q-q}{4\varepsilon_0 b^2} - \frac{Q+q}{4\varepsilon_0 b^2} = \frac{Q-q}{2\varepsilon_0 b^2},$$

тогда разность потенциалов между пластинами

$$\varphi_I - \varphi_{II} = \int_0^d \frac{Q-q}{2\varepsilon_0 b^2} dx = \frac{Q-q}{2\varepsilon_0 b^2} d$$

Задача 3.8. Две большие квадратные пластины, площадью S и малой толщиной b каждая, расположены параллельно друг другу на расстоянии d . Одна пластина металлическая, а вторая – диэлектрическая ($\varepsilon = 4$). Проводящей пластине сообщают заряд Q .

1. Найдите зависимости $D_x(x)$ и $E_x(x)$ проекций векторов электрического смещения и напряженности поля на ось X , перпендикулярную пластинам, и постройте графики.

2. Используя связь между напряженностью и потенциалом, определите потенциал поля как функцию координаты и постройте график $\varphi(x)$. Примите $\varphi(0) = 0$.

Решение. Весь сообщенный металлической пластине заряд распределится по ее внешней поверхности.

Диэлектрическая пластина не заряжена и находится во внешнем электростатическом поле, которое создано заряженным проводником. Напряженность такого поля в вакууме (внутри металла напряженность поля равна нулю) можно рассчитать, отдельно рассмотрев проводящую пластину. Поскольку поле заряженной пластины обладает выраженной симметрией, проведем расчет, используя теорему Остроградского – Гаусса. Силовые линии электростатического поля всегда перпендикулярны поверхности проводника, а в рассматриваемом случае, так как пластины параллельны, и границе диэлектрика (см. рис. 3.15). Следовательно, внутри диэлектрической пластины напряженность поля проводящей пластины уменьшится в ε раз по сравнению с значением напряженности поля в вакууме.

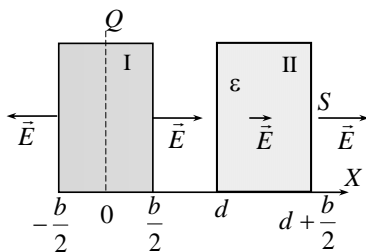


Рис. 3.15

Для исследования поля заряженной пластины выберем в качестве вспомогательной цилиндрическую поверхность и расположим ее так, как показано на рисунке 3.16. Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса для вакуума.

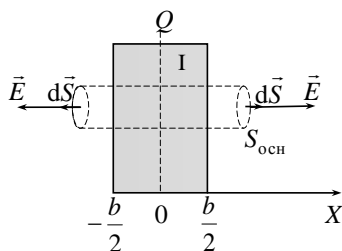


Рис. 3.16

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0}.$$

Поток вектора \vec{E} через боковую поверхность равен нулю. Следовательно,

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = 2ES_{\text{очн}},$$

а охваченный заряд

$$Q_{\text{охв}} = 2\sigma S_{\text{очн}},$$

где $\sigma = \frac{Q}{2S}$ (см. задачу 3.7).

Тогда абсолютное значение напряженности поля металлической пластины в вакууме

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда каждой из поверхностей.

Таким образом, в каждой из областей:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2}\right) \quad E_x = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad D_x = -\sigma;$$

$$x \in \left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right) \quad E_x = 0; \quad D_x = 0;$$

$$x \in \left(\frac{b}{2}; d\right) \text{ и } x \in (d; \infty) \quad E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad D_x = \sigma;$$

$$x \in \left(d; d + \frac{b}{2}\right) \quad E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad D_x = \sigma.$$

Расчет потенциала проведем, используя интегральную связь между напряженностью и потенциалом. По условию задачи $\varphi(0) = 0$, поэтому потенциал всех точек в проводящей пластине равен нулю.

$$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2}\right) \quad \varphi(x) = \int_x^{-\frac{b}{2}} \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(x + \frac{b}{2}\right);$$

$$x \in \left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right) \quad \varphi(x) = 0;$$

$$x \in \left(\frac{b}{2}; d\right) \quad \varphi(x) = \int_x^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(\frac{b}{2} - x\right);$$

$$x \in \left(d; d + \frac{b}{2}\right) \quad \varphi(x) = \int_x^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dx + \int_d^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} (d - x) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(\frac{b}{2} - d\right);$$

$$x \in (d; \infty) \quad \varphi(x) = \int_x^{\frac{b}{2}+d} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx + \int_{\frac{b}{2}+d}^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dx + \int_d^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (b - x) - \frac{\sigma b}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Графики $D_x(x)$, $E_x(x)$ и $\varphi(x)$, соответствующие положительному заряду пластины, изображены на рисунке 3.17.

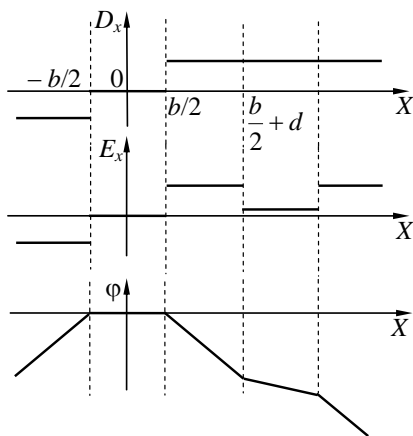


Рис. 3.17

Задача 3.9. Заряженный металлический шар радиусом $R = 3,0$ см наполовину погружен в керосин ($\epsilon = 2$). Верхняя граница керосина плоская, нижняя и боковые границы очень далеки.

1. Определите заряд шара, если его потенциал равен $\phi = 1800$ В.
2. Найдите распределение зарядов по поверхности шара.

Решение. К участку поверхности заряженного металлического шара прилегает однородный диэлектрик. Вследствие явления поляризации на границе диэлектрика с проводником образуются связанные заряды, вызывающие перераспределение заряда Q на поверхности проводника. Это означает, что поверхностная плотность заряда шара в вакууме и диэлектрике будет различной.

Электростатическое поле в произвольной точке пространства создается зарядом шара Q и связанным зарядом q' , величина которого неизвестна. Поскольку поток вектора электрического смещения определяется свободным зарядом, можно воспользоваться обобщенной теоремой Остроградского – Гаусса для электростатического поля в среде:

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = Q_{\text{своб.}}.$$

Полученное выражение для вектора \vec{D} позволит определить напряженность поля.

Возьмем в качестве вспомогательной поверхности интегрирования сферическую поверхность радиусом $r > R$, центр которой совпадает с центром заряженного шара. Тогда поток вектора электрического смещения равен

$$\oint_{(s)} (\vec{D}, d\vec{S}) = 2\pi r^2 D_0 + 2\pi r^2 D,$$

где D_0 и D – модули вектора электрического смещения соответственно в вакууме и диэлектрике на расстоянии r от центра системы.

Поскольку тангенциальная составляющая вектора \vec{D} на границе двух сред меняется скачком

$$D = \varepsilon D_0,$$

а охваченный поверхностью заряд равен заряду шара Q , выражение для потока вектора электрического смещения можно записать следующим образом:

$$2\pi r^2 D_0 + 2\pi r^2 \varepsilon D_0 = Q.$$

Тогда

$$D_0 = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon + 1)}, \quad D = \frac{\varepsilon Q}{2\pi r^2(\varepsilon + 1)}.$$

Модуль вектора напряженности во всем пространстве равен

$$E = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi r^2 \varepsilon_0 (\varepsilon + 1)}.$$

Графически полученные результаты представлены на рисунке 3.18.

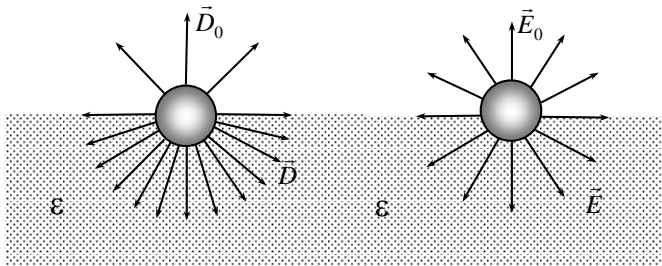


Рис. 3.18

Определим потенциал шара, используя интегральную связь между \vec{E} и φ .

$$\varphi(R) - \varphi(\infty) = \int_R^{\infty} E_r dr,$$

$$\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr = \int_R^{\infty} \frac{Q}{2\pi r^2 \varepsilon_0 (\varepsilon + 1)} dr = \frac{Q}{2\pi R \varepsilon_0 (\varepsilon + 1)}.$$

Из полученной формулы можно выразить заряд шара:

$$Q = 2\pi \varepsilon_0 R \varphi (\varepsilon + 1) = 9,0 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Соответственно

$$\sigma_1 = D_0(R) = \frac{2\pi \varepsilon_0 R \varphi (\varepsilon + 1)}{2\pi R^2 (\varepsilon + 1)} = \frac{\varepsilon_0 \varphi}{R} = 5,3 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2;$$

$$\sigma_2 = D(R) = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon R \varphi (\varepsilon + 1)}{2\pi R^2 (\varepsilon + 1)} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \varphi}{R} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

4. Электрическая емкость. Энергия электростатического поля

Задача 4.1. Выведите формулу для расчета емкости цилиндрического воздушного конденсатора. Радиус внутренней обкладки R_1 , внешней R_2 , длина конденсатора L . Покажите, что емкость тонкого цилиндрического конденсатора (т.е. с малым расстоянием между обкладками) можно вычислить по формуле емкости плоского конденсатора.

Решение. Емкость конденсатора равняется отношению его положительного заряда к разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{Q}{\varphi_+ - \varphi_-}.$$

Поскольку емкость конденсатора не зависит от заряда его обкладок, представим, что внутренняя обкладка заряжена с линейной плотностью $+\tau$, а внешняя с плотностью $-\tau$. Определив с помощью теоремы Остроградского – Гаусса напряженность поля внутри конденсатора, можно рассчитать разность потенциалов $\varphi_+ - \varphi_-$ между обкладками и его емкость.

Для исследования электростатического поля выберем вспомогательную цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с осью системы. Высота цилиндрической поверхности h , радиус r , причем $R_1 < r < R_2$ (см. рис. 4.1).

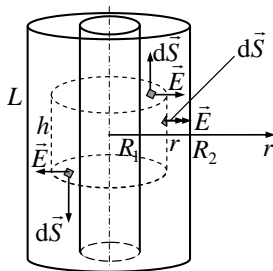


Рис. 4.1

Применим к этой поверхности теорему Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{оXB}}}{\varepsilon_0}.$$

В любой точке на основаниях вектора \vec{E} и $d\vec{S}$ взаимно перпендикулярны, поэтому поток вектора напряженности равен

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = 2 \int_{(S_{\text{осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int E_r dS = E_r \cdot 2\pi rh.$$

Заряд, охваченный вспомогательной поверхностью:

$$Q_{\text{охв}} = \tau \cdot h.$$

Тогда

$$E_r \cdot 2\pi rh = \frac{\tau h}{\epsilon_0}.$$

Следовательно, напряженность поля между обкладками конденсатора:

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_0}.$$

Разность потенциалов между обкладками:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E}, d\vec{r}) = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Поскольку полный заряд обкладки $Q = \tau L$, емкость воздушного цилиндрического конденсатора равна

$$C = \frac{Q}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{\tau L 2\pi \epsilon_0}{\tau \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Рассмотрим случай, когда зазор между обкладками цилиндрического конденсатора мал. В этом случае $R_2 - R_1 \ll R_1$ и

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1}.$$

При исследовании данного выражения мы воспользовались известным соотношением:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Если ввести обозначение $d = R_2 - R_1$, тогда

$$\ln \frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{d}{R_1},$$

и полученная формула для емкости цилиндрического конденсатора переходит в формулу для нахождения емкости плоского конденсатора:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 LR_1}{R_2 - R_1} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Задача 4.2. Выведите формулу для расчета емкости плоского конденсатора, площадь пластин которого S , а расстояние между ними d . Пространство между пластинами заполнено диэлектриком, проницаемость которого увеличивается в направлении, перпендикулярном обкладкам по линейному закону от ϵ_1 вблизи одной обкладки до ϵ_2 вблизи другой.

Решение. Расчет емкости системы выполним по определению

$$C = \frac{Q}{\varphi_+ - \varphi_-}.$$

Будем считать, что пластины плоского конденсатора заряжены с поверхностной плотностью σ и $-\sigma$ (см. рис. 4.2). Очевидно, что для расчета разности потенциалов между пластинами, необходимо определить напряженность поля в конденсаторе.

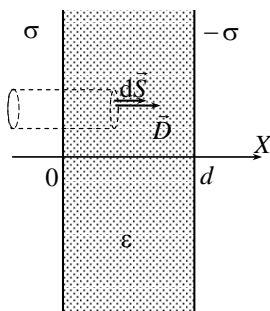


Рис. 4.2

При расчете разности потенциалов между обкладками необходимо учесть, что при перемещении от левой обкладки к правой диэлектрическая проницаемость увеличивается по линейному закону, общий вид которого

$$\epsilon(x) = kx + \epsilon_1,$$

где

$$k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}.$$

Разность потенциалов между обкладками найдем, используя интегральную связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля.

Из симметрии расположения свободных зарядов на обкладках можно сделать вывод, что вектора \vec{E} и \vec{D} должны быть параллельны оси X . Результирующие значения векторов напряженности и электрического смещения вне конденсатора равны нулю.

Для нахождения напряженности поля в пространстве между обкладками (область $0 < x < d$) воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса. Вспомогательную цилиндрическую поверхность, ось которой параллельна оси X , а основания, площадью $S_{\text{осн}}$ каждое, параллельны заряженным плоскостям, расположим так, как показано на рисунке 4.2. Поток вектора электрического смещения через поверхность цилиндра равен потоку только через его правое основание:

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = D_x S_{\text{осн}}.$$

Вспомогательная поверхность охватывает свободный заряд, находящийся на участке левой плоскости:

$$Q_{\text{овб}}^{\text{своб}} = \sigma S_{\text{осн}}.$$

Таким образом, внутри конденсатора $D_x = \sigma$, а значение проекции напряженности электростатического поля

$$E_x = \frac{D_x}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{(kx + \varepsilon_1) \varepsilon_0}.$$

Определим разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_0^d E_x dx = \int_0^d \frac{\sigma dx}{(kx + \varepsilon_1) \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^d \frac{\sigma dx}{(kx + \varepsilon_1)}.$$

Для упрощения процесса поиска первообразной умножим и поделим полученное подынтегральное выражение на k . Тогда

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^d \frac{1}{k} \frac{k \sigma dx}{(kx + \varepsilon_1)} = \frac{\sigma}{k \varepsilon_0} \int_0^d \frac{d(kx + \varepsilon_1)}{(kx + \varepsilon_1)} = \frac{\sigma}{k \varepsilon_0} \ln \left(1 + \frac{kd}{\varepsilon_1} \right).$$

Подставим значение $k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}$. Тогда искомая разность потенциалов

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right).$$

Емкость конденсатора равна

$$C = \frac{\sigma S}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{S \varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)}.$$

Задача 4.3. На плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого $d_1 = 1,5$ см, подается напряжение $U = 39$ кВ.

1. Будет ли пробит конденсатор, если напряженность пробоя (ионизации) воздуха $E_1 = 30$ кВ/см?

2. Будет ли пробит конденсатор, если между его обкладками параллельно им ввести стеклянную пластинку ($\varepsilon = 7$) толщиной $d_2 = 0,3$ см? Напряженность пробоя стекла $E_2 = 100$ кВ/см. При введении пластины конденсатор остается подключенным к источнику.

Решение. Конденсаторы характеризуются не только их электрической емкостью, но и так называемым пробивным напряжением (напряжение пробоя) – минимальной разностью потенциалов между обкладками, при котором происходит электрический разряд через слой диэлектрика, заполняющего пространство конденсатора. Величина пробивного напряжения зависит от размеров и формы обкладок конденсатора и свойств диэлектрика.

Если в ходе повышения приложенного к конденсатору напряжения напряженность электрического поля в диэлектрике превышает некоторое критическое значение, то диэлектрик теряет свои электроизолирующие свойства, так как под действием приложенного напряжения происходят необратимые изменения, резко уменьшающие его электрическое сопротивление до такого значения, что происходит короткое замыкание электродов.

Рассчитаем по заданному значению напряжения, приложенного к обкладкам конденсатора, напряженность электростатического поля

внутри конденсатора и сравним с известными значениями напряженности пробоя воздуха и стекла.

1. Рассмотрим воздушный конденсатор (см. рис. 4.3).

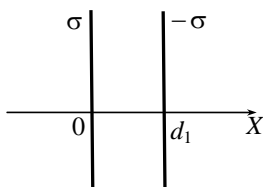


Рис. 4.3

Пренебрегая краевыми эффектами, напряженность поля между пластинами конденсатора можно считать одинаковой по величине и направлению в любой точке (электростатическое поле внутри конденсатора однородное). Если ввести обозначение проекции напряженности на выбранную ось X E_x , то разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\varphi_+ - \varphi_- = U = \int_0^{d_1} E_x dx = E_x d_1$$

и

$$E_x = \frac{U}{d_1} = 26 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Так как напряженность пробоя (ионизации) воздуха $E_1 = 30 \text{ кВ/см}$, а полученное значение $E_x < E_1$, то конденсатор не будет пробит.

2. Рассмотрим конденсатор с диэлектрической пластиной внутри (см. рис. 4.4).

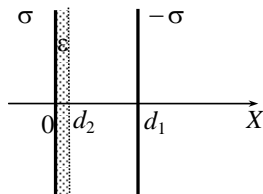


Рис. 4.4

Силловые линии поля перпендикулярны границе диэлектрик – воздух, поэтому модуль напряженности поля в области, заполненной однородным диэлектриком (E), окажется меньше, чем в воздухе (E_B), в ε раз.

$$E = \frac{E_B}{\varepsilon}.$$

Разность потенциалов между обкладками рассматриваемого слоистого конденсатора изменится по сравнению с воздушным:

$$U = \int_0^{d_2} E_x dx + \int_{d_2}^{d_1} E_{xв} dx = Ed_2 + E_B(d_1 - d_2) = \frac{E_B}{\varepsilon} d_2 + E_B(d_1 - d_2).$$

Наибольшее значение напряженности поля имеет в вакууме:

$$E_B = \frac{U\varepsilon}{((1-\varepsilon)d_2 + \varepsilon d_1)} \approx 31,4 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Поскольку полученное значение напряженности превышает напряженность пробоя воздуха ($E_B > E_1$), конденсатор в воздушной области окажется пробитым. Напряженность поля в диэлектрике равна

$$E = \frac{E_B}{\varepsilon} = \frac{31,4}{7} \approx 4,49 \frac{\text{кВ}}{\text{см}},$$

что значительно меньше, чем заданная напряженность пробоя стекла $E_2 = 100$ кВ/см. Однако после пробоя воздуха все напряжение $U = 39$ кВ, будет подаваться на стеклянную пластинку и значение напряженности электростатического поля в стекле окажется равным

$$E_{\text{стекл}} = \frac{39}{0,3} = 130 \frac{\text{кВ}}{\text{см}},$$

что больше значения напряженности пробоя стекла ($E_{\text{стекл}} = 130 > 100 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$). Таким образом, пробита будет и стеклянная пластинка.

Задача 4.4. Два длинных провода диаметром $d = 1$ мм каждый расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их осями $a = 10$ мм.

Определите взаимную емкость такой системы, если ее длина $L = 1$ км.

Решение. Сообщим одному из проводников произвольный заряд. Для удобства дальнейших вычислений будем считать, что правый провод заряжен положительно с линейной плотностью заряда τ . Второй проводник зарядится через влияние противоположным по знаку зарядом $(-\tau)$. Электростатическое поле рассматриваемой системы зарядов не локализовано в ограниченной области пространства, поэтому считать данную систему проводников конденсатором, строго говоря, нельзя. Взаимную емкость можно рассчитать по определению:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению разности потенциалов между проводниками. Для этого необходимо определить напряженность электростатического поля в пространстве между проводами. Расчет напряженности осложняется тем, что применить теорему Остроградского – Гаусса

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0}$$

ко всей системе зарядов нельзя, т.к. такое электростатическое поле не обладает симметрией. Поэтому вначале по теореме Остроградского – Гаусса можно определить напряженность поля одного проводника, имеющего форму цилиндра, а затем, воспользовавшись принципом суперпозиции, рассчитать суммарное поле системы зарядов.

Рассмотрим первый металлический цилиндр, заряженный с линейной плотностью заряда τ . Электростатическое поле заряженного проводника обладает осевой симметрией. Вне провода силовые линии лежат в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, и коллинеарны радиальной оси r . Для расчета напряженности поля через произвольную точку с координатой r , находящуюся в области $\frac{d}{2} < r < \infty$, проведем коаксиальную цилиндрическую поверхность высотой h (см. рис. 4.5).

Поток вектора напряженности, созданный первым заряженным проводником через выбранную вспомогательную поверхность, равен потоку только через боковую поверхность цилиндра, т.к. в каждой точке его верхнего и нижнего оснований $\vec{E} \perp d\vec{S}$:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}_1, d\vec{S}) = E_{1r} \int_{(S_{\text{бок}})} dS = E_{1r} 2\pi r h.$$

Охваченный вспомогательной поверхностью заряд $Q_{\text{ОХВ}} = \tau h$. Следовательно, в произвольной точке с координатой r первым проводником создается напряженность, проекция которой на радиальную ось равна

$$E_{1r} = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_0}.$$

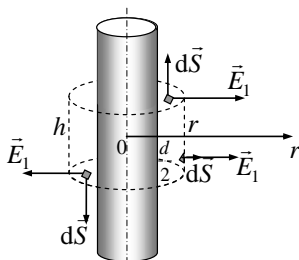


Рис. 4.5

Рассмотрим систему в целом, указав направление векторов \vec{E} поля каждого провода с учетом знаков их зарядов (см. рис. 4.6).

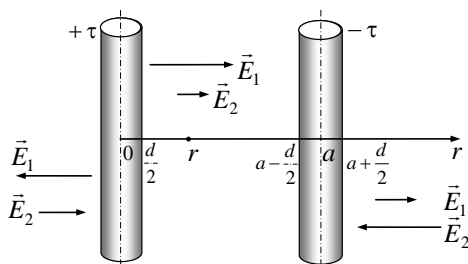


Рис. 4.6

Поскольку заряды обоих проводников одинаковы по величине, легко получить выражение для проекции вектора напряженности для второго проводника в той же системе координат. Выберем произвольную точку с координатой r в области между проводниками. Расстояние от оси второго провода до точки с координатой r равно $a - r$. Заряд второго проводника отрицательный, направление вектора

напряженности его поля \vec{E}_2 изображено на рисунке 4.6. Таким образом,

$$E_{2r} = \frac{\tau}{2\pi(a-r)\epsilon_0}.$$

Результирующее поле в области $\frac{d}{2} < r < a - \frac{d}{2}$:

$$E_r = E_{1r} + E_{2r} = \frac{\tau}{2\pi r\epsilon_0} + \frac{\tau}{2\pi(a-r)\epsilon_0}.$$

Найдем разность потенциалов между цилиндрами, используя интегральную связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{d/2}^{a-d/2} E_r dr = \int_{d/2}^{a-d/2} \left(\frac{\tau}{2\pi r\epsilon_0} + \frac{\tau}{2\pi(a-r)\epsilon_0} \right) dr = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2a-d}{d}\right).$$

Это же выражение можно получить, используя принцип суперпозиции для потенциалов.

Тогда емкость системы

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\tau L}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{2a-d}{d}\right)} = 9,3 \text{ мкФ}.$$

Задача 4.5. Коаксиальный кабель состоит из центральной жилы радиусом $R_1 = 1$ мм и оплетки радиусом $R_2 = 5$ мм. Пространство между ними заполнено двумя слоями диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость первого слоя, примыкающего к жиле, $\epsilon_1 = 4$, диэлектрическая проницаемость второго слоя $\epsilon_2 = 7$. Радиус границы раздела $R_0 = 2$ мм.

Найдите емкость кабеля на единицу его длины.

Решение. Подобная система проводников образует цилиндрический конденсатор. Пусть заряд внутренней обкладки конденсатора радиусом R_1 $q > 0$, а внешней $-q$. В случае если длина цилиндрического конденсатора L много больше радиусов его обкладок, можно считать, что поле внутри конденсатора приближенно равно полю двух коаксиальных цилиндров бесконечной длины, заряженных с линейными плотностями зарядов $\tau = q/L$ и $-\tau$.

Емкость конденсатора будем искать по определению:

$$C = \frac{Q}{\varphi_+ - \varphi_-}.$$

Поле внутри конденсатора создается только внутренней обкладкой. Воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса для поля в веществе и выбрав вспомогательную поверхность в виде коаксиальной цилиндрической поверхности (см. рис. 4.7), получим в области I $r \in (R_1, R_0)$:

$$\oint_{(S)} (\vec{D}_1, d\vec{S}) = D_{1r} \int_{(S_{\text{бок}})} dS = D_{1r} 2\pi r h,$$

$$\sum Q_{\text{охв. своб.}} = \tau h.$$

$$D_{1r} = \frac{\tau}{2\pi r} \quad E_{1r} = \frac{D_{1r}}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0 r}.$$

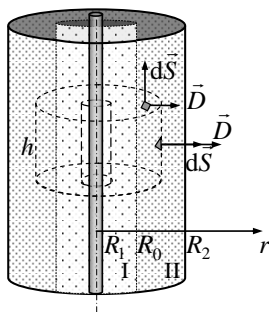


Рис. 4.7

Область II $r \in (R_0, R_2)$ аналогично:

$$D_{IIr} = \frac{\tau}{2\pi r} \quad E_{IIr} = \frac{D_{IIr}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0 r}.$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_{R_1}^{R_0} E_{I,r} dr + \int_{R_0}^{R_2} E_{II,r} dr = \int_{R_1}^{R_0} \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0 r} dr + \int_{R_0}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0 r} dr,$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \left(\frac{R_0}{R_1} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \left(\frac{R_2}{R_0} \right) \right).$$

Емкость слоистого цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{Q}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{\tau L}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_0 L}{\epsilon_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_0}\right) + \epsilon_2 \ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)}.$$

Поскольку в задаче требуется определить емкость системы, приходящуюся на единицу длины системы, то

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_0}{\epsilon_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_0}\right) + \epsilon_2 \ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)} = 182 \text{ мкФ}.$$

Задача 4.6. Металлический шар радиусом R_1 , по которому распределен заряд Q , окружен прилегающим вплотную слоем диэлектрика (ϵ) с внешним радиусом R_2 . Определите энергию системы.

Решение. Заданная система зарядов образует в пространстве неоднородное электростатическое поле, энергия которого в некотором объеме V может быть найдена по известной формуле

$$W = \int_V w_e dV,$$

где $w_e = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$ – объемная плотность энергии электростатического поля;

dV – элементарный объем, который должен быть выбран так, чтобы в его пределах плотность энергии, а значит и напряженность электростатического поля, оставалась постоянной. Задача расчета энергии электростатического поля, таким образом, сводится к нахождению напряженности поля, созданного рассматриваемой системой зарядов.

Форма пространственного заряда позволяет предположить, что вне заряженного металлического шара электростатическое поле будет обладать центральной симметрией, а силовые линии будут направлены по радиусам. Следовательно, для расчета характеристик поля можно воспользоваться теоремой Остроградского – Гаусса для поля в веществе:

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = Q_{\text{охв}}^{\text{своб}}$$

Вспомогательные поверхности интегрирования выберем в виде сфер, concentричных с рассматриваемой системой (см. рис. 4.8).

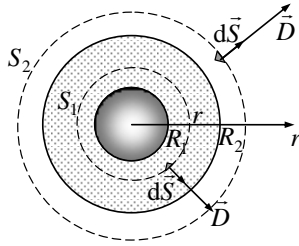


Рис. 4.8

Выделим для рассмотрения две области: $r \in (R_1, R_2)$ и $r \in (R_2, \infty)$ (область внутри шара не требует отдельного рассмотрения, поскольку напряженность электростатического поля в металле равна нулю). В обеих областях векторы \vec{D} и $d\vec{S}$ коллинеарны, модуль вектора электрического смещения постоянен во всех точках вспомогательной поверхности, что позволяет рассчитать поток вектора \vec{D} :

$$\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = D_r 4\pi r^2.$$

Охваченный свободный заряд $Q_{\text{своб}}^{\text{об}} = Q$, следовательно, зависимость проекции вектора электрического смещения от расстояния r до центра системы в обеих областях одинаковая:

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Значение напряженности поля в области I $r \in (R_1, R_2)$:

$$E_{Ir} = \frac{D_r}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2}.$$

Область II $r \in (R_2, \infty)$:

$$E_{IIr} = \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}.$$

Для расчета энергии электростатического поля выберем элементарный объем dV в форме тонкого сферического слоя радиусом r и толщиной dr . Объем такого слоя равен

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Полная энергия электростатического поля рассматриваемой системы во всем пространстве определяется как сумма энергий, заключенных в каждой из выделенных областей:

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_1^2}{2} dV + \int_{R_2}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 E_{II}^2}{2} dV.$$

Подставляя полученные выше выражения и производя интегрирование, получим

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Первое слагаемое – энергия поля, заключенная в диэлектрике, второе – энергия поля, заключенная в вакууме. Суммарная энергия системы

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{R_1(\varepsilon - 1) + R_2}{R_1 R_2} \right).$$

Задача 4.7. Длинный металлический цилиндр радиусом $R = 6$ см равномерно заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = 2,4 \cdot 10^{-12}$ Кл/м². Найдите энергию поля, приходящуюся на единицу длины цилиндра в пространстве между двумя эквипотенциальными поверхностями с потенциалами $\varphi_1 = -3$ В и $\varphi_2 = -6$ В ($\varphi = 0$ на оси цилиндра).

Решение. Рассматриваемая заряженная система создает электростатическое поле, силовые линии которого лежат в плоскости, перпендикулярной оси системы и направлены радиально (см. рис. 4.9). Очевидно, что для всех точек $r \in (0, R)$ (внутри цилиндра) $\vec{E} = 0$.

Определим вид эквипотенциальных поверхностей рассматриваемого электростатического поля. Поскольку силовые линии ортогональны эквипотенциальным поверхностям, для данной системы распределения зарядов геометрическое место точек равного потенциала представляет собой коаксиальную цилиндрическую поверхность.

Известно, что потенциал всех точек внутри и на поверхности проводника одинаков, а по условию задачи $\varphi = 0$ на оси заряженного цилиндра. Следовательно, обе эквипотенциальные поверхности (с потенциалами $\varphi_1 = -3$ В и $\varphi_2 = -6$ В), ограничивающие исследуемую область пространства, находятся вне проводника. Определить их радиусы можно, воспользовавшись интегральной связью между напряженностью и потенциалом электростатического поля.

Энергию неоднородного электростатического поля в заданной области пространства можно определить по формуле

$$W = \int_V w_e dV.$$

Вдали от торцов заряженной поверхности и на расстояниях r от ее оси, малых по сравнению с длиной, ее образующей, электростатическое поле можно считать осесимметричным. Для определения напряженности поля воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса для вакуума:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q_{\text{охв}}}{\epsilon_0}.$$

Вспомогательную поверхность S выберем в виде цилиндрической поверхности, ось которой совпадает с осью системы, радиусом r ($r > R$) и высотой h (см. рис. 4.9). Поток вектора напряженности поля через выбранную поверхность

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{в.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{н.осн}})} (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{E}, d\vec{S}).$$

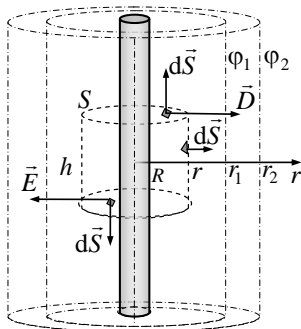


Рис. 4.9

Для любой точки верхнего и нижнего оснований $\vec{E} \perp d\vec{S}$, следовательно, поток вектора напряженности через выбранную поверхность равен

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{бок}})} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{бок}})} E_r dS,$$

где E_r – проекция вектора напряженности поля на ось r . Вследствие

рассматриваемой симметрии $E_r = \text{const}$ во всех точках боковой поверхности вспомогательного цилиндра и

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = E_r \int_{(S_{\text{бок}})} dS = E_r 2\pi r h.$$

Сумма зарядов, охваченных вспомогательной поверхностью, определяется только поверхностной плотностью заряда проводящего цилиндра и не зависит от радиуса вспомогательной поверхности:

$$Q_{\text{охв}} = \sigma 2\pi R h.$$

Тогда для области $r \in (R, \infty)$

$$E_r = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля в любой точке области $r \in (0, R)$ $\varphi = 0$.

В области $r \in (R, \infty)$ потенциал поля зависит только от r :

$$\varphi(r) = \int_r^0 E_r dr = \int_r^R \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}.$$

Графики распределения напряженности и потенциала вдоль радиального направления показаны на рисунке 4.10. Проекция вектора напряженности вне проводника положительная (по условию задачи $\sigma > 0$), следовательно, при увеличении расстояния до оси системы потенциал убывает. Внутри металла $\vec{E} = 0$ и потенциал всех точек одинаковый ($\varphi = 0$).

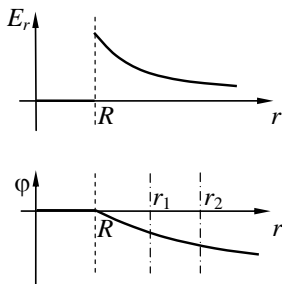


Рис. 4.10

Определим радиусы r_1 и r_2 эквипотенциальных поверхностей с потенциалами $\varphi_1 = -3$ В и $\varphi_2 = -6$ В соответственно. Поскольку

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r_1}, \\ \ln \frac{R}{r_1} &= \frac{\varphi_1 \varepsilon_0}{\sigma R}, \\ r_1 &= R \cdot \exp\left(-\frac{\varphi_1 \varepsilon_0}{\sigma R}\right).\end{aligned}$$

Аналогично

$$r_2 = R \cdot \exp\left(-\frac{\varphi_2 \varepsilon_0}{\sigma R}\right).$$

Задача свелась к нахождению энергии неоднородного электростатического поля, заключенной в цилиндрическом слое, внутренний радиус которого r_1 , внешний r_2 . Обозначим высоту слоя L .

Объемная плотность энергии электрического поля в вакууме ($\varepsilon=1$), зависит только от расстояния r до оси системы:

$$w_e = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\right)^2 = \frac{R^2 \sigma^2}{2 \varepsilon_0 r^2}.$$

Элементарный объем dV следует выбрать в форме тонкого цилиндрического слоя толщиной dr , высотой L , ось которого совпадает с осью заряженного проводника. Тогда

$$dV = 2\pi r L dr.$$

Энергия электростатического поля

$$W = \int_V w_e dV,$$

$$W = \int_{(V)} w_e dV = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma^2 R^2}{2 \varepsilon_0 r^2} 2\pi r L dr = \frac{\sigma^2 R^2 \pi L}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

где

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R \exp\left(-\frac{\varphi_2 \varepsilon_0}{\sigma R}\right)}{R \exp\left(-\frac{\varphi_1 \varepsilon_0}{\sigma R}\right)} = \exp\left(\frac{-\varphi_2 \varepsilon_0 + \varphi_1 \varepsilon_0}{\sigma R}\right) = \exp\left(\frac{-\varphi_2 \varepsilon_0 + \varphi_1 \varepsilon_0}{\sigma R}\right).$$

Следовательно,

$$W = \frac{\sigma^2 R^2 \pi L \varepsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\varepsilon_0 \sigma R} = \sigma R \pi L (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Энергия электростатического поля, приходящаяся на единицу длины:

$$\frac{W}{L} = \sigma R \pi (\varphi_1 - \varphi_2) = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ Дж/м.}$$

Замечание. Решение этой задачи можно существенно упростить, если, используя интегральную связь напряженности и потенциала, найти разность потенциалов между точками r_1 и r_2 :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тогда энергия электростатического поля, приходящаяся на единицу длины системы, определяемая соотношением

$$\frac{W}{L} = \frac{\sigma^2 R^2 \pi}{\varepsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right),$$

после подстановки

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\varepsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sigma R}$$

будет равна

$$\frac{W}{L} = \sigma R \pi (\varphi_1 - \varphi_2) = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ Дж/м.}$$

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

5. Постоянный ток

Задача 5.1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от нуля до $I = 3\text{ А}$ в течение $\tau = 10\text{ с}$. Определите заряд, прошедший через поперечное сечение проводника.

Решение. Заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за малый промежуток времени dt , связан с силой тока i соотношением

$$dq = idt.$$

По условию, сила тока равномерно увеличивается от нуля до I за время τ , т.е.

$$i = \frac{I}{\tau}t.$$

Тогда

$$dq = \frac{I}{\tau}tdt.$$

Для расчета заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника за все время τ , просуммируем все dq

$$q = \int_{\text{(за время } \tau)} dq.$$

Подставляя выражение для силы тока, получаем

$$q = \int_0^{\tau} \frac{I}{\tau}tdt = \frac{I}{2}\tau.$$

Проведем расчет

$$q = \frac{I}{2}\tau = 15\text{ Кл.}$$

Задача 5.2. По двум последовательно соединенным цилиндрическим проводникам, сечением $S = 0,20\text{ см}^2$ каждый, из которых один – медный, другой – алюминиевый, идет ток $I = 10\text{ А}$. Найдите напряженность E_1 и E_2 электрического поля внутри проводников. Плотность тока считать постоянной по значению. Удельные сопротивления соответственно $\rho_1 = 1,7 \cdot 10^{-8}\text{ Ом}\cdot\text{м}$ и $\rho_2 = 2,5 \cdot 10^{-8}\text{ Ом}\cdot\text{м}$.

Решение. Согласно дифференциальной форме закона Ома, плотность тока \vec{j} прямо пропорциональна напряженности поля

внутри проводника:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E},$$

где ρ – удельное сопротивление материала проводника.

Считая плотность тока постоянной по сечению проводника, можно записать

$$j = \frac{I}{S}.$$

Тогда напряженность электрического поля внутри каждого из проводников

$$E_1 = \rho_1 j = \rho_1 \frac{I}{S} = 1,7 \cdot 10^{-8} \frac{10}{0,20 \cdot 10^{-4}} = 8,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{В}}{\text{м}},$$
$$E_2 = \rho_2 j = \rho_2 \frac{I}{S} = 2,5 \cdot 10^{-8} \frac{10}{0,20 \cdot 10^{-4}} = 12,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Задача 5.3. Найти средние значения скорости и импульса направленного движения электронов в медном проводнике при плотности тока $j = 100 \text{ А/см}^2$. Медь одновалентна. Концентрация атомов $n = 8,6 \cdot 10^{29} \text{ 1/м}^3$. Масса электрона $m_e = 9,0 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

Решение. Плотность тока, при условии ее постоянства по сечению проводника S , связана с силой тока соотношением

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{I}{S}.$$

Сила постоянного тока

$$I = \frac{Q}{t},$$

где Q – заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время t .

Заряд Q можно выразить через заряд электрона q и среднее число электронов N , пересекающих выделенное сечение за время наблюдения

$$Q = |q|N = |q|n_q u t S,$$

где $|q|$ – абсолютная величина заряда электрона, n_q – концентрация электронов, u – скорость их направленного движения. Тогда для плотности тока в проводнике получим соотношение

$$j = |q|n_q u.$$

Так как медь одновалентна, концентрация электронов равна

концентрации атомов $n_q = n$.

Найдем среднюю скорость направленного движения электронов

$$u = \frac{j}{|q|n} = \frac{100 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,6 \cdot 10^{29}} = 7,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Среднее значение импульса направленного движения

$$p = m_e u = 6,6 \cdot 10^{-36} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

6. Магнитное поле тока в вакууме. Закон Био – Савара – Лапласа

Задача 6.1. По тонкому прямому участку провода идет ток I . Точка C расположена на расстоянии a от провода. Считая известными углы α_1 и α_2 (см. рис. 6.1), вычислить магнитную индукцию в точке C . Поле подводящих проводов не учитывать.

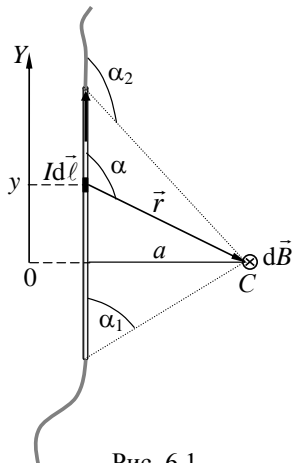


Рис. 6.1

Решение. Точка наблюдения находится на расстоянии a от прямолинейного участка. Размер прямолинейного участка определяется углами α_1 и α_2 .

Для нахождения магнитной индукции поля будем использовать принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \int_{(\text{по } \ell)} d\vec{B},$$

где ℓ – длина прямолинейного участка.

Для малого участка проводника справедлив закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Введем вспомогательную ось Y , начало которой расположим

напротив точки наблюдения (см. рис. 6.1). Рассмотрим произвольный элемент тока $I d\vec{\ell}$ с координатой y . Проведем радиус-вектор \vec{r} от элемента тока в точку наблюдения. Обозначим угол между направлением тока и радиус-вектором α . Определим направление и модуль вектора $d\vec{B}$. Вектор магнитной индукции перпендикулярен векторам, входящим в состав векторного произведения и направлен так, чтобы с его конца поворот от первого вектора ко второму был виден против часовой стрелки. На рисунке 6.1 вектор $d\vec{B}$ направлен «от нас». Модуль

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot d\ell r \sin \alpha}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \cdot d\ell \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Выразим $d\ell$ и r через угол α :

$$\frac{a}{r} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$r = \frac{a}{\sin \alpha};$$

$$d\ell = d y;$$

$$\frac{a}{y} = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad y = -\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad dy = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Получим

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot d\ell \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi} \frac{a}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} d\alpha = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi a} d\alpha.$$

Для всех элементов тока направление $d\vec{B}$ одно и то же. Тогда принцип суперпозиции $\vec{B} = \int_{(\text{по } \ell)} d\vec{B}$ можно записать в скалярном виде:

$$B = \int_{(\text{по } \ell)} dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi a} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Итак, магнитная индукция поля отрезка прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Если рассмотреть длинный прямолинейный проводник с током, для которого будут выполняться условия $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$, получим выражение для расчета магнитной индукции поля в виде

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Задача 6.2. По полукольцу радиусом R течет ток I . Определите модуль и направление вектора магнитной индукции в центре полукольца. Поле подводящих проводов не рассматривать.

Решение. Для нахождения магнитной индукции будем пользоваться принципом суперпозиции:

$$\vec{B} = \int_{(\text{по полукольцу})} d\vec{B} .$$

Здесь $d\vec{B}$ – вектор магнитной индукции малого элемента тока, определяемый из закона Био – Савара – Лапласа: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$.

Для его нахождения проведем вектор \vec{r} от произвольного малого элемента проводника с током $d\vec{\ell}$ в точку O (центр полукольца) и найдем направление векторного произведения $[d\vec{\ell}, \vec{r}]$. Получим вектор, направленный перпендикулярно плоскости рисунка «от нас» для любого элемента тока (см. рис. 6.2).

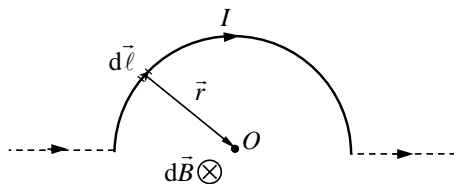


Рис. 6.2

Для определения модуля $|d\vec{B}|$ раскроем векторное произведение

$$dB = \frac{\mu_0 I d\ell \cdot r \cdot \sin(\widehat{d\vec{\ell} \vec{r}})}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I d\ell \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R^2} .$$

Так как все вектора сонаправлены и длина полукольца $\ell = \pi R$,

$$B = \int_{(\ell)} d\vec{B} = \int_{(\ell)} \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I \pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4R} .$$

Задача 6.3. К двум точкам кольца из тонкой проволоки подведены радиально идущие провода, соединенные с достаточно удаленным источником.

Найдите магнитную индукцию в центре кольца.

Решение. Магнитное поле в произвольной точке создается токами, протекающими по дугам кольца и по подводящим проводам. Ток, идущий от источника (I), и токи, текущие по участкам кольца (I_1 , I_2) (см. рис. 6.3), связаны первым правилом Кирхгофа $I = I_1 + I_2$.

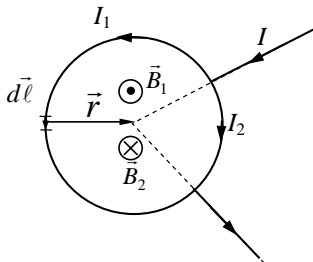


Рис. 6.3

Для расчета магнитной индукции воспользуемся принципом суперпозиции. Для малого элемента тока справедлив закон Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Если выбрать элемент тока на любом из подводящих проводов, векторное произведение $[d\vec{\ell}, \vec{r}] = 0$, т.к. вектор \vec{r} , проведенный в точку наблюдения, совпадающую с центром кольца, и вектор элемента тока сонаправлены или направлены противоположно в зависимости от направления тока.

Тогда вектор магнитной индукции в центре кольца $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, где \vec{B}_1 и \vec{B}_2 определяются токами I_1 и I_2 соответственно.

Определим направление вектора \vec{B}_1 . Для этого проведем вектор \vec{r} от произвольного малого элемента тока $d\vec{\ell}$ в центр кольца (см. рис. 6.3) и найдем направление векторного произведения $[d\vec{\ell}, \vec{r}]$. Получим вектор, направленный перпендикулярно плоскости рисунка «на нас». Повторив те же рассуждения для проводника с током I_2 , получим направление векторного произведения «от нас». Таким образом, вектора \vec{B}_1 и \vec{B}_2 направлены противоположно и модуль вектора магнитной индукции в центре равен

$$B = |B_1 - B_2|.$$

Рассчитаем B_1 из закона Био – Савара – Лапласа

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I_1 d\ell \cdot r \cdot \sin(\vec{d\ell} \wedge \vec{r})}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I_1 d\ell \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I_1 d\ell}{4\pi r^2},$$

$$\vec{B}_1 = \int_{(\ell_1)} d\vec{B}_1,$$

$$B_1 = \int_{(\ell_1)} dB_1 = \int_{(\ell_1)} \frac{\mu_0 I_1 d\ell}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I_1 \ell_1}{4\pi r^2}.$$

Аналогично $B_2 = \frac{\mu_0 I_2 \ell_2}{4\pi r^2}$.

Участки кольца ℓ_1 и ℓ_2 соединены параллельно. Если кольцо выполнено из однородной проволоки, сопротивления этих участков

$$R_1 = \rho \frac{\ell_1}{S} \text{ и } R_2 = \rho \frac{\ell_2}{S}.$$

Согласно закону Ома можно записать

$$I_1 R_1 = I_2 R_2.$$

Подставляя сопротивления, получим

$$I_1 \ell_1 = I_2 \ell_2.$$

Окончательно $B = |B_1 - B_2| = \frac{\mu_0 (I_1 \ell_1 - I_2 \ell_2)}{4\pi r^2} = 0$.

Задача 6.4. Диск радиусом R с центральным отверстием радиусом R_0 вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости. По диску равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ .

Определите магнитную индукцию в центре вращающегося диска, если изменением поверхностной плотности заряда при вращении можно пренебречь.

Решение. Представим диск как набор колец с увеличивающимися радиусами. Рассмотрим кольцо радиусом r и малой толщины Δr (см. рис. 6.4).

Вращение заряженного кольца эквивалентно протеканию кругового тока. Сила тока по определению равна заряду, проходящему в единицу времени через поперечное сечение проводника.

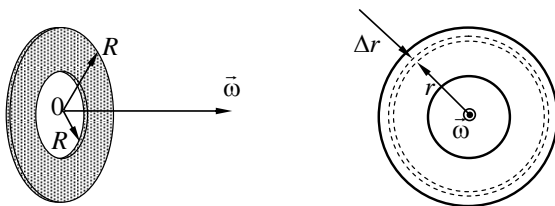


Рис. 6.4

Так как вращение происходит с постоянной угловой скоростью, в качестве времени наблюдения можно выбрать время одного оборота.

Тогда

$$I_{\kappa} = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot \Delta r}{2\pi} \omega = \sigma \omega r \cdot \Delta r,$$

где $\Delta q = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \Delta r$ – заряд выделенного кольца;

$\Delta S = 2\pi r \cdot \Delta r$ – его площадь;

$\Delta t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период вращения.

Если заряд диска положительный, направление вектора магнитной индукции поля совпадает с направлением вектора угловой скорости.

По закону Био – Савара – Лапласа вектор магнитной индукции элемента $d\vec{\ell}$ проводника с током I_{κ} в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от него,

$$d\vec{B}_{\kappa} = \frac{\mu_0 I_{\kappa} [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Для каждого элемента расстояние до точки наблюдения равно радиусу. Модуль векторного произведения $[d\vec{\ell}, \vec{r}] = d\ell \cdot r$. Подставляя полученное выражение для силы тока, получим

$$dB_{\kappa} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^2 \Delta r d\ell}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \sigma \omega \Delta r d\ell}{4\pi r}.$$

Результирующий вектор магнитной индукции для выбранного кольца в его центре определим по принципу суперпозиции:

$$\vec{B}_{\kappa} = \int_{(\text{по кольцу})} d\vec{B}_{\kappa}.$$

Учитывая одинаковое направление векторов $d\vec{B}_{\kappa}$, получим

$$B_{\kappa} = \int_{\text{(по кольцу)}} dB_{\kappa} = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0 \sigma \omega \Delta r d\ell}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega \Delta r 2\pi r}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega \Delta r}{2}.$$

Так как кольцо – элемент диска, то можно переобозначить

$$\Delta B_{\text{д}} = B_{\kappa} = \frac{\mu_0 \sigma \omega \Delta r}{2}.$$

Устремляя толщину кольца к нулю, получим

$$dB_{\text{д}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega dr}{2}.$$

Еще раз применяя принцип суперпозиции, получаем

$$B_{\text{д}} = \int_{\text{(по диску)}} dB_{\text{д}} = \int_{R_0}^R \frac{\mu_0 \sigma \omega dr}{2} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} (R - R_0).$$

Задача 6.5. Два длинных тонких прямых провода расположены параллельно друг другу на расстоянии $b = 50$ см. На одном конце они соединены проводом в форме полукольца, радиус которого $R = b/2$, лежащим в плоскости прямых проводов (см. рис. 6.5).

1. Найдите модуль и направление вектора магнитной индукции в центре полукольца, если по проводам идет ток $I = 12$ А.

2. Как изменится магнитная индукция в этой точке, если полукольцо расположить в плоскости, перпендикулярной к прямым проводам?

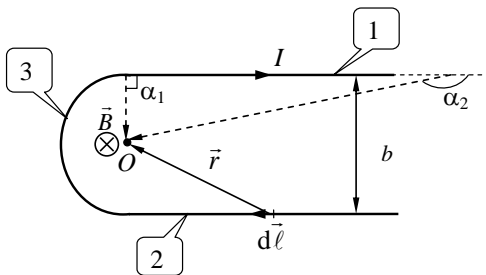


Рис. 6.5

Решение. 1. Для нахождения магнитной индукции воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

где \vec{B}_1 – вектор магнитной индукции поля первого прямолинейного участка;

\vec{B}_2 – вектор магнитной индукции поля второго прямолинейного участка;

\vec{B}_3 – вектор магнитной индукции поля тока, текущего по полукольцу.

Определим направление каждого из векторов. Для этого проведем вектор \vec{r} от произвольного малого элемента проводника с током $d\vec{\ell}$ в точку O (см. рис. 6.5) и найдем направление векторного произведения $[d\vec{\ell}, \vec{r}]$. Получим вектор, направленный перпендикулярно плоскости рисунка «от нас», для любого элемента тока.

Тогда принцип суперпозиции можно записать для модуля вектора

$$B = B_1 + B_2 + B_3.$$

Нахождение поля прямолинейного участка в данном случае возможно двумя способами.

1 способ. Воспользуемся формулой для расчета магнитной индукции поля отрезка прямого тока (см. задачу 6.1).

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

В нашем случае $a = R = \frac{b}{2}$. Для определения углов α_1 и α_2 выполним дополнительные построения (см. рис. 6.5). Проведем радиус-вектор из начала прямолинейного участка в точку наблюдения. Угол между ним и направлением тока равен $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$.

Для нахождения угла α_2 нужно провести радиус-вектор из конца прямолинейного участка. Так как по условию задачи проводник длинный, выберем на рисунке произвольный элемент тока, проведем радиус-вектор из него, обозначим угол α_2 и будем мысленно перемещать этот элемент в направлении тока. При этом угол $\alpha_2 \rightarrow \pi$.

Подставим расстояние и значения углов в расчетную формулу

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{b}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

2 способ. Для определения вектора магнитной индукции длинного проводника в точке, удаленной от его концов, можно использовать теорему о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сц}}.$$

Рассмотрим прямолинейный проводник AA' , предполагая, что по нему течет ток I (см. рис. 6.6).

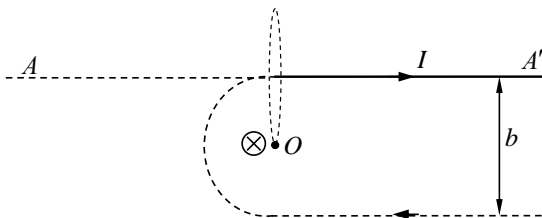


Рис. 6.6

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру, совпадающему с линией магнитной индукции и проходящему через точку O , выбрав направление обхода совпадающим с направлением вектора \vec{B} в каждой точке контура. Получим

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} B d\ell = B \oint_{(\ell)} d\ell = B \cdot 2\pi R.$$

Сцепленным с контуром будет ток I , тогда

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Поле в точке O можно представить как суперпозицию двух полей, каждое из которых создается половиной провода с током.

$$\text{Тогда магнитная индукция поля половины провода } B_1 = \frac{B}{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

Аналогично рассуждая, получаем модуль магнитной индукции второго прямолинейного участка.

Расчет магнитной индукции поля участка кругового тока подробно рассмотрен в задаче 6.2.

Для нахождения поля тока полукольца используем закон Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Раскроем векторное произведение и учтем, что $r = R = \frac{b}{2}$ для каждого элемента полукольца.

$$dB_3 = \frac{\mu_0 I d\ell \cdot r \cdot \sin(\widehat{d\ell \vec{r}})}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I d\ell \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R^2},$$

$$B_3 = \int_{(\ell)} dB_3 = \int_{(\ell)} \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I \pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{2b},$$

где $\ell = \pi R$ длина полукольца.

Модуль магнитной индукции в точке O

$$B = B_1 + B_2 + B_3,$$

$$B = 2B_1 + B_3 = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi b} + \frac{\mu_0 I}{2b} = \frac{\mu_0 I}{\pi b} + \frac{\mu_0 I}{2b}.$$

2. Если полукольцо расположить в плоскости, перпендикулярной к прямым проводам, изменится направление вектора \vec{B}_3 (см. рис. 6.7).

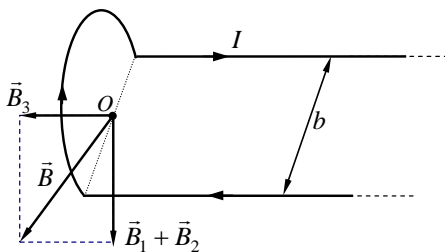


Рис. 6.7

Магнитную индукцию результирующего поля определим, применяя принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

$$B = \sqrt{(B_1 + B_2)^2 + B_3^2},$$

$$B = \sqrt{4B_1^2 + B_3^2} = \frac{\mu_0 I}{b} \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4}}.$$

Задача 6.6. Два плоских круглых витка радиусом $R = 10$ см каждый, обтекаемые одинаковыми по величине и направлению токами $I_1 = I_2 = 3,0$ А, расположены параллельно друг другу на расстоянии $b = 20$ см (см. рис. 6.8).

1. Найдите модуль и направление вектора магнитной индукции в произвольной точке оси X .

2. Постройте графики зависимостей проекции вектора индукции $B_x(x)$.

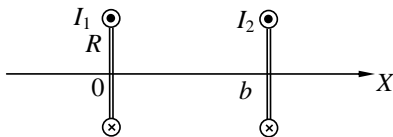


Рис. 6.8

Решение. Для нахождения магнитной индукции воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где \vec{B}_1 – вектор магнитной индукции поля тока I_1 ;

\vec{B}_2 – вектор магнитной индукции поля тока I_2 .

Рассмотрим каждый виток в отдельности и выведем формулу для расчета магнитной индукции в произвольной точке на оси кругового тока.

Для простоты рассуждений будем считать, что начало координат совпадает с центром витка (см. рис. 6.9). Разобьем виток на малые элементы, каждый из которых вносит вклад в создание магнитного поля. Вектор магнитной индукции малого элемента тока определяется из закона Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Рассмотрим элемент тока, перпендикулярный плоскости рисунка и направленный «на нас», проведем от него радиус-вектор в точку наблюдения – произвольную точку оси X. Определим направление векторного произведения $[d\vec{\ell}, \vec{r}]$. Обозначим угол α – между полученным направлением $d\vec{B}$ и осью X. Те же построения повторим для другого элемента тока – перпендикулярного плоскости рисунка и направленного «от нас».

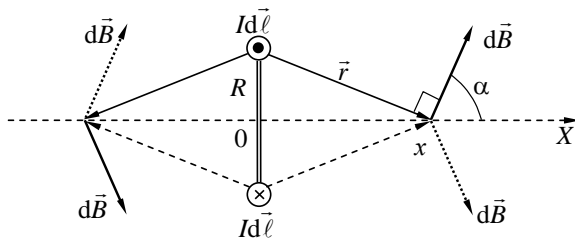


Рис. 6.9

Найдем модуль $|\vec{dB}|$:

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot d\ell r \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \cdot d\ell}{4\pi r^2}.$$

Используем принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \int \vec{dB}.$$

(по витку)

Из проведенных построений видно, что индукция результирующего поля направлена по оси X . Найдем проекции B_{1x} и B_{2x} для первого и второго кругового тока.

$$B_x = \int \underset{\text{(по кольцу)}}{dB_x} = \int_0^\ell \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos \alpha d\ell = \int_0^\ell \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{R}{r} d\ell = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3},$$

где $r = \sqrt{R^2 + x^2}$.

Запишем полученное соотношение для первого кругового тока

$$B_{1x} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Для второго кругового тока необходимо учесть его положение относительно начала координат:

$$B_{2x} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + (x-b)^2)^{3/2}},$$

$$B_x = B_{1x} + B_{2x},$$

$$B_x = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left(\frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (x-b)^2)^{3/2}} \right).$$

Построим график полученной зависимости (рис. 6.10). Пунктиром на графике показаны слагаемые B_{1x} и B_{2x} .

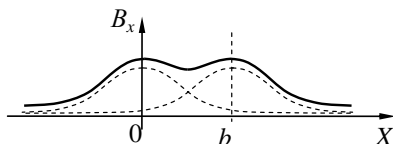


Рис. 6.10

Задача 6.7. Обмотка катушки длиной $\ell = 2,5$ см и радиусом $R = 2,0$ см состоит из $N = 100$ витков. Ток в обмотке катушки $I = 0,2$ А.

1. Рассчитайте магнитную индукцию в центре одного из оснований.
2. Найдите магнитную индукцию в произвольной точке оси катушки.

Решение. Введем координатную ось X так, чтобы начало координат совпадало с основанием катушки (см. рис. 6.11). Представим катушку как совокупность последовательно соединенных витков с током. Рассмотрим один круговой виток, находящийся в точке с координатой x .

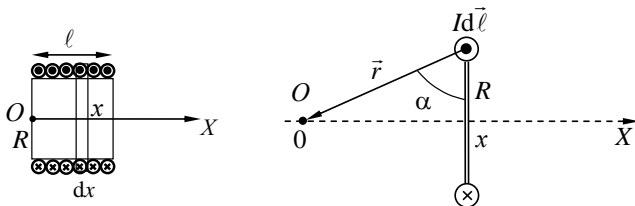


Рис. 6.11

Магнитная индукция поля на оси витка определяется соотношением $B_{\text{витка}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$ (подробно см. решение задачи 6.6), где r – расстояние от произвольного элемента витка до точки наблюдения. Используя связь $\frac{R}{r} = \cos \alpha$, $\frac{x}{R} = \operatorname{tg} \alpha$, перепишем

выражение для магнитной индукции через косинус угла α :

$$B_{\text{витка}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cos^3 \alpha.$$

Угол α определяет положение точки наблюдения по отношению к выбранному витку.

Найдем поле в центре O основания катушки методом суперпозиции. Пусть на произвольном участке dx соленоида расположено dN витков. Результирующая магнитная индукция поля всех витков с координатой x

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2R} \cos^3 \alpha dN,$$

$$\text{где } dN = \frac{N}{\ell} dx;$$

N – число витков соленоида.

Используя обозначение плотности намотки $n = \frac{N}{\ell}$, выражение для магнитной индукции можно переписать в виде

$$dB = \frac{\mu_0 In}{2R} \cos^3 \alpha dx.$$

Из соотношения $\frac{x}{R} = \operatorname{tg} \alpha$ найдем производную $\frac{dx}{d\alpha}$:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{R}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Тогда } dB = \frac{\mu_0 In}{2R} \cos^3 \alpha \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 In}{2} \cos \alpha d\alpha.$$

Так как направления токов в витках одинаковы, то вектора магнитной индукции для разных витков сонаправлены, тогда

$$B = \int_{\substack{\text{по всем} \\ \text{виткам}}} dB = \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{\mu_0 In}{2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 In}{2} \sin \alpha \Big|_0^{\alpha_{\max}} = \frac{\mu_0 In}{2} \sin \alpha_{\max},$$

$$\text{где } \sin \alpha_{\max} = \frac{\ell}{(R^2 + \ell^2)^{1/2}}.$$

Получим выражение для расчета магнитной индукции в центре основания соленоида

$$B = \frac{\mu_0 In}{2} \frac{\ell}{\sqrt{R^2 + \ell^2}}.$$

Если выполняется условие $R \ll \ell$, формула упрощается $B = \frac{\mu_0 I n}{2}$.

Магнитную индукцию поля в произвольной точке оси катушки можно найти по методу суперпозиции, разрезав мысленно соленоид на две части и используя полученную ранее формулу:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I n}{2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I n}{2} \frac{\ell - x}{\sqrt{R^2 + (\ell - x)^2}},$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I n}{2} \left[\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{\ell - x}{\sqrt{R^2 + (\ell - x)^2}} \right].$$

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

Задача 6.8. Два тонких длинных прямых провода с одинаковыми и противоположными по направлению токами $I_1 = I_2 = 3$ А расположены параллельно друг другу на расстоянии $a = 0,3$ м.

1. Найдите результирующую магнитную индукцию в произвольной точке оси X (см. рис. 6.12).

2. Постройте график зависимости проекции результирующего вектора индукции B_y от координаты x для точек, лежащих на оси X .

3. Решите задачу при изменении направления тока I_2 на противоположное.

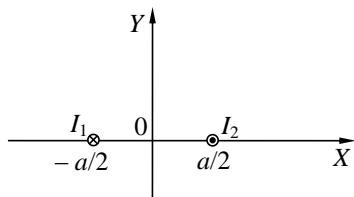


Рис. 6.12

Решение. Решение задачи разобьем на два этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля для каждого проводника с током, затем применим принцип суперпозиции для определения индукции результирующего поля.

Для расчета магнитной индукции поля длинного прямого провода с током воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сц}}.$$

Выберем контур совпадающим с линией магнитной индукции произвольного радиуса r (см. рис. 6.13). Разобьем контур на малые элементы $d\vec{\ell}$, сонаправленные с вектором магнитной индукции в каждой точке контура.

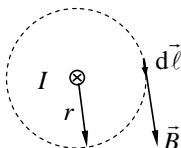


Рис. 6.13

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции. Для этого вначале раскроем скалярное произведение:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_{(\ell)} B dl \cos 0^\circ = \int_{(\ell)} B dl.$$

Затем вынесем модуль B за знак интеграла, так как в силу симметрии в каждой точке контура значение магнитной индукции одинаковое

$$\int_{(\ell)} B dl = B \int_{(\ell)} dl = B \cdot 2\pi r.$$

Найдем сцепленный с контуром ток. В данном случае $I_{\text{сц}} = I$.

Приравняем циркуляцию и сцепленный ток, домноженный на магнитную постоянную, и выразим искомую магнитную индукцию:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Для применения полученной формулы к конкретной задаче необходимо связать расстояние до проводника r с координатой точки наблюдения на заданной координатной оси.

Чтобы учесть направление вектора магнитной индукции для каждого провода (см. рис. 6.14), воспользуемся его проекцией на ось Y .

$$B_{1y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a/2)}, \quad B_{2y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a/2)},$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[-\frac{1}{x+a/2} + \frac{1}{x-a/2} \right].$$

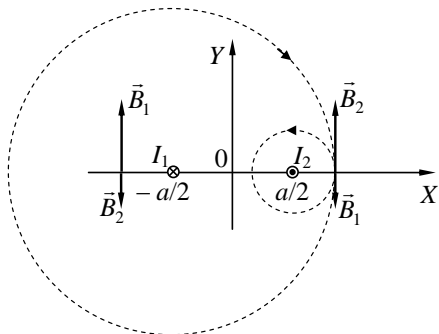


Рис. 6.14

Для построения графиков изобразим пунктиром зависимости $B_{1y}(x)$ и $B_{2y}(x)$, а затем найдем их сумму (см. рис. 6.15).

При изменении направления тока I_2 на противоположное изменится знак проекции B_{2y} .

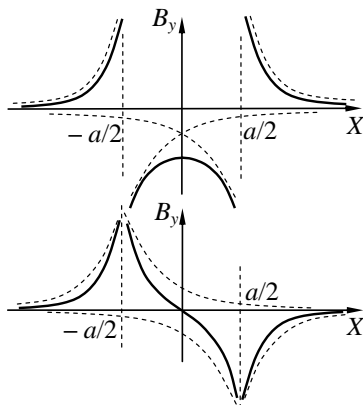


Рис. 6.15

Задача 6.9. Два тонких длинных прямых провода с одинаковыми и противоположными по направлению токами $I_1 = I_2$ расположены параллельно друг другу на расстоянии a .

1. Найдите результирующую магнитную индукцию в точке C , равноудаленной от обоих проводов на расстояние b ($b > a/2$) (см. рис. 6.16).

2. Решите задачу при изменении направления тока I_2 на противоположное.

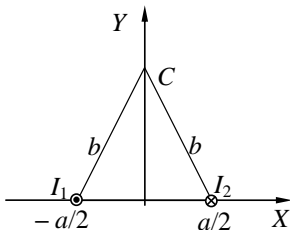


Рис. 6.16

Решение. Решение задачи разобьем на два этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля для каждого проводника с током, затем используем принцип суперпозиции для определения индукции результирующего поля.

Для расчета магнитной индукции поля длинного прямого провода с током в точке C воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} (см. задачу 6.8).

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b}.$$

Изобразим вектора \vec{B}_1 и \vec{B}_2 в точке наблюдения и найдем их сумму (см. рис. 6.17):

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

По условию токи равны, поэтому результирующий вектор \vec{B} будет направлен вверх по оси Y .

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = 2B_{1y} = 2B_1 \cos \alpha = 2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} \frac{a}{2b} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi b^2}.$$

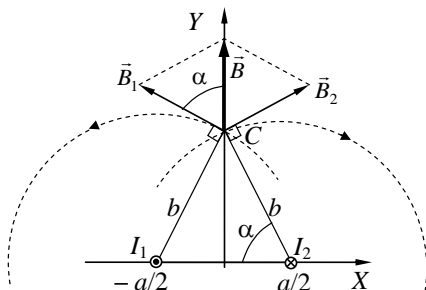


Рис. 6.17

При изменении направления тока I_2 на противоположное изменится направление вектора \vec{B}_2 , а значит, направление результирующего вектора \vec{B} (см. рис. 6.18).

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = 2B_{1x} = 2B_1 \sin \alpha = 2 \frac{\mu_0 I_1 y}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I_1 \sqrt{b^2 - a^2/4}}{\pi b^2}.$$

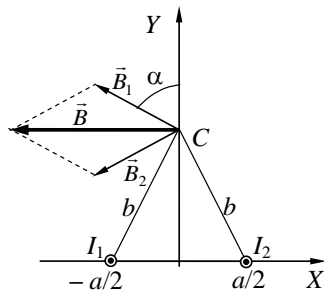


Рис. 6.18

Задача 6.10. По прямой медной ленте шириной b течет ток I с постоянной поверхностной плотностью. Считая ленту бесконечно длинной и тонкой, рассчитайте магнитную индукцию в точке C , лежащей в плоскости ленты на расстоянии x_0 ($x_0 > b/2$) от ее середины (см. рис. 6.19).

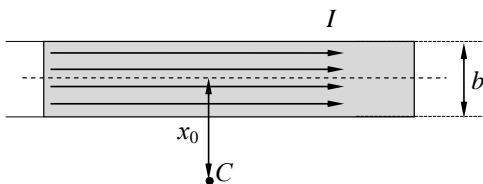


Рис. 6.19

Решение. Выберем систему координат так, чтобы координата точки C была равна нулю. Разобьем ленту на участки малой толщины Δx , параллельные длинной стороне ленты, и будем их рассматривать как тонкие проводники с током (см. рис. 6.20).

Для расчета магнитной индукции поля длинного прямого провода с током воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сц}}.$$

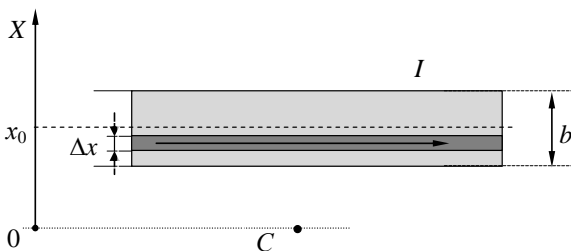


Рис. 6.20

Выберем контур совпадающим с линией магнитной индукции произвольного радиуса r . Разобьем контур на малые элементы $d\vec{\ell}$, сонаправленные с вектором магнитной индукции в каждой точке контура. Рисунок 6.21 соответствует виду слева на малый элемент ленты с током I_i .

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции. Для этого вначале раскроем скалярное произведение:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} B d\ell \cos 0^\circ = \oint_{(\ell)} B d\ell.$$

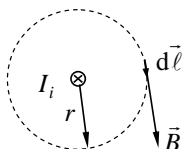


Рис. 6.21

Затем вынесем модуль B за знак интеграла, так как в каждой точке контура значение магнитной индукции одинаковое:

$$\oint_{(l)} B dl = B \oint_{(l)} dl = B \cdot 2\pi r.$$

Приравняем циркуляцию и сцепленный ток, домноженный на магнитную постоянную, и выражаем искомую магнитную индукцию.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{сц}},$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{\text{сц}}}{2\pi r}.$$

Для применения полученной формулы к конкретной задаче необходимо связать расстояние до проводника r с координатой точки наблюдения по заданной координатной оси и рассчитать сцепленный ток.

Сцепленный ток в данном случае

$$I_{\text{сц}} = I_i = \frac{I}{b} \Delta x \text{ — ток малого участка ленты.}$$

Будем рассчитывать магнитную индукцию в точке с координатой $x = 0$ как суперпозицию полей тонких проводников:

$$\vec{B} = \int_{(b)} d\vec{B}.$$

Тогда под $d\vec{B}$ надо понимать поле провода с током толщины dx ($\Delta x \rightarrow dx$) в точке, удаленной от него на расстояние x :

$$dB = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi x b}.$$

Для точек, лежащих в плоскости ленты, все элементарные вектора $d\vec{B}$ сонаправлены.

$$B = \int_{(b)} dB = \int_{x_0 - \frac{b}{2}}^{x_0 + \frac{b}{2}} \frac{\mu_0 I dx}{2\pi x b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln \frac{x_0 + \frac{b}{2}}{x_0 - \frac{b}{2}}.$$

Задача 6.11. Длинный коаксиальный кабель, состоящий из медной жилы, радиус которой R_1 , и тонкой медной оболочки радиусом R_2 , образует двухпроводную систему, обтекаемую током I . Плотность тока в жиле можно считать постоянной.

Найдите зависимость магнитной индукции $B(r)$, где r – расстояние от оси системы, и постройте график.

Решение. Если коаксиальный кабель образует двухпроводную систему, значит, по жиле и оболочке течет один и тот же ток в противоположных направлениях.

Для расчета магнитной индукции воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(l)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I_{\text{сц.}}$$

Зависимость магнитной индукции от радиальной координаты будет различной для трех разных областей: внутри жилы ($r < R_1$), между жилой и оболочкой ($R_1 < r < R_2$) и вне оболочки ($r > R_2$).

Выберем контур совпадающим с линией магнитной индукции произвольного радиуса r . На рисунке 6.22 пунктирной линией показан выбор контура для каждой области. Разобьем контур на малые элементы $d\vec{l}$, сонаправленные с вектором магнитной индукции в каждой точке контура.

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции. Для этого

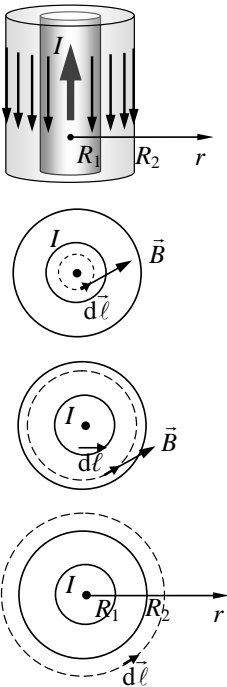


Рис. 6.22

вначале раскроем скалярное произведение:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} B d\ell \cos 0^\circ = \oint_{(\ell)} B d\ell.$$

Затем вынесем модуль B за знак интеграла, так как в каждой точке контура значение магнитной индукции одинаковое:

$$\oint_{(\ell)} B d\ell = B \oint_{(\ell)} d\ell = B \cdot 2\pi r.$$

Найдем сцепленный с контуром ток.

Для контура, проведенного внутри жилы, сцепленным является часть тока жилы, определяемая площадью, ограниченной контуром:

$$I_{\text{сц}} = j\pi r^2 = I \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} = I \frac{r^2}{R_1^2},$$

где j – плотность тока, текущего по жиле.

Приравняем циркуляцию и сцепленный ток, домноженный на магнитную постоянную, и выражаем искомую магнитную индукцию:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R_1^2},$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \text{ при } r < R_1.$$

Для контура, проведенного между жилой и оболочкой ($R_1 < r < R_2$), сцепленным будет весь ток, текущий по жиле $I_{\text{сц}} = I$. Следовательно,

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ при } R_1 < r < R_2.$$

Для внешнего контура, имеющего радиус $r > R_2$, сцепленный ток есть разность токов жилы и оболочки, т.к. направления токов противоположны $I_{\text{сц}} = I - I = 0$. Следовательно, $B(r) = 0$ при $r > R_2$.

По полученным формулам строим график зависимости магнитной индукции от расстояния до оси системы (см. рис. 6.23).

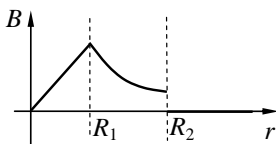


Рис. 6.23

Задача 6.12. По обмотке соленоида, имеющей $n = 1000$ витков/м, идет ток $I = 0,5$ А. Диаметр витков соленоида в $k = 15$ раз меньше его длины.

Найдите магнитную индукцию B_1 внутри соленоида и B_2 – в центре одного из оснований.

Решение. По условию задачи диаметр витков соленоида много меньше его длины, поэтому для расчета магнитной индукции внутри соленоида можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сш}}.$$

Выберем прямоугольный контур, одна сторона которого совпадает с линией магнитной индукции внутри соленоида, а параллельная ей лежит вне соленоида (см рис. 6.24). Зададим направление обхода, так чтобы внутри соленоида двигаться в направлении линии магнитной индукции.

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_1^2 (\vec{B}, d\vec{\ell}) + \int_2^3 (\vec{B}, d\vec{\ell}) + \int_3^4 (\vec{B}, d\vec{\ell}) + \int_4^1 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_1^2 (\vec{B}, d\vec{\ell}).$$

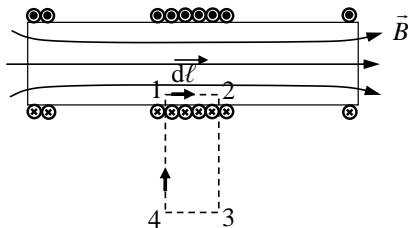


Рис. 6.24

$$\int_2^3 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_2^3 B \cdot d\ell \cos(\vec{B} \wedge d\vec{\ell}) = 0, \text{ т.к. на этом участке векторы}$$

\vec{B} и $d\vec{\ell}$ внутри соленоида взаимно перпендикулярны, а вне соленоида поле отсутствует.

$$\int_3^4 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = 0, \text{ т.к. вне соленоида вдали от его торцов магнитное}$$

поле отсутствует.

$$\int_4^1 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_4^1 B \cdot d\ell \cos(\vec{B} \wedge d\vec{\ell}) = 0, \text{ т.к. на этом участке вектора}$$

\vec{B} и $d\vec{\ell}$ внутри соленоида взаимно перпендикулярны, а вне соленоида поле отсутствует.

Учитывая, что на участке 1 – 2 векторы \vec{B} и $d\vec{\ell}$ сонаправлены и магнитная индукция не изменяется, получим

$$\int_1^2 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_1^2 B d\ell = B\ell_{12},$$

где ℓ_{12} – длина отрезка 1 – 2.

Рассчитаем сцепленный с контуром ток.

Проводник с током пересекает поверхность, ограниченную контуром столько раз, сколько витков умещается на отрезке 1 – 2.

$N_{12} = \ell_{12}n$, где n – число витков на единице длины (плотность катушки):

$$I_{\text{сц}} = IN_{12} = I\ell_{12}n.$$

Приравнявая циркуляцию вектора магнитной индукции и сцепленный ток, домноженный на магнитную постоянную, получаем

$$B\ell_{12} = \mu_0 I\ell_{12}n,$$

$$B = \mu_0 In.$$

Для определения магнитной индукции в центре одного из оснований воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем мысленно длинный соленоид на две равные половины. Магнитную индукцию полей, создаваемых каждой половиной соленоида, обозначим \vec{B}_1 и \vec{B}_2 соответственно (см. рис. 6.25).

Тогда магнитное поле в центре есть суперпозиция двух полей и магнитная индукция

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2\vec{B}_1,$$

где \vec{B}_1 – вектор магнитной индукции в центре основания каждой половины:

$$B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 I n.$$

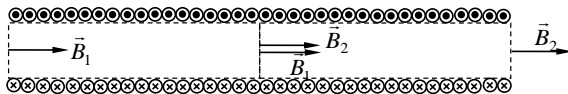


Рис. 6.25

Задача 6.13. Обмотка тороидального соленоида содержит N витков. Внутренний радиус соленоида R_1 , внешний R_2 . Разность между максимальным и минимальным значениями магнитной индукции внутри соленоида ΔB .

Определите ток в соленоиде.

Решение. Для расчета магнитной индукции поля воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сш}}.$$

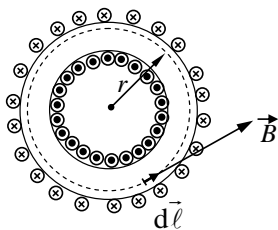


Рис. 6.26

Выберем контур совпадающим с линией магнитной индукции радиуса r . Зададим направление обхода так, чтобы двигаться в направлении линии магнитной индукции (см. рис. 6.26).

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} B d\ell = B \ell = B \cdot 2\pi r.$$

Определим сцепленный с контуром ток.

При выборе контура радиуса $r < R_1$ или $r > R_2$ сцепленный с контуром ток будет равен нулю.

Тогда

$$B \cdot 2\pi r = 0, \quad B = 0.$$

Поле локализовано внутри соленоида, чего и следовало ожидать.

Поверхность, ограниченную контуром радиуса r ($R_1 < r < R_2$), пересекает проводник с искомым током N раз в одном и том же направлении:

$$I_{\text{сш}} = IN.$$

Тогда

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN,$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}.$$

Минимальное значение магнитной индукции при максимальном значении r :

$$r = R_2, B(R_2) = \frac{\mu_0 IN}{2\pi R_2}.$$

Максимальное значение магнитной индукции при минимальном значении r :

$$r = R_1, B(R_1) = \frac{\mu_0 IN}{2\pi R_1}.$$

Разность между максимальным и минимальным значениями:

$$\Delta B = B(R_1) - B(R_2) = \frac{\mu_0 IN}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Для ответа на вопрос задачи выразим силу тока

$$I = \frac{2\pi \Delta B R_1 R_2}{\mu_0 N (R_2 - R_1)}.$$

7. Сила Ампера. Работа силы Ампера

Задача 7.1. В одной плоскости с длинным прямым проводом с током $I = 10$ А перпендикулярно к нему расположен тонкий стержень длиной $\ell = 20$ см, по которому течет ток $i = 2,0$ А. Расстояние от прямого провода до ближайшего конца стержня $b = 10$ см (см. рис. 7.1).

1. Найдите силу F , действующую на стержень.
2. Определите точку приложения этой силы.

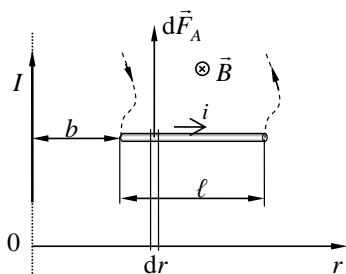


Рис. 7.1

Решение. Будем считать, что длинный проводник с током I создает вокруг себя магнитное поле, а стержень в этом поле находится.

Решение задачи разобьем на два этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля длинного проводника с током, затем рассчитаем силу Ампера, действующую на стержень, и определим точку приложения этой силы.

Для расчета магнитной индукции поля длинного прямого провода с током воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{св}}.$$

Выберем контур совпадающим с линией магнитной индукции произвольного радиуса r . Разобьем контур на малые элементы $d\vec{\ell}$, сонаправленные с вектором магнитной индукции в каждой точке контура (см. рис. 7.2).

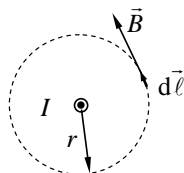


Рис. 7.2

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции. Для этого вначале раскроем скалярное произведение:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_{(\ell)} B dl \cos 0^\circ = \int_{(\ell)} B dl.$$

Затем вынесем модуль B за знак интеграла, так как в каждой точке контура значение магнитной индукции одинаковое:

$$\oint_{(\ell)} B dl = B \int_{(\ell)} dl = B \cdot 2\pi r.$$

Найдем сцепленный с контуром ток. В данном случае $I_{\text{сш}} = I$.

Приравниваем циркуляцию и сцепленный ток, домноженный на магнитную постоянную, и выражаем искомую магнитную индукцию:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

На стержень с током, помещенный в магнитное поле, будет действовать сила Ампера. В каждой точке стержня вектор магнитной индукции поля прямого тока будет направлен перпендикулярно стержню «от нас» (см. рис. 7.1).

Поле, создаваемое прямым током, неоднородно, поэтому разобьем стержень на малые элементы $d\vec{r}$, направленные по току, в пределах которых можно считать $\vec{B} = \text{const}$.

На каждый элемент стержня действует сила Ампера

$$d\vec{F}_A = i[d\vec{r}, \vec{B}].$$

Направление силы определим как результат векторного произведения (с конца вектора силы поворот от вектора $d\vec{r}$ к вектору \vec{B} должен быть виден против часовой стрелки) или используем «правило левой руки» (четыре пальца по направлению тока в стержне, линии магнитной индукции входят в ладонь, большой палец показывает направление силы).

Результирующую силу найдем, используя принцип суперпозиции:

$$\vec{F}_A = \int_{(\ell)} d\vec{F}_A.$$

Все вектора $d\vec{F}_A$ сонаправлены, поэтому соотношение справедливо и для модулей:

$$F_A = \int_{(\ell)} dF_A.$$

Подставляя полученное соотношение для магнитной индукции, найдем силу

$$dF_A = iB \cdot dr,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

$$F_A = \int_{(\ell)} dF_A = \int_b^{b+\ell} i \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \ln \frac{b+\ell}{b}.$$

Найдем точку стержня, относительно которой равна нулю сумма моментов элементарных сил Ампера $d\vec{F}_A$, она и будет являться точкой приложения результирующей силы Ампера.

Обозначим эту точку (O) и ее координату r_O на рисунке 7.3. Момент сил $d\vec{F}_A$ направлен «от нас» для всех участков стержня, имеющих координату меньше r_O , и «на нас» – для участков стержня с большей координатой. Введем ось Y , перпендикулярную плоскости рисунка, направим ее «от нас». Тогда проекция на эту ось момента силы, действующей на участок стержня dr с координатой r :

$$dM_y = (r_O - r)dF_A = (r_O - r)idrB = i(r_O - r) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr.$$

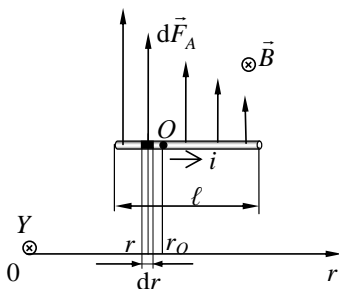


Рис. 7.3

Сумма моментов элементарных сил Ампера относительно точки O равна нулю:

$$M_y = \int_{(\ell)} dM_y = 0,$$

$$0 = \int_b^{b+\ell} i(r_0 - r) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \left(\int_b^{b+\ell} \frac{r_0}{r} dr - \int_b^{b+\ell} dr \right) = \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \left(r_0 \ln \frac{b+\ell}{b} - \ell \right).$$

Отсюда

$$r_0 = \frac{\ell}{\ln \frac{b+\ell}{b}}.$$

Проведя расчет, получим

$$F_A = \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \ln \frac{b+\ell}{b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10}{2\pi} \ln \frac{10+20}{10} = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ Н},$$

$$r_0 = \frac{\ell}{\ln \frac{b+\ell}{b}} = 18,2 \text{ см}.$$

Задача 7.2. Маленькая квадратная рамка из мягкой проволоки со стороной a , обтекаемая током i , медленно втягивается в середину длинного соленоида. Обмотка соленоида состоит из n витков на единицу длины, ток в соленоиде I ($I \gg i$). Перемещение рамки происходит вдоль оси соленоида, плоскость ее все время перпендикулярна оси соленоида.

Найдите суммарную работу, совершенную силами Ампера при перемещении рамки из середины основания до середины оси и при деформации рамки.

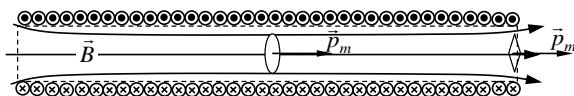


Рис. 7.4

Решение. Чтобы рамка втягивалась внутрь длинного соленоида, направление тока в рамке должно совпадать с направлением тока в соленоиде. Вместо указания направления тока в рамке можно воспользоваться вектором магнитного момента $\vec{p}_m = i\vec{S}$, направление которого связано с направлением тока правилом правого винта. Здесь S – площадь, ограниченная рамкой. Начальное и конечное положения рамки показаны на рисунке 7.4.

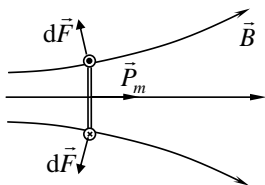


Рис. 7.5

Поле на краю соленоида неоднородно. Действие элементарных сил Ампера на рамку с током показано на рисунке 7.5. Результирующая этих сил направлена в сторону увеличения магнитной индукции.

Работа сил Ампера определяется соотношением $A = i\Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного

потока через поверхность, ограниченную рамкой.

Решение задачи разобьем на три этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля длинного соленоида, затем рассчитаем магнитный поток, и, наконец, работу сил Ампера.

Для нахождения магнитной индукции воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{св}}.$$

Подробно применение теоремы для данного случая рассмотрено в задаче 6.12.

Магнитная индукция поля в центре соленоида (конечное положение рамки) определяется соотношением

$$B_2 = \mu_0 In.$$

Поле на краю соленоида (начальное положение рамки) найдем, используя принцип суперпозиции (см. задачу 6.12):

$$B_1 = \frac{\mu_0 In}{2}.$$

Магнитный поток $\Phi = \int_{(s)} (\vec{B}, d\vec{S})$ может быть рассчитан по

приближенной формуле

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{S}) = BS \cos(\hat{\vec{B}} \hat{\vec{S}}) = BS,$$

т.к. площадь рамки мала, в пределах ограниченной ею поверхности магнитную индукцию можно считать постоянной, а векторы магнитной индукции и магнитного момента рамки – сонаправленными.

Вначале рамка имеет форму квадрата:

$$S_1 = a^2,$$

$$\Phi_1 = B_1 S_1 = \frac{\mu_0 I n}{2} a^2.$$

После деформации рамка имеет форму окружности, длина которой равна периметру рамки $2\pi r = 4a$. Тогда площадь и магнитный поток соответственно

$$S_2 = \frac{4a^2}{\pi},$$

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = \mu_0 I n \frac{4a^2}{\pi}.$$

Работа сил Ампера

$$A = i \Delta \Phi = \mu_0 I n a^2 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \right).$$

Задача 7.3. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому идет ток $I = 10$ А, расположена прямоугольная рамка, обтекаемая током $i = 2$ А. Длина рамки $a = 6$ см, ширина $b = 4$ см, а расстояние до провода $x_0 = 1$ см. Большая сторона параллельна проводу. Магнитный момент рамки сонаправлен с вектором магнитной индукции прямого провода.

Рассчитайте работу внешних сил.

1. При медленном увеличении расстояния x_0 в три раза.
2. При медленном повороте рамки вокруг стороны b на угол 180° .
3. При медленном повороте рамки на угол 180° вокруг дальней стороны, параллельной проводу.

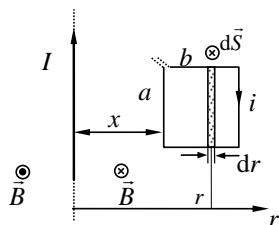


Рис. 7.6

Решение. Чтобы правильно изобразить ток в рамке, найдем направление вектора магнитной индукции поля прямого тока и воспользуемся определением магнитного момента контура с током $\vec{p}_m = i \vec{S}$, согласно которому вектор \vec{p}_m связан с направлением протекания тока правилом «правого винта» (см. рис. 7.6).

Работа сил Ампера определяется соотношением $A = i \Delta \Phi$, где $\Delta \Phi$ –

изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную рамкой. Работа внешних сил $A^* = -A$. Собственное поле рамки при ее перемещении не изменяется, $\Phi_{\text{собств}} = \text{const}$. Значит, изменение магнитного потока зависит только от начального и конечного положения рамки в поле тока прямого провода.

Решение задачи разобьем на три этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля длинного проводника с током, затем рассчитаем магнитный поток и, наконец, работу внешних сил по изменению положения рамки.

Для нахождения магнитной индукции поля длинного проводника с током можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сц}}.$$

Подробно применение теоремы для данного случая рассмотрено в задаче 7.1.

Применив теорему, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где r – расстояние до прямого провода.

Рассчитаем магнитный поток через поверхность, ограниченную рамкой:

$$\Phi = \int_{(s)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Так как в пределах площадки $S = a \cdot b$, ограниченной рамкой, поле неоднородно, разобьем поверхность на элементарные участки dS , в пределах каждого из которых изменением магнитной индукции можно пренебречь. Т.к. магнитная индукция зависит от расстояния до проводника, площадка dS должна иметь бесконечно малый размер вдоль оси r : $dS = a \cdot dr$.

Направление векторов $d\vec{S} \uparrow \vec{p}_m$. В таком случае знак работы сил Ампера получится автоматически.

Рассчитаем магнитный поток для начального положения рамки:

$$\Phi_1 = \int_{(s)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(s)} B dS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}) = \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x_0 + b}{x_0}.$$

1. При медленном увеличении расстояния x_0 в три раза конечный магнитный поток можно найти, используя полученную формулу с другими пределами интегрирования:

$$\Phi_2 = \int_{3x_0}^{3x_0+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{3x_0 + b}{3x_0}.$$

Работа сил поля

$$A = i(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{\mu_0 I i a}{2\pi} \left(\ln \frac{3x_0 + b}{3x_0} - \ln \frac{x_0 + b}{x_0} \right) = \frac{\mu_0 I i a}{2\pi} \ln \frac{3x_0 + b}{3(x_0 + b)} < 0,$$

а внешних сил

$$A^* = -A = \frac{\mu_0 I i a}{2\pi} \ln \frac{3(x_0 + b)}{3x_0 + b} > 0.$$

2. При медленном повороте рамки вокруг стороны b на угол 180° конечный магнитный поток будет отличаться от начального знаком $\Phi_2 = -\Phi_1$, т.к. изменилось на противоположное направление вектора

$$d\vec{S}, \quad \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}) = \cos 180^\circ = -1.$$

Работа

$$A = i(\Phi_2 - \Phi_1) = -i2\Phi_1 = -\frac{\mu_0 I i a}{\pi} \ln \frac{x_0 + b}{x_0} < 0,$$

$$A^* = -A = \frac{\mu_0 I i a}{\pi} \ln \frac{x_0 + b}{x_0} > 0.$$

3. При медленном повороте рамки на угол 180° вокруг дальней стороны, параллельной проводу, у магнитного потока изменяется и модуль, и знак:

$$\Phi_2 = \int_{x_0+b}^{x_0+2b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a \cos(180^\circ) dr = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x_0 + 2b}{x_0 + b}.$$

Работа

$$A = i(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{\mu_0 I i a}{2\pi} \left(-\ln \frac{x_0 + 2b}{x_0 + b} - \ln \frac{x_0 + b}{x_0} \right) = \frac{\mu_0 I i a}{2\pi} \ln \frac{x_0}{(x_0 + 2b)} < 0$$

$$A^* = -A = -\frac{\mu_0 I i a}{2\pi} \ln \frac{x_0}{(x_0 + 2b)} > 0.$$

Задача 7.4. В одной плоскости с длинным прямым проводом с током $I_1 = 2$ А на расстоянии $a = 1$ см от него параллельно проводу расположена длинная тонкая медная лента шириной $b = 20$ см, по которой течет ток $I_2 = 10$ А (см. рис. 7.7).

Найдите силу, действующую на единицу длины ленты, если плотность тока I_2 постоянна.

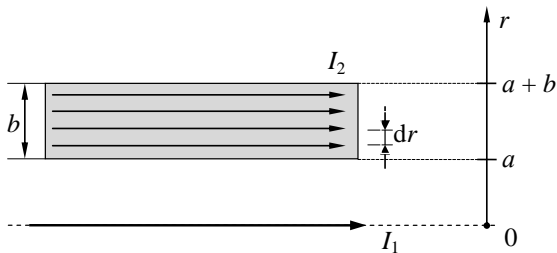


Рис. 7.7

Решение. Решение задачи разобьем на два этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля длинного проводника с током I_1 , затем рассчитаем силу, действующую на ленту с током I_2 .

Для нахождения магнитной индукции воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сц}}.$$

Подробно применение теоремы для данного случая рассмотрено в задаче 7.1.

Применив теорему, получим

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r},$$

где r – расстояние до прямого провода.

Разобьем ленту на полоски толщиной dr , параллельные длинной стороне ленты, и будем их рассматривать как тонкие проводники с током силой

$$dI_2 = \frac{I_2}{b} dr.$$

На каждый такой проводник действует сила Ампера

$$d\vec{F}_A = dI_2 [\vec{\ell}, \vec{B}],$$

где $\vec{\ell}$ – вектор единичной длины, направленный вдоль ленты.

Определим направление и модуль этой силы. Если токи в ленте и проводнике направлены одинаково, можно показать, что они притягиваются.

Раскрываем векторное произведение:

$$dF_A = dI_2 \ell B \sin\left(\vec{\ell} \wedge \vec{B}\right) = dI_2 \ell B.$$

Результирующую силу определим по принципу суперпозиции, проведя суммирование по всей ширине ленты:

$$\vec{F}_A = \int_{(b)} d\vec{F}_A.$$

Силы, действующие на разные элементы ленты, сонаправлены, тогда

$$F_A = \int_{(b)} dF_A = \int_{(b)} \ell B dI_2 = \int_a^{a+b} \ell \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \ell \ln \frac{a+b}{a}.$$

Сила, действующая на единицу длины ленты:

$$\frac{F_A}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Подставим численные значения

$$\frac{F_A}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10}{2\pi \cdot 0,2} \ln \frac{1+20}{1} = 6,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Задача 7.5. Контур с током, магнитный момент которого $p_m = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot \text{м}^2$, помещен в середину соленоида. Радиус соленоида $R = 2,0 \text{ см}$, длина соленоида $\ell = 80,0 \text{ см}$, число витков $N = 2500$.

Какой ток идет в обмотке соленоида, если наибольший вращающий момент, действующий на контур, $M = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$? Считать, что $R \gg r$, где r – радиус контура.

Решение. Вращающий момент, действующий на контур с током в магнитном поле, $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$ максимален, когда вектора магнитного момента и магнитной индукции взаимно перпендикулярны. Положение контура с током изображено на рисунке 7.8.

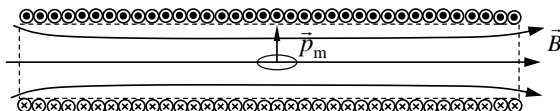


Рис. 7.8

По условию задачи радиус соленоида много меньше его длины, поэтому для нахождения магнитной индукции можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{цк}}.$$

Подробно применение теоремы для данного случая рассмотрено в задаче 6.12.

Магнитная индукция поля определяется соотношением

$$B_2 = \mu_0 In,$$

где $n = \frac{N}{\ell}$ — плотность намотки.

Максимальный вращательный момент

$$M = p_m B \sin \frac{\pi}{2} = p_m B = p_m \mu_0 In = p_m \mu_0 I \frac{N}{\ell}.$$

Выражаем силу тока в соленоиде

$$I = \frac{M\ell}{\mu_0 p_m N}.$$

Подставляем численные значения

$$I = \frac{M\ell}{\mu_0 p_m N} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2500} = 0,25 \text{ A}.$$

8. Сила Лоренца

Задача 8.1. Винтовая линия, по которой движется электрон в однородном магнитном поле, имеет диаметр $d = 80$ мм и шаг $h = 200$ мм (см. рис. 8.1). Магнитная индукция $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл.

Найдите скорость электрона.

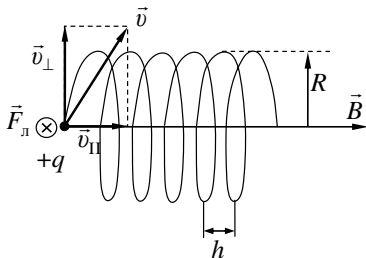


Рис. 8.1

Решение. Траектория заряда будет винтовой линией, если его скорость постоянна и направлена под некоторым углом к линиям магнитной индукции.

Чтобы это пояснить, представим скорость как сумму двух составляющих:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}.$$

Тогда сила Лоренца

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q[\vec{v}, \vec{B}] = q[\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}, \vec{B}] = q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}] + q[\vec{v}_{\parallel}, \vec{B}] = q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]$$

определяется только перпендикулярной составляющей скорости и будет приводить к изменению направления этой составляющей. Параллельная составляющая скорости изменяться не будет. Таким образом, возникнет движение по винтовой линии.

Найдем ускорение электрона, применяя второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Л}},$$

где a – нормальное ускорение, $a = \frac{v_{\perp}^2}{R}$;

R – радиус винтовой линии, $R = \frac{d}{2}$.

$$m \frac{v_{\perp}^2}{R} = qBv_{\perp}.$$

Выразим перпендикулярную составляющую скорости

$$v_{\perp} = \frac{qBR}{m} = \frac{qBd}{2m}.$$

Шаг винтовой линии – это расстояние, которое проходит заряд вдоль направления поля за время одного оборота:

$$h = v_{\parallel}T,$$

$$T = \frac{\pi d}{v_{\perp}},$$

$$v_{\parallel} = \frac{h}{T} = h \frac{v_{\perp}}{\pi d} = h \frac{qBd}{2\pi dm} = h \frac{qB}{2\pi m}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{qB}{2m} \sqrt{d^2 + \frac{h^2}{\pi^2}}.$$

Принимая массу электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг и заряд $|q| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, получим численное значение скорости

$$v = \frac{qB}{2m} \sqrt{d^2 + \frac{h^2}{\pi^2}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \sqrt{0,08^2 + \left(\frac{0,2}{\pi}\right)^2} = 4,5 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 8.2. Заряженная частица, двигаясь в магнитном поле по дуге окружности радиусом $R_1 = 2$ см, прошла через свинцовую пластину, расположенную на ее пути. Вследствие потери энергии радиус кривизны ее траектории изменился и стал равным $R_2 = 1$ см.

Определите относительное изменение энергии частицы.

Решение. На частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Траектория частицы будет дугой окружности постоянного радиуса, если вектор скорости частицы перпендикулярен вектору магнитной индукции поля (см. рис. 8.2).

Чтобы связать скорость движения частицы с радиусом траектории, применим второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Л}},$$

где a – нормальное ускорение, $a = \frac{v^2}{R}$.

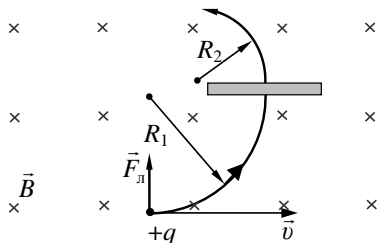


Рис. 8.2

Модуль силы Лоренца

$$F_{\text{Л}} = qBv \sin \frac{\pi}{2} = qBv.$$

Тогда

$$m \frac{v^2}{R} = qBv.$$

Выразим скорость

$$v = \frac{qBR}{m}.$$

При прохождении через свинцовую пластину уменьшилась скорость частицы, а следовательно, и радиус кривизны траектории.

Относительное изменение энергии

$$\frac{|\Delta W|}{W} = \frac{\left| \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \right|}{\frac{mv_1^2}{2}} = 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2.$$

Подставляя численные значения, получим

$$\frac{|\Delta W|}{W} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 0,75.$$

Задача 8.3. Для определения постоянной Холла германиевый образец прямоугольного сечения со сторонами a и b был помещен в однородное магнитное поле $B = 0,25$ Тл, линии индукции которого направлены перпендикулярно длине образца и стороне b его сечения.

При пропускании вдоль образца тока $I = 1,0$ мА между противоположными гранями возникла разность потенциалов $U_{AC} = 0,025$ В (см. рис. 8.3).

Найдите по данным опыта концентрацию свободных электронов и постоянную Холла, если $a = 0,20$ мм.

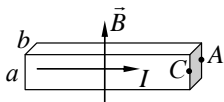


Рис. 8.3

Решение. На движущиеся в магнитном поле заряды действует сила Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]$ которая приводит к смещению таких зарядов.

При протекании по проводнику тока подвижными будут отрицательные заряды, они сместятся в направлении передней (см. рис. 8.3) грани образца. В результате смещения на противоположной поверхности образца останется нескомпенсированный положительный заряд. Разделение зарядов приведет к возникновению электрического поля, вектор напряженности которого направлен от задней грани образца к передней. Перераспределение зарядов прекратится, когда результирующая сила, действующая на движущийся заряд, станет равна нулю:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] = 0.$$

Вектора \vec{E} и $[\vec{v}, \vec{B}]$ направлены противоположно:

$$qE = qBv,$$

$$E = Bv.$$

Если считать электрическое поле внутри образца однородным, разность потенциалов между точками A и C

$$\varphi_A - \varphi_B = U_{AC} = Eb.$$

Скорость направленного движения зарядов связана с плотностью тока соотношением

$$j = qnv,$$

где n – концентрация носителей заряда.

Тогда возникающая разность потенциалов с учетом равенства

$$j = \frac{I}{S_{\perp}} = \frac{I}{ab}, \text{ равна}$$

$$U_{AC} = Eb = vBb = \frac{j}{qn} bB = \frac{I}{aqn} B.$$

Концентрация свободных электронов

$$n = \frac{j b B}{q U_{AC}} = \frac{I B}{q a U_{AC}}.$$

Экспериментальная формула, полученная Холлом, имеет вид

$$\Phi_A - \Phi_C = R j b B,$$

где R – постоянная Холла.

Из наших рассуждений следует, что

$$R = \frac{1}{q n}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$n = \frac{I B}{q a U_{AB}} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,025} = 3,1 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3},$$
$$R = \frac{1}{q n} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,1 \cdot 10^{20}} = 0,054 \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}.$$

Задача 8.4. Протон начинает движение в скрещенных электрическом и магнитном полях ($\vec{E} \perp \vec{B}$) без начальной скорости. Напряженность электрического поля E и индукция магнитного поля B заданы. Удельный заряд протона q/m .

1. Определите вид траектории.

2. Какую максимальную скорость приобретет протон?

3. На какое расстояние сместится протон в направлении вектора напряженности электрического поля в процессе движения?

Решение. Пусть магнитное поле направлено «на нас» а электрическое вверх. Оба поля будем считать однородными.

Вначале выясним, может ли в таком случае движущийся заряд вообще не замечать существования полей? В каком направлении и с какой скоростью он должен при этом двигаться?

Результирующая сила, действующая на заряд, должна равняться нулю:

$$q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] = 0.$$

Такое движение заряда называется дрейфом.

Скорость дрейфа должна быть направлена перпендикулярно векторам \vec{E} и \vec{B} , как показано на рисунке 8.4, и равняться

$$v_d = \frac{E}{B}.$$

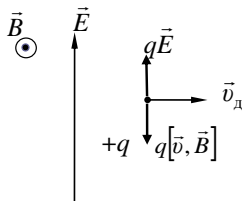


Рис. 8.4

Предположим теперь, что частица движется с некоторой скоростью \vec{v} , отличной от дрейфовой. Представим эту скорость как сумму двух векторов:

$$\vec{v} = \vec{v}_d + \vec{v}_0,$$

где \vec{v}_0 — имеет смысл относительной скорости частицы в системе координат, движущейся с дрейфовой скоростью:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] = q\vec{E} + q[\vec{v}_d + \vec{v}_0, \vec{B}] = q\vec{E} + q[\vec{v}_d, \vec{B}] + q[\vec{v}_0, \vec{B}].$$

Но

$$q\vec{E} + q[\vec{v}_d, \vec{B}] = 0.$$

Тогда

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}_0, \vec{B}].$$

Сила направлена перпендикулярно относительной скорости. Значит, относительная скорость может изменяться только по направлению.

По условию задачи протон начинает движение без начальной скорости.

В начальный момент времени

$$\vec{v} = \vec{v}_d + \vec{v}_0 = 0.$$

Тогда $\vec{v}_0 = -\vec{v}_d$ (см. рис. 8.5).

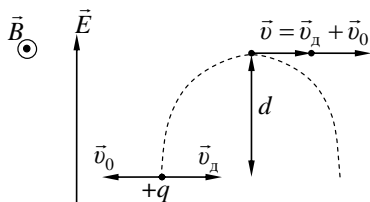


Рис. 8.5

Частица начнет ускоряться в направлении электрического поля. Как только у частицы появится скорость, на нее начнет действовать и магнитное поле. Траектория частицы будет криволинейной с переменным радиусом (частный случай циклоиды). При этом

величины дрейфовой и относительной скорости не будут изменяться, а угол между ними уменьшится от начального (π) до нуля. За это время вектор скорости частицы успеет развернуться перпендикулярно вектору напряженности электрического поля и процесс ускорения сменится процессом торможения.

Максимальная скорость, исходя из таких рассуждений:

$$v = v_d + v_0 = 2 \frac{E}{B}.$$

Максимальное расстояние, на которое частица успеет сместиться в направлении электрического поля, можно найти из условия сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = qU = qEd.$$

Откуда

$$d = \frac{mv^2}{2qE},$$

где

$$v = 2v_d = \frac{2E}{B}.$$

Тогда

$$d = \frac{m \cdot 4E^2}{2qEB^2} = \frac{2mE}{qB^2}.$$

9. Закон электромагнитной индукции

Задача 9.1. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому идет ток I , поступательно и прямолинейно движется металлический стержень длиной ℓ . Скорость стержня v направлена параллельно проводу с током. Угол между стержнем и проводом α . Расстояние от проводника с током до ближайшего конца стержня b .

Определите разность потенциалов между концами стержня.

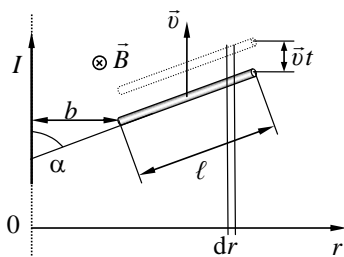


Рис. 9.1

Решение. Проводник с током создает вокруг себя магнитное поле. Стержень движется в этом поле так, что пересекает линии магнитной индукции. По закону электромагнитной индукции между концами стержня будет возникать разность потенциалов.

Решение задачи проведем в три этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля прямого тока, затем рассчитаем магнитный поток через поверхность, ограниченную двумя разделенными промежутком времени положениями стержня (пересеченную поверхность), и, наконец, разность потенциалов между концами стержня.

Для нахождения магнитной индукции поля прямого тока воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сст}}.$$

Подробно применение теоремы для данного случая рассмотрено в задаче 7.1.

Применив теорему, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где r – расстояние до прямого провода.

Рассчитаем магнитный поток через поверхность, пересеченную стержнем за промежуток времени t , площадь которой $S = vt \cdot \ell \sin \alpha$:

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Так как в пределах рассматриваемой поверхности S поле неоднородно, разобьем ее на элементарные участки dS , в пределах каждого из которых изменением магнитной индукции можно пренебречь. Т.к. магнитная индукция зависит от расстояния до проводника, площадка dS должна иметь бесконечно малый размер вдоль оси r : $dS = vt \cdot dr$.

Направление вектора $d\vec{S}$ выберем по вектору магнитной индукции проводника ($d\vec{S} \uparrow \vec{B}$), тогда поток будет положительным:

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} B dS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}) = \int_b^{b+\ell \sin \alpha} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} vt dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} vt \ln \frac{b + \ell \sin \alpha}{b}.$$

Применим закон Фарадея – Максвелла

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Разность потенциалов между концами стержня

$$\Delta\varphi = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln \frac{b + \ell \sin \alpha}{b}.$$

Чтобы выяснить, потенциал какого из концов стержня больше, определим направление силы Лоренца для произвольного заряда, движущегося вместе со стержнем. В нашем случае получим, что для положительных зарядов эта сила направлена к проводнику, а для отрицательных – от проводника. Следовательно, потенциал ближайшего к проводнику конца стержня больше.

Задача 9.2. В горизонтальной плоскости расположены проводящие шины, замкнутые на конденсатор емкостью C , и параллельный им прямой длинный провод (см. рис. 9.2). Расстояние от провода до шин x_1, x_2 . По проводу идет ток I . По шинам без трения и нарушения контакта скользит проводник с постоянной скоростью v .

Найдите заряд конденсатора. Какая из обкладок конденсатора заряжена положительно?

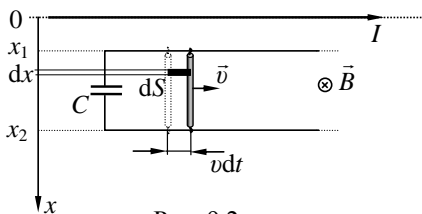


Рис. 9.2

Решение. Ток, текущий по проводу, создает вокруг себя магнитное поле. Проводник и рельсы, замкнутые на конденсатор, образуют контур. При движении проводника площадь этого контура увеличивается. По закону электромагнитной индукции в контуре будет возникать электродвижущая сила.

Решение задачи проведем в три этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля прямого тока, затем рассчитаем магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, и, наконец, напряжение на конденсаторе и его заряд.

Для нахождения магнитной индукции поля прямого тока воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сш}}.$$

Подробно применение теоремы для данного случая рассмотрено в задаче 7.1.

Применив теорему, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где r – расстояние до прямого провода.

Воспользовавшись заданной в задаче координатной осью (см. рис. 9.2), выражение можно переписать

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

Рассчитаем изменение магнитного потока за малый промежуток времени dt :

$$d\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

В пределах $S = vdt \cdot (x_2 - x_1)$ поле неоднородно. Разобьем поверхность на элементарные участки dS , в пределах каждого из которых изменением магнитной индукции можно пренебречь. Так

как магнитная индукция зависит от расстояния до проводника, площадка dS должна иметь бесконечно малый размер вдоль оси x : $dS = v dt \cdot dx$. Направление вектора $d\vec{S}$ выберем по вектору магнитной индукции поля проводника ($d\vec{S} \uparrow \vec{B}$), тогда поток будет положительным:

$$d\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} B dS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v \cdot dt \cdot dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v dt \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Применим закон Фарадея – Максвелла

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как мы рассматриваем установившееся движения переключки, ток в цепи конденсатора не течет и напряжение на конденсаторе равняется ЭДС:

$$\Delta\varphi = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Тогда заряд конденсатора

$$Q = C\Delta\varphi = C \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Отдельно определим знаки зарядов каждой из обкладок. Для этого применим правило Ленца. Поток через контур увеличивается, значит, индукционный ток должен этому препятствовать:

$$\vec{B}_{\text{инд}} \uparrow \downarrow \vec{B},$$

где $\vec{B}_{\text{инд}}$ – вектор магнитной индукции поля индукционного тока;

\vec{B} – вектор магнитной индукции поля прямого тока.

В любой точке поверхности, ограниченной контуром, $\vec{B}_{\text{инд}}$ направлен «на нас» (рис. 9.3), значит, индукционный ток течет по контуру против часовой стрелки и верхняя обкладка конденсатора зарядится положительно.

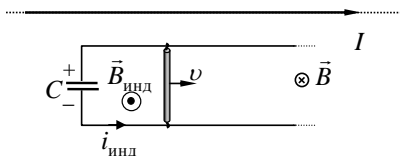


Рис. 9.3

Задача 9.3. В однородном магнитном поле, индукция которого B и линии индукции направлены вертикально, в горизонтальной плоскости расположены параллельные проводящие шины, замкнутые на сопротивление R . Расстояние между шинами равно ℓ . По шинам может свободно скользить проводник массой m . Проводнику сообщают начальную скорость u_0 .

1. Найдите закон изменения скорости проводника со временем.

2. Найдите количество теплоты, которое выделится на сопротивлении R за все время движения проводника.

Сопротивлением шин и проводника можно пренебречь.

Решение. Так как направления векторов \vec{B} и \vec{v}_0 не заданы, выберем их произвольно (см. рис. 9.4).

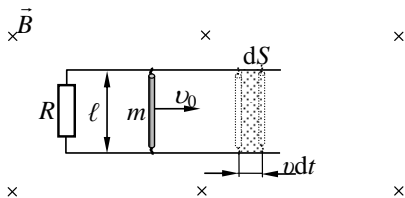


Рис. 9.4

Шины, замкнутые на сопротивление, и скользящий проводник образуют контур, площадь которого изменяется. Следовательно, изменяется и магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром. Так как магнитное поле однородно, изменение магнитного потока обусловлено увеличением площади

$$d\Phi = (\vec{B}d\vec{S}) = BdS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}).$$

Рассмотрим произвольный момент времени. Пусть скорость проводника в этот момент v , тогда

$$dS = vdt \cdot \ell.$$

Направление вектора $d\vec{S}$ выберем по вектору магнитной индукции поля проводника ($d\vec{S} \uparrow \vec{B}$), тогда поток будет положительным:

$$d\Phi = (\vec{B}d\vec{S}) = BdS = B \cdot vdt \cdot \ell.$$

При изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции (закон Фарадея – Максвелла):

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$|e| = Bv\ell.$$

Согласно закону Ома,

$$i_{\text{инд}} = \frac{e}{R} = \frac{Bv\ell}{R}.$$

Используя правило Ленца, определим направление тока. Поток через контур увеличивается, индукционный ток должен этому препятствовать:

$$\vec{B}_{\text{инд}} \uparrow \downarrow \vec{B},$$

где $\vec{B}_{\text{инд}}$ – вектор магнитной индукции поля индукционного тока.

В любой точке поверхности, ограниченной контуром, $\vec{B}_{\text{инд}}$ направлен «на нас» (см. рис. 9.5), значит, индукционный ток течет по контуру против часовой стрелки.

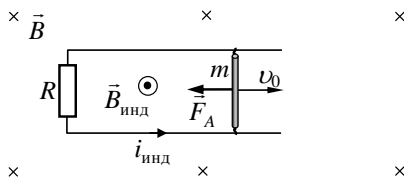


Рис. 9.5

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера

$$\vec{F}_A = i_{\text{инд}} [\vec{\ell}, \vec{B}],$$

где $\vec{\ell}$ – вектор, направленный по току.

Направление силы определим как результат векторного произведения (с конца вектора силы поворот от вектора $\vec{\ell}$ к вектору \vec{B} должен быть виден против часовой стрелки) или используя «правило левой руки» (четыре пальца по направлению тока в проводнике, линии магнитной индукции входят в ладонь, большой палец показывает направление силы).

Сила направлена в сторону, противоположную скорости проводника. Модуль силы с учетом полученного выражения для силы тока:

$$F_A = i_{\text{инд}} \ell B = \frac{Bv\ell}{R} \ell B = \frac{B^2 v \ell^2}{R}.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_A}{m}$$

или

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_A}{m}.$$

В проекции на ось, совпадающую со скоростью проводника:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F_A}{m}.$$

Подставляя выражение для силы Ампера, получим

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 v \ell^2}{mR}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2 \ell^2}{mR} dt, \\ \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= -\int_0^t \frac{B^2 \ell^2}{mR} dt, \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{B^2 \ell^2}{mR} t. \end{aligned}$$

Выразим скорость

$$v = v_0 \exp\left\{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t\right\}.$$

Из полученной зависимости следует, что проводник остановится, а значит, вся сообщенная изначально проводнику энергия перейдет в тепло:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Задача 9.4. Медный диск радиусом $R = 250$ мм вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр, делая $n = 20$ об/с. Диск находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,010$ Тл, силовые линии которого направлены так же, как вектор угловой скорости.

Найдите разность потенциалов между краем и центром диска.

Решение. Представим диск как совокупность радиально расположенных стержней. Каждый из стержней при движении пересекает линии магнитной индукции, следовательно, между его концами возникает разность потенциалов (ЭДС). Полярность разности потенциалов одинакова для всех стержней, которые соединены параллельно, значит, разность потенциалов между центром диска и его краем равна ЭДС, возникающей в одном стержне.

Для нахождения этой разности потенциалов рассчитаем пересеченный стержнем магнитный поток – поток через сектор площадью dS (см. рис. 9.6):

$$d\Phi = (\vec{B}d\vec{S}) = BdS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}).$$

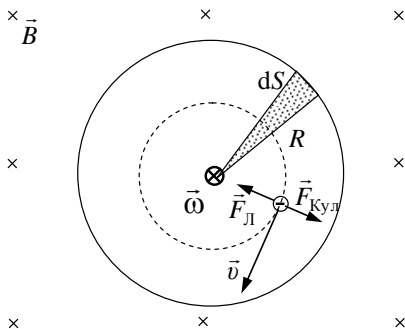


Рис. 9.6

Направление вектора $d\vec{S}$ выберем по вектору магнитной индукции поля проводника ($d\vec{S} \uparrow \vec{B}$), тогда поток будет положительным.

Площадь сектора выразим через угол поворота стержня

$$dS = \frac{\pi R^2 d\alpha}{2\pi} = \frac{R^2 d\alpha}{2},$$

который при постоянной угловой скорости равен

$$d\alpha = \omega dt.$$

Тогда

$$d\Phi = (\vec{B}d\vec{S}) = BdS = \frac{1}{2} B \cdot R^2 \omega dt.$$

Применим закон Фарадея – Максвелла

$$|e| = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{BR^2\omega}{2}.$$

Отдельно определим полярность возникающего напряжения. Для этого найдем направление силы Лоренца для произвольного заряда, входящего в состав нейтрального диска и движущегося вместе с ним. В нашем случае получим, что для положительных зарядов эта сила направлена от центра диска, а для отрицательных – к центру. Следовательно, потенциал края диска больше.

К решению задачи можно подойти и другим способом.

Рассмотрим электрон проводимости, движущийся вместе с диском. Считая его траекторией окружность, запишем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Кул}} + \vec{F}_{\text{Л}},$$

причем кулоновская сила возникает в результате перераспределения зарядов под действием силы Лоренца. Направления этих сил всегда противоположны и зависят от направления вращения в магнитном поле (см. рис. 9.6).

Перейдем к скалярной записи

$$\frac{mv^2}{r} = |qE - qBv|.$$

Отсюда можно найти напряженность электрического поля в произвольной точке проводника

$$E = Bv \mp \frac{mv^2}{|q|r} = \omega r B \mp \frac{m\omega^2 r}{|q|}.$$

Знак « \rightarrow » соответствует одинаковому направлению векторов магнитной индукции и угловой скорости, а « \leftarrow » противоположному. Так как по условию задачи направления совпадают, вектор напряженности в каждой точке будет направлен к центру диска. Тогда разность потенциалов между центром диска и его краем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^R E_r dr = - \left[\int_0^R \omega r B dr - \int_0^R \frac{m\omega^2}{|q|} r dr \right] = - \frac{\omega R^2 B}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{|q|}.$$

Сравнивая с ответом, полученным первым способом, видим, что разность потенциалов в нашем случае меньше, чем ЭДС на величину $\frac{m\omega^2 R^2}{|q|}$, в которую входит отношение массы электрона к его заряду.

$$\frac{m}{|q|} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 5.7 \cdot 10^{-12} \text{ кг/Кл, поэтому вторым слагаемым в}$$

подавляющем большинстве случаев можно пренебречь.

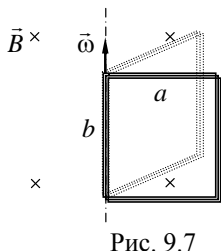


Рис. 9.7

Задача 9.5. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,020$ Тл, находится плоская прямоугольная рамка, со сторонами $a = 10$ см, $b = 20$ см. Рамка вращается вокруг оси, перпендикулярной линиям индукции и совпадающей с одной из длинных сторон рамки, с угловой скоростью $\omega = 314$ рад/с (см. рис. 9.7). Обмотка рамки состоит из $N = 5$ витков.

1. Найдите максимальное значение ЭДС индукции, возникающей в рамке.

2. Постройте график зависимости ЭДС от угла α между нормалью к плоскости рамки и вектором индукции.

3. Что изменится, если ось вращения будет лежать в плоскости рамки и проходить через ее середину?

Решение. Согласно закону электромагнитной индукции при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную рамкой, в каждом ее витке будет возникать ЭДС:

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Результирующая ЭДС:

$$e = \sum e_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где Ψ – потокосцепление.

Магнитный поток по определению:

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Для случая однородного поля:

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{S}) = BS \cos(\vec{B} \wedge \vec{S}).$$

Здесь $S = ab$, а угол между векторами изменяется по закону

$$\alpha = (\vec{B} \wedge \vec{S}) = \omega t.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi &= Bab \cos \omega t, \\ \Psi &= NBab \cos \omega t, \\ e &= -\frac{d\Psi}{dt} = NBab\omega \cdot \sin \omega t.\end{aligned}$$

ЭДС в рамке изменяется по гармоническому закону и максимальное (амплитудное) значение

$$e_{\max} = NBab\omega.$$

График зависимости ЭДС от угла α между нормалью к плоскости рамки и вектором индукции приведен на рисунке 9.8.

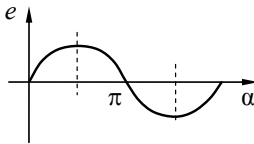


Рис. 9.8

При перемещении оси вращения параллельно самой себе в центр рамки в наших рассуждениях ничего не изменится, значит, и ответ задачи будет тот же.

Задача 9.6. В центре кругового витка диаметром d , по которому идет ток I , расположен маленький круговой контур диаметром d_0 ($d_0 \ll d$) и сопротивлением R (см. рис. 9.9). Контур поворачивают вокруг его диаметра, лежащего в плоскости большого витка, на угол 90° .

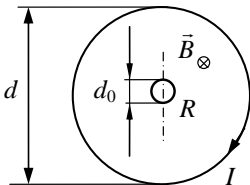


Рис. 9.9

Какой заряд пройдет при этом по контуру?

Решение. Круговой виток с током создает неоднородное магнитное поле. Методом суперпозиции легко рассчитать магнитную индукцию \vec{B}_0 в центре кругового тока. Размер контура d_0 по условию мал ($d_0 \ll d$), тогда в каждой точке поверхности, ограниченной контуром $\vec{B} \approx \vec{B}_0$.

При повороте контура в магнитном поле по закону электромагнитной индукции возникает электродвижущая сила, и, следовательно, по контуру потечет ток.

Согласно закону электромагнитной индукции заряд, проходящий через поперечное сечение проводника, прямо пропорционален изменению магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, и обратно пропорционален сопротивлению контура (формулировка Фарадея):

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Решение задачи разобьем на три этапа: вначале найдем магнитную индукцию поля кругового витка с током, затем рассчитаем начальный и конечный магнитный поток через поверхность, ограниченную малым контуром, и, наконец, заряд, прошедший по этому контуру.

По закону Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

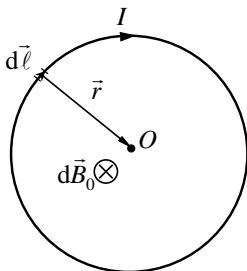


Рис. 9.10

Определим направление вектора $d\vec{B}_0$. Для этого проведем вектор \vec{r} от произвольного малого элемента тока $d\vec{\ell}$ в центр окружности и найдем направление векторного произведения $[d\vec{\ell}, \vec{r}]$. Получим вектор, направленный перпендикулярно плоскости рисунка «от нас» (рис. 9.10).

Найдем модуль $d\vec{B}_0$, для этого раскроем векторное произведение

$$dB_0 = \frac{\mu_0 I d\ell \cdot r \cdot \sin\left(\widehat{d\vec{\ell} \vec{r}}\right)}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I d\ell \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2}.$$

Согласно принципу суперпозиции

$$\vec{B}_0 = \int_{(\ell)} d\vec{B}_0.$$

Так как направления всех векторов $d\vec{B}_0$ совпадают, то

$$B_0 = \int_{(\ell)} dB_0 = \int_{(\ell)} \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}.$$

Магнитный поток по определению:

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Считая, что в пределах малого контура $\vec{B} \approx \vec{B}_0$, получим

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{S}) = BS \cos(\vec{B} \wedge \vec{S}).$$

Начальный магнитный поток определяется исходным положением контура. По условию, малый контур лежит в плоскости большого, направление нормали к поверхности, ограниченной малым контуром, можно выбрать сонаправленным с вектором магнитной индукции ($\vec{S} \uparrow \uparrow \vec{B}$). Тогда магнитный поток

$$\Phi_1 = BS \cos(0) = BS = \frac{\mu_0 I \pi d_0^2}{\pi d \cdot 4} = \frac{\mu_0 I d_0^2}{4d}.$$

После поворота на угол 90° ($\vec{S} \perp \vec{B}$)

$$\Phi_2 = BS \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Модуль заряда, прошедшего по контуру:

$$q = \frac{|\Delta\Phi|}{R} = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{\mu_0 I d_0^2}{4dR}.$$

Учитывая, что магнитный поток уменьшается и, используя правило Ленца, можно определить направление движения заряда.

10. Индуктивность. Энергия магнитного поля

Задача 10.1. Прямой соленоид длиной ℓ и диаметром d содержит n витков на единицу длины.

Выведите формулу для расчета его индуктивности, считая $\ell \gg d$.

Решение. Индуктивностью соленоида (катушки) называется коэффициент пропорциональности между потокосцеплением и током в соленоиде

$$L = \frac{\Psi}{I}.$$

Предположим, что по соленоиду течет ток I . Определим последовательно магнитную индукцию поля внутри соленоида, магнитный поток через поперечное сечение соленоида и потокосцепление. Для определения индуктивности поделим потокосцепление на силу тока.

По условию задачи диаметр витков соленоида много меньше его длины, поэтому для расчета магнитной индукции внутри соленоида можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сц}}.$$

Выберем прямоугольный контур, одна сторона которого совпадает с линией магнитной индукции внутри соленоида, а параллельная ей лежит вне соленоида (см. рис. 10.1).

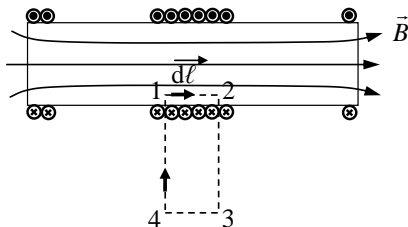


Рис. 10.1

Зададим направление обхода так, чтобы внутри соленоида двигаться в направлении линии магнитной индукции. Рассчитаем циркуляцию

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_1^2 (\vec{B}, d\vec{\ell}) + \int_2^3 (\vec{B}, d\vec{\ell}) + \int_3^4 (\vec{B}, d\vec{\ell}) + \int_4^1 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_1^2 (\vec{B}, d\vec{\ell}).$$

$$\int_2^3 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_2^3 B \cdot d\ell \cos(\vec{B} \wedge d\vec{\ell}) = 0, \text{ т.к. на этом участке вектора}$$

\vec{B} и $d\vec{\ell}$ внутри соленоида взаимно перпендикулярны, а вне соленоида поле отсутствует.

$$\int_3^4 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = 0, \text{ т.к. вне соленоида магнитное поле отсутствует.}$$

$$\int_4^1 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_4^1 B \cdot d\ell \cos(\vec{B} \wedge d\vec{\ell}) = 0, \text{ т.к. на этом участке вектора}$$

\vec{B} и $d\vec{\ell}$ внутри соленоида взаимно перпендикулярны, а вне соленоида поле отсутствует.

Учитывая, что на участке 1 – 2 векторы \vec{B} и $d\vec{\ell}$ сонаправлены и магнитная индукция не изменяется, получим

$$\int_1^2 (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \int_1^2 B d\ell = B \ell_{12},$$

где ℓ_{12} – длина отрезка 1 – 2.

Рассчитаем сцепленный с контуром ток. Проводник с током пересекает поверхность, ограниченную контуром столько раз, сколько витков умещается на отрезке 1 – 2.

$$N_{12} = \ell_{12} n,$$

где n – число витков на единице длины (плотность катушки).

$$I_{\text{сц}} = IN_{12} = I \ell_{12} n.$$

Приравнявая циркуляцию вектора магнитной индукции и сцепленный ток, домноженный на магнитную постоянную, получаем

$$B \ell_{12} = \mu_0 I \ell_{12} n,$$

$$B = \mu_0 I n.$$

Магнитная индукция не зависит от положения участка 1 – 2, на этом основании делаем вывод об однородности поля внутри соленоида при удалении от его краев.

Магнитный поток по определению:

$$\Phi = \int_{(s)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Для случая однородного поля и при выборе направления вектора нормали к площадке поперечного сечения соленоида, сонаправленной с вектором магнитной индукции, получим

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{S}) = BS \cos(\vec{B} \wedge \vec{S}) = BS.$$

Здесь $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Потокосцепление

$$\Psi = N\Phi = n\ell\Phi = n\ell \cdot \mu_0 In \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \ell \mu_0 In^2 \frac{\pi d^2}{4}.$$

Индуктивность

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \ell n^2 \frac{\pi d^2}{4}.$$

Индуктивность определяется геометрической формой и размерами системы, а также магнитными характеристиками среды и не зависит от силы тока.

Задача 10.2. Прямой соленоид, содержащий n витков на единицу длины, обтекается током I . Длина соленоида ℓ , диаметр d ($\ell \gg d$).

1. Найдите объемную плотность энергии магнитного поля внутри соленоида.

2. Определите энергию поля соленоида, считая поле однородным и локализованным внутри соленоида.

Решение. Для нахождения объемной плотности энергии магнитного поля внутри соленоида необходимо определить магнитную индукцию.

Подробно нахождение вектора \vec{B} для данного случая рассмотрено в предыдущей задаче, а также в задаче 6.12. Поле внутри длинного соленоида однородно, и модуль магнитной индукции определяется соотношением

$$B = \mu_0 In.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

где μ – магнитная проницаемость материала сердечника. Так как в условии задачи этот материал не указан, будем считать $\mu = 1$ (магнитная проницаемость заметно отличается от единицы только у ферромагнетиков).

Тогда

$$w = \frac{\mu_0 I^2 n^2}{2}.$$

Энергия поля

$$W = \int_{(V)} w dV.$$

Считая поле однородным, получим

$$W = wV = \frac{\mu_0 I^2 n^2}{8} \pi d^2 \ell.$$

Задача 10.3. Два длинных проводника круглого сечения, радиусом $R = 2,0$ мм каждый, оси которых расположены параллельно друг другу на расстоянии $a = 50$ мм, образуют двухпроводную систему, обтекаемую током $I = 10$ А. Пренебрегая полем внутри металла:

1. Определите магнитный поток, приходящийся на единицу длины системы.

2. Найдите индуктивность единицы длины двухпроводной линии.

3. Определите энергию поля, приходящуюся на единицу длины системы.

Решение. Двухпроводная линия представляет собой замкнутый контур, в общем случае содержащий удаленный источник и нагрузку (см. рис. 10.2).

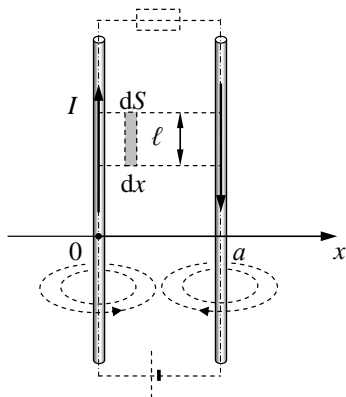


Рис. 10.2

Протекание тока приводит к возникновению магнитного поля во всем окружающем пространстве. Рассчитаем магнитный поток через поверхность, ограниченную проводником с током, приходящийся на единицу длины двухпроводной линии. Для этого необходимо предварительно определить магнитную индукцию для каждого из двух длинных проводников, затем, используя принцип суперпозиции, найти результирующее поле в произвольной точке с координатой $R < x < a - R$.

Для расчета магнитной индукции поля длинного прямого провода с током воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 I_{\text{сш}}.$$

Выберем контур совпадающим с линией магнитной индукции произвольного радиуса $r > R$. Разобьем контур на малые элементы $d\vec{\ell}$, сонаправленные с вектором магнитной индукции в каждой точке контура (см. рис. 10.3).

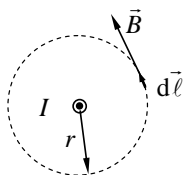


Рис. 10.3

Рассчитаем циркуляцию. Для этого раскрываем скалярное произведение

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}, d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} B d\ell.$$

Выносим модуль B за знак интеграла, так как в каждой точке контура значение магнитной индукции одно и то же:

$$\oint_{(\ell)} B d\ell = B \oint_{(\ell)} d\ell = B \cdot 2\pi r.$$

Найдем сцепленный с контуром ток. В данном случае $I_{\text{сш}} = I$.

Приравняем циркуляцию и сцепленный ток, домноженный на магнитную постоянную, и выражаем искомую магнитную индукцию:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Воспользуемся полученной формулой для определения модуля магнитной индукции в точках, лежащих между проводниками, переписав ее для каждого из проводников в одной и той же системе координат (см. рис. 10.2):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}.$$

Направление векторов для точек с координатами $R < x < a - R$ одинаковое («от нас»), используя принцип суперпозиции, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right).$$

Рассчитаем магнитный поток через поверхность S , ограниченную двумя проводами и имеющую некоторый размер ℓ вдоль провода.

По определению

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Так как в пределах поверхности S поле неоднородно, разобьем поверхность на элементарные участки dS , в пределах каждого из которых изменением магнитной индукции можно пренебречь. Т.к. магнитная индукция зависит от расстояния до проводника, площадка dS должна иметь бесконечно малый размер вдоль оси x : $dS = \ell \cdot dx$.

Направление вектора $d\vec{S}$ выберем по вектору магнитной индукции проводника ($d\vec{S} \uparrow \vec{B}$), тогда поток будет положительным:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} B dS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}) = \int_R^{a-R} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) \ell dx = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ell \left(\ln \frac{a-R}{R} + \ln \frac{a-R}{R} \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ell \ln \frac{a-R}{R}. \end{aligned}$$

Магнитный поток на единицу длины

$$\frac{\Phi}{\ell} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{a-R}{R}.$$

Индуктивность по определению

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Индуктивность единицы длины

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\Phi}{I\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a-R}{R}.$$

Энергия поля может быть определена по формуле

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Тогда энергия, приходящаяся на единицу длины:

$$\frac{W}{\ell} = \frac{LI^2}{2\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{a-R}{R}.$$

Подставив численные значения, получим

$$\frac{\Phi}{\ell} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{a-R}{R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{\pi} \ln \frac{50-2}{2} = 1,27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вб}}{\text{м}},$$

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\Phi}{I\ell} = 1,27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}},$$

$$\frac{W}{\ell} = \frac{LI^2}{2\ell} = 0,635 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{м}}.$$

Задача 10.4. Длинный коаксиальный кабель обтекается током $I = 0,5 \text{ А}$. Радиус внутреннего провода (жилы) $R_1 = 1 \text{ мм}$, радиус внешней оболочки $R_2 = 5 \text{ мм}$.

1. Пренебрегая полем внутри металла, рассчитайте магнитный поток и энергию поля, приходящиеся на единицу длины системы.

2. Учитывая поле внутри жилы, рассчитайте полную энергию системы на единицу длины.

3. Найдите индуктивность единицы длины коаксиального кабеля, используя выражение для энергии, полученное в п. 2.

Решение. Расчет магнитной индукции поля, создаваемого током при протекании по коаксиальному кабелю, подробно рассмотрен в задаче 6.11. Приведем только конечные формулы и график (см. рис. 10.4):

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}, \quad \text{при } r < R_1;$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{при } R_1 < r < R_2;$$

$$B(r) = 0, \quad \text{при } r > R_2.$$

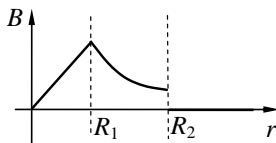


Рис. 10.4

Рассчитаем магнитный поток через поверхность S , полученную

сечением коаксиального кабеля произвольной радиальной плоскостью и имеющую вдоль кабеля некоторую длину ℓ . Если пренебречь полем внутри жилы, то

$$S = (R_2 - R_1)\ell,$$

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Так как в пределах поверхности S поле неоднородно, разобьем ее на элементарные участки dS , в пределах каждого из которых изменением магнитной индукции можно пренебречь. Т.к. магнитная индукция зависит от расстояния до оси системы, площадка dS должна иметь бесконечно малый размер вдоль оси r : $dS = \ell \cdot dr$.

Направление вектора $d\vec{S}$ выберем по вектору магнитной индукции проводника ($d\vec{S} \uparrow \vec{B}$), тогда поток будет положительным:

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} B dS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ell \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Магнитный поток, приходящийся на единицу длины системы:

$$\frac{\Phi}{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Объемная плотность энергии связана с магнитной индукцией соотношением

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Тогда

$$w(r) = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4}, \text{ при } r < R_1;$$

$$w(r) = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, \text{ при } R_1 < r < R_2.$$

Энергия магнитного поля

$$W = \int_{(V)} w dV,$$

где dV – область пространства, в пределах которой изменением объемной плотности энергии (т.е. магнитной индукции) можно пренебречь. При осевой симметрии токов, создающих магнитное поле, все точки области dV должны быть равноудалены от оси системы. Этому условию удовлетворяет тонкостенный цилиндр с

бесконечно малой толщиной стенок dr , коаксиальным проводникам с током.

Объем такого цилиндра

$$dV = \ell \cdot 2\pi r \cdot dr,$$

где ℓ – высота цилиндра.

Рассчитаем энергию

$$\begin{aligned} W &= \int_{(V)} w dV = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4} \ell 2\pi r dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \ell 2\pi r dr = \\ &= \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \left(\int_0^{R_1} \frac{r^3}{R_1^4} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr \right) = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right). \end{aligned}$$

Энергия, приходящаяся на единицу длины системы:

$$\frac{W}{\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Энергия поля связана с индуктивностью соотношением

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Тогда индуктивность единицы длины

$$\frac{L}{\ell} = \frac{2W}{I^2 \ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

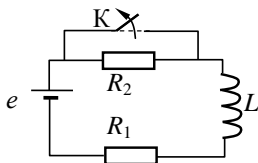


Рис. 10.5

Задача 10.5. В цепь, состоящую из источника постоянной ЭДС e , длинной катушки сечением S , длиной ℓ , с числом витков N и резистора сопротивлением R_1 , быстро подключают добавочное сопротивление R_2 , размыкая ключ K (см. рис. 10.5).

Найдите закон изменения тока в цепи со временем.

Решение. Решение задачи разобьем на два этапа: вначале найдем индуктивность катушки, затем рассмотрим происходящий при размыкании ключа переходной процесс.

Вывод формулы для расчета индуктивности катушки (прямого длинного соленоида) подробно рассмотрен в задаче 10.1, поэтому

приведем только конечную формулу

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}.$$

Ток в цепи источника до размыкания ключа определяется из закона Ома. Если активным сопротивлением катушки можно пренебречь, то

$$I_0 = \frac{e}{R_1},$$

так как резистор R_2 замкнут.

При размыкании ключа сопротивление контура увеличивается, следовательно, должен уменьшаться ток через катушку индуктивности. При любом изменении тока возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая этому изменению.

Закон Ома для данного случая принимает вид

$$I(R_1 + R_2) = e - L \frac{dI}{dt}.$$

Преобразуем к виду, удобному для интегрирования:

$$\frac{dI}{I - e/(R_1 + R_2)} = -\frac{R_1 + R_2}{L} dt.$$

Проинтегрируем левую и правую часть. Нижний предел интегрирования соответствует начальному моменту времени $t = 0$, когда ток в цепи I_0 . В качестве верхнего предела выберем произвольный момент времени t , когда ток в цепи I .

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I - e/(R_1 + R_2)} = -\int_0^t \frac{R_1 + R_2}{L} dt,$$
$$\ln(I - e/(R_1 + R_2)) \Big|_{I_0}^I = -\frac{R_1 + R_2}{L} t,$$
$$\ln \frac{I - e/(R_1 + R_2)}{I_0 - e/(R_1 + R_2)} = -\frac{R_1 + R_2}{L} t.$$

Выразим силу тока

$$I = \frac{e}{R_1 + R_2} + \left(I_0 - \frac{e}{R_1 + R_2} \right) \exp \left\{ -\frac{R_1 + R_2}{L} t \right\}.$$

Подставим I_0 , получим

$$I = \frac{e}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \exp \left\{ -\frac{R_1 + R_2}{L} t \right\} \right).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М.* Сборник задач по физике с решениями для втузов. – М. : ООО Издательский дом «Оникс 21 век»; ООО Издательство «Мир и образование», 2003. – 368 с.
2. *Электричество и магнетизм.* Сборник задач: учебное пособие / И.В. Авилова, О.В. Бирюкова, Б.В. Ермаков, И.В. Корецкая; под ред. Б.В. Ермакова. – М. : Издательство МЭИ, 2013. – 104 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
ЭЛЕКТРОСТАТИКА	4
1 Принцип суперпозиции	4
2 Теорема Остроградского – Гаусса для вакуума	30
3 Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в среде	54
4 Электрическая емкость. Энергия электростатического поля	86
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ	104
5 Постоянный ток	104
6 Магнитное поле тока в вакууме. Закон Био – Савара – Лапласа	107
Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции	121
7 Сила Ампера. Работа силы Ампера	134
8 Сила Лоренца	145
9 Закон электромагнитной индукции	152
10 Индуктивность. Энергия магнитного поля	165
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	176

*Ольга Витальевна БИРЮКОВА,
Борис Владимирович ЕРМАКОВ,
Ирина Валерьевна КОРЕЦКАЯ*

ФИЗИКА.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие

Под редакцией Б. В. Ермакова

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *С. В. Макаров*
Корректор *С. В. Николаева*
Выпускающий *Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А.
Тел.: (812) 412-92-72, 336-25-09.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 28.05.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108¹/₃₂.
Печать офсетная. Усл. п. л. 9,45. Тираж 100 экз.
Заказ № 373-18.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.