

И. А. Соловьев, В. В. Шевелев
А. В. Червяков, А. Ю. Репин

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Интегрирование функций одной переменной
Функции многих переменных
Ряды



И. А. СОЛОВЬЕВ, В. В. ШЕВЕЛЕВ,
А. В. ЧЕРВЯКОВ, А. Ю. РЕПИН

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

■
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

■
ФУНКЦИЙ МНОГИХ
ПЕРЕМЕННЫХ

■
РЯДЫ
■

Учебное пособие

*РЕКОМЕНДОВАНО Научно-методическим советом
по математике Министерства образования и науки
РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по направлениям: 510000 — «Естествен-
ные науки и математика», 550000 — «Технические
науки», 540000 — «Педагогические науки»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2009

Соловьев И. А., Шевелев В. В.,

Червяков А. В., Репин А. Ю.

С 60 Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Интегрирование функций одной переменной, функции многих переменных, ряды: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 288 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0819-1

Учебное пособие посвящено практическому освоению теоретического материала по следующим разделам высшей математики: интегрирование функций одной переменной с геометрическими и физическими приложениями, дифференциальное исчисление функций многих переменных, числовые и степенные ряды, а также ряды Фурье.

Предлагается последовательное изучение методов решения основных задач по каждому разделу. Пособие содержит расчетно-графические задания по всем рассмотренным темам. В разделе «Определенный интеграл» помещено большое количество задач геометрического и физического содержания. Имеется большое количество задач для самостоятельного решения, которые снабжены ответами.

В пособии излагаются основы высшей математики, поэтому оно может быть рекомендовано для студентов инженерных специальностей, университетов, академий, технических, экономических, финансовых и экологических вузов как очной, так и заочной или дистанционной форм обучения. Расчетно-графические задания могут использоваться преподавателями в качестве заданий для самостоятельной внеаудиторной работы.

ББК 22.1я73

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2009

© И. А. Соловьев, В. В. Шевелев,
А. В. Червяков, А. Ю. Репин, 2009© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с Государственным образовательным стандартом учебными планами всех математических, технических, экономических и многих других специальностей предусмотрено изучение основ высшей математики, которые затем используются в прикладных дисциплинах. Предлагаемое учебное пособие предназначено в первую очередь для студентов инженерных специальностей, оно может быть полезно и для студентов экономических и других специальностей как очной, так и заочной и дистанционной форм обучения.

В настоящем издании осуществлена попытка соединить воедино теоретические сведения, подробные решения типовых задач, а также задач повышенной трудности. Кроме того, приведены контрольные расчетно-графические задания, предназначенные для самостоятельной внеаудиторной работы. Среди рассмотренных задач имеются как традиционные, которые необходимы для начального освоения теоретического материала, так и новые задачи, ранее не входившие в существующие сборники задач.

Глава 1 посвящена основным методам интегрирования функций одной переменной. Подробно рассмотрены методы замены переменной, интегрирования по частям, интегрирования рациональных, тригонометрических, а также некоторых иррациональных функций.

Глава 2 посвящена определенному интегрированию по Риману. Она снабжена большим числом задач геометрического характера, также приводится множество задач фи-

зического содержания: из механики, гидростатики и термодинамики, электротехники.

В главе 3 рассматриваются вопросы дифференцирования функций многих переменных. Подробно представлены материалы, связанные с частными производными и дифференциалами, дифференцированием по направлению, рассмотрены экстремальные задачи для функций нескольких переменных.

Глава 4 содержит материалы по числовым и функциональным рядам. При рассмотрении числовых рядов особое внимание уделено расширенным признакам сходимости Коши и Даламбера и эффективности их применения. Подробно рассмотрены вопросы, связанные со степенными рядами в действительной области. В рядах Фурье вводится понятие точечной сходимости и сходимости в среднем. Указываются свойства функций, обеспечивающие ту или иную сходимость.

Учебное пособие завершается разделом, где представлены расчетно-графические задания, предназначенные для самостоятельной работы по всем разделам. Каждое задание содержит 30 задач. Также даны ответы к задачам для самостоятельного решения.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1.1.1.

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если в любой точке x интервала $(a; b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Замечание. Аналогично определяется первообразная на интервалах $(-\infty; \infty)$, $(-\infty; a)$, $(a; \infty)$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C — некоторая постоянная. Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x) dx$. Выражение $f(x) dx$ называется подынтегральным выражением, а функция $f(x)$ — подынтегральной функцией.

Если $F(x)$ — одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.1)$$

Для всякой непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ существует на этом интервале первообразная функция, а значит и неопределенный интеграл.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием функции $f(x)$.

1.1.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x). \quad (1.2)$$

$$d \int f(x) dx = f(x) dx. \quad (1.3)$$

$$\int df(x) = f(x) + C. \quad (1.4)$$

$$\int (u + v + w) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx. \quad (1.5)$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ где } a = \text{const}. \quad (1.6)$$

Замечание. Равенства (1.5) и (1.6) означают равенство множеств первообразных функций в левой и правой части. Для их доказательства достаточно показать, что производные левой и правой частей равны.

Замечание. В приведенных формулах

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Замечание. В отличие от операции дифференцирования элементарных функций, не выводящей из класса элементарных функций, операция интегрирования элементарных функций не всегда приводит к функциям, принадлежащим классу элементарных функций. Примерами таких интегралов могут быть следующие:

$$\int e^{-x^2} dx - \text{интеграл Пуассона (интеграл ошибок),}$$

$$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx - \text{интегралы Френеля,}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} - \text{интегральный логарифм,}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx - \text{интегральный косинус } (x \neq 0),$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx - \text{интегральный синус } (x \neq 0).$$

Таблица основных неопределенных интегралов

- 1) $\int 0 \, dx = C$
- 2) $\int 1 \, dx = \int dx = x + C$
- 3) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- 4) $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$
- 5) $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$
- 6) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
- 7) $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$
- 8) $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
- 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
- 10) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
- 11) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- 12) $\int a^{nx} \, dx = \frac{1}{n} \frac{a^{nx}}{\ln a} + C$
- 13) $\int e^x \, dx = e^x + C$
- 14) $\int e^{nx} \, dx = \frac{1}{n} e^{nx} + C$
- 15) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- 16) $\int \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx + C$
- 17) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- 18) $\int \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx + C$
- 19) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- 20) $\int \frac{dx}{\sin^2 nx} = -\frac{1}{n} \operatorname{ctg} nx + C$
- 21) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- 22) $\int \frac{dx}{\cos^2 nx} = \frac{1}{n} \operatorname{tg} nx + C$
- 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- 24) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
- 25) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-n^2x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{nx}{a} + C$
- 26) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
- 27) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
- 28) $\int \frac{dx}{a^2+n^2x^2} = \frac{1}{na} \operatorname{arctg} \frac{nx}{a} + C$
- 29) $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$
- 30) $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$
- 31) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
- 32) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
- 33) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \lambda}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm \lambda} \right| + C$
- 34) $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$
- 35) $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C$
- 36) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
- 37) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$
- 38) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

1.2.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.2.1.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В основе метода замены переменной или подстановки лежит следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $g(t)$, $t = \varphi(x)$, $\varphi'(x)$ непрерывны. Тогда

$$\int g(t) dt = G(t) + C \text{ и} \quad (1.7)$$

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C. \quad (1.8)$$

Замечание. В этой теореме предполагается непрерывность функции $g(t)$ на некотором промежутке T числовой оси, являющемся множеством всех значений функции $t = \varphi(x)$; функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны на некотором промежутке X числовой оси.

Указанная теорема применяется в случае, когда при нахождении $\int f(x) dx$ удается выбрать в качестве новой переменной такую дифференцируемую функцию $t = \varphi(x)$, что подынтегральное выражение $\int f(x) dx$, представленное в терминах новой переменной t

$$f(x) dx = g(\varphi(x))\varphi'(x) dx = g(\varphi(x))d\varphi(x) = g(t) dt,$$

приводит к легко находимому неопределенному интегралу $\int g(t) dt$. Этот метод часто называют подведением функции $t = \varphi(x)$ под знак дифференциала.

Часто подстановка применяется следующим образом. В подынтегральное выражение $\int f(x) dx$ вместо x подставляется непрерывно дифференцируемая функция $x = \varphi(t)$, имеющая обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда

$$f(x) dx = f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \triangleq g(t) dt$$

и если $\int g(t) dt = G(t) + C$, то $\int f(x) dx = \int g(t) dt = G(\varphi^{-1}(x)) + C$. Коротко это можно записать равенством

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) называется формулой замены переменной. После интегрирования в правой части необходимо вместо переменной t подставить ее выражение через переменную x , то есть $t = \varphi^{-1}(x)$. Поясним метод замены переменной на примерах.

Пример 1.1. Найти интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \sin(7x+3) dx, & \text{б) } \int \frac{dx}{x+5}, & \text{в) } \int (3x+5)^{99} dx, \\ \text{г) } \int e^{x^3} x^2 dx, & \text{д) } \int \sin^3 x \cos x dx. \end{array}$$

Решение. а) Здесь производится замена $t = 7x + 3$, так как в этом случае неопределенный интеграл приводится к табличному интегралу от синуса

$$t = 7x + 3 \Rightarrow dt = d(7x + 3) = (7x + 3)' dx = 7 dx, \text{ т. е.}$$

$$dt = 7 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{7} dt.$$

С учетом выбранной подстановки получим

$$\int \sin(7x+3) dx = \frac{1}{7} \int \sin t dt = -\frac{1}{7} \cos t + C = -\frac{1}{7} \cos(7x+3) + C.$$

б) В этом примере естественна подстановка $t = x + 5$, тогда

$$dt = d(x + 5) = (x + 5)' dx = dx \Rightarrow dt = dx.$$

В результате

$$\int \frac{dx}{(x+5)} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x+5| + C.$$

в) Данный неопределенный интеграл легко находится подстановкой $t = 3x + 5$. Очевидно, $dt = 3 dx$ и

$$\int (3x+5)^{99} dx = \frac{1}{3} \int t^{99} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{100}}{100} + C = \frac{(3x+5)^{100}}{300} + C.$$

г) В данном случае приводит к цели замена переменной $x = t^3$. Тогда

$$dt = dx^3 = (x^3)' dx = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dt.$$

С учетом данных результатов

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Этот же интеграл можно найти непосредственным подведением x^2 под знак дифференциала, учитывая что по свойству (1.3) $d \int f(x) dx = f(x) dx$. Выражение $x^2 dx$ можно переписать в виде

$$x^2 dx = d \int x^2 dx = d \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} dx^3.$$

Тогда рассматриваемый интеграл можно переписать следующим образом: $\int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3$. Если теперь обозначить $u = x^3$, то получим в итоге

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Замечание. Формула (1.9) отражает свойство инвариантности формулы интегрирования: формулы интегрирования сохраняют свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее.

д) Легко заметить, что $\cos x dx = d \sin x$. Тогда

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d \sin x.$$

Если теперь обозначить $\sin x = t$, то получим

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

В общем случае преобразование подынтегрального выражения к новой переменной содержит два момента:

1) преобразование подынтегральной функции в терминах новой переменной;

2) выражение дифференциала старой переменной через дифференциал новой переменной.

Этот, последний этап, осуществляется формальным нахождением дифференциала правой и левой частей равенств

$x = \varphi(t)$ или $t = \varphi^{-1}(x)$, связывающих старую и новую переменные:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t) dt \text{ или } dt = d\varphi^{-1}(x) = (\varphi^{-1}(x))' dx.$$

Пример 1.2. Найти $\int \frac{x dx}{1+x^2}$.

Решение. Этот интеграл можно было бы найти, воспользовавшись тем же приемом, что и в примере 1.1. Но мы покажем, как формально преобразуется подынтегральное выражение после введения новой переменной интегрирования. Введем новую переменную интегрирования t , связанную со старой переменной уравнением $t = 1 + x^2$. Далее преобразуем подынтегральное выражение к виду правой части (1.9) в соответствии с замечаниями, отмеченными после задачи 1.1. Имеем

$$dt = d(1+x^2) = (1+x^2)' dx = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt.$$

Таким образом, в соответствии с (1.9)

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C.$$

1.2.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке и интеграл $\int v du$ существует, тогда и интеграл $\int u dv$ также существует и

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1.10)$$

Формула (1.10) называется формулой интегрирования по частям. Она сводит вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$.

В конкретных примерах целесообразно разбивать подынтегральное выражение на сомножители u и dv , руководствуясь следующими соображениями:

1) функция v должна сравнительно просто находиться по своему дифференциалу dv ;

2) интеграл $\int v du$ должен вычисляться более просто, чем $\int u dv$ (то есть быть «проще» исходного интеграла).

Пример 1.3. Вычислить $\int x e^x dx$.

Решение. Положим $u = x$, $e^x dx = dv$. Тогда $du = dx$, а $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$ (постоянную интегрирования здесь писать не обязательно). По формуле (1.10) имеем

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

Пример 1.4. Вычислить $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Положим $u = \cos x$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = -\sin x dx$, $v = e^x$, и по формуле (1.10) имеем:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Второй интеграл в правой части полученного равенства еще раз интегрируем по частям, при этом необходимые для выполнения интегрирования по частям действия целесообразно записывать в виде

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} dv = e^x dx, v = e^x \\ u = \sin x, du = \cos x dx \end{array} \right| = \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Получим теперь:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

В правой части данного равенства имеется искомый неопределенный интеграл $\int e^x \cos x dx$. Переноса его в левую часть равенств, получим

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x).$$

Откуда следует, что $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$ (мы добавили постоянную интегрирования C , так как очевидно, что функция $\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$ является одной из первообразных для функции $e^x \cos x$).

Интегрирование по частям, как правило, используется при вычислении неопределенных интегралов вида

$$\int x^m \sin \alpha x \, dx, \int x^m \cos \beta x \, dx, \int x^m e^{\gamma x} \, dx$$

(m — целое положительное число, α, β, γ — постоянные);

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx, \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx, \int \arcsin x \, dx,$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx, \int x^n \ln x \, dx$$

и других.

Замечание. Процесс интегрирования в общем случае обычно состоит в целесообразном применении изложенных выше приемов (алгебраические преобразования подынтегрального выражения, интегрирование по частям, интегрирование подстановкой) для того, чтобы привести заданный интеграл к интегралу (или интегралам), уже известному или вычисление которого не представляет никаких сложностей.

Для осуществления этой программы интегрирования на практике необходимо уметь интегрировать те классы элементарных функций, методы интегрирования которых хорошо разработаны. При этом необходимо помнить, что для всякой непрерывной на интервале $(a; b)$ функции существует на этом интервале первообразная и, следовательно, неопределенный интеграл.

1.3.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1.3.1.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов: $P_k(x)/Q_n(x)$ (k и n — степени многочленов). Будем предполагать, что многочлены $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих корней.

Рациональная дробь называется правильной, если $k < n$, и неправильной, если $k \geq n$.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получим представление исходной дроби в виде целой части (многочлена степени $k - n$) и правильной дроби

$$\frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-n}x^{k-n} + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad m < n. \quad (1.11)$$

Пример 1.5. Дана неправильная дробь $\frac{6x^3 + 5x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4}$. Необходимо представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение.

$$\frac{6x^3 + 5x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4} = \frac{6x(x^2 + 4) + 5x^2 - 24x + 3x - 4}{x^2 + 4} =$$

прибавили и отняли $24x$ в числителе и сгруппировали $6x^3 + 24x$, затем, после группировки вынесли общий множитель $6x$. Для того чтобы разделить сумму на какое-либо выражение, необходимо каждый член суммы разделить на это выражение. Поэтому, продолжая начатые преобразования имеем:

$$= \frac{6x(x^2 + 4)}{x^2 + 4} + \frac{5x^2 - 21x - 4}{x^2 + 4} = 6x + \frac{5x^2 - 21x - 4}{x^2 + 4} =$$

Оставшаяся дробь также неправильная. Продолжая равенство и деля числитель на знаменатель (как и на первом шаге деления), получим:

$$\begin{aligned} = 6x + \frac{5(x^2 + 4) - 21x - 20 - 4}{x^2 + 4} &= 6x + \frac{5(x^2 + 4)}{x^2 + 4} - \frac{21x + 24}{x^2 + 4} = \\ &= 6x + 5 - \frac{21x + 24}{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Оставшаяся дробь является уже правильной, и на этом процесс деления заканчивается. Таким образом

$$\frac{6x^3 + 5x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4} = 6x + 5 - \frac{21x + 24}{x^2 + 4}.$$

Изложенную выше схему деления многочлена на многочлен удобно формализовать, представив алгоритм деления в виде схемы деления уголком. В рамках этой схемы рассмотренное выше деление выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 + 5x^2 + 3x - 4 & x^2 + 4 \\
 \underline{6x^3 + 24x} & \\
 5x^2 - 21x - 4 & \\
 \underline{5x^2 + 20} & \\
 -21x - 24 &
 \end{array}$$

Так как интегрирование многочлена не представляет особых трудностей, то интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей (далее — рациональная дробь).

Основная идея интегрирования рациональных дробей состоит в представлении их в виде суммы простейших дробей следующих видов:

1) $\frac{A}{x-a};$

2) $\frac{A}{(x-a)^k}, k > 1$ (k — целое положительное число);

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $D = p^2 - 4q < 0$, то есть квадратный трехчлен не имеет действительных корней;

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, где $D < 0, m > 1$ (целое положительное число);

a, A, M, q, p — постоянные.

Каждая из представленных выше простейших дробей легко интегрируется. Рассмотрим интегрирование дробей вида 1 и 2:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \\
 &= A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C. \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

Вычисление интегралов от дробей вида 3 осуществляется путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене $x^2 + px + q$, то есть

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

и последующим введением новой переменной интегрирования t , связанной с предыдущей уравнением $t = x + \frac{p}{2}$. То-

гда $x^2 + px + q = t^2 + a^2$, где $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, $\left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$ и

$$dt = d\left(x + \frac{p}{2}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)' dx = dx.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{M(t - p/2) + N}{t^2 + a^2} dt = \\ &= \int \frac{Mt}{t^2 + a^2} dt + (N - Mp/2) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + (N - Mp/2) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \\ &= \frac{M}{2} \ln |t^2 + a^2| + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + p}{2\sqrt{q - p^2/4}} \right) + C. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \\ &+ \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + p}{2\sqrt{q - p^2/4}} \right) + C. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Интеграл от простейшей дроби вида 4 находится по схеме, рассмотренной выше, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{Mt + (N - Mp/2)}{(t^2 + a^2)^m} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t}{(t^2 + a^2)^m} dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\
&= \frac{M}{2} \frac{(t^2 + a^2)^{-m+1}}{-m+1} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}.
\end{aligned}$$

Таким образом, осталось вычислить интеграл

$$S_m \doteq \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}, \quad m > 1.$$

Этот интеграл вычисляется по следующей рекуррентной (повторяющейся) формуле:

$$S_m = \frac{1}{2a^2(m-1)} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{1}{a^2} \frac{2m-3}{2m-2} S_{m-1}, \quad (1.15)$$

которая позволяет после $(m-1)$ -кратного ее применения найти интеграл S_m .

Как отмечалось выше, всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей вида 1–4, это определяется следующей теоремой.

Теорема. Пусть $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет вид:

$$\begin{aligned}
Q_n(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_l)^{k_l} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \times \dots \\
\dots \times (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},
\end{aligned} \quad (1.16)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l + 2m_1 + 2m_2 + \dots + 2m_s = n,$$

где все квадратные трехчлены $(x^2 + p_i x + q_i)$ $i = 1, 2, \dots, s$ не имеют вещественных корней. Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned}
\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_{11}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)} + \\
& + \frac{A_{21}}{(x - a_2)^{k_2}} + \frac{A_{22}}{(x - a_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - a_2)} + \dots \\
& \dots + \frac{A_{l1}}{(x - a_l)^{k_l}} + \frac{A_{l2}}{(x - a_l)^{k_l-1}} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(x - a_l)} + \\
& + \frac{M_{11}x + N_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} + \frac{M_{12}x + N_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-1}} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{M_{1m_1}x + N_{1m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{M_{21}x + N_{21}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2}} + \\
& + \frac{M_{22}x + N_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{M_{2m_2}x + N_{2m_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)} + \\
& + \frac{M_{s1}x + N_{s1}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}} + \frac{M_{s2}x + N_{s2}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s-1}} + \dots \\
& \dots + \frac{M_{sm_s}x + N_{sm_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)}, \quad (1.17)
\end{aligned}$$

где $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{lk_l}, M_{11}, N_{11}, \dots, M_{sm_s}, N_{sm_s}$ — вещественные числа.

Из приведенной теоремы вытекает следующее правило построения разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей:

1) каждому множителю вида $(x - a)^k$ в разложении (1.16) знаменателя в разложении дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простейших дробей соответствуют k простейших дробей вида 1 и 2:

$$\frac{A_{11}}{(x - a_1)^k} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{1k}}{(x - a_1)};$$

2) каждому множителю вида $(x^2 + px + q)^l$ в формуле (1.16) $Q_n(x)$ в разложении дроби на сумму простейших дробей соответствуют l простейших дробей вида 3 и 4:

$$\frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + \dots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)}.$$

Коэффициенты разложения (1.17) находятся путем приведения в правой части равенства (1.17) к общему знаменателю и последующего приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей равенства (1.17). Поясним изложенную выше схему на конкретных примерах.

Пример 1.6. Найти: $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2(x^2 + x + 1)} dx$.

Решение. По теореме разложения на простейшие дроби разложение подынтегральной функции, представляющей правильную рациональную дробь, имеет вид:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{(x - 2)^2} + \frac{B}{(x - 2)} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1}.$$

Приведем выражение в правой части к общему знаменателю

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2(x^2+x+1)} &= \\ &= \frac{A(x^2+x+1) + B(x-2)(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+x+1)}. \end{aligned}$$

Так как обе дроби тождественно равны, то должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 4x - 1 &= A(x^2 + x + 1) + \\ &+ B(x-2)(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x-2)^2. \end{aligned}$$

Раскроем скобки в правой части полученного равенства и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 4x - 1 &= x^3(B + M) + x^2(A - B - 4M + N) + \\ &+ x(A - B - 4N + 4M) + A + 4N - 2B. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} B + M = 1 \\ A - B - 4M + N = 2 \\ A - B + 4M - 4N = -4 \\ A - 2B + 4N = -1 \end{cases},$$

решая которую найдем коэффициенты разложения A, B, M, N . Для этого вычтем из второго уравнения системы третье. Получим

$$8M - 5N = -6. \quad (1.18)$$

Далее из второго уравнения системы вычтем четвертое. Получим

$$B - 4M - 3N = -3.$$

Подставляя в это уравнение $B = 1 - M$ из первого уравнения системы, получим, вместе с (1.18), систему двух уравнений для M и N

$$\begin{cases} 8M - 5N = -6 \\ -5M - 3N = 2. \end{cases}$$

Решая ее, получим: $M = -\frac{4}{7}$, $N = -\frac{2}{7}$.

Тогда $B = 1 - M = \frac{11}{7}$, $A = -1 + 2B - 4N = 1$. Таким образом, искомое разложение дроби имеет вид

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{11}{7(x-2)} + \frac{1}{7} \frac{-4x+2}{x^2+x+1}.$$

С учетом полученного разложения искомый интеграл представится в виде следующей суммы интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2(x^2+x+1)} dx &= \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \\ &+ \frac{11}{7} \int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{1}{7} \int \frac{-4x+2}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

Интегрируя получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2(x^2+x+1)} dx &= -\frac{1}{(x-2)} + \\ &+ \frac{11}{7} |\ln x - 2| + \frac{1}{7} \int \frac{-4(t-1/2)+2}{t^2+3/4} dt \end{aligned}$$

(в последнем интеграле введена новая переменная $t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = t - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = d\left(x - \frac{1}{2}\right) = dx$), рассмотрим последний интеграл. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{-4(t-1/2)+2}{t^2+3/4} dt &= -4 \int \frac{t dt}{t^2+3/4} + 4 \int \frac{dt}{t^2+3/4} = \\ &= -2 \int \frac{d(t^2+3/4)}{t^2+3/4} + 4 \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \\ &= -2 \ln(t^2+3/4) + 4 \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \\ &= -2 \ln(x^2+x+1) + 4 \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

После интегрирования мы вернулись к уже рассмотренной переменной, учтя, что $x^2 + x + 1 = t^2 + 3/4$. Таким образом

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2(x^2 + x + 1)} dx = -\frac{1}{(x-2)} + \frac{11}{7} |\ln x - 2| - \frac{2}{7} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{8}{7\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 1.7. Найти $\int \frac{6 dx}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Решение. Разложение подынтегральной функции на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{6}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-3)} =$$

Коэффициенты разложения A, B, C, D находим, приравняв числители в правой и левой частях равенства после приведения дробей в правой части к общему знаменателю. Продолжаем равенство:

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x-1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x-1)(x-3) + Dx(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A(x-1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x-1)(x-3) + \\ &\quad + Dx(x-1)(x-2)x(x-1)(x-2)(x-3) = 6. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в левой части записанного равенства и приведя подобные, получим:

$$\begin{aligned} x^3(A+B+C+D) + x^2(-6A-5B-4C-3D) + \\ + x(11A+6B+3C+2D) - 6A = 6. \end{aligned}$$

Приравнявая далее коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим следующую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения:

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ 6A+5B+4C+3D=0 \\ 11A+6B+3C+2D=0 \\ -6A=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C+D=1 \\ 5B+4C+3D=6 \\ 6B+3C+2D=11 \\ A=-1 \end{cases}.$$

После вычитания из третьего уравнения второго, получим:

$$\begin{cases} B + C + D = 1 \\ B - C - D = 5 \\ 6B + 4C + 3D = 6 \\ A = -1 \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения полученной системы находим $B = 3$. Подставляя полученное значение в первое и третье уравнения системы, придем к системе двух линейных уравнений для неизвестных коэффициентов C и D :

$$\begin{cases} C + D = -2 \\ 4C + 3D = -9 \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы имеем $C = -2 - D$. Тогда из второго уравнения системы после подстановки, получим:

$$-4(2 + D) + 3D = -9 \Rightarrow D = 1.$$

Тогда, очевидно, $C = -3$. Итак коэффициенты разложения:

$$A = -1, B = 3, C = -3, D = 1.$$

Этот же результат можно было бы получить и более простым путем. Если в уравнении для определения коэффициентов положить $x = 0$, то получим $-6A = 6$, откуда $A = -1$. Полагая последовательно $x = 1$, найдем $2B = 6$, откуда $B = 3$, при $x = 2$ получим $-2C = 6$, откуда $C = -3$, при $x = 3$ получаем $6D = 6$, откуда $D = 1$.

Таким способом можно всегда найти часть коэффициентов разложения рациональной дроби на сумму простейших дробей, если ее знаменатель имеет действительные корни. Число определяемых при этом коэффициентов равно числу различных действительных корней знаменателя. Это позволяет уменьшить число линейных уравнений в системе, которую необходимо решить для нахождения остальных коэффициентов разложения. Заметим, что при реализации обсуждаемого метода можно использовать и комплексные корни знаменателя, но мы на этом останавливаться не будем, так как в стандартном курсе высшей математики вузов технического и технологического профиля они обычно не используются.

Возвращаясь к интегралу, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{6 dx}{x(x-1)(x-2)(x-3)} &= \\ &= - \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x-1} - 3 \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= -\ln|x| + 3\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

1.3.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

В предыдущем разделе мы рассмотрели интегрирование рациональных дробей. При интегрировании тригонометрических выражений часто удается с помощью подходящей подстановки свести интеграл от рассматриваемой функции к интегралу от рациональной дроби. В дальнейшем символом $R(x, y)$ будем обозначать рациональную функцию от двух аргументов x и y .

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Действительно, так как

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2},$$

то получим

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}. \quad (1.19)$$

Так как рациональная функция от рациональной функции также является рациональной, то интеграл, стоящий в правой части равенства (1.19), также является интегралом от рациональной функции, который находится методом, рассмотренным в параграфе 1.3.1.

Пример 1.8. Найти $\int \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)^2 \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$.

Решение. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку, получим

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)^2 \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5} = \\ &= \int \frac{\left(1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2 (1 + t^2) \left(\frac{6t}{1 + t^2} + \frac{4(1 - t^2)}{1 + t^2} + 5 \right)} 2 dt = \\ &= 2 \int \frac{t^4 dt}{6t + 4 - 4t^2 + 5 + 5t^2} = 2 \int \frac{t^4 dt}{t^2 + 6t + 9} = 2 \int \frac{t^4 dt}{(t + 3)^2}. \end{aligned}$$

Рациональная дробь, интеграл от которой нам необходимо найти, является неправильной. Поэтому, прежде чем разлагать ее на сумму простейших дробей, необходимо выделить целую часть. Разделим для этого числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r} t^4 \\ t^4 - 6t^3 + 9t^2 \\ \hline -6t^3 - 9t^2 \\ -6t^2 - 36t^2 - 54t \\ \hline 27t^2 + 54t \\ 27t^2 + 162t + 243 \\ \hline -108t - 243 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} t^2 + 6t + 9 \\ t^2 - 6t + 27 \end{array} \right.$$

Таким образом

$$\int \frac{t^4}{t^2 + 6t + 9} = t^2 - 6t + 27 - \frac{108t + 243}{t^2 + 6t + 9}.$$

Учитывая этот результат, имеем:

$$\begin{aligned} & \int \frac{t^4 dt}{(t + 3)^2} = \int (t^2 + 6t + 9) dt - \int \frac{108t + 243}{(t + 3)^2} dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 27t - 108 \int \frac{(t + 3)}{(t + 3)^2} dt + 81 \int \frac{dt}{(t + 3)^2} = \\ &= \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 27t - 108 \ln |t + 3| - \frac{81}{t + 3} + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, получим:

$$\int \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)^2 \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5} =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 27 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 108 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| - \frac{81}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} \right) + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким подынтегральным выражениям и, как следствие, к большому объему вычислительной работы. Поэтому в ряде случаев используются другие подстановки, существенно упрощающие нахождение интеграла по сравнению с ситуацией, когда применяется (в одном и том же случае) универсальная тригонометрическая подстановка.

Укажем некоторые частные случаи, когда интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ рационализуется с помощью других подстановок, приводящих к менее громоздким выкладкам:

а) если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл (1.19) рационализуется подстановкой $t = \cos x$;

б) если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция относительно $\cos x$, то есть $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл (1.19) рационализуется подстановкой $t = \sin x$;

в) если $R(\sin x, \cos x)$ — четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интеграл (1.19) рационализуется подстановкой $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 1.9. Найти $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решение. Так как подынтегральная функция является четной функцией $\sin x$ и $\cos x$:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x},$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{2(-\sin x)(-\cos x)}{(-\sin x)^4 + (-\cos x)^4} =$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = R(\sin x, \cos x),$$

то применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$. При этом

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} &= 2 \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 2 \int \frac{\operatorname{tg} x \cos^2 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \\ &= 2 \int \frac{t/(1+t^2)^2 dt / (1+t^2)}{t^4/(1+t^2)^2 + 1/(1+t^2)^2} = 2 \int \frac{t dt}{1+t^4} = \int \frac{dt^2}{1+(t^2)^2} = \\ &= \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + C = \operatorname{arctg} t^2 + C = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg}^2 x) + C. \end{aligned}$$

Пример 1.10. Найти $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$:

$$\begin{aligned} R(\sin x, \cos x) &= \sin^2 x \cos^3 x, \\ R(\sin x, -\cos x) &= -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x), \end{aligned}$$

то применяем подстановку $t = \sin x$. При этом, преобразуя подынтегральное выражение в соответствии с общей схемой замены переменных и учитывая

$$dt = d(\sin x) = \cos x dx, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

получим:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \\ &= \int t^2 (1 - t^2) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.11. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$, то применяя подстановку $t = \cos x$ получим, учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $dt = -\sin x dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^5 x} \sin x dx = - \int \frac{1 - t^2}{t^5} = \\ &= - \int t^{-5} dt + \int t^{-3} dt = \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{2t^2} + C = \\ &= \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{2 \cos^2 x} + C.\end{aligned}$$

Интегралы вида $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$, где m и n — натуральные числа, можно находить с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$. Но гораздо быстрее приводит к цели преобразование подынтегральной функции с помощью формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \quad (1.20)$$

Пример 1.12. Найти $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int (2 \sin x \cos x)^4 dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx = \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{64} \int (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x) dx = \\ &= \frac{1}{64} \left(\int dx - 2 \int \cos 4x dx + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 8x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{64} \left(x - \frac{1}{2} \int \cos 4x d4x + \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{16} \int \cos 8x d(8x) \right) = \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 8x \right) + C = \\ &= \frac{1}{128} \left(3x - 4 \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C.\end{aligned}$$

Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ (α и β — константы) находятся путем преобразования подынтегральной функции в сумму тригонометрических функций по формулам:

$$\begin{aligned}\sin \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x), \\ \cos \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x), \\ \sin \alpha x \sin \beta x &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x). \quad (1.21)\end{aligned}$$

Пример 1.13. Найти $\int \sin 7x \cos 3x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sin 7x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 4x) dx = \\ &= \frac{1}{20} \int \sin 10x d(10x) + \frac{1}{8} \int \sin 4x d(4x) = \\ &= -\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.\end{aligned}$$

С помощью формул (1.21) таким же образом могут быть найдены неопределенные интегралы от функций, представляющих собой произведение трех и большего числа тригонометрических функций синус и косинус, аргумент которых пропорционален x .

Пример 1.14. Найти $\int \sin x \cos 2x \sin 5x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos 2x \sin 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 3x - \sin x) \sin 5x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \cos 2x dx - \frac{1}{4} \int \cos 8x dx - \\ &\quad - \frac{1}{4} \int \cos 4x dx + \frac{1}{4} \int \cos 6x dx = \\ &= \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{32} \sin 8x - \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + C.\end{aligned}$$

1.3.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Некоторые виды интегралов от иррациональных выражений можно с помощью подходящей подстановки привести к интегралу от рациональной дроби.

Интегралы вида

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx,$$

где $ad - bc \neq 0$, $\frac{m_i}{n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k \in N$) — рациональные дроби, рационализируются с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, где n — наименьшее общее кратное (НОК) чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$ или общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$.

При этом

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_i}{n_i}} = (t^n)^{\frac{m_i}{n_i}} = t^{l_i},$$

l_i — целые числа, так как n кратно n_i ($i = 1, 2, \dots, k$)
 $x = \frac{b - t^n d}{ct^n - a}$, $dx = \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx = \\ = \int R \left(\frac{b - t^n d}{ct^n - a}, t^{l_1}, t^{l_2}, \dots, t^{l_k} \right) \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt \end{aligned}$$

представляет собой рациональную функцию от t .

Пример 1.15. Найти $\int \frac{dx}{(x+3)^{1/2} + (x+3)^{2/3}}$.

Решение. В соответствии с изложенным рационализирующая интеграл подстановка имеет вид $x + 3 = t^6$, так как $\text{НОК}(2, 3) = 6$. Тогда

$$x = t^6 - 3, (x + 3)^{1/2} = t^3, (x + 3)^{2/3} = t^4, dx = 6t^5 dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+3)^{1/2} + (x+3)^{2/3}} &= 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3(t+1)} = \\ &= 6 \int \frac{(t^2 - 1 + 1) dt}{t+1} = 6 \int (t-1) dt + 6 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 3t^2 - 6t + 6 \ln|t+1| + C = \\ &= 3\sqrt[3]{x+3} - 6\sqrt{x+3} + 6 \ln|\sqrt[3]{x+3} + 1| + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ приводятся к интегралам вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ с помощью следующих тригонометрических или гиперболических подстановок:

$$x = a \sin t \text{ или } x = a \operatorname{tg} t \text{ или } x = a \operatorname{sh} t, \quad x = \frac{a}{\cos t}.$$

Пример 1.16. Найти $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.

Решение. Сделаем в соответствии с рекомендациями подстановку $x = 2 \sin t$. При этом, так как подынтегральная функция определена при $-2 \leq x < 0$ и $0 < x \leq 2$, то значения t принадлежат множеству, представляющему собой объединение промежутков $[-\frac{\pi}{2}; 0)$ и $(0; \frac{\pi}{2}]$. С учетом этого имеем $dx = 2 \cos t dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} 2 \cos t dt = \int \frac{\cos t |\cos t|}{\sin^2 t} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} |\cos t| = \cos t \\ t \in [-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2] \end{array} \right| = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \\ &= \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C. \end{aligned}$$

Очевидно, что $t = \arcsin \frac{x}{2}$, $\sin t = \frac{x}{2}$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Тогда, возвращаясь к рассмотренной переменной x , получим

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 + bx + c}) dx$ выделением полного квадрата в квадратном трехчлене с последующей заменой $t = x + \frac{b}{2a}$ преобразуем к одному из следующих интегралов

$$\begin{aligned} \int R(t, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 t^2}) dt, \quad \int R(t, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}) dt, \\ \int R(t, \sqrt{\beta^2 t^2 - \alpha^2}) dt. \end{aligned}$$

Эти интегралы приводятся к интегралам вида $\int r(\sin u, \cos u) du$ соответственно с помощью подстановок

$$\begin{aligned} t = \frac{\alpha}{\beta} \sin u, \quad \left(t = \frac{\alpha}{\beta} \cos u \right); \quad t = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} u; \\ t = \frac{\alpha}{\beta \cos u}, \quad \left(t = \frac{\alpha}{\beta \sin u} \right), \quad \alpha, \beta - \text{const.} \end{aligned}$$

Однако, часто разумнее использовать подстановки Эйлера.

Первая подстановка Эйлера.

Если $a > 0$, то полагаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + t$. Пусть для определенности $\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x + t$. Тогда

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - 2\sqrt{a}xt + t^2.$$

Откуда $x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}$, то есть x — рациональная функция t .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt - c}{b + 2\sqrt{a}t}, \quad dx = \frac{(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(b + 2\sqrt{a}t)^2} dt.$$

Вторая подстановка Эйлера.

Если $c > 0$, то полагаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$. Пусть для определенности $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$. Тогда

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 - 2xt\sqrt{c} + c$$

и следовательно,

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{(a - t^2)}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{a - t^2},$$

$$dx = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{(a - t^2)^2} dt.$$

Третья подстановка Эйлера.

Если α и β — действительные вещественные корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то полагаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$. Так как $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, то $ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2 t^2$, откуда $a(x - \beta) = (x - \alpha)t^2$, следовательно

$$x = \frac{\alpha\beta - \alpha t^2}{\alpha - t^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\alpha - \beta)t}{\alpha - t^2}, \quad dx = \frac{a(\beta - \alpha)t}{(t^2 - \alpha^2)^2} dt.$$

Таким образом во всех трех рассмотренных случаях интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ приводится к интегралу от рациональной функции t . Хотя подстановки Эйлера всегда рационализируют интеграл от функции $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, но обычно эти подстановки приводят к весьма громоздким и сложным выкладкам. Поэтому на практике чаще пользуются другими (в том числе и рассмотренным выше) способами интегрирования $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.

Пример 1.17. Найти $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}}$.

Решение. Так как $a = 1 > 0$, применим первую подстановку Эйлера. Имеем $\sqrt{x^2 - x + 2} = t - x$. Далее

$$x = \frac{t^2 - 2}{2t - 1}, \quad dx = \frac{2(t^2 - t + 2)}{(2t - 1)^2} dt.$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} = 2 \int \frac{t^2 - t + 2}{(2t - 1)^2 t} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left(\frac{4}{t} - \frac{7}{2t-1} + \frac{7}{(2t-1)^2} \right) dt = \\
 &= 4 \ln |t| - \frac{7}{2} \ln |2t-1| - \frac{7}{2(2t-1)} + C.
 \end{aligned}$$

Подставляя $t = x + \sqrt{x^2 - x + 2}$ получим окончательно

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} &= 4 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - x + 2} \right| - \\
 &\quad - \frac{7}{2} \ln \left| 2x + 2\sqrt{x^2 - x + 2} - 1 \right| - \\
 &\quad - \frac{2}{2(2x + 2\sqrt{x^2 - x + 2} - 1)} + C.
 \end{aligned}$$

Интегрирование биномиальных дифференциалов или дифференциальных биномов

Биномиальным дифференциалом называется выражение вида $x^m (a + bx^n)^p dx$, где m , n и p — рациональные числа, a и b — произвольные постоянные величины ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Биномиальные дифференциалы интегрируются в элементарных функциях только в следующих случаях.

1) Число p — целое. Тогда интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ рационализуется подстановкой $t = \sqrt[p]{x}$, где p — наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n .

Пример 1.18. Найти интеграл $\int x^{1/3} (2 + 3x^{1/2})^3 dx$.

Решение. Здесь $m = 1/3$, $n = 1/2$, $p = 3$. Наименьшее общее кратное знаменателей m и n , то есть чисел 2 и 3, равно 6. Поэтому полагаем $t = \sqrt[6]{x}$. Тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $x^{1/3} = t^2$, $x^{1/2} = t^3$. В результате применения указанной подстановки интеграл преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int x^{1/3} (2 + 3x^{1/2})^3 dx &= 6 \int t^2 (2 + 3t^3)^3 t^5 dt = \\
 &= 6 \int t^7 (8 + 36t^3 + 54t^6 + 27t^9) dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 48 \int t^7 dt + 216 \int t^{10} dt + 234 \int t^{13} dt + 162 \int t^{16} dt = \\
&= \frac{48}{8} t^8 + \frac{216}{11} t^{11} + \frac{324}{14} t^{14} + \frac{162}{17} t^{17} + C = \\
&= 6 \sqrt[3]{x^4} + \frac{216}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + \frac{162}{7} \sqrt[3]{x^7} + \frac{162}{17} \sqrt[6]{x^{17}} + C.
\end{aligned}$$

2) Число $\frac{m+1}{n}$ — целое. Тогда интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ рационализируется подстановкой $t = \sqrt[s]{ax + bx^n}$, где s — знаменатель рационального числа p .

Пример 1.19. Найти $\int x^{1/2} (3 + 2x^{3/4})^{1/2} dx$.

Решение. В рассматриваемом случае $m = 1/2$, $n = 3/4$, $p = 1/2$, $\frac{m+1}{n} = 2$ — целое.

Положим $t = \sqrt{3 + 2x^{3/4}}$. Тогда $t^2 = 3 + 2x^{3/4}$, $x = \left(\frac{t^2 - 3}{2}\right)^{4/3}$, $dx = \left(\frac{1}{2}\right)^{4/3} \frac{8}{3} (t^2 - 3)^{1/3} t dt$. Выражая подынтегральное выражение в терминах переменной, имеем:

$$\begin{aligned}
&\int x^{1/2} (3 + 2x^{3/4})^{1/2} dx = \\
&= \int \left(\frac{t^2 - 3}{2}\right)^{4/3} 6(2/3) t \left(\frac{1}{2}\right)^{4/3} \frac{8}{3} (t^2 - 3)^{1/3} t dt = \\
&= \frac{2}{3} \int (t^4 - 3t^2) dt = \frac{2}{3} \frac{t^5}{5} - 2 \frac{t^3}{3} + C = \\
&= \frac{2}{15} \sqrt{(3 + 2x^{3/4})^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(3 + 2x^{3/4})^3} + C.
\end{aligned}$$

3) Число $\frac{m+1}{n} + p$ — целое. Тогда интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ рационализируется подстановкой $t = \sqrt[s]{b + \frac{a}{x^n}}$, где s — знаменатель рационального числа p .

Пример 1.20. Найти $\int x^{1/4} (1 + x^{1/2})^{-7/2} dx$.

Решение. В рассматриваемом случае $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{7}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p = -1$ — целое. Положим $t = \sqrt{1 + \frac{1}{x^{1/2}}}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } t^2 &= 1 + \frac{1}{x^{1/2}}, \quad x^{1/2} = \frac{1}{t^2 - 1}, \quad x = \frac{1}{(t^2 - 1)^2}, \quad dx = \\ &= -4t(t^2 - 1)^{-3} dt, \quad x^{1/4} = \frac{1}{(t^2 - 1)^{1/2}}, \quad 1 + x^{1/2} = 1 + \\ &+ \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{t^2}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int x^{1/4} (1 + x^{1/2})^{-7/2} dx &= \\ &= \int \frac{1}{(t^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{t^2}{t^2 - 1} \right)^{-7/2} (-4t(t^2 - 1)^{-3}) dt = \\ &= -4 \int t^{-6} dt = \frac{4}{5t^5} + C = \frac{4}{5} \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{(1 + x^{1/2})^5}} + C. \end{aligned}$$

1.4.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

Найти интегралы.

$$1.21. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^3 dt$$

$$1.22. \int 2^x 7^x dx$$

$$1.23. \int \frac{dx}{\sqrt{5-5x^2}}$$

$$1.24. \int (\sqrt[3]{x} + 1) (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1) dx$$

$$1.25. \int \operatorname{tg}^2 x, dx$$

$$1.26. \int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$1.27. \int \frac{1-3x^2}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$1.28. \int (\arccos 3x + \arcsin 3x) dx$$

$$1.29. \int \cos x d(\cos x)$$

$$1.30. \int \operatorname{ctg}^4 x d(\operatorname{ctg} x)$$

$$1.31. \int (x+10)^1 7 dx$$

$$1.32. \int \sqrt[3]{7-3x} dx$$

$$1.33. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

$$1.34. \int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$$

$$1.35. \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x dx}{1+x^2}$$

$$1.36. \int \cos(3x+4) dx$$

$$1.37. \int \sin(2-5x) dx$$

$$1.38. \int \operatorname{tg} x dx$$

1.39. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$

1.41. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x \, dx$

1.43. $\int e^{x^4} x^3 \, dx$

1.45. $\int a^{5x} \, dx$

1.47. $\int \frac{x+3}{3x-4} \, dx$

1.49. $\int \frac{dx}{x^2+5x+10}$

1.51. $\int \frac{dx}{x(x+2)}$

1.53. $\int \frac{dx}{\sin x}$

1.55. $\int \sin^3 x \, dx$

1.57. $\int \cos^5 x \, dx$

1.59. $\int \cos x \sin 4x \cos 6x \, dx$

1.61. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

1.63. $\int x \sin x \, dx$

1.65. $\int \arcsin x \, dx$

1.67. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$

1.69. $\int \ln(x^2+4) \, dx$

1.71. $\int \ln^3 x \, dx$

1.73. $\int \cos(\ln x) \, dx$

1.75. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}$

1.77. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+a^2}}$

1.40. $\int \operatorname{ctg}(3x+2) \, dx$

1.42. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-x}-1}}$

1.44. $\int \frac{3^x \, dx}{\sqrt{1-9x}}$

1.46. $\int \frac{x^2-4}{x^2+4} \, dx$

1.48. $\int \frac{x^4 \, dx}{x^2+4}$

1.50. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}$

1.52. $\int \cos^2 x \, dx$

1.54. $\int \cos 2x \cos 5x \, dx$

1.56. $\int \cos^4 x \, dx$

1.58. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$

1.60. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

1.62. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

1.64. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

1.66. $\int x 2^x \, dx$

1.68. $\int x^n \ln x \, dx$

1.70. $\int x^2 e^{2x} \, dx$

1.72. $\int e^x \sin x \, dx$

1.74. $\int \sin(\ln x) \, dx$

1.76. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

1.78. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

- 1.79. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$
- 1.80. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$
- 1.81. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
- 1.82. $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
- 1.83. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
- 1.84. $\int \frac{x^6 dx}{x^2-1}$
- 1.85. $\int \frac{x dx}{x^3-6x^2+11x-6}$
- 1.86. $\int \frac{x^3+x+2}{x(x^3+1)} dx$
- 1.87. $\int \frac{x^3+1}{x(x-8)} dx$
- 1.88. $\int \frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2} dx$
- 1.89. $\int \frac{x^8-1}{x(x^3+1)} dx$
- 1.90. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$
- 1.91. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$
- 1.92. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x+9\cos^2 x}$
- 1.93. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$
- 1.94. $\int \frac{dx}{\sin^3 x-\cos^3 x}$
- 1.95. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$
- 1.96. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^6 x} dx$
- 1.97. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$
- 1.98. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$
- 1.99. $\int \frac{x dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$
- 1.100. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}} dx$
- 1.101. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$
- 1.102. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$
- 1.103. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}} \frac{dx}{x}$
- 1.104. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1-x}} dx$
- 1.105. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}$
- 1.106. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$
- 1.107. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$
- 1.108. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx$
- 1.109. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$
- 1.110. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$
- 1.111. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+2)^2}$
- 1.112. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+2)^3}$
- 1.113. $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{x^2-4}}$
- 1.114. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

$$1.115. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$1.116. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 4}}$$

1.117. Обнаружить неточность в следующих рассуждениях:
Интегрируя по частям в интеграле

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\left(\frac{1}{\sin x} = u, \cos x dx = dv, du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx, v = \sin x \right),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin x} dx &= \frac{1}{\sin x} \sin x + \int \sin x \frac{\cos x}{\sin x} dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \\ &= 2 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \dots = n + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \end{aligned}$$

откуда $0 = 1 = 2 = \dots = n$.

1.118. Пусть $\int f(x) dx = F(x)$ и $F(x + T) = F(x)$ для всех действительных x , где $T > 0$. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция.

1.119. Доказать, что неопределенный интеграл от четной функции есть функция нечетная, а от нечетной функции — четная.

1.120. Найти $\int \max(a^2, x^2) dx$, где $a > 0$.

1.121. Найти $f(x)$, если $f'(x^2) = 1/x^3$, $x > 0$.

1.122. Найти $f(x)$, если $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Назовем сеткой множество из n точек x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) $x_0 = a < x_1 < x_2, \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — i -м приращением или i -м шагом сетки, точки x_i — узлами сетки. Интегральная сумма для функции $f(x)$, определенной во всех внутренних точках отрезка $x \in [a; b]$, это сумма вида

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x'_i) \Delta x_i = \\ = f(x'_0) \Delta x_0 + f(x'_1) \Delta x_1 + \dots + f(x'_{n-1}) \Delta x_{n-1}, \quad (2.1)$$

где x_i — узлы данной сетки: $x'_i \in [x_{i-1}, x_i]$, а Δx_i — приращения ($i = 1, 2, \dots, n$). Если существует не зависящий от выбора x'_i предел интегральных сумм S_n (2.1) при неограниченном увеличении числа n узлов сетки и стремлении к нулю наибольшего из приращений (по модулю) Δx_i , то такой предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ и обозначается так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta x_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x'_i) \Delta x_i. \quad (2.2)$$

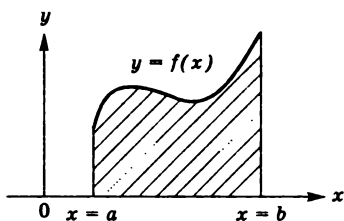


Рис. 2.1.

При этом a — нижний предел интегрирования, а b — верхний предел интегрирования. Назовем криволинейной трапецией фигуру на плоскости XOY , ограниченную линиями $x = a$, $y = f(x)$, $y = 0$, $x = b$, (рис. 2.1).

Определенный интеграл от функции $y = f(x) \geq 0$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ ($a < b$) численно равен площади криволинейной трапеции.

Функция $f(x)$, для которой существует предел (2.2), называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ при $x \in [a, b]$ непрерывна или кусочно-непрерывна (т. е. имеет конечное число точек разрыва первого рода), то определенный интеграл (2.2) существует.

Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Основные свойства определенного интеграла

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $x \in [a, b]$, а α и β — любые действительные числа.

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = 0.$$

3) Свойство линейности:

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx.$$

В частности,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

4) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке, целиком лежащем внутри $[a, b]$.

5) Свойство аддитивности:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

где либо $a < c < b$, либо c лежит вне отрезка $[a, b]$, но $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$.

6) Постоянный множитель C можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx.$$

7) Если $f(x) \geq 0$, при $a \leq x \leq b$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

8) Если $f(x) \leq g(x)$, при $a \leq x \leq b$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

9) Если на отрезке $[a, b]$ $f(x)$ непрерывна и $f(x) > 0$, то существует такое положительное число K , что выполняется условие:

$$\int_a^b f(x) dx \geq K > 0.$$

Ю) Модуль от определенного интеграла от интегрируемой функции не превышает определенного интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, (a < b).$$

11) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, $g(x) \geq 0$, m — наименьшее, а M — наибольшее значения функции на данном отрезке ($m \leq f(x) \leq M$), тогда существует такое число $\lambda \in [m, M]$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \lambda \int_a^b g(x) dx, (a < b).$$

12) Пусть m — наименьшее значение, а M — наибольшее значение непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, тогда справедливо двойное неравенство

$$m(a - b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(a - b).$$

13) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует такая точка ξ ($a \leq \xi \leq b$), что выполняется следующее равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Число $\xi = \int_a^b f(x) dx / (b - a)$ называется средним интегральным значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

14) Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[-a, a]$ условию четности, т. е. $f(-x) = f(x)$, то справедливо равенство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

15) Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[-a, a]$ условию нечетности, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то справедливо равенство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

16) Если функция $f(x)$ периодическая с периодом τ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+n\tau}^{b+n\tau} f(x) dx, \text{ где } n - \text{целое число.}$$

Правила дифференцирования определенных интегралов

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $a(x)$ и $b(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то существует следующая производная:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right) = f(b(x)) \frac{db(x)}{dx} - f(a(x)) \frac{da(x)}{dx}.$$

В частности, если $a(x) = c = \text{const}$, $b(x) = x$, тогда

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Правила нахождения определенных интегралов

1) Пусть $F(x)$ — одна из первообразных для интегрируемой функции $f(x)$, т. е. справедливо равенство $\int f(x) dx = F(x) + C$, тогда определенный интеграл может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замечание. Применение формулы Ньютона–Лейбница возможно лишь в том случае, когда равенство $F'(x) = f(x)$ для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$ справедливо на всем отрезке интегрирования $[a, b]$. Отметим также, что первообразная $F(x)$ для кусочно-непрерывной подынтегральной функции должна быть непрерывна на всем отрезке $[a, b]$.

2) *Замена переменной.* Пусть функция $x = \varphi(t)$ осуществляет взаимно однозначное преобразование конечного отрезка

$t \in [t_0, t_1]$ в конечный отрезок $x \in [x_0 = \varphi(t_0), x_1 = \varphi(t_1)]$ и имеет на $t \in [t_0, t_1]$ непрерывную производную $\frac{d\varphi}{dt}$, тогда $t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$, $t_1 = \varphi^{-1}(x_1)$ и справедлива формула интегрирования с помощью замены переменной:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Замечание. Предполагается, что функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[t_0, t_1]$, а числа t_0, t_1 конечны.

Замечание. Иногда удобнее найти вначале неопределенный интеграл $\int f(x) dx$ с помощью замены переменной

$$x = \varphi(t): \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(t) + C,$$

а затем вернуться к исходной переменной x с помощью обратного преобразования

$$t = \varphi^{-1}(x): \int f(x) dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

В этом случае при использовании найденной первообразной $F(\varphi^{-1}(x))$ не потребуется пересчитывать пределы интегрирования.

3) Интегрирование по частям производится по формуле

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) = \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x). \quad (2.3) \end{aligned}$$

Замечание. Формулу (2.3) можно применять только тогда, когда функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные.

Замечание. Интегралы в правых частях (2.3) должны иметь уже известные первообразные или же такие, которые легко свести к уже известным — например, табличным.

2.2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Вычислить следующие определенные интегралы, применяя формулу Ньютона–Лейбница и используя свойства определенного интеграла.

Пример 2.1. $I = \int_0^2 x^3 dx.$

Решение. $I = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4.$

Пример 2.2. $I = \int_0^2 (x-1)^3 dx.$

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (x-1)^3 dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx = \\ &= \int_0^2 x^3 dx - 3 \int_0^2 x^2 dx + 3 \int_0^2 x dx - \int_0^2 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + 3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - x \Big|_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Пример 2.3. $I = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5x^2}{1+x^2} \right) dx.$

Решение.

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} - 5 \int_0^{\pi/4} \frac{(x^2 + 1 - 1) dx}{1 + x^2} = \\ &= 4 \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} - 5 x \Big|_0^{\pi/4} + 5 \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + x^2} = \\ &= 4 \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg}(0) \right) - 5 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) + 5 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{arctg}(0) \right) = \\ &= 4 - 5 \frac{\pi}{4} + 5 \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Пример 2.4. $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [-1, 0), \\ x + 1, & x \in [0, 2]. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся свойством аддитивности и разобьем данный интеграл на два:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 2) dx + \int_0^2 (x + 1) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \\ &= \left(\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left(\frac{0^2}{2} + 0 \right) = 6 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2.5. $I = \int_{-1}^1 x|x| dx$.

Решение. Поскольку под интегралом стоит нечетная функция, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля, то

$$\int_{-1}^1 x|x| dx = 0.$$

В следующих двух примерах будет продемонстрировано, что формальное применение формулы Ньютона–Лейбница (без учета подынтегральных функций) может привести к ошибочному результату.

Пример 2.6. В интеграле $\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx$ подынтегральная функция $\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \begin{cases} \text{не определена при } x \neq 0 \\ -\frac{1}{1+x^2} \text{ при } x \neq 0 \end{cases}$ не определена в точке $x = 0$, а ее первообразная $\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$

имеет в этой точке разрыв первого рода (конечный скачок). Если доопределить первообразную $F(x)$ в точке $x = 0$ так, чтобы получилась непрерывная функция

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx = F(x) + C,$$

$$F(x) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}; & x = 0 \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right); & 0 < x \leq 1 \end{cases},$$

тогда можно будет воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx &= F(x)|_0^1 = F(1) - F(0) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Пример 2.7. $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx.$

Решение. Формальное применение формулы Ньютона–Лейбница здесь невозможно, поскольку $F(x) = \frac{1}{(1 + 3^{1/x})}$ является первообразной для подынтегральной функции всюду, кроме $x = 0$, но эта точка принадлежит отрезку интегрирования $[-1, 1]$. Для того, чтобы вычислить данный интеграл, воспользуемся сначала свойством аддитивности и разобьем исходный интеграл на два интеграла по областям $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, а затем для каждого неопределенного интеграла выпишем соответствующие первообразные. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx &= \\ &= \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx. \end{aligned}$$

Для первого интеграла первообразную обозначим $F_1(x)$, $x \in [-1, 0]$, для второго — $F_2(x)$, $x \in [0, 1]$:

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 3^{1/x}}, & \text{при } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 3^{1/x}}, & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда $I = F_1(0) - F_1(-1) + F_2(1) - F_2(0) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{2}$.

В следующих примерах обсуждаются возможные ошибки применения метода интегрирования с помощью замены переменной и продемонстрированы правильные решения.

Пример 2.8. Вычислить интеграл $\int_2^7 (x-3)^2 dx$.

а) С помощью подстановки $z = x - 3$.

б) С помощью подстановки $z = (x-3)^2$.

Решение.

а) Если $z = x - 3$, то $dz = dx$, $x_1 = 2$ соответствует $z_1 = -1$, $x_2 = 7$ соответствует $z_2 = 4$. Получаем

$$\int_{-1}^4 z^2 dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-1}^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{65}{3} \approx 21,67.$$

б) Формальное использование замены $z = (x-3)^2$, $z_1 = 1$, $z_2 = 16$, $dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$ приводит к следующему ошибочному результату

$$\int_1^{16} \frac{z dz}{2\sqrt{z}} = 0,5 \int_1^{16} \sqrt{z} dz = 0,5 z^{3/2} \Big|_1^{16} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

Ошибка возникла из-за того, что преобразование $z = (x-3)^2$ не является взаимно однозначным. Правильное применение данного преобразования возможно лишь при разбиении исходного интеграла на два соответственно по областям $[2, 3]$ и $[3, 7]$. В области $x \in [2, 3]$ преобразованию $z = (x-3)^2$

соответствует обратное преобразование $x = 3 - \sqrt{z}$. При этом $dx = -\frac{dz}{2\sqrt{z}}$, а $z_1 = 1$, $x_1 = 2$, $z_2 = 0$, $x_2 = 3$. В области [3.7] обратное преобразование таково: $x = 3 + \sqrt{z}$, $z_1 = 0$, $x_1 = 3$, $z_2 = 16$, $x_2 = 7$.

Итак, получаем

$$\begin{aligned} \int_2^7 (x-3)^2 dx &= \int_2^3 (x-3)^2 dx + \int_3^7 (x-3)^2 dx = \\ &= \int_1^0 \frac{-z dz}{2\sqrt{z}} + \int_0^{16} \frac{z dz}{2\sqrt{z}} = -0,5 \int_1^0 \sqrt{z} dz + 0,5 \int_0^{16} \sqrt{z} dz = \\ &= -0,5 \left. \frac{z^{3/2}}{3/2} \right|_1^0 + 0,5 \left. \frac{z^{3/2}}{3/2} \right|_0^{16} = \frac{65}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2.9. Если в интеграле

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

без учета требований к функции, с помощью которой осуществляется замена переменной, формально положить $z = \frac{1}{x}$, то

$$I = \int_{-1}^1 \frac{(-dz/z^2)}{1+1/z^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dz}{1+z^2} = -I.$$

Такой результат получился, потому что, во-первых, функция $z = \frac{1}{x}$ не существует в точке $x = 0$, принадлежащей отрезку интегрирования, во-вторых, конечный отрезок интегрирования $x \in [-1, 1]$ эта функция приводит в две полупрямые $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

Пример 2.10. $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x dx.$

Решение. Совершим замену $z = \sin x$ и учтем, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \sin x dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 x d \sin x = 2 \int_0^1 z^4 dz = 2 \frac{z^5}{5} \Big|_0^1 = \\ &= 2 \left(\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{2}{5} = 0,4. \end{aligned}$$

Пример 2.11. $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^3}.$

Решение. Применим подстановку $z = 1 + x^3$:

$$I = \int_1^2 \frac{dz}{3z} = \frac{1}{3} \ln |z| \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,231.$$

Пример 2.12. $I = \int_0^4 x (1-x^2)^{1/5} dx.$

Решение. Формальное применение тригонометрической замены $x = \sin t$ здесь невозможно, так как при такой замене переменной ни при каких t не получится отрезок $[0, 4]$ изменения x . Желательно воспользоваться подстановкой

$$z = 1 - x^2, x dx = -0,5 dz, x_1 = 0 \rightarrow z_1 = 1, x_2 = 4 \rightarrow z_2 = -15.$$

$$I = \frac{1}{2} \int_1^{-15} z^{\frac{1}{5}} (-dz) = \frac{1}{2} \frac{5}{6} z^{\frac{6}{5}} \Big|_1^{-15} = \frac{5}{12} \left((-15)^{\frac{6}{5}} - 1^{\frac{6}{5}} \right) \approx 10,33.$$

В следующих примерах продемонстрируем, как следует правильно применять формулы интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 2.13. $\int_{-1}^1 |x| e^{|x|} dx.$

Решение. Здесь подынтегральная функция является четной, чем необходимо воспользоваться, а затем применить формулу интегрирования по частям (2.3):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| e^{|x|} dx &= 2 \int_0^1 x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = 2 \left(x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 \right) = \\ &= 2e^x(x-1) \Big|_0^1 = -2e^0(0-1) = 2. \end{aligned}$$

Пример 2.14. $\int_0^{(\pi/2)^2} \sin \sqrt{x} dx.$

Решение. Вначале покажем неверное решение, приводящее к неинтегрируемой функции. Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{(\pi/2)^2} \frac{\sin \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}} &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x}, \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ dv = \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}, \quad v = -2 \cos \sqrt{x} \end{array} \right| = \\ &= \sqrt{x} (-2 \cos \sqrt{x}) \Big|_0^{(\pi/2)^2} - \int_0^{(\pi/2)^2} \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\cos x = 1$, а $\frac{1}{\sqrt{x}}$ не существует при $x = 0$, то подынтегральная функция $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ на отрезке $\left[0, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ неинтегрируема в смысле определений, приведенных в начале данного параграфа.

Для того чтобы правильно вычислить данный определенный интеграл, воспользуемся методом замены переменной и положим $x = z^2$, $dx = 2zdz$, значению $x_0 = 0$ будет

соответствовать $z_0 = 0$, а значению $x_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z_1 = \frac{\pi}{2}$. После указанной замены исходный интеграл примет вид:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin z (2z dz) = \left| \begin{array}{l} u = z, du = dz, \\ dv = \sin z dz, v = -\cos z \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(-z \cos z \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos z) dz \right) = \\ &= -2(-z \cos z + \sin z) \Big|_0^{\pi/2} = 2. \end{aligned}$$

Пример 2.15. $I = \int_{-1}^1 |x|e^{x^2} dx$.

Решение. Здесь подынтегральная функция — четная, поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 |x|e^{x^2} dx = 2 \int_0^1 xe^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} z = x^2 \\ dz = 2xdx \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_0^1 e^z dz = e^z \Big|_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

Пример 2.16. Доказать, что, если $u(x)$ и $v(x)$ имеют n непрерывных производных на отрезке конечной длины, то справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_a^b uv^{(n)} dx &= \left(uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{(n-1)} u^{(n-1)}v \right) \Big|_a^b - \int_a^b u^{(n)}v dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение. Воспользуемся методом математической индукции.

1) Формула справедлива при $n = 1$, так как совпадает с (2.3).

2) Предположим, что формула справедлива при $k = n - 1$, то есть

$$\begin{aligned} \int_a^b uv^{(n-1)} dx &= \left(uv^{(n-2)} - u'v^{(n-3)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{(n-2)} u^{(n-2)} v \right) \Big|_a^b - (-1)^{(n-1)} \int_a^b u^{(n-1)} v dx. \end{aligned}$$

3) Основываясь на результатах пунктов 1 и 2, докажем справедливость формулы (2.4):

$$\begin{aligned} \int_a^b uv^{(n)} dx &= \int_a^b u(v')^{(n-1)} dx = \left(u(v')^{(n-2)} - u'(v')^{(n-3)} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{(n-2)} u^{(n-2)} (v') \right) \Big|_a^b - (-1)^{(n-1)} \int_a^b u^{(n-1)} (v') dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл возьмем по частям:

$$\int_a^b u^{(n-1)} (v') dx = u^{(n-1)} v \Big|_a^b - \int_a^b u^{(n)} v dx.$$

Подставив последнее выражение в предыдущее, получим формулу (2.4).

Пример 2.17. Оценить верхнюю и нижнюю границы величины интеграла $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$.

Решение. Поскольку функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 2]$, наименьшее и наибольшее значения достигаются на концах отрезка. Эти значения соответственно равны $m = 1$, $M = 3$. Получаем следующую оценку рассматриваемого интеграла:

$$2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 6.$$

Пример 2.18. Оценить верхнюю и нижнюю границы величины интеграла $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

Решение. $\frac{1}{1+3\sin^2(\pi/6)} \leq \frac{1}{1+3\sin^2 x} \leq \frac{1}{1+3\sin^2 0}$.

Отсюда $\frac{2\pi}{21} \leq \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1+3\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6}$.

Пример 2.19. Найти $\bar{f}$ — среднее интегральное значение функции $f(x) = (1+x)^3$ на отрезке $x \in [2, 4]$.

Решение. По определению среднего интегрального значения

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \int_2^4 \frac{(1+x^3) dx}{4-2} = 0,5 \left(x + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_2^4 = \\ &= 0,5 \left((4-2) + \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} \right) \right) = 31.\end{aligned}$$

Пример 2.20. Получить рекуррентную формулу для интеграла

$$I_n = \int_a^b (a^2 - x^2)^n dx, \text{ связывающую } I_n \text{ с } I_{n-1}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\int_a^b (a^2 - x^2)^n dx &= \int_a^b (a^2 - x^2)^{n-1} (a^2 - x^2) dx = \\ &= a^2 \int_a^b (a^2 - x^2)^{n-1} dx - \int_a^b x (a^2 - x^2)^{n-1} x dx = \\ &= a^2 I_{n-1} + 0,5 \int_a^b x (a^2 - x^2)^{n-1} d(a^2 - x^2) = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, dv = 0,5 (a^2 - x^2)^{n-1} d(a^2 - x^2), \\ v = -\frac{(a^2 - x^2)^n}{2n}, n \neq 0 \end{array} \right| = \\ &= a^2 I_{n-1} - \frac{(a^2 - x^2)^n x}{2n} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{(a^2 - x^2)^n dx}{2n} = \\ &= a^2 I_{n-1} + \frac{b(a^2 - b^2)^n x}{2n} - \frac{1}{2n} I_n.\end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } I_n = \frac{2n}{2n+1} \left(a^2 I_{n-1} + \frac{b(a^2 - b^2)^n}{2n} \right).$$

Пример 2.21. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\int_0^{x^2} \cos x \, dx \right) / x \right)$.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталья, так как здесь имеется неопределенность типа «0/0».

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos x \, dx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} \cos x \, dx \right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{1} = 0.$$

Пример 2.22. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\sin x} \, dx / \int_0^x \cos(x^2) \, dx \right).$$

Решение. В соответствии с правилом Лопиталья и правилами дифференцирования определенных интегралов преобразуем предел так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\sin x} \, dx \right)' / \left(\int_0^x \cos(x^2) \, dx \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(\operatorname{arctg} x)}}{(1+x^2)\cos x^2} = 1.$$

2.3.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.3.1.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x \in [a, +\infty)$ и интегрируема в смысле определений (2.1) и (2.2) на каждом конечном отрезке $x \in [a, b < \infty)$, тогда назовем несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ в пределах от a до ∞ следующую величину:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx. \quad (2.5)$$

Несобственный интеграл называется сходящимся, если предел, участвующий в его определении, существует и конечен, и расходящимся, если этот предел не существует или равен бесконечности.

Аналогично можно ввести несобственные интегралы первого рода в пределах от $-\infty$ до конечного b :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (2.6)$$

или интегралы первого рода от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx, \quad (2.7)$$

где a и b стремятся к $-\infty$ и $+\infty$ независимо друг от друга.

Если предел (2.7) не существует при независимом стремлении a и b к их пределам, но существует при $a = -l$, $b = l$, $l > 0$, $l \rightarrow +\infty$, то этот предел называют главным значением расходящегося интеграла (2.7) и используют обозначение

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (2.8)$$

(V.p. — начальные буквы французских слов «Valeur principale» — «Главное значение»). Несобственные интегралы первого рода называют еще и несобственными интегралами с бесконечными пределами интегрирования.

Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода

Критерий Коши. Для сходимости интеграла (2.6) необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого и положительного ε существовал $x_0 > a$, что при всех конечных $x_1 > x_0$ и $x_2 > x_0$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (2.9)$$

Первая форма признака сравнения. Если на полупрямой $x \in [a, \infty)$ две неотрицательные функции $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$ связаны неравенством $u(x) \leq C v(x)$, где $C > 0$, то из сходимости «большого» интеграла $\int_a^\infty v(x) dx$ следует сходимость «меньшего» интеграла $\int_a^\infty u(x) dx$, а из расходимости «меньшего» интеграла — расходимость «большого» интеграла. В частности, если $u(x) < \frac{\text{const}}{x^n}$, $\text{const} > 0$, то при $n > 1$ $\int_a^\infty u(x) dx$ — сходится, а при $n \leq 1$ этот интеграл расходится.

Вторая форма признака сравнения. Если на полупрямой $x \in [a, \infty)$ две неотрицательные функции $u(x) \geq 0$ и $v(x) > 0$ связаны соотношением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \text{const} \neq 0,$$

то оба несобственных интеграла $\int_a^\infty v(x) dx$ и $\int_a^\infty u(x) dx$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. В частности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x) x^n) = \text{const} \neq 0,$$

то при $n > 1$ $\int_a^\infty u(x) dx$ — сходится, а при $n \leq 1$ этот интеграл расходится.

Признак Дирихле. Если непрерывно дифференцируемая на полупрямой $x \in [a, \infty)$ функция $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ монотонно убывает и стремится к нулю, функция $v(x)$ имеет ограниченную первообразную, то интеграл $\int_a^\infty f(x)v(x) dx$ сходится.

Признак Абеля. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены при $x \in [a, \infty)$ и пусть $\int_a^\infty v(x) dx$ сходится, $v(x)$ монотонна и ограничена $|v(x)| \leq C$ ($C = \text{const} > 0$) при $x \in [a, \infty)$, тогда интеграл $\int_a^\infty f(x)v(x) dx$ сходится.

Интегралы (2.5)–(2.7) называются абсолютно сходящимися, если сходятся соответствующие несобственные интегралы от модуля подынтегральной функции. Если же интегралы

(2.5)–(2.7) сходятся, а интегралы от модуля $|f(x)|$ расходятся, то сходимость называется условной.

Из абсолютной сходимости несобственного интеграла следует его сходимость.

Если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_a^x f(x) dx}{x - a} = M(f),$$

то он называется средним значением функции $F(x)$ на интервале (a, ∞) .

Некоторые несобственные интегралы имеют специальные названия и используются в качестве «эталонов» для признаков сравнения.

Интеграл Эйлера–Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.10)$$

Интеграл Фруллани

$$\int_0^{\infty} (f(ax) - f(bx)) dx/x = \left[f(0) - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ a > 0, b > 0. \quad (2.11)$$

Интеграл — разрывной множитель Дирихле

$$\int_0^{\infty} (\sin(\alpha x) \sin(\beta x) \sin(\gamma x)) dx/x = \begin{cases} \pi/4, & \alpha < \beta + \gamma \\ \pi/8, & \alpha = \beta + \gamma \\ 0, & \alpha > \beta + \gamma \end{cases}. \quad (2.12)$$

Интеграл Дирихле

$$\int_0^{\infty} (\sin(ax) dx/x) = \begin{cases} \pi/2, & a > 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

Интеграл Френеля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (2.14)$$

2.3.2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА

Вычислить несобственные интегралы первого рода или доказать их расходимость.

Пример 2.23. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$.

Решение. По определению несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x^{1/2}} \right) \Big|_1^b = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.24. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.5)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} (0,5 \operatorname{arctg}(0,5x)) \Big|_0^b = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2.25. $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

Решение. В соответствии с формулой (2.6) получим

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = 1.$$

Пример 2.26. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+18}$.

Решение. Применим формулу (2.7)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+18} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2+6x+18} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{(x+3)^2+9} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+3}{3} \right) \Big|_a^b = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2.27. Исследовать на сходимость интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \cos^2 x}$.

Решение. Поскольку $\frac{x}{1+x^2 \cos^2 x} \geq \frac{x}{1+x^2}$, а «меньший» интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x dx}{1+x^2} = 0,5 \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(1+b^2) - \ln 1) = \infty$$

расходится, то по первой форме признака сравнения «большой» интеграл I также расходится.

Пример 2.28. Вычислить $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$.

Решение. С помощью формулы интегрирования по частям найдем

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = - \lim_{b \rightarrow \infty} x^n e^{-x} \Big|_0^b + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

отсюда

$$I_n = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^n e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-b^n e^{-b} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx \right) = n I_{n-1}.$$

Найдем $I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx$:

$$I_0 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^0 - e^{-b}) = 1.$$

Таким образом

$$I_1 = 1 \cdot I_0 = 1, \quad I_2 = 2 \cdot I_1 = 2, \dots, \quad I_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Пример 2.29. Доказать, что интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$$

не зависит от a .

Решение. Разобьем область интегрирования $x \in [0, \infty)$ на две подобласти $x \in [0, 1]$ и $x \in [1, \infty)$. Тогда

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = I_1 + I_2.$$

В первом интеграле произведем замену переменной

$$z = \frac{1}{x}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad x \in [0, 1] \Rightarrow z \in [1, \infty),$$

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{dz}{(1+z^2)(1+z^{-a})},$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_1^\infty \frac{dz}{(1+z^2)(1+z^{-a})} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} =$$

отсюда

$$= \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^a} + \frac{x^a}{1+x^a} \right) = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Последнее выражение уже не зависит от a . Вычислим получившийся интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Пример 2.30. Доказать, что при $m > 0$ и при $a > 0$ интегралы $\int_a^\infty \frac{\sin x \, dx}{x^m}$ и $\int_a^\infty \frac{\cos x \, dx}{x^m}$ сходятся.

Решение. Воспользуемся признаком Дирихле.

Пусть $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $v(x) = x^{-m}$. Имеем

$$\left| \int_a^b \sin x \, dx \right| = |\cos a - \cos b| \leq 2, \quad \left| \int_a^b \cos x \, dx \right| = |\sin b - \sin a| \leq 2.$$

Таким образом, функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют ограниченные первообразные при любых $b > a$, а x^{-m} монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, следовательно для интегралов I_1 и I_2 выполняются все условия признака Дирихле и они сходятся.

Пример 2.31. Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x \, dx}{x}.$$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение с помощью формулы $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Имеем $I = \frac{1}{2} \left(\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x} \right)$. Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x}$ сходится по признаку Дирихле. В самом деле $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $f(x)$ монотонно убывает с ростом x ;

$$v(x) = \cos 2x, \left| \int_1^b v(x) \, dx \right| = \left| \int_1^b \cos 2x \, dx \right| = |0,5(\sin 2b - \sin 2)| \leq 1.$$

Однако интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, значит, исходный интеграл I также расходится.

Пример 2.32. Доказать, что интеграл $I = \int_1^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{(1+x^2)\sqrt{4+x^2}}$ сходится.

Решение. Воспользуемся признаком Абеля. Имеем

$$u(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Интеграл $\int_1^{\infty} u(x) \, dx = \int_1^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{1+x^2}$ сходится по признаку сравнения в форме неравенства: $\left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ «большой» интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, значит, сходится и «меньший» интеграл ($n = 2 > 1$). Функция $v(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ монотонно возрастает и

ограничена $|v(x)| \leq 1$ при всех $x \in [a, \infty)$. Таким образом, все условия признака Абеля выполнены и интеграл I сходится.

В следующих примерах вычислить несобственные интегралы первого рода в смысле главного значения.

Пример 2.33. $I = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 dx}{1+x^2}$.

Решение. В соответствии с формулой (2.8) получим

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{x^3 dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} x dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^a x dx - \int_{-a}^a \frac{x}{1+x^2} dx \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^a - \frac{1}{2} |\ln(1+x^2)|_{-a}^a \right) = 0. \end{aligned}$$

Пример 2.34. $I = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x) dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} - \int_{-a}^a \frac{x dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\arctg x + 0,5 \ln(1+x^2) \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\arctg a - \arctg(-a) + 0,5 (\ln(1+a^2) - \ln(1+(-a)^2)) \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\arctg a + \arctg a + 0,5 (\ln(1+a^2) - \ln(1+a^2)) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Пример 2.35. $I = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2x) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(0,5 \int_{-a}^a \sin(2x) d(2x) \right) = 0,5 \lim_{a \rightarrow \infty} (-\cos(2a) + \cos(-2a)) = \\ &= 0,5 \lim_{a \rightarrow \infty} (-\cos(2a) + \cos(2a)) = 0. \end{aligned}$$

Пример 2.36. $I = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \text{arctg } x \, dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \text{arctg } x \, dx = \left| u = \text{arctg } x, \, du = \frac{dx}{1+x^2} \right| = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(x \text{arctg } x \Big|_{-a}^a - \int_{-a}^a \frac{x \, dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(a \text{arctg } a - (-a) \text{arctg } (-a) - \right. \\ &\quad \left. - 0,5 \ln(1+a^2) + 0,5 \ln(1+(-a)^2) \right) = 0. \end{aligned}$$

Пример 2.37. Найти среднее значение функции $u(x) = \sin^2(2x)$ на полуинтервале $[0, \infty)$.

Решение.

$$\begin{aligned} M(u) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x \frac{\sin^2(2x) \, dx}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0,5 \left(\int_0^x \frac{1 - \cos(4x) \, dx}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{0,5x - 0,125 \sin 4x}{x} \right) = 0,5. \end{aligned}$$

2.3.3.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Если $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \pm\infty$, а на интервалах $[a, c-\alpha]$, $[c+\beta, b]$ ($c-\alpha > a$ и $c+\beta < b$) функция $f(x)$ интегрируема в смысле определений (2.1) и (2.2), то несобственным интегралом второго рода будем называть следующую величину:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^{c-\alpha} f(x) \, dx + \lim_{\beta \rightarrow +0} \int_{c+\beta}^b f(x) \, dx. \quad (2.15)$$

Замечание. Если $c = a$ или $c = b$, то соответствующие несобственные интегралы второго рода будут определяться с помощью следующих соотношений:

$$\int_c^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{c+\alpha}^b f(x) dx, \quad (2.16)$$

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^{c-\alpha} f(x) dx. \quad (2.17)$$

Если несобственный интеграл (2.15) при независимом стремлении α и β к нулю справа расходится, но существует и конечная величина

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \int_{c+\alpha}^b f(x) dx \right),$$

то этот предел называется главным значением расходящегося интеграла (2.15) и используется обозначение

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \int_{c+\alpha}^b f(x) dx \right). \quad (2.18)$$

Несобственные интегралы второго рода называют еще и несобственными интегралами от неограниченных функций.

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода

Критерий Коши. Для сходимости интеграла (2.15) от непрерывной на полуинтервале $x \in (c, b]$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого сколько угодно малого $\varepsilon > 0$ существовало значение $\delta > 0$ такое, что из неравенств

$$0 < x_1 - c < \delta, \quad 0 < x_2 - c < \delta$$

следовало бы неравенство

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (2.19)$$

Первая форма признака сравнения. Если на полуинтервале $x \in (a, c]$ две неотрицательные функции $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$ связаны неравенством

$$u(x) \leq P v(x), \text{ где } P = \text{const} > 0,$$

и в точке $x = c$ выполняются соотношения $\lim_{x \rightarrow c-0} u(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x \rightarrow c-0} v(x) = \pm\infty$, то из сходимости «большого» интеграла $\int_a^c v(x) dx$ следует сходимость «меньшего» $\int_a^c u(x) dx$ интеграла, а из расходимости «меньшего» интеграла $\int_a^c u(x) dx$ следует расходимость «большого» интеграла $\int_a^c v(x) dx$.

В частности, если $0 \leq u(x) < \text{const}/(x-c)^n$, то при $n < 1$ интеграл сходится, а при $n \geq 1$ — расходится.

Вторая форма признака сравнения. Если на полуотрезке $x \in [a, c)$ две неотрицательные функции $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$, для которых выполняются условия $\lim_{x \rightarrow c-0} u(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow c-0} v(x) = \pm\infty$, связаны соотношением

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{u(x)}{v(x)} = \text{const} > 0,$$

то оба несобственных интеграла $\int_a^c u(x) dx$ и $\int_a^c v(x) dx$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся, в частности, если $\lim_{x \rightarrow c-0} (u(x)(x-c)^n) = \text{const} \neq 0$ то при $n < 1$ $\int_a^c u(x) dx$ сходится, а при $n \geq 1$ — расходится.

Признак Дирихле. Если непрерывно дифференцируемая на полуотрезке $x \in [a, c)$ функция $f(x)$ при $x \rightarrow c-0$ монотонно убывает, стремясь к нулю, а функция $v(x)$ имеет ограниченную первообразную и при $x \rightarrow c-0$ $f(x)v(x) \rightarrow \pm\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^c f(x)v(x) dx$ сходится.

Признак Абеля. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены при $x \in [a, c)$ и пусть:

1. $u(x) \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow c - 0$ и $\int_a^c u(x) dx$ — сходится.
2. $v(x)$ — монотонна и ограничена $|v(x)| \leq c$ ($c = \text{const} > 0$) при $x \in [a, c]$.

Тогда несобственный интеграл второго рода $\int_a^c f(x)v(x) dx$ сходится.

Интегралы (2.5)–(2.7) называются абсолютно сходящимися, если сходятся соответствующие несобственные интегралы от модуля подынтегральной функции. Если же эти интегралы сходятся, а интегралы от модуля $|f(x)|$ расходятся, то сходимость называется условной.

Из абсолютной сходимости несобственного интеграла следует его сходимость.

Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \in [a, c)$, выполняется условие $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \pm\infty$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \int_a^x \frac{f(x) dx}{c-a} = M(f),$$

тогда он называется средним значением функции $f(x)$ на интервале.

2.3.4. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВТОРОГО РОДА

Вычислить несобственные интегралы второго рода или доказать их расходимость.

Пример 2.38. $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение. В соответствии с формулами (2.16) и (2.17) имеем

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1+\alpha}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \\
 &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 + \arcsin 0 - \arcsin(-1+\alpha)] = \\
 &= 2 \arcsin 1 = \pi.
 \end{aligned}$$

Пример 2.39. $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших рациональных дробей первого типа и затем воспользуемся формулой (2.17)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{3} \int_0^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{x-4}{x-1} \right| \Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{3} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{-3-\varepsilon}{-\varepsilon} \right| - \ln 4 \right) = \infty
 \end{aligned}$$

интеграл расходится.

Пример 2.40. $I = \int_0^{0,5} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

Решение.

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{0,5} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{-1}{\ln x} \Big|_{\varepsilon}^{0,5} = \\
 &= -\frac{1}{\ln 0,5} + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\ln \varepsilon} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,443.
 \end{aligned}$$

Пример 2.41. $I = \int_0^1 \ln x dx.$

Решение.

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = \lim_{a \rightarrow +0} \left(x \ln x \Big|_a^1 - \int_a^1 x \frac{dx}{x} \right) = \\
 &= - \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\ln a}{1/a} - 1 = [\text{применим правило Лопиталя}] = \\
 &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1/a}{1/a^2} - 1 = -1.
 \end{aligned}$$

Пример 2.42. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx$, ($m > 0, n > 0$).

Решение. Введем обозначение $F(m) = \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx$, тогда производная

$$\frac{dF(m)}{dm} = \int_0^1 \frac{x^m \ln x \, dx}{\ln x} = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

Отсюда $F(m) = \int_0^m \frac{dm}{m+1} = \ln|m+1| + C$, но при $m = n$ $F(n) = 0$, поэтому $C = -\ln(n+1)$, таким образом,

$$F(m) = \ln|m+1| - \ln|n+1| = \ln \left| \frac{m+1}{n+1} \right|.$$

Пример 2.43. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{(-1)^{[1/x]} dx}{x}$, где $[1/x]$ означает целую часть от числа $1/x$, т. е. наибольшее целое, не превышающее $1/x$.

Решение. Интеграл от модуля подынтегральной функции

$$\int_0^1 \left| (-1)^{[1/x]} \frac{dx}{x} \right| = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow +0} \ln x \Big|_a^1 = \infty$$

расходится.

Докажем условную сходимость этого интеграла. Прежде всего, сделаем замену $\frac{1}{t} = x$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, после этого получим:

$$I = \int_0^1 (-1)^{[1/x]} \frac{dx}{x} = \int_1^\infty (-1)^{[x]} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b (-1)^{[x]} \frac{dx}{x}.$$

Сначала рассмотрим частный случай $b = n$, где n — натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{n_1}^{n_2} (-1)^{[x]} \frac{dx}{x} \right| &= \left| \sum_{p=n_1}^{n_2-1} \int_p^{p+1} (-1)^p \frac{dx}{x} \right| = \\ &= \left| \sum_{p=n_1}^{n_2-1} (-1)^p \ln \frac{p+1}{p} \right| < \ln \frac{n_1+1}{n_1}. \end{aligned}$$

По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ выберем n_0 таким образом, чтобы при $n_1 \geq n_0 > 1$

$$\ln \frac{n_1}{n_1-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для этого достаточно положить

$$n_0 = \left\lceil \frac{e^{\varepsilon/3}}{e^{\varepsilon/3} - 1} \right\rceil + 1.$$

Теперь, если $x_2 > x_1 \geq n_0 + 1$ любые действительные числа, тогда имеем (при этом выбираем n_1 и n_2 так, чтобы $x_1 \leq n_1 < n_2 \leq x_2$ и $n_1 - x_1 < 1$, $x_2 - n_2 < 1$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} (-1)^{[x]} \frac{dx}{x} \right| &\leq \left| \int_{x_1}^{n_1} (-1)^{[x]} \frac{dx}{x} \right| + \left| \int_{n_1}^{n_2} (-1)^{[x]} \frac{dx}{x} \right| + \left| \int_{n_2}^{x_2} (-1)^{[x]} \frac{dx}{x} \right| \leq \\ &\leq \ln \frac{n_1}{n_1-1} + \ln \frac{n_1+1}{n_1} + \ln \frac{n_2+1}{n_2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно критерию Коши, рассмотренному ранее в этой главе, интеграл сходится.

Пример 2.44. Исследовать на условную и абсолютную сходимость несобственный интеграл

$$I = \int_0^2 \left[2x \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) - \frac{2\pi}{x} \cos \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right] dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^2 \left(2x \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) - \frac{2\pi}{x} \cos \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right) dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^2 \left(x^2 \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right)' dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(2^2 \sin \left(\frac{\pi}{2^2} \right) - a^2 \sin \left(\frac{\pi}{a^2} \right) \right) = 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) - 0 = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Интеграл сходится. Теперь исследуем интеграл от модуля прежней подынтегральной функции

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left| 2x \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) - \frac{2\pi}{x} \cos \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right| dx &= \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^2 \left| 2x \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) - \frac{2\pi}{x} \cos \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right| dx. \end{aligned}$$

Если $x \in \left[\sqrt{\frac{2}{2+4n}}, \sqrt{\frac{2}{1+4n}} \right]$, тогда $\frac{\pi}{x^2} \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n \right]$ и поэтому подынтегральная функция для этих значений x будет положительной. Оценим снизу рассматриваемый интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left| 2x \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) - \frac{2\pi}{x} \cos \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right| dx &= \int_0^2 \left| x^2 \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right|' dx > \\ &> \sum_{k=0}^n \int_{\sqrt{2/(2+4k)}}^{\sqrt{2/(1+4k)}} \left(x^2 \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right) \right)' dx = \sum_{k=0}^n \frac{2}{1+4k}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2}{1+4k} = +\infty$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_0^n \frac{2 dx}{1+4x} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{2 dx}{1+4x}.$$

И убеждаемся, что

$$\frac{2}{1+4x} \leq \frac{2}{1+4k}, \quad x \in [k, k+1], \quad \int_k^{k+1} \frac{2 dx}{1+4x} \leq \frac{2}{1+4k},$$

$$\int_0^n \frac{2 dx}{1+4x} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{2 dx}{1+4x} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{1+4k}.$$

Однако интеграл слева стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$:

$$\int_0^n \frac{2 dx}{1+4x} = \frac{1}{2} \ln(1+4x) \Big|_0^n = \frac{1}{2} \ln(1+4n) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Сходимость условная.

Пример 2.45. $I = \text{V.p.} \int_{1/e}^e \frac{dx}{x \ln x}$. Вычислить несобственный интеграл второго рода в смысле главного значения.

Решение. В соответствии с формулой (2.18)

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\int_{1/e}^{1-a} \frac{d(\ln x)}{\ln x} + \int_{1+a}^e \frac{d(\ln x)}{\ln x} \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\ln |\ln x| \Big|_{1/e}^{1-a} + \ln |\ln x| \Big|_{1+a}^e \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} (\ln |\ln(1-a)| - \ln |\ln 1 - \ln e| + \ln |\ln e| - \ln |\ln(1+a)|) = \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1-a)}{\ln(1+a)} \right| = \ln \left| \lim_{a \rightarrow +0} \frac{(\ln(1-a))'}{(\ln(1+a))'} \right| = \\ &= \ln \left| \lim_{a \rightarrow +0} \left(-\frac{1+a}{1-a} \right) \right| = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Пример 2.46. Найти среднее значение функции $u(x) = 1/\sqrt{x}$ на полуинтервале $x \in (0, 1]$.

Решение.

$$M(x) = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\int_a^1 \frac{dx/\sqrt{x}}{1-0} \right) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}}{1} = 2.$$

2.4.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Площадь плоской кривой

Площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми, заданными своими уравнениями в декартовых координатах: сверху — $y = y_1(x)$, снизу — $y = y_2(x)$, а слева и справа отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \left| \int_a^b (y_1(x) - y_2(x)) dx \right|. \quad (2.20)$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми, заданными своими уравнениями в декартовых координатах: справа — $x = x_1(y)$, слева — $x = x_2(y)$, а снизу и сверху отрезками прямых $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле

$$S = \left| \int_c^d (x_1(y) - x_2(y)) dy \right|. \quad (2.21)$$

Площадь замкнутой плоской фигуры, ограниченной кривой, которая задана параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq T$ можно вычислить с помощью одной из трех формул (предполагается, что при возрастании t от 0 до T кривая обходится против часовой стрелки).

$$S = \int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt = 0,5 \int_0^T (x(t)y'(t) + y(t)x'(t))dt. \quad (2.22)$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$ и отрезками двух полупрямых $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

$$S = 0,5 \left| \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(\varphi))^2 d\varphi \right|. \quad (2.23)$$

Длина дуги

Длина дуги гладкой кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), вычисляется по формуле

$$L = \left| \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \right|. \quad (2.24)$$

Длина дуги гладкой кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат $x = x(y)$ ($c \leq y \leq d$), вычисляется по формуле

$$L = \left| \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy \right|. \quad (2.25)$$

Длина дуги гладкой кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) вычисляется по формуле

$$L = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right|. \quad (2.26)$$

Длина дуги гладкой кривой, заданной параметрическими уравнениями в трехмерном пространстве $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) вычисляется по формуле

$$L = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \right|. \quad (2.27)$$

Длина дуги гладкой кривой, заданной полярным уравнением, $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ вычисляется по формуле

$$L = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \right|. \quad (2.28)$$

Площадь поверхности вращения

Если участок гладкой кривой вращается вокруг произвольной оси, то площадь образуемой при этом поверхности вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \left| \int_{r_1}^{r_2} G(l(r)) dl(r) \right|, \quad (2.29)$$

где dl — дифференциал дуги l , $G(l(r))$ — расстояние от точки на кривой до оси вращения, r_1 и r_2 — значения переменной дуги r , соответствующие концам дуги.

Если участок гладкой кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), вращается вокруг оси OX , то площадь образуемой при этом поверхности вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \left| \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \right|. \quad (2.30)$$

Если участок гладкой кривой, заданной в декартовой системе координат уравнением $x = g(y)$ ($c \leq y \leq d$), вращается вокруг оси OY , то площадь образуемой при этом поверхности вычисляется по формуле

$$S_y = 2\pi \left| \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy \right|. \quad (2.31)$$

Если участок гладкой кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) вращается

вокруг оси OX , то площадь образуемой при этом поверхности вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right|. \quad (2.32)$$

Если участок гладкой кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) вращается вокруг оси OY , то площадь образуемой при этом поверхности вычисляется по формуле

$$S_y = 2\pi \left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right|. \quad (2.33)$$

Если участок дуги задан в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), то площадь поверхности вращения вокруг полярной оси вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \right|. \quad (2.34)$$

Объем тела

Обозначим через $S(x)$ непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию, которая равна площади сечения, перпендикулярного оси OX , некоторого тела, тогда объем этого тела вычисляется по формуле

$$V = \left| \int_a^b S(x) dx \right|. \quad (2.35)$$

Обозначим через $Q(y)$ непрерывную на отрезке $[c, d]$ функцию, которая равна площади сечения, перпендикулярного оси OY , некоторого тела, тогда объем этого тела вычисляется по формуле

$$V = \left| \int_c^d Q(y) dy \right|. \quad (2.36)$$

Если криволинейная трапеция $y = y(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, вращается вокруг оси OX , то объем получающегося при этом тела вращения находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (2.37)$$

При задании кривой параметрически $x = x(t) \geq 0$, $y = y(t) \geq 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$, если на данном отрезке $x'(t) \geq 0$, то объем тела вращения вокруг оси OX

$$V = \left| \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 x'(t) dt \right|. \quad (2.38)$$

Если криволинейная трапеция $y = y(x) \geq 0$, $0 \leq a \leq x \leq b$ вращается вокруг оси OY , то объем получающегося при этом тела вращения находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b x^2 |f'(x)| dx. \quad (2.39)$$

При задании кривой параметрически $x = x(t) \geq 0$, $y = y(t) \geq 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$, если на данном отрезке $x'(t) \geq 0$, то объем тела вращения вокруг оси OY

$$V = \pi \left| \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) |y'(t)| dt \right|. \quad (2.40)$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой, заданной уравнением в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$ и отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем получающегося тела вращения

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \rho' d\varphi - \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin^3 \varphi d\varphi. \quad (2.41)$$

2.4.1. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 2.47. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболami $y = x^2$ и $y = 8 - x^2$ (рис. 2.2).

Решение. Найдем точки пересечения парабол, для этого решим систему уравнений $y = x^2$ и $y = 8 - x^2$

$$\Rightarrow x_1 = -2, y_1 = 4, x_2 = 2, y_2 = 4.$$

Воспользуемся формулой (2.20) в силу четности подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 [(8 - x^2) - x^2] dx = \int_0^2 [(8 - x^2) - x^2] dx = \\ &= \left[16x - \frac{4}{3}x^3 \right] \Big|_0^2 = \frac{64}{3} = 31\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2.48. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 3x - 2$ и осями координат.

Решение. Поскольку фигура $y = -x^2 + 3x - 2$ расположена в областях с $y \geq 0$ и $y < 0$ (рис. 2.3), то площадь S следует отдельно вычислить для части $y \geq 0$ и части $y < 0$, а затем сложить модули полученных интегралов:

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_0^1 (-x^2 + 3x - 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx \right| = \\ &= \left| \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 \right| = \\ &= \left| -\frac{5}{6} \right| + \left| \frac{1}{6} \right| = 1. \end{aligned}$$

Пример 2.49. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y^2 = x(x - 2)^2$.

Решение. В силу симметрии фигуры (рис. 2.4) можно вычислить половину площади, а затем результат удвоить.

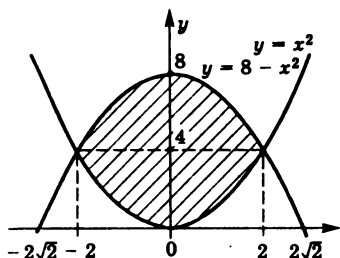


Рис. 2.2.

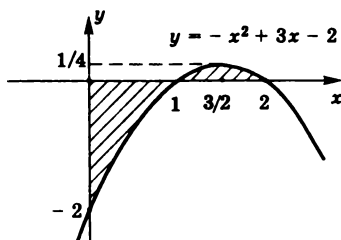


Рис. 2.3.

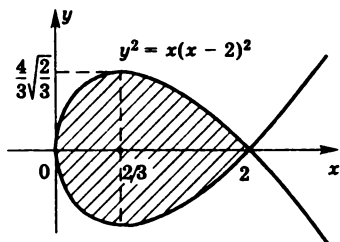


Рис. 2.4.

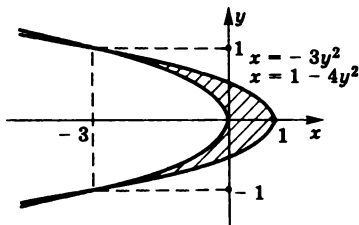


Рис. 2.5.

Найдем пределы интегрирования, при $y = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 \sqrt{x}(x-2) dx \right| &= \left| \int_0^2 (x^{3/2} - 2x^{1/2}) dx \right| = \\ &= \left| \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{4}{3} x^{3/2} \right]_0^2 \right| = \left| -\frac{2^{9/2}}{15} \right|. \end{aligned}$$

Знак минус под модулем означает, что найдена площадь нижней половины. Вся площадь

$$S = 2 \cdot \frac{2^{9/2}}{15} = \frac{2^{11/2}}{15}.$$

Пример 2.50. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x = -3y^2$ и $x = 1 - 4y^2$.

Решение. Фигура, задаваемая данными уравнениями, изображена на рис. 2.5. Она симметрична относительно оси

OX и ее площадь удобно вычислять по формуле (2.21).

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 [(1 - 4y^2) - (-3y^2)] dy = 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy = \\ &= 2 \left[y - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2.51. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = 4 \cos t$, $y = 3 \sin t$.

Решение. Воспользуемся последним равенством из (2.22).

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4 \cos t \cdot 3 \cos t - 3 \sin t(-4 \sin t)] dt = 6 \int_0^{2\pi} dt = 12\pi. \end{aligned}$$

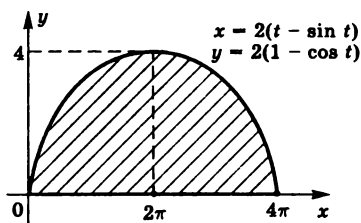


Рис. 2.6.

Пример 2.52. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

Решение. Одна арка циклоиды получается при $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 2.6). Искомую площадь удобно вычис-

лить по первой формуле из (2.22).

$$\begin{aligned} S &= \left| - \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt \right| = \left| - \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t)2(1 - \cos t) dt \right| = \\ &= \left| 4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \right| = \left| 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt \right| = \\ &= \left| 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + 0,5(1 + \cos 2t)) dt \right| = \\ &= 4 |(t - 2 \sin t + 0,5 t + 0,25 \sin 2t)| \Big|_0^{2\pi} = 12\pi. \end{aligned}$$

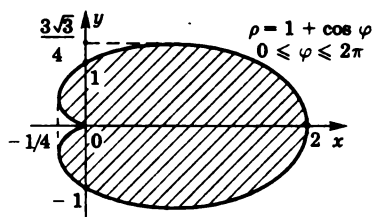


Рис. 2.7.

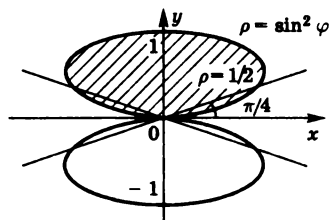


Рис. 2.8.

Пример 2.53. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой $\rho = 1 + \cos \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Решение. Кардиоида изображена на рис. 2.7. Воспользуемся формулой (2.23):

$$\begin{aligned} S &= 0,5 \int_0^{2\pi} (\rho(\varphi))^2 d\varphi = 0,5 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= 0,5 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= 0,5 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + 0,5(1 + \cos 2\varphi)) d\varphi = \\ &= 0,5 (1,5\varphi + 2 \sin \varphi + 0,25 \sin 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2.54. Вычислить площадь одного лепестка кривой $\rho = \sin^2 \varphi$.

Решение. При изменении φ от 0 до π получается один лепесток данной кривой (заштрихованная область на рис. 2.8)

$$\begin{aligned} S &= 0,5 \int_0^{\pi} (\sin \varphi)^2 d\varphi = 0,125 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \\ &= 0,125 \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\ &= 0,125 \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos 2\varphi + 0,5(1 + \cos 4\varphi)) d\varphi = \\ &= 0,125 (1,5\varphi - \sin 2\varphi + 0,125 \sin 4\varphi) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

Пример 2.55. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$ от точки $x = 0$ до точки $x = 9$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.24).

$$\begin{aligned} L &= \int_0^9 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^9 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} d\left(1 + \frac{4}{9}x\right) = \\ &= \frac{8}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^9 = \frac{8}{9} \left(\frac{85}{4} - 1\right). \end{aligned}$$

Пример 2.56. Вычислить длину дуги кривой $x = \ln(\cos y)$ между точками $y = 0$ и $y = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.25).

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin y}{\cos y}\right)^2} dy = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y} dy = \int_0^{\pi/3} \frac{dy}{\cos y} = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) \right| \Big|_0^{\pi/3} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{12} \right) - \ln \left(\frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Пример 2.57. Вычислить длину дуги кривой $x = 0,25y^2 - 0,5 \ln y$, заключенной между точками $y = 1$ и $y = 1,5$.

Решение. В соответствии с формулой (2.25)

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{1,5} \sqrt{1 + \left(0,5y - \frac{0,5}{y}\right)^2} dy = \int_1^{1,5} \sqrt{\left(0,5y + \frac{0,5}{y}\right)^2} dy = \\ &= \int_1^{1,5} \left(0,5y + \frac{0,5}{y}\right) dy = (y - 0,5 \ln |y|) \Big|_1^{1,5} = 0,5(1 - \ln 1,5). \end{aligned}$$

Пример 2.58. Вычислить длину дуги астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Из рис. 2.9 видно, что в силу симметрии достаточно вычислить лишь четвертую часть астроида при

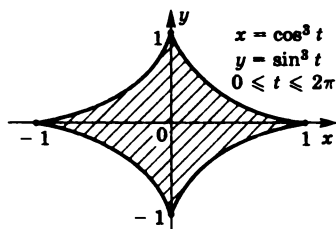


Рис. 2.9.

$0 \leq t \leq \pi/2$. Воспользуемся формулой (2.26):

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \\
 &= 12 \int_0^{\pi/2} |\sin t \cos t| dt = 6 \int_0^{\pi/2} |\sin 2t| dt = 6(-\cos(2t)) \Big|_0^{\pi/2} = 12.
 \end{aligned}$$

Под интегралом необходимо записывать арифметическое значение корня. Если этого не сделать, то можно получить ошибочный результат. В рассматриваемом здесь примере, если бы записали вместо $3 \int_0^{\pi/2} |\sin t \cos t| dt$ интеграл $3 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt$,

то получили бы $\frac{3}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0$ — нулевую длину дуги.

Пример 2.59. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (см. рис. 2.7).

Решение. Воспользуемся формулой (2.28):

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2(1 + \cos \varphi))^2 + (-2 \sin \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \cos^2(\varphi/2)} d\varphi = \\
 &= 4 \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi/2)| d\varphi = 4 \cdot 2 \int_0^{\pi} \cos(\varphi/2) d\varphi = 16 \sin(\varphi/2) \Big|_0^{\pi} = 16
 \end{aligned}$$

(в силу свойств функции $\cos(\varphi/2)$).

Пример 2.60. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением дуги окружности $x^2 + (y - a)^2 = R^2$ вокруг оси OY на участке $0 < y_1 \leq y \leq y_2 < R$.

Решение. Найдем производную неявной функции

$$2xx'_y + 2(y - a) = 0.$$

Воспользуемся формулой (2.31) $S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy$ (внесем x под знак корня)

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + (xx'_y)^2} dy &= 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{R^2 - (y - a)^2 + (y - a)^2} dy = \\ &= 2\pi R \int_{y_1}^{y_2} dy = 2\pi R(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Пример 2.61. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением дуги окружности $x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$) на участке $-1 \geq x \geq 1$ вокруг оси OX .

Решение. Воспользуемся формулой (2.30).

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{1 + \left(-x/\sqrt{16 - x^2}\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 4 dx = 16\pi. \end{aligned}$$

Пример 2.62. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси OX дуги астроида (см. рис. 2.9).

Решение. Воспользуемся формулой (2.32):

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} |\sin^4 t \cos t| dt = \\
 &= 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = 6\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{6}{5} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

Пример 2.63. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ на участке $0 \leq \varphi \leq \pi/4$.

Решение. Общий вид вращаемой кривой изображен на рис. 2.10. Воспользуемся формулой (2.34):

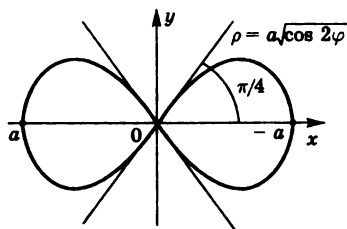


Рис. 2.10.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} &= \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \left(\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \\
 S &= \left| 2\pi \int_0^{\pi/4} \left[a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right] d\varphi \right| = \left| 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \right| = \\
 &= \left| 2\pi a^2 (-\cos \varphi) \right|_0^{\pi/4} = \left| 2\pi a^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right| = \pi a^2 (2 - \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

Пример 2.64. Вычислить объем тела, получаемого вращением части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на участке $0 \leq x \leq a$ вокруг оси OX .

Решение. Воспользуемся формулой (2.35).

$$\begin{aligned}
 V_{OX} &= \pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\
 &= \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2\pi}{3} a b^2.
 \end{aligned}$$

Пример 2.65. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, которая ограничена гиперболой $xy = 2$ и прямыми $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ и $y_3 = 0$.

Решение.

$$V_{OY} = \pi \int_{y_1}^{y_2} (x(y))^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi [-0,25 + 1] = 3\pi.$$

2.5.

МЕХАНИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2.5.1.

АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ СВОИХ АРГУМЕНТОВ

При нахождении некоторой аддитивной физической величины A , зависящей от другой величины $x \in [a, b]$, используют следующий алгоритм.

1) Разбивают отрезок $[a, b]$ сеткой

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

на элементарные отрезки длиной dx .

2) На каждом элементарном отрезке $[x, x + \Delta x]$ в соответствии с физическим законом записывают зависимость между приращениями $\Delta A_i = A(x_{i+1}) - A(x_i)$ и Δx , полагая постоянным на данном отрезке множитель, связывающий эти приращения $f(x)$:

$$\Delta A \cong f(x) \Delta x.$$

3) Приближенно полагают, что приращение ΔA равно дифференциалу dA при малых $dx = \Delta x \ll 1$ (или $n \rightarrow \infty$).

4) Интегрируют обе части равенства:

$$dA = f(x) dx: A = \int_a^b f(x) dx.$$

*Нахождение пути при прямолинейном движении
материальной точки*

Путь $S(t)$, пройденный материальной точкой при прямолинейном движении с переменной скоростью $v(t)$ за время от t_1 до t_2 вычисляется по формуле

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt, \quad (2.42)$$

полученной в предположении, что на всем отрезке времени $[t, t + dt]$ скорость $v(t)$ постоянна и равна значению в левом конце t . В этом случае можно воспользоваться законом прямолинейного движения с постоянной скоростью $dS = v(t) dt$.

*Расчет статических моментов относительно
координатных осей*

Для плоской кривой, задаваемой уравнением в декартовых координатах $y = y(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ и представляющей собой материальную линию с линейной плотностью (массой, приходящейся на единицу длины) $\rho(x)$, статические моменты M_x и M_y относительно координатных осей OX и OY вычисляются по формулам:

$$M_x = \int_a^b \rho(x)y(x)\sqrt{1 + (y'_x)^2} dx, \quad M_y = \int_a^b \rho(x)x\sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (2.43)$$

Если кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то статистические моменты рассчитаются так:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{t_1}^{t_2} \rho(x(t))y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt, \\ M_y &= \int_{t_1}^{t_2} \rho(x(t))x(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Если кривая задана полярным уравнением $r = r(\varphi)$ на участке $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то статистические моменты определяются формулами:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(r \cos \varphi) r \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} d\varphi, \\ M_y &= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(r \cos \varphi) r \cos \varphi \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Формулы (2.43)–(2.45) получены исходя из определения статистического момента материальной точки массой Δm :

$$M_x = y \Delta m, \quad M_y = x \Delta m.$$

Вся кривая разбивается на элементарные участки длиной Δl , на каждом таком участке масса $\Delta m \cong \rho(x) \Delta l$. При малых $\Delta l \cong dl$ дифференциалы статистических моментов имеют вид

$$dM_x = y \rho(x) dl, \quad dM_y = x \rho(x) dl,$$

где плотность на элементарном отрезке постоянна и равна значению в точке левого конца. Далее производится замена дифференциалов дуги в соответствии с подынтегральными выражениями формул (2.24)–(2.26), (2.28) и полученные равенства интегрируются.

Аналогично получаются статистические моменты плоской фигуры, ограниченной линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$, представляющие собой материальную фигуру с поверхностной плотностью в точке (массой, приходящейся на единицу площади) $\rho(x)$:

$$\begin{aligned} M_x &= 0,5 \int_a^b \rho(x) (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx, \\ M_y &= \int_a^b \rho(x) x (y_2(x) - y_1(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Расчет центра масс (центра инерции) плоской кривой

Центр масс плоской кривой вычисляется по формулам:

$$x_c = \frac{M_x}{L}, \quad y_c = \frac{M_y}{L}, \quad (2.47)$$

где L — длина дуги, рассчитываемая по одной из формул (2.24)–(2.26), (2.28), а M_x и M_y — соответствующие статические моменты, определяемые формулами (2.43)–(2.45).

Расчет центра масс плоской фигуры

Центр масс плоской фигуры, ограниченной линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$ и представляющей собой материальную фигуру с поверхностной плотностью $\rho(x)$, вычисляется по формулам:

$$x_c = \frac{M_x}{S}, \quad y_c = \frac{M_y}{S}, \quad (2.48)$$

где S — площадь фигуры, рассчитываемая по формуле (2.20), а M_x и M_y — статические моменты, определяемые формулой (2.46).

Расчет момента инерции

Момент инерции I_0 плоской кривой, задаваемой уравнением в декартовых координатах $y = y(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ и представляющей собой материальную линию с линейной плотностью (массой, приходящейся на единицу длины) $\rho(x)$, относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = \int_a^b \rho(x) (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (2.49)$$

Для расчета момента инерции тела с объемной плотностью ρ относительно заданной оси необходимо разбить его на малые частицы массой $dm = \rho dV$, где dV — элементарный объем, выразить этот объем через ξ — одну из независимых переменных, через которую выражается и расстояние R

рассматриваемой частицы до оси, записать дифференциал момента инерции в виде

$$dI = R^2(\xi)dm(\xi) = R^2(\xi)\rho(\xi)dV(\xi)$$

и проинтегрировать по ξ :

$$I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi)R^2(\xi)dV(\xi). \quad (2.50)$$

Расчет работы силы

Работа A , производимая переменной силой $F(x)$ на участке прямолинейного перемещения $x \in [a, b]$, когда направление силы совпадает с направлением перемещения вычисляется:

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (2.51)$$

Формула (2.51) получена в предположении, что на всем отрезке перемещения $[x, x + dx]$ сила $F(x)$ постоянна и равна значению в левом конце x . Тогда можно воспользоваться законом нахождения работы при постоянной силе, направленной вдоль прямолинейного перемещения $dA = F(x) dx$.

Расчет кинетической энергии

Пусть известны форма тела, вращающегося вокруг заданной оси, например, вокруг оси OX , зависимость скорости движения каждой из малых частиц, на которые разбито его тело, от расстояния r до оси OX . Также возможно выразить зависимость массы частицы dm от r . Тогда кинетическая энергия отдельной частицы вращающегося тела

$$dE = \frac{v^2(r) dm(r)}{2}$$

представляет собой дифференциал от кинетической энергии всего тела E , которая может быть найдена по формуле

$$E = \int_{r_1}^{r_2} \frac{v^2(r) dm(r)}{2}. \quad (2.52)$$

Количество теплоты

Количество теплоты Q , выделяемое переменным током $I(t)$ за время от t_1 до t_2 в проводнике с постоянным активным сопротивлением R , вычисляется по формуле

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} (0,24 I^2(t) R) dt, \quad (2.53)$$

полученной в предположении, что на всем отрезке времени $[t, t + dt]$ ток постоянен и равен току при t , равному значению времени в начале рассматриваемого промежутка. В этом случае можно воспользоваться законом Джоуля–Ленца для постоянного тока и записать:

$$dQ = 0,24 I^2(t) R dt.$$

*Определение давления тела, погруженного в жидкость
или газ*

Пусть ось OX (рис. 2.11), имеющая свое начало на поверхности жидкости, направлена вертикально вниз. Тогда для элемента криволинейной площадки с площадью dS , ограниченной на участке от x до $x + dx$ слева дугой кривой $y_1(x)$,

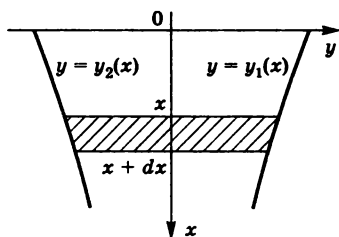


Рис. 2.11.

справа дугой кривой $y_2(x)$ в соответствии с законом Паскаля получим, что элементарная сила давления dF связана с плотностью ρ , ускорением свободного падения g и площадью dS соотношением $dF = \rho g x dS$. Отсюда

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \rho g x dS(x) = \rho g \int_{x_1}^{x_2} x dS(x). \quad (2.54)$$

Расчет энтропии

Дифференциал энтропии dS определяется формулой

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (2.55)$$

где T — абсолютная температура элементарного объема термодинамической системы, при которой этой системе сообщается элементарное количество теплоты dQ . Энтропия сложной системы равна сумме энтропий всех ее однородных частей.

Связь давления P , объема V и температуры T идеального газа постоянной массы определяется законом Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2.56)$$

Изменение энтропии получается интегрированием обеих частей уравнения (2.55).

Расчет количества электричества

Если по проводнику течет переменный ток $I(t)$, где t — время, то, разбивая весь временной промежуток $[t_1, t_2]$ на элементарные отрезки размером dt , можно приближенно считать на каждом таком отрезке $[t, t + dt]$, что ток постоянен и равен значению в момент t . Отсюда дифференциал количества электричества $dQ = I(t) dt$ и полное количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за все время

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt. \quad (2.57)$$

Расчет электрического сопротивления проводника переменного сечений

Пусть известна зависимость $z = z(x, y)$, описывающая геометрическую конфигурацию проводника электрического тока, направление которого ради определенности будем считать совпадающим с направлением оси OX . Мысленно разобьем

проводник плоскостями, перпендикулярными оси OX и отстоящими друг от друга на малое расстояние dx . Если удастся выразить площадь поперечного сечения S через x — $S(x)$, то зная удельное сопротивление ρ и формулу для расчета элементарного сопротивления $dR = \frac{\rho}{S(x)} dx$, можно найти полное сопротивление R по формуле

$$R = \int_0^h \frac{\rho}{S(x)} dx, \quad (2.58)$$

где h — продольный размер проводника в направлении оси OX .

2.5.2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 2.66. Скорость v прямолинейно движущейся точки меняется в зависимости от времени t по закону $v(t) = t \sin 2t$. Определить путь s , пройденный точкой от начала движения до момента времени $t = \frac{\pi}{4}$ единиц времени.

Решение. Поскольку путь $ds = v(t) dt$, то

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} v(t) dt = \int_0^{\pi/4} t \sin 2t dt = \left| \begin{array}{l} u = t, du = dt, dv = \sin 2t dt, \\ v = \int \sin 2t \frac{d(2t)}{2} = -0,5 \cos 2t \end{array} \right| = \\ &= -0,5t \cos 2t \Big|_0^{\pi/4} + 0,5 \int_0^{\pi/4} \cos 2t dt = \\ &= -0,5t \cos 2t \Big|_0^{\pi/4} + 0,25 \sin 2t \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{2} + 0,25 \sin \frac{\pi}{2} = 0,25. \end{aligned}$$

Заметим, что если бы формула $v(t)$ на отрезке $[0, \pi/4]$ изменяла знак, тогда следовало бы находить модуль от интеграла, а затем все результаты сложить:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) dt \right|.$$

Пример 2.67. Вычислить массу плоской кривой $y = \frac{x^3}{3}$ на участке от $x = 0$ до $x = 0,1$ единиц длины, если линейная плотность ρ зависит от координаты x следующим образом: $\rho(x) = 1 + x^2$.

Решение. Элементарная масса участка кривой от $x = 0$ до $x = 0,1$ определяется формулой $dm = \rho(x) dl = \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, отсюда вся масса

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{0,1} \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{0,1} (1 + x^2) \sqrt{1 + x^2} dx = \\ &= \left| x = \operatorname{sh} t, 1 + x^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t, \right. \\ &\quad \left. dx = \operatorname{ch} t dt, x_1 = 0 \rightarrow t_1 = 0, x_2 = 0,1 \rightarrow t_2 = \operatorname{Arsh} 0,1 \right| = \\ &= \int_0^{\operatorname{Arsh} 0,1} \operatorname{ch}^4 t dt = \left| \operatorname{ch}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} \right| = \\ &= \int_0^{\operatorname{Arsh} 0,1} \left(\frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} \right)^2 dt = \int_0^{\operatorname{Arsh} 0,1} (1 + 2 \operatorname{ch} 2t + \operatorname{ch}^2 2t) dt = \\ &= 0,25 \int_0^{\operatorname{Arsh} 0,1} (1 + 2 \operatorname{ch} 2t + 0,5 \operatorname{ch} 4t) dt = \\ &= (0,375t + 0,25 \operatorname{sh} 2t + 0,03125 \operatorname{sh} 4t) \Big|_0^{\operatorname{Arsh} 0,1} = \\ &= \left| \operatorname{Arsh} t = \ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right) \right| = 0,099985655. \end{aligned}$$

Пример 2.68. Найти статистический момент верхней части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно оси OX , если линейная плотность $\rho(x) = \rho_0 x$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.44), предварительно переписав уравнение верхней половины эллипса в параметрическом виде $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \pi$:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{t_1}^{t_2} \rho(x(t))y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \\
&= \rho_0 b \int_0^\pi \cos t b \sin t \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} dt = \\
&= \rho_0 b \int_0^\pi \cos t b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\
&= \rho_0 b \int_0^\pi b \cos t \sin t \sqrt{a^2(1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t} dt = \\
&= -\rho_0 b \int_0^\pi b \cos t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} d(\cos t) = \\
&= \left| \begin{array}{l} z = \cos t, \quad t_1 = 0 \rightarrow z_1 = 1, \\ t_2 = \pi \rightarrow z_2 = -1 \end{array} \right| = \\
&= -\rho_0 b \int_{-1}^1 b z \sqrt{a^2 - c^2 z^2} dz = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{интеграл от нечетной функции} \\ \text{в симметричных пределах} \end{array} \right| = 0.
\end{aligned}$$

Пример 2.69. Найти центр тяжести дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность $\rho = \rho_0 xy$.

Решение. Дифференцируя уравнение окружности как неявную функцию, найдем

$$\begin{aligned}
2x + 2yy' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}, \Rightarrow \\
\Rightarrow dl &= \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} dx = \\
&= \frac{R}{y} dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx.
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (2.43) и (2.47)

$$M_y = \int_0^R \rho_0 x \sqrt{R^2 - x^2} \frac{x R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \rho_0 R \int_0^R x^2 dx =$$

$$= \rho_0 R \frac{x^3}{3} \Big|_0^R = \rho_0 \frac{R^4}{3}.$$

$$M_x = \int_0^R \rho_0 x \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= \rho_0 R \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -0,5 \rho_0 R \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} d(R^2 - x^2) =$$

$$= -\rho_0 \frac{R}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^R = \rho_0 \frac{R^4}{3}.$$

Координаты центра тяжести $x_c = y_c = \frac{2R}{3}$.

Пример 2.70. Вычислить координаты центра тяжести плоской фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной линиями $y = ax^3$ и $y = a$, если плотность постоянна, $\rho = 1$.

Решение. Легко получить координаты точки пересечения линий $y = ax^3$ и $y = a$: $x = 1$, $y = a$. В соответствии с формулами (2.46), (2.47) получаем:

$$M_x = 0,5 \int_0^1 (a^2 - a^2 x^6) dx = 0,5 \left(a^2 x - \frac{a^2 x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{3a^2}{7},$$

$$M_y = \int_0^1 x (a - ax^3) dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{ax^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 0,3a,$$

$$S = \int_0^1 (a - ax^3) dx = \left(ax - \frac{ax^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Отсюда } x_c = \frac{M_y}{S} = 0,4, \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{4a}{7}.$$

Пример 2.71. Найти момент инерции дуги кривой параболы $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) относительно начала координат, если линейная плотность $\rho = \rho_0 \sqrt{1 + 4x}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.48):

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \rho_0 \sqrt{1 + 4x} \left(x^2 - (x^2)^2 \right) \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \\ &= \rho_0 \int_0^1 (x^2 + 4x^3 + x^4 + 4x^5) dx = \\ &= \rho_0 \left(\frac{x^3}{3} + 4x^3 + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{3} \right) \Big|_0^1 = 2,2\rho_0. \end{aligned}$$

Пример 2.72. Вычислить момент инерции плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4a^2x$ и прямой $x = a^2$ относительно оси OY . Поверхностная плотность материала фигуры $\rho = \rho_0 + kx$.

Решение. Разобьем отрезок $[0, a^2]$ на элементарные отрезки длиной dx : $[x, x + dx]$. Выделим элементарные полоски, вырезаемые из фигуры прямыми, проходящими через концы каждого отрезка $[x, x + dx]$ и параллельными оси OY (рис. 2.12). Элементарную по-

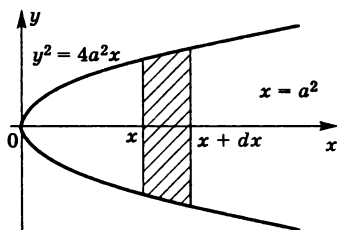


Рис. 2.12.

лоску можно приближенно считать прямоугольником с площадью $dS = 2|y|dx = 2\sqrt{4a^2x} dx = 4a\sqrt{x} dx$. Плотность элементарной полоски можно приближенно считать постоянной и равной значению, которое она принимает в левом конце отрезка $[x, x + dx]$, $\rho = \rho_0 + kx$. Тогда масса dm элементарной полоски:

$$dm = (\rho_0 + kx) dS = (\rho_0 + kx) 4a\sqrt{x} dx$$

и дифференциал момента инерции относительно оси OY

$$dI = x^2 dm = x^2 (\rho_0 + kx) 4a\sqrt{x} dx.$$

Отсюда

$$I_y = \int_0^a 4a(\rho_0 x^{5/2} + kx^{7/2}) dx = \left(8a\rho_0 \frac{x^{7/2}}{7} + 8ak \frac{x^{9/2}}{9} \right) \Big|_0^a = \\ = 8a^{9/2} \left(\frac{\rho_0}{7} + \frac{ka}{9} \right).$$

Пример 2.73. Найти момент инерции однородного цилиндра высотой h , радиусом основания R и плотностью $\rho = \text{const}$.

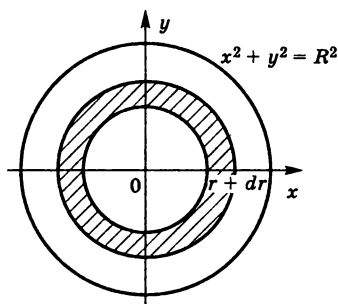


Рис. 2.13.

Решение. Разобьем основание цилиндра на концентрические окружности, радиусы которых отличаются друг от друга на dr (r — расстояние от оси цилиндра до внутренней поверхности). Построим на этих основаниях цилиндры с образующей, параллельной оси данного цилиндра (рис. 2.13). Элементарная масса полого цилиндра вы-

сотой h , внутренним радиусом r и толщиной стенок dr вычисляется в предположении, что плотность при малом изменении r от r до $r + dr$ постоянна и равна значению в левом конце отрезка $[r, r + dr]$. Обозначив через V объем цилиндра, получаем $dm = \rho(r) dV(r) = 2\pi\rho r h dr$ и момент инерции слоя относительно оси цилиндра $dI = r^2 dm = \rho(r) dV(r) = 2\pi h \rho r^3 dr$, отсюда

$$I = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi h \rho r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2\pi h \rho R^4}{4}.$$

Пример 2.74. Вычислить работу, совершаемую телом массой m при падении на поверхность Земли с высоты h .

Решение. Сила F притяжения массы m , расположенной на расстоянии x от поверхности Земли равна $F = \frac{\gamma m M}{(R + x)^2}$, здесь γ — гравитационная постоянная, R — радиус Земли. Элементарная работа $dA = F(x) dx$ (ось OX направлена к

центру Земли по радиусу, начало координат на высоте h от Земли), откуда следует:

$$\begin{aligned} A &= \int_h^0 \frac{\gamma m M}{(R+x)^2} dx = - \left. \frac{\gamma m M}{R+x} \right|_h^0 = \\ &= \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \end{aligned}$$

Поскольку на поверхности Земли $F = mg = \frac{\gamma m M}{R^2}$, то $A = \frac{mgRh}{R+h}$.

Пример 2.75. Определить работу, которую необходимо затратить на то, чтобы сжать упругую пружину на величину Δh единиц длины. Расчеты проводить, считая справедливым закон упругости Гука $F = -kx$.

Решение.

$$A = \int_0^{\Delta h} (-kx) dx = -k \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\Delta h} = -\frac{k \Delta h^2}{2}.$$

Пример 2.76. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать жидкость плотностью ρ из полностью заполненного ею котла высотой H , имеющего форму параболоида вращения, который определяется уравнением $z = a^2(x^2 + y^2)$.

Решение. Мысленно рассечем параболоид плоскостями, параллельными плоскости HOY (рис. 2.14). Пусть на глубине $H - z$ толщина слоя между двумя соседними параллельными плоскостями равна dz , тогда элемент объема жидкости между указанными плоскостями вычисляется по формуле $dV = \pi x^2 dz$.

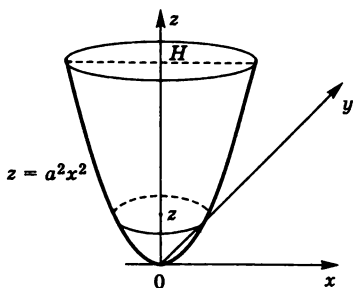


Рис. 2.14.

Из уравнения параболы получим $x^2 = \frac{z}{a^2}$, откуда $dV = \frac{\pi z dz}{a^2}$.

Вес элементарного слоя жидкости $dm = \rho g dV = \rho g \pi z \frac{dz}{a^2}$. Для выкачивания этой массы dm с глубины $H - z$ необходимо затратить элементарную работу $dA = \pi \rho g z (H - z) \frac{dz}{a^2}$. Полная работа по выкачиванию всей жидкости

$$\begin{aligned} A &= \int_0^H \pi \rho g z (H - z) \frac{dz}{a^2} = \frac{\pi \rho g}{a^2} \int_0^H z (H - z) dz = \\ &= \frac{\pi \rho g}{a^2} \int_0^H (zH - z^2) dz = \frac{\pi \rho g}{a^2} \left(\frac{Hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^H = \frac{\pi \rho g H^3}{6a^2}. \end{aligned}$$

Пример 2.77. Вычислить работу A , совершаемую при изотермическом ($T = \text{const}$) расширении идеального газа (давление P связано с абсолютной температурой T и объемом V , массой m и массой одного моля μ и газовой постоянной R , законом $PV = \frac{m}{\mu}RT$).

Решение. $dA = P(V) dV$. Отсюда

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Пример 2.78. Найти кинетическую энергию кругового цилиндра высотой h с плотностью, изменяющейся по закону $\rho(r) = \rho_0 + kr$, где $0 \leq r \leq R$, r — расстояние от оси цилиндра, R — радиус основания, если цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω .

Решение. Разобьем цилиндр на концентрические слои толщиной dr (r — расстояние от оси цилиндра до внутренней поверхности), аналогично задаче 2.72. Тогда

$$dm = 2\pi r h \rho dr = (\rho_0 + kr) 2\pi r h dr.$$

Линейная скорость v массы dm связана с угловой скоростью соотношением $v = r\omega$. Кинетическая энергия полого цилиндра массой dm

$$dE = \frac{v^2(r) dm}{2} = \omega^2 r^2 (\rho_0 + kr) \pi r h dr = \omega^2 \pi h (\rho_0 r^2 + kr^3) dr.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем

$$\begin{aligned} E &= \int_0^R \omega^2 \pi h (\rho_0 r^2 + k r^3) dr = \omega^2 \pi h \left(\int_0^R \rho_0 r^2 dr + \int_0^R k r^3 dr \right) = \\ &= \omega^2 \pi h \left(\frac{\rho_0 r^3}{3} + \frac{k r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \omega^2 \pi h \left(\frac{\rho_0 R^3}{3} + \frac{k R^4}{4} \right). \end{aligned}$$

Пример 2.79. Определить количество теплоты Q , выделяемое током $I = 5 + 4t$ в проводнике с сопротивлением $R = 40$ за время $t = 10$, если известно, что количество теплоты, выделяемое в единицу времени при протекании через проводник с постоянным сопротивлением постоянного тока равно произведению квадрата тока и сопротивления.

Решение.

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) R dt = R \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) dt = 40 \int_0^{10} (5 + 4t)^2 dt = \\ &= 40 \int_0^{10} (5 + 4t)^2 \frac{1}{4} d(5 + 4t) = 40 \frac{(5 + 4t)^3}{3} \Big|_0^{10} = 303750. \end{aligned}$$

Пример 2.80. Вычислить изменение энтропии S идеального газа постоянной массы m при: а) $P = \text{const}$ и изменении объема с V_1 до V_2 ; б) $V = \text{const}$ и изменении давления с P_1 до P_2 ; в) $T = \text{const}$ и изменении объема с V_1 до V_2 .

Решение. а) При изобарном процессе в идеальном газе элементарное количество теплоты dQ связано с массой газа m , массой моля μ , теплоемкостью при постоянном давлении C_p и температурой, таким образом $dQ = \frac{m}{\mu} C_p dT$. Из формулы

(2.56) получим $dQ = \frac{\mu P dV}{mR}$, откуда изменение энтропии

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} C_p \frac{\mu P dV}{mR} \frac{m}{\mu R} \frac{1}{PV} = \\ &= \frac{m}{\mu} C_p \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned}$$

б) При изохорном процессе из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.56) следует $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$, а $dQ = \frac{m}{\mu} C_v dT$, где C_v — теплоемкость при постоянном объеме. В соответствии с формулой (2.56) получим

$$S_1 - S_2 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} C_v \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

в) При изотермическом процессе $dQ = P(V) dV$, подставляя сюда $P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$ из уравнения (2.56), получим для изменения энтропий

$$S_1 - S_2 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Пример 2.81. Найти силу давления, которую испытывает каждая сторона пластинки, имеющей форму полуэллипса, если она погружена вертикально в жидкость так, что большая полуось находится на поверхности жидкости.

Решение. Имеем из уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ для дуги, расположенной в четвертом квадранте

$$y(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

элемент площади $dS = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$, а элемент давления согласно закону Паскаля $dF = \rho g x dS(x) = \rho g x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Отсюда

$$\begin{aligned} F &= \int_{x_1}^{x_2} \rho g x dS(x) = \int_{-a}^a \rho g x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= 2 \int_0^a \rho g x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = -g\rho \frac{2b}{3a} (a^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{2ba^2}{3} \rho g. \end{aligned}$$

Пример 2.82. Вертикальная плотина имеет форму равнобедренной трапеции с верхним основанием $a = 60$ единиц длины, нижним основанием $b = 20$ единиц длины и высотой $h = 10$ единиц длины (рис. 2.15). Вычислить силу давления воды на плотину.

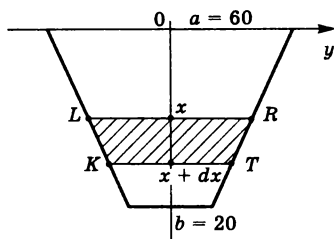


Рис. 2.15.

Решение. Площадь элемента трапеции $LRTK$ приближенно заменяем площадью прямоугольника с основанием LR и высотой dx : $dS(x) = 2 \left(b + \frac{(a-b)(h-x)}{h} \right) dx$. Согласно закону Паскаля получим, что элементарная сила давления

$$dF = \rho g x dS(x) = 2\rho g x \left(b + \frac{(a-b)(h-x)}{h} \right) dx.$$

$$\text{Отсюда } F = 2 \int_0^h \rho g x \left(b + \frac{(a-b)(h-x)}{h} \right) dx = \rho g \frac{h^2}{3}.$$

Пример 2.83. Проводник имеет форму усеченного конуса. Диаметр его в произвольном сечении, отстоящем на расстоянии x от меньшего сечения $y = a + \frac{x(b-a)}{h}$, где a — диаметр меньшего, а b — диаметр большего сечения, h — высота конуса. Зная удельное сопротивление ρ и формулу для расчета элементарного сопротивления $dR = \rho \frac{dx}{S(x)}$, где $S(x)$ — площадь поперечного сечения, найти полное сопротивление R .

Решение. В соответствии с формулой (2.56) получаем

$$\begin{aligned} R &= \int_0^h \frac{\rho}{S(x)} dx = \frac{\rho}{\pi} \int_0^h \frac{dx}{y^2(x)} = \\ &= \left| dy = \frac{(b-a) dx}{h}, x_1 = 0 \rightarrow y_1 = a \right. \\ &\quad \left. dx = \frac{h dy}{b-a}, x_2 = h \rightarrow y_2 = b \right| = \\ &= \frac{4\rho h}{\pi(b-a)} \int_a^b \frac{dy}{y^2} = \frac{4\rho h}{\pi ab}. \end{aligned}$$

2.6. ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

*Задачи на нахождение определенных интегралов
и использование их свойств*

Вычислить определенные интегралы.

$$2.84. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.85. \int_0^4 f(x) dx, \quad \text{где}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ x^3, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$2.86. \int_1^4 |x-3| dx.$$

$$2.87. \int_2^3 \frac{(x^3+3) dx}{x(x-1)^3}.$$

$$2.88. \int_1^8 \frac{dx}{x(1+x^{1/3})^2}.$$

$$2.89. \int_0^1 x^{1/3} (2+x^{1/2})^2 dx.$$

$$2.90. \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx.$$

$$2.91. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$2.92. \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

$$2.93. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$2.94. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

$$2.95. \int_0^e x (\ln x)^2 dx.$$

$$2.96. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$2.97. \int_0^1 \frac{(e^{x/2}+2)e^{x/2}}{e^x+4e^{x/2}+1} dx.$$

$$2.98. \int_0^1 \frac{(2x^4+1) dx}{x^3+x^2+2x+2}.$$

$$2.99. \int_0^1 \frac{(e^x+1)e^x}{e^{2x}+4} dx.$$

Вычислить производные.

$$2.100. \left(\int_{\cos 2x}^{\sin 2x} (1-t^2)^{0,5} dt \right)' \quad 2.101. \left(\int_0^{x^2} \sin(1-t^2) dt \right)'.$$

Найти пределы, используя правило Лопиталя.

$$2.102. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}, \quad 2.103. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{arctg}^2 t dt}{x^2},$$

$$2.104. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} e^{-t^2} dt}{\int_0^x (1+t^4)^{1/4} dt}, \quad 2.105. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}.$$

Найти средние значения данных функций на указанных отрезках.

$$2.106. f(x) = 5 + 4 \sin x + 2 \cos x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

$$2.107. f(x) = \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{8} \right), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Доказать неравенства.

$$2.108. \int_0^{2\pi} x \sin x dx < 0. \quad 2.109. \int_{-3}^3 x^3 3^x dx > 0.$$

$$2.110. \int_0^{\pi/2} \sin^{12} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx.$$

Задачи на несобственные интегралы

Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы первого рода.

$$2.111. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}, \quad 2.112. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-4x+7)}.$$

$$2.113. \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$2.114. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x \ln x + 1}}.$$

$$2.115. \int_2^{\infty} \frac{\left(2 + \arcsin \frac{1}{x^2}\right) dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$2.116. \int_2^{\infty} \frac{\left(4 + \arcsin \frac{1}{x^4}\right) dx}{1 + x\sqrt{x}}.$$

$$2.117. \int_0^{\infty} \frac{(2 + \operatorname{arctg} x) dx}{1 + x^2 \ln x}.$$

$$2.118. \int_0^{\infty} -x \cos x dx.$$

Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы второго рода.

$$2.119. \int_0^{(2/\pi)^{0.25}} \cos\left(\frac{1}{x^4}\right) dx.$$

$$2.120. \int_1^e \frac{dx}{x \ln^4 x}.$$

$$2.121. \int_0^1 \frac{\cos^2 x dx}{x^{0.25} - \sin x}.$$

$$2.122. \int_0^1 \frac{(\sin x + 2 \cos x) dx}{(1 + x^3)^{1/7}}.$$

$$2.123. \int_0^2 \frac{\ln(1+x)^{3/5} dx}{e^{2x} - 1}.$$

$$2.124. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1} dx}{\sqrt[3]{16 - x^4}}.$$

$$2.125. \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x}} dx.$$

$$2.126. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$$

Исследовать абсолютно или условно сходятся следующие несобственные интегралы.

$$2.127. \int_0^{\infty} \sin x (1 - \cos x) dx.$$

$$2.128. \int_0^{\infty} x^2 \sin x^4 dx.$$

$$2.129. \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{x}.$$

$$2.130. \int_0^{\pi/6} \sin\left(\frac{1}{\cos(3x)}\right) dx.$$

$$2.131. \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx}{x^n}.$$

*Задачи на геометрические приложения
определенных интегралов*

В задачах №№ 2.132–2.151 вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

2.132. Параболой $y = x^2 - 3x + 2$, касательной к этой параболе в точке $A(3, 2)$ и осью абсцисс.

2.133. $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

2.134. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $x = 0$, $x = a$.

2.135. $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$.

2.136. $x^2 = y^2 = 25$, $16x - 3y^2 = 0$.

2.137. $xy = 7$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$.

2.138. $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 2$.

2.139. $y = x^2$, $y = \frac{2}{1 + x^2}$.

2.140. $y = 0,5x^2$, $x^2 + y^2 = 8$.

2.141. $y = 4 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{4}\right)$, $x = -4$, $x = 4$.

2.142. $x = a \cos t$, $y = b \sin 2t$.

2.143. $x = a \cos t(1 + \cos t)$, $y = a \sin t(1 + \cos t)$.

2.144. $x = 4 \cos t$, $y = 3 \sin^3 t$.

2.145. $x = t^3 - t$, $y = t^2 - 1$.

2.146. $x = \cos t$, $y = 4 \sin t \cos^2 t$.

2.147. $\rho = a(1 + 1 + \sin^2 \varphi)$, $\rho = a$.

2.148. $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2.149. $\rho = 2 + \cos \varphi$.

2.150. $\rho = 4a^2 \sin^2 \varphi$.

2.151. $\rho = a \cos 3\varphi$.

В задачах №№ 2.152–2.166 вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением при данном изменении аргумента.

2.152. $y^2 = 4x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2.153. $y = \ln x$, $x_1 = \sqrt{8}$, $x_2 = \sqrt{18}$.

2.154. $y = \ln \left(e^x + \frac{1}{e^x - 1} \right), x_1 = 3, x_2 = 4.$

2.155. $x^2 = y, x_1 = 0, x_2 = 1.$

2.156. $y = 0,5 \left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right),$
 $x_1 = 1, x_2 = 5.$

2.157. Вычислить длину дуги петли кривой $x=t-t^3, y=\sqrt{3}t^2.$

2.158. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), t_1 = 0, t_2 = 2\pi.$

2.159. $x = 4\sqrt{2} \sin t, y = \sin 2t.$

2.160. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды
 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

2.161. $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}, t_1 = 0, t_2 = \sqrt{8}.$

2.162. $\rho = ae^\varphi, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \alpha.$

2.163. $\rho = a \sin^3 \left(\frac{\varphi}{3} \right), \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 3\pi.$

2.164. $\rho\varphi = 1, \varphi_1 = 2, \varphi_2 = 0,5.$

2.165. Вычислить длину замкнутой кривой $\rho = a \sin^4 \left(\frac{\varphi}{4} \right).$

2.166. Вычислить длину замкнутой кривой $\rho = 2(\sin \varphi + \cos \varphi).$

В задачах №№ 2.167–2.172 вычислить площадь поверхности тела, образованного вращением относительно указанной оси фигуры, ограниченной линиями на заданном участке изменения аргумента.

2.167. $y = x^2, y^2 = x$ вокруг оси $OX.$

2.168. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OX ($a > b$).

2.169. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси $OX.$

2.170. $x = \frac{t^3}{3}, y = 4 - \frac{t^2}{2}$ вокруг оси $OX.$

2.171. $x = \frac{x^2}{2}, y = 1,5$ вокруг оси $OX.$

2.172. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ вокруг оси $OX.$

В задачах №№ 2.173–2.178 вычислить объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями на заданном участке изменения аргумента.

2.173. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $y = \pm b$ вокруг оси OY .

2.174. $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ вокруг оси OY .

2.175. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $y = 0$, $x = 0$ вокруг оси OY .

2.176. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг оси OX .

2.177. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OY ($a > b$).

2.178. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси OX .

2.179. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

*Задачи на физические приложения
определенных интегралов*

2.180. Скорость v прямолинейно движущейся точки меняется в зависимости от времени t по закону $v(t) = te^{-0,01t}$. Определить путь s , пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

2.181. Скорость v прямолинейно движущейся точки меняется в зависимости от времени t по закону $v(t) = 4t + 6t^2$. Определить путь s , пройденный точкой от начала движения до момента времени $t = 2$.

2.182. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с учетом сопротивления воздуха и известной начальной скоростью v_0 , определяется по формуле $v = \alpha \operatorname{tg} \left(-\frac{gt}{\alpha} + \operatorname{arctg} \left(\frac{v_0}{\alpha} \right) \right)$, где t — время, g — ускорение свободного падения, α — константа, учитывающая сопротивление воздуха. Найти высоту наивысшего подъема тела.

2.183. Скорость прямолинейного движения материальной точки $v = \frac{\sqrt{1+t}}{7}$. Найти путь, пройденный за первые 15 единиц времени.

2.184. Вычислить массу прямолинейного стержня длины $l = 10$, если линейная плотность ρ зависит от расстояния от одного из концов по формуле $\rho(x) = 2 + xe^{-0,01x^2}$.

2.185. Найти статические моменты дуги параболы $y = 0,5x^2$ на участке от $x = 0$ до $x = 2$ относительно осей OX и OY , если линейная плотность $\rho(x) = \rho_0\sqrt{1+x^2}$.

2.186. Найти статические моменты относительно осей OX и OY отрезка прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, заключенного между осями координат, если линейная плотность постоянна: $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$.

2.187. Найти статические моменты относительно оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x^2$, если линейная плотность постоянна: $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$.

2.188. Найти центр масс дуги цепной линии $y = \text{ch } x = 0,5(e^x + e^{-x})$ на участке от $x = 0$ до $x = 1$, если линейная плотность постоянна: $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$.

2.189. Доказать, что площадь поверхности, полученной при вращении дуги плоской кривой вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости дуги по одну сторону от нее, равняется произведению длины вращающейся дуги на длину пути, описанного ее центром масс.

2.190. Доказать, что объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину пути, описанного ее центром масс.

2.191. Найти координаты центра масс однородной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ при $0 \leq t \leq 2\pi a$.

2.192. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной прямой $y = \frac{2}{\pi}x + 1$ и кривой $y = \cos x$ при $x \geq 0$.

2.193. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной дугой эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ и координатными осями, расположенными в первом квадранте.

2.194. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

2.195. Найти момент инерции дуги кривой $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 1$) относительно оси OX , если линейная плотность постоянна: $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$.

2.196. Найти моменты инерции однородной $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$ плоской фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, относительно осей OX и OY .

2.197. Найти момент инерции относительно координатных осей OX и OY однородного треугольника, ограниченного прямыми $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

2.198. Найти момент инерции относительно координатной оси OX однородной $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$ равнобедренной трапеции $ABCD$, заданной координатами своих вершин $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(-\frac{b}{2}, h\right)$, $C\left(\frac{b}{2}, h\right)$, $D\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

2.199. Найти момент инерции однородного конуса высотой h , радиусом основания R и линейной плотностью $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$ относительно своей оси симметрии.

2.200. Найти формулу для нахождения момента инерции относительно оси OX однородного ($\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$) тела, образованного вращением вокруг оси OX участка кривой $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq h$).

2.201. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы точечный электрический заряд q_1 , расположенный в начале координат $O(0, 0, 0)$, переместил в результате отталкивания одноименный точечный заряд q_2 из точки $N(x_n, 0, 0)$ в точку $K(x_k, 0, 0)$. (Сила взаимодействия F двух точечных зарядов подчиняется закону Кулона $F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$, где r_{12}^2 — расстояние между зарядами.)

2.202. Определить работу, которую необходимо затратить на сооружение полностью заполненного материалом с линейной плотностью $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$: 1) конуса с радиусом основания r и высотой h ; 2) пирамиды высотой h с квадратом в основании со стороной a .

2.203. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать жидкость плотностью ρ из полностью заполненного ею резервуара, имеющего форму: 1) вертикального цилиндра высотой h и радиусом основания r ; 2) цилиндра с осью, имеющей горизонтальное направление, радиусом основания r и высотой h ; 3) конуса, обращенного вершиной вверх, с радиусом основания r и высотой h ; 4) полушара радиуса r .

2.204. Определить работу, необходимую для извлечения шара радиуса r , сделанного из материала с плотностью $\rho_{\text{ш}}$ находящегося на дне бассейна глубиной h , заполненного жидкостью плотностью $\rho_{\text{ж}}$.

2.205. Определить работу A , совершаемую при адиабатическом сжатии идеального газа (давление P связано с объемом V законом Пуассона $PV^k = P_0V_0^k$, где $k \approx 1,4$).

2.206. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы остановить шар плотностью $\rho_0 = \text{const}$ и радиуса основания R , вращающегося вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω .

2.207. Определить кинетическую энергию диска, имеющего радиус r и массу m , если он вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.

2.208. Определить кинетическую энергию треугольной пластинки, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг своего основания, если основание пластинки a , высота h , толщина d , плотность ρ_0 .

2.209. Определить кинетическую энергию диска, имеющего радиус r и массу m , если он вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска и перпендикулярно его плоскости.

2.210. Определить кинетическую энергию прямого кругового конуса, высотой h и радиусом основания r с плотностью $\rho_0 = \text{const}$, если конус вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω .

2.211. Определить количество теплоты Q , выделяемое током $I = I_0 \cos \omega t$ в проводнике с сопротивлением R за время $t = \frac{4\pi}{\omega}$.

2.212. Определить изменение энтропии S некоего реального газа постоянной массы m при объеме $V_1 = \text{const}$ и изменении давления с P_1 до P_2 в приближении закона Менделеева–Клапейрона, если теплоемкость зависит от температуры: $c_v = \alpha T^2 + \beta$.

2.213. Найти силу давления, которую испытывает поверхность шара радиуса r , если его центр находится на глубине h от поверхности воды.

2.214. Найти силу давления жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого h , а радиус основания r , если жидкость имеет плотность $\rho_0 = \text{const}$ и полностью заполняет цилиндр.

2.215. Найти силу давления на основание цилиндра, полностью погруженного в жидкость плотностью $\rho_0 = \text{const}$, если радиус основания r , а высота цилиндра h .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ действительных чисел называется n -мерным координатным пространством E^n . Рассматривая указанные упорядоченные совокупности действительных чисел как координаты векторов n -мерного линейного пространства L в некотором заданном ортогональном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, приходим в результате к взаимному соответствию между векторами n -мерного линейного пространства L и точками $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ координатного пространства E^n . Вводя далее в L скалярное произведение двух векторов, получим n -мерное евклидово пространство E^n . При этом величина $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP})} =$

$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ является очевидно расстоянием точки P до начала координат (точки O). Тогда для двух точек $P_1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ и $P_2(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ величина

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{P_1P_2}| &= \sqrt{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2})} = \\ &= \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + \dots + (x_n^2 - x_n^1)^2} = \rho(P_1, P_2) \end{aligned}$$

представляет собой расстояние между этими точками.

Множество точек $\{P\}$ пространства E^n , удовлетворяющих условию $\rho(P_1, P_2) < \delta$, где число $\delta > 0$, называется δ -окрестностью точки P_0 .

Точка P называется внутренней точкой множества $X \subset E^n$, если она принадлежит X вместе с некоторой δ -окрестностью точки P .

Множество $X \subset E^n$ называется открытым, если каждая его точка — внутренняя.

Множество X называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству. При этом под непрерывной кривой $l \subset E^n$ понимается множество точек $\{P\} \subset E^n$, координаты которых $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются непрерывными функциями параметра t : $x_k = \varphi_k(t)$, где $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha \leq t \leq \beta$ (l соединяет две точки P_1 и P_2 , если $\varphi_k(\alpha)$ и $\varphi_k(\beta)$ являются соответственными координатами точек P_1 и P_2).

Открытое связное множество точек X пространства E^n называется открытой областью или, короче, областью.

Точка P называется граничной точкой области X , если в любой δ -окрестности точки P есть точки как принадлежащие, так и не принадлежащие области X . Множество всех граничных точек области X называется границей этой области и обозначается ∂X . Область X и ее границы называются замкнутой областью пространства E и обозначается символом $\overline{X}$. Всякое открытое множество, содержащее точку P , называется ее окрестностью.

Множество точек $\{P\}$, расстояние от каждой из которых до некоторой точки P_0 удовлетворяет соотношению $\rho(P, P_0) = r$, называется n -мерной сферой радиуса r с центром в точке P_0 .

Множество (область) $X \subset E^n$ называется ограниченным, если существует сфера, внутри которой содержится это множество (область).

Пусть $X \subset E^n$ — множество точек n -мерного евклидова пространства и множество $Y \subset R$. Однозначное отображение F множества X на множество Y , т. е. $f: X \rightarrow Y$, называется функцией n действительных переменных. При этом множество X называется областью (множеством) определения или задания f и обозначается $D(f)$. Область определения f — подмножество E^n , состоящее из точек E^n , координаты которых (в заданном базисе) $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются также координатами радиус-векторов этих точек — элементов E^n .

При исследовании функций нескольких переменных на первом этапе обычно исследуют область определения функции. Возникающие ограничения значений независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ — того же происхождения, что и в случае функций одной переменной. Поэтому для функций нескольких переменных используются следующие эквивалентные обозначения: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = F(P)$, где $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка множества X . Число y , соответствующее данной точке $P \subset X$, называется значением функции в точке P .

Уравнение $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функциональной зависимостью. Оно задает явную зависимость y от независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Функция нескольких переменных может быть задана также и неявным образом (неявно) уравнением $F(x_1, x_2, \dots, x_n) - y = 0$.

При $n = 2$ и $n = 3$ имеем соответственно функцию двух $y = f(x_1, x_2)$ и трех $y = f(x_1, x_2, x_3)$ переменных, для которых традиционно используется запись: $z = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$.

Рассмотрим несколько примеров на нахождение области определения функций нескольких переменных.

Пример 3.1. Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$, где $R > 0$ и $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^3$ имеет область определения $D(f)$, определяемую условием $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$, гарантирующим неотрицательность подкоренного выражения и множество значений $E(f)$, определяемое неравенством $y \geq 0$. Таким образом,

$$D(f) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\},$$

$$E(f) = \{y : y \geq 0\} = R_+.$$

Пример 3.2. Найти область определения функции $z = \sqrt{8 - |x - 8| - |y|}$.

Решение. Область определения данной функции есть множество точек $P(x, y) \in E^2$, удовлетворяющих условию $8 - |x - 8| - |y| \geq 0$. Откуда следует, что $|y| \leq 8 - |x - 8|$.

Это неравенство эквивалентно двойному неравенству $-8 + |x - 8| \leq y \leq 8 - |x - 8|$. Решаем его:

$$\begin{aligned} y \leq 8 - |x - 8| &\Rightarrow |x - 8| \leq 8 - y \Rightarrow \\ &\Rightarrow -8 + y \leq x - 8 \leq 8 - y \Rightarrow y \leq x \leq 16 - y \text{ (a)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} y \geq -8 + |x - 8| &\Rightarrow |x - 8| \leq y + 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -y - 8 \leq x - 8 \leq y + 8 \Rightarrow -y \leq x \leq y + 16 \text{ (б)}. \end{aligned}$$

Далее найдем на плоскости XOY пересечение множеств точек $P(x, y)$, удовлетворяющих полученным выше двойным неравенствам (а) и (б).

Для этого в плоскости XOY строим прямые $y = x$ и $y = 16 - x$. Тогда, так как в соответствии с неравенством (а) $y \leq x$ и $y \leq 16 - x$, то этому неравенству будут удовлетворять все точки плоскости XOY , лежащие под прямыми $y = x$ и $y = 16 - x$. Далее в плоскости XOY строим прямые $y = -x$ и $y = x - 16$. Очевидно неравенству (б) удовлетворяют точки плоскости XOY , лежащие выше прямых $y = x$ и $y = 16 - x$, так как согласно неравенству (б) $y \geq -x$ и $y \geq x - 16$. Пересечением полученных множеств точек плоскости XOY является квадрат с вершинами $O(0, 0)$, $A(8, 8)$, $B(16, 0)$, $C(8, -8)$ (рис. 3.1). Следовательно, область определения исследуемой функции можно представить в виде

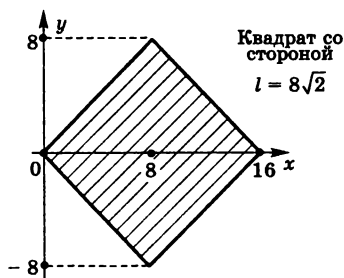


Рис. 3.1.

$$\begin{aligned} D(f) = \{ (x, y) : y \leq x \leq 16 - y, 0 \leq y \leq 8 \} \cup \\ \cup \{ (x, y) : -y \leq x \leq y + 16, -8 \leq y \leq 0 \}, \end{aligned}$$

а область значений $E(f) = \{z : z \in R_+\}$.

В отличие от функций одной переменной, допускающих геометрическое изображение, для функций нескольких переменных на том же уровне наглядности геометрическое изображение возможно только для функций двух переменных

$z = f(x, y)$. Для этого в трехмерном евклидовом пространстве выбирается прямоугольная система координат XOY . В каждой точке $P(x, y) \in D(f)$ восстанавливается перпендикуляр к плоскости XOY , на котором откладывается значение $z = f(x, y)$. Полученное таким образом геометрическое место точек является пространственным графиком функции двух переменных, который в общем случае представляет собой некоторую поверхность, уравнением которой и является равенство $z = f(x, y)$.

В случае функций трех переменных $u = f(x, y, z)$ геометрическая интерпретация на том же уровне наглядности функции уже невозможна. Для получения представления о поведении функции трех переменных используют поверхности уровня.

Поверхностью уровня функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется множество точек из области определения функции $D(f)$, удовлетворяющих условию

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n): f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C\} \subset D(f),$$

где C — постоянная. Следовательно, поверхности уровня функции f — это множества точек из области определения функции, на которых она принимает заданные постоянные значения; каждому постоянному значению функции соответствует своя поверхность уровня. При $n = 2$ имеем линии уровня.

Пример 3.3. Найти поверхности уровня функции $y = \sqrt{36 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ и значение функции в точке $P(1, 1, 3)$.

Решение. В соответствии с определением поверхностей уровня имеем: $\sqrt{36 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = C$, где $C \geq 0$. Откуда следует, что $36 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = C^2$, то есть $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 36 - C^2$ (очевидно, что $0 \leq C \leq 6$). Полученное уравнение представляет собой уравнение сферы в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с центром в ее начале и радиуса $\sqrt{36 - C^2}$. При $C = 6$ поверхность уровня вырождается в точку 0.

Найдем теперь значение функции в точке $P(1, 1, 3)$. Для этого подставим в аналитическое выражение, задающее функцию $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$. Получим $y = \sqrt{36 - 1^2 - 1^2 - 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Пример 3.4. Найти линии уровня функции $y = \sqrt{8 - |x - 8| - |y|}$ (см. пример 3.1).

Решение. Линии уровня данной функции определяются в соответствии с их определением уравнением $\sqrt{8 - |x - 8| - |y|} = C$ или $8 - |x - 8| - |y| = C^2$. Откуда следует, что $|y| = 8 - |x - 8| - C^2$, причем $0 \leq C \leq \sqrt{8}$, что вытекает из вида области определения данной функции. Легко увидеть, что полученное нами уравнение линий уровня является семейством линий, подобных границе области определения этой функции (см. рис. 3.1), которая также является линией уровня, соответствующей значению $C = 0$. Линии уровня рассматриваемой функции приведены на рис. 3.2.

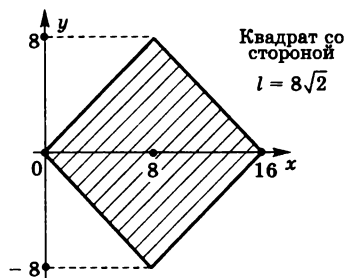


Рис. 3.2.

Пример 3.5. Найти поверхности уровня функции $u = \operatorname{sgn}(\cos(x^2 + y^2 + z^2))$.

Решение. Функция $u = \operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемая функция принимает только три значения $-1, 0, 1$. Осталось найти множества $P(x, y, z)$ в декартовой прямоугольной системе координат $OXYZ$, соответствующих этим значениям функции.

Имеем для значения $u = 0$ условие $\cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Отсюда следует, что $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то есть значение $u = 0$ достигается на концентрических сферах радиуса $\sqrt{\pi(2n + 1)/2}$.

Для значения $u = 1$ имеем условие $\cos(x^2 + y^2 + z^2) > 0$, которое выполняется:

1) Если $2\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Полученное неравенство определяет сферический слой, заключенный между сферами радиусов $\sqrt{2\pi n}$ и $\sqrt{\pi(4n+1)}/2$.

2) Если $\frac{3}{2}\pi + 2\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < 2\pi(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Это неравенство также определяет сферический слой, заключенный между сферами радиусов $\sqrt{\pi(4n+3)}/2$ и $\sqrt{2\pi(n+1)}$.

Наконец, значение $u = -1$ достигается там, где выполняется условие $\cos(x^2 + y^2 + z^2) < 0$, то есть при $2\pi n + \frac{\pi}{2} < x^2 + y^2 + z^2 < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, и значение $u = -1$ достигается в сферическом слое, который в данном случае заключен между сферами радиусов $\sqrt{\pi(4n+1)}/2$ и $\sqrt{\pi(4n+3)}/2$.

Функция f , где $D(f) \subset E^n$, называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $K \subset D(f)$, если множество $Y = \{y: y = f(x_1, x_2, \dots, x_n); (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\}$ ограничено сверху (снизу) в R . Если f ограничено на K как сверху, так и снизу, то функция называется ограниченной на K .

Число M называется точной верхней гранью множества действительных чисел $\{x\}$ и обозначается $M = \sup\{x\}$, если для любого $x \in \{x\}$ выполняются условия: 1) $x \leq M$; 2) каково бы ни было число $M' < M$, существует такое число $x' \in \{x\}$, что $x' > M'$.

Число m называется точной нижней гранью множества действительных чисел $\{x\}$ и обозначается $m = \inf\{x\}$, если для любого числа выполняются следующие условия: 1) $x \geq m$; 2) каково бы ни было число $m' > m$, существует такое число $x' \in \{x\}$, что $x' < m'$.

Число $M(m)$ называется точной верхней (нижней) гранью множества значений $E(f)$ функции f , определенной на множестве $K \subset E^n$ (обозначается $\sup f(\inf f)$), если для любой точки $P \in K$ выполняются условия: 1) $f(P) \leq M$ ($f(P) \geq m$); 2) каково бы ни было число $M' < M$ ($m' > m$), найдется такая точка $P' \in K$, что $f(P') > M'$ ($f(P') < m'$).

Если $\sup(\inf)$ функции f на K принадлежит множеству $E(f)$, то он называется наибольшим (наименьшим) значением

функции f на K и обозначается следующим образом: $\max_{x \in K} f(x)$,
 $\min_{x \in K} f(x)$ ($x = x_1, x_2, \dots, x_n$).

Пример 3.6. Найти точную верхнюю грань функции двух переменных $z = f(x, y) = -\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}$.

Решение. Область определения функции представляет собой плоскость XOY без точки $O(0, 0)$; $\sup f = 0$, так как 1) при всех (x, y) , таких, что $x^2 + y^2 \neq 0$, $z < 0$; 2) каково бы ни было значение функции $-1 < z' < 0$ существует такая точка $P(x_0, y_0) \in D(f)$, что при $0 < x_0 + y_0 < -\frac{1}{1 + 1/z'}$, $f(x_0, y_0) > z'$.

Пример 3.7. Ограничена ли сверху (снизу) функция $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$?

Решение. Функция f ограничена сверху и снизу, так как $0 \leq f(x, y) \leq 2$. Кроме того, функция имеет на $D(f)$ наибольшее и наименьшее значения: $\max_{(x, y) \in D} f = 2$, $\min_{(x, y) \in D} f = 0$.

3.2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Определение предела обобщается для случая функций нескольких переменных следующим образом.

Пусть функция $f(P)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D(f) \subset E^n$, за исключением, быть может, точки P_0 . Функция $f(P)$ имеет предел в точке P_0 , равный A , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из области определения функции $D(f)$, для которых $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ выполняется неравенство $|f(P) - A| < \varepsilon$.

Обозначение

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A; \quad \lim_{\rho(P, P_0) \rightarrow 0} f(P) = A; \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0 \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A.$$

Теоремы о пределах функции одной переменной легко обобщаются и остаются справедливыми и для функций нескольких переменных. Необходимо при этом иметь в виду, что данное выше определение предела предполагает одновременное стремление аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ к своим пределам, то есть, соответственно, к $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Поэтому указанный предел называется также n -кратным. Наряду с n -кратным далее рассматриваются и повторные пределы, получаемые в результате предельных переходов по каждому аргументу в отдельности. В общем случае оба вида пределов функций нескольких переменных в точке приводят к различным результатам, что необходимо учитывать при нахождении n -кратного предела функции переменных.

Пример 3.8. Выяснить, имеет ли предел функция $f(x, y) = \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}$ при 1) $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$; 2) $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.

Решение. 1) Из определения предела следует, что результат предельного перехода не должен зависеть от способа его реализации. Пусть, например, точка $P(x, y)$ стремится к точке $O(0, 0)$ по прямой $y = kx$. Имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4k^2}{x^4 + k^4x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2k^2}{1 + k^4} = \frac{2k^2}{1 + k^4}.$$

Как видно, результат имеет различные значения в зависимости от k и поэтому рассматриваемая функция в точке $P(0, 0)$ предела не имеет.

2) Воспользуемся тем же приемом, что и в первом случае. Получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4} = \frac{2k^2}{1 + k^4},$$

то есть результат предельного перехода зависит от k или иначе, от способа его осуществления. А это означает, как и в первом случае, что рассматриваемая функция предела при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$ не имеет.

Пример 3.9. Найти предел функции $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2x^2y^2}$ при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$.

Решение. Для вычисления указанного предела удобнее перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^2 x^2 y^2 &= \lim_{r \rightarrow 0} (r^2)^{2r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} (r^2)^{r^4 \sin^2 2\varphi / 2} = e^{\lim_{r \rightarrow 0} r^4 \sin^2 2\varphi \ln r} = \\ &= e^{\sin^2 2\varphi \lim_{r \rightarrow 0} r^4 \ln r} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что равенство нулю показателя экспоненты в рассмотренном примере вытекает из следующих соображений. Показатель экспоненты представляет собой произведение ограниченной функции $\sin 2\varphi$ на бесконечно малую величину, так как вычисляя предел $\lim_{r \rightarrow 0} r^4 \ln r$ по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^4 \ln r = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\ln r)'}{(r^4)'} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{r^4}{4} \right) = 0.$$

Следовательно, значение показателя экспоненты при $r \rightarrow 0$ равно нулю.

Функция $f(P)$ называется непрерывной в точке $P_0 \in D(f) \subset E^n$, если: 1) она определена как в самой точке P_0 , так и в некоторой ее окрестности; 2) если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек P из области определения функции $D(f)$, для которых $\rho(P, P_0) < \delta$ выполняется неравенство $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$. Эквивалентное определение непрерывности формулируется следующим образом.

Функция $f(P)$ называется непрерывной в точке P_0 , если: 1) $f(P)$ определена как в самой точке P_0 , так и в ее некоторой окрестности; 2) существует $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$; 3) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Для непрерывной в точке P_0 функции $f(P)$ операции вычисления предела и нахождения значения функции могут быть переставлены, так как при $x_i \rightarrow x_i^0$ $P \rightarrow P_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), что условно может быть записано как $P_0 = \lim_{P \rightarrow P_0} P$, то из определения непрерывности имеем

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f \left(\lim_{P \rightarrow P_0} P \right) \quad (3.1)$$

Если не выполняется хотя бы одно из трех условий: 1) $f(P)$ определена в точке P_0 и некоторой ее окрестности; 2) существует предел $f(P)$ в точке P_0 , то есть $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$; 3) этот предел равен значению функции $f(P)$ в точке P_0 , то есть $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$, то точка P_0 называется точкой разрыва функции $y = f(P)$.

Определение непрерывности функции нескольких переменных можно дать, исходя из понятия полного приращения функции.

Полным приращением функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ называется разность

$$\delta f(P) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В соответствии с определением непрерывности функции $f(P)$ в точке P_0 имеем $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$. Если теперь перенести $f(P_0)$ в левую часть равенства и далее внести $f(P_0)$ под знак предела как постоянное слагаемое, то получим равенство $\lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) - f(P_0)) = 0$, или с учетом определения полного приращения функции, $\lim_{P \rightarrow P_0} \Delta f(P) = 0$. Таким образом, функция $f(P)$ является непрерывной в точке P_0 , если ее приращение $\Delta f(P)$ представляет собой бесконечно малую функцию в точке P_0 .

Функция $f(P)$ называется непрерывной на множестве $X \subset E^n$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Свойства непрерывных функций нескольких переменных

Свойства непрерывных функций нескольких переменных аналогичны свойствам непрерывных функций одной переменной.

Если функция $f(P)$ и $g(P)$ непрерывны в точке P_0 , то функции $f(P) \pm g(P)$, $f(P) \cdot g(P)$, $f(P)/g(P)$ непрерывны в точке P_0 (частное при условии $g(P_0) \neq 0$).

Если функция $f(P)$ непрерывна в точке P_0 и $f(P_0) > 0$ ($f(P_0) < 0$), то существует окрестность $V(P_0)$ точки P_0 такая, что $f(P) > 0$ ($f(P) < 0$) для всех $P \in V(P_0)$.

Если функция $f(P)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X , то она ограничена на X .

Если функция $f(P)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X , то она достигает на этом множестве своего наименьшего и наибольшего значений.

Если функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой области X и для $P_1, P_2 \in X$ имеет место $f(P_1) = A$ и $f(P_2) = B$ ($A < B$), то для каждого $C \in (A, B)$ найдется точка $P \in X$, в которой $f(P) = C$.

Сложная функция нескольких переменных

Пусть заданы n функций $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) таких, что $D(\varphi_i) = A \subset E^k$. Тогда каждой точке $M(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ставится в соответствие с помощью функций φ_i точка $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset E^n$. Пусть $B \subset E^n$ множество таких точек и $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция n -переменных, заданная на этом множестве. Тогда на множестве $A \subset E^k$ определена сложная функция $f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_k))$ переменных $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Если f непрерывна в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, а функции $\varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывны в точке $M(t_1, t_2, \dots, t_k)$, причем $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$. Тогда сложная функция, составленная из f и φ_i , то есть $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ непрерывна в точке $M(t_1, t_2, \dots, t_k)$.

Функция $f(P)$ называется равномерно непрерывной на множестве $X \subset E^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $P_1, P_2 \in X$, для которых $\rho(P_1, P_2) < \delta$ выполняется неравенство $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$.

Если функция $f(P)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X , то она равномерно непрерывна на X .

Пример 3.10. Исследовать на непрерывность функции:

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}; & 2) f(x, y) &= \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}; \\ 3) f(x, y) &= \sin\left(\frac{3}{xy}\right). \end{aligned}$$

Решение. 1) Функция $f(x, y) = \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}$ не определена в точке $O(0, 0)$ и не имеет предела в этой точке (см. пример 3.8).

В остальных точках плоскости XOY функция непрерывна, так как представляет собой отношение непрерывных функций.

2) Функция $f(x, y)$ непрерывна всюду, за исключением точки $O(0, 0)$, в которой она имеет предел, равный единице:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1.$$

3) Функция $f(x, y) = \sin\left(\frac{3}{xy}\right)$ непрерывна во всех точках плоскости XOY , за исключением точек, расположенных на осях координат ($x = 0, y = 0$), так как во всех этих точках данная функция не определена и, кроме того, не стремится ни к какому пределу в этих точках (это следует из того, что в любой, сколь угодно малой окрестности точки $(0, y)$ $y \neq 0$ или $(0, x)$ $x \neq 0$) рассматриваемая функция будет принимать любое значение из отрезка $[-1, 1]$ бесконечное число раз.

Пример 3.11. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^4 + \frac{2xyz}{y^2 + z^2}, & y^2 + z^2 \neq 0 \\ x^4, & y^2 + z^2 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Если $y^2 + z^2 \neq 0$, то функция непрерывна в силу того, что $\lim_{P(x, y, z) \rightarrow P(x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Для тех точек, где $y^2 + z^2 = 0$, рассмотрим два случая:

1) Точка $P_1(x_0, 0, 0)$, где $x_0 \neq 0$. Если точка $P(x, y, z)$ движется к точке P_1 по прямой $x = x_0 \neq 0, y = 0$, то $\lim_{P \rightarrow P_1} f(P) = x_0^4$. Если точка $P(x, y, z)$ движется по прямой $x = x_0 \neq 0, z = y$, то для $P(x_0, y, y)$ при $y \neq 0$ $f(P) = x_0^4 + x_0$ и $\lim_{P \rightarrow P_1} x_0^4 + x_0 \neq f(P_1)$, поскольку $x_0 \neq 0$. Таким образом, в точке P_1 функция разрывна.

2) Исследуем точку $P_2(0, 0, 0)$. Из цепочки неравенств $(y + z)^2 \geq 0$, $y^2 + 2yz + z^2 \geq 0$, $(y^2 + z^2)/2 \geq |yz|$, получаем, что $f(x, y, z) \leq x^4 + |x|$ при $y^2 + z^2 \neq 0$ и $f(x, y, z) = x^4$ при $y^2 + z^2 = 0$, следовательно, при $P(x, y, z) \rightarrow P_2(0, 0, 0)$ получаем, что $f(P) \rightarrow f(P_2)$, так как $x \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $f(P)$ непрерывна в точке $P_2(0, 0, 0)$.

Наряду с понятием функции нескольких переменных, непрерывной в точке по совокупности переменных, данным выше, вводится также понятие функции нескольких переменных, непрерывных в точке по одной переменной. Под непрерывностью функции нескольких переменных по одной из ее переменных понимается непрерывность указанной функции одной переменной при фиксированных значениях всех остальных переменных: Строгое определение этого понятия можно дать исходя из определения частного приращения функции нескольких переменных по одной из переменных в заданной точке.

Частным приращением функции $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной x_i в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется разность $\Delta_{x_i} f(P_0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$.

Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется непрерывной в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ по переменной x_i , если ее частное приращение в точке P_0 является бесконечно малой функцией от Δx_i , то есть, если выполняется условие $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta_{x_i} f(P_0) = 0$. Из непрерывности функции нескольких переменных в заданной точке по совокупности переменных следует непрерывность этой функции в этой же точке по каждой из ее переменных. Однако из непрерывности функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по каждой из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в данной точке P_0 не следует, в общем случае, непрерывность этой функции в точке P_0 (то есть по совокупности переменных). Это подтверждается следующим примером.

Пример 3.12. Исследовать непрерывность функции

$$f(x, y) = \begin{cases} -\frac{xy^2}{y^2 + y^4}, & \text{при } x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{при } x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$$

в точке $O(0, 0)$.

Решение. Данная функция является непрерывной по каждой из переменных x и y в точке $O(0, 0)$, так как

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x f(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(\Delta x, 0) - f(0, 0)) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x y^2}{\Delta x^2 + y^4} \right) \Big|_{y=0} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для переменной y имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta_y f(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (f(\Delta y, 0) - f(0, 0)) = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{x \Delta y^2}{x^2 + \Delta y^4} \right) \Big|_{x=0} = 0.\end{aligned}$$

В то же время для приращений независимых переменных $\delta x = x - 0$, $\delta y = y - 0$ соответствующее приращение функции в точке $O(0, 0)$ равно $\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^4}$.

Предел полученного выражения при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ не существует, так как, например, если $\Delta x = a \Delta y^2$, то

$$\lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \Delta f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{a \Delta y^4}{(1 + a^2) \Delta y^4} = \frac{a}{1 + a^2}.$$

а при $a = 0$, $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(0, 0) \neq 0$. Это означает, в соответствии с определением непрерывности, что рассмотренная нами функция не является непрерывной в точке $O(0, 0)$, но непрерывна по каждой из своих переменных в этой точке.

3.3.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть точка $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ принадлежит области определения функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Частной производной функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной x_l в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_{x_l} f(P_0)$ к приращению Δx_l при стремлении приращения Δx_l к нулю, если такой предел существует.

Обозначается частная производная следующим образом: $f'_{x_l}(P_0)$, $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_l}$. Итак, в соответствии с определением,

$$\begin{aligned}f'_{x_l}(P_0) &= \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_l} = \lim_{\Delta x_l \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_l} f(P_0)}{\Delta x_l} = \\ &= \lim_{\Delta x_l \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_l^0 + \Delta x_l, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_l^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_l}.\end{aligned}$$

Из определения частной производной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ в точке $P_0 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ следует, что она вычисляется при условии, что значения всех остальных переменных функции, кроме x_k , фиксированы и равны x_i^0 , то есть также, как и производная функции одной переменной. Следовательно, частные производные функций нескольких переменных обладают всеми свойствами производной функции одной переменной. Поэтому для частных производных функций нескольких переменных справедливы все правила дифференцирования. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

Пример 3.13. Найти частные производные функций:

$$1) z = x^2 y^3; \quad 2) z = x^5 + y^6; \quad 3) z = x^y + y^x; \quad 4) z = \log_y x.$$

Решение. 1) Данная функция представляет собой произведение степенных функций от x и y . Поэтому при вычислении частной производной по одной из переменных вторая переменная фиксирована и может быть в соответствии с правилами дифференцирования вынесена за знак производной. Производную находим по правилам дифференцирования степенной функции одной переменной. Имеем

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^2 y^3)'_x = y^3 (x^2)'_x = 2x y^3, \\ z'_y &= (x^2 y^3)'_y = x^2 (y^3)'_y = 3x^2 y^2. \end{aligned}$$

2) Эта функция представляет собой сумму двух функций одной переменной. Поэтому при нахождении частной производной по одной из переменных в соответствии с правилом дифференцирования суммы двух функций указанная частная производная равна сумме производных от функций-слагаемых по соответствующей переменной. При этом производная от функции-слагаемого, переменная которой фиксирована равна нулю как производная от постоянной величины. Таким образом, в соответствии с изложенным имеем

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^5 + y^6)'_x = (x^5)'_x + (y^6)'_x = 5x^4 + 0 = 5x^4, \\ z'_y &= (x^5 + y^6)'_y = (x^5)'_y + (y^6)'_y = 0 + 6y^5 = 6y^5. \end{aligned}$$

3) Данная функция также является суммой двух функций, но каждая из которых представляет собой функцию двух переменных x и y . При нахождении частных производных этой функции как суммы частных производных необходимо иметь в виду, что одна из функций является при этом степенной, тогда как вторая — показательной. Таким образом, в соответствии с изложенным получим:

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^y)'_x + (y^x)'_x = y x^{y-1} + y^x \ln y, \\ z'_y &= (x^y)'_y + (y^x)'_y = x \ln x - 1 + x y^{x-1}. \end{aligned}$$

4) Для нахождения частных производных этой функции удобнее всего перейти к другому основанию по формуле $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Имеем $z = \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$. С учетом этого получим:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)'_x = \left(\frac{1}{\ln y} \ln x \right)'_x = \frac{1}{\ln y} (\ln x)'_x = \frac{1}{x \ln y}, \\ z'_y &= \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)'_y = \ln x \left(\frac{1}{\ln y} \right)'_y = \ln x ((\ln y)^{-1})'_y = \\ &= \ln x (-1)(\ln y)^{-2} \frac{1}{y} = -\frac{\ln x}{y \ln^2 y}. \end{aligned}$$

Пример 3.14. Найти частные производные функции

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\sin(xyz)}.$$

Решение. В данном случае и основание, и показатель степени зависят от независимых переменных. Одним из способов нахождения частных производных в этом случае является предварительное логарифмирование обеих частей равенства, определяющего функцию (то есть используется тот же прием, что и при вычислении в аналогичной ситуации производной функции одной переменной). Имеем

$$\ln u = \ln (x^2 + y^2 + z^2)^{\sin(xyz)} = \sin(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

Таким образом, $\ln u = \sin(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Дифференцируя теперь обе части полученного равенства последовательно по x, y, z , найдем частные производные. При этом

необходимо иметь в виду, что функция $\ln u$, записанная в левой части полученного равенства, представляет собой сложную функцию. Поэтому ее частная производная по любой из переменных имеет вид $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. С учетом этого получим

$$\frac{u'_x}{u} = yz \cos(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \sin(xyz) \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Откуда

$$u'_x = u \left(yz \cos(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2x \sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

Или

$$u'_x = (x^2 + y^2 + z^2)^{\sin(xyz)} \times \\ \times \left(yz \cos(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2x \sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

Аналогично находятся и частные производные по переменным y и z :

$$\begin{aligned} \frac{u'_y}{u} &= xz \cos(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2y \sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u'_y &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\sin(xyz)} \times \\ &\times \left(xz \cos(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2y \sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \right). \\ \frac{u'_z}{u} &= xy \cos(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2z \sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u'_z &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\sin(xyz)} \times \\ &\times \left(xy \cos(xyz) \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2z \sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \right). \end{aligned}$$

Пример 3.15. Найти частные производные функции

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^4 + \frac{2xyz}{y^2 + z^2}, & y^2 + z^2 \neq 0 \\ x^4, & y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $A(1, 0, 0)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, 0, 0) = x^4$. Найдем производную этой функции: $f'_x(x, 0, 0) = 4x^3$ и $f'_x(1, 0, 0) = 4$. Далее рассмотрим функции $f(1, y, 0) = 1$ и $f(1, 0, z) = 1$. Имеем: $f'_x(1, y, 0) = 0$, $f'_z(1, 0, z) = 0$ и, в частности $f'_y(1, 0, 0) = 0$ и $f'_z(1, 0, 0) = 0$. Таким образом, частные производные функции в точке $A(1, 0, 0)$ существуют, но, как это показано в примере 3.11, функция разрывна в точке $A(1, 0, 0)$. Следовательно, существование частных производных в точке в общем случае не гарантирует непрерывность функции в этой точке.

Замечание. Данное выше определение частных производных обычно относится к внутренним точкам области определения функции нескольких переменных и, в общем случае, не годится для граничных точек этой области, так как не всегда можно вычислить частные приращения функции. Поэтому в граничных точках области определения функций нескольких переменных частные производные определяются как предельные значения этих производных.

Из определения частных производных, как обычных производных при условии фиксирования значений всех переменных, кроме одной, по которой берется производная, следует, в частности, что геометрический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ аналогичен геометрическому смыслу производной функции по одной переменной: $f'_x(x, y)$ есть тангенс угла наклона к оси OX (относительно этой оси) касательной в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$.

Частные производные высших порядков в точке P_0 определяются, переходя от частных производных $r - 1$ порядка к частным производным порядка r в соответствии со следующим соотношением:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right) = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \dots \partial x_{i_1}} \equiv f_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} x_{i_r}}^{(r)} \quad (3.2)$$

Пример 3.16. Найти u''_{xx} , u''_{yy} , u''_{xy} , u''_{yx} , u'''_{xyz} , $u^{IV}_{xy^2z}$, если $u = e^{xyz}$.

Решение. В соответствии с определением частных производных высших порядков (3.2) необходимо сначала найти

соответствующие частные производные более низкого порядка. В данном случае необходимо найти частные производные первого порядка

$$u'_x, u'_y, u'_z \Rightarrow u'_x = e^{xyz} yz; u'_y = e^{xyz} zx; u'_z = e^{xyz} xy.$$

Далее в соответствии с (3.2)

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^{xyz} yz) = \\ &= yz (e^{xyz})'_x = yz e^{xyz} (xyz)'_x = (yz)^2 e^{xyz}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''_{yy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (e^{xyz} xz) = \\ &= xz (e^{xyz})'_y = xz e^{xyz} (xyz)'_y = (xz)^2 e^{xyz}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u''_{xy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = (u'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (e^{xyz} yz) = \\ &= yz e^{xyz} (xyz)'_y + e^{xyz} (yz)'_y = \\ &= e^{xyz} xyz^2 + e^{xyz} z = e^{xyz} (xyz^2 + z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''_{yx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (u'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^{xyz} xz) = \\ &= xz e^{xyz} (xyz)'_x + e^{xyz} (xz)'_x = \\ &= e^{xyz} xyz^2 + e^{xyz} z = e^{xyz} (xyz^2 + z). \end{aligned}$$

Найдем теперь частную производную третьего порядка u'''_{xyz} . Имеем в соответствии с (3.2)

$$\begin{aligned} u'''_{xyz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (u''_{xy}) = \frac{\partial}{\partial z} (e^{xyz} (xyz^2 + z)) = \\ &= e^{xyz} (xyz)'_z (xyz^2 + z) + e^{xyz} (xyz^2 + z)'_z = \\ &= e^{xyz} xy (xyz^2 + z) + e^{xyz} (2xyz + 1) = \\ &= e^{xyz} (x^2 y^2 z^2 + xyz + 2xyz + 1) = e^{xyz} (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1). \end{aligned}$$

Частную производную четвертого порядка $u^{IV}_{xy^2z}$ найдем как частную производную по переменной z от частной производной третьего порядка u'''_{xy^2} . В свою очередь указанная

производная третьего порядка находится по формуле $u'''_{xy^2} = (u''_{xy})'_y$, то есть как частная производная по переменной y от частной производной второго порядка u''_{xy} . Таким образом, в соответствии с изложенным имеем

$$\begin{aligned} u_{xy^2z}^{IV} &= ((u''_{xy})'_y)'_z = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} (e^{xyz} (xyz^2 + z)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(z \left((e^{xyz})'_y (xyz + 1) + e^{xyz} (xyz + 1)'_y \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (z(e^{xyz}xz, (xyz+1) + e^{xyz}xz)) = \frac{\partial}{\partial z} (ze^{xyz}(x^2yz^2 + 2xz)) = \\ &= e^{xyz}(x^2yz^2 + 2xz) + \\ &\quad + z \left((e^{xyz})'_z (x^2yz^2 + 2xz) + e^{xyz} (x^2yz^2 + 2xz)'_z \right) = \\ &= e^{xyz}(x^2yz^2 + 2xz) + \\ &\quad + z(e^{xyz}xy(x^2yz^2 + 2xz) + e^{xyz}(x^2yz + 2x)) = \\ &= e^{xyz}(x^2yz^2 + 2xz + x^3y^2z^3 + 2x^2yz^2 + 2x^2yz^2 + 2xz) = \\ &= e^{xyz}(x^3y^2z^3 + 5x^2yz^2 + 4xz). \end{aligned}$$

Пример 3.17. Существует ли $f''_{xy}(0,0)$, если

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{при } x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{при } x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$$

(см. пример 3.12).

Решение. Данная частная производная второго порядка представляет собой частную производную по переменной y от частной производной первого порядка по переменной x . Поэтому сначала необходимо вычислить f'_x . Имеем

$$f'_x = \frac{y^2(x^2 + y^4) - xy^2 2x}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{x^2y^2 + y^6 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{y^6 - x^2y^2}{(x^2 + y^4)^2},$$

при $x^2 + y^4 \neq 0$. При $x^2 + y^4 = 0$ в соответствии с определением частной производной получим ($\Delta x \equiv x$):

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^4} \Big|_{y=0} - 0 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Найдем теперь частную производную f''_{xy} в точке $(0, 0)$. В соответствии с определением ($\Delta y \equiv y$):

$$\begin{aligned} f''_{xy}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^6 - x^2 y^2}{y(x^2 + y^4)^2} \right) \bigg|_{y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^3} = 0. \end{aligned}$$

Последний предел не существует, следовательно, не существует и $f''_{xy}(0, 0)$.

Легко заметить, что в рассмотренном выше примере 9.16 частные производные u''_{xy} и u''_{yx} оказались равными. Далее будут сформулированы условия, при которых это будет иметь место. Заметим, что частные производные, полученные дифференцированием по различным переменным, называются смешанными частными производными. Частные же производные, полученные дифференцированием только по одной переменной, называются чистыми частными производными.

Важнейшим понятием дифференциального исчисления функций нескольких переменных является понятие дифференцируемости функции в точке.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется дифференцируемой в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если ее полное приращение $\Delta f(P)$ в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta f(P) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — величины, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Дифференциалом df первого порядка функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется главная линейная относительно приращений аргументов часть полного приращения $\Delta f(P)$ этой функции в этой точке

$$df = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i. \quad (3.3)$$

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то в этой точке существуют частные

производные первого порядка по всем аргументам, причем $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$, где A_i определена в (3.3). Таким образом

$$df(P) = f'_{x_1} \Delta x_1 + f'_{x_2} \Delta x_2 + \dots + f'_{x_n} \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f'_{x_i} \Delta x_i. \quad (3.4)$$

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то она и непрерывна в этой точке.

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам в некоторой окрестности точки P , то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке P .

Пример 3.18. Найти df :

$$1) f(x, y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right), \quad 2) f(x, y) = xy = e^{x+y} + 1.$$

Решение.

1). Найдем прежде всего частные производные f'_x и f'_y :

$$f'_x = \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y = \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

По формуле (3.4) получим df :

$$df = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Delta x + \frac{x}{x^2 + y^2} \Delta y.$$

2) Аналогично первому случаю находим:

$$f'_x = y + e^{x+y}, \quad f'_y = x + e^{x+y},$$

$$df = (y + e^{x+y}) \Delta x + (x + e^{x+y}) \Delta y.$$

Замечание. В отличие от функции одной переменной, для дифференцируемости функции нескольких переменных в точке недостаточно существование частных производных в этой точке.

Также как и в случае функции одной переменной дифференциалом n -го порядка функции нескольких переменных называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка: $d^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d(d^{n-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ раз дифференцируема в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то в этой точке значение любой смешанной частной производной n -го порядка не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Приведем формулы для дифференциалов высших порядков функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$:

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} d^3 f = d(d^2 f) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \\ + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} d^n f = d(d^{n-1} f) = \\ = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответствующая формула для дифференциала m -го порядка имеет вид

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f. \quad (3.8)$$

При этом операция возведения символа, записанного в правой части этого равенства в степень m , определяется как обычная операция возведения многочлена $\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$ в степень m . Формулы (3.5) и (3.6) могут быть легко получены исходя из определения дифференциалов

второго и третьего порядков. Найдем $d^2 f$. Имеем, исходя из определения

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy = \\ &= f''_{xx} dx^2 + f''_{yx} dx dy + f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2 = \\ &= f''_{xx} dx^2 + 2f''_{yx} dx dy + f''_{yy} dy^2. \end{aligned}$$

Аналогично и для $d^3 f$:

$$\begin{aligned} d^3 f &= d(d^2 f) = \frac{\partial}{\partial x} (d^2 f) dx + \frac{\partial}{\partial y} (d^2 f) dy = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} dx^2 dy + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} dy^2 dx + \\ &\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3. \end{aligned}$$

Пример 3.19. Найти $d^2 f$:

$$1) f(x, y) = x^6 y^8, \quad 2) f(x, y) = x^6 + y^8.$$

Решение. 1) Для вычисления по формуле (3.5) найдем необходимые для этого частные производные второго порядка. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^5 y^8; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8x^6 y^7; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (6x^5 y^8)'_x = 30x^4 y^8; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= (6x^5 y^8)'_y = 48x^5 y^7; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (8x^6 y^7)'_y = 56x^6 y^6; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (8x^6 y^7)'_x = 48x^5 y^7. \end{aligned}$$

Подставляя теперь полученные выражения частных производных второго порядка в (3.5), получим

$$d^2 f = d^2 (x^6 y^8) = 30x^4 y^8 dx^2 + 96x^5 y^7 dx dy + 56x^6 y^6 dy^2.$$

2) Находим последовательно

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^5; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y^7; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x^4; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 56y^6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом $d^2 f = d^2 (x^6 + y^8) = 30x^4 dx^2 + 56y^6 dy^2$.

Пример 3.20. Найти $d^5 f$, если $f(x, y) = \ln(x + y)$.

Решение. В соответствии с формулой (3.7)

$$d^5 f = \sum_{k=0}^5 C_5^k \frac{\partial^5 f(x, y)}{\partial x^{5-k} \partial y^k} dx^{5-k} dy^k, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} = (x+y)^{-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y} = (x+y)^{-1}.$$

Так как дифференцирование по x и y в данном случае в любой последовательности приводит к одному и тому же результату, получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -(x+y)^{-2},$$

то есть

$$\frac{\partial^5 f(x, y)}{\partial x^{5-k} \partial y^k} = (x+y)^{-5} (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{4!}{(x+y)^5}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}d^5 f &= \sum_{k=0}^5 C_5^k \frac{4!}{(x+y)^5} dx^{5-k} dy^k = \frac{4!}{(x+y)^5} \sum_{k=0}^5 C_5^k dx^{5-k} dy^k = \\ &= \frac{4!}{(x+y)^5} (dx + dy)^5.\end{aligned}$$

Пример 3.21. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - ay^2}$

удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Решение. Найдем необходимые частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 - ay^2 - 2x^2}{(x^2 - ay^2)^2} = -\frac{x^2 + ay^2}{(x^2 - ay^2)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2ax}{(x^2 - ay^2)^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{2x(x^2 - ay^2)^2 - (x^2 + ay^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - ay^2) \cdot 2x}{(x^2 - ay^2)^4} = \\ &= \frac{2x(x^2 + 3ay^2)}{(x^2 - ay^2)^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2ax((x^2 - ay^2)^2 + 2y(x^2 - ay^2) \cdot 2ay)}{(x^2 - ay^2)^4} = \\ &= \frac{2ax(x^2 + 3ay^2)}{(x^2 - ay^2)^3}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ что и требовалось показать.

Одним из важнейших применений дифференциала функций нескольких переменных является использование его в приближенных вычислениях значений дифференцируемых функций в заданной точке. В основе этого применения лежит формула (3.3), связывающая полное приращение функции с ее полным дифференциалом первого порядка. В соответствии с этой формулой

$$\Delta f(P_0) = f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \varepsilon, \quad (3.9)$$

где $\varepsilon = o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho(P, P_0)$, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

При достаточно малых приращениях аргументов $x_k = x_k - x_k^0$, $k = 1, 2, \dots, n$ величиной ε можно пренебречь, тогда $\Delta f(P_0) = f(P) - f(P_0) \approx df(P_0)$,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) &\approx \\ &\approx \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} \Delta x_n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

С помощью формулы (3.10) можно найти приближенное значение функции $f(P)$ по ее значению в точке P_0 и значениям ее частных производных $f'_{x_k}(P_0)$ в этой же точке.

В общем случае для $n + 1$ раз дифференцируемой в некоторой δ -окрестности точки P_0 функции $f(P)$ справедлива следующая формула Тейлора:

$$\Delta f(P) = df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(P_1),$$

где P_1 — некоторая точка из указанной δ -окрестности, зависящая в общем случае от точки P .

Пример 3.22. Исходя из формулы (3.10) найти предельную абсолютную погрешность вычисления функции и на основании полученного результата найти предельную абсолютную погрешность произведения и частного.

Решение. Для простоты ограничимся случаем двух переменных. Обобщение для случая функций большего числа переменных не представляет затруднений. Согласно формуле (3.10) в случае функций двух переменных имеем

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\approx |f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)| \leq \\ &\leq |f'_x(x_0, y_0)| |\Delta x| + |f'_y(x_0, y_0)| |\Delta y|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f'_x(x_0, y_0)| |\Delta x| + |f'_y(x_0, y_0)| |\Delta y|,$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Пусть значения аргументов x и y известны приближенно с предельными абсолютными погрешностями ε_x , ε_y соответственно, то есть $|\Delta x| < \varepsilon_x$, $|\Delta y| < \varepsilon_y$. Тогда предельная абсолютная погрешность вычисления значения функции ε_f определяется выражением, записанным в правой части следующего неравенства:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &< |f'_x(x_0, y_0)| \varepsilon_x + |f'_y(x_0, y_0)| \varepsilon_y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon_f = |f'_x(x_0, y_0)| \varepsilon_x + |f'_y(x_0, y_0)| \varepsilon_y. \end{aligned}$$

Разделив обе части полученного равенства на $|f(x_0, y_0)|$, получим предельную относительную погрешность вычисления

значения функции в точке $P(x, y)$, если известны значения функции и ее частных производных первого порядка в точке $P(x_0, y_0)$.

Предельную абсолютную и относительную погрешности произведения и частного найдем, исходя из полученных выше результатов. Имеем в случае произведения $f(x, y) = xy$. Тогда $f'_x = y$, $f'_y = x$. Предельная абсолютная погрешность произведения равна $\varepsilon_f = |y_0|\varepsilon_x + |x_0|\varepsilon_y$. Разделив обе части полученного равенства на $f(x_0, y_0) = |x_0 y_0|$, найдем предельную относительную погрешность произведения δf :

$$\delta f = \frac{\varepsilon_x}{|x_0|} + \frac{\varepsilon_y}{|y_0|} = \delta x + \delta y \Rightarrow \delta f = \delta x + \delta y,$$

где $\delta x = \frac{\varepsilon_x}{|x_0|}$, $\delta y = \frac{\varepsilon_y}{|y_0|}$ — предельные относительные погрешности сомножителей.

Таким образом, предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

В случае частного имеем: $f(x, y) = \frac{y}{x}$; $f'_x = -\frac{y}{x^2}$; $f'_y = \frac{1}{x}$. Тогда $\delta f = \left| \frac{y_0}{x_0^2} \right| \delta x + \left| \frac{1}{x_0} \right| \delta y$. Разделив обе части этого равенства на $|f(x_0, y_0)| = \left| \frac{y_0}{x_0} \right|$, получим: $\delta f = \frac{\varepsilon_x}{|x_0|} + \frac{\varepsilon_y}{|x_0|} = \delta x + \delta y$, то есть тот же результат, что и для произведения.

Пример 3.23. Вычислить $\Delta f(P_0)$, $df(P_0)$, если $f(x, y) = x^2 y$, $x_0 = 5$, $y_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$.

Решение. По определению полного приращения имеем

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= (x_0 + \Delta x)^2 (y_0 + \Delta y) - x_0^2 y_0 = \\ &= (x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2)(y_0 + \Delta y) - x_0^2 y_0 = \\ &= x_0^2 y_0 + x_0^2 \Delta y + 2x_0 y_0 \Delta x + 2x_0 \Delta x \Delta y + y_0 \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta y - x_0^2 y_0 = \\ &= 2x_0 y_0 \Delta x + x_0^2 \Delta y + y_0 \Delta x^2 + 2x_0 \Delta x \Delta y + \Delta y \Delta x^2 = \\ &= 2 \cdot 20 \cdot 0,1 - 25 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,01 - 10 \cdot 0,02 - 0,2 \cdot 0,01 = -0,802. \end{aligned}$$

Заметим, что первые два слагаемых в полученном выражении есть $df(x_0, y_0)$, следующие два — $\frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0)$ и

последнее — $\frac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)$, так как в соответствии с (3.5) и (3.6) имеем

$$\begin{aligned} d^2 f &= f''_{xx} \Delta x^2 + 2f''_{xy} \Delta x \Delta y + f''_{yy} \Delta y^2 = 2y_0 \Delta x^2 + 2x_0 \Delta x \Delta y, \quad (f''_{yy} = 0), \\ d^3 f &= 3f'''_{x^2 y} \Delta x^2 \Delta y = 6 \Delta x^2 \Delta y = 3! \Delta x^2 \Delta y \end{aligned}$$

(остальные частные производные в (3.7) данном случае равны нулю).

Таким образом $\Delta f = df + \frac{1}{2!} d^2 f + \frac{1}{3!} d^3 f$ (остальные дифференциалы более высокого порядка в данном случае равны нулю).

Найдем полный дифференциал

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) &= f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y = 2x_0 y_0 \Delta x + x_0^2 \Delta y = \\ &= 2 \cdot 20 \cdot 0,1 - 25 \cdot 0,2 = -1. \end{aligned}$$

Пример 3.24. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, приближенно вычислить $a = \frac{2,04^2}{\sqrt[3]{0,97} \sqrt[5]{1,02^2}}$.

Решение. Для приближенного вычисления этого числа рассмотрим функцию трех независимых переменных $f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y} \sqrt[5]{z^2}}$. Ее значение при $x = 2,04$, $y = 0,97$, $z = 1,02$ равно искомому числу a . Для нахождения a заметим, что в точке $P_0(2, 1, 1)$, то есть при $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ значение $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{2^2}{\sqrt[3]{1} \sqrt[5]{1^2}} = 4$. Далее, в соответствии с формулой (3.10) для вычисления $f(x, y, z)$ найдем частные производные. Для этого удобно представить функцию $f(x, y, z)$ в виде $f(x, y, z) = x^2 y^{-1/3} z^{-2/15}$. Тогда

$$\begin{aligned} f'_x &= 2xy^{-1/3} z^{-2/15}; \quad f'_y = -\frac{1}{3} x^2 y^{-4/3} z^{-2/15}; \\ f'_z &= -\frac{2}{5} x^2 y^{-1/3} z^{-17/15}. \end{aligned}$$

Находим значения частных производных в точке

$$P_0: f'_x = 0; \quad f'_y = -\frac{4}{3}; \quad f'_z = -\frac{8}{15}.$$

Очевидно также, что

$$x - x_0 = 2,04 - 2 = 0,04; \quad y - y_0 = 0,97 - 1 = 0,03;$$

$$z - z_0 = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{2,04^2}{\sqrt[3]{0,97} \sqrt[5]{1,02^2}} &= f(x, y, z) \Big|_{\substack{x=2,04 \\ y=0,97 \\ z=1,03}} \approx \\ &\approx 4 + 4 \cdot 0,04 + \frac{4}{3} \cdot 0,03 - \frac{8}{15} \cdot 0,02 \approx 4,16. \end{aligned}$$

В приложениях часто приходится находить функцию нескольких переменных по ее полному дифференциалу, то есть исходя из выражения вида $df(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой, ограниченной односвязной области (то есть области, ограниченной одним замкнутым контуром) и удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Нахождение функции $f(x, y)$ по ее полному дифференциалу состоит из трех этапов.

Первый этап заключается в определении области, где выполняется условие (3.11).

Второй этап состоит в интегрировании следующих очевидных равенств: $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$ что приводит к выражениям:

$$f(x, y) = \int P(x, y) dx + U(y) \quad \text{и} \quad f(x, y) = \int Q(x, y) dy + V(x).$$

На третьем этапе сравниваются эти два выражения и дописываются к известным членам первого выражения отсутствующие в нем члены, зависящие от y из второго выражения. Возможно и использование сначала второго выражения;

следует дописывать к нему отсутствующие в нем члены, зависящие от x из первого выражения.

Пример 3.25. Проверить, что выражение

$$(3x^2y + 4y^4 - 5) dx + (x^3 + 8xy) dy$$

является полным дифференциалом и найти функцию по заданному дифференциалу.

Решение. 1) Имеем $P(x, y) = 3x^2y + 4y^4 - 5$, $Q(x, y) = x^3 + 8xy$ — непрерывны и непрерывно дифференцируемы в E^2 .

$$\begin{aligned} 2) \text{ Проверим выполнение равенства } \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x}: \frac{\partial P}{\partial y} = \\ &= 3x^2 + 8y; \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 8y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned}$$

3) Найдем

$$\begin{aligned} \int P dx &= \int (3x^2y + 4y^4 - 5) dx = x^3y + 4xy^2 - 5x + U(y), \\ \int Q dy &= \int (x^3 + 8xy) dy = x^3y + 4xy^2 + V(x). \end{aligned}$$

(Заметим, что при интегрировании по одной переменной вторую считаем постоянной.) Сравнивая оба полученных результата интегрирования выражения для искомой функции $f(x, y)$, приходим к выводу, что, если к известным членам второго выражения для функции $f(x, y)$ дописать $-5x$ из первого выражения, то оба выражения для $f(x, y)$ приводят к результату:

$$f(x, y) = x^3y + 4xy^2 - 5x + C, \quad C = \text{const.}$$

Пример 3.26. Проверить, что выражение

$$y(e^{xy} + 6) dx + x(e^{xy} + 6) dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $f(x, y)$, и найти эту функцию.

Решение.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & P(x, y) = y(e^{xy} + 6); \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (1 + xye^{xy}) + 6; \\
 & Q(x, y) = x(e^{xy} + 6); \\
 & \frac{\partial Q}{\partial x} = 6 + (1 + xye^{xy}); \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \text{при всех } (x, y) \in E^2. \\
 2) \quad & f(x, y) = \int P dx = e^{xy} + 6xy + U(y); \quad f(x, y) = \\
 & = \int Q dy = e^{xy} + 6xy + V(x).
 \end{aligned}$$

Так как все известные члены в двух найденных выражениях для $f(x, y)$ совпадают, то, следовательно,

$$f(x, y) = e^{xy} + 6xy + C, \quad (C = \text{const}).$$

3.4.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, а функции $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $(i = 1, 2, \dots, k)$ дифференцируемы в точке $M_0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$ и такие, что $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$. Тогда сложная функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $i = 1, 2, \dots, k$ дифференцируема в точке M_0 и ее частные производные определяются формулой

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.12)$$

где все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ вычисляются в точке P_0 , а все частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ — в точке M_0 .

Из формулы (3.12) вытекают некоторые важные формулы дифференцирования сложных функций нескольких переменных.

1) $u = f(x, y, z, t)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. В этом случае, полагая в (3.12) $n = 4$, $m = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$, получим следующую формулу для полной (или материальной) производной функции $f(x, y, z, t)$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (3.13)$$

2) $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Формулы для частных производных f'_x , f'_y получим из (3.12), положив

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad t_1 = x, \quad t_2 = y \quad n = 2, \quad m = 2:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3) $f = f(u, v, w)$, $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$. Формулы для частных производных f'_x , f'_y , f'_z получим из (3.12) также, как и в случае 2, положив $n = 3$, $m = 3$ и добавив соответствующие переменные $x_3 = w$, $t_3 = z$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

4) $f = f(x, y, z)$, где $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. В этом случае формулы для частных производных f'_u , f'_v , f'_w могут быть легко получены из (3.15), если в них x, y, z заменить на u, v, w соответственно, а u, v, w — соответственно на x, y, z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Формула (3.12) также позволяет дифференциал первого порядка сложной функции представить в виде (3.5), то есть в форме, инвариантной (не изменяющейся) относительно того, являются ли переменные x_i независимыми или функциями других переменных. Действительно, согласно (3.5) $df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial t_j} dt_j$, так как переменные t_j , $j = 1, 2, \dots, m$ независимые переменные. Подставим в правую часть полученного равенства вместо $\frac{\partial f}{\partial t_j}$ их выражения согласно (3.12). В результате получим

$$df = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

то есть опять формулу (3.5). Таким образом, выражение для дифференциала первого порядка не зависит от того, являются ли аргументы функции нескольких переменных независимыми переменными или дифференцируемыми функциями других переменных. Это свойство дифференциала первого порядка называется инвариантностью формы первого дифференциала.

Заметим, что этим свойством, как и в случае функций одной переменной, не обладают дифференциалы порядка выше первого.

Проиллюстрируем это на примере дифференциала второго порядка функции $z = f(x, y)$ предполагая, что она дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Дифференциал второго порядка найдем, исходя из его определения, то есть как дифференциал от дифференциала первого порядка. При этом необходимо иметь в виду, что дифференциал первого порядка является функцией переменных двух типов: координат точки, в которой он вычисляется, и приращений этих координат (аргументов). Из определения дифференциала следует, что при вычислении дифференциала от дифференциала, необходимо последний рассматривать как функцию координат точки, то есть как функцию тех же аргументов, что и при вычислении первого дифференциала (предыдущего). Строго говоря, приращения аргументов при вычислении дифференциала второго порядка, исходя из дифференциала первого порядка, не обязательно равны приращениям аргументов у первого

дифференциала. В случае функции двух переменных $f(x, y)$ обозначим приращения аргументов при вычислении второго дифференциала через δx и δy . Найдем теперь дифференциал первого порядка, обозначая операцию повторного дифференцирования знаком δ и используя свойство инвариантности формы первого дифференциала. Имеем:

$$\begin{aligned} \delta(df) &= \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = \\ &= \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial f}{\partial x} \delta(dx) + \delta \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial f}{\partial y} \delta(dy) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \delta y \right) dx + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y \right) dy + \frac{\partial f}{\partial x} \delta(dx) + \frac{\partial f}{\partial y} \delta(dy) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\delta y dx + \delta x dy) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y dy + \frac{\partial f}{\partial x} \delta dx + \frac{\partial f}{\partial y} \delta dy. \end{aligned}$$

Под дифференциалом второго порядка понимается дифференциал от дифференциала первого порядка при условии, что $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Полагая в полученном выражении $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, приходим к следующему выражению для дифференциала второго порядка:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y.$$

Если переменные x и y независимы, то $d^2 x = 0$, $d^2 y = 0$, так как в этом случае dx и dy не зависят от x и y и мы приходим к выражению (3.6) для дифференциала второго порядка в случае, когда x и y независимы. Если же $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ являются дважды дифференцируемыми функциями независимых переменных, то

$$\begin{aligned} d^2 x &= \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 \neq 0, \\ d^2 y &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv^2 \neq 0. \end{aligned}$$

В общем случае и выражение для d^2f будет, очевидно, отличаться от (3.6) дополнительными слагаемыми $\frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y$. Таким образом, форма уже второго дифференциала зависит от того, являются ли переменные независимыми или функциями других переменных, то есть свойство инвариантности формы у дифференциала второго порядка отсутствует.

Пример 3.27. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \arcsin(x^2 + y^2 + t^2)$, где $x = 2t$, $y = 4t^2$.

Решение. Искомая производная находится по формуле (3.13). Находим необходимые частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}}; \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{2t}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}}; \quad \frac{dx}{dt} = 2; \quad \frac{dy}{dt} = 8t.\end{aligned}$$

Подставляя в (3.13), получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2t + 2x \cdot 2 + 2y \cdot 8t}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}} = \frac{2t(1 + 4t + 32t^2)}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}}.$$

Пример 3.28. Найти частные производные: 1) $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \arctg(x^2y^2)$; $x = v \sin u$; $y = u \cos v$. 2) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(x^2 + y^2, x^2y^2)$.

Решение. 1) Искомые частные производные определяются формулой (3.16). Находим частные производные, входящие в (3.16), с учетом того, что рассматриваемая функция есть сложная функция двух переменных. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2xy^2}{1 + (x^2y^2)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2yx^2}{1 + (x^2y^2)^2}; \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= v \cos u; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sin u; \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \cos v; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -u \sin v.\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (3.16):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2xy^2(v \cos u + \cos v)}{1 + (x^2y^2)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2y(\sin u - u \sin v)}{1 + (x^2y^2)^2}.$$

Заменяя теперь x и y их выражениями через переменные u и v , получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{2vu^2 \cos^2 v (v \cos u + \cos v)}{1 + (uv \sin u \cdot \cos v)^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{2uv^2 \sin^2 u (u \sin u - u \sin v)}{1 + (uv \sin u \cdot \cos v)^2}. \end{aligned}$$

2) Данная функция может быть представлена как сложная функция аргументов $u = x^2 + y^2, v = x^2y^2$. Тогда по формуле (3.14) необходимо найти частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{2vu^2 \cos^2 v (v \cos u + \cos v)}{1 + (uv \sin u \cdot \cos v)^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2xy^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x^2y. \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в (3.14), находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} 2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} 2y + \frac{\partial f}{\partial v} 2x^2y.$$

Нахождение частных производных или полной производной более высокого порядка сложной функции нескольких переменных осуществляется повторным дифференцированием соответствующей производной порядка на единицу меньше по соответствующей переменной. Получаемые при этом общие формулы являются громоздкими, поэтому их не обязательно запоминать, а достаточно понять принцип, с помощью которого они получаются. Он состоит в том, что частные производные более высокого порядка находятся по тем же правилам, что и частные производные первого порядка, но применяемым уже не к исходной функции, а к ее соответствующей частной производной. Например, чтобы найти $\frac{d^2 f}{dt^2}$ в случае, описываемом формулой (3.13), необходимо найти полные производные

от каждого слагаемого в правой части (3.13). При этом производная от первого слагаемого в правой части (3.13) будет состоять из четырех слагаемых, а от каждого из последующих трех слагаемых в правой части (3.13) — из пяти, так как добавляются производные по соответственно от $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Приведем окончательный результат дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{dz}{dt} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \frac{dx}{dt} + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dz}{dt} + \dots = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \frac{dx}{dt} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \frac{dy}{dt} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d^2 x}{dt^2}. \end{aligned}$$

Аналогично, в случае, описываемом формулой (3.14) частная производная второго порядка находится следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
 \end{aligned}$$

В качестве примера найдем частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ задачи 3.28(2).

Пример 3.29. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ если $Z = f(x^2 + y^2, x^2 y^2)$.

Решение. Искомую частную производную найдем как частную производную по переменной от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$, которая уже найдена в задаче 3.28(2). Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} 2xy^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) 2x + \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} (2y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) 2xy^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} (2xy^2) = \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} 4x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} 2x 2xy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} 2x 2xy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} 4x^2 y^4 + \frac{\partial f}{\partial v} 4xy = \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} 4x^2 + 8x^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} 4x^2 y^4 + \frac{\partial f}{\partial v} 4xy.
 \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\frac{\partial}{\partial y} (2x) = 0$, так как x и y — независимые переменные, а также то, что у дважды дифференцируемой функции частные производные второго порядка непрерывны и поэтому в случае вычисления смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ их величина не зависит от порядка дифференцирования.

С помощью аппарата дифференциального исчисления функций нескольких переменных можно преобразовать различные выражения, содержащие частные производные, к новым переменным, что особенно широко используется при решении различных задач математической физики.

Пример 3.30. Преобразовать к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (оператор

Лапласа на плоскости), где $u = u(x, y)$ — дважды дифференцируемая функция.

Решение. Для решения задачи представим $u = u(x, y)$ как сложную функцию переменных r и φ : $u = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Далее найдем частные производные по r и φ по формулам (3.16). Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi.\end{aligned}$$

Находим теперь частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. Имеем в соответствии с изложенным по формулам (3.16):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \varphi - 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Найдем следующую сумму

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (\cos \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\cos \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, при переходе к полярным координатам оператор Лапласа преобразуется по формуле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

В заключение раздела кратко остановимся на одном важном для приложений классе функций — однородных функциях.

Однородной функцией степени k (измерения k) называется функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая в каждой точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из области определения и для каждого числа t , для которого точка $M(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ также принадлежит области определения функции, удовлетворяет условию

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для однородных функций нескольких переменных справедлива теорема Эйлера: если функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в некоторой области D является дифференцируемой однородной функцией степени k , то в каждой точке области справедливо равенство

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} x_n = ky.$$

Это равенство легко получается путем применения формулы (3.13) при вычислении полной производной по t функции $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ с одной стороны, а с другой при вычислении этой же производной исходя из представления этой же функции в виде $t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим теперь правила дифференцирования неявных функций.

Функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется неявной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если она определяется не разрешенным относительно y уравнением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0. \quad (3.17)$$

Если функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0)$, то она имеет в этой окрестности непрерывную в точке P_0 частную производную F'_y . Если $F(P_0) = 0$, а $F'_y(P_0) \neq 0$, то найдутся такие окрестности точек $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и y^0 , что для каждой точки M из указанной окрестности существует, и притом единственное, решение $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнения (3.17), непрерывное в окрестности точки M_0 , причем $y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки P_0 существуют все частные производные F'_{x_i} , непрерывные в точке

P_0 , то в точке M_0 существуют и частные производные F'_{x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$), причем, если частные производные F'_{x_i} , F'_y непрерывны в окрестности точки P_0 , то частные производные f'_{x_i} существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки M_0 и справедлива формула

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{F'_{x_i}}{F'_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18)$$

В частном случае неявной функции одной переменной, то есть функции, определяемой уравнением $F(x, y)$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{F'_{x_1}}{F'_y}. \quad (3.19)$$

Для функции двух переменных, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$, соответствующие формулы для частных производных имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (3.20)$$

Идея получения формулы (3.18) состоит в нахождении полного дифференциала функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, которая очевидно тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки P_0 , если $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда

$$dF = F'_{x_1} dx_1 + F'_{x_2} dx_2 + \dots + F'_{x_n} dx_n + F'_y dy = 0.$$

Отсюда

$$dy = \left(- \frac{F'_{x_1}}{F'_y} \right) dx_1 + \left(- \frac{F'_{x_2}}{F'_y} \right) dx_2 + \dots + \left(- \frac{F'_{x_n}}{F'_y} \right) dx_n \quad (3.21)$$

и, следовательно, частные производные действительно определяются формулой (3.18).

Для получения производных высших порядков функций, заданных неявно, проводится последовательно дифференцирование (3.18)–(3.20) по соответствующей переменной, рассматривая y (z для (3.20)) как функцию переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ (x, y для (3.20)). Например, производная второго порядка функции $y = f(x)$ заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ из (3.19), находится следующим образом:

$$y'' = - \left(\frac{F'_x}{F'_y} \right)'_x = - \frac{(F'_x F'_y - F'_x F'_y)_x}{(F'_y)^2} = - \frac{F''_{xx} F'_y - F'_x F''_{yx}}{(F'_y)^2}.$$

Пример 3.31. Найти производные y' и y'' от функции, заданной неявно уравнением: $x^y - y^x = 0$.

Решение. Производную неявной функции одной переменной найдем по формуле (3.19). В рассматриваемом случае $F(x, y) = x^y - y^x$. Находим в соответствии с формулой (3.19) частные производные F'_x и F'_y . Имеем:

$$F'_x = y x^{y-1} - y^x \ln y; \quad F'_y = x^y \ln x - x y^{x-1}.$$

Подставляем найденные частные производные в (3.19):

$$y' = - \frac{y x^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - x y^{x-1}}.$$

Полученное выражение для y' можно упростить, воспользовавшись уравнением, определяющим неявную функцию. Согласно уравнению $x^y = y^x$ и $y \ln x = x \ln y$. С учетом этого получим

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x} - \ln y \right) y^x}{y^x \left(\ln x - \frac{x}{y} \right)} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{x} \ln x}{\frac{x}{y} \ln y - \frac{x}{y}} = \frac{y^2 \ln x - 1}{x^2 \ln y - 1}.$$

Таким образом

$$y' = \frac{y^2 \ln x - 1}{x^2 \ln y - 1}.$$

Производную второго порядка y'' найдем, дифференцируя по x полученное выражение для y' . Имеем, последовательно дифференцируя произведение и заменяя полученным выше

выражением,

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left(\frac{\ln x - 1}{x^2} \right)'_x \frac{y^2}{\ln y - 1} + \frac{\ln x - 1}{x^2} \left(\frac{y^2}{\ln y - 1} \right)'_x = \\
 &= \frac{x^2 \frac{1}{x} - 2x(\ln x - 1)}{x^4 (\ln y - 1)} y^2 + \frac{(\ln x - 1)(2yy'(\ln y - 1)) - y^2 \frac{y'}{y}}{x^2 (\ln y - 1)^2} = \\
 &= \frac{(3 - 2 \ln x) y^2}{x^3 (\ln y - 1)} + \frac{(\ln x - 1)^2 (2 \ln y - 3) y^3}{x^4 (\ln y - 1)^3} = \\
 &= \frac{x(3 - 2 \ln x)(\ln y - 1)^2 + y(\ln x - 1)^2 (2 \ln y - 3)}{x^4 (\ln y - 1)^3} y^2.
 \end{aligned}$$

Пример 3.32. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $e^{z^2} - x^2 y^2 z^2 = 0$.

Решение. Частные производные z'_x и z'_y находятся в данном случае по формулам (3.20). Находим необходимые частные производные функции $F(x, y, z)$, входящей в (3.20), которая в данном случае определяется, очевидно, выражением

$$F(x, y, z) = e^{z^2} - x^2 y^2 z^2.$$

Имеем

$$F'_x = -2x y^2 z^2; \quad F'_y = -2x^2 y z^2; \quad F'_z = 2z e^{z^2} - 2x^2 y^2 z.$$

Теперь в соответствии с (3.20) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2x y^2 z^2}{2z (e^{z^2} - x^2 y^2)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-2x^2 y z^2}{2z (e^{z^2} - x^2 y^2)}.$$

В полученных выражениях для частных производных z'_x и z'_y можно (но не обязательно) заменить e^{z^2} на $x^2 y^2 z^2$ в соответствии с уравнением, определяющим неявную функцию. В результате получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x y^2 z^2}{z (x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2)} = \frac{z}{x (z^2 - 1)}; \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x^2 y z^2}{x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2} = \frac{z}{y (z^2 - 1)}.
 \end{aligned}$$

Пример 3.33. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ неявной функции из задачи 3.32.

Решение. По определению частной производной второго порядка получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{x(z^2 - 1)} \right) = \frac{z'_x x (z^2 - 1) - z (z^2 - 1 + 2xz z'_x)}{x^2 (z^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{z'_x (x(z^2 - 1) - 2xz^2) + z(z^2 - 1)}{x^2 (z^2 - 1)^2} = \frac{x(1 + z^2) z'_x + z(z^2 - 1)}{x^2 (z^2 - 1)^2}.\end{aligned}$$

Подставим теперь вместо z'_x выражение из задачи (3.32) выражение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{(1 + z^2) \frac{z}{z^2 - 1} + z(z^2 - 1)}{x^2 (z^2 - 1)^2} = \frac{z(1 + z^2 + (z^2 - 1)^2)}{x^2 (z^2 - 1)^3} = \\ &= z \frac{z^4 - z^2 + 2}{x^2 (z^2 - 1)^3}.\end{aligned}$$

Аналогично находится и смешанная частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x(z^2 - 1)} \right) = \frac{1}{x} \frac{z'_y (z^2 - 1) - 2z^2 z'_y}{(z^2 - 1)^2} = \\ &= -\frac{z^2 + 1}{x(z^2 - 1)^2} z'_y = -\frac{(z^2 + 1)z}{yx(z^2 - 1)^3}.\end{aligned}$$

Выше были рассмотрены неявные функции, определяемые одним функциональным уравнением. В приложениях анализа приходится рассматривать совокупности $m \in N$ неявных функций, определяемых посредством системы функциональных уравнений. Мы рассмотрим случай совокупности двух неявных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, определяемых системой двух функциональных уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Пусть система (3.22) имеет решение $x = x_0, y = y_0, u = u_0, v = v_0$. Пусть функции F и G в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка и пусть определитель

$$J(u, v) = \frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}, \quad (3.23)$$

называемый якобианом, отличен от нуля в точке M_0 . Тогда в некоторой окрестности точки M_0 система определяет единственным образом систему непрерывных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ имеющих непрерывные частные производные первого порядка, причем $u(x_0, y_0) = u_0$ и $v(x_0, y_0) = v_0$.

Для того, чтобы найти дифференциалы du и dv , а также u'_x, u'_y, v'_x, v'_y , следует выписать дифференциалы dF и dG :

$$\begin{aligned} dF &= F'_x dx + F'_y dy + F'_u du + F'_v dv = 0 \\ dG &= G'_x dx + G'_y dy + G'_u du + G'_v dv = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

а затем решить систему двух уравнений (3.24) относительно du и dv .

Пример 3.34. Функции u и v независимых переменных x и y заданы системой уравнений

$$\begin{cases} xu - yv - 1 = 0 \\ x - y + u - v = 0 \end{cases}.$$

Найти $du, dv, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, d^2u$.

Решение. Имеем, согласно условию,

$$F(x, y, u, v) = xu - yv - 1 = 0, \quad G(x, y, u, v) = x - y + u - v = 0.$$

Дифференцируя, получим $\begin{cases} d\hat{F} = u dx - v dy + x du - y dv = 0 \\ dG = dx - dy + du - dv = 0 \end{cases}$

Якобиан $J(u, v) = \begin{vmatrix} x & -y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x + y$ при $x \neq y$ отличен от нуля, и полученную выше систему можно решить относительно du и dv . Решим указанную систему по правилу Крамера и

получим:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} -u \, dx + v \, dy & -y \\ dy - dx & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - y \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(u - y) \, dy + (y - v) \, dy}{y - x},$$

$$dv = \frac{\begin{vmatrix} x - u \, dx + v \, dy \\ 1 & dy - dx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - y \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(u - x) \, dx + (x - v) \, dy}{y - x}.$$

Откуда следует, что $u'_x = \frac{u - y}{y - x}$, $u'_y = \frac{y - v}{y - x}$, $v'_x = \frac{u - x}{y - x}$,
 $v'_y = \frac{x - v}{y - x}$.

Найдем далее

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d\left(\frac{u - y}{y - x} \, dx + \frac{y - v}{y - x} \, dy\right) = \\ &= \frac{(y - x) \, d(y - u) + (y - u) \, d(y - x)}{(y - x)^2} \, dx + \\ &\quad + \frac{(y - x) \, d(y - v) - (y - v) \, d(y - x)}{(y - x)^2} \, dy = \\ &= \frac{(y - x)(dy - du) + (y - u)(dy - dx)}{(y - x)^2} \, dx + \\ &\quad + \frac{(y - x)(dy - dv) - (y - v)(dy - dx)}{(y - x)^2} \, dy. \end{aligned}$$

Затем подставим в выражение для d^2u вместо du и dv уже полученные для них выражения

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{(y - x) \left(dy - \frac{(y - u) \, dx + (y - v) \, dy}{y - x} \right) + (y - u)(dy - dx)}{(y - x)^2} \, dx + \\ &\quad + \frac{(y - x) \left(dy - \frac{(u - x) \, dx + (x - v) \, dy}{y - x} \right) - (y - v)(dy - dx)}{(y - x)^2} \, dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(y-x) \left(\frac{u-y}{y-x} dx + \frac{v-x}{y-x} dy \right) + (y-u)(dy-dx)}{(y-x)^2} dx + \\
&+ \frac{(y-x) \left(\frac{x-u}{y-x} dx + \frac{v-2x+y}{y-x} dy \right) - (y-u)(dy-dx)}{(y-x)^2} dy = \\
&= \frac{2(u-y) dx + (x+y-v-u) dy}{(y-x)^2} dx + \\
&\quad + \frac{(x+y-v-u) dx + 2(v+y-x) dy}{(y-x)^2} dy = \\
&= 2 \frac{u-y}{(y-x)^2} dx^2 + 2 \frac{(x+y-v-u)}{(y-x)^2} dx dy + 2 \frac{v-x}{(y-x)^2} dy^2.
\end{aligned}$$

3.5.

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой δ -окрестности точки $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E^n$ и пусть ℓ — единичный вектор в E^n с координатами $\ell_i = \cos \alpha_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), α_i — углы между вектором ℓ и положительным направлением координатной оси Ox_i . Тогда предел

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(f(x_1^0 + k\ell_1, x_2^0 + k\ell_2, \dots, x_n^0 + k\ell_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial \ell}, \quad (3.25)$$

(если он существует) называется производной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке P_0 по направлению ℓ .

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируемая функция в точке P_0 , то для производной по направлению справедлива формула

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_k} \cos \alpha_k. \quad (3.26)$$

Заметим, что производная по направлению характеризует скорость изменения функции в данном направлении.

Правую часть равенства (3.26) можно рассматривать как скалярное произведение вектора $\vec{\ell}$ и вектора с координатами $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}$. Последний называется градиентом функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке P_0 и обозначается $\text{grad } f(P_0)$. Таким образом

$$\begin{aligned} \text{grad } f(P_0) &= (f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \dots, f'_{x_n}(P_0)) , \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} &= \text{grad } f(P_0) \cdot \vec{\ell} = \text{Pr}_{\vec{\ell}} \text{grad } f(P_0) = \\ &= |\text{grad } f(P_0)| \cos \left(\angle \text{grad } f(P_0), \vec{\ell} \right) . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Вектор $\text{grad } f(P_0)$ коллинеарен вектору нормали (см. далее) к поверхности уровня $S : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$, проходящей через точку P_0 . Поэтому для любого вектора $\vec{\ell}$ касательного к поверхности уровня справедливо равенство

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{\ell}} = \text{grad } f(P_0) \cdot \vec{\ell} = 0, \quad P_0 \in S. \quad (3.28)$$

Из соотношений (3.27) и (3.28) следует, что: 1) градиент функции f перпендикулярен поверхности уровня; 2) направление градиента функции f в данной точке P_0 есть направление наиболее быстрого роста функции (то есть наибольшей производной по направлению, что имеет место при $\cos \left(\angle \text{grad } f(P_0), \vec{\ell} \right) = 1$).

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная по направлению $\vec{\ell} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ и градиент функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma, \\ \text{grad } u &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Если $f(P)$ и $g(P)$ — дифференцируемые функции своих аргументов и $C = \text{const}$, то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + g) &= \text{grad } f + \text{grad } g, \quad \text{grad}(C + f) = \text{grad } f, \\ \text{grad}(Cf) &= C \text{grad } f, \quad \text{grad}(fg) = g \text{grad } f + f \text{grad } g, \\ \text{grad}(f^n) &= n f^{n-1} \text{grad } f + \text{grad } g, \quad \text{grad}(f(g)) = f'(g) \text{grad } g. \end{aligned}$$

Пример 3.35. Найти производную функции $u = x^3 y^3 z^3$ в точке $M(1, 1, 1)$ в направлении, образующем с осями координат углы 60° , 45° , 60° .

Решение. В соответствии с (3.26) и (3.29) необходимо найти частные производные функции u в точке M . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^3 z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^3 y^2 z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^3 y^3 z^2.$$

В точке M значения производных

$$\frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial y} = 3; \quad \frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial z} = 3.$$

Подставляя найденные значения в (3.29), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial \ell} &= 3 \cos 60^\circ + 3 \cos 45^\circ + 3 \cos 60^\circ = \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} (2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Заметим, что градиент этой функции в точке $M(1, 1, 1)$ равен $\text{grad } u(1, 1, 1) = 3 (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

Пример 3.36. Найти производную функции $u = x^2 + y^3 + z^3$ в точке $A(1, 2, 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(13, 5, 7)$.

Решение. В отличие от предыдущей задачи здесь не заданы направляющие косинусы единичного вектора указанного направления. Их легко найти, если известны координаты вектора: $\vec{AB} : \vec{AB} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{12}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = \frac{12}{13}, \quad \cos \beta = \frac{3}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{4}{13}, \\ \vec{\ell} &= \frac{12}{13} \vec{i} + \frac{3}{13} \vec{j} + \frac{4}{13} \vec{k}. \end{aligned}$$

Найдем теперь частные производные первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(1, 2, 3)}{\partial x} &= 2x = 2; \quad \frac{\partial u(1, 2, 3)}{\partial y} = 3y^2 = 12; \\ \frac{\partial u(1, 2, 3)}{\partial z} &= 3z^2 = 27. \end{aligned}$$

И производную в направлении $\vec{\ell}$ в точке A :

$$\frac{\partial u(1, 2, 3)}{\partial \ell} = 3 \frac{12}{13} + 12 \frac{3}{13} + 27 \frac{4}{13} = \frac{36 + 36 + 108}{13} = \frac{180}{13}.$$

Пример 3.37. Найти производную функции $u = \frac{1}{r^2}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ в направлении ее наиболее быстрого роста.

Решение. В данном случае необходимо найти производную в направлении градиента. Эта производная в соответствии с (3.27) равна $\frac{\partial u}{\partial \ell} = |\text{grad } u|$ так как $\cos(\angle \text{grad } f, \vec{\ell}) = 1$. Определяем координаты вектора $\text{grad } u$ в некоторой произвольной точке $P(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{4x}{r^3}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{4y}{r^3}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4z}{r^3}$$

$$\text{и } \text{grad } u = -\frac{4}{r^3} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } |\text{grad } u| &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \\ &= \frac{4}{r^3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{4}{r^2}. \end{aligned}$$

3.6.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Проведем через точку $M(x, y, z)$ этой поверхности произвольную кривую по поверхности и в указанной точке построим к этой кривой касательную (очевидно в общем случае таких кривых и касательных к ним существует бесчисленное множество).

Если все касательные в точке M поверхности к различным кривым, проведенным через эту точку по поверхности, лежат в одной плоскости, то эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в точке M , а сама точка M при этом называется точкой касания.

Нормалью к поверхности в точке M называется всякий ненулевой вектор, параллельный прямой, проходящей через

точку касания поверхности с касательной плоскостью, проведенной в точке M и перпендикулярно этой плоскости. Указанная прямая называется нормальной прямой к поверхности в указанной точке M .

Если поверхность задана неявным образом уравнением $F(x, y, z) = 0$ и имеет в некоторой точке $M(x_0, y_0, z_0)$ касательную плоскость, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \quad (3.30)$$

а уравнение нормальной прямой

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (3.31)$$

При этом в качестве нормали в указанной точке можно взять вектор

$$\vec{n} = \left\{ \frac{\partial F(M)}{\partial x}, \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \frac{\partial F(M)}{\partial z} \right\}.$$

Если уравнение поверхности, имеющей касательную в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ задано в явной форме $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости и нормальной прямой в точке M имеют соответственно вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (3.32)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (3.33)$$

Легко заметить, что правая часть уравнения (3.32) представляет собой, согласно (3.5) полный дифференциал функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$. При этом, так как $z - z_0$ представляет собой приращение аппликаты точки касательной плоскости, то отсюда вытекает геометрический смысл дифференциала первого порядка функции двух переменных: дифференциал первого порядка (или полный дифференциал) функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке

$P_0(x_0, y_0)$ есть приращение аппликаты точки касательной плоскости, проведенной к поверхности в ее точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

Пример 3.38. Написать уравнение касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Решение. Поверхность задана неявно, поэтому соответствующее уравнение касательной плоскости имеет вид (3.30). Находим частные производные, входящие в это уравнение, с учетом того, что в данном случае $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Имеем: $F'_x = \frac{2x}{a^2}$; $F'_y = \frac{2y}{b^2}$; $F'_z = \frac{2z}{c^2}$. В точке M значения частных производных равны:

$$F'_x(M) = \frac{\sqrt{2}}{a}; \quad F'_y(M) = \frac{1}{b}; \quad F'_z(M) = \frac{1}{c}.$$

Подставив полученные результаты в (3.30), получим искомого уравнение касательной плоскости.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{b} \left(x - \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{c} \left(x - \frac{c}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 2. \end{aligned}$$

Уравнение нормальной прямой найдем, подставив значения частных производных, вычисленных в точке в (3.31). Получим

$$\begin{aligned} \frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{a}} &= \frac{y - \frac{b}{2}}{\frac{1}{b}} = \frac{z - \frac{c}{2}}{\frac{1}{c}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) &= b \left(y - \frac{b}{2}\right) = c \left(z - \frac{c}{2}\right). \end{aligned}$$

Пример 3.39. Написать уравнение касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности $z = 2x^2 + 3y^2$ в точке $M(1, 2, 14)$.

Решение. Искомые уравнения находятся по формулам (3.32) и (3.33):

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2, \quad f'_x(M) = 4x = 4, \quad f'_y(M) = 6y = 12.$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - 14 = 4(x - 1) + 12(y - 2) \Rightarrow 4x + 12y - z - 14 = 0.$$

Уравнение нормальной прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{12} = \frac{z}{-1}$.

Пример 3.40. Найти уравнение касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, параллельных плоскости $x + y + 2z = 1$.

Решение. Так как касательная плоскость должна быть параллельна к плоскости $x + y + 2z = 1$, то нормаль касательной плоскости должна быть коллинеарной к нормали заданной плоскости. Это означает, что, согласно условию коллинеарности имеет место условие:

$$\frac{F'_x(M)}{1} = \frac{F'_y(M)}{1} = \frac{F'_z(M)}{1},$$

или $F'_x = 2x$, $F'_y = 8y$, $F'_z = 18z$, $\frac{2x}{1} = \frac{8y}{1} = \frac{18z}{2}$. Откуда следует, что $2x = 8y$, $2x = 9$ или $y = \frac{1}{4}x$, $z = \frac{2}{9}x$. Координаты точки $P\left(x, \frac{1}{4}x, \frac{2}{9}x\right)$ должны удовлетворять уравнению поверхности, так как эта точка принадлежит этой поверхности. Подставив ее координаты в уравнение поверхности, получим следующее уравнение для x : $x^2 + 4 \cdot \frac{1}{16}x^2 + 9 \cdot \frac{4}{81}x^2 = 1$, откуда $x = \pm \frac{6}{\sqrt{61}}$. Соответственно, $y = \pm \frac{3}{2\sqrt{61}}$, $z = \pm \frac{4}{3\sqrt{61}}$. Имеем таким образом две точки касания $P_1\left(\frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{3}{2\sqrt{61}}, \frac{4}{3\sqrt{61}}\right)$ и $P_2\left(-\frac{6}{\sqrt{61}}, -\frac{3}{2\sqrt{61}}, -\frac{4}{3\sqrt{61}}\right)$ и, соответственно, две касательные плоскости, которые, согласно (3.30) описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \left(x \pm \frac{6}{\sqrt{61}}\right) + 1 \cdot \left(y \pm \frac{3}{2\sqrt{61}}\right) + 2 \cdot \left(z \pm \frac{4}{3\sqrt{61}}\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x + y + 2z \pm \frac{109}{6\sqrt{61}} &= 0. \end{aligned}$$

3.7. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой области $G \subset E^n$ и точка $P_0 \in G$. Значение функции в этой точке $f(P_0)$ называется локальным максимумом (локальным минимумом) функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в области G если существует некоторая окрестность $U(P_0) \subset G$ точки P_0 такая, что для всех точек $P \in U(P_0)$ P_0 имеет место неравенство $f(P) < f(P_0)$ ($f(P) > f(P_0)$). Максимум или минимум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется также локальным экстремумом функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в области G .

Замечания. 1) Под окрестностью точки P_0 понимается любая область, содержащая точку P_0 . 2) Запись $U(P_0)$ P_0 означает проколотую окрестность точки P_0 , то есть окрестность этой точки без самой точки. 3) Из определения локального экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ следует, что $f(P_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности точки P_0 , но не является, в общем случае, наибольшим или наименьшим значением функции в области G , то есть глобальным экстремумом.

Необходимое условие экстремума

Если точка P_0 есть точка локального экстремума $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и если в точке P_0 существуют частные производные первого порядка функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то все эти частные производные равны нулю, то есть

$$f'_{x_i}(P_0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.34)$$

Точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль называются критическими, или стационарными, или точками возможного экстремума.

Замечание. 1) Функция $f(P)$ может иметь экстремум и в тех точках, где частные производные не существуют. 2) Условие (3.34) не является достаточным условием локального экстремума. Например, частные производные функции $z = y^2 - x^2$

равны нулю в точке $O(0, 0)$, однако эта функция не имеет экстремума в указанной точке, так как равна в ней нулю и ни в какой окрестности точки $(0, 0)$ неравенство $y^2 - x^2 < 0$ или $(y^2 - x^2 > 0)$ не выполняется.

Пример 3.41. Найти стационарные точки следующих функций:

$$1) f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2;$$

$$2) f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x + 16y + 18z + 1.$$

Решение. 1) Найдем частные производные $f'_x = 2(x - 3)$; $f'_y = 2(y - 2)$. Приравнявая частные производные нулю, получим систему уравнений: $x - 3 = 0$ и $y - 2 = 0$. Отсюда следует, что $x = 3$, $y = 2$. Таким образом, стационарная точка $(3, 2)$. 2) Частные производные равны

$$f'_x = 2x - 4, \quad f'_y = 8y - 16, \quad f'_z = 18z + 18.$$

Стационарные точки находим из условия равенства нулю частных производных, что приводит к следующей системе уравнений: $2x - 4 = 0$, $8y - 16 = 0$, $18z + 18 = 0$. Откуда следует, что $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$. Стационарная точка $(2, 2, -1)$.

Достаточные условия экстремума

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, являющейся стационарной точкой функции f . Тогда, если квадратичная форма (второй дифференциал)

$$\Phi(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^n f''_{x_i x_j}(P_0) dx_i dx_j \quad (3.35)$$

положительно определена (отрицательно определена) в точке P_0 , то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке минимум (максимум). Если квадратичная форма Φ принимает как положительные, так и отрицательные значения (то есть неопределенна), то в точке P_0 нет экстремума.

Замечание. Квадратичная форма Φ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для любой точки $P(z_1, z_2, \dots, z_n) \in E^n$ имеет место $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n) > 0$ ($\Phi < 0$).

Исследование знакоопределенности квадратичной формы осуществляется с помощью критерия Сильвестра.

Критерий Сильвестра

Для того, чтобы квадратичная форма (3.35) была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= f''_{x_1 x_1}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} \end{vmatrix}; \dots \\ \dots, \Delta_n &= \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \dots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} & \dots & f''_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & \dots & f''_{x_n x_n} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

были положительны, то есть

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (3.37)$$

Замечание. Если знаки угловых миноров чередуются начиная с отрицательного, т. е. $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$, то квадратичная форма (3.35) будет отрицательно определенной. Если нужного чередования знаков нет и (3.37) не выполняется, то квадратичная форма (3.35) знаконеопределенная. В таких точках функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не имеет экстремума и ее называют седловой точкой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ ($n = 2$) достаточные условия экстремума запишутся следующим образом:

- 1) минимум, если $\Delta > 0, A > 0$ (или $C > 0$);
- 2) максимум, если $\Delta > 0, A < 0$ (или $C < 0$);
- 3) нет экстремума, если $\Delta < 0$;
- 4) вопрос открытый, требуется дополнительное исследование, если $\Delta = 0$. Здесь $\Delta = A \cdot C - B^2$, $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Пример 3.42. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 2y^2 - 2xy - x - 2y.$$

Решение. Находим стационарные точки данной функции из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2y - 1 = 0 \\ f'_y = 4y - 2x - 2 = 0 \end{cases}.$$

Откуда следует, что $x = 2$, $y = \frac{3}{2}$. Исследуем достаточные условия экстремума. Для этого найдем частные производные второго порядка. Имеем: $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{xy} = f''_{yx} = -2$. В соответствии с критерием Сильвестра находим угловые миноры: $\Delta_1 = 2 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 > 0$. Так как угловые миноры все положительны, то в точке $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ данная функция имеет минимум.

Пример 3.43. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4x + 2y - 8.$$

Решение. Находим стационарные точки функции из системы уравнений

$$\begin{aligned} u'_x &= 2x + 4 = 0, \\ u'_y &= 4y + 2 = 0, \\ u'_z &= 8z - 8 = 0. \end{aligned}$$

Откуда $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 1$. Находим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= 2, u''_{xy} = u''_{yx} = 0, u''_{xz} = u''_{zx} = 0, u''_{yy} = 4, \\ u''_{zy} &= u''_{yz} = 0, u''_{zz} = 8. \end{aligned}$$

В соответствии с критерием Сильвестра составляем угловые миноры:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0.$$

Так как все угловые миноры положительны, то данная функция в точке $\left(-2, -\frac{1}{2}, 1\right)$ имеет локальный минимум.

Пример 3.44. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2 - x_1^3 - \frac{4}{3} x_2^3.$$

Решение. Найдем производные f'_{x_1} и f'_{x_2} ; решая полученную систему

$$\begin{cases} 6x_1 x_2 - 3x_1^2 = 0 \\ 3x_1^2 - 4x_2^2 = 0 \end{cases},$$

найдем две точки $P_0(6, 3)$ и $P_1(0, 0)$.

Для установления характера найденных стационарных точек воспользуемся достаточным условием экстремума и исследуем знакоопределенность квадратичной формы, представляющей собой, как легко заметить второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2 f &= f''_{x_1 x_1} dx_1^2 + f''_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 + f''_{x_2 x_1} dx_2 dx_1 + f''_{x_2 x_2} dx_2^2 = \\ &= (6x_2 - 6x_1) dx_1^2 + 6x_1 dx_1 dx_2 + 6x_1 dx_2 dx_1 - 8x_2 dx_2^2. \end{aligned}$$

Составим матрицу $\begin{pmatrix} 6x_2 - 6x_1 & 6x_1 \\ 6x_1 & -8x_2 \end{pmatrix}$. Вычислим значения соответствующих миноров согласно (3.36):

$$\Delta_1 = (6x_2 - 6x_1)|_{\substack{x_1=6 \\ x_2=3}} = -18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x_2 - 6x_1 & 6x_1 \\ 6x_1 & -8x_2 \end{vmatrix} = (6(x_2 - x_1)(-8x_2) - (6x_1)^2)|_{\substack{x_1=6 \\ x_2=3}} = 648.$$

В соответствии с (3.37) получаем, что в точке P_0 функция имеет максимум $f_{\max} = 72$.

Исследуем теперь точку $P_1(0, 0)$. В этой точке $\Delta_1(0, 0) = 0$, $\Delta_2(0, 0) = 0$ и требуется дополнительное исследование. Поскольку при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, $f(0, 0) = 0$; при $x_1 < 0$ и $x_2 = 0$, $f(x_1, 0) = -x_1^3 > 0$, а при $x_1 > 0$ и $x_2 = 0$, $f(x_1, 0) = -x_1^3 < 0$, то в окрестности точки $P_1(0, 0)$ имеются как положительные, так и отрицательные значения $f(x_1, x_2)$, значит $P_1(0, 0)$ — седловая точка.

Пример 3.45. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1^4 \sqrt[3]{x_2}.$$

Решение. Найдем производные $f'_{x_1} = 4x_1^3 \sqrt[3]{x_2}$ и $f'_{x_2} = \frac{1+x_1^4}{3\sqrt[3]{x_2^2}}$. Одновременно эти производные не обращаются в нуль ни в одной точке. При всех $x_2 = 0$ f'_{x_2} не существует, а функция $f(x_1, x_2)$ непрерывна. Следовательно, точки $P(x_1, x_2 = 0)$ являются точками возможного экстремума. В то же время при $x_2 > 0$ $f(x_1, x_2 > 0) = f(x_1, 0)$; при $x_2 < 0$ $f(x_1, x_2 < 0) = f(x_1, 0)$. Следовательно точки на прямой $x_2 = 0$ — седловые.

Пример 3.46. Исследовать на экстремум функцию $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2 x_2^2}$.

Решение. Имеем

$$f'_{x_1} = \frac{x_2(1 - x_1^2 x_2^2)}{(1 + x_1^2 x_2^2)^2} = 0, \quad f'_{x_2} = \frac{x_1(1 - x_1^2 x_2^2)}{(1 + x_1^2 x_2^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0(0, 0), \quad P_1\left(x_1, x_2 = \pm \frac{1}{x_1}\right) \text{ — критические точки.}$$

Найдем значение функции $f(x_1, x_2)$ в точках P_1 . Если $x_2 = -\frac{1}{x_1}$, то $f\left(x_1, x_2 = -\frac{1}{x_1}\right) = -\frac{1}{2}$, если $x_2 = \frac{1}{x_1}$, то $f\left(x_1, x_2 = \frac{1}{x_1}\right) = \frac{1}{2}$. Воспользуемся неравенством $|2x_1 x_2| \leq 1 + x_1^2 x_2^2$. Отсюда следует, что на линии $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ функция $f(x_1, x_2)$ имеет нестрогий минимум, а на линии $x_2 = \frac{1}{x_1}$ — нестрогий максимум, так как в первом случае, с учетом указанного неравенства, имеем $f(x_1, x_2) \geq \frac{x_1 x_2}{2|x_1 x_2|} = -\frac{1}{2}$, а во втором $f(x_1, x_2) \leq \frac{x_1 x_2}{2|x_1 x_2|} = \frac{1}{2}$.

Докажем, что точка $P_0(0, 0)$ — седловая. В самом деле, при $f(0, 0) = 0$, если $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, то $f(x_1, x_2) < 0$, если же $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $f(x_1, x_2) > 0$, следовательно, в окрестности точки $P_0(0, 0)$ имеются значения функции $f(x_1, x_2)$ как большие $f(0, 0)$, так и меньшие $f(0, 0)$. Этот же результат можно было бы получить, исследовав квадратичную форму второго дифференциала, которая в рассматриваемом случае имеет вид: $d^2 f(0, 0) = 2 dx dy$.

Матрица, соответствующая этой квадратичной форме:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

то есть квадратичная форма является знакопеременной. В точках $P_1 \left(x_1, x_2 = \frac{1}{x_1} \right)$ квадратичная форма второго дифференциала имеет вид

$$\begin{aligned} d^2 f \left(x_1, x_2 = \pm \frac{1}{x_1} \right) &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} (x_2^2 dx_1^2 + x_1^2 dx_1^2 + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2), & x_2 = -\frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{2} (x_2^2 dx_1^2 + x_1^2 dx_1^2 + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2), & x_2 = \frac{1}{x_1} \end{cases}. \end{aligned}$$

Матрица, соответствующая этой квадратичной форме, имеет вид: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2} & -1 \\ -1 & x_1^2 \end{pmatrix}$ при $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ и $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 1 \\ 1 & x_1^2 \end{pmatrix}$ при $x_2 = \frac{1}{x_1}$. И в том и другом случаях имеем $\Delta_1 = \pm \frac{1}{2} x_1^{-2}$, $\Delta_2 = 0$, то есть достаточный признак ответа не дает и требуется дополнительное исследование, которое и было выполнено выше.

Пример 3.47. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 2xy - x - 2y$ в треугольнике G , ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 4$.

Решение. В данной задаче необходимо найти не локальные, а глобальные наименьшее и наибольшее значения функции в заданной области. Для этого необходимо найти стационарные точки функции внутри области G и на ее границе, вычислить значения функции в этих точках и выбрать из них наибольшее и наименьшее. Исследование данной функции внутри области нами проведено в задаче 3.42. Значение функции в стационарной точке внутри области равно $z \left(2, \frac{3}{2} \right) = -\frac{5}{2}$. На оси Oy , то есть при $x = 0$ имеем:

Будем предполагать, что все функции $f(P)$ и $F_i(P)$ дважды непрерывно дифференцируемы и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

в каждой точке $P_0 \in G$ равен k , ради определенности будем считать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{P=P_0} \neq 0. \quad (3.40)$$

Исследование функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на локальный условный экстремум проводится с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Суть метода заключается в следующем.

Составляется функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i F_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Числа λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) называются множителями Лагранжа. Далее находятся стационарные точки функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (3.41)$$

Пусть решением системы уравнений (3.41) будет точка $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0)$. Далее исследуется на знакопеременность второй дифференциал функции Лагранжа

$$\begin{aligned} d^2L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0) = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(P_0)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 L(P_0)}{\partial x_i \partial \lambda_j} z_i \xi_j, \\ z_i = x_i - x_i^0, \xi_i = \lambda_i - \lambda_i^0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Если $d^2L(P_0)$ — знакоопределенная квадратичная форма, то функция $f(P)$ имеет локальный условный экстремум. Если $d^2L(P_0)$ есть знаконеопределенная квадратичная форма, то необходимо дополнительное исследование: P_0 может быть, а может и не быть точкой локального условного экстремума функции $f(P)$.

В частности, для нахождения условного экстремума функции двух переменных исследуется следующая функция Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \quad (3.43)$$

где λ — неопределенный постоянный множитель, для которой ищут обычный экстремум, решая систему трех уравнений (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Определив из этой системы три неизвестные величины λ_0 , x_0 , y_0 , подставляем эти числа в дискриминант Δ для функции $L(x, y, \lambda)$. Если $\Delta > 0$, $A < 0$ (или $C < 0$), то в стационарной точке $P(x_0, y_0)$ имеется условный максимум функции $f(x, y)$, если $\Delta > 0$, $A > 0$ (или $C > 0$), то условный минимум $f(x, y)$ (Δ , A и C определены (3.38)–(3.40)). Выпишем еще один критерий определения того, что функция двух переменных,

исследуемая по методу неопределенных множителей Лагранжа, имеет условный экстремум.

Если в точке $P_0(x_0, y_0)$, являющейся решением системы уравнений $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ определитель

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P_0) & \varphi'_y(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & L''_{xx}(P_0) & L''_{xy}(P_0) \\ \varphi'_y(P_0) & L''_{xy}(P_0) & L''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} \quad (3.45)$$

меньше нуля $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ имеет при $x = x_0$, $y = y_0$ локальный максимум, если же $\Delta > 0$, то в точке $x = x_0$, $y = y_0$ функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум.

Пример 3.48. Найти экстремум функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - y$$

при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$.

Решение. Для функции Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x - y + \lambda(x + y - 1)$$

с учетом (3.44) имеем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2 + \lambda = 0 \\ L'_y = 2y - 1 + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Ее решение $x_0 = 0,75$, $y_0 = 0,25$, $\lambda_0 = 0,5$. Находим далее частные производные второго порядка: $L''_{xx} = 2 = A > 0$, $L''_{yy} = 2 = C > 0$, $L''_{xy} = 0 = B$, $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$. Следовательно, имеет место условный минимум функции $f(x, y)$:

$$f_{\min}(0,75; 0,25) = 0,75^2 + 0,25^2 - 2 \cdot 0,75 - 0,25 = -1,125.$$

Пример 3.49. Исследовать на наличие локального экстремума функцию $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ при условии $x_1 - 2x_2 + 3 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x_2^2 + x_1^2 + \lambda(x_1 - 2x_2 + 3).$$

Найдем точки, где частные производные первого порядка этой функции обращаются в нуль. Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем точку возможного экстремума $P_1(1, 2, -1)$. Найдем далее $d^2L(x_1, x_2, \lambda) = -2dx_1^2 + 2dx_2^2 + 2dx_2d\lambda - dx_1d\lambda$. Данная квадратичная форма знаконеопределенная, так как миноры матрицы, соответствующей данной квадратичной форме $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ — отрицательны. Таким образом, $L(x, y, \lambda)$ не имеет экстремума. Однако, докажем, что условный экстремум функции $f(x_1, x_2)$ при условии связи есть.

В самом деле, из условия связи следует $dx_1 = 2dx_2$ и $d^2L = -6dx_2^2$ — есть отрицательно определенная квадратичная форма и точка $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ является точкой локального максимума функции $f(x_1, x_2)$ при условии связи $x_1 - 2x_2 + 3 = 0$.

Пример 3.50. Найти условный экстремум функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x - 2 + x_1 + x_2 - 4$ при условии связи $x_1 + x_2 + 3 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(x_1 + x_2 + 3).$$

Найдем решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1 + 1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + 3 = 0 \end{cases}.$$

Составим определитель в соответствии с формулой (3.45)

$$\begin{aligned}\Delta &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= - \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 6 > 0,\end{aligned}$$

следовательно, в точке $x_1 = x_2 = -1,5$ имеется условный минимум $f(-1,5; 1,5) = -4,75$.

3.8. ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 3

Найти и изобразить область определения следующих функций.

3.51. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$.

3.52. $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$.

3.53. $z = \sqrt{2x + y} + \sqrt{2x - y}$.

3.54. $z = \frac{1}{\sqrt{2x + y}} + \frac{1}{\sqrt{2x - y}}$.

3.55. $z = \arcsin \frac{y - 1}{x + 1}$.

3.56. $z = \sqrt{|x - 1| + |y + 1| - |x + y|}$.

3.57. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$.

Найти линии и поверхности уровня следующих функций.

3.58. $z = \frac{y + 1}{x + 2}$.

3.59. $z = x^y e^{-2x}$.

3.60. $z = \frac{1}{4x^2 + 9y^2}$.

3.61. $z = \min(x^4, y)$.

3.62. $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

3.63. $u = 4^{x+y-z}$.

Найти пределы следующих функций.

$$3.64. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 1} - 1}.$$

$$3.65. \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy^2)}{y^2}.$$

$$3.66. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x^4}{x^2 + y^2}}.$$

$$3.67. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + 3x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$$

$$3.68. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

$$3.69. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2)^{-(2x+3y)}.$$

$$3.70. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{2x^2 + 3y^4}{3x^2 + 2y^4}.$$

$$3.71. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Исследовать на непрерывность функции.

$$3.72. z = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}.$$

$$3.73. z = \frac{x(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}.$$

$$3.74. z = \frac{2}{\sin \pi x} + \frac{9}{\sin \pi y}.$$

$$3.75. z = \frac{4}{x - 2y}.$$

$$3.76. z = \frac{x^2 + 2y}{x^2 - 2y}.$$

$$3.77. z = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}.$$

Найти частные производные первого порядка следующих функций.

$$3.78. z = x^2 y^3 - x^3 y^2.$$

$$3.79. z = (3x^2 y^4 - y^3 + 8)^4$$

$$3.80. z = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{y}{x} \right).$$

$$3.81. z = x^{y^x}.$$

$$3.82. z = x^{z^y}.$$

$$3.83. z = \sqrt{xy + \sqrt{xy + \sqrt{xy}}}.$$

$$3.84. u = \operatorname{arctg}(\ln(x^2 + y^2 + z^2)).$$

$$3.85. u = z^{\frac{y}{x}}.$$

$$3.86. z = (x + y)^{x^2 + y^2}.$$

$$3.87. u = x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2.$$

$$3.88. u = \ln(x + \ln(y + \ln z)).$$

$$3.89. u = (x + y + z)^{x+y+z}.$$

Найти указанные производные следующих сложных функций.

$$3.90. z = f(x^3 + y^3, x^3 y^3), \quad z'_x = ?, \quad z'_y = ?$$

$$3.91. z = \ln(e^{2x} + e^{2y}), \quad z'_x, \text{ если } y = \sin^2 x.$$

3.92. $z = \operatorname{ctg}(2t + 2x^2 - 2y^2)$, z'_t , если $x = t^2$, $y = t^3$.

3.93. $u = x^3 + y^3 + z^3 + t^3$, u'_t , если $x = \sin t$, $y = \cos t$,
 $z = \sin 2t$.

3.94. $z = 2^{x^2+y^2}$, z'_x , если $y = \ln x$.

3.95. $z = f(\ln(x+y), xy)$, z'_x —?, z'_y —?

3.96. Полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$? вычислить величину функционального определителя (якобиана)

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

3.97. Полагая $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, вычислить величину функционального определителя (якобиана)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}.$$

Проверить следующие равенства.

3.98. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$, если
 $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

3.99. $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, если $z = y\varphi(x^2 - y^2)$.

3.100. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$, если $u = xy + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3.101. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$, если $u = y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - x^2 - y^2$.

Найти частные производные высших порядков следующих функций.

3.102. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = \ln(x^4 + y^4)$.

3.103. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = x^y$.

3.104. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = 2^{x+y}$.

3.105. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, если $u = \ln(x^2 + y^2)$.

3.106. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y}$, если $u = z^{xy}$.

3.107. $\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y}$, если $u = e^{xyz}$.

3.108. Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если

$$u = (x^2 + y^2) e^x \cos y - 2xye^x \sin y.$$

3.109. Преобразовать дифференциальное выражение (дифференциальный оператор) $Lu = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ к новой независимой переменной $v = \frac{x}{2\sqrt{at}}$ (подстановка Больцмана), считая u дважды дифференцируемой функцией переменной v : $u(x, t) \equiv f(v)$, $a = \text{const}$.

3.110. Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, где $u = u(x, y, z)$ преобразовать к сферическим координатам r, φ, θ т. е. считая $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$.

3.111. Показать, что функция $u = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}$ (a и x_0 — постоянные), удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.112. Доказать, что функция $u = C_1 \frac{e^{-kr}}{r} + C_2 \frac{e^{kr}}{r}$, где C_1 , C_2 и k постоянные, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 u.$$

3.113. Преобразовать дифференциальное выражение $x^2 y'' - 2xy' + y$ к новой независимой переменной, полагая $x = e^t$.

3.114. Преобразовать дифференциальное выражение $(1 - x^2) y'' - xy' + ky$ к новой независимой переменной, полагая $x = \cos t$.

3.115. Преобразовать дифференциальное выражение $yy'' - 4(y^2 + (y')^2)$ к новой функции v , полагая $y = \frac{1}{v}$. Проверить следующие равенства.

3.116. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = \ln(x^2 + y^2)$.

3.117. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, если $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3.118. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \psi(x + at) + \varphi(x - at)$.

3.119. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$, если $u = y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{1-n} \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ .

3.120. $z = y + \varphi(xy)$.

3.121. $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

3.122. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

3.123. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3.124. $z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$.

Найти производные функций заданных неявно уравнениями.

3.125. $\cos(xy) + e^{xy} - xy^2 = 0$, $y' - ?$

3.126. $y^x - x^y = 0$ ($x \neq y$), $y' - ?$

3.127. $ye^y - e^x = 0$, $y' - ?$, $y'' - ?$

3.128. $\ln(x^2 + y^2) = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, $y' - ?$

3.129. $e^z - xy = 0$, $z'_x - ?$, $z'_y - ?$

3.130. $z^{xy} - xy^z = 0$, $z'_x - ?$, $z'_y - ?$

3.131. $y^2 - 2x^2 + z^2 - 4y + 2z - 8 = 0$, $z'_x - ?$, $z'_y - ?$, $z''_{xx} - ?$, $z''_{yy} - ?$, $z''_{xy} - ?$

3.132. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $z'_x - ?$, $z'_y - ?$, $z''_{xx} - ?$, $z''_{yy} - ?$, $z''_{xy} - ?$

3.133. Функция задана параметрически $x = 2u + 3v$, $y = 3u - 2v$, $z = uv$. Выразить z как явную функцию от x и y .

3.134. Выразить z как явную функцию от x и y , если $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av^2$ (a — постоянная, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$).

Найти z'_x , z'_y следующих функций.

3.135. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 v^2$.

3.136. $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^3 v^3$.

3.137. $x = u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = u^2 v^2$.

Найти дифференциалы указанного порядка следующих функций.

3.138. dz , d^2z , если $z = \ln(x^2 + y^2)$.

3.139. dz , d^2z , если $z = e^{x^2 y^2}$.

3.140. du , d^2u , если $u = e^{xyz}$.

3.141. du , d^2u , если $u = f(\xi, \eta, \zeta)$ где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

3.142. du , d^2u , если $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = z$.

3.143. du , d^2u , если $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3.144. du , d^2u , если $u = f(xy, yz)$.

3.145. du , d^2u , если $u = f(x, y, z)$, где $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$.

3.146. dz , если $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 v^2$.

3.147. dz , d^2z , если $z^3 + 3xyz = k^3$ k — постоянная.

3.148. Пусть $z = z(x, y)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) = 0 \\ g(x, y, z, t) = 0 \end{cases}$$

где t — переменный параметр. Найти dz .

3.149. Найти значение полного приращения и полного дифференциала функции $z = x^3 y^3$ в точке $(1, 2)$, если $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3.150. Найти значение полного приращения и полного дифференциала функции $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке $(1, 1)$, если $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,02$.

3.151. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1,02} + \sqrt[3]{0,99} - 1)$.

3.152. Вычислить приближенно $1,03^{3,04}$.

3.153. Вычислить приближенно $\sin(\pi(\sqrt{1,023} + \sqrt[3]{7,982}))$.

3.154. Вычислить приближенно $1,001^3 \cdot 2,002^2 \cdot 3,003^5$.

3.155. Насколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $a = 4$ м, $b = 3$ м, если первая сторона увеличится на 1 мм, а вторая сторона уменьшится на 4 мм.

3.156. При измерении радиуса основания R и высоты h цилиндра были получены следующие результаты: $R = 3,5 \pm 0,1$ м, $h = 5 \pm 0,3$ м. С какой абсолютной ε и относительной δ погрешностью может быть вычислен объем цилиндра?

3.157. Стороны треугольника равны $a = 20 \pm 0,1$ м, $b = 30 \pm 0,4$ м и угол между ними $\alpha = 60^\circ \pm 2^\circ$. Найти абсолютную ε и относительную δ погрешность, с которой может быть вычислена третья сторона треугольника c ?

3.158. Найти производную функции $z = x^2 + 3xy + y^2$ в точке $M(1, 2)$ в направлении, составляющем угол α с положительным направлением оси OX . Выяснить в каком направлении эта производная имеет: 1) наибольшее значение; 2) наименьшее значение; 3) равна 0.

3.159. 1) Найти производную функции $u = xy^2 + x^2y - z^2x - zyz^2$ в точке $M(1, 1, 1)$ в направлении, образующем с осями координат соответственно углы $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$; 2) найти производную функции $u = x^2y^2z^2$ в точке $A(3, 1, 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(7, 4, 14)$; 3) найти градиент функции $u = xyz$ в точке $M(1, 1, 1)$.

3.160. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M(1, 2, 1)$ в направлении, образующем с осями координат равные острые углы, а также градиент функции и его величину в этой точке.

3.161. Найти производную функции $z = e^{x^2+y^2}$ в точке $M(x_0, y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к указанным поверхностям.

3.162. $z = x^2 + y^2$ в точке $P(2, 2, 8)$.

3.163. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ в точке $P(0, 3, 4)$.

3.164. $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ в произвольной точке: а) записав уравнение поверхности в параметрической форме; б) записав уравнение этой поверхности в виде: $z = f(x, y)$.

3.165. К поверхности $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 64$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + y + z = 1$.

3.166. Доказать, что все нормали к поверхности вращения $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ пересекает ось вращения.

3.167. В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат: Исследовать на экстремум следующие функции.

3.168. $z = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$.

3.169. $z = (2x - 3y + 4)^2$.

3.170. $z = e^{3x+2y} (3x^2 - 6xy + 8y^2)$.

3.171. $z = x^2 + xy + y^2 - 10 \ln x - 4 \ln y$.

3.172. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z$.

3.173. $u = y + \frac{x^2}{4y} + \frac{z^2}{x} - \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z < 0)$.

3.174. $u = x^2 - y^3 + z^2 - 12y - 2z$. Найти точки условного экстремума следующих функций:

3.175. $z = xy$, если $2x + 3y = 1$.

3.176. $z = x^2 + y^2$, если $3x + 4y = 1$.

3.177. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, если $x^2 + y^2 = R^2$.

3.178. $u = x^2 + y^2 + z^2$, если $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

3.179. $z = \sin^2 x + \sin^2 y$, если $y - x = \frac{\pi}{4}$. Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций в указанных областях:

3.180. $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 9$.

3.181. $z = x^2 + 2xy + 8x - 4y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$.

3.182. $z = e^{-x^2-y^2} 3x^2 + 2y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 9$.

3.183. $u = x^2 + 4y^2 + 9z^2$, если $x^2 + y^2 + z^2 \leq 64$.

3.184. Доказать справедливость соотношения

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2$$

3.185. Доказать, что при $m > 1$ и положительных числах $x_1, x_2, \dots, x_n$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^m < n^{m-1} (x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m).$$

3.186. Пусть $z = \varphi(u, v)$, $u = \psi(x, y)$, $v = \theta(x, y)$. Показать, что

$$\text{grad } z = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{grad } v.$$

4.1.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4.1.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА. СХОДИМОСТЬ РЯДА

Определение 4.1. Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Последовательностью частичных сумм $\{S_n\}$ называется числовая последовательность с общим членом S_n , определяемым формулой

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k .$$

Предположим, что последовательность $\{S_n\}$ является сходящейся, обозначим ее предел S

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

Это предположение позволяет ввести в рассмотрение бесконечную сумму

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k . \quad (4.1)$$

Суммы вида (4.1) обычно называются бесконечными числовыми рядами или просто числовыми рядами.

Определение 4.2. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, то ряд (4.1) называется сходящимся, а этот предел — суммой ряда. Если этот предел бесконечный или он не существует, то ряд называется расходящимся.

Критерий Коши. Для того чтобы числовой ряд (4.1) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ и $p = 1, 2, \dots$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Необходимый признак сходимости. Если ряд (4.1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (4.3)$$

Замечание 4.1. Условие (4.3) является следствием условия (4.2) при $p = 1$.

Определение 4.3. Ряд $R_n = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p}$ называется остаточным членом ряда (4.1) или остатком ряда.

Теорема 4.1. Для сходимости ряда (4.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0. \quad (4.4)$$

Теорема 4.2. (Действия над рядами.) Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся и α — число, то ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, также сходятся и

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \end{aligned}$$

Определение 4.4. Ряд (4.1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей членов этого ряда, т. е. сходится ряд:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (4.5)$$

Если ряд (4.1) сходится, а ряд (4.5) расходится, то ряд (4.1) называется условно сходящимся.

Теорема 4.3. Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов сходимость полученного нового ряда не нарушается и его сумма не изменяется.

Теорема 4.4. Если ряд условно сходится, то можно осуществить перестановку его членов таким образом, что он будет сходиться к любому наперед заданному числу или даже станет расходящимся.

4.1.2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Определение 4.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется неотрицательным (положительным), если для всех n $b_n \geq 0$ ($b_n > 0$).

Теорема 4.5. (Признак сравнения числовых рядов.) Если члены ряда (4.1) для всех $n > N_0$ ($N_0 \geq 1$) удовлетворяют условию $|a_n| \leq b_n$, причем неотрицательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда ряд (4.1) сходится абсолютно. Если же для всех ($n \geq N_1$) члены ряда (4.1) удовлетворяют условию $a_n \geq c_n \geq 0$, причем неотрицательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, то и ряд (4.1) расходится.

Теорема 4.6. (Предельный признак сравнения.) Если члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ положительны и $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. В случае, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, тогда из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ будет следовать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 4.7. Если члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ положительны и для всех n начиная с некоторого n_0 выполняются неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 4.8. (Признак Даламбера для положительных рядов.) Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ таковы, что $a_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d, \quad (4.6)$$

то при $0 \leq d < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $d > 1$ — расходится, а при $d = 1$ требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.9. (Признак Даламбера абсолютной сходимости.)

Пусть начиная с некоторого n_0 члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не обращаются в нуль и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l, \quad (4.7)$$

тогда при $0 \leq l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, при $l > 1$ — расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Определение 4.6. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — некоторое числовое множество. Точной верхней гранью множества M ($\sup M$) называют число λ , удовлетворяющее условиям:

$$\lambda = \sup M \Rightarrow \forall x \in M \Rightarrow x \leq \lambda \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in M: x_0 > \lambda - \varepsilon.$$

Точной нижней гранью M ($\inf M$) называется число γ , определяемое условиями:

$$\gamma = \inf M \Rightarrow \forall x \in M \Rightarrow x \geq \gamma \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in M: x_0 < \gamma + \varepsilon.$$

Определение 4.7. Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность и M — множество ее предельных точек. Назовем верхним пределом $\{a_n\}$ точную верхнюю грань M , а нижним пределом $\{a_n\}$ точную нижнюю грань M . При этом используются обозначения $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup M = \lambda$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf M = \gamma$.

Теорема 4.10. (Усиленный признак Даламбера.) Если для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то он сходится. Если $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если выполнены неравенства

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

тогда требуются дополнительные исследования.

Теорема 4.11. (Радикальный признак Коши для положительных рядов.) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет положительные члены $a_n > 0$ и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ тогда, если $0 \leq l < 1$ — ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $l > 1$ — расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.12. (Радикальный признак Коши абсолютной сходимости.)

Пусть для общего члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ тогда, если $0 \leq l < 1$ — ряд сходится абсолютно, если $l > 1$ — ряд расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.13. (Усиленный радикальный признак Коши.)

Пусть $a_n > 0$. Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, тогда ряд расходится. При $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.14. (Интегральный признак Коши.)

Пусть функция $f(x)$ положительна и монотонна при $x \geq 1$. Пусть также для всех $n \in N$ выполняется равенство

$$a_n = f(n).$$

Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad a \geq 1.$$

Теорема 4.15. (Признак Раабе.)

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет положительные члены ($a_n > 0$) и пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Тогда при $l > 1$ ряд сходится, при $l < 1$ — расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.16. (Признак Лейбница.)

Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ такова, что $0 < a_{n+1} < a_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Тогда знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится. При этом для остатка ряда выполнена оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} a_{n+k} \right| < a_{n+1}.$$

Теорема 4.17. (Признак Абеля–Дирихле.)

Пусть члены последовательности $\{b_n\}$ монотонно убывают:

$$b_{n+1} < b_n \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

а частичные суммы $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ограничены $\forall n$, т. е.

$$|S_n| \leq M, \quad \forall n \in N.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

4.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

4.2.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Определение 4.8. Пусть имеется последовательность функций $f_n(x)$ $n \in N$, $x \in D \subset R$. Выражение

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D \quad (4.8)$$

называется функциональным рядом.

Определение 4.9. Если для $x_0 \in D$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (4.8) сходится в точке x_0 . Если в каждой точке $x \in D$ числовые ряды (4.8) сходятся, то ряд (4.8) называется сходящимся в области D .

Теорема 4.18. (Критерий Коши для функциональных рядов.) Для того чтобы функциональный ряд (4.8) был сходящимся в области D , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in D$ существовало $N = N(\varepsilon, x)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon, x)$ и $p \in N$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^p f_{n+k}(x) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.19. (Признак Даламбера для функциональных рядов.) Пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = l(x)$, тогда область абсолютной сходимости D функционального ряда (4.8) определяется из условия $l(x) < 1$. При $l(x) > 1$ ряд расходится, а при $l(x) = 1$ требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.20. (Радикальный признак Коши для функционального ряда.) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = l(x)$, тогда при $l(x) < 1$ ряд (4.8) сходится абсолютно, при $l(x) > 1$ — расходится, при $l(x) = 1$ необходимо дополнительное исследование.

Определение 4.10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области $x \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $x \in D$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.21. (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.) Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в области $x \in D$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $x \in D$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x) \right| < \varepsilon, \quad p - \text{любое натуральное число.}$$

4.2.2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение 4.11. Ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ называется степенным рядом по степеням x .
Ряд

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_k(x - x_0)^k + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (4.9) \end{aligned}$$

называется степенным рядом по степеням $x - x_0$, $x_0 \in R$.

Теорема 4.22. (Теорема Абеля.) Если степенной ряд (4.9) сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно для всех x таких, что $|x| < |x_1|$, причем сходимость будет равномерной на отрезке

$$x \in [-|x_1| + \delta, |x_1| - \delta] \text{ при любом } \delta > 0: \delta < |x_1|.$$

Если же ряд (4.9) расходится при $x = x_2$, то он расходится и для всех x таких, что $|x| > |x_2|$.

Определение 4.12. Пусть M — множество значений x_1 , для которых степенной ряд (4.9) сходится. Радиус сходимости степенного ряда называется неотрицательное число R равное точной верхней грани множества M , т. е.

$$R = \sup M.$$

Теорема 4.23. Радиус сходимости степенного ряда (4.9) может быть определен по одной из следующих формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (\text{формула Даламбера}),$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{формула Коши}).$$

Теорема 4.24. В области абсолютной сходимости $|x - x_0| < R$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ можно почленно дифференцировать любое число раз. Радиус сходимости при этом остается прежним. В частности, справедлива формула

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Теорема 4.25. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ можно почленно интегрировать любое число раз в области абсолютной сходимости $|x - x_0| < R$. Радиус сходимости при этом не изменяется. В частности, справедлива формула:

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Замечание 4.2. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ сходится в конечных точках $-R$ и R интервала абсолютной сходимости $|x| < R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно интегрировать при $|x| \leq R$.

Определение 4.13. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 . Назовем формальным степенным рядом функции $f(x)$ в точке x_0 ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Теорема 4.26. Для того чтобы формальный степенной ряд сходиллся к функции $f(x)$ в области $|x - x_0| < R$ необходимо и достаточно чтобы остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора для функции $f(x)$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Замечание 4.3. Аналогично тому, как это сделано в примере 4.31 (см. далее), можно установить сходящиеся разложения в степенные ряды для многих элементарных функций. В частности, полезно иметь в виду следующие основные разложения:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty, \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad R = 1, \\ \operatorname{arctg}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1, \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad R = 1, \end{aligned}$$

(при $\alpha \in \mathbb{N}$ получается многочлен степени α). Остановимся на выводе формулы для степенного ряда для функции $\operatorname{arctg} x$. Результат основывается на известной из интегрального исчисления формуле

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ($|q| < 1$), в которой будем считать $q = -t^2$, тогда получим

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

Далее воспользуемся теоремой 4.25 о почленном интегрировании степенного ряда в области сходимости (в данном случае $|t| < 1$). Получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Тем самым степенное разложение для функции $\operatorname{arctg} x$ установлено.

4.3. РЯДЫ ФУРЬЕ

Определение 4.14. Тригонометрическим рядом называется ряд следующего вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (4.10)$$

Числа a_k и b_k называются коэффициентами тригонометрического ряда, а его слагаемые $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ называются гармониками.

Теорема 4.27. Пусть числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно. В этом случае тригонометрический ряд (4.10) сходится на R равномерно к некоторой непрерывной периодической функции $f(x)$ с периодом 2π и при этом выполняются равенства:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Теорема 4.28. Если числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} k^s b_k$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) сходятся абсолютно, тогда ряд (4.10) можно почленно дифференцировать s раз. При этом выполняются равенства

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^s \left(a_k \cos\left(kx + \frac{s\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{s\pi}{2}\right) \right), \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Определение 4.15. Пусть 2π -периодическая функция $f(x)$ такова, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty.$$

Рядом Фурье этой функции называют тригонометрический ряд (4.10), если коэффициенты этого ряда a_k b_k рассчитаны по формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Замечание 4.4. В силу 2π -периодичности функции $f(x)$ коэффициенты Фурье (4.11) можно также рассчитать по формулам

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad x_0 \in R. \end{aligned}$$

Теорема 4.29. Пусть 2π -периодическая функция непрерывна для всех действительных значений и имеет кусочно-непрерывную производную при $|x| \leq \pi$, тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к этой функции на R . Иными словами, справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in R.$$

Замечание 4.5. Если на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно указать конечное число точек $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$ таких, что на интервалах (x_i, x_{i+1}) функция имеет непрерывную производную, тогда говорят, что эта функция имеет кусочно-непрерывную производную на отрезке $[-\pi, \pi]$.

В примере 4.40 (см. далее) рассмотрена функция $y = f(x)$ совпадающая при $|x| \leq \pi$ с $y = |x|$. Эта функция имеет непрерывную производную на интервалах $[-\pi, 0)$ и $(0, \pi]$, но не имеет производной в самой точке $x = 0$. Рассматриваемая в примере 4.40 функция удовлетворяет всем условиям теоремы 4.29 и поэтому можно записать равенство

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Определение 4.16. Говорят, что 2π -периодическая функция удовлетворяет условию Дирихле, если отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разбить на конечное число не перекрывающихся интервалов точками $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$ таким образом, что на интервалах (x_i, x_{i+1}) функция $y = f(x)$ будет ограничена, непрерывна и монотонна.

Теорема 4.30. Если 2π -периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле, то в каждой точке непрерывности $f(x)$ ее ряд Фурье сходится к ней, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

(x — точка непрерывности $y = f(x)$).

В каждой точке x_0 разрыва функции $y = f(x)$ ее ряд сходится к $\frac{1}{2} (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$. Иными словами, выполняется равенство

$$\frac{1}{2} (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

(x_0 — точка разрыва $y = f(x)$).

Замечание 4.6. Теоремы 10.29, 10.30 показывают, что только непрерывность 2π -периодической функции или в худшем случае ее кусочная непрерывность не достаточны для сходимости ряда Фурье к этой функции. Дополнительно требуется условие Дирихле или условие кусочной дифференцируемости функции $f(x)$. Чтобы избавиться от этих дополнительных условий, которые ограничивают множество допустимых функций, необходимо изменить само понятие сходимости и ввести в рассмотрение сходимость в смысле среднего квадратического отклонения.

Определение 4.17. Пусть

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k , b_k вычисляются по формулам (4.11). Говорят, что последовательность функций $T_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ в смысле среднего квадратического отклонения на интервале $[-\pi, \pi]$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx = 0.$$

Теорема 4.31. Пусть 2π -периодическая функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек, где $f(x)$ имеет разрывы I рода, тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней в смысле среднего квадратического отклонения, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx = 0,$$

где $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Замечание 4.7. Пример 4.43 из следующего параграфа показывает, что при любом n выполняется неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx. \quad (4.12)$$

При этом требуется, чтобы существовал интеграл от квадрата функции $f(x)$. Неравенство (4.12) называется неравенством Бесселя.

Допуская, что функция 2π -периодическая и кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ на основании теоремы 4.31 при $n \rightarrow \infty$ получим

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

Последнее равенство называется равенством Парсеваля. Оно выражает полноту системы тригонометрических функций на множестве кусочно непрерывных 2π -периодических функций $f(x)$.

Замечание 4.8. Ранее рассматривались 2π -периодические функции однако, можно распространить полученные результаты на функции произвольного периода $T > 0$. Пусть функция $f(x)$ имеет период T , удовлетворяет условиям теоремы 4.30,

тогда в каждой точке непрерывности функции ряд Фурье сходится к ней и имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} x + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} x \right),$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos \frac{2\pi k}{T} x dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad x_0 \in R,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin \frac{2\pi k}{T} x dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad x_0 \in R.$$

Если T -периодическая функция четная и удовлетворяет условиям теоремы 4.30, то в каждой точке непрерывности $f(x)$ справедливо разложение по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{T} x, \quad b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

В случае нечетности справедливо разложение по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi k}{T} x, \quad a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

4.4.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 4.1. Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \dots$$

Решение. Преобразуем общий член этого ряда:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right).$$

После этого нетрудно рассчитать частичные суммы ряда:

$$S_n = \sum_{p=1}^n a_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$, то согласно определению данный ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{2}$, иными словами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4.2. Доказать расходимость гармонического ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Решение. Положим в критерии Коши $p = n$, тогда

$$S_{n+p} - S_n = S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}.$$

Поскольку $\frac{1}{n+p} > \frac{1}{2n}$ при $p = 1, 2, \dots, n-1$ получаем неравенство

$$S_{2n} - S_n > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для гармонического ряда не выполнен критерий Коши и он расходится.

Пример 4.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ (бесконечная геометрическая прогрессия) $a \in R$.

Решение. Используя формулу суммы первых членов геометрической прогрессии, рассчитаем частичные суммы этого ряда:

$$S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^n}{1 - a} \quad (a \neq 1).$$

$$S_n = n \quad (a = 1).$$

Таким образом, вопрос о сходимости бесконечной геометрической прогрессии сводится к вопросу о существовании предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1-a} = \begin{cases} 0, & \text{если } |a| < 1 \\ -\infty, & \text{если } a > 1 \\ \text{не существует,} & \text{если } a \leq -1. \end{cases}$$

Подведем итоги: бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем a сходится, если $|a| < 1$ и ее сумма $S_n = \frac{1}{1-a}$ и расходится при $|a| \geq 1$.

Пример 4.4. Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. В примере 4.2 доказана расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, но поскольку для всех $n \geq 2$ выполнено неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, то по теореме 4.5 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Пример 4.5. Установить сходимость для обратных квадратов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Решение. Также как и в примере 4.1 нетрудно установить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Исследуемый ряд можно представить иначе $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Но члены последнего ряда удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому на основании теоремы 4.5 ряд из обратных квадратов сходится.

Пример 4.6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{4n^4 + 5n^3 + 6n^2 + n + 2}.$$

Решение. В примере 4.5 доказана сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, найдем предел отношения членов этих рядов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{4n^4 + 5n^3 + 6n^2 + n + 2} : \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Поэтому на основании теоремы 4.6 исследуемый ряд сходится, поскольку сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Пример 4.7. Доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n^2-2n}.$$

Решение. В примере 4.2 доказана расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Найдем предел отношения членов этих рядов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{5n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{5}.$$

По теореме 4.6 из расходимости гармонического ряда вытекает расходимость исследуемого ряда.

Пример 4.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$.

Решение. В примере 4.5 была доказана сходимость ряда из обратных квадратов $b_n = \frac{1}{n^2}$. В нашем случае $a_n = \frac{100^n}{n!}$. Составим отношения последующих членов к предыдущим:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{100^n}{n!} = \frac{100}{n+1}, \\ \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Выберем n_0 так, чтобы для всех $n \geq n_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{100}{(n+1)} \leq \frac{n^2}{(n+1)^2}, \text{ т. е. } 100 \leq \frac{n^2}{n+1}.$$

Решая последнее неравенство, убеждаемся, что в качестве n_0 можно взять, например 105. Итак, $\forall n \geq 105$ выполнено:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Таким образом, на основании теоремы 4.7 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ сходится.

Пример 4.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение. Для сравнения возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, где $\frac{1}{2} < a < 1$. Как следует из примера 4.3, этот ряд сходится. Исследуем, начиная с какого значения n_0 будет выполняться неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2n} \leq a.$$

Несложный анализ показывает, что в качестве n_0 можно взять значение

$$n_0 = \left[\frac{1}{2a-1} \right] + 1.$$

На основании теоремы 4.7 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится.

Пример 4.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{a^n}$, ($a > 0$).

Решение. В данном случае $a_n = \frac{2n+1}{a^n} > 0$. Найдем предел (4.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{a^{n+1}} : \frac{2n+1}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

На основании теоремы 4.8 приходим к выводу: если $a > 1$ ряд сходится, если $0 < a < 1$ ряд расходится. При $a = 1$ ряд также расходится поскольку его общий член $a_n = 2n+1$ стремится к бесконечности.

Пример 4.11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

Решение. Вычислим предел (4.7)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} : \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+3}. \end{aligned}$$

По теореме 4.9 данный ряд расходится.

Пример 4.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$.

Решение. К данному ряду нельзя применить теорему 4.8 (признак Даламбера для положительных рядов) поскольку предел (4.6) не существует. И даже усиленный признак Даламбера (теорема 4.10) не приводит к результату, поскольку

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= 2 > 1, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{8} < 1. \end{aligned}$$

Тем не менее этот ряд сходится, что без труда устанавливается путем сравнения его со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Пример 4.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

Решение. Чтобы применить теорему 4.11, воспользуемся известной формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\Theta}{12n}} \quad (0 < \Theta < 1).$$

Получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} (2\pi n)^{1/2n} \frac{n}{e} e^{\frac{\Theta}{12n}} = \frac{3}{e} > 1.$$

Таким образом, ряд расходится.

Пример 4.14. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n}$.

Решение. Согласно теореме 4.9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\pi n)^{1/2n} \frac{n}{e} \Theta}{n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно.

Пример 4.15. Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7 + (-1)^n}{2} \right)^{-n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7 + (-1)^n}{2} \right)^n$

Решение. К обоим этим рядам теорема 4.11 не применима, поскольку предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ не существует. Однако применение теоремы 4.13 приводит к определенным результатам:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7 + (-1)^n}{2} \right)^{-n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7 + (-1)^n}{2} \right)^{-n}$ сходится.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7 + (-1)^n}{2} \right)^n} = 4 > 1,$$

поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7 + (-1)^n}{2} \right)^n$ расходится.

Для рассматриваемых рядов признак Даламбера не удастся применить даже в своем усиленном варианте (теорема 4.10), поскольку

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

где $a_n = \left(\frac{7 + (-1)^n}{2} \right)^n$.

Пример 4.16. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{(-1)^n - n}$

Решение. Применим признак Даламбера в усиленной форме (теорема 4.10).

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{(-1)^{n+1} - n - 1}}{3^{(-1)^n - n}} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 3^{(-1)^{n+1} - (-1)^n - 1} = 3, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{(-1)^{n+1} - n - 1}}{3^{(-1)^n - n}} &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 3^{(-1)^{n+1} - (-1)^n - 1} = \frac{1}{27}.\end{aligned}$$

Эти результаты не позволяют сделать какие-либо определенные выводы, т. е. признак Даламбера даже в своей усиленной форме не дает результата. Применим радикальный признак Коши для положительных рядов (теорема 4.11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{(-1)^n - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3^{(-1)^n}}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится. Разобранные примеры 4.15, 4.16 показывают, что признак Коши сильнее признака Даламбера.

Пример 4.17. Исследовать на сходимость ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция положительна и монотонна при $x \geq 1$, кроме того, $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $f(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$. Следовательно, вопрос о сходимости данного ряда сводится по теореме 4.14 к исследованию несобственного интеграла $\int_{n=1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, $a \geq 1$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Последняя выкладка показывает, что несобственный интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$. При $p = 1$ он также расходится, поскольку в этом случае

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln \frac{A}{a} \rightarrow +\infty \text{ при } A \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Пример 4.18. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ при $x \geq 2$. Эта функция положительна и монотонна. Несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ расходится, поскольку

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln x} \Big|_2^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln A} - 2\sqrt{\ln 2} = +\infty.$$

Следовательно, по теореме 4.14 расходится и исследуемый ряд.

Пример 4.19. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}.$$

Решение. Применим признак Раабе:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1} - 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q} \frac{(n+1)!(n+1)^q}{p(p+1) \dots (p+n)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)^q}{n^q} \frac{n+1}{p+n} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+p} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^q (n+1) - p - n \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+p} \left(\left(1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) (n+1) - p - n \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+p} (1 + q - p - \alpha_n) = 1 + q - p, \end{aligned}$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда следует из теоремы 4.15, что при $1 + q - p > 1$, т. е. при $q > p$ ряд будет сходящимся, а при $1 + q - p < 1$, т. е. при $q < p$ — расходящимся.

Пример 4.20. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$$

Решение. Общий член этого ряда можно записать в виде

$$(-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Пусть $a_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}}$, докажем монотонное стремление к нулю a_n :

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{2n+1}{2^n} = \frac{4n-2-2n-1}{2^n} = \\ &= \frac{2n-3}{2^n} > 0 \quad (\forall n \geq 2). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$. Для этого покажем, что $\forall A > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0 \ 2^n > An$. Действительно $2^n = (1+1)^n > \frac{n(n-1)}{2}$. Теперь становится ясно, что для выполнения требуемого неравенства $2^n > An$ достаточно, чтобы

$$\frac{n(n-1)}{2} > An \Rightarrow n_0 \geq 2A + 1.$$

Из доказанного неравенства следует, что

$$\frac{n}{2^n} < \frac{1}{A} = \varepsilon.$$

Поскольку постоянную A можно взять как угодно большой, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

В нашем случае

$$a_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}} = \frac{n+n-1}{2^{n-1}} = 2 \frac{n}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n-1}} \rightarrow 0,$$

как сумма двух бесконечно малых величин. Таким образом, по теореме 4.16 ряд сходится. Чтобы найти сумму ряда с абсолютной погрешностью $\Delta = 0,001$ достаточно просуммировать

14 членов этого ряда, т. е. определить S_{14} . Этот результат следует из теоремы 4.16, поскольку

$$|S_{14} - S| < \frac{2n-1}{2^n} = \frac{31}{2^{15}} < 0,001.$$

Пример 4.21. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Решение. В данном случае $b_n = \frac{1}{n}$ монотонно стремится к нулю, а

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \sin k = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{2} \sin k = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(\frac{1}{2} - k \right) - \cos \left(\frac{1}{2} + k \right) \right) = \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \left(\frac{1}{2} + n \right)}{2 \sin \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем

$$|S_n| = \left| \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \left(\frac{1}{2} + n \right)}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} = M.$$

Таким образом, по теореме 4.17 ряд сходится.

Пример 4.22. Исследовать на сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}.$$

Решение. При любом фиксированном $x \in (0, +\infty) = D_+$ ряд будет сходящимся по признаку Лейбница (см. теорему 4.16). При $x \in (1, +\infty) = D_1 \subset D_+$ ряд будет абсолютно сходящимся (см. пример 4.20). Если же $x \in (-\infty, 0] = D_-$, то

исследуемый ряд расходится, поскольку не выполнен необходимый признак (см. теорему 4.16).

Пример 4.23. Исследовать на сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-2}{1-3x} \right)^n$$

Решение. Применим теорему 4.19:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x-2}{1-3x} \right|^{n+1} : \left| \frac{x-2}{1-3x} \right|^n = \left| \frac{x-2}{1-3x} \right|.$$

Далее решаем неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-2}{1-3x} \right| &< 1, \\ (x-2)^2 &< (1-3x)^2, \quad \left(x \neq \frac{1}{3} \right), \\ (4x-3)(2x+1) &> 0. \end{aligned}$$

Таким образом, область абсолютной сходимости ряда

$$D = \left(\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty \right).$$

Если $x \in \overline{D} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$, то ряд будет расходящимся. Исследуем ряд в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{3}{4}$. При $x = -\frac{1}{2}$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, который расходится (общий член не стремится к 0). При $x = \frac{3}{4}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \infty$.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-2}{1-3x} \right)^n$ сходится абсолютно, если $x \in D = \left(\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty \right)$ и расходится, если $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$.

Пример 4.24. Исследовать на сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}.$$

Решение. Применим предыдущую теорему:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\sin nx|}{e^{nx}}} = e^{-x} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\sin nx|} = e^{-x}.$$

Отсюда видно, что при $x \in D = (0, +\infty)$ ряд будет сходиться абсолютно. При $x < 0$ ряд расходится, если $x = 0$, то общий член ряда равен 0. Окончательный результат: ряд сходится при $x \geq 0$ и расходится при $x < 0$.

Пример 4.25. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad x \geq 0.$$

Решение. В данном случае область D — все неотрицательные числа. Согласно признаку Лейбница (теорема 4.16) можно оценить остаток ряда:

$$|R_n| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n+k} \right| = \frac{1}{x+n+k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно взять в качестве $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$. Следовательно, по определению 4.10 исследуемый ряд сходится в области $x \geq 0$ равномерно.

Пример 4.26. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$.

Решение. В данном случае $a_n = \frac{1}{n^2 2^n}$. По формуле Даламбера (теорема 4.23) найдем R :

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 2^n} : \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{n^2} = 2.$$

Исследуемый ряд будет сходить^я в интервале определяемом из неравенства $|x-2| < 2$ или $0 < x < 4$. В точках 0 и 4 требуется дополнительное исследование. При $x = 0$ получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, который сходится абсолютно. При $x = 4$ получаем ряд обратных квадратов

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который также сходится. Исследуемый ряд сходится абсолютно при $x \in [0, 4] = D$ и расходится при $x \notin D$.

Пример 4.27. Исследовать степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n}$.

Решение. Применим формулу Коши (теорема 4.23) для определения радиуса сходимости R :

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = +\infty.$$

Этот результат означает, что степенной ряд сходится при всех значениях x .

Пример 4.28. Исследовать степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{n^2}{n!}$. По формуле Даламбера (теорема 4.23):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} : \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (n+1)}{(n+1)^2} = +\infty.$$

Следовательно этот ряд сходится при всех значениях x . Сходимость будет абсолютной и равномерной в любом интервале $[-A, A]$, $A > 0$.

Пример 4.29. Найти сумму ряда из примера 4.20.

Решение. Пусть

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}.$$

Преобразуем этот ряд:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим степенной ряд

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

см. пример 4.30 (бесконечная геометрическая прогрессия).
Данный ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Применим к этому ряду теорему 4.24:

$$Q'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

При $x = -\frac{1}{2}$ получаем удвоенную сумму исходную ряда.
Таким образом

$$S = \frac{1}{2} Q' \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

Пример 4.30. Найти сумму ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Решение. Как и в примере 4.29 будем базироваться на бесконечной геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Пусть $|x| < 1$, применим к этому ряду теорему 4.25 ($x_0 = 0$):

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

При $x = -1$ получаем исходный ряд умноженный на (-1) .
С другой стороны

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

На основании замечания 4.2 в качестве верхнего предела интегрирования можно взять $x = -1$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\ln 2$. Сумма исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$.

Пример 4.31. Исследовать степенной ряд для функции $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) в точке $x_0 = 0$.

Решение. Функция $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x_0 = 0$. При этом

$$f^{(n)}(x) = \ln^n a \cdot a^x, \quad f^{(n)}(0) = \ln^n a.$$

Таким образом

$$a^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n.$$

Остаточный член формулы Тейлора, взятый в Лагранжевой форме, равен

$$R_n(a) = \frac{\ln^{n+1} a}{(n+1)!} a^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Пусть $n_0 = [2|\ln a|] + 1$, тогда для всех значений $n \geq n_0$.

$$\frac{|\ln a|}{n} < \frac{1}{2}.$$

Пусть $n = n_0 + p$, $p \in N$ и $A = \frac{|\ln a|^{n_0}}{n_0!}$, тогда

$$|R_n(x)| = e^{\Theta x} \cdot A \cdot \frac{|\ln a|^p}{(n_0+1) \cdot \dots \cdot (n_0+p)} < e^{\Theta x} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

При $p \rightarrow \infty$ также и $n \rightarrow \infty$, и из предыдущего следует, что при любом x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0.$$

По теореме 4.26 формальный степенной ряд сходится к функции a^x . Получаем разложение этой функции в степенной ряд в точке $x_0 = 0$.

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n.$$

Чтобы узнать радиус сходимости полученного степенного ряда, применим формулу Даламбера из теоремы 4.23:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln a|^n}{n!} : \frac{|\ln a|^{n+1}}{(n+1)!} = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится для всех вещественных значений x .

Пример 4.32. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$ и установить область сходимости.

Решение. Прежде всего, сделаем некоторые простые преобразования:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 3x + 2) = \ln(x+1) + \ln(x+2) = \\ &= \ln(x+1) + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Согласно замечанию 4.3 при $|x| < 1$ и $|x| < 2$ имеем соответственно

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \\ \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n n}. \end{aligned}$$

Складываем эти ряды и приводим подобные члены, после этого получаем требуемый результат:

$$\ln(x^2 + 3x + 2) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n + 1}{2^n n} x^n.$$

По формуле Даламбера (теорема 4.23) определим радиус сходимости этого ряда:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n n} : \frac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1} (n+1)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1} \frac{n+1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^{-n}}{1 + 2^{-n-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1. \end{aligned}$$

При $x = -1$ получим расходящийся ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{2^n n}$, поскольку общий член этого ряда эквивалентен общему члену

гармонического ряда $\frac{1}{n}$. При $x = 1$ ряд будет знакочередующимся и сходящимся по признаку Лейбница (теорема 4.16). Таким образом, ряд сходится при $-1 < x \leq 1$.

Пример 4.33. Найти степенное разложение для функции $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ и установить область сходимости полученного ряда.

Решение. Воспользуемся результатами теоремы 4.25 о почленном интегрировании степенного ряда. Применим формулу

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Согласно замечанию 4.3

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)}{n!} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n, (|x| < 1). \end{aligned}$$

Будем считать $x = t^2$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} t^{2n}.$$

На основании указанной ранее формулы получим

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x + \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} t^{2n} \right) dt = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}. \end{aligned}$$

Вновь для определения радиуса сходимости полученного ряда применим формулу Даламбера из теоремы 4.23.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} : \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2 (2n+3)} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 (2n+3)}{(2n+1)(2n+2)(2n+1)} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+1/n)^2 (1+3/2n)}{4(1+1/2n)^2 (1+1/n)} = 1. \end{aligned}$$

Для доказательства сходимости этого ряда при $x = \pm 1$ используем признак Раабе (теорема 4.15). В данном случае

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(1+1/n)(1+3/2n) - 1 - 1/2n}{(1+1/2n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3/2n + 1/n + 3/2n^2 - 1 - 1/2n}{(1+1/2n)} n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2/n + 3/n^2)}{(1+1/2n)} n = 2 > 1. \end{aligned}$$

По признаку Раабе ряд сходится при $x = \pm 1$. Исходный степенной ряд сходится при $x \leq 1$.

Пример 4.34. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Заметим из предыдущего, что

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Применим к последнему ряду теорему о почленном интегрировании (теорема 4.25):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 4.16 (признак Лейбница), предельная абсолютная погрешность интеграла выражается из неравенства

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+1)} \right| < \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)}.$$

Непосредственный расчет при $n = 2$ дает

$$\frac{1}{(2n+3)!(2n+3)} = \frac{1}{7! \cdot 7} < 3 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Таким образом, с заданной точностью искомый интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt = 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} \approx 0,9444.$$

Пример 4.35. Вычислить $\ln 2$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. По замечанию 4.3

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \\ \ln(1-x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

Вычитая эти разложения, находим

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1} + 1) \frac{x^n}{n} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \end{aligned}$$

В последних формулах подставим $x = \frac{1}{3}$, тогда получим

$$\ln 2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n(2n-1)}.$$

Оценим остаток ряда справа

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{9^k(2k-1)} &< \frac{1}{2n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{9^k} < \frac{1}{9^{n+1}(2n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k} = \\ &= \frac{1}{10(2n+1)9^n}. \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет при $n = 4$ дает

$$\frac{1}{10(2n+1)9^n} = \frac{1}{10 \cdot 9^5} < 1,69 \cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, если в полученном ряде для $\ln 2$ ограничиться четырьмя членами предельная абсолютная погрешность такого приближения не превысит $6 \cdot 1,69 \cdot 10^{-6} < 1,02 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$. Окончательно получаем:

$$\ln 2 \approx 6 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{81 \cdot 3} + \frac{1}{729 \cdot 5} + \frac{1}{6561 \cdot 7} \right) \approx 0,6931.$$

Пример 4.36. Рассмотрим тригонометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin kx$ ($|a| < 1$). Сколько раз этот ряд можно дифференцировать почленно?

Решение. Рассмотрим числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} k^s a^k$ ($s = 1, 2, \dots$). Исследуем их на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера (теорема 4.8):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^s |a|^{k+1}}{k^s |a|^k} = |a| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^s = |a| < 1.$$

По теореме 4.28 рассматриваемый ряд можно почленно дифференцировать любое число раз s .

Пример 4.37. Сколько раз можно почленно продифференцировать тригонометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4}$?

Решение. В данном примере $a_k = \frac{1}{k^4}$ и ряд с общим членом $k^s a_k$ будет сходиться при $s = 1$ и $s = 2$ (при $s = 3$ получим гармонический ряд, а при $s > 3$ общий член ряда будет бесконечно большой величиной). Следовательно, по теореме 4.28 этот ряд можно заведомо почленно дифференцировать два раза.

Пример 4.38. Написать ряд Фурье для функции $f(x)$, определяемой равенствами

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0, x = -\pi, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \end{cases},$$

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Решение. Рассматриваемая функция нечетная, имеет разрывы первого рода в точках $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) со скачком равным $\frac{\pi}{2}$. Далее:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f^2(x) dx = 2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \pi = \frac{\pi^3}{8} < +\infty.$$

Рассчитаем по формулам (4.11) коэффициенты Фурье этой функции. В силу нечетности $f(x)$ все коэффициенты a_k для этой функции обратятся в 0:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} f(x) \sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} 0, & k - \text{четное} \\ \frac{1}{k}, & - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Окончательно получаем следующий результат

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Пример 4.39. Написать ряд Фурье для функции $f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < \pi \\ 0, & x = -\pi \end{cases},$$

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Решение. Данная функция также как и в примере 4.38 нечетная и разрывна (точки разрыва I рода $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$). Коэффициенты Фурье $a_k = 0$, а коэффициенты Фурье b_k рассчитываются по формулам (4.11):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left(-\frac{\cos kx}{k} \right) x \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin kx}{k^2} x \Big|_0^{\pi} \right) = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Искомый ряд Фурье:

$$f(x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Пример 4.40. Написать ряд Фурье для функции $f(x)$, определяемой условиями

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x + 2\pi) \text{ (} 2\pi\text{-периодичность)}, \\ f(x) &= f(-x) \text{ (четность)}, \\ f(x) &= x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Решение. Поскольку рассматриваемая функция четная, обратятся в 0 ее коэффициенты b_k , а коэффициенты a_k рассчитываются по формулам (4.11)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

При $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos kx}{k^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} 0, & k - \text{четное} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2}, & k - \text{нечетное.} \end{cases} \end{aligned}$$

Напишем ряд Фурье этой функции

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Пример 4.41. Рассмотрим функцию $f(x)$, определяемую условиями:

$$f(x) = f(x + 2\pi) \text{ (} 2\pi\text{-периодичность),}$$

$$f(x) = -f(-x) \text{ (нечетность),}$$

$$f(x) = \pi - x, \quad 0 < x \leq \pi, \quad f(0) = 0.$$

Решение. Эта функция имеет кусочно-непрерывную производную, а значит заведомо удовлетворяет условию Дирихле. Напишем ее ряд Фурье (в силу нечетности $f(x)$ коэффициенты a_k равны 0). Коэффициенты b_k рассчитываются по формулам (4.11):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left((\pi - x) \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{\pi} - (-1) \left(-\frac{\sin kx}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 4.30 при $x \neq 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) имеем равенство

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

При $x = 2\pi n$ каждая гармоника ряда Фурье обращается в 0, следовательно, и вся сумма равна 0 в этих точках. Это согласуется с результатами теоремы 4.30, ибо при $x = 2\pi n$

$$f(2\pi n - 0) = -\pi,$$

$$f(2\pi n + 0) = \pi,$$

$$\frac{1}{2}(f(2\pi n - 0) + f(2\pi n + 0)) = 0.$$

Пример 4.42. Доказать равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi, & k = l \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi, & k = l \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0, \quad \text{где } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Проверим, например, справедливость формулы $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0$. Используем известные тригонометрические формулы и получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(lx + kx) + \sin(lx - kx)) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(l + k)x) \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(l - k)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(l + k)x}{l + k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(l - k)x}{l - k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

В последних формулах допускалось, что $l + k \neq 0$ и $l - k \neq 0$ (в противном случае подынтегральная функция обратится в 0 и формула также будет верна).

Пример 4.43. Доказать справедливость равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) .$$

$$\text{где } T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) ,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Решение. Подсчитаем непосредственно требуемый интеграл, используя при этом результаты примера 4.42

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx = \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \\ & - 2 \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) + \frac{a_0^2}{2} \pi + \\ & + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) . \end{aligned}$$

Формула доказана.

Пример 4.44. Рассмотрим тригонометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{n^{\alpha}}$ ($0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$). Этот ряд сходится при всех значениях x , согласно признаку Дирихле–Абе́ля (см. теорему 4.17). В данном случае $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ расходится, поскольку $2\alpha \leq 1$ (см. пример 4.17). Следовательно этот

тригонометрический ряд не может быть рядом Фурье никакой 2π -периодической кусочно непрерывной функции (в данном случае нечетной). В самом деле, если бы это было не так, то согласно равенству Парсеваля (замечание 4.7) имели бы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty,$$

что невозможно при $(0 < \alpha \leq \frac{1}{2})$.

4.5.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 4

В задачах 4.45–4.56 требуется установить сходимость или расходимость указанных рядов. Для решения этих задач можно использовать теоремы 4.5–4.15.

$$4.45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}. \quad 4.46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{4n^4 + 5n^3 - 3}.$$

$$4.47. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n + \sqrt{n}}\right).$$

$$4.48. \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)} + \dots$$

$$4.49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n+2}}{n!}. \quad 4.50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}. \quad 4.51. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$$

$$4.52. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}. \quad 4.53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

$$4.54. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n-2}\right)^n. \quad 4.55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

$$4.56. \text{Исследовать на сходимость при различных действительных значениях } p \text{ и } \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^\alpha}.$$

$$4.57. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}. \quad 4.58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^n}. \quad 4.59. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}.$$

$$4.60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}. \quad 4.61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}. \quad 4.62. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n (2n+1)}.$$

$$4.63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}. \quad 4.64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n 3^n}}. \quad 4.65. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}.$$

- 4.66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$. 4.67. $1 + \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{3^3}{4!} + \dots$
 4.68. $\frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 3}{9} + \frac{\ln 4}{16} + \frac{\ln 5}{25} + \dots$
 4.69. $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$ 4.70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$.
 4.71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1}$. 4.72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + n}$. 4.73. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{3^n}$.
 4.74. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + 1}{(3n+2)(\sqrt{n}+1)}$. 4.75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.
 4.76. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1,01)^n}$. 4.77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$.
 4.78. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 4.79. $\sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2} \right)$.
 4.80. $\frac{1}{100} + \frac{1 \cdot 4}{100 \cdot 102} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{100 \cdot 102 \cdot 104} + \dots$

В задачах 4.81–4.90 исследовать абсолютную и условную сходимость указанных рядов. Для решения можно использовать теоремы 4.16, 4.17.

- 4.81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$. 4.82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n^2 + 1}$.
 4.83. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n (\ln(\ln n))^3}$. 4.84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{(\ln 3)^n}$.
 4.85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{4}}{n}$. 4.86. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 4} + \frac{1}{3 \ln 6} - \frac{1}{4 \ln 8} + \dots$
 4.87. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n} \right)$.
 4.88. $\cos 1 + \frac{\cos 2}{4} + \frac{\cos 3}{9} + \frac{\cos 4}{16} + \dots$
 4.89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.
 4.90. Найти сумму ряда с точностью до 0,01.

а) $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$ б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$.

В задачах 4.91–4.99, используя теоремы 4.19, 4.20, определить области сходимости функциональных рядов.

$$\begin{aligned}
 4.91. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x} . \quad 4.92. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{3^n x^n} \right) . \\
 4.93. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{5^n} . \quad 4.94. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} . \quad 4.95. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{1-3x} \right)^n \\
 4.96. \quad & 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots \quad 4.97. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n} . \\
 4.98. \quad & \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2^2} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3^2} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4^2} + \dots \quad 4.99. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} .
 \end{aligned}$$

В задачах 4.100–4.107 найти радиусы сходимости степенных рядов, используя формулы теоремы 4.23.

$$\begin{aligned}
 4.100. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2 3^n} . \quad 4.101. \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n 5^n \ln n} . \\
 4.102. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x-7)^n}{(5n+3)^{12}} . \quad 4.103. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n! 2^n} . \quad 4.104. \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2} \\
 4.105. \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n} . \quad 4.106. \quad 1 + 2! x + 3! x^2 + 4! x^3 + \dots \\
 4.107. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1} .
 \end{aligned}$$

В задачах 4.108–4.116 разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки x_0 (использовать теоремы 4.24–4.26 и замечание 4.3).

$$\begin{aligned}
 4.108. \quad & f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0 . \\
 4.109. \quad & f(x) = \ln(2 + 3x + x^2), \quad x_0 = 0 . \\
 4.110. \quad & f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \quad x_0 = 0 . \\
 4.111. \quad & f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 5}, \quad x_0 = 3 . \\
 4.112. \quad & f(x) = \ln(5x + 3), \quad x_0 = 1 .
 \end{aligned}$$

4.113. Написать три первых члена ряда Маклорена для функций: а) $y = \sec x$, б) $y = \ln(e^x + x)$.

4.114. Написать три первых члена ряда Тейлора для функций: а) $y = \frac{1}{1-x}$ в точке $x_0 = 2$; б) $y = x^3 \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

4.115. Разложить в ряд Маклорена функции: а) $y = 10^x$; б) $y = \cos(x-1)$.

4.116. Разложить в степенной ряд следующие функции:
 а) $y = x \cos 2x$; б) $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$; в) $y = \frac{x}{2-x}$;
 г) $y = (1+e^x)^2$.

4.117. Найти сумму степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)x^n$

4.118. Вычислить интеграл с точностью до 10^{-4}
 $\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

4.119. Вычислить с точностью до 10^{-4} , используя степенные ряды: а) $\cos 0,3$; б) $\sin 0,4$; в) $\operatorname{arctg} 0,2$; г) $\sqrt[3]{30}$.

4.120. Разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена, и интегрируя его почленно, разложить в степенные ряды интегралы:

а) $y = \int_0^x t^2 \operatorname{arctg} t dt$; б) $y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$; в) $y = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$;
 г) $y = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

4.121. Вычислить определенные интегралы с точностью до 0,001, используя разложения подынтегральных функций в ряды Маклорена:

а) $\int_0^{0,5} \cos\left(\frac{x^2}{4}\right) dx$; б) $\int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2} dx$; в) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$;
 г) $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx$; д) $\int_0^{0,125} \sqrt[3]{x} \cos^2 x dx$.

4.122. Разложить функцию $f(x) = x^2$ при $0 \leq x < 1$ в ряд Фурье по косинусам.

4.123. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1) \\ 2-x, & x \in [1; 2) \end{cases}$. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам.

4.124. Пусть $f(x) = x \sin x$, $x \in [0; \pi]$. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам.

4.125. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, совпадающую с $y = e^x$ на интервале $x \in (-2; 2)$ $y(x) = y(x+4)$.

4.126. Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \in (1; \pi] \end{cases}$. Пользуясь полученным разложением, найти суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задача № 1. Найти неопределенные интегралы.

1	$\int (4 - 3x) \cdot e^{-3x} dx$	16	$\int (4x - 3) \cdot e^{-2x} dx$
2	$\int (3x + 4) \cdot e^{3x} dx$	17	$\int \arctg \sqrt{2x - 1} dx$
3	$\int (4 - 16x) \cdot \sin 4x dx$	18	$\int \arctg \sqrt{5x - 1} dx$
4	$\int (1 - 6x) \cdot e^{2x} dx$	19	$\int (3x - 2) \cdot \cos 5x dx$
5	$\int \ln (4x^2 + 1) dx$	20	$\int (4x + 7) \cdot \cos 3x dx$
6	$\int \arctg \sqrt{6x - 1} dx$	21	$\int (2x - 5) \cdot \cos 4x dx$
7	$\int (2 - 9x) \cdot e^{-3x} dx$	22	$\int (x + 5) \cdot \sin 3x dx$
8	$\int \arctg \sqrt{3x - 1} dx$	23	$\int (4x + 3) \cdot \sin 5x dx$
9	$\int (5x + 6) \cdot \cos 2x dx$	24	$\int (\sqrt{2} - 8x) \cdot \sin 3x dx$
10	$\int (\sqrt{2} \cdot x - 3) \cdot \cos 2x dx$	25	$\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$
11	$\int \arctg \sqrt{4x - 1} dx$	26	$\int (8 - 3x) \cdot \cos 5x dx$
12	$\int (4x - 2) \cdot \cos 2x dx$	27	$\int (2 - 3x) \cdot \sin 2x dx$
13	$\int (5x - 2) \cdot e^{3x} dx$	28	$\int (7x - 10) \cdot \sin 4x dx$
14	$\int \ln (x^2 + 4) dx$	29	$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$
15	$\int (2 - 4x) \cdot \sin 2x dx$	30	$\int \frac{x \cdot \cos x}{\sin^3 x} dx$

Образец решения задачи № 1

Найти $\int x \cdot \cos x dx$.

Полагаем $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = dx$ и $v = \int \cos x dx = \sin x$. Подставив в формулу интегрирования по частям, находим

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x - \cos x + C.$$

Задача № 2. Вычислить определенные интегралы.

1	$\int_{\epsilon+1}^{\epsilon^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$	2	$\int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx$
3	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$	4	$\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$
5	$\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx$	6	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx$
7	$\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	8	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x dx$
9	$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$	10	$\int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$
11	$\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2} dx$	12	$\int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx$
13	$\int_0^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$	14	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx$
15	$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$	16	$\int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$
17	$\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$	18	$\int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$
19	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$	20	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \cdot \sin x)^2} dx$
21	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1 - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$	22	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$
23	$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$	24	$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$

25	$\int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$	26	$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4} dx$
27	$\int \frac{\sqrt[8]{1+1/x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$	28	$\int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$
29	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} dx$	30	$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}} dx$

Образец решения задачи № 2

Вычислить $\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x+3)^3}} dx$.

Сделаем замену переменных $u = x^2 + x + 3$. Тогда $du = (2x+1)dx$, $u(1) = 5$, $u(2) = 9$. Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x+3)^3}} dx = \int_5^9 \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{u}} \Big|_5^9 = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}.$$

Задача № 3. Найти неопределенные интегралы.

1	$\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$	2	$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx$
3	$\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx$	4	$\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$
5	$\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$	6	$\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-4)(x-3)} dx$
7	$\int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx$	8	$\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x} dx$
9	$\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx$	10	$\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2-2x} dx$
11	$\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx$	12	$\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx$
13	$\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx$	14	$\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx$
15	$\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx$	16	$\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)} dx$
17	$\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-4)(x-2)} dx$	18	$\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} dx$

19	$\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx$	20	$\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx$
21	$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx$	22	$\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx$
23	$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx$	24	$\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx$
25	$\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx$	26	$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx$
27	$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{x(x-1)(x+3)} dx$	28	$\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx$
29	$\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx$	30	$\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx$

Образец решения задачи № 3

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx$.

Под знаком интеграла неправильная дробь, выделим ее целую часть, разделив числитель на знаменатель. Получаем

$$\frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} = \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 2 + \frac{3x^2 - x - 12}{x^3 - 2x^2 - 3x}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - x - 12}{x^3 - 2x^2 - 3x} &= \frac{3x^2 - x - 12}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}, \\ 3x^2 - x - 12 &= A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 3x) = \\ &= (A + B + C)x^2 + (-2A + B - 3C)x - 3A. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда следует, что } \begin{cases} A + B + C = 3, \\ -2A + B - 3C = -1, \\ -3A = -12. \end{cases}$$

Находим: $A = 4$, $B = 1$, $C = -2$. Следовательно

$$\frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} = 2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+1}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx &= \int \left(2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \\ &= 2x + 4 \ln |x| + \ln |x-3| - \\ &- 2 \ln |x+1| + C = 2x + \ln \left(\frac{x^4 |x-3|}{(x+1)^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Задача № 4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

1	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cdot \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \cdot \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = 4 \cdot (t - \sin t), \\ y = 4 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos t, \\ y = 6 \cdot \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = 16 \cdot \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = 3 \cdot (t - \sin t), \\ y = 3 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 3). \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cdot \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \cdot \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 32 \cdot \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = 6 \cdot (t - \sin t), \\ y = 6 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 6). \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 6 \cdot \cos t, \\ y = 4 \cdot \sin t, \\ y = 2\sqrt{3} \quad (y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cdot \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \cdot \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cdot \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \cdot \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = 16 \cdot \cos^3 t, \\ y = 2 \cdot \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = 2 \cdot (t - \sin t), \\ y = 2 \cdot (1 - \cos 3t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 3). \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = 6 \cdot \cos t, \\ y = 2 \cdot \sin t, \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cdot \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \cdot \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = 6 \cdot (t - \sin t), \\ y = 6 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 9). \end{cases}$
17	$\begin{cases} x = 3 \cdot \cos t, \\ y = 8 \cdot \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = 8 \cdot \cos^3 t, \\ y = 4 \cdot \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$
19	$\begin{cases} x = 10 \cdot (t - \sin t), \\ y = 10 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, y \geq 15). \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cdot \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \cdot \sin t, \\ y = 4 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 4). \end{cases}$

21	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1). \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = 9 \cdot \cos t, \\ y = 4 \cdot \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$
23	$\begin{cases} x = 24 \cdot \cos^3 t, \\ y = 2 \cdot \sin^3 t, \\ y = 9\sqrt{3} \quad (y \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = 2 \cdot (t - \sin t), \\ y = 2 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2). \end{cases}$
25	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cdot \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \cdot \sin t, \\ y = 5 \quad (y \geq 5). \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = 8 \cdot \cos^3 t, \\ y = 8 \cdot \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$
27	$\begin{cases} x = 8 \cdot (t - \sin t), \\ y = 8 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, y \geq 12). \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = 3 \cdot \cos t, \\ y = 8 \cdot \sin t, \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$
29	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cdot \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \cdot \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = 4 \cdot (t - \sin t), \\ y = 4 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6). \end{cases}$

Образец решения задачи № 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$ (см. рис. 4.1).

Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S . Здесь x изменяется от 0 до a , следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Находим

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{4} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \cdot \sin t \cdot (-a \cdot \sin t) dt = -ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\
 &= \frac{ab}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi ab}{4}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, πab .

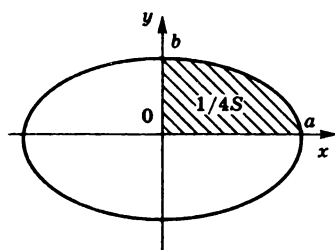


Рис. 4.1.

Задача № 5. Вычислить площади фигур, ограниченные линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

1	$r = 4 \cdot \cos 3\varphi, r = 2 \ (r \geq 2)$	2	$r = \sqrt{3} \cdot \cos \varphi, r = \sin \varphi, \ (0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
3	$r = 2 \cdot \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \cdot \sin \varphi, \ (0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2})$	4	$r = 6 \cdot \sin 3\varphi, r = 3 \ (r \geq 3)$
5	$r = 6 \cdot \cos 3\varphi, r = 3 \ (r \geq 3)$	6	$r = \cos \varphi, r = \sin \varphi, \ (0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
7	$r = 2 \cdot \cos \varphi, r = 2 \cdot \cos \varphi$	8	$r = \frac{3}{2} \cdot \cos \varphi, r = \frac{5}{2} \cdot \cos \varphi$
9	$r = \sin 6\varphi$	10	$r = \cos \varphi + \sin \varphi$
11	$r = \cos 2\varphi$	12	$r = 4 \cdot \sin 3\varphi, r = 2 \ (r \geq 2)$
13	$r = \sin 3\varphi$	14	$r = \cos 3\varphi$
15	$r = \sin \varphi, r = 2 \cdot \sin \varphi$	16	$r = \frac{5}{2} \cdot \sin \varphi, r = \frac{3}{2} \cdot \sin \varphi$
17	$r = 4 \cdot \cos 4\varphi$	18	$r = 2 \cdot \cos \varphi, \ r = 3 \cdot \cos \varphi$
19	$r = 2 \cdot \sin 4\varphi$	20	$r = \cos \varphi - \sin \varphi$
21	$r = \cos \varphi, \ r = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \ (-\frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{\pi}{2})$	22	$r = 1 + \sqrt{2} \cdot \cos \varphi$
23	$r = 1 + \sqrt{2} \cdot \sin \varphi$	24	$r = 2 \cdot \cos 6\varphi$
25	$r = 3 \cdot \sin \varphi, r = 5 \cdot \sin \varphi$	26	$r = \sin \varphi, \ r = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \ (0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4})$
27	$r = \frac{1}{2} + \sin \varphi$	28	$r = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \ r = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \ (\frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{3\pi}{4})$
29	$r = \frac{1}{2} + \cos \varphi$	30	$r = 2 \cdot \sin \varphi, r = 4 \cdot \sin \varphi$

Образец решения задачи № 5

Найти площадь фигуры, ограниченной дугами окружностей $r = 4 \cdot \cos \varphi$, $r = 4 \cdot \sin \varphi$, $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ (рис. 4.2).

Окружности пересекаются при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Рассматриваемая фигура симметрична относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, ее площадь можно вычислять так:

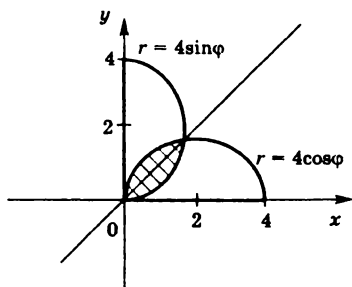


Рис. 4.2.

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \cdot \sin^2 \varphi d\varphi = 16 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\
 &= 8 \cdot \left(\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi - 4.
 \end{aligned}$$

Задача № 6. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

1	$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x,$ $0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$	2	$y = -\ln \cos x,$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$
3	$y = x^2 + 1,$ $0 \leq x \leq \sqrt{2}.$	4	$y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2},$ $\frac{1}{4} \leq x \leq 1.$
5	$y = 2 + \frac{e^x + e^{-x}}{2},$ $0 \leq x \leq 1.$	6	$y = 6x \cdot (\sqrt{x} - 1),$ $0 \leq x \leq \frac{1}{6}.$
7	$y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2},$ $0 \leq x \leq \frac{15}{16}.$	8	$y = 1 - \ln \sin x,$ $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

9	$y = \frac{3}{2} \cdot x^2,$ $0 \leq x \leq 1.$	10	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3,$ $0 \leq x \leq 2.$
11	$y = 1 - \ln(x^2 - 1),$ $3 \leq x \leq 4.$	12	$y = \frac{1 - e^x + e^{-x}}{2},$ $0 \leq x \leq 3.$
13	$y = 2x \cdot \sqrt{x} - 1,$ $0 \leq x \leq 1.$	14	$y = \ln \cos x + 2.$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$
15	$y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},$ $0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$	16	$y = \frac{x^2}{2} - 7,$ $0 \leq x \leq \sqrt{3}.$
17	$y = \ln(1 - x^2),$ $0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$	18	$y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5.$ $\frac{1}{9} \leq x \leq 1.$
19	$y = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + 4,$ $0 \leq x \leq 1.$	20	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,$ $0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$
21	$y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4},$ $0 \leq x \leq 2.$	22	$y = \frac{x^2}{4},$ $0 \leq x \leq 2.$
23	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},$ $1 \leq x \leq 2.$	24	$y = \ln(x^2 - 1),$ $2 \leq x \leq \sqrt{3}.$
25	$y = 4x^{3/2} - 1,$ $0 \leq x \leq 1.$	26	$y = 1 - \ln \cos x,$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$
27	$y = 4x \cdot (\sqrt{x} + 2),$ $0 \leq x \leq \frac{1}{6}.$	28	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3,$ $0 \leq x \leq 1.$
29	$y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4,$ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$	30	$y = 4x^2 - 1,$ $0 \leq x \leq \frac{1}{8}.$

Образец решения задачи № 6

Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$.

$$\text{Имеем } y' = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2},$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{9}{4} \cdot x\right)^{3/2} \Big|_0^4 = \\ = \frac{8}{27} \cdot (10\sqrt{10} - 1).$$

Задача № 7. Исследовать сходимость несобственного интеграла.

1	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+x^2}}$	2	$\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$
3	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot (1+3^x)}$	4	$\int_0^{\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$
5	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x} \cdot (1-e^{-x})}$	6	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$
7	$\int_1^{\infty} (e^{1/x^3} - 1) dx$	8	$\int_2^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$
9	$\int_1^{\infty} x^{3/2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^{7/2}}\right) dx$	10	$\int_1^{\infty} \arcsin^4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right) dx$
11	$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^3+2}\right) dx$	12	$\int_2^{\infty} \ln\left(\frac{x^4-1}{x^4+2}\right) dx$
13	$\int_1^{\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}\right) dx$	14	$\int_3^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{2}{x^4}\right) \cdot (e^{1/\sqrt{x}} - 1) dx$
15	$\int_2^{\infty} \frac{x^7}{x^2+x^8+1} dx$	16	$\int_1^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\right)^2 dx$
17	$\int_1^{\infty} \frac{x^2+x+1}{x^5+x^3+2} dx$	18	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1} \cdot \sqrt{x^7+x+4}}$
19	$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{(3x^2+1-3)} dx$	20	$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{1+x}}$
21	$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x^5+x^3-1} dx$	22	$\int_1^{\infty} \ln^2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\right) dx$

23	$\int_0^{\infty} \frac{x^4 + 1}{(x^6 + 1) \cdot (1 + 5^x)} dx$	24	$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^7 + 3) \cdot (e^{1/x} - 1)} dx$
25	$\int_1^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) dx$	26	$\int_1^{\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x^2 + 1} dx$
27	$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-x} dx$	28	$\int_1^{\infty} \frac{x^{4/5}}{(1+x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} dx$
29	$\int_3^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot e^{-x} dx$	30	$\int_2^{\infty} \ln\left(\frac{x \cdot \sqrt{x} - 1}{x \cdot \sqrt{x} + 2}\right) dx$

Образец решения задачи № 7

Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{\infty} x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^5 + 3}{x^5 + 2}\right) dx$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^5 + 3}{x^5 + 2}\right)}{1/x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^5 + 2}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{x^5 + 2} = 1. \end{aligned}$$

В то же время интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} =$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2}$, т. е. сходится, а следовательно, по
 предельному признаку сравнения интеграл $\int_1^{\infty} x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^5 + 3}{x^5 + 2}\right) dx$
 сходится.

Задача № 8. Найти приближенные значения выражения.

1	$\sqrt[3]{(5,01)^2 + (9,98)^2}$	2	$\sqrt{(1,01)^3 + (1,98)^3}$
3	$\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$	4	$\sqrt[3]{(1,98)^2 + (2,01)^2}$
5	$\cos^2 14^\circ \cdot \sin 62^\circ$	6	$\sin 39^\circ \cdot \cos 59^\circ$
7	$\sqrt{(3,01)^3 + (2,98)^3}$	8	$\sin^2 23^\circ \cdot \cos 31^\circ$

9	$\sqrt[4]{15,01 + (0,99)^2}$	10	$\cos 29^\circ \cdot \sin 59^\circ$
11	$\sin^2 16^\circ \cdot \cos 43^\circ$	12	$\sqrt[5]{31,01 + (0,98)^3}$
13	$\operatorname{tg} 29^\circ \cdot \operatorname{ctg} 28^\circ$	14	$\sqrt[3]{(1,01)^2 + (1,01)^2}$
15	$\sqrt[4]{(4,01)^2 + (3,98)^2}$	16	$\operatorname{tg} 29^\circ \cdot \cos 44^\circ$
17	$\sqrt[3]{(4,98)^2 + (10,01)^2}$	18	$\operatorname{ctg} 46^\circ \cdot \sin 61^\circ$
19	$\sqrt[4]{(6,98)^2 + (2,01)^5}$	20	$\sqrt[5]{(4,01)^2 + (3,99)^2}$
21	$\sqrt{(0,99)^3 + (2,01)^3}$	22	$\operatorname{tg} 59^\circ \cdot \operatorname{ctg} 31^\circ$
23	$\sqrt[4]{(3,98)^2 + (4,01)^2}$	24	$\sqrt[3]{(5,01)^2 + (9,98)^2}$
25	$\operatorname{ctg} 44^\circ \cdot \sin 59^\circ$	26	$\sqrt[4]{(7,01)^2 + (1,98)^5}$
27	$\sin 41^\circ \cdot \cos 61^\circ$	28	$\sqrt{(2,98)^3 + (3,02)^2}$
29	$\sqrt[4]{14,98 + (1,02)^2}$	30	$\cos 46^\circ \cdot \sin^2 14^\circ$

Образец решения задачи № 8

Пусть требуется найти приближенное значение арифметического выражения $\sqrt{(2,98)^2 + (4,01)^2}$. Введем в рассмотрение функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и две точки $M_0 : x_0 = 3, y_0 = 4$ и $M_1 : x = 2,98, y = 4,01$. Таким образом, $\Delta x = x - x_0 = -0,02$, $\Delta y = y - y_0 = 0,01$. Для приближенного расчета значений функции z приращение Δz функции заменяют дифференциалом dz , т. е.

$$z = z_0 + \Delta z|_{M_0} \cong z_0 + dz|_{M_0}.$$

Проведем расчет z_0 и $dz|_{M_0}$. Получаем

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \\ dz|_{M_0} &= z'_x(M_0) \cdot \Delta x + z'_y(M_0) \cdot \Delta y = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta y = \\ &= \frac{3}{5} \cdot (-0,02) + \frac{4}{5} \cdot (0,01) = \frac{0,04 - 0,06}{5} = \frac{0,02}{5} = -0,004. \end{aligned}$$

Окончательно имеем следующий результат

$$z \cong 5 - 0,004 = 4,996.$$

Задача № 9. Найти область определения функции z . Написать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M(x_0, x_0)$. Найти производную от функции z в точке $M(x_0, x_0)$ по направлению проекции нормали на плоскость XOY .

1	$z = \sqrt{9-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}.$ $M(2, 2).$	2	$z = \ln(2x + 3y - 5).$ $M(2, 3).$
3	$z = \arcsin(5x - 3y - 8).$ $M(1, -1).$	4	$z = \ln \sin(x + y).$ $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right).$
5	$z = \ln \cos(x - y),$ $M(0, 0).$	6	$z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$ $M(1, 1).$
7	$z = \frac{\arcsin(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$ $M(0, 0).$	8	$z = \arccos(12x - 3y - 3).$ $M(1, 7).$
9	$z = \arcsin(3x^2 + 2y^2).$ $M(0, 0).$	10	$z = \sqrt{6-3x^2-2y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$ $M(1, 1).$
11	$z = \ln \cos(x + 2y),$ $M(0, 0).$	12	$z = \sqrt{2x+3y+1} \cdot \arcsin(x+y),$ $M(0, 0).$
13	$z = \sqrt{8-4x^2-2y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2-1}}.$ $M(1, 1).$	14	$z = \ln(2x^2 + xy - y^2 + x + y).$ $M(1, 1).$
15	$z = \ln(3x^2 - 2xy - y^2 - 3x + 3y),$ $M(2, 1).$	16	$z = \ln(3x^2 - 2xy - y^2 - 3x + 3y).$ $M(2, 1).$
17	$z = \frac{\arcsin(x+2y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$ $M(0, 0).$	18	$z = \sqrt{5x-3y+1} + \frac{1}{\sqrt{3x+2y+5}}.$ $M(2, 2).$

19	$z = \arcsin(x + y) \cdot \ln(x + y).$ $M\left(0, \frac{1}{2}\right).$	20	$z = \arccos(x - 2y) \cdot \ln(x + y).$ $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$
21	$z = \ln(x + y - 5) + \sqrt{2x + 3y - 1}.$ $M(1, 0).$	22	$z = \arcsin(x^2 - 2xy + 2y^2).$ $M(0, 0).$
23	$z = \sqrt{3x + 4y - 1} + \frac{1}{\sqrt{4x - 3y}}.$ $M(1, 1).$	24	$z = \sqrt{1 - 3x^2 - 2xy - y^2}.$ $M(0, 0).$
25	$z = \ln \sin(x + y).$ $M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$	26	$z = \arccos(5x^2 + 4xy + y^2).$ $M(0, 0).$
27	$z = \frac{\ln(x + y - 1)}{\sqrt{2 - x - y}}.$ $M\left(1, \frac{1}{2}\right).$	28	$z = \ln(1 - 3x^2 - 2xy - y^2).$ $M(0, 0).$
29	$z = \ln(5 - x^2 - 3xy - 5y^2).$ $M(1, 0).$	30	$z = \ln(7 - 3x^2 - 2xy - y^2).$ $M(1, 1).$

Образец решения задачи № 9

Рассмотрим функцию z и точку $M(1, -1)$.

$$z = \arcsin(5x + 3y - 2).$$

Область определения $|5x - 3y - 2| \leq 1 \Rightarrow$

$$D : 5x + 3y - 3 \leq 0$$

$$5x + 3y - 1 \geq 0$$

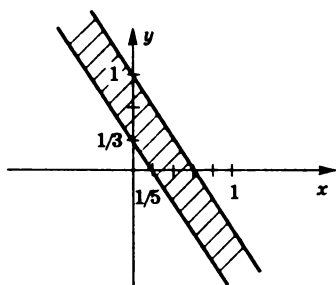


Рис. 4.3.

(рис. 4.3).

$$z'_x = \frac{5}{\sqrt{1 - (5x + 3y - 2)^2}}; \quad z'_y = \frac{3}{\sqrt{1 - (5x + 3y - 2)^2}}$$

$$z'_x(1, -1) = 5; \quad z'_y(1, -1) = 3.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\begin{aligned} Z &= z'_x(1, -1) \cdot (x - 1) + z'_y(1, -1) \cdot (y + 1) \\ Z &= 5 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y + 1). \end{aligned}$$

Уравнение нормали (каноническая форма):

$\vec{N} = (5, 3, -1)$ — нормальный вектор касательной плоскости.

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} \text{ — уравнение нормали.}$$

$$\text{Пр}_{xOy} \vec{N} = \vec{n} = (5, 3), \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}} \right).$$

Производная функции z по направлению вектора $\vec{n}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial n_0} &= \nabla z \cdot \vec{n}_0 = z'_x(1, -1) \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} + z'_y(1, -1) \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \\ &= \frac{25}{\sqrt{34}} + \frac{9}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Задача № 10. В дифференциальном выражении перейти к новым переменным u, v . Найти функцию z , удовлетворяющую заданному уравнению.

1	$\begin{aligned} (x-y) \cdot z'_x + (2x-2y) \cdot z'_y &= \\ &= x^2 + xy \\ x &= u + v \\ y &= -u + 2v \end{aligned}$	2	$\begin{aligned} (x+2y) \cdot z'_x + (3x+6y) \cdot z'_y &= \\ &= xy - y^2 \\ x &= 3u - 2v \\ y &= u - 6v \end{aligned}$
3	$\begin{aligned} (-x+3y) \cdot z'_x + (-2x+6y) \cdot z'_y &= \\ &= 2xy + x^2 \\ x &= 2u - v \\ y &= 4u + v \end{aligned}$	4	$\begin{aligned} (x+5y) \cdot z'_x + (3x+15y) \cdot z'_y &= \\ &= 3xy - x^2 \\ x &= 2u - v \\ y &= 6u + v \end{aligned}$
5	$\begin{aligned} (x-3y) \cdot z'_x + (2x-6y) \cdot z'_y &= \\ &= x^2 - y^2 \\ x &= 2u - v \\ y &= 6u + v \end{aligned}$	6	$\begin{aligned} (x-2y) \cdot z'_x + (5x-10y) \cdot z'_y &= \\ &= x^2 + y^2 \\ x &= u - v \\ y &= 2u - 5v \end{aligned}$

$(2x+3y) \cdot z'_x + (8x+12y) \cdot z'_y =$ $= 2x^2 - 3y^2$ $x = u - v$ $y = 4u + 2v$	8	$(x-y) \cdot z'_x + (2x-2y) \cdot z'_y =$ $= x^2 - 2xy$ $x = u - v$ $y = 2u + v$
$(x-5y) \cdot z'_x + (3x+15y) \cdot z'_y =$ $= 2x^2 + y^2$ $x = 2u - v$ $y = 6u + v$	10	$(2x-y) \cdot z'_x + (4x-2y) \cdot z'_y =$ $= x^2 - 2y^2$ $x = u + v$ $y = -u + 2v$
$(3x-y) \cdot z'_x + (6x-2y) \cdot z'_y =$ $= x^2 + 5y^2$ $x = u - v$ $y = 2u + v$	12	$(4x+y) \cdot z'_x + (12x+3y) \cdot z'_y =$ $= y^2 - xy$ $x = u - 2v$ $y = 3u + v$
$(4x-2y) \cdot z'_x + (12x-6y) \cdot z'_y =$ $= y^2 + 2xy$ $x = 2u - v$ $y = 6u + 2v$	14	$(2x-3y) \cdot z'_x + (10x-15y) \cdot z'_y =$ $= x^2 - 5y^2$ $x = u + v$ $y = -u + 5v$
$(x+5y) \cdot z'_x + (2x+10y) \cdot z'_y =$ $= x^2 - xy + y^2$ $x = u - v$ $y = 2u + v$	16	$(3x-4y) \cdot z'_x + (9x-12y) \cdot z'_y =$ $= y^2 - 3xy$ $x = u - v$ $y = 3u + 2v$
$(2x-y) \cdot z'_x + (10x-5y) \cdot z'_y =$ $= y^2 - 5x^2$ $x = -u + v$ $y = 5u + 3v$	18	$(2x-5y) \cdot z'_x + (6x-15y) \cdot z'_y =$ $= xy$ $x = u - v$ $y = 5u + 3v$
$(x-6y) \cdot z'_x + (2x-12y) \cdot z'_y =$ $= x^2 - y^2$ $x = u - 3v$ $y = 2u + v$	20	$(x+3y) \cdot z'_x + (3x+9y) \cdot z'_y =$ $= x^2 + 2xy$ $x = u - v$ $y = 2u - 3v$
$4 \cdot z''_{xx} - 9 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = u + v$ $y = \frac{3}{2} \cdot (u - v)$	22	$z''_{xx} + 8 \cdot z''_{xy} + 7 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = -\frac{1}{6} \cdot (u + v)$ $y = -\frac{1}{6} \cdot (u + 7v)$
$z''_{xx} + 6 \cdot z''_{xy} + 5 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = -\frac{1}{4} \cdot (u + v)$ $y = -\frac{1}{4} \cdot (u + 5v)$	24	$z''_{xx} + 10 \cdot z''_{xy} + 9 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = -\frac{1}{8} \cdot (u + v)$ $y = -\frac{1}{8} \cdot (u + 9v)$

25	$11 \cdot z''_{xx} + 12 \cdot z''_{xy} + z''_{yy} = 0$ $x = -\frac{1}{10} \cdot (11u + v)$ $y = -\frac{1}{10} \cdot (u + v)$	26	$25 \cdot z''_{xx} - 4 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = \frac{5}{2} \cdot (u + v)$ $y = (u - v)$
27	$4 \cdot z''_{xx} + 14 \cdot z''_{xy} + 6 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = \frac{1}{5} \cdot (2u + v)$ $y = \frac{1}{5} \cdot (u + 3v)$	28	$36 \cdot z''_{xx} - z''_{yy} = 0$ $x = 3 \cdot (u + v)$ $y = \frac{1}{2} \cdot (u - v)$
29	$6 \cdot z''_{xx} + 16 \cdot z''_{xy} + 8 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = -\frac{1}{4} \cdot (3u + v)$ $y = -\frac{1}{2} \cdot (u + v)$	30	$25 \cdot z''_{xx} - 49 \cdot z''_{yy} = 0$ $x = \frac{5}{7} \cdot (u + v)$ $y = \frac{7}{2} \cdot (u - v)$

Образец решения задачи № 10

Рассмотрим дифференциальное уравнение, содержащее частные производные z'_x и z'_y :

$$(x + 7y) \cdot z'_x + (3x + 21y) \cdot z'_y = 2xy.$$

Прежде всего, перейдем к новым переменным u и v , которые связаны с переменными x и y формулами:

$$\begin{aligned} x &= u - v & x &= \frac{1}{4} \cdot (x + y) \\ & , \text{ и обратно} \\ y &= 3u + v & y &= \frac{1}{4} \cdot (y - 3x) \\ z'_x &= z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot \frac{1}{4} - z'_v \cdot \frac{3}{4} \\ z'_y &= z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot \frac{1}{4} + z'_v \cdot \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

После указанной подстановки получим дифференциальное уравнение, записанное в переменных u и v :

$$\begin{aligned} (22u + 6v) \cdot z'_u &= 2 \cdot (u - v) \cdot (3u + v) \\ z'_u &= \frac{3u^2 - 2uv - v^2}{11u + 3v} = \frac{3}{11} \cdot u - \frac{28}{121} \cdot v + \frac{37}{111} \cdot \frac{v^2}{11u + 3v}. \end{aligned}$$

Интегрируем последнее уравнение по u :

$$z = \frac{3}{22} \cdot u^2 - \frac{28}{121} \cdot uv - \frac{37}{11^3} \cdot v^2 \cdot \ln |11u + 3v| + f(v),$$

где $f(v)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Возвращаясь к старым переменным x , y , запишем функцию z , удовлетворяющую исходному уравнению:

$$z = \frac{3}{22} \cdot \frac{(x+y)^2}{16} + \frac{28}{121} \cdot \frac{(x+y) \cdot (3x-y)}{16} - \\ - \frac{37}{11^3} \cdot \frac{(3x-y)^2}{16} \cdot \ln \left| \frac{x}{2} + \frac{7}{2} y \right| + f \left(\frac{1}{4} \cdot (y-3x) \right).$$

Задача № 11. Представить разложение функции z в точке $M(x_0, y_0)$ по формуле Тейлора до третьего порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано.

1	$z = \sin^2(2x+3y-1)$ $M(5,3)$	2	$z = \arctg(5x-2y-1)$ $M(1,2)$
3	$z = \ln(1+x-2y)$ $M(1,2)$	4	$z = \cos^2(5x+3y+6)$ $M(-3,3)$
5	$z = (x+2y) \cdot e^{(12-x-2y)}$ $M(0,0)$	6	$z = (2x-y) \cdot e^{(5-2x+y)}$ $M(0,0)$
7	$z = \arcsin(x+3y)$ $M(0,0)$	8	$z = \ln(1+x+3y)$ $M(2,5)$
9	$z = \ln(12+36x-3y)$ $M(0,0)$	10	$z = \cos(x+3y) \cdot \sin(2x-5y)$ $M(0,0)$
11	$z = \sin(3+2x-3y) \times$ $\times \sin(-9-2x+5y)$ $M(3,3)$	12	$z = \arcsin(13+2x-5y)$ $M(1,3)$
13	$z = \ln(15-2x+3y)$ $M(1,3)$	14	$z = \arctg(7-2x+5y)$ $M(1,-1)$
15	$z = (3x+y) \cdot e^{(12-3x-y)}$ $M(0,0)$	16	$z = \cos(2x+5y-1) \times$ $\times \cos(3x-2y+8)$ $M(-2,1)$
17	$z = \sin(5x+3y-2) \times$ $\times \cos(7x-2y-9)$ $M(1,-1)$	18	$z = \sin^2(2x+5y-7)$ $M(1,1)$
19	$z = \ln(13+2x+5y)$ $M(2,3)$	20	$z = e^{(15-2x+3y)}$ $M(-1,2)$

21	$z = \ln(2 + 3x - 2y)$ $M(1, 0)$	22	$z = \sin(3x + 2y - 5) \times$ $\times \sin(x + 3y - 4)$ $M(1, 1)$
23	$z = \cos^2(3x + 4y - 7)$ $M(1, 1)$	24	$z = \ln(7 + 3x - 5y)$ $M(2, 1)$
25	$z = e^{(13-5x-7y)}$ $M(3, 2)$	26	$z = \operatorname{arctg}(5x + 3y - 8)$ $M(1, 1)$
27	$z = e^{(12-5x-3y)} \cdot (5x + 3y)$ $M(1, 1)$	28	$z = \arcsin(3 - 2x - y)$ $M(1, 1)$
29	$z = \sin^2(12x + y - 13)$ $M(1, 1)$	30	$z = \cos(5x - y - 3) \times$ $\times \cos(3x - 2y + 1)$ $M(1, 2)$

Образец решения задачи № 11

Решим поставленную задачу для функции $z = \sin(3x + 2y - 3) \cdot \cos(2x - y - 9)$ в точке $M(3, -3)$. Пусть $x - 3 = \Delta x$, $y + 3 = \Delta y$, тогда $x = 3 + \Delta x$, $y = -3 + \Delta y$. По известной в тригонометрии формуле получаем

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \cdot (\sin(5x + y - 12) + \sin(x + 3y + 6)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin(5\Delta x + \Delta y) + \sin(\Delta x + 3\Delta y)). \end{aligned}$$

Используем известные представления функции $\sin \varphi$ по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \sin(5\Delta x + \Delta y) &= 5\Delta x + \Delta y - \frac{1}{6} \cdot (5\Delta x + \Delta y)^3 + \dots \\ \sin(\Delta x + 3\Delta y) &= \Delta x + 3\Delta y - \frac{1}{6} \cdot (\Delta x + 3\Delta y)^3 + \dots \end{aligned}$$

После этого определяем функцию z :

$$\begin{aligned} z &= 3\Delta x + 2\Delta y - \frac{1}{12} \cdot ((5\Delta x + \Delta y)^3 + (\Delta x + 3\Delta y)^3) + \dots = \\ &= 3\Delta x + 2\Delta y - \frac{21}{2} \cdot \Delta x^3 - \frac{7}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y^2 - 7 \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta y - \\ &\quad - \frac{7}{3} \cdot \Delta y^3 + \dots = 3(x - 3) + 2(y + 3) - \frac{21}{2} \cdot (x - 3)^3 - \end{aligned}$$

$$x-3)^2 \cdot (y+3) - \frac{7}{2} \cdot (x-3) \cdot (y+3)^2 - \frac{7}{3} \cdot (y+3)^3 + o(\rho^3).$$

$$= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}.$$

дача № 12. Найти экстремальные значения функции (x, y) в замкнутой области D .

$z = x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y + 7$ $ x \leq 2, y \leq 1$	2	$z = -x^2 + 2xy - 2y^2 - 4x + 2y - 1$ $ x \leq 4, y \leq 2$
$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ $ x \leq 2, y \leq 5$	4	$z = 5x^3 - 2xy^2 + x^2 + 3y^2 - 3$ $ x \leq 2, y \leq 7$
$z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y + 1$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5$	6	$z = x^2 + 2y^2 - 18\ln x - 16\ln y + 3$ $1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3$
$z = 3x^2 + y^2 - 24\ln x - 18\ln y + 5$ $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4$	8	$z = xy + \frac{9}{x} + \frac{3}{y} + 3$ $2 \leq x \leq 4, \frac{1}{2} \leq y \leq 2$
$z = xy + \frac{25}{x} + \frac{5}{y} - 7$ $4 \leq x \leq 6, \frac{1}{2} \leq y \leq 2$	10	$z = xy + \frac{36}{x} + \frac{6}{y} + 5$ $5 \leq x \leq 7, \frac{1}{3} \leq y \leq 3$
$z = 3x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 8y - 3$ $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4$	12	$z = 5x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 6y - 5$ $ x \leq 2, y \leq 1$
$z = 4x^3 - 3xy^2 + 7x^2 + 3y^2 - 7$ $ x \leq 2, y \leq 7$	14	$z = 5x^3 - 5xy^2 - 3x^2 + 8y^2 - 1$ $ x \leq 2, y \leq 3$
$z = -5x^2 - 3y^2 + 90\ln x + 54\ln y - 3$ $2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 4$	16	$z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 3$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq y \leq 2$
$z = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} - 5$ $1 \leq x \leq 3, \frac{1}{3} \leq y \leq 2$	18	$z = xy + \frac{16}{x} + \frac{4}{y} - 7$ $3 \leq x \leq 5, \frac{1}{3} \leq y \leq 2$

19	$z = (2x^2 + y^2) \cdot e^{x^2 - y^2}$ $ x \leq 1, y \leq 1$	20	$z = (3x^2 + 5y^2) \cdot e^{-2x^2 - 3y^2}$ $ x \leq 1, y \leq 1$
21	$z = 2x^3 - 3xy^2 - 4x^2 + y^2 - 3$ $ x \leq 3, y \leq 3$	22	$z = xy + \frac{5}{x} + \frac{3}{y} - 12$ $1 \leq x \leq 3, \frac{1}{2} \leq y \leq 3$
23	$z = x^2 + 2xy + 5y^2 - 8$ $ x \leq 3, y \leq 3$	24	$z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 5$ $ x \leq 2, y \leq 2$
25	$z = -5x^2 + 2xy + y^2 - 3$ $ x \leq 1, y \leq 1$	26	$z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 2x + y - 7$ $ x \leq 1, y \leq 1$
27	$z = 7x^2 - 12xy + 5y^2 - 3$ $ x \leq 2, y \leq 2$	28	$z = 8x^2 + 5xy - 2y^2 - 11$ $ x \leq 1, y \leq 2$
29	$z = 11x^2 - 7xy - 5y^2 - 1$ $ x \leq 2, y \leq 1$	30	$z = 7x^2 - 3xy + 4y^2 - 10$ $ x \leq 3, x \leq 1$

Образец решения задачи № 12

Исследуем на экстремум функцию $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} + 1$ в замкнутой области $D = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 3\}$. Прежде всего, найдем локальные экстремумы. Решим систему:

$$z'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0, \quad z'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0.$$

Система имеет единственное решение: $x = 5, y = 2$. Найдем значение определителя Δ в этой точке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{4000}{x^3 \cdot y^3} - 1.$$

При $x = 5, y = 2$ $\Delta = 3 > 0$, а значение $z''_{xx} = \frac{4}{5} > 0$. Поэтому в этой точке функция z имеет локальный минимум $z(5, 2) = 31$.

Изучим экстремальные значения функции на границе области D .

1) $y = 1$; $4 \leq x \leq 6$; тогда $z = x + \frac{50}{x} + 21$, а $z'_x = 1 - \frac{50}{x^2} < 0$ при $4 \leq x \leq 6 \Rightarrow z_{\max} = z(4) = 4 + \frac{50}{4} + 21 = \frac{75}{2}$,

$$\underline{z_{\min} = z(6) = 6 + \frac{50}{6} + 21 = \frac{106}{3}}.$$

2) $y = 3$; $4 \leq x \leq 6$; тогда $z = 3x + \frac{50}{x} + \frac{23}{3}$, а $z'_x = 3 - \frac{50}{x^2}$, $z''_{xx} = \frac{100}{x^3}$, $z'_x = 0 \Rightarrow 3 = \frac{50}{x^2}$, $x = \sqrt{\frac{50}{3}} \in (4, 6)$, $z''_{xx} = \frac{100}{(50/3)^{3/2}} > 0$; таким образом, при $x = \sqrt{\frac{50}{3}}$ функция $z = 3x + \frac{50}{x} + \frac{23}{3}$ имеет минимум $\underline{z_{\min} = \sqrt{150} + \sqrt{\frac{3}{50}} + \frac{23}{3}}$.

3) $x = 4$; $1 \leq y \leq 3$; тогда $z = 4y + \frac{20}{y} + \frac{27}{2}$, а $z'_y = 4 - \frac{20}{y^2}$, $z''_{yy} = \frac{40}{y^3}$, $z'_y = 0 \Rightarrow 4 = \frac{20}{y^2}$, $y = \sqrt{5} \in (1, 3)$, $z''_{yy} = \frac{40}{(5)^{3/2}} > 0$. Следовательно при $y = \sqrt{5}$ функция z достигает своего наименьшего значения на отрезке $1 \leq y \leq 3$

$$\underline{z_{\min} = z(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} + \frac{20}{\sqrt{5}} + \frac{27}{2} = \frac{40}{\sqrt{5}} + \frac{27}{2}}.$$

4) $x = 6$; $1 \leq y \leq 3$; тогда $z = 6y + \frac{20}{y} + \frac{28}{3}$, а $z'_y = 6 - \frac{20}{y^2}$, $z'_y = 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \in (1, 3)$, $z''_{yy} = \frac{40}{y^3} = \frac{40}{(10/3)^{3/2}} > 0$. В точке $y = \sqrt{\frac{10}{3}}$ функция z имеет минимальное значение

$$\underline{z_{\min} = 6 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} + 20 \cdot \sqrt{\frac{3}{10}} + \frac{28}{3}}.$$

Из всех найденных минимальных значений (они подчеркнуты в тексте) выбираем наименьшее

$$z_{\min} = \min \left\{ 31; \frac{106}{3}; \sqrt{150} + \sqrt{\frac{3}{50}} + \frac{23}{3}; \frac{40}{\sqrt{5}} + \frac{27}{2}; 6 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} + 20 \cdot \sqrt{\frac{3}{10}} + \frac{28}{3} \right\} = 31.$$

Чтобы найти наибольшее значение функции, рассчитаем значение функции в угловых точках прямоугольника $D : 4 \leq x \leq 6; 1 \leq y \leq 3$

$$z(4, 1) = 4 + \frac{50}{4} + 20 + 1 = 37,5,$$

$$z(4, 3) = 12 + \frac{50}{4} + \frac{20}{3} + 1 \cong 32,2,$$

$$z(6, 1) = 6 + \frac{50}{6} + 20 + 1 \cong 35,3,$$

$$z(6, 3) = 18 + \frac{50}{6} + \frac{20}{3} + 1 \cong 34.$$

Выбираем наибольшее из этих чисел

$$z_{\max} = \max \{37,5; 32,2; 35,3; 34\} = 37,5.$$

Таким образом, наименьшее значение функции на множестве D $z_{\min} = 31$, наибольшее значение $z_{\max} = 37,5$.

Задача № 13. Найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при выполнении уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$.

1	$f=4x+2y+1$ $\varphi=x^2-2xy+3y^2-5$	2	$f=-6x-2y+3$ $\varphi=5x^2-2xy+y^2-7$
3	$f=4x-2y-3$ $\varphi=-7x^2+4xy-3y^2+11$	4	$f=6x-4y-3$ $\varphi=-x^2+4xy-5y^2+1$
5	$f=-8x+2y-5$ $\varphi=7x^2-4xy+2y^2-10$	6	$f=10x+6y+5$ $\varphi=10x^2+16xy+y^2-1$
7	$f=2x+4y+5$ $\varphi=2x^2-8xy+10y^2-5$	8	$f=-10x+4y+7$ $\varphi=-5x^2+2xy-2y^2+7$
9	$f=12x-4y+7$ $\varphi=12x^2-2xy+y^2-3$	10	$f=x^2-2xy+2y^2-2x-4y+1$ $\varphi=2x+2y+1$
11	$f=2x^2+4xy+y^2-2x+2y+1$ $\varphi=4x-2y+1$	12	$f=4x^2-6xy+y^2-4x-2y+3$ $\varphi=-4x+6y-1$
13	$f=x^2-xy+y^2+x+y-4$ $\varphi=x+y-2$	14	$f=3x^2-2xy+y^2-2x+4y-1$ $\varphi=2x+6y+1$

15	$f=5x^2-4xy+3y^2-2x+2y-3$ $\varphi=2x-2y+3$	16	$f=6x^2-2xy+y^2-4x+2y-3$ $\varphi=4x-6y+2$
17	$f=7x^2-4xy+3y^2-6x+2y-2$ $\varphi=2x-2y+1$	18	$f=8x^2-2xy+5y^2+4x-2y+3$ $\varphi=6x-4y+7$
19	$f=7x^2+6xy+5y^2-4x-8y+5$ $\varphi=10x-8y-7$	20	$f=20x-10y-1$ $\varphi=5x^2-6xy+2y^2-7$
21	$f=3x-5y-7$ $\varphi=3x^2+4xy+5y^2-3$	22	$f=4x+10y-12$ $\varphi=5x^2-4xy+2y^2-5$
23	$f=11x+13y-3$ $\varphi=7x^2-3xy+2y^2-7$	24	$f=7x-3y+8$ $\varphi=6x^2-4xy+5y^2-5$
25	$f=9x+11y-7$ $\varphi=11x^2-5xy+3y^2-8$	26	$f=x^2+3y^2-7$ $\varphi=5x-3y+1$
27	$f=7x^2+5y^2-3$ $\varphi=2x+3y-1$	28	$f=10x^2+7y^2-11$ $\varphi=5x-7y-9$
29	$f=18x^2+15y^2-7$ $\varphi=13x+12y-11$	30	$f=13x^2+11y^2-43$ $\varphi=17x-15y-9$

Образец решения задачи № 13

Найдем экстремальные значения линейной функции $z = f(x, y) = 2x - 12y + 7$. При выполнении уравнения связи

$$\varphi = x^2 + 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L = f + \lambda \cdot \varphi = 2x - 12y + 7 + \lambda \cdot (x^2 + 2xy + 2y^2 - 1) = 0.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$L_x = 2 + \lambda \cdot (2x + 2y) = 0,$$

$$L_y = -12 + \lambda \cdot (2x + 4y) = 0,$$

$$L_\lambda = x^2 + 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Первые два уравнения данной системы решим относительно x, y . Для этого представим их в виде

$$x + y = -\frac{1}{\lambda},$$

$$x + 2y = -\frac{6}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что $x = -\frac{8}{\lambda}$, $y = \frac{7}{\lambda}$. После подстановки найденных x и y в третье уравнение системы получим уравнение относительно λ :

$$\frac{1}{\lambda^2} \cdot (64 - 2 \cdot 56 + 2 \cdot 49) = 1.$$

Отсюда $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}$; $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{50}}$. Таким образом, найдены все решения системы:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{8}{\sqrt{50}}, & y_1 &= \frac{7}{\sqrt{50}}, & \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{50}}, \\ x_2 &= \frac{8}{\sqrt{50}}, & y_2 &= -\frac{7}{\sqrt{50}}, & \lambda_2 &= -\frac{1}{\sqrt{50}}. \end{aligned}$$

Для выяснения характера экстремума в этих точках вычисляем определитель Δ_L :

$$\begin{aligned} \Delta_L &= - \begin{vmatrix} 0 & 2x+2y & 2x+4y \\ 2x+2y & 2\lambda & 2\lambda \\ 2x+4y & 2\lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2x+2y) \cdot (4\lambda \cdot (2x+2y) - 2\lambda \cdot (2x+4y)) - \\ &\quad - (2x+4y) \cdot (2\lambda \cdot (2x+2y) - 2\lambda \cdot (2x+4y)) = \\ &= 8\lambda \cdot ((x+y)^2 + y^2). \end{aligned}$$

В точке $x_1 = -\frac{8}{\sqrt{50}}$, $y_1 = \frac{7}{\sqrt{50}}$, $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}$ значение $\Delta_L = \frac{8}{\sqrt{50}} > 0$, поэтому в этой точке функция z имеет условный минимум. Точно так же проверяется, что в точке $x_2 = \frac{8}{\sqrt{50}}$, $y_2 = -\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{50}}$, функция z достигает своего условного максимума $\left(\Delta_L = -\frac{8}{\sqrt{50}} < 0 \right)$.

Рассчитаем экстремальные значения:

$$f_{\min} = 2x_1 - 12y_1 + 7 = - \left(\frac{100 - 7\sqrt{50}}{\sqrt{50}} \right),$$

$$f_{\max} = 2x_2 - 12y_2 + 7 = \frac{100 + 7\sqrt{50}}{\sqrt{50}}.$$

Задача № 14. Исследовать на сходимость ряд.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{n+1}\right)$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{n-1}{n^3+n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5}{n^2+4}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt[3]{n+1}}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+5}{n^3+1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp \left(\frac{\sqrt{n}-1}{n^3} \right) - 1 \right)$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\exp \left(\frac{1}{n^2} \right) - 1 \right)$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \cdot \sin \frac{1}{n}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp \left(\frac{\sqrt{n}}{n^3+1} \right) - 1 \right)$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \cdot \left(\exp \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right)$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[5]{n^2+1}}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-n+2}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} \cdot \sin \frac{1}{n}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1) \cdot (n \cdot \sqrt[4]{n^3}+2)}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+3n}{n^2+n}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \arcsin \frac{n+1}{n^3}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\exp \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right)^2$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+4}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \cdot \sqrt[3]{n+5}}$

Образец решения задачи № 14

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}$. Применим предельный признак сравнения. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{5n} \right)}{\frac{1}{n}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поскольку расходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ (интегральный признак Коши), то исходный ряд также расходится.

Задача № 15. Исследовать на сходимость ряд.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n!}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)}{(n+1)!}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n \cdot (3n+5)}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \operatorname{arctg} \frac{5}{n}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n^2}{(n+2)!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \cdot \sin \frac{2}{3^n}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \cdot (n^2-1)}{n!}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{(3n)!}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n + 3}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (2n+1)!}{(3n)!}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$

21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1) \cdot (2n)!}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+2)!}{10^n \cdot n^2}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^3 \cdot n!}{(2n)!}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$

Образец решения задачи № 15

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$. Имеем $u_n = \frac{e^{2n+1}}{n!}$,
 $u_{n+1} = \frac{e^{2n+3}}{(n+1)!}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n+3} \cdot n!}{(n+1)! \cdot e^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{n+1} = 0 < 1.$$

Таким образом, ряд сходится по признаку Даламбера.

Задача № 16. Исследовать на сходимость ряд.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$	6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot e^{-n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$

13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+5} \right)^{n^2}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^n}{(2n+1)^n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \cdot \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^{n+2}}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{n/2} \cdot \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n$
23	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{n/3} \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{3n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{((2n)!)^{n/2}}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} 7^n \cdot \left(\frac{n^3+1}{n^3+2} \right)^{-n^5}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+7n+3} \right)^{n^3}$

Образец решения задачи № 16

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1}$

Имеем $u_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1}$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Коши.

Задача № 17. Исследовать на сходимость ряд.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+2)}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(n+3)}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \cdot \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n} \cdot (n+1)}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3/2)^n \cdot (n+1)}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \cdot \ln(n+2)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \sqrt[4]{2n+3}}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n} \cdot \cos \frac{\pi}{3n}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{3n}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1} \cdot (2n+1)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin^n \frac{\pi}{2n}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n^2 \cdot (n+3)}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(n+3)!}{2^n}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{(n+1)!}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot n!}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{1}{10 \cdot \sqrt[4]{n}}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{5 \cdot \sqrt{n}}$

Образец решения задачи № 17

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Так как $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то выполнены условия признака Лейбница, и данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, расходится.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ сходится условно.

↳ **Задача № 18.** Найти область сходимости ряда.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3} \cdot (x+3)^{2n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3} \cdot (x-4)^{2n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3} \cdot (x-1)^{3n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \cdot (x-2)^{2n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n-1) \cdot 2^n} \cdot (x+2)^n$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1) \cdot 2^n}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2} \cdot (x-3)^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+1) \cdot 3^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1) \cdot 3^n} \cdot (x+6)^n$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \cdot \ln(n+3)} \cdot (x+6)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3) \cdot 2^n}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1) \cdot 4^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2^n} \cdot (x-3)^n$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!} \cdot (x+4)^{2n+1}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1) \cdot 3^n} \cdot (x+4)^n$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3} \cdot (x-4)^{3n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1) \cdot 2^n} \cdot (x+3)^n$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n}}{(2n+1) \cdot 3^n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 5^n} \cdot (x-3)^n$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{(n+3)^2 \cdot 2^{n-1}} \cdot (x+7)^n$	27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n) \cdot 4^n}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2) \cdot 3^n}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} \cdot (x+5)^{2n+1}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3} \cdot (x-2)^{3n}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \cdot \ln(n+4)}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \cdot (x-2)^n$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!} \cdot (x+1)^{2n-1}$

Образец решения задачи № 18

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot (x+2)^n}$.

Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot (x+2)^n}{(n+1) \cdot (x+2)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|x+2|}.$$

Следовательно, при $\frac{1}{|x+2|} < 1$ ряд сходится, т. е. при $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$. На границе интервала сходимости, при $|x+2| = 1$, получаем

если $x = -3$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится в силу интегрального признака,

если $x = -1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, область сходимости ряда $x \in (-\infty, -3) \cup [-1, +\infty)$.

Задача № 19. Найти сумму ряда.

1	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+5) \cdot x^{n-1}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+4) \cdot x^{n-1}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n(n+1)}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3) \cdot x^{n-1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n(n+1)}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot x^{n-1}$
9	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot (n+2)}$	10	$\sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \cdot x^{n-1}$
11	$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot x^{n-2}$	12	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)}$
13	$\sum_{n=2}^{\infty} (n+4) \cdot x^{n-2}$	14	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1) \cdot (n+2)}$
15	$\sum_{n=2}^{\infty} (n+3) \cdot x^{n-2}$	16	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1) \cdot (n+2)}$

17	$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2) \cdot x^{n-2}$	18	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+6}}{(n+1) \cdot (n+2)}$
19	$\sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \cdot x^{n-2}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$
21	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n+1}$	22	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^{2n}$
23	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^4)^n}{n+1}$	24	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot x^{3n}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n \cdot x^{n-1}}$	26	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) \cdot x^{4n}$
27	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^3)^n}{n+1}$	28	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+4) \cdot x^{5n}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^5)^{n-1}}{n}$	30	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+5) \cdot x^{2n}$

Образец решения задачи № 19

а) Найти сумму степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$.

Данный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$, и его сумма $S(x)$ имеет непрерывную производную $S'(x)$, причем согласно формуле о почленном дифференцировании степенного ряда

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}.$$

Последний ряд на интервале $(-1, 1)$ сходится к функции $\frac{1}{1+x}$ (сумма геометрической прогрессии), и поэтому

$$S'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Интегрируя полученное равенство, получаем

$$S(x) = \ln(1+x) + C,$$

где C — некоторая константа. Поскольку $S(0) = 0$ и $\ln(1+0) = 0$, то и $C = 0$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

б) Найти сумму степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$.

Данный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. Далее

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)',$$

откуда согласно равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{x-1}$$

(сумма геометрической прогрессии) находим окончательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Задача № 20. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1	$\int_0^{0,1} e^{-6x^2} \cdot dx$	2	$\int_0^1 \cos x^2 \cdot dx$
3	$\int_0^{0,1} \frac{(1 - e^{-2x})}{x} \cdot dx$	4	$\int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[3]{27 + x^3}}$
5	$\int_0^{0,2} \sin(25x^2) \cdot dx$	6	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16 + x^4}}$
7	$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1 + x/2)}{x} \cdot dx$	8	$\int_0^{0,3} e^{-2x^2} \cdot dx$
9	$\int_0^{0,2} \cos(25x^2) \cdot dx$	10	$\int_0^{0,4} \frac{(1 - e^{-x/2})}{x} \cdot dx$
11	$\int_0^{0,1} \sin(100x^2) \cdot dx$	12	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$
13	$\int_0^1 \frac{\ln(1 + x/5)}{x} \cdot dx$	14	$\int_0^{0,2} e^{-3x^2} \cdot dx$
15	$\int_0^{0,5} \cos(4x^2) \cdot dx$	16	$\int_0^{0,2} \frac{(1 - e^{-x})}{x} \cdot dx$

17	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$	18	$\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 \cdot dx$
19	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$	20	$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} \cdot dx$
21	$\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$	22	$\int_0^{0,5} \sin(4x^2) \cdot dx$
23	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$	24	$\int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} \cdot dx$
25	$\int_0^{0,1} \cos(100x^2) \cdot dx$	26	$\int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} \cdot dx$
27	$\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 \cdot dx$	28	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$
29	$\int_0^1 \sin x^2 \cdot dx$	30	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

Образец решения задачи № 20

Вычислить интеграл $\int_0^{1/4} e^{-x^2} \cdot dx$ с точностью до 0,001.

Вспользуемся разложением функции e^t в ряд по степеням t :

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

заменив в этом разложении t на $(-x^2)$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Затем проинтегрируем обе части равенства на отрезке $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} e^{-x^2} dx &= \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots\right) \Big|_0^{1/4} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \dots \end{aligned}$$

Получили ряд лейбнического типа. Так как $\frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = 0,0052 \dots > 0,001$, а $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0,001$, то с точностью до 0,001 имеем: $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245$.

Задача № 21. Заданную на данном интервале функцию $y = f(x)$ разложить в ряд Фурье, или в ряд Фурье по синусам или по косинусам.

1	$f(x) = e^x, x \in (0; \ln 2)$. Разложить в ряд по косинусам.	2	$f(x) = e^x, x \in (0; \ln 2)$. Разложить в ряд по синусам.
3	$f(x) = 2x - 1, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Разложить в ряд по косинусам.	4	$f(x) = 1 - 2x, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Разложить в ряд по синусам.
5	$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \\ 1, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$. Разложить в ряд по синусам.	6	$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \\ 1, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$. Разложить в ряд по синусам.
7	$f(x) = x^2, x \in (-1; 1)$. Разложить в ряд Фурье.	8	$f(x) = 2 x - 1, x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Разложить в ряд Фурье.
9	$f(x) = \sin x , x \in (-\pi; \pi)$. Разложить в ряд Фурье.	10	$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sin x, x \in (-\pi; \pi)$. Разложить в ряд Фурье.
11	$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0; 1) \\ 0, x \in [1; 2] \end{cases}$. Разложить в ряд по синусам.	12	$f(x) = \begin{cases} 2x, x \in [0; 1) \\ 3 - x, x \in [1; 3] \end{cases}$. Разложить в ряд по косинусам.

13	$f(x) = \begin{cases} 3x, x \in [0; 1) \\ 4-x, x \in [1; 4) \end{cases}$ Разложить в ряд по синусам.	14	$f(x) = \begin{cases} 2, x \in [0; 1) \\ 3-x, x \in [1; 3) \end{cases}$ Разложить в ряд по косинусам.
15	$f(x) = \begin{cases} x, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \\ 1-x, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$ Разложить в ряд по синусам.	16	$f(x) = x^2, x \in [0; 1].$ Разложить в ряд по синусам.
17	$f(x) = x \sin x, x \in [0; \pi].$ Разложить в ряд по синусам.	18	$f(x) = x \cos x, x \in [0; \pi].$ Разложить в ряд по косинусам.
19	$f(x) = \begin{cases} 2, x \in (0; 2) \\ 0, x \in [2; 4] \end{cases}$ Разложить в ряд по косинусам.	20	$f(x) = \operatorname{sgn}(x-1) \cdot x, x \in [0; 2).$ Разложить в ряд по синусам.
21	$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x^2, x \in (-1; 1).$ Разложить в ряд Фурье.	22	$f(x) = 3 - x , x \in (-3; 3).$ Разложить в ряд Фурье.
23	$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \cos x, \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$ Разложить в ряд Фурье.	24	$f(x) = 1 - 3x, x \in \left(0; \frac{1}{3}\right).$ Разложить в ряд по синусам.
25	$f(x) = 5x - 1, x \in \left(0; \frac{1}{5}\right).$ Разложить в ряд по косинусам.	26	$f(x) = e^{-x}, x \in (-\ln 2; 0).$ Разложить в ряд по синусам.
27	$f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1), \\ x \in (0; 1).$ Разложить в ряд по синусам.	28	$f(x) = 3 x - 1, \\ x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$ Разложить в ряд Фурье.

29	$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in (0; 1) \\ 0, x \in [1; 2] \end{cases}$ Разложить в ряд по косинусам.	30	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 0, x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$ Разложить в ряд по синусам.
----	--	----	--

Образец решения задачи № 21

Разложим функцию $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $x \in [0, 1]$ в ряд Фурье по косинусам. Как известно, функция sgn определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}.$$

В нашем случае

$$\operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -1; & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0; & x = \frac{1}{2} \\ 1; & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Продолжим эту функцию четным образом на отрезок $[-1; 0]$ и далее на всю числовую прямую по закону периодичности с периодом $T = 2$. График полученной функции $F(x)$ представлен на рис. 4.4.

Коэффициенты ряда Фурье по косинусам рассчитываем по формулам:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

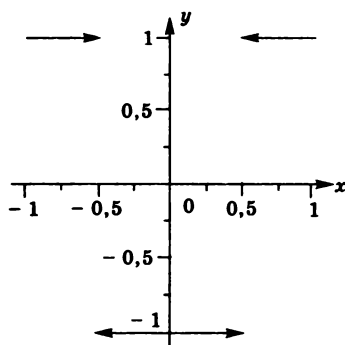


Рис. 4.4.

Для расчетов делаем подстановку $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $x \in [0, 1]$, $T = 2$, получаем ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2 \int_0^1 \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cos \pi n x \, dx = \\
 &= -2 \int_0^{1/2} \cos \pi n x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 \cos \pi n x \, dx = \\
 &= -2 \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^{1/2} + 2 \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_{1/2}^1 = \\
 &= -4 \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\pi n} = \begin{cases} 0, & n = 2N, \quad N = 1, 2, \dots \\ \frac{4(-1)^N}{\pi(2N-1)}, & N = 2N-1, \quad N = 1, 2, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

При $n = 0$ получим $a_0 = \int_0^1 \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0$. Окончательно получаем следующее разложение:

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2N-1} \cos \pi(2N-1)x.$$

ОТВЕТЫ

Ответы к главе 1

- 1.21. $-\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} + 3\ln|x| + x + C$. 1.22. $\frac{14^x}{\ln 14} + C$. 1.23. $\frac{1}{\sqrt{5} \arcsin x + C}$.
 1.24. $\frac{(x+1)^2}{2} + C$. 1.25. $\operatorname{tg} x - x + C$. 1.26. $x + \sin x + C$. 1.27. $-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$. 1.28. $\frac{\pi}{2} x + C$. 1.29. $\frac{\cos^2 x}{2} + C$. 1.30. $\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C$.
 1.31. $\frac{(x+10)^{18}}{18} + C$. 1.32. $-\frac{1}{4} \sqrt[3]{(7-3x)^4} + C$. 1.33. $\frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 1} + C$. 1.34. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{\ln^4 x} + C$. 1.35. $\frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C$. 1.36. $\frac{1}{3} \sin(3x+4) + C$. 1.37. $\frac{1}{5} \cos(2-5x) + C$. 1.38. $-\ln|\cos x| + C$. 1.39. $\ln|\sin x| + C$. 1.40. $\frac{1}{3} \ln|\sin(3x+2)| + C$. 1.41. $e^{\sin^2 x} + C$. 1.42. $2\sqrt{1-e^{-x}} + C$. 1.43. $\frac{1}{4} e^{x^4} + C$. 1.44. $\frac{1}{\ln 3} \arcsin 3^x + C$. 1.45. $\frac{a^{5x}}{5 \ln a} + C$. 1.46. $x - 8 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$. 1.47. $\frac{x}{3} + \frac{13}{9} \ln|3x-4| + C$. 1.48. $\frac{x^3}{3} - 4x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$. 1.49. $\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{15}}\right) + C$. 1.50. $\frac{1}{3} \arcsin(3x+2) + C$. 1.51. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$. 1.52. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$. 1.53. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C$. 1.54. $\frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{6} \sin 3x + C$. 1.55. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$. 1.56. $\frac{3}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$. 1.57. $\cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$. 1.58. $-\frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln|\sin x| + C$. 1.59. $-\frac{1}{44} \cos 11x + \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{1}{36} \cos 9x + \frac{1}{4} \cos x +$

- $+C$. **1.60.** $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$. **1.61.** $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$. **1.62.** $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$.
1.63. $-x \cos x + \sin x + C$. **1.64.** $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.
1.65. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. **1.66.** $\frac{2^x}{\ln 2} \left(x - \frac{1}{\ln 2} \right) + C$.
1.67. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$. **1.68.** $\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$.
1.69. $x \ln(x^2+4) - 2x + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$. **1.70.** $\frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) + C$.
1.71. $x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + C$. **1.72.** $\frac{1}{3} e^x (\sin x - \cos x) + C$.
1.73. $\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$. **1.74.** $\frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.
1.75. $2(\sqrt{x+2} - \ln(1+\sqrt{x+2})) + C$. **1.76.** $(\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+2)) + C$.
1.77. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$. **1.78.** $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$.
1.79. $C - \frac{\sqrt{4-x^2}}{4-x^2} - \arcsin \frac{x}{2}$. **1.80.** $\frac{x}{4} (x^2-2) \sqrt{4-x^2} + C$.
1.81. $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + C$. **1.82.** $\frac{1}{2} \ln |x-1| - 4 \ln |x-2| + \frac{1}{2} \ln |x-3| + C$.
1.83. $\frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln |x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$. **1.84.** $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{1-x} \right| + C$.
1.85. $\frac{1}{2} \ln |x-1| - 2 \ln |x-2| + \frac{3}{2} \ln |x-3| + C$. **1.86.** $\frac{x+3}{2(1-x^2)} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3}{(x+1)^5(x-1)^3} \right| + C$. **1.87.** $\frac{3}{8} \ln |x^3-8| - \frac{1}{8} \ln |x| + C$.
1.88. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \ln \frac{(x^2+2)^2}{|x+1|} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$. **1.89.** $\frac{1}{4} \ln(x^8+1) - \ln |x| + C$. **1.90.** $\frac{1}{6} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$.
1.91. $\frac{1}{5} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x + \operatorname{arctg} 4/3}{2} \right) \right| + C$. **1.92.** $\frac{1}{12} \operatorname{arctg} \left(\frac{4 \operatorname{tg} x}{3} \right) + C$. **1.93.** $\frac{1}{2 - \operatorname{tg}(x/2)} + C$. **1.94.** $\ln \left| \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^{1/3}}{(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1)^{1/6}} \right| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$. **1.95.** $\frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{10}} \right) + C$.
1.96. $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C$. **1.97.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}(\sqrt{2}x) + 1}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}(\sqrt{2}x) + 1} \right| + C$.
1.98. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + C$. **1.99.** $\frac{2}{9} \frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}} + C$.

- 1.100. $\frac{16t^5 - 10t^2}{3(t^3 - 1)^2} + \frac{10}{9} \ln \left| \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - 2t + 1} \right| - \frac{20}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$, где $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$. 1.101. $\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \arcsin x + C$.
- 1.102. $\ln \left(\frac{x}{(1+x^{1/10})^1 0} \right) + \frac{10}{x^{1/10}} - \frac{5}{x^{1/5}} + \frac{10}{3x^{3/10}} - \frac{5}{2x^{2/5}} + C$. 1.103. $\ln \left(\frac{|z^2 - 1|}{z^4 + z^2 + 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2z^2}{\sqrt{3}} \right) + C$, где $z = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{1/3}$. 1.104. $6 \sqrt[3]{(1+x)^2} \left(\frac{(1+x)^2}{16} + \frac{1+x}{5} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} + \frac{1}{4} \right) + C$. 1.105. $2(\sqrt{x+2} - \ln|1 + \sqrt{x+2}|) + C$. 1.106. $x + \frac{6x^{5/6}}{5} + \frac{3x^{2/3}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + C$. 1.107. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(1 + \sqrt[4]{x}) + C$.
- 1.108. $2 \left(\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) \right) + C$. 1.109. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{3 - \sqrt{x+9}}{3 + \sqrt{x+9}} \right| + C$. 1.110. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$. 1.111. $\frac{-3\sqrt{x}}{x^{1/3} + 2} + \frac{6}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right)^{1/6} + C$.
- 1.112. $-\frac{3}{2} \frac{1}{2(x^{1/3} + 2)^2} + C$. 1.113. $\frac{\sqrt{(x^2 - 4)^7}}{7} + \frac{12}{5} \sqrt{(x^2 - 4)^5} + 16 \sqrt{(x^2 - 4)^3} + 64 \sqrt{x^2 - 4} + C$. 1.114. $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3 - 2\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$. 1.115. $-\frac{1}{5} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^3} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + C$. 1.116. $\frac{1}{3} \ln|x^3 + \sqrt{x^6 + 1}| + C$. 1.120. $a^2 x + C$, при $|x| \leq a$, $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} a^3 \operatorname{sgn} x$, при $|x| > a$, где $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.
- 1.121. $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}} + C$. 1.122. $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + C$.

Ответы к главе 2

- 2.84. $\frac{\pi}{4}$. 2.85. $64 \frac{1}{2}$. 2.86. 2,5. 2.87. $3 \ln 2 - \ln 3 + 1,25$. 2.88. $6 \ln 2 - 3 \ln 3 - 0,5$. 2.89. $5 \frac{47}{77}$. 2.90. $0,5(e^{\pi/2} + 1)$. 2.91. $\frac{5e^3 - 2}{27}$. 2.92. $\frac{2e^3 + 1}{9}$. 2.93. $\frac{\pi}{4} - 0,5$. 2.94. $\frac{2}{15}$. 2.95. $\frac{e^{\pi} - 1}{4}$. 2.96. $\frac{1}{6}$. 2.97. $\ln \left(\frac{1 + 5e}{6} \right)$. 2.98. $\ln 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

- 2.99. $0,5 \left(\ln \left(\frac{e^2+4}{5} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{e}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) \right)$. 2.100. $2(|\cos 2x| \cos 2x - |\sin 2x| \sin 2x)$. 2.101. $2x \sin(1+x^4) - \sin 1$. 2.102. $0,25$.
 2.103. $\frac{\pi^2}{4}$. 2.104. e^{-1} . 2.105. 1 . 2.106. 5 . 2.107. $0,5 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$.
 2.111. $0,5$. 2.112. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 2.113. 2 . 2.114. Расходится. 2.115. Расходится. 2.116. Сходится. 2.117. Сходится. 2.118. Расходится. 2.119. Расходится. 2.120. Расходится. 2.121. Сходится. 2.122. Сходится. 2.123. Сходится. 2.124. Сходится. 2.125. Сходится. 2.126. Расходится. 2.127. Расходится. 2.128. Сходится условно. 2.129. Сходится условно. 2.130. Сходится абсолютно. 2.131. Сходится условно при $0 < n < 2$. 2.132. $0,5$. 2.133. $4,5$. 2.134. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2.135. $1,5$. 2.136. $25 \arcsin 0,8 + 4 \cong \cong 27,64$. 2.137. $7 \ln 2,5$. 2.138. $\frac{6}{5\sqrt[3]{4}}$. 2.139. $\frac{3\pi-2}{2}$. 2.140. $\frac{6\pi+4}{3}$. 2.141. $\frac{16(e^2-1)}{e}$. 2.142. $\frac{8ab}{3}$. 2.143. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 2.144. 9π . 2.145. $\frac{8}{15}$. 2.146. π . 2.147. $\frac{11\pi a^2}{8}$. 2.148. a^2 . 2.149. $\frac{9\pi}{2}$. 2.150. $2a^2\pi$. 2.151. $0,25a^2\pi$. 2.152. $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$. 2.153. $1 + 0,5 \ln \left(\frac{6}{5} \right)$. 2.154. $\ln \left(\frac{e^4 - e^{-4}}{e^3 - e^{-3}} \right)$. 2.155. $0,25(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}))$. 2.156. 12 . 2.157. 4 . 2.158. $2\pi a^2$. 2.159. 8π . 2.160. $8a$. 2.161. $\frac{13}{3}$. 2.162. $a\sqrt{2}(e^a - 1)$. 2.163. $\frac{3\pi a}{2}$. 2.164. $\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$. 2.165. $\frac{16a}{3}$. 2.166. $2\sqrt{2}\pi$. 2.167. $\frac{67\pi\sqrt{5}}{48} - \frac{\pi}{32 \ln(2+\sqrt{5})} - \frac{\pi}{6}$. 2.168. $2\pi b \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \right) \times \times \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right)$. 2.169. $\frac{64\pi a^2}{3}$. 2.170. $29,6\pi$. 2.171. $\frac{14\pi}{3}$. 2.172. $2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$. 2.173. $\frac{8\pi a^2 b}{3}$. 2.174. 12π . 2.175. $\frac{\pi}{15}$. 2.176. $\frac{32\pi a^2}{105}$. 2.177. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 2.178. $5\pi^2 a^3$. 2.179. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 2.180. 10^4 . 2.181. 24 . 2.182. $\frac{0,5\alpha^2}{g} \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{\alpha^2} \right)$. 2.183. 6 . 2.184. $70 - \frac{50}{e} \cong 51,606$. 2.185. $M_x = \frac{4}{3}\rho_0$, $M_y = 2\rho_0$. 2.186. $M_x = 10\rho_0$, $M_y = 7,5\rho_0$. 2.187. $M_x = \frac{1}{35}\rho_0$, $M_y = \frac{1}{20}\rho_0$. 2.188. $x_c = 1 - \frac{\operatorname{ch} 1 - 1}{\operatorname{ch} 1}$, $y_c = 0,5 \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 1} + \operatorname{ch} 1 \right)$.

- 2.191. $x_c = \pi a$, $y_c = \frac{4}{3}a$. 2.192. $x_c = \frac{3\pi^2 - 11\pi}{24 - 6\pi}$, $y_c = \frac{12 - \pi^2}{12 - 3\pi^2}$.
 2.193. $x_c = \frac{4a}{3\pi}$, $y_c = \frac{4a}{3\pi}$. 2.194. $x_c = y_c = \frac{1}{3}$. 2.195. $I_x = \rho_0 \frac{(1 + e^2)^{3/2} - 8^{1/2}}{3}$. 2.196. $I_x = 0,25\pi ab^3 \rho_0$, $I_y = 0,25\pi ab^3 \rho_0$.
 2.197. $I_x = \frac{ab^3 \rho_0}{12}$, $I_y = \frac{\pi ab^3 \rho_0}{12}$. 2.198. $I_x = \frac{(a + 3b)\rho_0 h^3}{12}$.
 2.199. $I = \frac{\pi \rho_0 R^4 h}{10} = 0,3mR^2$, где m — масса конуса. 2.200. $I = 0,5\pi \rho_0 \int_0^h (f(x))^4 dx$. 2.201. $A = q_1 q_2 \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_k} \right)$. 2.202. $A = \frac{\rho_0 g \pi r^2 h^2}{12}$, $A = \frac{\rho_0 g h^2 a^2}{12}$. 2.203. 1) $A = \frac{\rho_0 g \pi r^2 h^2}{2}$; 2) $A = \rho_0 g \pi r^3 h$; 3) $A = \rho_0 g \pi r^2 h^2$; 4) $A = \frac{\rho_0 g \pi r^4}{4}$. 2.204. $A = \frac{4}{3} \pi r^2 (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) g (h - 2r) + \frac{4}{3} g (2\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) \pi r^4$. 2.205. $A = \int_{V_0}^{V_1} \frac{P_0 V_0^k}{V^k} dV = P_0 V_0 \frac{\left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{k-1} - 1}{k-1}$. 2.206. $\frac{3}{4} \frac{\pi \rho_0 g \omega^2 r^5}{5}$.
 2.207. $\frac{E = m r^2 \omega^2}{4}$. 2.208. $E = \frac{\rho_0 d h^3 \omega^2 a}{24}$. 2.209. $E = \frac{m r^2 \omega^2}{4}$.
 3.210. $E = \frac{3m r^2 \omega^2}{20}$. 2.211. $Q = 0,48 I_0^2 R \frac{\pi}{\omega}$. 2.212. $S_1 - S_2 = 0,5 \frac{m}{\mu} \alpha \left(\frac{\mu P_1}{Rm} \right)^2 \left(\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^2 - 1 \right) + \frac{m}{\mu} \beta \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$. 3.213. $P = 2\pi \int_{-r}^0 (h+x) (-\sqrt{r^2 - x^2}) \frac{2dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2\pi \int_0^r (h+x) \sqrt{r^2 - x^2} \frac{2dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\pi (h+x)^2 \Big|_{-r}^0 + 2\pi (h+x)^2 \Big|_0^r = 4r h \pi$. 2.214. $P = \pi \rho_0 g h^2$.
 2.215. $\rho_0 g \pi r^2 h$.

Ответы к главе 3

- 3.51. $D(u) = \{x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$ — множество точек E^3 , лежащих вне открытого шара $x^2 + y^2 + z^2 < 4$. 3.52. $D(z) = \{x, y : x^2 + y^2 \geq 9\}$ — множество точек E^2 , лежащих вне открытого круга $x^2 + y^2 < 9$. 3.53. $D(z) = \{x, y : -2x \leq y \leq 2x, x > 0\}$ — часть плоскости, лежащая между двумя лучами $y = 2x$ и $y = -2x$, выходящими из начала координат, включая и сами лучи. 3.54. Та же область, что и в 3.53, но без точек, лежащих на лучах $y = 2x$ и $y = -2x$. 3.55. $D(z) = \{(x, y) : x > -1, -x \leq y \leq x+2\} \cup \{(x, y) : x < -1, x+2 \leq y \leq -x\}$ — часть плоскости, лежащая между прямыми $y = x+2$ и $y = -x$, исключая точку пересечения $(-1, 1)$.

3.56. $D(z) = E^2$. **3.57.** $D(z)$ есть шаровой слой, заключенный между двумя сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, включая и точки на сферах. **3.58.** Прямые $y = Cx + 2C - 1$, где $z = C$ — постоянная.

3.59. Кривые $y = \frac{\ln C + 2x}{\ln x}$, где $z = C$ — постоянная. **3.60.** Эллипс $4Cx^2 + 9Cy^2 = 1$, где $z = C$ — постоянная. **3.61.** Прямые, параллельные оси OX , если $z < 0$; стороны углов, параллельные координатной оси OX и положительной полуоси OY , если $z > 0$; положительная полуось OY , если $z = 0$.

3.62. Эллипсоид $\frac{x^2}{4C} + \frac{y^2}{9C} + \frac{z^2}{16C} = 1$, $C > 0$. **3.63.** Плоскости $x + y - \frac{\ln C}{\ln 4} = 0$, $C > 0$. **3.64.** 2. **3.65.** а.

3.66. е. **3.67.** 1. **3.68.** Предела нет. **3.69.** 0. **3.70.** Предела нет.

3.71. $\frac{1}{2}$. **3.72.** Непрерывна всюду, кроме точки $(0, 0)$. **3.73.** Непрерывна всюду, кроме точки $(0, 1)$. **3.74.** Непрерывна всюду, кроме точек прямых $x = n$, $y = m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$. **3.75.** Непрерывна всюду, кроме точек прямой $y = \frac{x}{2}$. **3.76.** Непрерывна всюду, кроме точек

параболы $y = \frac{x^2}{2}$. **3.77.** В точке $(0, 0)$ устранимый разрыв. **3.78.** $z'_x = xy^2(2y - 3x)$, $z'_y = x^2y(3y - 2x)$. **3.79.** $z'_x = 24xy^4(3x^2y^4 - y^3 + 8)^3$, $z'_y = 12(3x^2y^4 - y^3 + 8)^3y^2(4x^2y - 1)$. **3.80.** $z'_x = -\frac{2y}{x^2} \sin \frac{2y}{x^2}$, $z'_y = \frac{2}{x} \sin \frac{2y}{x}$. **3.81.** $z'_x = x^{y^x}y^x(\ln x \ln y + 1)$, $z'_y = x^{y^x+1} \ln x y^{x-1}$.

3.82. $u'_x = z^y x^{z^y-1}$, $u'_y = x^{z^y} z^y \ln x$, $u'_z = x^{z^y} y z^{y-1} \ln x$. **3.83.** $z'_x =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{xy + \sqrt{xy + \sqrt{xy}}}} \left(y + \frac{1}{2\sqrt{xy + \sqrt{xy}}} \left(y + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \right) \right), \quad z'_y =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{xy + \sqrt{xy + \sqrt{xy}}}} \left(x + \frac{1}{2\sqrt{xy + \sqrt{xy}}} \left(x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \right) \right).$$
 3.84. $u'_x =$

$$= \frac{2x}{1 + \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u'_y = \frac{2y}{1 + \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u'_z = \frac{2z}{1 + \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$
 3.85. $u'_x =$

$$= -z^{y/x} \frac{y}{x^2} \ln z, \quad u'_y = z^{y/x} \frac{1}{x} \ln z, \quad u'_z = \frac{y}{x} z^{y/x-1}.$$
 3.86. $z'_x = (x + y)^{x^2+y^2} \left(2x \ln(x+y) + \frac{x^2+y^2}{x+y} \right)$, $z'_y = (x+y)^{x^2+y^2} \left(2y \ln(x+y) + \frac{x^2+y^2}{x+y} \right)$. **3.87.** $u'_x = 2x(y^2 + z^2)$, $u'_y = 2y(x^2 + z^2)$, $u'_z = 2z(x^2 + y^2)$.

3.88. $u'_x = \frac{1}{x + \ln(y + \ln z)}$, $u'_y = \frac{1}{x + \ln(y + \ln z)} \frac{1}{y + \ln z}$,

$$\begin{aligned}
 u'_z &= \frac{1}{x + \ln(y + \ln z)} \cdot \frac{1}{y + \ln z} \cdot \frac{1}{z}. \quad \mathbf{3.89.} \quad u'_x = u'_y = u'_z = (x + y + z)^{x+y+z}(1 + \ln(x + y + z)). \quad \mathbf{3.90.} \quad z'_x = \frac{\partial f}{\partial u} 3x^2 + \frac{\partial f}{\partial v} 3x^2 y^3, \quad z'_y = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial u} 3y^2 + \frac{\partial f}{\partial v} 3x^3 y^2, \quad \text{где } u = x^3 + y^3, \quad v = x^3 y^3. \quad \mathbf{3.91.} \quad z'_x = \\
 &= \frac{2e^{2x} + 2e^{2\sin^2 x} \sin 2x}{e^{2x} + e^{2\sin^2 x}}. \quad \mathbf{3.92.} \quad \frac{2 + 8t^3 - 12t^5}{\sin^2(2t + 2t^4 - 2t^6)}. \quad \mathbf{3.93.} \quad u'_t = 3\sin t \times \\
 &\times \cos t (\sin t - \cos t) + 6\sin^2 2t \cos 2t + 3t^2. \quad \mathbf{3.94.} \quad z'_x = 2^{x^2 + \ln^2 x + 1} \times \\
 &\times \ln x \left(x + \frac{\ln x}{x} \right). \quad \mathbf{3.95.} \quad z'_x = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{1}{x + y} + \frac{\partial f}{\partial v} y, \quad z'_y = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{1}{x + y} + \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial v} x, \quad u = \ln(x + y), \quad v = xy. \quad \mathbf{3.96.} \quad r. \quad \mathbf{3.97.} \quad -r^2 \sin \theta. \quad \mathbf{3.102.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
 &= 4x^2 \frac{3y^4 - x^4}{(x^4 + y^4)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{3x^4 - y^4}{(x^4 + y^4)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -16 \frac{x^3 y^3}{(x^4 + y^4)^2}. \\
 \mathbf{3.103.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \ln x). \\
 \mathbf{3.104.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \\
 &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}. \quad \mathbf{3.105.} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 12 \frac{x^4 - 6x^2 y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^4}. \\
 \mathbf{3.106.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= z^{xy-1} y(1 + xy \ln z), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y} = z^{xy-1} (1 + 3xy \ln z + \\
 &+ (xy^2) \ln^2 z), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} = yz^{xy-2} (2xy - 1 + xy(xy - 1) \ln z). \\
 \mathbf{3.107.} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y} &= e^{xyz} ((xyz)^2 + 3xyz + 1)^2 \ln^2 z. \quad \mathbf{3.109.} \quad Lu = \\
 &= \frac{1}{2t} \left(\frac{d^2 u}{dv^2} + v \frac{du}{dv} \right). \quad \mathbf{3.110.} \quad Lu = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \times \\
 &\times \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad \mathbf{3.113.} \quad y''_{tt} - 3y'_t + y. \quad \mathbf{3.114.} \quad y''_{tt} + ky. \\
 \mathbf{3.115.} \quad -\frac{vv'' + 2(v')^2 + 4v^2}{v^4}. \quad \mathbf{3.120.} \quad z'_y y + z'_x x = y. \quad \mathbf{3.121.} \quad z''_{xy} = \\
 &= 0. \quad \mathbf{3.122.} \quad zz''_{xy} = z'_x z'_y. \quad \mathbf{3.123.} \quad z''_{xx} x^2 + z''_{yy} y^2 + z'_x x + z'_y y = 0. \\
 \mathbf{3.124.} \quad z''_{xx} - z''_{yy} &= 0. \quad \mathbf{3.125.} \quad y' = \frac{y}{x} \frac{y - e^{xy} + \sin(xy)}{e^{xy} - \sin(xy) - 2y}. \quad \mathbf{3.126.} \quad y' = \\
 &= \frac{y^2(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}. \quad \mathbf{3.127.} \quad y' = \frac{y}{y+1}, \quad y'' = \frac{y}{(y+1)^3}. \quad \mathbf{3.128.} \quad y' = \\
 &= \frac{y-x}{y+x}, \quad y'' = -\frac{x^2 + y^2}{(x+y)^3}. \quad \mathbf{3.129.} \quad z'_x = \frac{z}{x(z-1)}, \quad z'_y = \frac{z}{y(z-1)}. \\
 \mathbf{3.130.} \quad z'_x &= \frac{z}{x} \frac{1 - xy \ln z}{xy - z \ln z}, \quad z'_y = \frac{z}{y} \frac{z - xy \ln z}{xy - z \ln z}. \quad \mathbf{3.131.} \quad z'_x = \frac{2x}{z+1}, \\
 z'_y &= \frac{2-y}{z+1}, \quad z''_{xx} = 2 \frac{(z+1)^2 - 2x^2}{(z+1)^3}, \quad z''_{xy} = \frac{2x}{(z+1)^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z''_{yy} &= 2 \frac{(z+1)^2 + (2-y)^2}{(z+1)^3}. \quad \mathbf{3.132.} \quad z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z}, \quad z''_{xx} = \\
&= -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{xy}{z^3}, \quad z''_{yy} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}. \quad \mathbf{3.133.} \quad z = \frac{1}{169} (2x + \\
&+ 3y) (2y - 3x). \quad \mathbf{3.134.} \quad z = a \cdot \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{y}{x} \right). \quad \mathbf{3.135.} \quad z'_x = \frac{x}{2} = \\
&= \frac{1}{2} (u^2 + v^2), \quad z'_y = -\frac{y}{2} = -\frac{1}{2} (u^2 - v^2). \quad \mathbf{3.136.} \quad z'_x = \frac{3x}{32} (x^2 - \\
&- y^2)^2, \quad z'_y = -\frac{3y}{32} (x^2 - y^2)^2. \quad \mathbf{3.137.} \quad z'_x = 2uve^{-u} (v \cos v - u \sin v), \\
&z'_y = 2uve^{-u} (v \sin v + u \cos v). \quad \mathbf{3.138.} \quad dz = \frac{2x dx + 2y dy}{x^2 + y^2}, \quad d^2z = \\
&= \frac{2((y^2 - x^2) dx^2 - 4xy dx dy + (x^2 - y^2) dy^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \mathbf{3.139.} \quad dz = 2e^{x^2 y^2} \times \\
&\times (x dx + y dy), \quad d^2z = 2e^{x^2 y^2} ((1 + 2x^2) dx + 4xy dx dy + (1 + 2y^2) dy^2). \\
\mathbf{3.140.} \quad du &= e^{xyz} (yz dx + xz dy + xy dz), \quad d^2u = e^{xyz} ((yz)^2 dx^2 + \\
&+ (xz)^2 dy^2 + (xy)^2 dz^2 + 2z(1 + xyz) dx dy + 2y(1 + xyz) dx dz + \\
&+ x(1 + xyz) dy dz). \quad \mathbf{3.141.} \quad du = 2f'_\xi (x dx + y dy) + 2f'_\eta (y dy - x dx) + \\
&+ 2f'_\zeta (y dx + x dy), \quad d^2u = 4f''_{\xi\xi} (x dx + y dy)^2 + 4f''_{\eta\eta} (x dx - y dy)^2 + \\
&+ 4f''_{\zeta\zeta} (y dx + x dy)^2 + 8f''_{\xi\eta} (x^2 dx^2 - y^2 dy^2) + 8f''_{\xi\zeta} (x dx + y dy) (y dx + \\
&+ x dy) - 8f''_{\eta\zeta} (x dx - y dy) (y dx + x dy) + 2f'_\xi (dx^2 + dy^2) + 2f'_\eta (dx^2 - \\
&- dy^2) + 4f'_\zeta dx dy. \quad \mathbf{3.142.} \quad du = 2(f'_\xi x dx + f'_\zeta y dy + f'_\eta z dz), \quad d^2u = \\
&= 4(f''_{\xi\xi} x^2 dx^2 + f''_{\xi\zeta} y^2 dy^2 + f''_{\eta\eta} z^2 dz^2 + 2f''_{\xi\zeta} xy dx dy + 2f''_{\eta\eta} xz dx dz + \\
&+ 2f''_{\xi\eta} yz dy dz) + 2(f'_\xi dx^2 + f'_\zeta dy^2 + f'_\eta dz^2). \quad \mathbf{3.143.} \quad du = \frac{1}{r} f'_r (x dx + \\
&+ y dy + z dz), \quad d^2u = \frac{1}{r^2} f''_{rr} (x dx + y dy + z dz)^2 + \frac{f'_r}{r^3} ((r^2 - x^2) dx^2 - \\
&- (r^2 - y^2) dy^2 + (r^2 - z^2) dz^2 - 2(xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz)). \\
\mathbf{3.144.} \quad du &= f'_\xi y dx + (f'_\xi x + f'_\eta z) dy + f'_\eta y dz, \quad d^2u = f''_{\xi\xi} y dx^2 + \\
&+ (f''_{\xi\xi} x^2 + 2f''_{\xi\eta} xz + f''_{\eta\eta} z^2) dy^2 + f''_{\eta\eta} y^2 dz^2 + 2(f''_{\xi\xi} xy + f''_{\xi\eta} yz) dx dy + \\
&+ 2(f''_{\xi\eta} xy + 2f''_{\eta\eta} z^2 + f'_\eta) dy dz + 2f''_{\xi\eta} y^2 dx dz. \quad \mathbf{3.145.} \quad du = (2f'_x + 3f'_y t + \\
&+ 4f'_z t^2) dt, \quad d^2u = (4f''_{xx} t^2 + 12f''_{xy} t^3 + 9f''_{yy} t^6 + 16f''_{zz} t^6 + 24f''_{yz} t^5 + \\
&+ 2f'_x + 6f'_y t + 12f'_z t^2) dt^2. \quad \mathbf{3.146.} \quad dz = \frac{1}{2} (x dx + y dy). \quad \mathbf{3.147.} \quad dz = \\
&= -\frac{z(y dx + x dy)}{z^2 + xy}, \quad d^2z = \frac{2z}{(z^2 + xy)^3} (xy^3 dx^2 + (x^2 y^2 - 2z^2 xy + \\
&+ z^4) dx dy + x^3 y dy^2). \quad \mathbf{3.148.} \quad dz = \frac{(f'_x g'_t - f'_t g'_x) dx + (f'_y g'_t - f'_t g'_y) dy}{f'_z g'_t - f'_t g'_z} = \\
&= -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, t)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, t)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}}. \quad \mathbf{3.149.} \quad \Delta z \approx 2,44, \quad \overset{*}{dz} \approx 2. \quad \mathbf{3.150.} \quad \Delta z \approx \\
&\approx -0,298, \quad dz \approx 0,0. \quad \mathbf{3.151.} \quad 0,003. \quad \mathbf{3.152.} \quad 1,09. \quad \mathbf{3.153.} \quad -0,0314. \\
\mathbf{3.154.} \quad &981,72. \quad \mathbf{3.155.} \quad \text{Диагональ уменьшится на 1,4 мм, пло-} \\
&\text{щадь уменьшится на 0,008 м}^2. \quad \mathbf{3.156.} \quad \Delta \approx 22,5 \text{ м}^3, \quad \delta \approx 12\%.
\end{aligned}$$

- 3.157.** $\Delta \approx 1 \text{ м}$, $\delta \approx 3,8\%$. **3.158.** $\frac{\partial z}{\partial l} = 7(\sin \alpha + \cos \alpha)$; 1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 2) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. **3.159.** 1) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial l} = 57 \frac{3}{13}$; 3) $\text{grad } u(M) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. **3.160.** $\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$, $\text{grad } u(M) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $|\text{grad } u(M)| = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **3.161.** $\frac{\partial u}{\partial l} = 2e^{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2}$. **3.162.** $4x+4y-z-8=0$, $\frac{x-2}{4} + \frac{y-2}{4} + \frac{z-8}{-1} = 0$. **3.163.** $3x+4z-25=0$, $x=0$, $\frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$ или $x=0$, $y = \frac{3}{4} - z$. **3.164.** 1) $6u_0v_0(u+v) - 3(u_0+v_0)(u^2+v^2) + 2(u^3+v^3) + (u_0+v_0)(u_0^2-4u_0v_0+v_0^2) = 0$; 2) $3(x_0^2-y_0)x - x_0(y+y_0) + 2z+4z_0 = 0$. **3.165.** $x+y+z = \pm \frac{196}{7}$, $x+y+z = \pm 28$. **3.167.** $x_0 = \pm \frac{a^2}{d}$, $y_0 = \pm \frac{b^2}{d}$, $z_0 = \pm \frac{c^2}{d}$, где $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **3.168.** $z_{\min} = 0$ при $x = 2$, $y = 3$. **3.169.** Нестрогий минимум $z = 0$ в точках прямой $2x - 3y + 4 = 0$. **3.170.** $z_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y = 0$; седло $z = \frac{1}{2}$ при $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$. **3.171.** Минимум $z = 7 - 10 \ln 2$ при $x = 2$, $y = 1$. **3.172.** Минимум $u = 24$ при $x = -2$, $y = -1$, $z = -3$. **3.173.** Минимум $u = 4$ при $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -1$. **3.174.** Максимум $u = -6913$ при $x = -144$, $y = -24$, $z = 1$. **3.175.** $z_{\max} = \frac{1}{24}$ при $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{6}$. **3.176.** $z_{\min} = \frac{1}{25}$, при $x = \frac{3}{25}$, $y = \frac{4}{25}$. **3.177.** $z_{\min} = -\lambda_1$ при $x = \mp \frac{RB}{\sqrt{B^2 + (A + \lambda_1)^2}}$, $y = \pm \frac{R(A + \lambda_1)}{\sqrt{B^2 + (A + \lambda_1)^2}}$, $z_{\max} = -\lambda_2$ при $x = \pm \frac{RB}{\sqrt{B^2 + (A + \lambda_2)^2}}$, $y = \mp \frac{R(A + \lambda_2)}{\sqrt{B^2 + (A + \lambda_2)^2}}$, где $\lambda_1 > \lambda_2$ — корни уравнения $\lambda^2 + \lambda(A + C) + AC - B^2 = 0$. **3.178.** $u_{\min} = 4$ при $x = \pm 2$, $y = z = 0$. **3.179.** $z_{\min} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$, $y = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $z_{\max} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = -\frac{5\pi}{8} + \pi k$, $y = -\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.180.** Наибольшее и наименьшее значения функции достигаются на границах области. Наибольшее $z = 9$ в точках $(3, 0)$, $(-3, 0)$. Наименьшее $z = -9$ в точках $(0, 3)$, $(0, -3)$. Стационарная точка $(0, 0)$ экстремума не дает. **3.181.** Наибольшее значение $z = 20$ достигается на границе $x = 2$, $0 \leq y \leq 1$; наименьшее значение $z = -4$ достигается в точке $(0, 1)$. Стационарная точка $(-6, 4)$ лежит вне области. **3.182.** Наименьшее значение $z = 0$ достигается в точке $(0, 0)$. Наибольшее $z = \frac{3}{e}$ — в точках $(\pm 1, 0)$. **3.183.** Наименьшее

значение $u = 0$ достигается в точке $(0, 0, 0)$, наибольшее значение $u = 576$ достигается в точке $(0, 0, \pm 8)$.

Ответы к главе 4

4.45. Расходится. 4.46. Сходится. 4.47. Расходится. 4.48. Сходится. 4.49. Сходится. 4.50. Расходится. 4.51. Сходится. 4.52. Расходится. 4.53. Сходится. 4.54. Сходится. 4.55. Расходится. 4.56. 1) $p > 1$, сходится $\forall \alpha$; 2) $p < 1$, расходится $\forall \alpha$; 3) $p = 1$ при $\alpha > 1$ — сходится, при $\alpha < 1$ — расходится. 4.57. Расходится. 4.58. Сходится. 4.59. Сходится. 4.60. Расходится. 4.61. Сходится. 4.62. Расходится. 4.63. Сходится. 4.64. Сходится. 4.65. Расходится. 4.66. Сходится. 4.67. Сходится. 4.68. Сходится. 4.69. Сходится. 4.70. Сходится. 4.71. Сходится. 4.72. Расходится. 4.73. Сходится. 4.74. Расходится. 4.75. Расходится. 4.76. Сходится. 4.77. $0 < a < e$ — сходится, $a \geq e$ — расходится. 4.78. Сходится. 4.79. Сходится. 4.80. Расходится. 4.81. Сходится абсолютно. 4.82. Сходится условно. 4.83. Сходится абсолютно. 4.84. Сходится абсолютно. 4.85. Сходится условно. 4.86. Сходится. 4.87. Сходится. 4.88. Сходится абсолютно. 4.89. $|a| > 1$ — сходится абсолютно, $|a| = 1$ — сходится условно, $|a| < 1$ — расходится. 4.90. а) 0,96; б) 0,04. 4.91. $x \leq 0$ — расходится, $0 < x \leq 1$ — сходится условно, $x > 1$ — сходится абсолютно. 4.92. $\frac{1}{3} < |x| < 1$ — сходится абсолютно. 4.93. $|x| < 5$ — сходится абсолютно. 4.94. $x > 0$ — сходится абсолютно. 4.95. $|x| > 1$ — сходится абсолютно. 4.96. $|x| > 1$ — сходится. 4.97. $\frac{1}{e} \leq x < e$ — сходится. 4.98. $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ — сходится. 4.99. Сходится для всех $x \in \mathbb{R}$. 4.100. $R = 3$, $|x| \leq 3$ — сходится абсолютно. 4.101. $R = 5$, $|x| \leq 5$ — сходится абсолютно. 4.102. $R = 0$ — сходится при $x = 7$. 4.103. $R = 1$, $|x| \leq 1$ — сходится абсолютно. 4.104. $R = \frac{1}{3}$, $|x| \leq \frac{1}{3}$ — сходится абсолютно. 4.105. $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — сходится. 4.106. $R = 0$, $x = 0$ — сходится. 4.107. $R = 1$, $x \in [3; 5]$ — сходится. 4.108. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!} (-1)^n$. 4.109. $f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} \frac{x^4}{n}\right)$; $R = 1$; сходится при $x \in (-1; 1]$. 4.110. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!}$; $R = +\infty$. 4.111. $f(x) = -\frac{1}{4}x$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{4^n}; R=2. \quad \mathbf{4.112.} \quad f(x) = 3 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n (x-1)^n}{n 8^n}; \\
& R = \frac{8}{5}. \quad \mathbf{4.113.} \quad \text{a) } 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots, \quad \text{б) } 2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + \dots \\
& \mathbf{4.114.} \quad \text{a) } -1 + (x-2) - (x-2)^2 + \dots, \quad \text{б) } x - 1 + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \\
& + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \dots. \quad \mathbf{4.115.} \quad \text{a) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n 10}{n!}, R = +\infty; \quad \text{б) } \cos 1 \times \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty. \quad \mathbf{4.116.} \quad \text{a) } x + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!}, R = +\infty; \quad \text{б) } x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}, \\
& R = 1, |x| \leq 1; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, R = 2, |x| < 2; \quad \text{г) } 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (2 + \\
& + 2^n) \frac{x^n}{n!}, R = +\infty. \quad \mathbf{4.117.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1+x)^3}. \\
& \mathbf{4.118.} \quad \int_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \approx 0,2800. \quad \mathbf{4.119.} \quad \text{a) } 0,9554; \quad \text{б) } 0,3894; \\
& \text{в) } 0,1973; \quad \text{г) } 3,1072. \quad \mathbf{4.120.} \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+3}}{(2n-1)(2n+3)}, \\
& R = 1, |x| \leq 1; \quad \text{б) } x + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{3x^9}{8 \cdot 9} + \dots, R = 1, |x| < \\
& < 1; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)! 2n}, R = \infty; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, R = \\
& = 1, |x| \leq 1. \quad \mathbf{4.121.} \quad \text{a) } 0,500; \quad \text{б) } 0,201; \quad \text{в) } 0,946; \quad \text{г) } 0,072; \\
& \text{д) } 0,047. \quad \mathbf{4.122.} \quad f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi n x. \quad \mathbf{4.123.} \quad f(x) = \\
& = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2}. \quad \mathbf{4.124.} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \\
& - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx. \quad \mathbf{4.125.} \quad \frac{e^4-1}{2e^2} \left[\frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4+n^2\pi^2} \times \right. \\
& \times \left(2 \cos \frac{\pi n x}{2} - \pi n \sin \frac{\pi n x}{2} \right) \Big]. \quad \mathbf{4.126.} \quad \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos nx \right), \\
& \text{при } x=0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}, \quad \text{при } x=\pi \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика: В 3 т. М.: Физматлит, 2005 г.
2. *Виноградова И. А., Олехник С. П., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Изд-во МГУ, 1988 г.
3. *Гусак А. А.* Задачи и упражнения по высшей математике. Минск. Высшая школа, 1973 г.
4. *Данко П. Е., Попов А. Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. М.: ОНИКС, 2006 г.
5. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Физматлит, 2005 г.
6. *Ефимов А. В., Демидович Б. П.* Сборник задач по высшей математике для ВТУЗов, в 4-х частях. М.: Физматлит, 2004 г.
7. *Запорожец Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1964 г.
8. *Иванова И. Е.* Дифференцирование функций одного переменного. Учебник для втузов. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1998 г.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 т. М.: Физматлит, 2005 г.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2006 г.
11. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2006 г.

12. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике. Изд-во Харьковского Гос. университета, 1972 г.
13. *Кручкович Г. И.* Сборник задач по курсу высшей математики. М.: Высшая школа, 1973 г.
14. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ: В 2 т. М.: Физматлит, 2006 г.
15. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике. СПб.: Лань, 2007 г.
16. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятности и мат. статистике. Минск. Высшая школа, 1969 г.
17. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике для втузов. М.: Наука, 1987 г.
18. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. М.: Интеграл-Пресс, 2006 г.
19. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Физматлит, 2006 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
------------------------------	----------

Глава 1.

Неопределенный интеграл	5
1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла	5
1.1.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл	5
1.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла	6
1.2. Основные методы интегрирования	8
1.2.1. Интегрирование заменой переменной	8
1.2.2. Интегрирование по частям	11
1.3. Интегрирование некоторых классов элементарных функций	13
1.3.1. Интегрирование рациональных дробей	13
1.3.2. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений	23
1.3.3. Интегрирование некоторых иррациональных выражений	29
1.4. Задачи к главе 1	35

Глава 2.

Определенный интеграл	39
2.1. Определение и свойства определенного интеграла	39
2.2. Решение типовых задач на вычисление определенных интегралов	45
2.3. Несобственные интегралы	55
2.3.1. Несобственные интегралы первого рода	55
2.3.2. Решение типовых задач на нахождение несобственных интегралов первого рода	59

2.3.3. Несобственные интегралы второго рода	64
2.3.4. Решение типовых задач на нахождение несобственных интегралов второго рода	67
2.4. Геометрические приложения определенных интегралов	73
2.4.1. Решение типовых задач	78
2.5. Механические и физические приложения определенных интегралов	86
2.5.1. Алгоритм получения зависимостей дифференциалов физических величин от дифференциалов своих аргументов	86
2.5.2. Решение типовых задач	93
2.6. Задачи к главе 2	104

Глава 3.

Дифференциальное исчисление. Функции нескольких переменных

3.1. Основные определения	114
3.2. Предел и непрерывность	121
3.3. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных	128
3.4. Дифференцирование сложных и неявных функций	146
3.5. Производная по направлению и градиент функции	162
3.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	165
3.7. Экстремумы функций нескольких переменных	169
3.8. Задачи к главе 3	181

Глава 4.

Ряды	189
4.1. Числовые ряды	189
4.1.1. Определение числового ряда. Сходимость ряда	189
4.1.2. Признаки сходимости числовых рядов	191
4.2. Функциональные ряды. Степенные ряды	195
4.2.1. Понятие функционального ряда	195
4.2.2. Степенные ряды	196
4.3. Ряды Фурье	199
4.4. Решение типовых задач	204
4.5. Задачи к главе 4	230

Расчетно-графические задания	234
---	------------

Ответы	273
-------------------------	------------

Литература	284
-----------------------------	------------