ПРАКТИКУМ И ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Типовые расчеты

ЛАНЬ

· САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
· МОСКВА
· КРАСНОДАР
2013

ПРАКТИКУМ
и индивидуальные задания по векторной алгебре и аналитической геометрии (ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ)

ДОПУЩЕНО
НМС по математике в качестве учебного пособия для специальностей 080100 — «Экономика», 140100 — «Теплоэнергетика и теплотехника», 140400 — «Электроэнергетика и электротехника», 221400 — «Управление качеством», 221700 — «Стандартизация и метрология», 230400 — «Информационные системы и технологии», 190300 — «Подвижной состав железных дорог», 190901 — «Системы обеспечения движения поездов»

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2013

ББК 22.251.5я73
П 69

П 69 Практикум и индивидуальные задания по векторной алгебре и аналитической геометрии (типовые расчеты): Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 288 с.: ил. (+ вклейка, 4 с.). — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1485-7

Настоящий практикум представляет собой сборник индивидуальных заданий (типовых расчетов) из курса высшей математики по темам «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия». Излагаемые основные понятия сопровождаются большим количеством примеров с подробными решениями. Первая глава практикума содержит индивидуальные задания по теме «Скалярное, векторное и смешанное произведения». Вторая глава посвящена аналитической геометрии на плоскости и содержит индивидуальные задания по следующим темам: полярная система координат, прямая на плоскости, кривые второго порядка. Третья глава содержит необходимый материал по аналитической геометрии в пространстве: плоскость в пространстве, прямая в пространстве, прямая и плоскость в пространстве, поверхности второго порядка. Каждый типовой расчет включает в себя несколько заданий. Всего практикум содержит восемь типовых расчетов по 30 вариантов каждый.

Предназначено для студентов и преподавателей технических, экономических, аграрных и других вузов. Практикум также может быть использован учителями для проведения дополнительных занятий со школьниками.

ББК 22.251.5я73

Рецензенты:

А. Н. ЗУБКОВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и геометрии ОмГПУ;
Л. Г. КУЗНЕЦОВА — доктор педагогических наук, зав. кафедрой физико-математического образования Нижневартовского государственного гуманитарного университета;
В. А. КАРАСЕВ — кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики НИТУ МИСиС;
А. Б. БУДАК — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики МГУ.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2013
© Коллектив авторов, 2013
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие состоит из трех глав. **Первая глава** посвящена разделу «Векторная алгебра». *Первый* пункт главы содержит основные понятия векторной алгебры, свойства векторов и линейных операций над ними. Теоретические сведения, необходимые для решения задач по теме «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов», и примеры подробного решения основных типовых задач приведены во *втором*, *третьем* и *четвертом* пунктах соответственно. В *пятом* пункте данной главы предложены 30 вариантов типового расчета, который содержит десять задач двух уровней сложности: под буквой «а» простые задания, под буквой «б» усложненные.

Вторая глава посвящена разделу «Аналитическая геометрия на плоскости». Она содержит краткие теоретические сведения по теме «Система координат на плоскости», «Полярная система координат», «Прямая на плоскости», «Кривые второго порядка».

Цель *шестого и седьмого* пунктов данной главы — помочь первокурсникам в изучении особенностей полярной системы координат, методов построения точек и кривых в полярной системе координат. Здесь рассматриваются прямоугольные декартовы и полярные координаты точек на плоскости, приводятся формулы, устанавливающие связь между ними. Также содержатся краткие теоретические сведения о некоторых кривых в полярной системе координат, даны определения и уравнения окружности, спирали Архимеда, розы, кардиоиды, лемнискаты Бернулли, примеры их схематичного изображения. Далее приведены правила построения кривых в полярной системе координат и справочный материал из школьного курса математики по теме «Решение тригонометрических неравенств».

Типовой расчет по теме «Полярная система координат» включает в себя 30 заданий. Задания соответствуют различным уровням сложности. Первые два имеют простой уровень и для их решения достаточно лишь усвоения начального теоретического материала. Решение третьего, четвертого и пятого заданий требуют определенных практических навыков и могут быть отнесены ко второму уровню сложности. Задания типового расчета подобраны таким образом, что их выполнение обеспечивает закрепление навыков решения стандартных задач: построение точек и кривых в полярной системе координат, определение по виду уравнения вида кривой. Приведены примеры решения задач из предлагаемого студентам типового расчета. Задачи сопровождаются подробными объяснениями, которые должны помочь студенту при решении своего варианта.

Восьмой, девятый и десятый пункты помогут первокурсникам в изучении одного из основных геометрических объектов — прямой на плоскости. Для большей геометрической наглядности исходное уравнение прямой на плоскости дано в векторной форме. С учетом того, что студенты не всех специальностей изучают векторную алгебру достаточно подробно, параллельно векторному изложению приведено и координатное. Задания типового расчета «Прямая на плоскости» подобраны таким образом, что их выполнение обеспечивает закрепление навыков решения стандартных задач: определение по виду уравнений положения прямых на координатной плоскости относительно осей координат и друг друга, составление различных видов уравнений прямой на плоскости, вычисление угла между прямыми и расстояния от точки до прямой. При выполнении шестого задания типового расчета у студентов вырабатывается навык построения на координатной плоскости области, соответствующей заданной системе условий, что необходимо для успешного освоения других разделов высшей математики. Часть задач типового расчета взята из задачников или редких изданий. Приведены примеры решения задач из предлагаемого студентам типового расчета.

Одиннадцатый и двенадцатый пункты посвящены изучению свойств и методов построения кривых второго порядка на плоскости. Для удобства приведены основные формулы и даны основные определения. Внимание уделяется не выводу математических формул, а их практическому применению. Задачи сопровождаются подробными объяснениями, которые должны помочь студенту при решении типового расчета. Задания типового расчета подобраны таким образом, что их выполнение обеспечивает закрепление навыков решения стандартных задач: определение по виду уравнений вида кривой, приведение пяти- и шестичленного уравнения кривой к каноническому виду; построение кривой. Задания соответствуют различным уровням сложности. Первые два имеют простой уровень и для их решения достаточно лишь усвоения начального теоретического материала. Решение третьего и четвертого заданий требуют определенных практических навыков и могут быть отнесены ко второму уровню сложности. Пятое и шестое задания предназначены для студентов, полностью овладевших теорией по данному разделу и имеющих хороший практический опыт решения подобных задач. Приведены примеры решения задач из предлагаемого студентам типового расчета. Творческое задание включает задачи на построение кривой второго порядка в полярной системе координат.

Третья глава посвящена следующим разделам: «Плоскость в пространстве», «Прямая в пространстве», «Прямая и плоскость», «Поверхности второго порядка». *Тринадцатый* пункт содержит описание различных видов уравнений плоскости в пространстве (общее, детерминантное, «в отрезках», нормальное), для полноты изложения материала рассмотрены полярные параметры плоскости. Для каждого из возможных случаев расположения плоскости в пространстве относительно координатных плоскостей или осей приведен пример схематичного изображения такой плоскости в системе координат. Далее представлены случаи расположения плоскостей относительно друг друга (*четырнадцатый* пункт), приведены формулы, позволяющие вычислить расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями, а также решить вопрос о взаимном расположении плоскости и пары точек в пространстве. Аналитические условия перпендикулярности и параллельности плоскостей дополнены соответствующими иллюстрациями. А также приведены примеры построения точки по заданным координатам в декартовой прямоугольной системе координат. Задания типового расчета «Плоскость в пространстве» (*пятнадцатый* пункт) подобраны таким образом, что их выполнение способствует закреплению навыков решения стандартных задач, к которым относятся следующие: составление различных видов уравнений плоскости в пространстве, заданных разными способами; определение по виду уравнения положения плоскости относительно системы координат и определение взаимного расположения плоскостей; вычисление угла между плоскостями и расстояния от точки до плоскости. Четвертое задание типового расчета является подготовительным для решения пятого задания. При выполнении четвертого и пятого заданий у студентов вырабатывается навык построения в координатном пространстве точек и плоскостей, что необходимо для успешного освоения других разделов высшей математики. Приведены подробные примеры решения стандартных задач из типового расчета. Кроме того, студентам, освоившим решение стандартных задач, предлагается дополнительное творческое задание (задание 8).

Для большей геометрической наглядности прямая в пространстве (*шестнадцатый* пункт) задается своими общими уравнениями как пересечение двух плоскостей. Теоретическая часть включает основные виды уравнений прямой в пространстве (*шестнадцатый* пункт) и случаи взаимного расположения прямых относительно друг друга (*семнадцатый* пункт), приведены аналитические условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве, к некоторым формулам приведены иллюстрации. Задания типового расчета «Прямая в пространстве» (*восемнадцатый* пункт) подобраны так, что их выполнение обеспечивает выработку навыков решения стандартных задач: составление различных видов уравнений прямой в пространстве, определение взаимного расположения прямых относительно друг друга, вычисление угла между прямыми. Приведены подробные примеры решения стандартных задач. Варианты типового расчета снабжены дополнительным творческим заданием, предназначенным для более глубокого усвоения материала.

Далее следует описание случаев взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве в виде аналитических условий и геометрических иллюстраций (*девятнадцатый* пункт). Также глава содержит теоретический материал, представляющий собой описание алгоритмов решения задач аналитической геометрии относительно прямых и плоскостей в пространстве (*двадцатый* пункт). Варианты типового расчета «Прямая и плоскость в пространстве» (*двадцать первый* пункт) включают набор стандартных задач изучаемой тематики, а также содержат творческие нестандартные задания, предназначенные для более глубокого усвоения учебного материала. Приведены подробные примеры решения стандартных задач типового расчета. Цель *пунктов 19–21* — систематизация знаний и закрепление навыков решения задач, включающих как прямые, так и плоскости в пространстве в их взаимосвязи. Поэтому авторы рекомендует студентам предварительно изучить теоретический материал, изложенный в *пунктах 13–18*, и выполнить задания соответствующих типовых расчетов.

Раздел «Поверхности второго порядка» (*двадцать второй* пункт) является одним из основополагающих не только в курсе высшей математики, но и в курсе начертательной геометрии, а также во многих специальных дисциплинах, необходимых для подготовки инженера. Применение поверхностей второго порядка в технике очень многообразно: различные детали механизмов и агрегатов имеют формы цилиндров, конусов, сфер, параболоидов вращения и др. Значительный интерес для технических приложений представляют задачи на пересечение вышеуказанных поверхностей и различных плоскостей. При решении задач такого типа у студентов возникают трудности с созданием соответствующего геометрического образа. Так, для кривых второго порядка есть возможность иллюстрировать проводимые рассуждения с помощью точных построений. Для поверхностей второго порядка такой возможности нет. Это связано с техническими сложностями при изображении трехмерных объектов на плоскости. Для создания соответствующих образов поверхностей второго порядка в учебном пособии используется метод сечений. Типовой расчет «Поверхности второго порядка» (*двадцать третий* пункт) включает 30 вариантов по четыре задания в каждом. Приведены подробные примеры решения стандартных задач (с иллюстрациями).

Структура теоретического материала учебного пособия такова, что позволяет легко найти формулу, необходимую для решения той или иной задачи. Вопросы для самоконтроля могут быть использованы как преподавателями для составления вопросов математического диктанта и контрольных заданий, так и студентами для подготовки к контрольной работе. Во второй и третьей главах использованы формулы из классического справочника по высшей математике М. Я. Выгодского.

Авторы выражают благодарность доценту О. А. Заблоцкой за ценные советы по содержанию данного учебного пособия.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. ВЕКТОР. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Величины, полностью определяемые своим численным значением, называются *скалярными* (масса, температура, работа и т. п.); величины, кроме числового значения характеризуемые еще направлением, называются *векторными* (сила, скорость, ускорение, перемещение, напряженность электрического и магнитного поля и т. п.).

Определение 1.1. *Вектором* называется направленный прямолинейный отрезок (отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление).

Вектор изображают геометрически с помощью направленного отрезка и обозначают $\vec{a}$ или $\overline{AB}$, где A — начало, B — конец вектора (рис. 1). *Модулем*, или *длиной*, вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\vec{a}|$. *Нулевым* вектором называется вектор, длина которого равна 0, т. е. точка. Направление нулевого вектора произвольно.

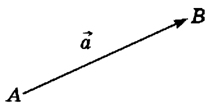


Рис. 1

Заметим, что в отличие от своего изображения, вектор не может где-либо «лежать» и с чем-либо пересекаться. Он может быть «коллинеарным», «компланарным», «перпендикулярным» и т. д.

Определение 1.2. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и обозначают $\vec{a} \| \vec{b}$.

Заметим, что нулевой вектор коллинеарен любому другому вектору.

Определение 1.3. Два ненулевых вектора называются *одинаково направленными* (*сонаправленными*), если они коллинеарные и при совмещении их начал концы этих векторов расположены по одну сторону от начала, и обозначаются $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Аналогично, два ненулевых вектора называются *противоположно направленными*, если они коллинеарные и при совмещении их начал концы этих векторов расположены по разные стороны от начала, и обозначаются $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение 1.4. Два ненулевых вектора называются *равными*, если они $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Определение 1.5. *Углом* φ между двумя ненулевыми векторами называется *наименьший* угол, на который можно повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора ($0 \le \varphi \le \pi$).

Определение 1.6. Три ненулевых вектора в пространстве называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Три вектора, среди которых есть нулевой, компланарны.

1.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Под линейными операциями над векторами понимают сложение и вычитание векторов, а также умножение вектора на число.

Определение 1.7. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, модуль которого отличается от модуля $\vec{a}$ в $|\lambda|$ раз, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению $\vec{a}$, если $\lambda < 0$ (рис. 2).

Определение 1.8. *Суммой* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, выходящий из начала первого векто-

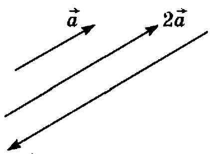


Рис. 2

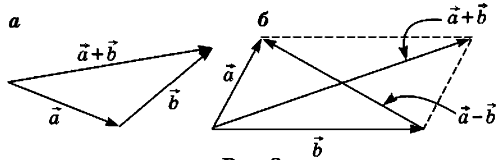


Рис. 3

ра и заканчивающийся в конце второго при условии, что конец первого вектора и начало второго совпадают (правило треугольника) (рис. 3*а*).

Определение 1.9. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}$, равный сумме вектора $\vec{a}$ и вектора $(-\vec{b})$.

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой этих векторов, а другая — разностью (правило параллелограмма) (рис. 3*б*).

Свойства линейных операций над векторами:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3. $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{a})=(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot\vec{a}$;
4. $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$;
5. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

1.2. ВЕКТОРЫ, ЗАДАННЫЕ ПРОЕКЦИЯМИ

Пусть в пространстве задана ось l, т. е. направленная прямая.

Определение 1.10. Проекцией A_l точки A на ось l (прямую или плоскость) называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось l (прямую или плоскость) (рис. 4).

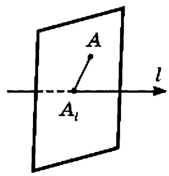


Рис. 4

Пусть $\overline{AB}$ — произвольный ненулевой вектор. Рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 — проекции на ось l начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ (рис. 5)

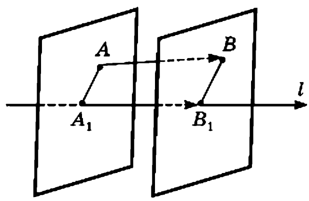


Рис. 5

Определение 1.11. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число, обозначаемое $np_l\overline{AB}=\pm|\overline{A_1B_1}|$, где берется знак «+», если $\overline{A_1B_1}\uparrow\uparrow l$, и «−», если $\overline{A_1B_1}\uparrow\downarrow l$.

Отметим основные *свойства* проекций:

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью: $np_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$.

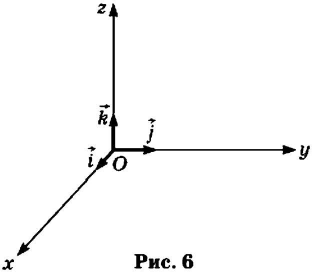


Рис. 6

2. Если $\vec{a}=\vec{b}$, то $np_l\vec{a}=np_l\vec{b}$.
3. $np_l\lambda\vec{a}=\lambda np_l\vec{a}$, $\lambda\in R$.
4. $np_l(\vec{a}+\vec{b})=np_l\vec{a}+np_l\vec{b}$.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$.

Отметим, что декартова прямоугольная система координат (ДПСК) в пространстве задается тремя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задана единица масштаба (рис. 6). Подробно ДПСК будет рассмотрена в п. 6.1.

Определение 1.12. Ортами координатных осей Ox, Oy, Oz называются векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ длины *1*, сонаправленные с положительными направлениями координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 6).

Проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz называются его *координатами*: $x=np_{Ox}\vec{a}$, $y=np_{Oy}\vec{a}$, $z=$ $=np_{Oz}\vec{a}$. Для любой точки A вектор $\overline{OA}$ называется *радиус-вектором* точки A. Координатами точки A называются проекции радиус-вектора точки A на оси координат: $x=$ $=np_{Ox}\overline{OA}$, $y=np_{Oy}\overline{OA}$, $z=np_{Oz}\overline{OA}$.

Теорема 1.1. Всякий вектор $\vec{a}$ пространства может быть разложен единственным образом по координатным ортам $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ (рис. 7).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по ортам координатных осей: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то:

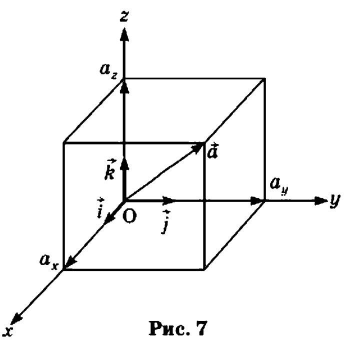


Рис. 7

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}; \qquad (1)$$

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+$$
$$+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}; \qquad (2)$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}; \qquad (3)$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (4)$$

Если известны координаты точек $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то вектор

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \qquad (5)$$

Если α, β, γ — углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, то числа

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Очевидно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

2.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1.13. Скалярным произведением двух векторов называется *число*, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначают $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}$, или $\vec{a}\vec{b}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (6)$$

Признак перпендикулярности двух ненулевых векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \qquad (7)$$

Из определения скалярного произведения, а также из определения самого вектора следуют *свойства* скалярного произведения:

1) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ или $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;
2) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
3) $((\lambda\vec{a}), \vec{b}) = (\vec{a}, (\lambda\vec{b})) = \lambda\cdot(\vec{a}, \vec{b})$, где λ — скаляр;
4) $(\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$. Отметим, что $\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a})$.

Скалярное произведение векторов, разложенных по ортам координатных осей: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, находится как произведение многочленов:

$$(\vec{a},\vec{b})=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \quad (8)$$

так как $(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k}\cdot\vec{k})=1$ ($\varphi=0$), а $(\vec{i},\vec{j})=(\vec{i},\vec{k})=(\vec{j},\vec{k})=$ $=0$ ($\varphi=\pi/2$) по определению скалярного произведения.

Формула (8) является *координатной* формой скалярного произведения.

Приравнивая правые части равенств (6) и (8), можно найти косинус угла между данными векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \quad (9)$$

Аналогичные формулы имеют место для двумерных векторов $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$:

$$(\vec{a},\vec{b})=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j})=a_xb_x+a_yb_y;$$

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}.$$

На рисунке 8 приведена геометрическая иллюстрация скалярного произведения для разных по величине острых углов. Его численное значение равно площади заштрихованного прямоугольника. Таким образом, можно сказать, что скалярное произведение равно произведению модуля одного вектора на проекцию другого вектора на направление первого:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}, \quad (10)$$

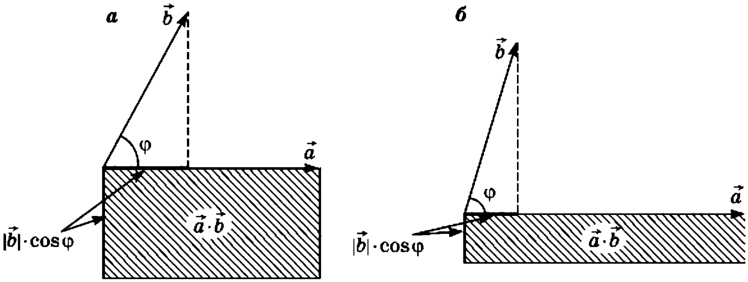


Рис. 8

здесь

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi,\ np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|} = |\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (11)$$

Заметим, что если угол φ — тупой, то $\cos\varphi < 0$ и скалярное произведение принимает отрицательное значение.

Примеры применения скалярного произведения в физике:

1) работа постоянной по модулю и направлению силы при перемещении точки: $A = \vec{F}\cdot\vec{l} = |\vec{F}|\cdot|\vec{l}|\cdot\cos\varphi$, заметим, что вид траектории при этом не имеет значения;

2) поток вектора магнитной индукции через любую поверхность s (обычно выбирается часть плоскости), ограниченную некоторым контуром: $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{s} = |\vec{B}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\varphi$, в этом случае $|\vec{s}|$ — площадь поверхности ограниченной контуром, а ее «направление» — перпендикуляр к ней.

Экономический смысл скалярного произведения векторов: пусть имеется n различных товаров и пусть x_i — количество i-го товара $(i = \overline{1,n})$, тогда некоторый набор товаров можно обозначить n-мерным неотрицательным вектором $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если p_i — цена единицы i-го товара, то вектор $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ называется *вектором цен* для выбранного набора товара.

Скалярное произведение указанных векторов $P\cdot X = p_1\cdot x_1 + p_2\cdot x_2 + \ldots + p_n\cdot x_n$ — это число, называемое *стоимостью* или *ценой набора* товаров [4].

Отметим, что размерностью вектора называется число его координат, а скалярным произведением векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число $x\cdot y = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \ldots + x_n\cdot y_n$.

Неотрицательным называется вектор, координаты которого неотрицательны.

2.2. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 1.1. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие следующие проекции на координатные оси: $a_x = -1$; $a_y = 6$; $a_z = 2$; $b_x = 4$; $b_y = 3$; $b_z = -6$. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Р е ш е н и е. Вычисляем скалярное произведение векторов по формуле (8):

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = -1\cdot 4 + 6\cdot 3 + 2\cdot(-6) = 2.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначим φ и по формуле (9) вычислим косинус этого угла:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+36+4}\sqrt{16+9+36}} = \frac{2}{\sqrt{41}\sqrt{61}}.$$

Тогда угол

$$\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{41}\sqrt{61}} \approx 88^\circ.$$

Проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находим по формуле (11):

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{61}}.$$

Ответ:

$$(\vec{a},\vec{b}) = 2; \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{41}\sqrt{61}}; np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{2}{\sqrt{61}}.$$

Пример 1.2. Даны три вектора $\vec{a} = (5;-2)$, $\vec{b} = (4;2)$, $\vec{c} = (-3;4)$. Найти $\vec{a}^2 - 3\cdot(\vec{a},\vec{b}) - 4\vec{b}^2 - (\vec{b},\vec{c}) + 2\vec{c}^2$.

Р е ш е н и е. Используем формулу (8) и свойства скалярного произведения векторов:

$$\vec{a}^2 = (\vec{a},\vec{a}) = 5\cdot 5 + (-2)\cdot(-2) = 29;$$
$$(\vec{a},\vec{b}) = 5\cdot 4 + (-2)\cdot 2 = 16;$$
$$\vec{b}^2 = 4\cdot 4 + 2\cdot 2 = 20;$$
$$(\vec{b},\vec{c}) = 4\cdot(-3) + 2\cdot 4 = -4;$$
$$\vec{c}^2 = (-3)\cdot(-3) + 4\cdot 4 = 25,$$

и вычисляем

$$\vec{a}^2 - 3\cdot(\vec{a},\vec{b}) - 4\vec{b}^2 - (\vec{b},\vec{c}) + 2\vec{c}^2 =$$
$$= 29 - 3\cdot 16 - 4\cdot 20 - (-4) + 2\cdot 25 = -45.$$

Ответ: -45.

Пример 1.3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=-2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}+3\vec{n}$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $\vec{m}\hat{\ }\vec{n}=2\pi/3$ (рис. 9).

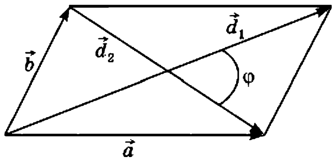


Рис. 9

Р е ш е н и е. Обозначим угол между диагоналями параллелограмма $\varphi=\vec{d}_1\hat{\ }\vec{d}_2$.

По правилу параллелограмма находим диагонали:

$$\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=-2\vec{m}+\vec{n}+\vec{m}+3\vec{n}=$$
$$=-\vec{m}+4\vec{n}$$

и

$$\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=-2\vec{m}+\vec{n}-(\vec{m}+3\vec{n})=$$
$$=\vec{m}-2\vec{n}.$$

Используя определение и свойства скалярного произведения, вычисляем:

$$(\vec{d}_1,\vec{d}_2)=(-\vec{m}+4\vec{n},\vec{m}-2\vec{n})=-\vec{m}^2+6\cdot(\vec{m},\vec{n})-8\vec{n}^2=$$
$$=|\vec{m}|^2+6|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos(\vec{m}\hat{\ }\vec{n})-8|\vec{n}|^2=$$
$$=2^2+6\cdot2\cdot1\cdot(-0{,}5)-8\cdot1^2=-10;$$
$$|\vec{d}_1|=\sqrt{\vec{d}_1^2}=\sqrt{(-\vec{m}+4\vec{n})^2}=\sqrt{\vec{m}^2-8\cdot(\vec{m},\vec{n})+16\vec{n}^2}=$$
$$=\sqrt{|\vec{m}|^2-8|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos(\vec{m}\hat{\ }\vec{n})+16|\vec{n}|^2}=$$
$$=\sqrt{2^2-8\cdot2\cdot1\cdot(-0{,}5)+16\cdot1^2}=\sqrt{28};$$
$$|\vec{d}_2|=\sqrt{\vec{d}_2^2}=\sqrt{(\vec{m}-2\vec{n})^2}=\sqrt{\vec{m}^2-4(\vec{m},\vec{n})+4\vec{n}^2}=$$
$$=\sqrt{|\vec{m}|^2-4|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos(\vec{m}\hat{\ }\vec{n})+4|\vec{n}|^2}=\sqrt{12}.$$

По формуле (9)

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{d}_1,\vec{d}_2)}{|\vec{d}_1|\cdot|\vec{d}_2|}=\frac{-10}{\sqrt{28}\sqrt{12}}.$$

Следовательно,

$$\varphi=\arccos\left(\frac{-10}{\sqrt{28}\sqrt{12}}\right).$$

Ответ:

$$\varphi=\arccos\left(\frac{-10}{\sqrt{28}\sqrt{12}}\right).$$

Пример 1.4. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если проекция вектора $\vec{c}$ на ось Oz равна 5.

Решение. Пусть вектор $\vec{c}$ имеет координаты $(x;\ y;\ z)$. Составим систему уравнений, используя условия задачи:

$$\begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a} \Leftrightarrow (\vec{c}, \vec{a}) = 0, \\ \vec{c} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{c}, \vec{b}) = 0, \\ np_{\vec{k}}\vec{c} = 5; \end{cases} \begin{cases} 4x + 3y - 7z = 0, \\ 2x + y - 5z = 0, \\ y = 5; \end{cases} \begin{cases} x = -2/9, \\ y = 25/9, \\ z = 5. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{c} = (-2/9; 25/9; 5)$.

Пример 1.5. На материальную точку действует три силы $\vec{f_1} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{f_2} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{f_3} = 10\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил при перемещении данной материальной точки из точки $A(-1;\ -5;\ 7)$ в точку $B(1;\ -6;\ 8)$.

Решение. Найдем равнодействующую силу $\vec{F}$, равную сумме сил $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ и $\vec{f_3}$:

$$\vec{F} = 11\vec{i} - 8\vec{k}.$$

Найдем перемещение

$$\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (2; -1; 1).$$

Тогда работа равнодействующей трех сил

$$A = \vec{F} \cdot \vec{l} = 11 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-8) \cdot 1 = 14 \text{ (ед. раб.)}$$

Ответ: 14.

3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

3.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1.14. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{c}$, модуль которого равен произведению модулей этих векторов на синус угла между ними

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \qquad (12)$$

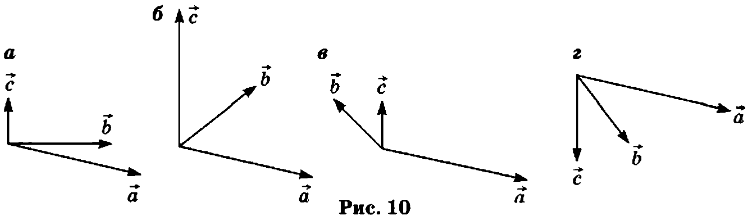


Рис. 10

и такой, что будучи перпендикулярным им обоим, он образует с ними правую тройку.

Отметим, что упорядоченная тройка (некомпланарных) векторов называется *правой*, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

Обозначают векторное произведение: $[\vec{a},\vec{b}]$ или $[\vec{a}\times\vec{b}]$, или $\vec{a}\times\vec{b}$.

На рисунке 10 изображен результат векторного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ при различных углах между ними — остром, прямом, тупом. Во всех случаях обход по кратчайшему пути по концам векторов $\vec{a}\to\vec{b}\to\vec{c}$ осуществляется против часовой стрелки (принцип построения правой тройки: из конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки).

Из определения векторного произведения, а также из определения самого вектора следуют *свойства* векторного произведения:

1) $[\vec{a},\vec{a}]=0$;
2) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$;
3) $[(\lambda\vec{a}),\vec{b}]=[\vec{a},(\lambda\vec{b})]=\lambda\cdot[\vec{a},\vec{b}]$, где λ — скаляр;
4) $[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$.

Векторное произведение векторов, разложенных по ортам координатных осей: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+ +b_z\vec{k}$, может быть найдено с помощью определителя:

$$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix} \quad (13)$$

Формула (13) называется *координатной* формой векторного произведения.

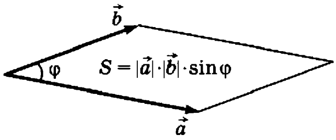


Рис. 11

На рисунке 11 приведена геометрическая иллюстрация модуля векторного произведения, численно равного площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Примеры применения векторного произведения в физике:

1) момент гироскопических сил равен векторному произведению вектора момента импульса гироскопа на вектор угловой скорости, с которой ось гироскопа поворачивается под действием внешних сил: $\vec{M}_{\text{гир}} = [\vec{L}, \vec{\omega}]$. Заметим, что гироскопические силы играют важную роль в технике при вынужденных поворотах быстровращающихся тел: роторы двигателей, вращающиеся винты, колеса и т. д.;

2) сила Лоренца: если тело, имеющее заряд q, движется со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, то сила, действующая на это тело, может быть найдена как векторное произведение: $\vec{F} = q\cdot[\vec{v}, \vec{B}]$.

3.2. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 1.6. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = -5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Найти векторное произведение $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b}]$.

Р е ш е н и е. Определим векторы

$$\vec{a} - \vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} - (-5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

и

$$\vec{a} + 3\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} + 3(-5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = -19\vec{i} - 8\vec{j} + 7\vec{k}.$$

По формуле (13) вычислим векторное произведение

$$[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -19 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -19 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -19 & -8 \end{vmatrix} = 45\vec{i} - 64\vec{j} + 68\vec{k}.$$

Ответ: (45; −64; 68).

Пример 1.7. Даны вершины треугольника $A(-1;\ 7;\ -2)$, $B(0;\ -5;\ 1)$, $C(3;\ 4;\ 6)$. Найти площадь треугольника ABC и высоту, проведенную из вершины B (рис. 12).

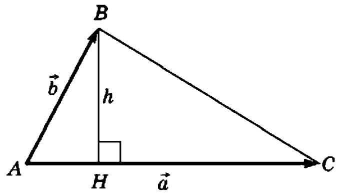


Рис. 12

Решение. Треугольник ABC построен на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AC} = (4; -3; 8)$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (1; -12; 3)$. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, поэтому по определению векторного произведения

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|.$$

Найдем векторное произведение векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -12 & 3 \end{vmatrix} = 87\vec{i} - 4\vec{j} - 45\vec{k}$$

и вычислим площадь треугольника ABC:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{87^2 + (-4)^2 + (-45)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9610}.$$

Для вычисления высоты треугольника воспользуемся формулой

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah,$$

откуда

$$h = \frac{2S_\Delta}{|\vec{a}|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{9610}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 8^2}} = \frac{\sqrt{9610}}{\sqrt{89}}.$$

Ответ:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{9610};\ h = \frac{\sqrt{9610}}{\sqrt{89}}.$$

Пример 1.8. К точке $A(-4;\ -9;\ 3)$ приложены три силы $\vec{f_1} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{f_2} = -3\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{f_3} = 6\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$. Сравнить модули моментов равнодействующей этих сил относительно точек $B(1;\ -4;\ 8)$ и $C(1;\ -2;\ 5)$.

Р е ш е н и е. Момент силы равен векторному произведению радиус-вектора точки приложения A на вектор силы (в нашем случае на равнодействующую данных сил).

Равнодействующая всех сил:

$$\vec{F}=\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3=-\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}-3\vec{i}+\vec{k}+6\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}.$$

Найдем радиус-вектор точки приложения относительно точки B:

$$\overrightarrow{BA}=(-4-1)\vec{i}+(-9+4)\vec{j}+(3-8)\vec{k}=-5\vec{i}-5\vec{j}-5\vec{k},$$

относительно точки C:

$$\overrightarrow{CA}=(-4-1)\vec{i}+(-9+2)\vec{j}+(3-5)\vec{k}=-5\vec{i}-7\vec{j}-2\vec{k}.$$

Найдем моменты сил, приложенных к точке A, относительно точки B и точки C:

$$\vec{M}_B(A)=[\overrightarrow{BA},\vec{F}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -5 & -5\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=25\vec{i}-20\vec{j}-5\vec{k};$$

$$\vec{M}_C(A)=[\overrightarrow{CA},\vec{F}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -7 & -2\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=20\vec{i}-14\vec{j}-\vec{k}.$$

Вычислим модули этих моментов сил:

$$|\vec{M}_b(A)|=|[\overrightarrow{BA},\vec{F}]|=\sqrt{25^2+20^2+5^2}=\sqrt{1050};$$

$$|\vec{M}_C(A)|=|[\overrightarrow{CA},\vec{F}]|=\sqrt{20^2+14^2+1^2}=\sqrt{597}.$$

Очевидно, что момент равнодействующей сил $\vec{f}_1,\vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$, приложенных к точке A, относительно точки B больше, чем относительно точки C.

Ответ: $|\vec{M}_B(A)|>|\vec{M}_C(A)|$.

4. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

4.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1.15. Смешанным произведением трех упорядоченных векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется *число*, вычисляемое по следующему правилу: сначала вычисляется векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}]$, а затем результат перемножается скалярно с вектором $\vec{c}$. Обозначается: $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ или $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

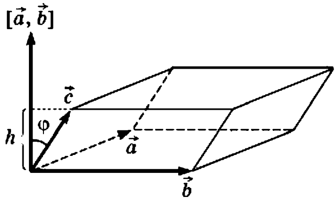


Рис. 13

На рисунке 13 изображена геометрическая иллюстрация смешанного произведения векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Его результат по модулю численно равен объему параллелепипеда и в 6 раз больше объема треугольной пирамиды, построенной на этих векторах. Знак смешанного произведения будет положительным, если данная тройка векторов правая, и отрицательным — если левая.

Смешанное произведение векторов, разложенных по базисным ортам $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ и $\vec{c}=$ $=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$, можно вычислить по формуле

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Формула (14) называется *координатной* формой смешанного произведения векторов.

Заметим, что в случае компланарности данных трех векторов в определителе получатся линейно зависимые строки (любой вектор можно выразить через два других), и он будет равен нулю. Таким образом, получаем условие компланарности трех векторов: векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

4.2. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 1.9. Проверить, лежат ли точки $A(-1;\ -1;\ 4)$, $B(9;\ -7;\ 6)$, $C(5;\ 0;\ 6)$, $D(-8;\ 4;\ 1)$ в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Для того чтобы выяснить, лежат ли данные точки в одной плоскости, составим из них три вектора $\overrightarrow{AB}=(10;-6;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;1;2)$, $\overrightarrow{AD}=(-7;5;-3)$, и проверим, являются ли они компланарными.

Вычислим смешанное произведение по формуле (14):

$$([\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}],\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}10 & -6 & 2\\ 6 & 1 & 2\\ -7 & 5 & -3\end{vmatrix}=-80.$$

Смешанное произведение векторов не равно нулю, значит векторы не компланарны и, следовательно, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

Ответ: Точки не лежат в одной плоскости.

Пример 1.10. Даны вершины пирамиды $A(-1;\ 5;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(4;\ 1;\ -1)$, $D(4;\ -5;\ 3)$.

Найти объем пирамиды $ABCD$ и высоту, опущенную из вершины A.

Решение. Пирамида $ABCD$ построена на векторах $\overrightarrow{BA}=(-2;5;-6)$, $\overrightarrow{BC}=(3;1;-4)$ и $\overrightarrow{BD}=(3;-5;0)$ (рис. 14).

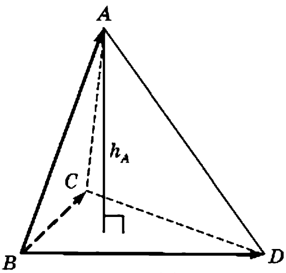


Рис. 14

По формуле (14) вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$([\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}],\overrightarrow{BD})=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -6\\ 3 & 1 & -4\\ 3 & -5 & 0\end{vmatrix}=88.$$

Из геометрического смысла смешанного произведения векторов следует, что объем треугольной пирамиды $ABCD$ равен

$$V=\frac{1}{6}\cdot([\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}],\overrightarrow{BD})=\frac{88}{6}=\frac{44}{3}.$$

Для вычисления высоты пирамиды h воспользуемся формулой

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta}h.$$

Площадь треугольника BCD вычисляем так же, как в примере 1.7

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]|=\frac{1}{2}\sqrt{869}.$$

Тогда высота пирамиды, опущенная из вершины A:

$$h_A = \frac{3V}{S_\Delta} = \frac{3\frac{88}{6}}{\frac{1}{2}\sqrt{869}} = \frac{88}{\sqrt{869}}.$$

Ответ:

$$V = \frac{88}{6};\, h_A = \frac{88}{\sqrt{869}}.$$

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

5.1. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие величины называются скалярными? векторными?
2. Что называют вектором?
3. Что называется модулем вектора?
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Когда два вектора называются равными?
6. Дайте определение угла между векторами.
7. Перечислите линейные операции над векторами. Дайте их определение.
8. Запишите свойства линейных операций над векторами.
9. Что называется проекцией точки на ось?
10. Дайте определение проекции вектора.
11. Перечислите основные свойства проекций.
12. Дайте определение координат вектора.
13. Что называется ортом?
14. Сформулируйте теорему о разложении вектора по координатным ортам.
15. Запишите условие коллинеарности векторов.
16. Что является результатом скалярного произведения двух векторов?
17. Запишите признак перпендикулярности двух ненулевых векторов.
18. Перечислите свойства скалярного произведения.
19. Запишите координатную форму скалярного произведения.
20. Как найти косинус угла между данными векторами?
21. Как найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$? вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$?
22. Приведите примеры применения скалярного произведения в физике.

23. Что является результатом векторного произведения двух векторов?
24. Перечислите свойства векторного произведения.
25. Запишите координатную форму векторного произведения.
26. Как найти площадь треугольника с помощью векторного произведения векторов?
27. Приведите примеры применения векторного произведения в физике.
28. Что является результатом смешанного произведения трех упорядоченных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$?
29. Как найти объем параллелепипеда? пирамиды?
30. Какие векторы называются компланарными? Запишите условие компланарности данных трех векторов.

5.2. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ»

Задача 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	–2	10	10	8	3	2
2	–7	–2	6	10	–8	3
3	–6	7	11	–1	2	–2
4	7	–4	9	11	1	2
5	7	–1	7	9	5	–8
6	–5	7	11	–9	2	–10
7	0	–4	–4	–1	–3	–8
8	–10	–6	1	–5	7	–6
9	2	–10	–1	10	–6	1
10	5	10	3	6	–5	–2
11	5	11	–5	–4	1	–9
12	–1	–2	–4	–6	8	5

Продолжение табл.

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
13	–2	2	–7	11	–7	–5
14	6	–4	10	–7	–3	2
15	–1	3	6	–2	–3	8
16	–1	10	–8	–10	–6	5
17	11	–9	3	–6	9	11
18	10	1	–10	–1	–10	4
19	11	–3	6	9	2	8
20	–7	–10	–6	–7	–4	0
21	0	–1	11	7	11	1
22	1	8	10	6	–7	–1
23	5	7	6	5	–5	–5
24	–10	2	9	–4	–5	–1
25	–2	–3	–6	–1	2	–4
26	–10	–4	–3	6	2	11
27	4	–8	10	9	1	5
28	–1	9	5	5	–9	6
29	10	0	5	5	–3	11
30	–10	–9	–8	–4	3	–6

Задача 2. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.
Найти:
а) $2\vec{a}^2 - (\vec{b}, \vec{c})$;
б) $3\vec{a}^2 - 4(\vec{a}, \vec{b}) + 5\vec{b}^2 - 6(\vec{b}, \vec{c}) - 2\vec{c}^2$.
1. $\vec{a} = (3; -2), \vec{b} = (-5; 1), \vec{c} = (0; 4)$.
2. $\vec{a} = (2; -2), \vec{b} = (-3; -1), \vec{c} = (3; 4)$.
3. $\vec{a} = (4; 2), \vec{b} = (7; -1), \vec{c} = (0; -5)$.
4. $\vec{a} = (-4; -2), \vec{b} = (-2; 6), \vec{c} = (5; -4)$.
5. $\vec{a} = (6; -1), \vec{b} = (5; 2), \vec{c} = (5; 5)$.
6. $\vec{a} = (-2; -2), \vec{b} = (-4; 1), \vec{c} = (8; 4)$.
7. $\vec{a} = (3; 0), \vec{b} = (-9; 1), \vec{c} = (5; 4)$.
8. $\vec{a} = (3; 7), \vec{b} = (2; -1), \vec{c} = (9; -3)$.

9. $\vec{a}=(-4;5), \vec{b}=(-1;1), \vec{c}=(6;2)$.
10. $\vec{a}=(1;-2), \vec{b}=(7;-3), \vec{c}=(1;1)$.
11. $\vec{a}=(5;2), \vec{b}=(4;-1), \vec{c}=(1;-4)$.
12. $\vec{a}=(-5;-2), \vec{b}=(0;7), \vec{c}=(2;0)$.
13. $\vec{a}=(-3;-1), \vec{b}=(5;1), \vec{c}=(7;4)$.
14. $\vec{a}=(8;-2), \vec{b}=(5;3), \vec{c}=(0;5)$.
15. $\vec{a}=(0;-2), \vec{b}=(7;-1), \vec{c}=(-4;3)$.
16. $\vec{a}=(1;-2), \vec{b}=(9;-1), \vec{c}=(3;1)$.
17. $\vec{a}=(-2;-2), \vec{b}=(7;2), \vec{c}=(-5;1)$.
18. $\vec{a}=(0;-2), \vec{b}=(-9;1), \vec{c}=(6;-4)$.
19. $\vec{a}=(-4;2), \vec{b}=(-5;3), \vec{c}=(8;3)$.
20. $\vec{a}=(3;2), \vec{b}=(5;1), \vec{c}=(7;4)$.
21. $\vec{a}=(4;-5), \vec{b}=(2;1), \vec{c}=(6;4)$.
22. $\vec{a}=(5;-2), \vec{b}=(-4;1), \vec{c}=(9;-2)$.
23. $\vec{a}=(7;-2), \vec{b}=(-2;-1), \vec{c}=(5;-5)$.
24. $\vec{a}=(4;-5), \vec{b}=(8;1), \vec{c}=(3;1)$.
25. $\vec{a}=(4;-1), \vec{b}=(-5;-8), \vec{c}=(7;0)$.
26. $\vec{a}=(0;-2), \vec{b}=(7;-5), \vec{c}=(3;4)$.
27. $\vec{a}=(9;-2), \vec{b}=(-5;3), \vec{c}=(0;8)$.
28. $\vec{a}=(3;-6), \vec{b}=(-1;1), \vec{c}=(2;4)$.
29. $\vec{a}=(0;-2), \vec{b}=(-7;1), \vec{c}=(7;-5)$.
30. $\vec{a}=(3;-5), \vec{b}=(-5;9), \vec{c}=(4;-4)$.

Задача 3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(1;3;4), B(-3;0;4), C(2;-1;2)$;
   б) $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}; \vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}; |\vec{m}|=|\vec{n}|=1; \vec{m}\hat{}\vec{n}=\pi/3$.
2. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(-10;2;4), B(5;-1;1), C(0;-1;2)$;
   б) $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}; \vec{b}=\vec{m}-\vec{n}; |\vec{m}|=2; |\vec{n}|=1; \vec{m}\hat{}\vec{n}=2\pi/3$.
3. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(-1;5;7), B(-1;4;-4), C(-2;10;6)$;
   б) $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}; \vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}; |\vec{m}|=1; |\vec{n}|=3; \vec{m}\hat{}\vec{n}=\pi/2$.
4. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(-4;2;-7), B(1;4;4), C(5;-9;6)$;
   б) $\vec{a}=-\vec{m}+6\vec{n}; \vec{b}=10\vec{m}+3\vec{n}; |\vec{m}|=4; |\vec{n}|=3; \vec{m}\hat{}\vec{n}=\pi/4$.
5. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(4;0;7), B(1;-4;4), C(2;-4;1)$;
   б) $\vec{a}=6\vec{m}-4\vec{n}; \vec{b}=7\vec{m}-8\vec{n}; |\vec{m}|=3; |\vec{n}|=1; \vec{m}\hat{}\vec{n}=\pi/2$.
6. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(-2;4;7), B(-5;0;-4), C(0;5;-8)$;
   б) $\vec{a}=5\vec{m}+\vec{n}; \vec{b}=\vec{m}-\vec{n}; |\vec{m}|=4; |\vec{n}|=2; \vec{m}\hat{}\vec{n}=3\pi/4$.
7. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(8;-2;1), B(5;-1;-4), C(3;0;6)$;
   б) $\vec{a}=-4\vec{m}+2\vec{n}; \vec{b}=-\vec{m}+\vec{n}; |\vec{m}|=5; |\vec{n}|=2; \vec{m}\hat{}\vec{n}=\pi/3$.
8. а) $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{AC}, A(1;5;-7), B(3;4;4), C(8;10;-6)$;

б) $\vec{a} = \vec{m} - 5\vec{n}; \vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 1; \vec{m}\hat{}\vec{n} = 2\pi/3.$

9. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(5;5;-1), B(3;4;3), C(-8;1;-7);$
   б) $\vec{a} = -3\vec{m} - \vec{n}; \vec{b} = 4\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 3; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/2.$

10. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(2;3;0), B(1;-4;6), C(5;1;-3);$
   б) $\vec{a} = 2\vec{m} - 5\vec{n}; \vec{b} = \vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 6; |\vec{n}| = 1; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/4.$

11. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(4;4;-2), B(1;5;-6), C(2;9;-4);$
   б) $\vec{a} = 2\vec{m} - 5\vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + 3\vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 5; \vec{m}\hat{}\vec{n} = 2\pi/3.$

12. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-5;0;7), B(-3;-4;4), C(6;1;6);$
   б) $\vec{a} = -\vec{m} - 5\vec{n}; \vec{b} = \vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 3; |\vec{n}| = 4; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/3.$

13. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-1;4;2), B(3;-2;4), C(5;1;-2);$
   б) $\vec{a} = \vec{m} - 4\vec{n}; \vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}; |\vec{m}| = 3; |\vec{n}| = 5; \vec{m}\hat{}\vec{n} = 2\pi/3.$

14. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(4;5;-4), B(3;-1;-2), C(5;2;-10);$
   б) $\vec{a} = \vec{m} + 6\vec{n}; \vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 7; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/3.$

15. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(5;4;-4), B(-6;0;2), C(3;1;3);$
   б) $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}; \vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = 4; \vec{m}\hat{}\vec{n} = 2\pi/3.$

16. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-1;-3;4), B(3;0;-4), C(2;1;2);$
   б) $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = |\vec{n}| = 3; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/3.$

17. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(10;2;-4), B(-5;1;-1), C(0;1;2);$
   б) $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 5; \vec{m}\hat{}\vec{n} = 2\pi/3.$

18. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(1;5;-7), B(1;4;4), C(-2;10;-6);$
   б) $\vec{a} = -5\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}; |\vec{m}| = 6; |\vec{n}| = 3; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/2.$

19. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(4;-2;-7), B(-1;4;4), C(-5;9;6);$
   б) $\vec{a} = -\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = 4\vec{m} + 3\vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 5; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/6.$

20. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-4;0;-7), B(1;4;-4), C(-2;4;-1);$
   б) $\vec{a} = 2\vec{m} - 4\vec{n}; \vec{b} = 7\vec{m} - \vec{n}; |\vec{m}| = 5; |\vec{n}| = 1; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/2.$

21. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(2;-4;7), B(5;0;4), C(0;-5;8);$
   б) $\vec{a} = \vec{m} + 5\vec{n}; \vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}; |\vec{m}| = 7; |\vec{n}| = 2; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/6.$

22. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-8;2;1), B(-5;1;4), C(-3;0;-6);$
   б) $\vec{a} = -\vec{m} + 5\vec{n}; \vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 5; |\vec{n}| = 4; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/3.$

23. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(1;-5;7), B(-3;4;4), C(-8;10;6);$
   б) $\vec{a} = 2\vec{m} - 5\vec{n}; \vec{b} = 4\vec{m} + 3\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = 2; \vec{m}\hat{}\vec{n} = 2\pi/3.$

24. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-5;-5;1), B(-3;4;-3), C(8;-1;7);$
   б) $\vec{a} = \vec{m} - 4\vec{n}; \vec{b} = 5\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 3; |\vec{n}| = 2; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/2.$

25. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-2;-3;0), B(-1;4;-6), C(-5;1;3);$
   б) $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}; \vec{b} = \vec{m} - \vec{n}; |\vec{m}| = 4; |\vec{n}| = 1; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/4.$

26. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-4;4;2), B(-1;-5;6), C(-2;9;4);$
   б) $\vec{a} = 5\vec{m} - 2\vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} - 3\vec{n}; |\vec{m}| = 5; |\vec{n}| = 2; \vec{m}\hat{}\vec{n} = 2\pi/3.$

27. а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, A(-5;0;7), B(-3;-4;4), C(6;1;6);$
   б) $\vec{a} = -\vec{m} - \vec{n}; \vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = 3; |\vec{n}| = 4; \vec{m}\hat{}\vec{n} = \pi/3.$

28. а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}, A(1;-4;-2), B(-3;2;-4), C(-5;-1;2)$;
б) $\vec{a}=2\vec{m}-4\vec{n}; \vec{b}=\vec{m}+4\vec{n}; |\vec{m}|=1; |\vec{n}|=5; \vec{m}\wedge\vec{n}=5\pi/6$.
29. а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}, A(-4;-5;-4), B(-3;1;2), C(-5;2;10)$;
б) $\vec{a}=6\vec{m}+\vec{n}; \vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}; |\vec{m}|=6; |\vec{n}|=5; \vec{m}\wedge\vec{n}=\pi/3$.
30. а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}, A(-5;4;4), B(-1;0;-2), C(-3;-1;-3)$;
б) $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}; \vec{b}=-3\vec{m}+4\vec{n}; |\vec{m}|=1; |\vec{n}|=2; \vec{m}\wedge\vec{n}=2\pi/3$.

Задача 4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами.

Найти:

а) значение параметра α, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны;

б) вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\alpha = 2$ и проекция вектора $\vec{c}$ на ось Oz равна 3.

1. $\vec{a}=4\vec{i}+9\vec{j}-10\vec{k}, \vec{b}=\alpha\vec{i}+6\vec{j}-9\vec{k}$.
2. $\vec{a}=-3\vec{i}+8\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}-3\vec{j}+\alpha\vec{k}$.
3. $\vec{a}=-6\vec{i}-10\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}+\alpha\vec{k}$.
4. $\vec{a}=10\vec{i}+9\vec{j}-7\vec{k}, \vec{b}=-6\vec{i}-8\vec{j}+\alpha\vec{k}$.
5. $\vec{a}=3\vec{i}+9\vec{j}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}$.
6. $\vec{a}=3\vec{i}+6\vec{j}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=10\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
7. $\vec{a}=-6\vec{i}+\alpha\vec{j}+8\vec{k}, \vec{b}=8\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.
8. $\vec{a}=-4\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}, \vec{b}=\alpha\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k}$.
9. $\vec{a}=-3\vec{i}-7\vec{j}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=7\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$.
10. $\vec{a}=8\vec{i}+\alpha\vec{j}-9\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-10\vec{j}+5\vec{k}$.
11. $\vec{a}=-4\vec{i}+2\vec{j}, \vec{b}=\alpha\vec{i}-10\vec{j}+11\vec{k}$.
12. $\vec{a}=-2\vec{i}-10\vec{j}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=7\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$.
13. $\vec{a}=\vec{i}+\alpha\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=-4\vec{i}-7\vec{j}+3\vec{k}$.
14. $\vec{a}=\alpha\vec{i}+4\vec{j}+10\vec{k}, \vec{b}=10\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}$.
15. $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}, \vec{b}=8\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k}$.
16. $\vec{a}=-8\vec{i}-\vec{j}-9\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}+\alpha\vec{k}$.
17. $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}, \vec{b}=\alpha\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$.
18. $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=8\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$.
19. $\vec{a}=8\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+\alpha\vec{j}+2\vec{k}$.
20. $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\vec{j}+10\vec{k}, \vec{b}=8\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$.
21. $\vec{a}=10\vec{i}-8\vec{j}-7\vec{k}, \vec{b}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}$.
22. $\vec{a}=-3\vec{i}-9\vec{j}+\alpha\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$.
23. $\vec{a}=-8\vec{i}+\alpha\vec{j}+4\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$.
24. $\vec{a}=-\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}, \vec{b}=-5\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$.
25. $\vec{a}=\alpha\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}, \vec{b}=5\vec{i}+9\vec{j}-\vec{k}$.
26. $\vec{a}=7\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}, \vec{b}=-6\vec{i}+\alpha\vec{j}+\vec{k}$.
27. $\vec{a}=7\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+\alpha\vec{j}+11\vec{k}$.

28. $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = -9\vec{i} + 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$.
29. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\vec{k}$.
30. $\vec{a} = 10\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Задача 5. На материальную точку действует три силы $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$.

Найти:

а) работу силы $\vec{f}_1$ при перемещении данной материальной точки на вектор $\vec{a}$;

б) работу равнодействующей сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$ при перемещении данной материальной точки из точки A в точку B.

1. $\vec{f}_1 = -\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}, \vec{f}_2 = -3\vec{i} + \vec{k}, \vec{f}_3 = 11\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{a} = 8\vec{j} - 2\vec{k}, A(-4; -9; -7), B(1; -10; 8)$.
2. $\vec{f}_1 = 5\vec{j} - \vec{k},\ \vec{f}_2 = \vec{i} + 11\vec{j} - 4\vec{k},\ \vec{f}_3 = 7\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k},\ A(-10; -10; -4), B(8; -7; 11)$.
3. $\vec{f}_1 = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k},\ \vec{f}_2 = 3\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k},\ \vec{f}_3 = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{a} = 11\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k},\ A(4; -4; -6), B(0; -7; -1)$.
4. $\vec{f}_1 = \vec{i} + 5\vec{j} + 11\vec{k},\ \vec{f}_2 = -7\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k},\ \vec{f}_3 = -2\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{a} = -5\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k},\ A(1; 2; -8), B(-2; 1; 3)$.
5. $\vec{f}_1 = -2\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k},\ \vec{f}_2 = -6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\ \vec{f}_3 = -6\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k},\ A(-9; 6; -3), B(-9; -7; -4)$.
6. $\vec{f}_1 = 7\vec{i} - 8\vec{j} - 3\vec{k},\ \vec{f}_2 = 7\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{k},\ \vec{f}_3 = -10\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{a} = 6\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k},\ A(-9; 1; 4), B(-6; -4; -5)$.
7. $\vec{f}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k},\ \vec{f}_2 = 9\vec{i} + 11\vec{j} + 9\vec{k},\ \vec{f}_3 = -\vec{i} - \vec{j} + 10\vec{k}$, $\vec{a} = -10\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k},\ A(-5; 9; -9), B(-8; -2; 1)$.
8. $\vec{f}_1 = 8\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k},\ \vec{f}_2 = -9\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{f}_3 = 6\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k},\ A(2; -6; -9), B(-8; -4; 3)$.
9. $\vec{f}_1 = -7\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k},\ \vec{f}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k},\ \vec{f}_3 = -2\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{a} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 9\vec{k},\ A(-5; 5; 10), B(-5; -4; 0)$.
10. $\vec{f}_1 = 8\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k},\ \vec{f}_2 = -4\vec{i} - 10\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{f}_3 = -7\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{a} = 8\vec{i} + 7\vec{k},\ A(0; 2; -3), B(8; -1; 11)$.
11. $\vec{f}_1 = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k},\ \vec{f}_2 = -10\vec{i} + 11\vec{j} - 7\vec{k},\ \vec{f}_3 = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{a} = 8\vec{i} + 5\vec{k},\ A(3; 1; -4), B(1; -10; 0)$.
12. $\vec{f}_1 = \vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k},\ \vec{f}_2 = -10\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k},\ \vec{f}_3 = 3\vec{i} + 10\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{a} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k},\ A(-6; -3; -9), B(-5; -1; 4)$.
13. $\vec{f}_1 = \vec{i} - \vec{k},\ \vec{f}_2 = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k},\ \vec{f}_3 = -2\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{a} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k},\ A(1; -4; -1), B(1; -10; -5)$.
14. $\vec{f}_1 = -10\vec{i} + 6\vec{k},\ \vec{f}_2 = -4\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{f}_3 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 11\vec{k}$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k},\ A(11; -5; -7), B(-3; -3; 1)$.
15. $\vec{f}_1 = 5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k},\ \vec{f}_2 = -7\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k},\ \vec{f}_3 = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 10\vec{k}$,

$\vec{a}=-7\vec{i}-9\vec{j}+5\vec{k}$, $A(-8;\,-10;\,3)$, $B(-7;\,0;\,10)$.

16. $\vec{f_1}=-9\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{f_2}=-\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{f_3}=-10\vec{i}-7\vec{k}$, $\vec{a}=-4\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}$, $A(-3;\,-3;\,-5)$, $B(0;\,9;\,5)$.
17. $\vec{f_1}=-9\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{f_2}=7\vec{i}+3\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{f_3}=7\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{a}=4\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$, $A(6;\,0;\,-3)$, $B(10;\,-3;\,-2)$.
18. $\vec{f_1}=6\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{f_2}=3\vec{i}-10\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{f_3}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{a}=5\vec{i}+6\vec{j}-5\vec{k}$, $A(2;\,6;\,1)$, $B(9;\,9;\,11)$.
19. $\vec{f_1}=4\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{f_2}=5\vec{i}-7\vec{j}$, $\vec{f_3}=10\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$, $\vec{a}=8\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}$, $A(5;\,0;\,-5)$, $B(11;\,-5;\,-8)$.
20. $\vec{f_1}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{f_2}=-10\vec{i}+11\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{f_3}=-3\vec{i}-2\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{a}=-6\vec{i}+6\vec{j}+\vec{k}$, $A(9;\,4;\,5)$, $B(-10;\,3;\,11)$.
21. $\vec{f_1}=4\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{f_2}=-8\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{f_3}=\vec{i}-10\vec{j}+11\vec{k}$, $\vec{a}=-10\vec{i}+8\vec{j}$, $A(11;\,8;\,0)$, $B(0;\,4;\,-2)$.
22. $\vec{f_1}=-6\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{f_2}=-3\vec{i}+11\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{f_3}=6\vec{i}-10\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $A(2;\,7;\,-8)$, $B(-4;\,-9;\,-2)$.
23. $\vec{f_1}=-7\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{f_2}=-9\vec{i}-7\vec{j}+11\vec{k}$, $\vec{f_3}=7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}=-2\vec{i}-8\vec{j}-3\vec{k}$, $A(4;\,6;\,-7)$, $B(-2;\,-6;\,-6)$.
24. $\vec{f_1}=-9\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{f_2}=11\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{f_3}=-6\vec{i}-7\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{a}=3\vec{i}-9\vec{j}-4\vec{k}$, $A(3;\,-8;\,5)$, $B(11;\,2;\,-7)$.
25. $\vec{f_1}=7\vec{i}+10\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{f_2}=2\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{f_3}=6\vec{i}-10\vec{j}-9\vec{k}$, $\vec{a}=7\vec{i}+11\vec{j}-10\vec{k}$, $A(1;\,-3;\,-6)$, $B(6;\,-3;\,4)$.
26. $\vec{f_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}$, $\vec{f_2}=-4\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{f_3}=7\vec{i}+11\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{a}=11\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $A(-7;\,-7;\,7)$, $B(-8;\,-5;\,-2)$.
27. $\vec{f_1}=-\vec{i}+9\vec{j}+9\vec{k}$, $\vec{f_2}=-10\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{f_3}=\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{a}=-9\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$, $A(10;\,-9;\,8)$, $B(-7;\,3;\,9)$.
28. $\vec{f_1}=9\vec{i}+10\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{f_2}=11\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{f_3}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{a}=6\vec{i}-9\vec{j}-2\vec{k}$, $A(9;\,-7;\,6)$, $B(1;\,4;\,-6)$.
29. $\vec{f_1}=-3\vec{i}+9\vec{j}+11\vec{k}$, $\vec{f_2}=\vec{i}-9\vec{j}+11\vec{k}$, $\vec{f_3}=11\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, $A(-6;\,-8;\,2)$, $B(-5;\,-4;\,3)$.
30. $\vec{f_1}=-2\vec{i}+8\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{f_2}=-9\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{f_3}=-6\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{a}=-7\vec{i}-7\vec{j}-2\vec{k}$, $A(-8;\,4;\,-7)$, $B(-9;\,1;\,2)$.

Задача 6. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Найти векторное произведение:

а) $[\vec{a},\vec{b}]$;

б) $[\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}]$.

1. $\vec{a}=-3\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-7\vec{j}+2\vec{k}$.
2. $\vec{a}=3\vec{i}+7\vec{j}-9\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
3. $\vec{a}=-6\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}, \vec{b}=7\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.
4. $\vec{a}=-4\vec{i}+11\vec{j}+7\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}-9\vec{k}$.

5. $\vec{a}=-4\vec{i}+\vec{j}, \vec{b}=2\vec{i}+10\vec{j}+12\vec{k}$.
6. $\vec{a}=2\vec{i}+10\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=5\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$.
7. $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=-3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$.
8. $\vec{a}=9\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}-8\vec{k}$.
9. $\vec{a}=2\vec{i}-6\vec{j}+7\vec{k}, \vec{b}=10\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.
10. $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}, \vec{b}=-8\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$.
11. $\vec{a}=7\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}, \vec{b}=-6\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.
12. $\vec{a}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$.
13. $\vec{a}=4\vec{i}+8\vec{j}-3\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}$.
14. $\vec{a}=-3\vec{i}-9\vec{j}+2\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}+6\vec{k}$.
15. $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}, \vec{b}=10\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$.
16. $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.
17. $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=-4\vec{i}-7\vec{j}+5\vec{k}$.
18. $\vec{a}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.
19. $\vec{a}=2\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=8\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.
20. $\vec{a}=-8\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}, \vec{b}=-6\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$.
21. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}, \vec{b}=5\vec{i}+9\vec{j}+10\vec{k}$.
22. $\vec{a}=11\vec{i}-8\vec{j}-7\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$.
23. $\vec{a}=-\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$.
24. $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}, \vec{b}=5\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$.
25. $\vec{a}=3\vec{i}+9\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}$.
26. $\vec{a}=8\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$.
27. $\vec{a}=5\vec{i}+6\vec{j}-9\vec{k}, \vec{b}=-3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.
28. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{b}=-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$.
29. $\vec{a}=7\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}, \vec{b}=5\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$.
30. $\vec{a}=-3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$.

Задача 7. Даны вершины треугольника ABC. Найти:

а) площадь треугольника ABC;

б) высоту, проведенную из вершины B.

1. $A(-5; 4; 2)$, $B(-2; 6; 8)$, $C(-2; 4; 6)$.
2. $A(4; -4; 3)$, $B(4; -4; 6)$, $C(8; -3; -1)$.
3. $A(8; 2; -5)$, $B(5; 1; -2)$, $C(7; -1; 2)$.
4. $A(1; 1; 5)$, $B(3; 7; 6)$, $C(5; 3; 6)$.
5. $A(1; 5; -6)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(1; 1; 5)$.
6. $A(5; -3; 8)$, $B(-8; 8; 1)$, $C(7; -6; -1)$.
7. $A(1; 5; 5)$, $B(1; -3; 6)$, $C(-3; 7; -5)$.
8. $A(8; 2; 3)$, $B(9; 7; -5)$, $C(7; -5; 7)$.
9. $A(2; 5; -3)$, $B(6; 8; -3)$, $C(6; 8; -6)$.

10. $A(-6;\ 1;\ -1)$, $B(2;\ 2;\ -6)$, $C(6;\ -2;\ 2)$.
11. $A(5;\ 4;\ -2)$, $B(3;\ 7;\ 7)$, $C(-4;\ 3;\ -6)$.
12. $A(4;\ -5;\ 4)$, $B(5;\ -1;\ 5)$, $C(-1;\ -5;\ 9)$.
13. $A(8;\ -5;\ 0)$, $B(-5;\ -1;\ 9)$, $C(7;\ 2;\ 3)$.
14. $A(-3;\ 2;\ -5)$, $B(1;\ 3;\ -1)$, $C(-4;\ 8;\ 2)$.
15. $A(0;\ -1;\ 6)$, $B(1;\ 3;\ -3)$, $C(2;\ 6;\ 7)$.
16. $A(8;\ -3;\ -1)$, $B(1;\ 2;\ 3)$, $C(-4;\ 1;\ -3)$.
17. $A(-3;\ 9;\ -7)$, $B(6;\ 9;\ 6)$, $C(5;\ 0;\ 3)$.
18. $A(5;\ -6;\ 9)$, $B(-2;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ 5;\ -5)$.
19. $A(4;\ 5;\ 6)$, $B(-6;\ 3;\ -8)$, $C(5;\ 3;\ -1)$.
20. $A(-6;\ -3;\ 3)$, $B(4;\ 6;\ 9)$, $C(6;\ 2;\ 3)$.
21. $A(-2;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 8)$, $C(-1;\ 4;\ -3)$.
22. $A(-7;\ -3;\ 3)$, $B(2;\ -8;\ 2)$, $C(7;\ -3;\ 5)$.
23. $A(5;\ -6;\ 6)$, $B(-7;\ 3;\ 0)$, $C(4;\ -4;\ 4)$.
24. $A(-7;\ 0;\ 4)$, $B(7;\ 5;\ -6)$, $C(9;\ 9;\ 2)$.
25. $A(-2;\ 1;\ -1)$, $B(8;\ 3;\ 7)$, $C(4;\ 8;\ 4)$.
26. $A(8;\ -2;\ 4)$, $B(7;\ -5;\ -1)$, $C(-5;\ 2;\ 8)$.
27. $A(-2;\ 8;\ -4)$, $B(7;\ -7;\ 5)$, $C(3;\ 1;\ 7)$.
28. $A(-7;\ 2;\ 7)$, $B(-1;\ 6;\ -7)$, $C(5;\ 4;\ -8)$.
29. $A(4;\ 5;\ 4)$, $B(6;\ -6;\ 1)$, $C(0;\ -4;\ -7)$.
30. $A(-7;\ 8;\ 1)$, $B(8;\ 0;\ -4)$, $C(-1;\ -5;\ 6)$.

Задача 8. К точке A приложены силы $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$.

а) Найти момент равнодействующей этих сил относительно точки B.

б) Сравнить модули моментов равнодействующей этих сил относительно точек B и C.

1. $\vec{f}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{f}_2 = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f}_3 = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $A(-1;\ 6;\ 3)$, $B(-1;\ 4;\ 6)$, $C(1;\ 2;\ 5)$.
2. $\vec{f}_1 = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{f}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{f}_3 = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $A(-2;\ -6;\ -3)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(5;\ 2;\ 6)$.
3. $\vec{f}_1 = 4\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{f}_2 = \vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f}_3 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k}$, $A(-1;\ 4;\ -1)$, $B(11;\ -4;\ 0)$, $C(-3;\ -2;\ 7)$.
4. $\vec{f}_1 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{f}_2 = -\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{f}_3 = -5\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$, $A(9;\ -2;\ 3)$, $B(-5;\ -4;\ -2)$, $C(-7;\ 2;\ -1)$.
5. $\vec{f}_1 = 10\vec{i} - 6\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{f}_2 = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f}_3 = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $A(-8;\ 2;\ 4)$, $B(7;\ -5;\ -3)$, $C(-1;\ -2;\ 0)$.
6. $\vec{f}_1 = -10\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f}_2 = 5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f}_3 = -5\vec{j} + 4\vec{k}$, $A(2;\ -8;\ -4)$, $B(-7;\ -7;\ 5)$, $C(3;\ 0;\ 4)$.
7. $\vec{f}_1 = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{f}_3 = -2\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}$,

$A(-4; 5; -4)$, $B(6; 1; 6)$, $C(1; -4; 7)$.

8. $\vec{f_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{f_2} = -9\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{f_3} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$, $A(7; -8; -1)$, $B(-8; 10; -4)$, $C(1; -5; 6)$.
9. $\vec{f_1} = 4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{f_2} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{f_3} = -5\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$, $A(-1; -6; -3)$, $B(1; 4; -6)$, $C(1; -2; -5)$.
10. $\vec{f_1} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{f_2} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{f_3} = -6\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $A(2; -6; 3)$, $B(1; -1; 10)$, $C(-5; -2; 6)$.
11. $\vec{f_1} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_2} = 2\vec{i} + 9\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{f_3} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $A(-1; -6; 3)$, $B(-1; 4; -6)$, $C(10; 2; -5)$.
12. $\vec{f_1} = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{f_2} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{f_3} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $A(9; 2; 3)$, $B(-5; -4; 2)$, $C(5; -4; 1)$.
13. $\vec{f_1} = 5\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f_2} = -8\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_3} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}$, $A(0; 2; -4)$, $B(-7; 5; -3)$, $C(-1; -2; 9)$.
14. $\vec{f_1} = 12\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f_2} = -9\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_3} = 2\vec{j} + 7\vec{k}$, $A(-2; -8; 6)$, $B(7; -7; -5)$, $C(-3; 1; -4)$.
15. $\vec{f_1} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f_2} = 3\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{f_3} = \vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$, $A(0; -5; 4)$, $B(-6; -1; -6)$, $C(-1; 0; -2)$.
16. $\vec{f_1} = -9\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_2} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f_3} = 11\vec{i} - 2\vec{k}$, $A(-7; -8; 10)$, $B(8; 4; 4)$, $C(1; 5; 10)$.
17. $\vec{f_1} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{f_2} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{f_3} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $A(-1; 6; -3)$, $B(1; -4; -6)$, $C(1; 8; -5)$.
18. $\vec{f_1} = 9\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{f_2} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{f_3} = -5\vec{i} + 11\vec{j} + 2\vec{k}$, $A(-2; 6; -3)$, $B(1; 1; 10)$, $C(5; -2; 9)$.
19. $\vec{f_1} = 3\vec{i} - 9\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{f_2} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_3} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$, $A(1; 6; -3)$, $B(-1; -4; 6)$, $C(1; -2; 5)$.
20. $\vec{f_1} = \vec{i} - 10\vec{j}$, $\vec{f_2} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{f_3} = 8\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $A(-1; 2; 3)$, $B(-5; -1; 2)$, $C(-6; -2; -1)$.
21. $\vec{f_1} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{f_2} = -9\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_3} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}$, $A(8; -2; 4)$, $B(-7; -5; -3)$, $C(-1; 2; 9)$.
22. $\vec{f_1} = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{f_2} = -9\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_3} = 5\vec{j} - 9\vec{k}$, $A(2; 9; 4)$, $B(7; 10; 5)$, $C(-3; 2; -4)$.
23. $\vec{f_1} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{f_2} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{f_3} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $A(4; -5; 0)$, $B(6; -1; -6)$, $C(1; 2; -7)$.
24. $\vec{f_1} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{f_2} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{f_3} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $A(-7; -8; 4)$, $B(3; 0; 4)$, $C(-1; 5; 6)$.
25. $\vec{f_1} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{f_2} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f_3} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 7\vec{k}$, $A(-1; 6; 3)$, $B(-1; 4; 6)$, $C(1; 2; 5)$.
26. $\vec{f_1} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{f_2} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{f_3} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $A(-9; 2; -3)$, $B(5; -4; 2)$, $C(-5; -2; 1)$.

27. $\vec{f}_1 = 11\vec{i} - 6\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{f}_2 = 10\vec{i} - \vec{j} + 12\vec{k}$, $\vec{f}_3 = 4\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{k}$,
$A(8; -2; 4)$, $B(-7; -5; -3)$, $C(-1; 2; 9)$.
28. $\vec{f}_1 = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{f}_2 = -9\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f}_3 = 5\vec{j} - 2\vec{k}$,
$A(-2; 8; -4)$, $B(-7; 7; 5)$, $C(3; 2; 4)$.
29. $\vec{f}_1 = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f}_2 = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{f}_3 = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$,
$A(4; 5; 4)$, $B(-6; -1; 6)$, $C(1; 0; -7)$.
30. $\vec{f}_1 = -8\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f}_2 = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{f}_3 = 11\vec{i} + 2\vec{k}$,
$A(-7; 8; 1)$, $B(8; 0; -4)$, $C(-1; -5; -6)$.

Задача 9.

а) Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

б) Даны точки A, B, C и D, проверить, лежат ли эти точки в одной плоскости.

1. а) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$;
б) $A(-5; 4; 2)$, $B(-2; 6; 8)$, $C(-2; 4; 6)$, $D(1; -1; 5)$.
2. а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$;
б) $A(4; -4; -3)$, $B(4; -4; 6)$, $C(8; -3; -1)$, $D(-9; -8; -1)$.
3. а) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$;
б) $A(8; 2; -5)$, $B(5; 1; -2)$, $C(7; -1; 2)$, $D(-5; 3; -4)$.
4. а) $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 1{,}5\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$;
б) $A(1; 1; 5)$, $B(3; 7; 6)$, $C(5; 3; 6)$, $D(-18; -2; 1)$.
5. а) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$;
б) $A(1; 5; -6)$, $B(-1 ;2; 1)$, $C(1; 1; 5)$, $D(3; -4; 20)$.
6. а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$;
б) $A(5; -3; -8)$, $B(-8; -8; -1)$, $C(-7; -6; -1)$,
$D(3; -2; -6)$.
7. а) $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}, \vec{c} = 11\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$;
б) $A(1; 5; -5)$, $B(-1; -3; -6)$, $C(-3; 7; -5)$, $D(-9; -8; -7)$.
8. а) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = -4\vec{k}$;
б) $A(8; 2; 3)$, $B(9; 7; -5)$, $C(7; -5; 7)$, $D(5; -8; 3)$.
9. а) $\vec{a} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$;
б) $A(1; -5; -5)$, $B(8; 7; -6)$, $C(4; 1; -5)$, $D(-5; -1; 3)$.
10. а) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = 8\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}, \vec{c} = 6\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$;
б) $A(-6; 1; -1)$, $B(2; 2; -6)$, $C(6; -2; 2)$, $D(3; 1; -4)$.
11. а) $\vec{a} = 7\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$;
б) $A(5; 4; -2)$, $B(3; 7; 7)$, $C(-4; 3; -6)$, $D(-2; 5; -1)$.
12. а) $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}$;
б) $A(4; -5; 4)$, $B(5; -1; -5)$, $C(-1; -5; 9)$, $D(-2; 3; -6)$.
13. а) $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = -\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{c} = 5\vec{i} - 2\vec{k}$;
б) $A(8; -5; 0)$, $B(-5; -1; 9)$, $C(-7; -2; -3)$, $D(14; -7; -5)$.

14. а) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{b}=-7\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}, \vec{c}=-2\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$;
б) $A(-3;\,9;\,-5)$, $B(-6;\,5;\,-1)$, $C(-7;\,-8;\,2)$, $D(-5;\,-3;\,-1)$.
15. а) $\vec{a}=-4\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}, \vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$;
б) $A(0;\,-1;\,-6)$, $B(1;\,20;\,-3)$, $C(2;\,6;\,7)$, $D(2;\,-4;\,9)$.
16. а) $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}, \vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$;
б) $A(4;\,-3;\,-1)$, $B(1;\,2;\,7)$, $C(-4;\,-1;\,-3)$, $D(-2;\,3;\,5)$.
17. а) $\vec{a}=9\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}, \vec{b}=-5\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=7\vec{j}+4\vec{k}$;
б) $A(-3;\,9;\,-7)$, $B(-6;\,9;\,-6)$, $C(5;\,0;\,-3)$, $D(4;\,-5;\,1)$.
18. а) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-9\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}, \vec{c}=-\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$;
б) $A(5;\,-6;\,9)$, $B(-2;\,4;\,1)$, $C(-1;\,5;\,-5)$, $D(1;\,4;\,-8)$.
19. а) $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k}, \vec{b}=-4\vec{i}-3\vec{j}-7\vec{k}, \vec{c}=-5\vec{i}-27\vec{j}+10\vec{k}$;
б) $A(4;\,7;\,-6)$, $B(-6;\,1;\,-8)$, $C(3;\,-4;\,-1)$, $D(-1;\,-2;\,-4)$.
20. а) $\vec{a}=-\vec{i}-\vec{j}+9\vec{k}, \vec{b}=7\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}, \vec{c}=9\vec{i}+7\vec{j}-13\vec{k}$;
б) $A(-5;\,-3;\,5)$, $B(-3;\,-6;\,8)$, $C(-3;\,0;\,2)$, $D(1;\,-5;\,7)$.
21. а) $\vec{a}=-10\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}, \vec{b}=10\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k}, \vec{c}=-3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$;
б) $A(-2;\,-1;\,1)$, $B(5;\,6;\,-8)$, $C(-1;\,4;\,-3)$, $D(2;\,-6;\,2)$.
22. а) $\vec{a}=2\vec{i}+9\vec{j}-5\vec{k}, \vec{b}=-8\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}, \vec{c}=-3\vec{i}-\vec{k}$;
б) $A(-7;\,-3;\,3)$, $B(3;\,-8;\,2)$, $C(-12;\,-5;\,6)$, $D(4;\,2;\,-4)$.
23. а) $\vec{a}=10\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=-3\vec{i}+11\vec{j}+7\vec{k}, \vec{c}=23\vec{i}-13\vec{j}-\vec{k}$;
б) $A(-5;\,-6;\,9)$, $B(-7;\,3;\,0)$, $C(4;\,-4;\,7)$, $D(-3;\,1;\,2)$.
24. а) $\vec{a}=7\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}+9\vec{j}+\vec{k}, \vec{c}=-9\vec{i}+13\vec{j}-\vec{k}$;
б) $A(-7;\,-1;\,-20)$, $B(7;\,5;\,-6)$, $C(9;\,6;\,2)$, $D(2;\,3;\,-5)$.
25. а) $\vec{a}=-6\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-9\vec{j}+9\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$;
б) $A(-3;\,7;\,-1)$, $B(14;\,-3;\,-7)$, $C(4;\,8;\,-1)$, $D(5;\,4;\,-3)$.
26. а) $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k}, \vec{b}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$;
б) $A(8;\,-2;\,5)$, $B(9;\,-5;\,-1)$, $C(-5;\,2;\,8)$, $D(-7;\,1;\,5)$.
27. а) $\vec{a}=-2\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$;
б) $A(-2;\,8;\,-4)$, $B(7;\,-7;\,5)$, $C(3;\,1;\,7)$, $D(2;\,3;\,8)$.
28. а) $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}-8\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{c}=-2\vec{i}-\vec{j}-11\vec{k}$;
б) $A(-7;\,2;\,9)$, $B(-1;\,-6;\,-7)$, $C(5;\,-4;\,-8)$, $D(2;\,3;\,4)$.
29. а) $\vec{a}=-2\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$;
б) $A(3;\,5;\,4)$, $B(9;\,-6;\,-1)$, $C(0;\,-4;\,-7)$, $D(-5;\,9;\,1)$.
30. а) $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}-8\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{c}=-2\vec{i}-\vec{j}-11\vec{k}$;
б) $A(-7;\,8;\,1)$, $B(8;\,0;\,-4)$, $C(-1;\,-5;\,-6)$, $D(2;\,9;\,1)$.

Задача 10. Даны вершины пирамиды $ABCD$.
Найти:
а) объем пирамиды $ABCD$;

б) высоту, опущенную из вершины A.

1. $A(-1; 0; 2)$, $B(3; 4; 0)$, $C(-1; -2; 3)$, $D(6; 3; 1)$.
2. $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.
3. $A(-2; 0; 4)$, $B(-1; 7; 1)$, $C(4; -8; -4)$, $D(1; -4; 6)$.
4. $A(1; -1; 6)$, $B(4; 5; -2)$, $C(-1; 3; 0)$, $D(6; 1; 5)$.
5. $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$, $D(1; 5; -3)$.
6. $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 3; 8)$.
7. $A(3; 4; -1)$, $B(0; 5; -2)$, $C(-1; 4; 3)$, $D(3; 0; 2)$.
8. $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(0; -3; 0)$, $D(0; 2; -4)$.
9. $A(0; -3; 2)$, $B(1; 1; 4)$, $C(-2; -2; 2)$, $D(3; -1; 1)$.
10. $A(2; 0; 2)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(1; 5; 4)$, $D(4; -3; 1)$.
11. $A(3; 1; 2)$, $B(4; 6; 5)$, $C(-1; -3; -2)$, $D(-1; 2; 2)$.
12. $A(-3; 1; 4)$, $B(1; -2; 4)$, $C(4; 4; 1)$, $D(-3; -1; 4)$.
13. $A(-5; 2; 9)$, $B(0; 0; 2)$, $C(1; 6; 5)$, $D(1; 7; 9)$.
14. $A(3; 0; -2)$, $B(-1; 1; 4)$, $C(-3; -2; 2)$, $D(-2; 1; -1)$.
15. $A(-2; 0; 2)$, $B(1; 3; 2)$, $C(5; 4; 1)$, $D(-4; 3; -1)$.
16. $A(-2; 1; 0)$, $B(5; 5; 5)$, $C(-4; 3; 0)$, $D(-2; 2; 1)$.
17. $A(2; 0; -2)$, $B(-3; -3; -3)$, $C(1; 1; 1)$, $D(0; 8; 5)$.
18. $A(4; 2; 6)$, $B(1; 1; 0)$, $C(2; 0; 1)$, $D(2; 6; 1)$.
19. $A(-6; 0; 1)$, $B(1; 5; -2)$, $C(2; 7; 1)$, $D(0; 0; 1)$.
20. $A(1; -2; 6)$, $B(4; 1; 1)$, $C(0; 2; 1)$, $D(2; -1; 1)$.
21. $A(5; 2; 1)$, $B(-2; 7; 3)$, $C(-1; 3; 9)$, $D(1; 0; 2)$.
22. $A(2; 2; 2)$, $B(0; 4; 0)$, $C(-3; -1; 5)$, $D(-1; 5; 6)$.
23. $A(-1; 6; 2)$, $B(8; 4; 4)$, $C(5; 4; 0)$, $D(2; 1; 0)$.
24. $A(3; -1; 1)$, $B(0; -2; 3)$, $C(-2; -1; 0)$, $D(3; -9; 2)$.
25. $A(9; 3; -4)$, $B(-3; 1; 2)$, $C(7; 2; 3)$, $D(-1; 0; 7)$.
26. $A(-1; 5; -2)$, $B(1; -1; 2)$, $C(1; -8; 3)$, $D(4; -3; 2)$.
27. $A(-2; 0; -8)$, $B(7; 0; 3)$, $C(1; 2; 4)$, $D(-1; -2; 0)$.
28. $A(-7; -2; 1)$, $B(3; -1; 4)$, $C(3; 5; 1)$, $D(4; -1; 7)$.
29. $A(-1; 2; -1)$, $B(0; 0; 7)$, $C(1; 4; -1)$, $D(4; 1; 7)$.
30. $A(-2; 1; -1)$, $B(2; 6; 8)$, $C(2; -2; 0)$, $D(2; 2; -3)$.

ГЛАВА ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

6. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

6.1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Определение 2.1. Под *системой координат* на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости.

Наиболее распространенной системой является декартова прямоугольная система координат (ДПСК).

Определение 2.2. ДПСК на плоскости задается:

1) осями координат — две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O (начало координат), на каждой из которых выбрано положительное направление;

2) единицей масштаба — отрезок единичной длины (рис. 15).

Оси координат чаще всего располагают вертикально и горизонтально, при этом горизонтальную ось Ox, направленную слева направо, называют *осью абсцисс*. Вертикальную ось Oy, направленную снизу вверх, называют *осью ординат*. Оси координат делят координатную плоскость на четыре области — четверти (или квадранты).

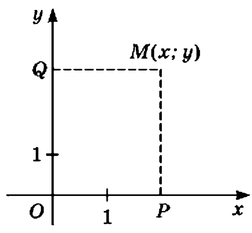


Рис. 15

Единичный отрезок выбирают произвольно, одинаковым для обеих осей. Обозначают ДПСК — Oxy.

Определение 2.3. Плоскость, в которой задана система координат, называют *координатной плоскостью*.

Взяв произвольную точку M на координатной плоскости (рис. 15), найдем ее проекции P и Q на координатные оси Ox и Oy соответственно. Отрезок OP на оси абсцисс, а также число x, соответствующее точке P в выбранном масштабе, называется *абсциссой* точки M; отрезок OQ на оси ординат, а также соответствующее точке Q число y — *ординатой* точки M. Величины $x = OP$, $y = OQ$ называют *прямоугольными координатами* точки M и обозначают $M(x; y)$.

Числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой упорядоченной паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот, каждой точке M плоскости соответствует одна пара чисел x, y.

Введенная система координат называется декартовой по имени французского философа и математика Рене Декарта (1596–1650).

6.2. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Кроме ДПСК существуют и другие системы координат, позволяющие определить положение точки на плоскости с помощью пары действительных чисел.

Рассмотрим систему координат, называемую полярной системой координат (ПСК), в которой отношения между точками плоскости проще изобразить в виде радиусов и углов.

Определение 2.4. Полярная система координат (ПСК) на плоскости задается следующим образом:

1) точкой O (начало координат), называемой полюсом;

2) лучом, исходящим из точки O, называемым полярной осью $O\rho$;

3) единицей масштаба — отрезок единичный длины (рис. 16).

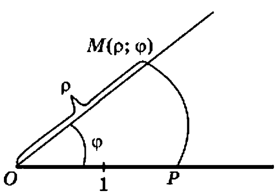


Рис. 16

Определение 2.5. Полярным радиусом ρ точки M плоскости называется расстояние от полюса O до нее, т. е. длина отрезка OM ($OM = \rho$).

Определение 2.6. Полярным углом φ точки M называется угол наклона отрезка OM к полярной оси $O\rho$ (т. е. $\varphi = \angle MOP$).

Определение 2.7. Числа ρ и φ, т. е. полярный радиус и полярный угол точки M, называют ее ***полярными координатами*** и обозначают $M(\rho;\ \varphi)$.

Замечание 2.1. Полярный радиус $\rho \geq 0$, так как ρ — расстояние, величина неотрицательная.

Замечание 2.2. Если полярный угол $\varphi > 0$, то он откладывается против часовой стрелки, а если $\varphi < 0$, то по ходу часовой стрелки.

Замечание 2.3. Так как точка плоскости при повороте ее вокруг полюса на 2π возвращается в прежнее положение, то измерение полярного угла можно рассматривать $-\infty < \varphi < +\infty$ и $M(\rho;\ \varphi + 2\pi n)$. Обычно в качестве полярных углов берут так называемые главные их значения, определяемые неравенствами $0 \leq \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Замечание 2.4. Для точки O (полюса): $\rho = 0$, а угол φ произвольный. Если $M(0;\ \varphi)$, то точка M совпадает с полюсом.

Замечание 2.5. В некоторых источниках рассматривают и отрицательные значения полярного радиуса $\rho < 0$, понимая при этом под точкой $(\rho;\ \varphi)$ — точку $(|\rho|;\ \varphi + \pi)$. Угол $\varphi + \pi$ характеризует направление полярного радиуса, прямо противоположное тому, которое соответствует углу φ. Тогда искомую точку отмечают не на луче, образующем угол φ с полярной осью, а на продолжении этого луча в противоположном направлении на расстоянии $|\rho|$ от полюса. Например, точке $M(-2;\ \pi/3)$ будет соответствовать точка $M'(2;\ \pi + \pi/3)$ (рис. 17). Иными словами, ту же точку можно задать, пользуясь положительным значением ρ. Аналогичным образом, прибавив к полярному углу π, мы всегда можем превратить отрицательное ρ в положительное. Имея это в виду, мы раз и навсегда условимся считать $\rho \geq 0$.

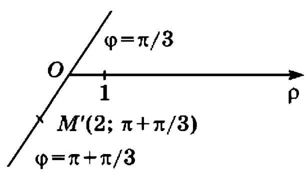


Рис. 17

Для изображения точек в ПСК разобьем ее произвольно на секторы лучами, исходящими из полюса O и образующими соответствующие углы с полярной осью. Проведем концентрические окружности с центром в точке O

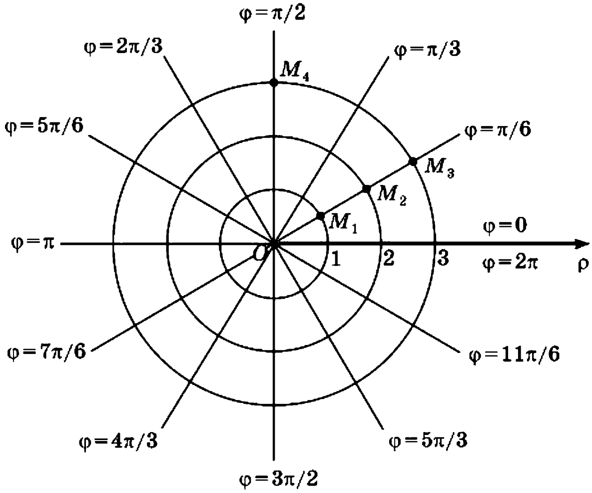


Рис. 18

и радиусами *1*, *2*, *3* (рис. 18). На этом рисунке изображены точки, полярные координаты которых $M_1(1;\ \pi/6)$, $M_2(2;\ \pi/6)$, $M_3(3;\ \pi/6)$, $M_4(3;\ \pi/2)$.

Связь между прямоугольными декартовыми и полярными координатами точек на плоскости

В некоторых случаях удобно работать не декартовыми прямоугольными координатами точек, а с их полярными координатами, и наоборот.

Установим связь между ними.

Рассмотрим на плоскости ДПСК Oxy и ПСК, у которой полюс совпадает с началом координат — точкой O, а полярная ось $O\rho$ совпадает с осью абсцисс Ox.

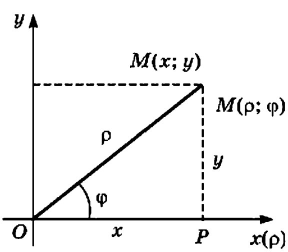


Рис. 19

Пусть M — произвольная точка плоскости. Обозначим $(x;\ y)$ ее прямоугольные декартовы координаты, а полярные $(\rho;\ \varphi)$. Из соотношений в прямоугольном треугольнике OPM (рис. 19) имеем:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (15)$$

Учитывая, что $\rho \geq 0$, из соотношений (15) имеем:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{16}$$

Так как $\rho \geq 0$, заметим, что знак $\sin\varphi$ должен быть одинаков со знаком y, а знак $\cos\varphi$ со знаком x.

Для вычисления угла $\varphi \in (-\pi; \pi]$ можно воспользоваться следующими формулами:

$$\varphi = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{array} \right. \tag{17}$$

Формула (15) выражает прямоугольные декартовы координаты точки через полярные (т. е. по известным полярным координатам можно найти декартовы).

Формулы (16) и (17) позволяют определять полярные координаты точки по ее декартовым координатам.

6.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При решении некоторых задач возникает необходимость в замене одной системы координат другой, более удобной в данном случае.

Определение 2.8. Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется *преобразованием системы координат*.

Чтобы, зная координаты произвольной точки в одной системе координат, вычислить ее координаты в другой системе, необходимо иметь *формулы преобразования координат.*

6.3.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат.

Определение 2.9. Параллельным переносом осей координат называют такой переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

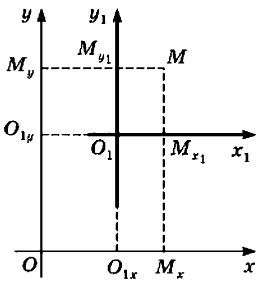


Рис. 20

Пусть начало системы координат $O_1x_1y_1$ точка O_1 имеет координаты $(x_0;\, y_0)$ в исходной системе координат Oxy. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через $(x;\, y)$, а в системе $O_1x_1y_1$ через $(x';\, y')$ (рис. 20).

Спроецируем точку O_1 на координатные оси Ox и Oy , а точку M — на оси Ox, Oy, O_1x_1 и O_1y_1. Обозначим M_{x_1}, M_{y_1}, M_x, M_y проекции точки M на соответствующие оси. Тогда очевидно, что $O_1M_{x_1} = O_{1x}M_x = x'$, $OO_{1x} = x_0$, $OM_x = x$ и $OM_x = OO_{1x} + O_{1x}M_x$, т. е. $x = x_0 + x'$. Аналогично, $y = y_0 + y'$.

Итак,

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y' \end{cases} \tag{18}$$

или

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{19}$$

Полученные формулы позволяют находить координаты произвольной точки плоскости в исходной системе координат, зная координаты этой точки в преобразованной системе (формулы (18)), и наоборот (формулы (19)).

6.3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Определение 2.10. Поворотом осей координат называют такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $O_1x_1y_1$ получена поворотом системы Oxy на угол α. Произвольная точка M плоскости имеет координаты $(x;\ y)$ в старой системе координат и $(x';\ y')$ — в новой.

Введем две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox_1. Тогда полярные координаты точки M в первой системе — $(\rho;\ \alpha+\varphi)$, во второй — $(\rho;\ \varphi)$ (полярный радиус ρ в обеих системах одинаковый) (рис. 21).

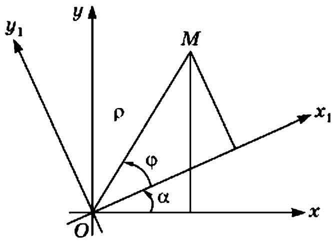


Рис. 21

По формулам перехода от полярных координат к прямоугольным (см. формулу (15)), имеем:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\alpha+\varphi), \\ y = \rho\sin(\alpha+\varphi), \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\sin\varphi\sin\alpha, \\ y = \rho\cos\varphi\sin\alpha + \rho\sin\varphi\cos\alpha. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$\begin{cases} x' = \rho\cos\varphi, \\ y' = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (20)$$

Формулы (20) позволяют определить старые координаты $(x;\ y)$ произвольной точки M при повороте осей на угол α через новые координаты $(x';\ y')$ этой же точки.

Решив систему (20), как систему двух уравнений с двумя неизвестными относительно x', y', получим формулы, выражающие новые координаты $(x'; y')$ точки M через старые $(x; y)$:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) называются *формулами поворота осей*.

6.3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ И ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Рассмотрим такое преобразование системы координат, которое осуществляется путем параллельного переноса и последующего поворота осей координат, масштаб при этом остается неизменным.

В результате параллельного переноса системы координат Oxy получаем систему $O_1\tilde{x}\tilde{y}$, затем поворотом осей $O_1\tilde{x}, O_1\tilde{y}$ на угол α получаем систему $O_1x_1y_1$.

Произвольная точка M плоскости имеет координаты $(x; y)$ в системе координат Oxy, $(\tilde{x}; \tilde{y})$ — в системе $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ и $(x'; y')$ — в $O_1x_1y_1$ (рис. 22).

Так как система $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ получается путем параллельного переноса системы Oxy, воспользовавшись формулами (18), получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + \tilde{x}, \\ y = y_0 + \tilde{y}. \end{cases} \tag{22}$$

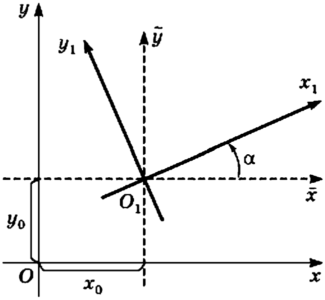


Рис. 22

Так как система $O_1x_1y_1$ получается поворотом системы $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ на угол α, воспользовавшись формулами (20), получим

$$\begin{cases} \tilde{x} = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ \tilde{y} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{23}$$

Подставляя равенства (23) в систему (22), имеем:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ \tilde{y} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{24}$$

Рассматривая здесь x', y' как неизвестные и определяя их из системы (24), найдем:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases} \tag{25}$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты, зная новые (формулы (24)), и наоборот (формулы (25)).

6.4. НЕКОТОРЫЕ КРИВЫЕ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И ИХ ПОСТРОЕНИЕ

Определение 2.11. Линией, определяемой уравнением $F(\rho, \varphi) = 0$, называется геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $F(\rho, \varphi) = 0$.

6.4.1. ОКРУЖНОСТЬ

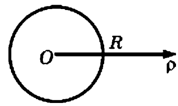
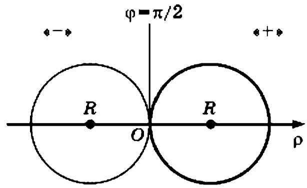
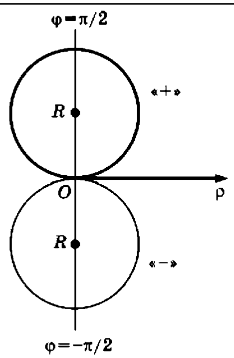
Определение 2.12. Окружность — замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра O), лежащей на той же плоскости, что и кривая.

Уравнения окружностей в ПСК получены путем применения формул (15) для перехода от декартовой системы координат к полярной. Например, составим уравнение окружности $x^2 \pm 2Ry + y^2 = 0$ в полярных координатах. Применим формулы (15):

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$
$$\rho^2\cos^2\varphi \pm 2R\rho\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 0,$$
$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \mp 2R\rho\sin\varphi,$$

Таблица 1

Расположение окружности в ПСК

Уравнение в ДПСК	Уравнение в ПСК	Рисунок в ПСК
1. $x^2 + y^2 = R^2$ Окружность с центром в начале координат радиуса R	$\rho = R$	
2. $x^2 \pm 2Rx + y^2 = 0$ Окружность со смещенным вдоль оси Ox центром	$\rho = \mp 2R\cos\varphi$	
3. $x^2 \pm 2Ry + y^2 = 0$ Окружность со смещенным вдоль оси Oy центром	$\rho = \mp 2R\sin\varphi$	

$$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \mp 2R\rho\sin\varphi,$$
$$\rho^2 = \mp 2R\rho\sin\varphi,\ \rho = \mp 2R\sin\varphi.$$

Различные расположения окружности в ПСК приведены в таблице 1.

6.4.2. СПИРАЛЬ АРХИМЕДА

Спираль (от *франц.* spirale, *лат.* spira — виток) — плоская кривая, которая обычно обходит вокруг одной (или нескольких) точки, приближаясь или удаляясь от нее.

Определение 2.13. Спираль Архимеда — плоская кривая, определяемая в ПСК уравнением $\rho = a\varphi$.

Кривая состоит из двух ветвей, соответствующих положительным и отрицательным значениям φ (рис. 23).

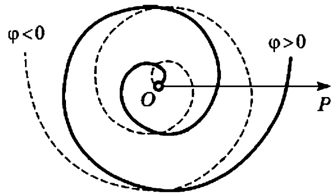


Рис. 23

Кривая названа в честь великого древнегреческого ученого Архимеда (III в. до н. э.), впервые изучившего эту кривую. Полному обороту соответствует одно и то же смещение $|a| \cdot 2\pi$, называемое шагом архимедовой спирали.

6.4.3. РОЗЫ

Определение 2.14. Розы — плоские кривые, уравнения которых в ПСК имеют вид: $\rho = a\sin k\varphi$, где a и k — любые действительные числа (рис. 24).

Вся кривая расположена внутри круга радиуса $|a|$, состоит из конгруэнтных лепестков. Отметим, что в евклидовой геометрии две фигуры называются конгруэнтными (от *лат.* congruens, congruentis — соразмерный, соответствующий, совпадающий), если одна из них может быть переведена в другую сдвигом, вращением и зеркальным отображением.

Если k — целое число, то роза состоит из k лепестков (в случае, когда условие $\rho \geq 0$ (см. п. 6.2.) не учитывается, при четном k количество лепестков удваивается).

Если $k = m/n$, $n > 1$, — рациональное число, то роза состоит из m лепестков, когда m и n нечетные, и из $2m$ лепестков, если одно из этих чисел четное (при этом каждый следующий лепесток частично покрывает предыдущий).

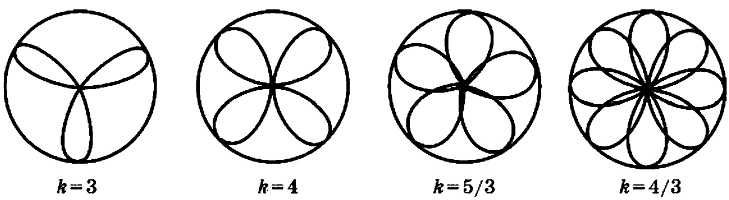
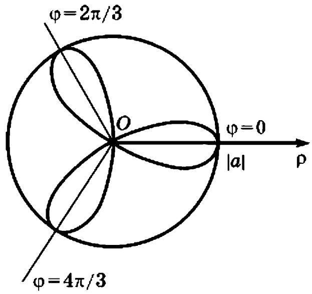
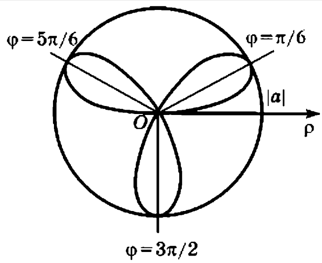
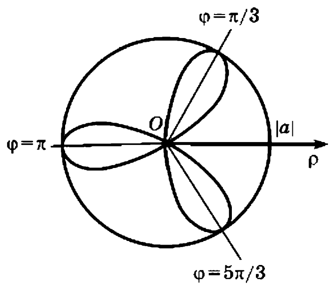
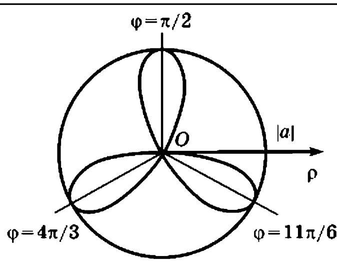


Рис. 24

Таблица 2

Расположение розы в ПСК при $k = 3$

Уравнение в ПСК	Рисунок в ПСК
1. $\rho = a\cos 3\varphi$	
2. $\rho = a\sin 3\varphi$	
3. $\rho = -a\cos 3\varphi$	
4. $\rho = -a\sin 3\varphi$	

Если k — иррациональное число, то роза состоит из бесчисленного множества лепестков, частично накладывающихся друг на друга (табл. 2).

6.4.4. КАРДИОИДА

Определение 2.15. Кардиоида (от *греч.* καρδια — сердце, ειδος — вид) — плоская кривая, которая описывается точкой M окружности диаметра a, катящейся по окружности с таким же диаметром (рис. 25). Различные расположения кардиоиды в ПСК приведены в таблице 3.

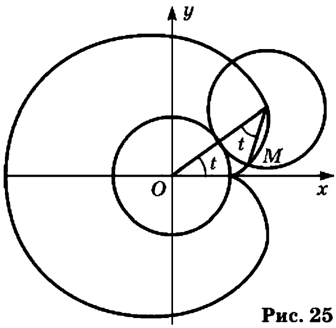
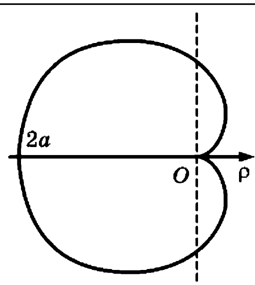
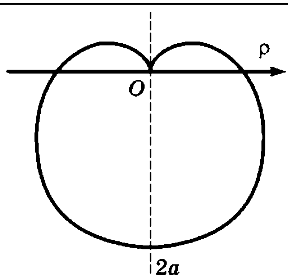


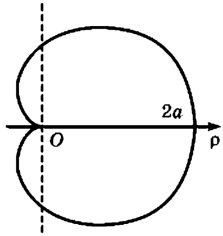
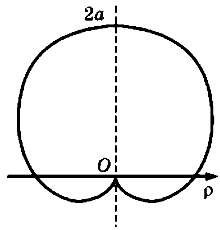
Рис. 25

Таблица 3

Расположение кардиоиды в ПСК

Уравнение в ПСК	Рисунок в ПСК
1. $\rho = a \cdot (1 - \cos\varphi)$	
2. $\rho = a \cdot (1 - \sin\varphi)$	

Продолжение табл. 3

Уравнение в ПСК	Рисунок в ПСК
3. $\rho = a \cdot (1 + \cos\varphi)$	
4. $\rho = a \cdot (1 + \sin\varphi)$	

6.4.5.
ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

Определение 2.16. *Лемниската Бернулли* (от *лат*. lemniscatus — украшенный лентами) — это плоская кривая, определяемая следующим условием: произведение расстояний от каждой точки M лемнискаты Бернулли до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) равно квадрату половины расстояния между F_1 и F_2 (рис. 26). Впервые была рассмотрена Я. Бернулли (1694).

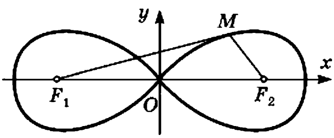


Рис. 26

Правило построения кривых в полярной системе координат

Построение кривых в ПСК $\rho = \rho(\varphi)$ можно осуществлять по точкам, действуя следующим образом.

1. Найти пределы изменения полярного угла, решая неравенство $\rho \geq 0$ (так как ρ — расстояние). При его решении пользуемся таблицей 5.

Таблица 4

Расположение лемнискаты в ПСК

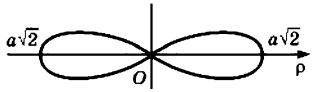
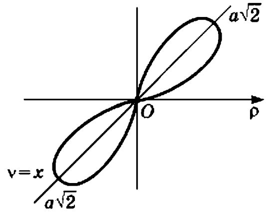
Уравнение в ДПСК	Уравнение в ПСК	Рисунок в ПСК
$(x^2+y^2)^2 = 2a^2\cdot(x^2-y^2)$	$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$	
$(x^2+y^2)^2 = 4a^2xy$	$\rho^2 = 2a^2\sin 2\varphi$	

Таблица 5

Частные случаи решения основных тригонометрических неравенств

Частный случай	Решение	Частный случай	Решение
1. $\sin x \ge -1$	$x \in R$	5. $\sin x \ge 0$	$2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z$
2. $\sin x \le 1$	$x \in R$	6. $\sin x \le 0$	$-\pi + 2\pi n \le x \le 2\pi n,\ n \in Z$
3. $\cos x \ge -1$	$x \in R$	7. $\cos x \ge 0$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
4. $\cos x \le 1$	$x \in R$	8. $\cos x \le 0$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

2. Если функция $\rho = \rho(\varphi)$ периодическая, то необходимо выбрать главные значения углов $-\pi < \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi < 2\pi$ (удобные для конкретного примера). Если функция $\rho = \rho(\varphi)$ непериодическая, то $\varphi \in (-\infty; +\infty)$.

3. Составить таблицу значений ρ и φ. Для этого будем давать значения полярному углу φ через произвольный промежуток α и вычислять соответствующее значение ρ, подставляя в функцию $\rho = \rho(\varphi)$.

4. Используя полученную таблицу, построить точки с координатами $(\varphi; \rho)$.

5. Соединить полученные точки плавной линией.

6.5. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 2.1. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3 в полярной системе координат: $M_1(2;\ 3\pi/4)$, $M_2(3;\ -\pi/6)$, $M_3(3/2;\ 17\pi/4)$.

1. Построить точки в ПСК.
2. Найти их координаты в ДПСК.

Решение.

1. Сначала надо задать ПСК, используя определение 2.4 п. 6.2. Для этого:

а) отмечаем на плоскости точку O — начало координат (полюс);

б) проводим через точку O луч $O\rho$ (полярная ось);

в) от полюса в направлении полярной оси откладываем произвольной длины отрезок и принимаем его за единицу масштаба.

Чтобы изобразить в заданной ПСК точку $M_1(2;\ 3\pi/4)$, проводим через полюс O луч l_1 (полуось) под углом $\varphi = 3\pi/4 = 135°$ к полярной оси $O\rho$ (или повернем полярную ось на угол $3\pi/4$ вокруг точки O против часовой стрелки (замечание 2.2, п. 6.2)). Затем отложим на полученном луче от точки O отрезок OM_1 длины $\rho = 2$ (две единицы выбранного масштаба). Его конец — искомая точка.

Для построения точки $M_2(3;\ -\pi/6)$ надо провести луч l_2 под углом $\varphi = -\pi/6 = -30°$ к полярной оси $O\rho$ (или повернуть полярную ось на угол $\pi/6 = 30°$ вокруг точки O по часовой стрелке) и отложить на нем от точки O отрезок OM_2 длины $\rho = 3$ (три единицы масштаба). Его конец — точка M_2.

Для построения точки $M_3(3/2;\ 17\pi/4)$ нужно провести луч l_3, составляющий с полярной осью угол $\varphi = 17\pi/4 = 4\pi + \pi/4$ или, что то же, $\varphi = \pi/4 = 45°$ — главное значение угла (см. замечание 2.3 п. 6.2) и отложить на нем от полюса 3/2 единицы масштаба. Все три заданные точки построены на рисунке 27.

2. Выполним вторую часть задания. Найдем прямоугольные декартовы координаты точек. Необходимо воспользоваться формулами (15) из п. 6.3. Подставляя вме-

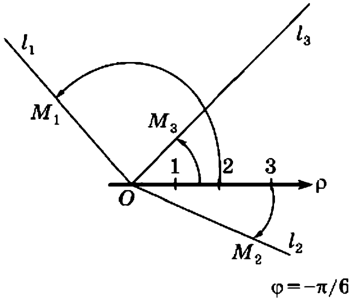


Рис. 27

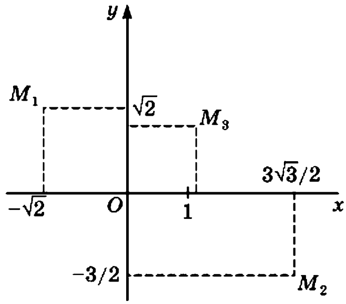


Рис. 28

сто $\rho = 2$, $\varphi = 3\pi/4$ координаты точки $M_1(2;\ 3\pi/4)$, получим:

$$\begin{cases} x = 2\cos(3\pi/4) = 2\cdot(-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}, \\ y = 2\sin(3\pi/4) = 2\cdot(-\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Итак, в ДПСК координаты точки $M_1(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

Аналогично получим координаты точек $M_2(3\sqrt{3}/2; -3/2)$, $M_3(3\sqrt{2}/4; 3\sqrt{2}/4)$ (рис. 28).

Если совместить изображенные ДПСК и ПСК так, чтобы начало координат ДПСК совпало с полюсом ПСК, а направление полярной оси $O\rho$ с направлением оси Ox, то отмеченные точки должны совпасть.

Пример 2.2. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3 в ДПСК: $M_1(-1; -\sqrt{3})$, $M_2(3; -1{,}5)$, $M_3(0;\ 2)$.

1. Найти их полярные координаты.

2. Построить точки в ПСК и ДПСК, совместив эти системы координат.

Р е ш е н и е.

1. Для нахождения полярных координат заданных точек воспользуемся формулами (16) и (17).

Для точки $M_1(-1; -\sqrt{3})$ имеем:

$$x = -1,\ y = -\sqrt{3}.$$

Тогда

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Так как $x < 0$, $y < 0$, то

$$\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} y/x = -\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\pi + \pi/3 = -2\pi/3.$$

Таким образом, в полярных координатах $M_1(2; -2\pi/3)$.

Для точки $M_2(3; -1,5)$ имеем:

$$x = 3, y = -1,5.$$

Тогда

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-1,5)^2} = \sqrt{11,25} \approx 3,4.$$

Так как $x > 0$, $y < 0$, то

$$\varphi = \operatorname{arctg} y/x = \operatorname{arctg}(-1,5/3) = \operatorname{arctg}(-0,5) = -\operatorname{arctg} 0,5 \approx -27°.$$

Таким образом, в полярных координатах $M_2(\sqrt{11,25}; -\operatorname{arctg} 0,5)$.

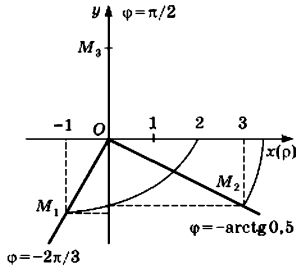


Рис. 29

Для точки $M_3(0; 2)$ имеем:

$$x = 0, y = 2, \rho = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$$

Так как $x = 0$, $y > 0$, то $\varphi = \pi/2$.

Полярные координаты $M_3(2; \pi/2)$.

2. Совместим ПСК с ДПСК и построим точки с заданными координатами (рис. 29).

Построение точек в ПСК рассмотрено в примере 2.1.

Пример 2.3. Даны уравнения кривых в ДПСК $F(x, y) = 0$. Получить их уравнения в ПСК и построить в ПСК:

1) $x^2 + y^2 = 10$;

2) $x^2 + y^2 + 6y = 0$.

Р е ш е н и е.

1. $x^2 + y^2 = 10$.

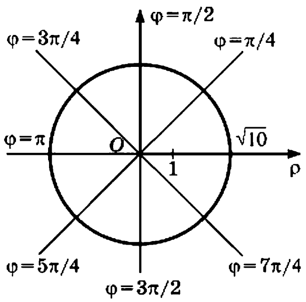


Рис. 30

Определим тип кривой $x^2 + y^2 = 10$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{10} \approx 3,16$ (см. п. 6.4., табл. 1). В ПСК уравнение примет вид:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 10;$$

$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 10;$$

$$\rho^2 = 10; \rho = \pm\sqrt{10}.$$

Так как $\rho \geq 0$, то $\rho = \sqrt{10}$.

При любом значении полярного угла φ полярный радиус ρ постоянный и равен $\sqrt{10}$ (рис. 30).

2. $x^2 + y^2 + 6y = 0$.

Определим тип кривой $x^2 + y^2 + 6y = 0$. Это окружность со смещенным центром (см. п. 6.4, таблица 1). Выделяя полный квадрат в левой части равенства, получим каноническое уравнение:

$$x^2 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = 0;\ x^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

Координаты центра $O(0;\ -3)$, радиус $R = 3$. Формулы (16) позволяют найти уравнение этой окружности в ПСК:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + 6\rho\sin\varphi = 0;$$
$$\rho^2 + 6\rho\sin\varphi = 0;\ \rho\cdot(\rho + 6\sin\varphi) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\rho = 0$$

и

$$\rho + 6\sin\varphi = 0.$$

Первое уравнение представляет при любом φ полюс — точку O. Второе уравнение: $\rho + 6\sin\varphi = 0$ дает все точки окружности (в том числе полюс), поэтому первое уравнение можно опустить. Строим кривую $\rho = -6\sin\varphi$ в ПСК.

Проводим построение по правилу п. 6.4:

а) решаем неравенство: $\rho \geq 0$, $-6\sin\varphi \geq 0$, $\sin\varphi \leq 0$. Воспользуемся таблицей 5 (сл. 6): $-\pi + 2\pi n \leq \varphi \leq 2\pi n,\ n \in Z$;

б) выбираем значения полярного угла из промежутка $(-\pi;\ \pi]$ (при $n = 0$ $\ -\pi \leq \varphi \leq 0$);

в) таблица значений φ и ρ:

φ	$-\pi$	$-5\pi/6$	$-3\pi/4$	$-2\pi/3$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0
ρ	0	3	$3\sqrt{2} \approx 4{,}24$	$3\sqrt{3} \approx 5{,}2$	6	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	3	0

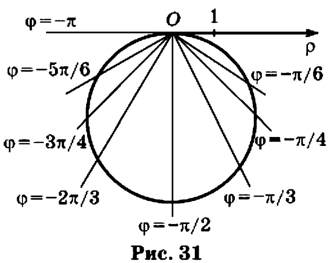


Рис. 31

г) строим точки с найденными координатами (ρ, φ). Построение точек в ПСК было рассмотрено в примере 2.1;

д) соединяем точки плавной линией, получаем изображение окружности радиусом $R = 3$ (см. рис. 31).

Пример 2.4. Даны уравнения кривых в ПСК $F(\rho, \varphi) = 0$. Построить кривую в ПСК и получить ее уравнение в ДПСК:

1) $\rho = 3\varphi/2$;

2) $\rho = 4\cos\varphi$;

3) $\rho = 3 \cdot (1 - \cos\varphi)$.

Решение.

1. $\rho = 3\varphi/2$.

Определим тип кривой $\rho = 3\varphi/2$ — спираль Архимеда (см. п. 6.4). Для построения кривой воспользуемся правилом п. 6.4:

а) найдем пределы изменения полярного угла, решая неравенство $\rho \geq 0$. Тогда $3\varphi/2 \geq 0$, $\varphi \geq 0$;

б) выберем главное значение угла φ. Поскольку $\rho = 3\varphi/2$ является функцией не периодической, то $-\infty < \varphi < +\infty$. С учетом $\varphi \geq 0$ имеем $0 \leq \varphi < +\infty$;

в) составим таблицу значений φ и ρ. Будем давать полярному углу φ значения через промежуток $\alpha = \pi/4$ (выбран произвольно):

при $\varphi = 0$ $\rho = 3/2 \cdot 0 = 0$;

при $\varphi = \pi/4$ $\rho = 3/2 \cdot \pi/4 = 3\pi/8 \approx 3 \cdot 3{,}14/8 \approx 1{,}2$;

при $\varphi = \pi/2$ $\rho = 3/2 \cdot \pi/2 = 3\pi/4 \approx 3 \cdot 3{,}14/4 \approx 2{,}5$;

при $\varphi = 3\pi/4$ $\rho = 3/2 \cdot 3\pi/4 = 9\pi/8 \approx 9 \cdot 3{,}14/8 \approx 3{,}5$ и т. д.

Полученные значения записываем в таблицу:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$
ρ	0	$3\pi/8 \approx 1{,}2$	$3\pi/4 \approx 2{,}5$	$9\pi/8 \approx 3{,}5$	$3\pi/2 \approx 4{,}7$	$15\pi/8 \approx 5{,}9$

φ	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4 = \pi/4 + 2\pi$	$5\pi/2 = \pi/2 + 2\pi$
ρ	$9\pi/4 \approx 7{,}1$	$21\pi/4 \approx 8{,}2$	$3\pi \approx 9{,}5$	$27\pi/8 \approx 9{,}5$	$15\pi/4 \approx 11{,}8$

φ	$11\pi/4 = 3\pi/4 + 2\pi$	$3\pi = \pi + 2\pi$	$13\pi/4 = 3\pi/4 + 2\pi$	$7\pi/2 = 3\pi/2 + 2\pi$	...
ρ	$33\pi/8 \approx 13$	$9\pi/2 \approx 14{,}1$	$39\pi/8 \approx 15{,}3$	$21\pi/4 \approx 16{,}5$	...

г) по таблице строим точки с найденными полярными координатами (ρ; φ): (0; 0); ($3\pi/8$; $\pi/4$); ($3\pi/4$; $\pi/2$); ...

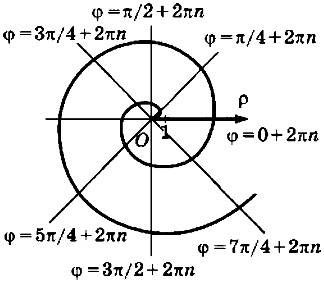


Рис. 32

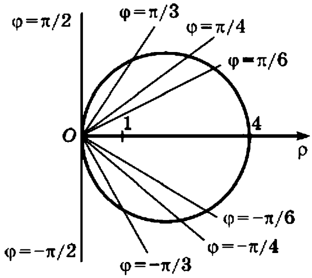


Рис. 33

д) соединяем построенные точки плавной линией, получаем изображение спирали Архимеда (рис. 32).

Запишем уравнение $\rho = \frac{3}{2}\varphi$ в ДПСК, используя формулы (16) и (17):

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ x^2+y^2 = \frac{9}{4}\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}.$$

2. $\rho = 4\cos\varphi$.

Определим тип кривой $\rho = 4\cos\varphi$. Это окружность со смещенным центром и радиусом $R = 4/2 = 2$ (см. п. 6.4, таблица 1).

Построим ее в ПСК, пользуясь правилом п. 6.4:

а) найдем пределы изменения полярного угла, решая неравенство $\rho \geq 0$. Тогда $4\cos\varphi \geq 0$, $\cos\varphi \geq 0$, $-\pi/2 + 2\pi n \leq$ $\leq \varphi \leq \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$ (см. табл. 5, сл. 7);

б) функция $\rho = 4\cos\varphi$ периодическая. Таким образом, выберем значения углов из промежутка $(-\pi;\ \pi]$: $-\pi/2 \leq$ $\leq \varphi \leq \pi/2$;

в) составим таблицу значений φ и ρ;

г) строим точки с найденными координатами $(\rho;\ \varphi)$;

д) соединяем точки плавной линией, получаем изображение окружности радиусом $R = 2$ (рис. 33).

φ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ρ	0	2	$2\sqrt{2} \approx 2{,}8$	$2\sqrt{3} \approx 3{,}4$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0

Отметим, что построение графика $\rho = 4\cos\varphi$ можно провести другим способом. Так как $\rho = \cos\varphi$ функция четная, т. е. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, при построении достаточно ограничиваться значениями $0 \le \varphi \le \pi/2$, а затем отобразить график симметрично относительно полярной оси для углов $-\pi/2 \le \varphi < 0$.

Составим уравнение данной окружности в ДПСК. В силу формул (16) имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 4\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2-4x=0.$$

Приведем к каноническому виду:

$$(x^2-4x)+y^2=0,\ (x^2-4x+4)+y^2=4,\ (x-2)^2+y^2=0.$$

Это окружность со смещенным вдоль оси Ox центром (2; 0) и радиусом 2.

3. $\rho = 3\cdot(1-\cos\varphi)$.

Определим тип кривой $\rho = 3\cdot(1-\cos\varphi)$. Это кардиоида (см. п. 6.4).

Строим заданную кривую:

а) найдем пределы изменения полярного угла, решая неравенство $\rho \ge 0$. Тогда $3\cdot(1-\cos\varphi) \ge 0$, $1-\cos\varphi \ge 0$, $\cos\varphi \le$ ≤ 1. Воспользуемся таблицей 5 (сл. 4), $\varphi \in R$;

б) функция $\rho = 3\cdot(1-\cos\varphi)$ периодическая. Выберем значения полярных углов, т. е. $-\pi < \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi < 2\pi$. Удобнее взять промежуток $0 \le \varphi < 2\pi$;

в) составим таблицу значений φ и ρ:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
ρ	0	$3\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0{,}4$	$3\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0{,}9$	1,5	3	4,5

φ	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$
ρ	$3\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 5{,}1$	$3\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 5{,}6$	6	$3\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$3\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

φ	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
ρ	4,5	3	1,5	$3\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$3\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	0

г) строим точки с найденными координатами (ρ; φ);

д) соединяем точки плавной линией, получаем кардиоиду (рис. 34).

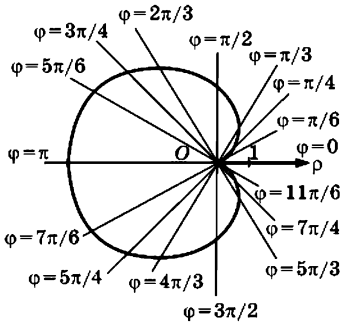


Рис. 34

Заметим, чтобы построить график $\rho = 3 \cdot (1 - \cos\varphi)$ можно воспользоваться четностью функции $\cos\varphi$, построить график для значений $0 \le \varphi \le \pi$, а затем отобразить его симметрично относительно полярной оси для углов $\pi < \varphi \le 2\pi$. При переходе к ДПСК уравнение кардиоиды $\rho = 3 \cdot (1 - \cos\varphi)$ примет вид:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 3\cdot\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\ \sqrt{x^2+y^2} = 3-\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Умножим обе части равенства на $\sqrt{x^2+y^2}$, получим

$$x^2+y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2}-3x,\ x^2+y^2+3x = 3\sqrt{x^2+y^2},$$

или

$$(x^2+y^2+3x)^2 = 9\cdot(x^2+y^2).$$

Пример 2.5. Даны уравнения кривых в ДПСК и ПСК. Построить кривые в ПСК:

1) $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$;

2) $\rho = 3/2\cos 4\varphi$;

3) $\rho = 4\sin 3\varphi$;

4) $\rho = -2\sin 2\varphi$.

Р е ш е н и е.

1. $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ — лемниската Бернулли (см. п. 6.4).

Воспользуемся формулами (16), связывающими декартовы координаты с полярными. Тогда уравнение заданной кривой можно записать в виде:

$$\rho^4 = \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi;$$
$$\rho^4 = \rho^2\cdot(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi);$$
$$\rho^4 - \rho^2\cdot(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0;$$
$$\rho^2\cdot(\rho^2 - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\rho^2 = 0,$$
$$\rho^2 - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0.$$

Первое уравнение представляет при любом φ полюс — точку O. Второе уравнение: $\rho^2 - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0$ дает все точки кардиоиды (в том числе полюс), поэтому первое уравнение можно опустить. Используя формулу $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, получим: $\rho^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\rho^2 = \cos 2\varphi$ или $\rho = \pm\sqrt{\cos 2\varphi}$. Так как $\rho \ge 0 \Rightarrow \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Построим кривую, заданную уравнением $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ (правило п. 6.4):

а) функция определена при $\cos 2\varphi \ge 0$, что равносильно неравенству (табл. 5, сл. 7) $-\pi/2 + 2\pi n \le 2\varphi \le \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$ или $-\pi/4 + \pi n \le \varphi \le \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$;

б) выбираем значения полярного угла: $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$, $3\pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4$;

в) составим таблицу значений φ и ρ, разбивая полученные в пункте 2 отрезки на промежутки длины $\pi/8 = 22{,}5°$:

φ	$-\pi/4$	$-\pi/8$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π	$9\pi/8$	$5\pi/4$
ρ	0	$\sqrt[4]{2}/\sqrt{2} \approx 0{,}85$	1	$\sqrt[4]{2}/\sqrt{2}$	0	0	$\sqrt[4]{2}/\sqrt{2}$	1	$\sqrt[4]{2}/\sqrt{2}$	0

г) строим точки с найденными координатами (ρ, φ);

д) соединяем точки последовательно плавной линией, получаем лемнискату Бернулли (рис. 35).

Отметим, что данную кривую можно построить другим способом.

Поскольку $\rho^2 = \cos 2\varphi$ — периодическая функция с периодом π, то достаточно построить часть кривой при $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$, а другую половину лемнискаты получить поворотом построенной части на угол π.

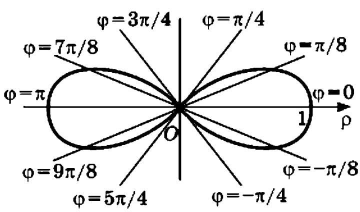


Рис. 35

2. $\rho = 3/2\cos 4\varphi$.

$\rho = 3/2\cos 4\varphi$ — «четырехлепестковая роза» (см. п. 6.4).

Строим данную кривую в ПСК:

а) решаем неравенство: $\rho \geq 0{,}3/2\cos 4\varphi \geq 0$, или $\cos 4\varphi \geq \geq 0$ (см. табл. 5, сл. 7), $-\pi/2 + 2\pi n \leq 4\varphi \leq \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$, $-\pi/8 + \pi n/2 \leq \varphi \leq \pi/8 + \pi n/2$, $n \in Z$;

б) выбираем значения полярного угла: $-\pi/8 \leq \varphi \leq \pi/8$; $3\pi/8 \leq \varphi \leq 5\pi/8$; $7\pi/8 \leq \varphi \leq 9\pi/8$; $11\pi/8 \leq \varphi \leq 13\pi/8$;

в) составим таблицу значений φ и ρ:

φ	$-\pi/8$	$-\pi/12$	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$3\pi/8$	$5\pi/12$
ρ	0	3/4	3/2	3/4	0	0	3/4

φ	$\pi/2$	$7\pi/12$	$5\pi/8$	$7\pi/8$	$11\pi/12$	π	$13\pi/12$
ρ	3/2	3/4	0	0	3/4	3/2	3/4

φ	$9\pi/8$	$11\pi/8$	$17\pi/12$	$3\pi/2$	$19\pi/12$	$13\pi/8$
ρ	0	0	3/4	3/2	3/4	0

г) строим точки с найденными координатами (ρ; φ);

д) соединяем точки плавной линией, получаем изображение кривой «четырехлепестковая роза» (рис. 36).

3. $\rho = 4\sin 3\varphi$.

$\rho = 4\sin 3\varphi$ — «трехлепестковая роза» (см. п. 6.4).

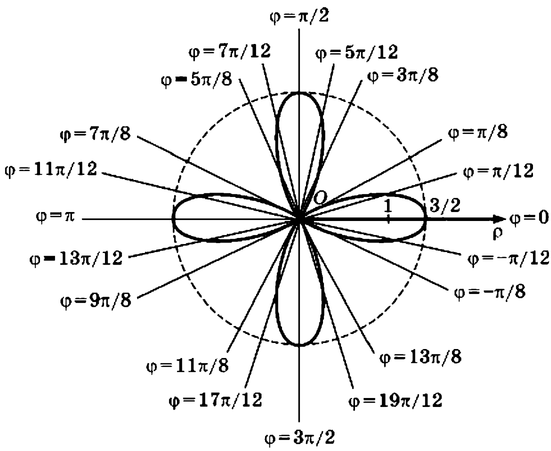


Рис. 36

Строим данную кривую в ПСК:

а) решаем неравенство: $\rho \geq 0$, $4\sin 3\varphi \geq 0$, или $\sin 3\varphi \geq 0$ (см. табл. 5, сл. 5) $2\pi n \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, $2\pi n/3 \leq \varphi \leq \pi/3 + 2\pi n/3$, $n \in Z$;

б) выбираем значения полярного угла $\varphi \in [0;\ 2\pi]$: $0 \leq \varphi \leq \pi/3$; $2\pi/3 \leq \varphi \leq \pi$; $4\pi/3 \leq \varphi \leq 5\pi/3$;

в) разбивая полученные отрезки на промежутки длины $\pi/12 = 15°$, составим таблицу значений φ и ρ:

φ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/4$
ρ	0	$2\sqrt{2} \approx 2{,}83$	4	$2\sqrt{2}$	0	0	$2\sqrt{2}$

φ	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π	$4\pi/3$	$17\pi/12$	$3\pi/2$	$19\pi/12$	$5\pi/3$
ρ	4	$2\sqrt{2}$	0	0	$2\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$	0

г) строим точки с найденными координатами $(\rho;\ \varphi)$;

д) соединяем точки плавной линией, получаем изображение кривой «трехлепестковая роза» (рис. 37).

4. $\rho = -2\sin 2\varphi$.

$\rho = -2\sin 2\varphi$ — «двухлепестковая роза».

Строим данную кривую в ПСК:

а) решаем неравенство: $\rho \geq 0$, $-2\sin 2\varphi \geq 0$, или $\sin 2\varphi \leq 0$ (см. табл. 5, сл. 6), $-\pi - 2\pi n \leq 2\varphi \leq -2\pi n$, $n \in Z$, $-\pi/2 - \pi n \leq \varphi \leq -\pi n$, $n \in Z$;

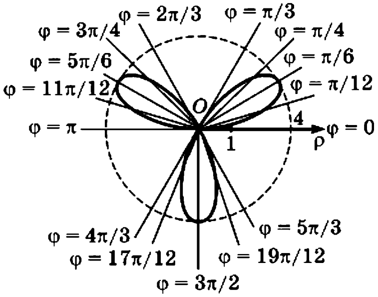


Рис. 37

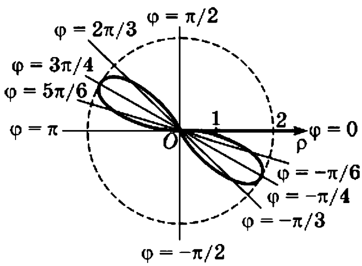


Рис. 38

б) выбираем значения полярного угла из промежутка $(-\pi; \pi]$: $-\pi/2 \le \varphi \le 0$; $\pi/2 \le \varphi \le \pi$;

в) составим таблицу значений φ и ρ:

φ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
ρ	0	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	0

г) строим точки с найденными координатами (ρ, φ).

д) соединяем точки плавной линией, получаем изображение кривой «двухлепестковая роза» (рис. 38).

7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.1. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что понимается под системой координат на плоскости?
2. Какие системы координат на плоскости Вам известны?
3. Как задается декартова прямоугольная система координат?
4. Какую плоскость называют координатной плоскостью?
5. Что называют прямоугольными координатами точки?
6. Как задается полярная система координат?
7. Что называется полярным радиусом?
8. Что называется полярным углом?
9. Какие координаты точки на плоскости называются полярными?
10. Может ли быть $\rho < 0$?
11. Если полярный угол $\varphi > 0$, то он откладывается...
12. Что такое главное значение полярного угла?
13. Как по известным полярным координатам найти декартовы?
14. Как определить полярные координаты точки по ее декартовым координатам?
15. Что называется линией?
16. Запишите уравнение окружности $x^2 \pm 2Ry + y^2 = 0$ в полярных координатах.
17. Дайте определение спирали Архимеда.
18. Дайте определение «роз».
19. Как описывается кардиоида?
20. Какую кривую определяет уравнение $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$?
21. В чем состоит правило построения кривых в полярной системе координат?
22. Как построить точку в полярной системе координат?

23. Сколько пар полярных координат можно поставить в соответствие любой точке плоскости?
24. Сколько точек можно поставить в соответствие любой паре чисел (ρ; φ)?

7.2. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ»

Задача 1. В ПСК заданы точки M_1, M_2, M_3.
1. Построить точки в ПСК.
2. Найти их координаты в ДПСК.

Данные к задаче 1

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
1	$M_1(4;\ \pi/8)$, $M_2(2\sqrt{3};\ -2\pi/3)$, $M_3(3;\ 13\pi/6)$	2	$M_1(9;\ \pi/3)$, $M_2(4\sqrt{3};\ -\pi/6)$, $M_3(4;\ 21\pi/10)$	3	$M_1(5/4;\ \pi/4)$, $M_2(6;\ -5\pi/6)$, $M_3(2;\ 20\pi/3)$
4	$M_1(3;\ \pi/6)$, $M_2(8;\ -3\pi/4)$, $M_3(5;\ 25\pi/12)$	5	$M_1(8;\ 3\pi/8)$, $M_2(10;\ -\pi/3)$, $M_3(7{,}5;\ 5\pi/2)$	6	$M_1(9/2;\ \pi/2)$, $M_2(5;\ -7\pi/8)$, $M_3(3;\ 13\pi/6)$
7	$M_1(2;\ 5\pi/8)$, $M_2(\sqrt{3};\ -\pi/6)$, $M_3(4;\ 9\pi/4)$	8	$M_1(3/2;\ 2\pi/3)$, $M_2(4;\ -\pi/8)$, $M_3(6;\ 25\pi/6)$	9	$M_1(6;\ 3\pi/4)$, $M_2(7;\ 3\pi/8)$, $M_3(2;\ 13\pi/3)$
10	$M_1(5/2;\ 5\pi/6)$, $M_2(1;\ -5\pi/8)$, $M_3(3;\ 17\pi/4)$	11	$M_1(2;\ 7\pi/8)$, $M_2(4;\ -\pi/4)$, $M_3(1;\ 25\pi/6)$	12	$M_1(3;\ 3\pi/5)$, $M_2(9;\ -\pi/2)$, $M_3(2;\ 7\pi/3)$
13	$M_1(5;\ \pi/5)$, $M_2(7;\ -2\pi/3)$, $M_3(3{,}5;\ 9\pi/2)$	14	$M_1(8;\ \pi/12)$, $M_2(6\sqrt{3};\ -5\pi/6)$, $M_3(10;\ 13\pi/3)$	15	$M_1(2\sqrt{2};\ 3\pi/4)$, $M_2(5;\ -\pi/3)$, $M_3(8;\ 13\pi/6)$
16	$M_1(2;\ 7\pi/12)$, $M_2(5/2;\ -\pi/6)$, $M_3(4;\ 7\pi/3)$	17	$M_1(3;\ 5\pi/6)$, $M_2(8;\ -\pi/12)$, $M_3(2;\ 17\pi/4)$	18	$M_1(1;\ 3\pi/4)$, $M_2(4\sqrt{3};\ -\pi/3)$, $M_3(5;\ 19\pi/9)$
19	$M_1(4;\ \pi/3)$, $M_2(\sqrt{2};\ -3\pi/4)$, $M_3(6;\ 17\pi/8)$	20	$M_1(\sqrt{5};\ 3\pi/2)$, $M_2(8;\ -2\pi/9)$, $M_3(2;\ 9\pi/4)$	21	$M_1(5/2;\ 2\pi/3)$, $M_2(2;\ -4\pi/9)$, $M_3(3;\ 13\pi/3)$
22	$M_1(5;\ \pi/8)$, $M_2(\sqrt{3};\ -5\pi/6)$, $M_3(4;\ 17\pi/4)$	23	$M_1(6;\ 4\pi/5)$, $M_2(10;\ -\pi/3)$, $M_3(9;\ 25\pi/6)$	24	$M_1(7;\ 7\pi/9)$, $M_2(11;\ -\pi/4)$, $M_3(3;\ 7\pi/3)$

Продолжение табл.

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
25	$M_1(9;\ \pi/2)$, $M_2(6;\ -3\pi/4)$, $M_3(2;\ 11\pi/5)$	26	$M_1(6;\ 3\pi/4)$, $M_2(12;\ -\pi/2)$, $M_3(5;\ 21\pi/10)$	27	$M_1(2;\ \pi)$, $M_2(1;\ -\pi/8)$, $M_3(6;\ 9\pi/4)$
28	$M_1(1;\ 5\pi/6)$, $M_2(3;\ -\pi/12)$, $M_3(4;\ 13\pi/3)$	29	$M_1(8;\ 2\pi/3)$, $M_2(7;\ -\pi)$, $M_3(3;\ 20\pi/9)$	30	$M_1(2;\ 3\pi/5)$, $M_2(2\sqrt{3}; -\pi/6)$, $M_3(1;\ 9\pi/4)$

Задача 2. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3 в ДПСК.

1. Найти полярные координаты M_1, M_2, M_3.

2. Построить точки M_1, M_2, M_3 в ПСК и ДПСК, совместив эти системы координат.

Данные к задаче 2

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
1	$M_1\ (-1;\ -3)$, $M_2\ (-7;\ -7)$, $M_3\ (0;\ 4)$	2	$M_1\ (-3;\ 6)$, $M_2\ (-1;\ -1)$, $M_3\ (0;\ -6)$	3	$M_1\ (-5;\ 7)$, $M_2(2; -2\sqrt{3})$, $M_3\ (1;\ 0)$
4	$M_1\ (-2;\ 6)$, $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{6})$, $M_3(0;\ 5)$	5	$M_1(6;\ 5)$, $M_2(-3/2;\ -3/2)$, $M_3(0;\ -4)$	6	$M_1(-1;\ 4)$, $M_2(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $M_3(0;\ 7)$
7	$M_1\ (-5;\ 10)$, $M_2(-2\sqrt{3}; -2)$, $M_3\ (-3;\ 0)$	8	$M_1(-3;\ 4)$, $M_2(\sqrt{5}; -\sqrt{5})$, $M_3(8;\ 0)$	9	$M_1\left(0; \frac{4}{3}\right)$, $M_2(-6; -6\sqrt{3})$, $M_3(-1;\ 3)$
10	$M_1(9;\ 4)$, $M_2(-2;\ -2)$, $M_3(0;\ 3/2)$	11	$M_1(4;\ 3)$, $M_2(-\sqrt{5}; -\sqrt{15})$, $M_3(0;\ -2)$	12	$M_1(7;\ 3)$, $M_2(-5/2;\ -5/2)$, $M_3(4;\ 0)$
13	$M_1(2;\ -5)$, $M_2(-3;\ -3)$, $M_3(0;\ 6)$	14	$M_1(-6;\ -5)$, $M_2(-7/2;\ -7/2)$, $M_3(0;\ -8)$	15	$M_1(4;\ 8)$, $M_2(-\sqrt{3}; -1)$, $M_3(-7;\ 0)$
16	$M_1\ (5;\ 6)$ $M_2(-1; -\sqrt{3})$, $M_3(-7; -7\sqrt{2})$	17	$M_1(8;\ 3)$, $M_2(-\sqrt{4}; -\sqrt{12})$, $M_3(0;\ 9/2)$	18	$M_1(-1;\ 5)$, $M_2(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $M_3(0;\ 9)$

Продолжение табл.

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
19	$M_1(-3;-4)$, $M_2(-\sqrt{3};1)$, $M_3(0;-5)$	20	$M_1(3;6)$, $M_2(-4;-4)$, $M_3(0;-7/2)$	21	$M_1(2;7)$, $M_2(-5;-5)$, $M_3(0;1/2)$
22	$M_1(-4;5)$, $M_2(-3/4;-\sqrt{3}/4)$, $M_3(0;-1)$	23	$M_1(5;-10)$, $M_2(-7\sqrt{3};-7)$, $M_3(0;8)$	24	$M_1(3;4)$, $M_2(-\sqrt{5};-\sqrt{5})$, $M_3(0;-3)$
25	$M_1(1;-6)$, $M_2(-3/5;\sqrt{3}/5)$, $M_3(5;0)$	26	$M_1(-1;-2)$, $M_2(-5\sqrt{3};5)$, $M_3(0;-9)$	27	$M_1(-4;-9)$, $M_2(-6;2\sqrt{3})$, $M_3(0;5/2)$
28	$M_1(2;1)$, $M_2(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$, $M_3(6;0)$	29	$M_1(1;5)$, $M_2(-\sqrt{7};-\sqrt{7})$, $M_3(0;1)$	30	$M_1(10;3)$, $M_2(-4;-4\sqrt{3})$, $M_3(0;-7)$

Задача 3. Даны уравнения кривых в ДПСК $F(x;y)=0$.
1. Получить их уравнения в ПСК.
2. Построить кривые в ПСК.

Данные к задаче 3

Вариант	Уравнения кривых	Вариант	Уравнения кривых	Вариант	Уравнения кривых
1	а) $3x^2+3y^2=12$; б) $x^2+y^2-8y=0$	2	а) $5x^2+5y^2=15$; б) $x^2+y^2+3y=0$	3	а) $9x^2+9y^2=16$; б) $x^2+y^2-x=0$
4	а) $7x^2+7y^2=49$; б) $x^2+y^2+14x=0$	5	а) $4x^2+4y^2=25$; б) $x^2+y^2-9y=0$	6	а) $6x^2+6y^2=54$; б) $x^2+y^2+14x=0$
7	а) $8x^2+8y^2=162$; б) $x^2+y^2+7y=0$	8	а) $3x^2+3y^2=60$; б) $x^2+y^2+x=0$	9	а) $2x^2+2y^2=11$; б) $x^2+y^2+12y=0$
10	а) $5x^2+5y^2=40$; б) $x^2+y^2-y=0$	11	а) $4x^2+4y^2=9$; б) $x^2+y^2+5x=0$	12	а) $25x^2+25y^2=4$; б) $x^2+y^2-8x=0$
13	а) $16x^2+16y^2=9$; б) $x^2+y^2+14y=0$	14	а) $11x^2+11y^2=55$; б) $x^2+y^2-7y=0$	15	а) $13x^2+13y^2=169$; б) $x^2+y^2+16x=0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения кривых	Вариант	Уравнения кривых	Вариант	Уравнения кривых
16	а) $49x^2 + 49y^2 = 36$; б) $x^2 - 14x + y^2 = 0$	17	а) $64x^2 + 64y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 + 18y = 0$	18	а) $12x^2 + 12y^2 = 72$; б) $x^2 + y^2 - 17y = 0$
19	а) $5x^2 + 5y^2 = 75$; б) $x^2 + y^2 + 10x = 0$	20	а) $3x^2 + 3y^2 = 54$; б) $x^2 + y^2 - 12{,}5x = 0$	21	а) $36x^2 + 36y^2 = 25$; б) $x^2 + y^2 + 4{,}5y = 0$
22	а) $16x^2 + 16y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 - 16y = 0$	23	а) $25x^2 + 25y^2 = 121$; б) $x^2 + y^2 + 6{,}5x = 0$	24	а) $64x^2 + 64y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 - 12x = 0$
25	а) $9x^2 + 9y^2 = 54$; б) $x^2 + y^2 + 15y = 0$	26	а) $4x^2 + 4y^2 = 81$; б) $x^2 + y^2 - 5y = 0$	27	а) $49x^2 + 49y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 + 9x = 0$
28	а) $10x^2 + 10y^2 = 40$; б) $x^2 + y^2 - 2x = 0$	29	а) $9x^2 + 9y^2 = 144$; б) $x^2 + y^2 + 8y = 0$	30	а) $16x^2 + 16y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Задача 4. Даны уравнения кривых в ПСК $F(\rho; \varphi) = 0$.
1. Построить кривую в ПСК.
2. Записать ее уравнение в ДПСК.

Данные к задаче 4

Вариант	Уравнения кривых	Вариант	Уравнения кривых	Вариант	Уравнения кривых
1	а) $\rho = 2{,}5\varphi$; б) $\rho = -5\cos\varphi$; в) $\rho = 2 \times (1 - \sin\varphi)$	2	а) $\rho = -3\varphi$; б) $\rho = \cos\varphi$; в) $\rho = 0{,}5 \times (1 + \sin\varphi)$	3	а) $\rho = 2\varphi/3$; б) $\rho = -3\sin\varphi$; в) $\rho = 0{,}5 \times (1 + \cos\varphi)$
4	а) $\rho = -2{,}5\varphi$; б) $\rho = 2\sin\varphi$; в) $\rho = 3 \times (1 + \cos\varphi)$	5	а) $\rho = 4\varphi$; б) $\rho = -2\cos\varphi$; в) $\rho = 3 \times (1 + \sin\varphi)$	6	а) $\rho = -5\varphi/6$; б) $\rho = 8\sin\varphi$; в) $\rho = 4 \times (1 - \cos\varphi)$

Продолжение табл.

Вари-ант	Уравнения кривых	Вари-ант	Уравнения кривых	Вари-ант	Уравнения кривых
7	а) $\rho = 2\varphi$; б) $\rho = 6\cos\varphi$; в) $\rho = 1 - \sin\varphi$	8	а) $\rho = -3\varphi/2$; б) $\rho = -9\sin\varphi$; в) $\rho = 5 \times$ $\times (1 + \cos\varphi)$	9	а) $\rho = 3{,}5\varphi$; б) $\rho = 9\cos\varphi$; в) $\rho = 2 \times$ $(1 + \sin\varphi)$
10	а) $\rho = \sqrt{2}\varphi$; б) $\rho = -4\cos\varphi$; в) $\rho = 2{,}5 \times$ $\times (1 - \sin\varphi)$	11	а) $\rho = 5\varphi/4$; б) $\rho = 7\sin\varphi$; в) $\rho = 8 \times$ $\times (1 - \cos\varphi)$	12	а) $\rho = \sqrt{3}\varphi$; б) $\rho = -6\sin\varphi$; в) $\rho = 4 \times$ $\times (1 + \cos\varphi)$
13	а) $\rho = 5\varphi/4$; б) $\rho = 3\cos\varphi$; в) $\rho = 1{,}5 \times$ $\times (1 - \sin\varphi)$	14	а) $\rho = \sqrt{5}\varphi$; б) $\rho = -10\cos\varphi$; в) $\rho = 2 \times$ $\times (1 + \sin\varphi)$	15	а) $\rho = 0{,}5\varphi$; б) $\rho = \sin\varphi$; в) $\rho = 6 \times$ $\times (1 - \cos\varphi)$
16	а) $\rho = \varphi/3$; б) $\rho = -3/2\sin\varphi$; в) $\rho = 10 \times$ $\times (1 + \cos\varphi)$	17	а) $\rho = \varphi/6$; б) $\rho = 7\cos\varphi$; в) $\rho = 9 \times$ $\times (1 - \sin\varphi)$	18	а) $\rho = \sqrt{6}\varphi$; б) $\rho = -6\cos\varphi$; в) $\rho = 4{,}5 \times$ $\times (1 + \sin\varphi)$
19	а) $\rho = 3\varphi/4$; б) $\rho = 5/2\sin\varphi$; в) $\rho = 3{,}5 \times$ $\times (1 + \cos\varphi)$	20	а) $\rho = \sqrt{7}\varphi$; б) $\rho = -8\sin\varphi$; в) $\rho = 1 - \cos\varphi$	21	а) $\rho = \sqrt{8}\varphi$; б) $\rho = 10\cos\varphi$; в) $\rho = 4 \times$ $\times (1 + \sin\varphi)$
22	а) $\rho = \varphi/4$; б) $\rho = -9/2\cos\varphi$; в) $\rho = 5 \times$ $\times (1 - \sin\varphi)$	23	а) $\rho = \sqrt{10}\varphi$; б) $\rho = 5\sin\varphi$; в) $\rho = 7 \times$ $\times (1 - \cos\varphi)$	24	а) $\rho = 2\varphi/5$; б) $\rho = 11\sin\varphi$; в) $\rho = 5{,}5 \times$ $\times (1 + \cos\varphi)$
25	а) $\rho = 3\varphi/5$; б) $\rho = 11\cos\varphi$; в) $\rho = 6 \times$ $\times (1 + \sin\varphi)$	26	а) $\rho = 6\varphi/7$; б) $\rho = -2\sqrt{3}\cos\varphi$; в) $\rho = 3 \times$ $\times (1 - \sin\varphi)$	27	а) $\rho = \varphi/5$; б) $\rho = 2\sqrt{7}\sin\varphi$; в) $\rho = 5{,}5 \times$ $\times (1 + \cos\varphi)$
28	а) $\rho = -2\varphi$; б) $\rho = -2\sqrt{5}\sin\varphi$; в) $\rho = 2{,}5 \times$ $\times (1 - \cos\varphi)$	29	а) $\rho = -4\varphi$; б) $\rho = 3{,}5\cos\varphi$; в) $\rho = 10 \times$ $\times (1 - \sin\varphi)$	30	а) $\rho = -\varphi/2$; б) $\rho = -\cos\varphi$; в) $\rho = 7 \times$ $\times (1 + \sin\varphi)$

Задача 5. Даны уравнения кривых в ДПСК и ПСК. Построить кривые в ПСК.

Данные к задаче 5

Вариант	Уравнения кривых	Вариант	Уравнения кривых
1	а) $(x^2+y^2)^2=18xy$; б) $\rho=5\cos 3\varphi$	2	а) $(x^2+y^2)^2=16/9\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=2\sin 3\varphi$
3	а) $(x^2+y^2)^2=4xy$; б) $\rho=4\cos 3\varphi$	4	а) $(x^2+y^2)^2=13xy$; б) $\rho=-4\cos 2\varphi$
5	а) $(x^2+y^2)^2=4\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=-2\sin 3\varphi$	6	а) $(x^2+y^2)^2=5\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=\sin 4\varphi$
7	а) $(x^2+y^2)^2=9xy$; б) $\rho=2\cos 4\varphi$	8	а) $(x^2+y^2)^2=7xy$; б) $\rho=-\cos 2\varphi$
9	а) $(x^2+y^2)^2=6\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=3\sin 3\varphi$	10	а) $(x^2+y^2)^2=16\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=3\sin 4\varphi$
11	а) $(x^2+y^2)^2=2xy$; б) $\rho=-3\cos 2\varphi$	12	а) $(x^2+y^2)^2=64xy$; б) $\rho=3/2\cos 3\varphi$
13	а) $(x^2+y^2)^2=25\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=3/2\sin 3\varphi$	14	а) $(x^2+y^2)^2=5xy$; б) $\rho=3/2\cos 2\varphi$
15	а) $(x^2+y^2)^2=9\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=-4\sin 2\varphi$	16	а) $(x^2+y^2)^2=xy$; б) $\rho=4\cos 4\varphi$
17	а) $(x^2+y^2)^2=7(x^2-y^2)$; б) $\rho=5\sin 3\varphi$	18	а) $(x^2+y^2)^2=10xy$; б) $\rho=\cos 3\varphi$
19	а) $(x^2+y^2)^2=12\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=2/3\sin 3\varphi$	20	а) $(x^2+y^2)^2=16xy$; б) $\rho=-6\cos 2\varphi$
21	а) $(x^2+y^2)^2=36\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=5\sin 4\varphi$	22	а) $(x^2+y^2)^2=25xy$; б) $\rho=5/2\cos 4\varphi$
23	а) $(x^2+y^2)^2=5\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=3\sin 3\varphi$	24	а) $(x^2+y^2)^2=36xy$; б) $\rho=-5/2\cos 2\varphi$
25	а) $(x^2+y^2)^2=64\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=7/2\sin 3\varphi$	26	а) $(x^2+y^2)^2=6xy$; б) $\rho=2\cos 3\varphi$
27	а) $(x^2+y^2)^2=9/4\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=-6\sin 2\varphi$	28	а) $(x^2+y^2)^2=8xy$; б) $\rho=7\cos 4\varphi$
29	а) $(x^2+y^2)^2=25/4\cdot(x^2-y^2)$; б) $\rho=-4\sin 4\varphi$	30	а) $(x^2+y^2)^2=32xy$; б) $\rho=6\cos 3\varphi$

8. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ: ВИДЫ УРАВНЕНИЙ

8.1. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПАРАЛЛЕЛЬНО ЗАДАННОМУ ВЕКТОРУ

Пусть $M_0(x_0;\, y_0)$ — фиксированная точка плоскости, $\vec{s}=\{l;m\}$ — ненулевой вектор. Тогда *уравнение прямой* на плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{s}$ (рис. 39), *в векторной форме* запишется так:

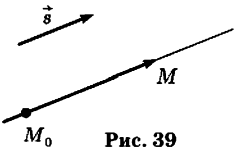


Рис. 39

$$\overline{M_0M}=t\vec{s}, \qquad (26)$$

где параметр t принадлежит множеству действительных чисел; $M(x;\, y)$ — произвольная точка этой прямой; $\vec{s}$ — (в данном случае) *направляющий* вектор полученной прямой.

8.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Перепишем уравнение (26) в координатной форме:

$$\begin{cases} x-x_0=tl; \\ y-y_0=tm. \end{cases} \qquad (26a)$$

Выполнив элементарные преобразования, получим *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x=x_0+tl; \\ y=y_0+tm. \end{cases} \qquad (27)$$

8.3. КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Исключив из системы уравнений (27) параметр t, получим *каноническое уравнение прямой* на плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;\, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{l;m\}$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{28}$$

Если один из коэффициентов l, m в уравнении (28) равен нулю, запись $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ означает, что $x-x_0=0$ в случае, когда $l=0 (m\neq 0)$, или $y-y_0=0$ в случае, когда $m=0$ $(l\neq 0)$.

Случай $l=0$, $m=0$ невозможен, так как вектор $\bar{o}=\{0;0\}$ не задает направление.

Если α и β углы между прямой и координатными осями Ox и Oy соответственно, то

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}, \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

называются *направляющими косинусами прямой.*

8.4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ

Предположим, что на плоскости заданы две различные точки: $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. В этом случае вектор $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$ будет направляющим вектором единственной прямой, *проходящей через две заданные точки*, каноническое уравнение такой прямой запишем в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{29}$$

8.5. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Используя свойство пропорции, преобразуем уравнение (29):

$$(x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1). \tag{29a}$$

Раскроем скобки и перепишем уравнение (29a), введя следующие обозначения:

$$y_2-y_1=A;\ x_2-x_1=-B;\ -Ax_1-By_1=C,$$

в результате чего получим:

$$Ax + By + C = 0. \tag{30}$$

Утверждение 2.1. Если в уравнении (30) $A \neq 0$ или $B \neq 0$, то это уравнение определяет на плоскости некоторую прямую и называется при этом *общим уравнением прямой на плоскости*.

8.6. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ «С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ»

Из общего уравнения прямой (30), если $B \neq 0$, легко получить уравнение вида

$$y = kx + b, \tag{31}$$

т. е. уравнение прямой на плоскости «с угловым коэффициентом k», где $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол, образованный данной прямой с положительным направлением оси абсцисс).

Величина b в уравнении (31) называется *начальной ординатой*, так как это число по абсолютной величине равно длине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. Если прямая проходит через начало координат $O(0; 0)$, то $b = 0$.

8.7. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Исследуем общее уравнение прямой (30):

1) при $C = 0$ $y = -\frac{A}{B}x$ и прямая проходит через начало координат;

2) при $B = 0$ $x = -\frac{C}{A} = a$ и прямая параллельна оси Oy;

3) при $A = 0$ $y = -\frac{C}{B} = b$ и прямая параллельна оси Ox;

4) при $B = C = 0$ $Ax = 0$, $x = 0$, т. е. получаем уравнение оси Oy;

5) при $A = C = 0$ $By = 0$, $y = 0$, т. е. получаем уравнение оси Ox.

8.8. ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ «В ОТРЕЗКАХ»

Помимо известных способов построения прямой на плоскости — по двум точкам, по данной точке и «наклону» прямой — удобно пользоваться так называемым уравнением прямой «в отрезках» на координатных осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{32}$$

которое может быть составлено для любой прямой, не проходящей через начало координат.

В этом уравнении a и b задают координаты точек пересечения прямой с осями абсцисс и ординат соответственно. Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Очевидно, что точки плоскости с координатами (a; 0), (0; b) принадлежат прямой, заданной уравнением (32). Следовательно, рассматриваемая прямая отсекает на осях координат отрезки, значения длины которых соответствуют значениям параметров a, b, взятым по модулю. При этом положительный знак параметра означает, что отрезок отсекается на положительной части соответствующей оси координат, а отрицательный — на отрицательной.

Пример 2.6. Построить прямую, заданную уравнением «в отрезках» на осях:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1.$$

Р е ш е н и е. $a = -2$; $b = 3$ (рис. 40).

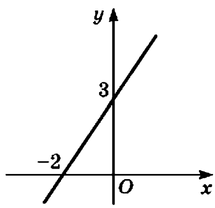


Рис. 40

8.9. НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — фиксированная точка плоскости, $\vec{n}=\{\cos\alpha;\cos\beta\}$ — вектор, заданный своими направляющими косинусами. Тогда уравнение вида $\overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$ задает прямую на плоскости, проходящую через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$, который называется *нормальным* вектором этой прямой.

Запишем скалярное произведение вектора $\overline{M_0M} = \{(x-x_0);(y-y_0)\}$ и вектора $\vec{n} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta\}$ в координатной форме:

$$x\cos\alpha - x_0\cos\alpha + y\cos\beta - y_0\cos\beta = 0. \qquad (33)$$

Теперь, введя обозначение $x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta = p$, получим *нормальное уравнение прямой*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0, \qquad (34)$$

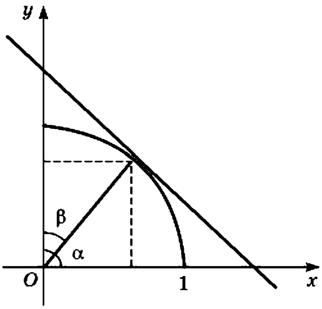


Рис. 41

где α — угол наклона перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую, к оси Ox; β — угол наклона этого перпендикуляра к оси Oy (рис. 41).

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ может быть приведено к нормальному виду при умножении его на нормирующий множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена.

8.10. ПОЛЯРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПРЯМОЙ

Полярными параметрами можно задать положение всякой прямой на плоскости.

Полярным расстоянием прямой (рис. 42) называется длина p перпендикуляра OK, опущенного на прямую из начала координат O. Полярное расстояние может быть положительным или равным нулю ($p \geq 0$).

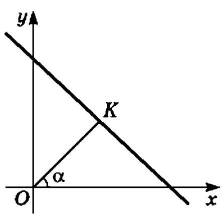


Рис. 42

Полярным углом прямой называется угол α между положительным направлением оси Ox и перпендикуляром, опущенным на прямую из начала координат. Полярное расстояние и полярный угол называются *полярными параметрами прямой*.

При этом нормальное уравнение прямой можно записать в виде:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (35)$$

9. ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ: ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ

Утверждение 2.2. Пусть на плоскости заданы две прямые: $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

В этом случае выполняется одно и только одно из трех условий:

1) прямые не имеют общих точек $\left(\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}\right)$, при этом система линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} Ax + By + C = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{cases}$ несовместна (имеет пустое множество решений);

2) прямые имеют единственную общую точку $\left(\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}\right)$, при этом система линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} Ax + By + C = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение $(x_0;$ $y_0)$, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера:

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}; \qquad (36)$$

$$y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}; \qquad (37)$$

3) прямые совпадают $\left(\dfrac{A}{A_1}=\dfrac{B}{B_1}=\dfrac{C}{C_1}\right)$, при этом система линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} Ax+By+C=0; \\ A_1x+B_1y+C_1=0 \end{cases}$ не определена (имеет бесконечно много решений).

9.1. УСЛОВИЕ, ПРИ КОТОРОМ ТРИ ТОЧКИ ЛЕЖАТ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Три точки $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, $A_3(x_3;\ y_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (38)$$

9.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПАРЫ ТОЧЕК

Пусть заданы точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ и общее уравнение некоторой прямой:

$$Ax+By+C=0.$$

Вычислим значения величин k_1 и k_2 по формулам:

$$k_1=Ax_1+By_1+C; \qquad (39)$$

$$k_2=Ax_2+By_2+C. \qquad (40)$$

Взаимное расположение точек M_1 и M_2 относительно заданной прямой можно определить по следующим признакам:

1) числа k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки, в этом случае точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ лежат по одну сторону от прямой;

2) числа k_1 и k_2 имеют противоположные знаки, в этом случае точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ лежат по разные стороны от прямой;

3) одно из чисел k_1 и k_2 равно нулю (или оба равны нулю), в этом случае точка $M_1(x_1;\ y_1)$ или $M_2(x_2;\ y_2)$ соответственно (или обе) принадлежит прямой.

9.3. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (рис. 43) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (41)$$

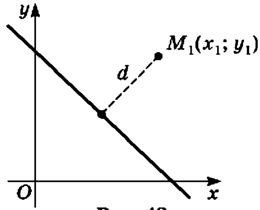


Рис. 43

9.4. ПУЧОК ПРЯМЫХ

Через одну фиксированную точку $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 44) на плоскости можно провести бесконечное множество прямых. Это множество называется *центральным пучком* (пучком) прямых, а точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *центром пучка*. Каждую из прямых пучка (кроме той, которая параллельна оси ординат) можно представить уравнением

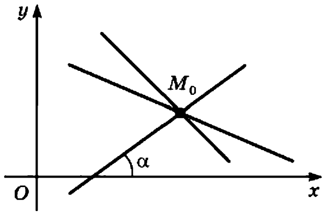


Рис. 44

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (42)$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой (рис. 44).

Уравнение вида (42) называется уравнением *пучка прямых* с центром в точке M_0.

9.5. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Углом между двумя прямыми называется угол α, на который надо повернуть в положительном направлении прямую f вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой $g\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Если пара прямых на плоскости задана общими уравнениями:

$$Ax + By + C = 0 \text{ (рис. 45, прямая } f);$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ (рис. 45, прямая } g),$$

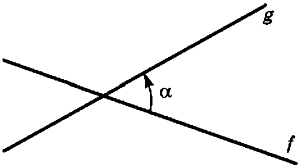


Рис. 45

то косинус угла между этими прямыми может быть вычислен по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|A \cdot A_1 + B \cdot B_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \quad (43)$$

Если пара прямых на плоскости задана уравнениями «с угловым коэффициентом»: $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то тангенс угла между этими прямыми рассчитывается по формуле

$$\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_2k_1}. \quad (44)$$

Если пара прямых на плоскости задана своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2},$$

то косинус угла между этими прямыми определяется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \quad (45)$$

9.6. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Прямые, заданные общими уравнениями:

$$Ax + By + C = 0 \text{ и } A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $A \cdot A_1 + B \cdot B_1 = 0$. Данные прямые параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}.$$

Прямые на плоскости, заданные в виде

$$y = kx + b \text{ и } y = k_1x + b_1,$$

перпендикулярны только в том случае, когда $k = -\frac{1}{k_1}$. Данные прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны, т. е. $k = k_1$.

Прямые, заданные своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2},$$

взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$. Данные прямые параллельны, если только выполнено условие:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

9.7. ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Если на плоскости заданы две прямые: $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, то согласно утверждению 2.2 координаты $(x_0; y_0)$ точки пересечения этих прямых можно вычислить по формулам:

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}; \tag{46}$$

$$y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}. \tag{47}$$

10. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

10.1. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 2.7. Указать особенности в расположении прямых на плоскости (прямая общего положения, проходящая или не проходящая через начало координат; прямая, параллельная оси Ox или Oy):

1) $x - 9 = 0$;
2) $2x + 5y = 0$;
3) $2y = 11$.

Сделать чертеж каждой прямой в системе координат xOy.

Решение.

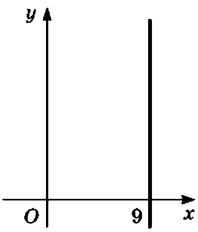


Рис. 46

1. $x - 9 = 0$.

Уравнение $x - 9 = 0$ приведем к виду $x = 9$.

Получим уравнение вида

$x = a$ (см. п. 8.7, сл. 2),

значит, данная прямая параллельна оси Oy и проходит через точку с координатами (9; 0) (рис. 46).

2. $2x + 5y = 0$.

Элементарными преобразованиями уравнение $2x + 5y = 0$ приведем к виду

$$y = -\frac{2}{5}x.$$

Получим уравнение вида

$$y = -\frac{A}{B}x \text{ (см. п. 8.7, сл. 1)},$$

значит, данная прямая проходит через начало координат $O(0; 0)$. Положив $x = 5$, из данного по условию уравнения найдем $y = -2$, значит, данная прямая проходит через точку M с координатами (5; −2). Далее строим прямую, проходящую через точки O и M (рис. 47).

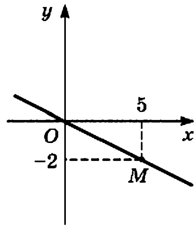


Рис. 47

3. $2y = 11$.

Уравнение $2y = 11$ приведем к виду

$$y = \frac{11}{2}.$$

Получим уравнение вида

$$y = b \text{ (см. п. 8.7, сл. 3)},$$

значит, данная прямая параллельна оси Ox и проходит через точку с координатами (0; 5,5) (рис. 48).

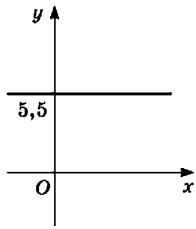


Рис. 48

Пример 2.8. Выбрать из имеющегося списка прямых на плоскости пары: пересекающихся прямых; совпадающих прямых; прямых, не имеющих общих точек:

1) $x + y + 1 = 0$;
2) $x - y - 1 = 0$;
3) $2x = 2y$;
4) $2x - 3y + 5 = 0$;
5) $3x = 3 + 3y$.

Р е ш е н и е. Для того чтобы применить условия параллельности или пересечения прямых (см. п. 9, утверждение 2.2), заданные уравнения перепишем в общем виде. Затем, выписав соотношения между соответствующими коэффициентами, получим:

а) пересекающиеся прямые: *1* и *2*, *1* и *3*, *1* и *4*, *1* и *5*, *2* и *4*, *3* и *4*, *4* и *5*;

б) совпадающие прямые: *2* и *5*;

в) прямые, не имеющие общих точек: −*2* и *3*.

Пример 2.9. Две точки на плоскости заданы координатами: $M_1(2; -2)$ и $M_2(4; 3)$, $\alpha = 135°$ — некоторый угол. Составить:

1) уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, найти ее направляющие косинусы;

2) уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и образующей с осью абсцисс угол α.

Решение.

1. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Одним из направляющих векторов прямой является вектор $\overline{M_1M_2} = \{4-2; 3-(-2)\} = \{2; 5\} = \{l; m\}$.

Запишем уравнение прямой в виде

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}, \quad \text{т. е.} \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{5} \quad (\text{см. п. 8.4}).$$

Чтобы записать уравнение в общем виде, воспользуемся свойством пропорции и получим:

$$5x - 10 = 2y + 4, \quad \text{т. е. } 5x - 2y - 14 = 0.$$

Направляющие косинусы могут быть вычислены по формулам:

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}} \text{ и } \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}} \quad (\text{см. п. 8.3}).$$

Отсюда следует, что косинус угла, образованного данной прямой с положительным направлением оси абсцисс, равен

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29},$$

а косинус угла, образованного данной прямой с положительным направлением оси ординат, равен

$$\frac{5\sqrt{29}}{29}.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и образующей с осью абсцисс угол α.

Воспользуемся уравнением прямой «с угловым коэффициентом»

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}135^\circ = -1.$$

Подставив полученное значение коэффициента k и координаты точки $M_1(2; -2)$ в уравнение

$$y = kx + b,$$

получим:

$$-2 = (-1)\cdot 2 + b,$$

отсюда

$$b = 0.$$

Итак, требуемое уравнение имеет вид

$$y = -x.$$

Пример 2.10. Дано общее уравнение прямой: $3x + 2y + 3 = 0$, записать для нее следующие виды уравнений:

1) каноническое

$$\left(\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\right);$$

2) параметрические

$$\left(\begin{cases} x = x_0 + tl; \\ y = y_0 + tm \end{cases}\right);$$

3) «с угловым коэффициентом»

$$(y = kx + b);$$

4) «в отрезках»

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\right);$$

5) нормальное

$$(x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0).$$

Построить заданную прямую в системе координат xOy.

Р е ш е н и е. Сначала перейдем от общего уравнения прямой к *уравнению «с угловым коэффициентом»*:

$$3x + 2y + 3 = 0;\; 2y = -3x - 3;\; y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Используя последнее из уравнений, найдем координаты некоторой точки $M_0(x_0;\ y_0)$, принадлежащей заданной прямой. Положив $x_0 = 1$, получим:

$$y_0 = -\frac{3}{2}\cdot 1 - \frac{3}{2} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Таким образом, точка M_0 имеет координаты $(1;\ -3)$. Роль направляющего вектора прямой может играть любой ненулевой вектор, перпендикулярный нормальному вектору данной прямой. Из общего уравнения прямой найдем, что ее нормальный вектор $\vec{n} = \{3; 2\}$. Направляющий вектор $\vec{s}$ может быть найден из условия

$$\vec{s}\cdot\vec{n} = 0,$$

поэтому в качестве направляющего вектора выберем

$$\vec{s} = \{-2; 3\}.$$

Теперь запишем *каноническое* уравнение данной прямой:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3}.$$

Для записи *параметрических* уравнений прямой введем параметр

$$t = \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3},$$

отсюда

$$\begin{cases} x-1 = -2t; \\ y+3 = 3t, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x = 1-2t; \\ y = 3t-3. \end{cases}$$

Нормальное уравнение прямой легко получить из общего уравнения, умножив его на соответствующий нормирующий множитель $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. В рассматриваемом случае $A = 3$, $B = 2$, $C = 3 > 0$.

Тогда

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{9+4}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

(напомним, что знак при вычислении нормирующего множителя должен быть противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой).

Таким образом, нормальное уравнение прямой имеет вид

$$-\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{3}{\sqrt{13}}=0.$$

Построение прямой удобнее проводить, если прямая задана *уравнением «в отрезках»*. Для его получения общее уравнение прямой перепишем в виде

$$3x + 2y = -3$$

и разделим его на -3:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-3/2}=1,$$

где

$$a = -1,\ b = -3/2.$$

Отсекая на координатных осях соответствующие отрезки, построим данную прямую (рис. 49).

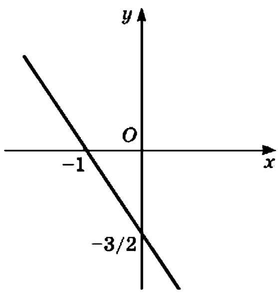


Рис. 49

Пример 2.11. Даны прямые l: $(4x - 4y + 10 = 0)$, l': $(-5x + 7y - 14 = 0)$ и точка $M(4; -3)$. Составить уравнения прямых, проходящих: 1) через точку M параллельно прямой l; 2) через точку M перпендикулярно прямой l. Найти угол φ между прямыми l и l' и расстояние d от точки M до прямой l.

Решение.

1. Уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно прямой l.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно прямой l. Для этого перейдем от общего уравнения прямой l к ее уравнению «с угловым коэффициентом»:

$$y=x+\frac{5}{2},$$

отсюда

$$k = 1.$$

У параллельных прямых угловые коэффициенты равны между собой. Затем из пучка прямых

$$y + 3 = k \cdot (x - 4),$$

проходящих через точку $M(4;\ -3)$, выберем такую, у которой $k = 1$.

Итак, получим искомое уравнение:

$$y + 3 = 1 \cdot (x - 4), \text{ т. е. } y = x - 7.$$

2. Уравнение прямой, проходящейчерез точку M перпендикулярно прямой l.

Угловые коэффициенты k_1 и k_2 перпендикулярных прямых удовлетворяют соотношению

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

поэтому из пучка прямых

$$y + 3 = k \cdot (x - 4),$$

проходящих через точку $M(4;\ -3)$, выберем такую, для которой $k = -1$.

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;\ -3)$ перпендикулярно прямой l, имеет вид

$$y + 3 = -1 \cdot (x - 4), \text{ т. е. } y = -x - 7.$$

Теперь найдем *угол* φ между прямыми l и l'. Запишем уравнение прямой l' «с угловым коэффициентом»:

$$y = \frac{5}{7}x + 2,$$

отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{1 - 5/7}{1 + 5/7}\right| = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 12} = \frac{1}{6}, \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{6}.$$

Расстояние d от точки $M(4;\ -3)$ до прямой l' вычислим по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

т. е.

$$d = \frac{|-5 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) - 14|}{\sqrt{25 + 49}} = \frac{|-20 - 21 - 14|}{\sqrt{74}} = \frac{55}{\sqrt{74}} = \frac{55\sqrt{74}}{74}.$$

10.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как называется каждое из следующих уравнений:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \begin{cases} x=x_0+tl; \\ y=y_0+tm, \end{cases} Ax+By+C=0,$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad y=kx+b, \quad \overline{MM_0}=t\vec{s},$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0?$$

2. Что называют полярными параметрами прямой? Поясните на чертеже.
3. Перечислите особые случаи расположения прямой на плоскости.
4. При выполнении какого условия три точки лежат на одной прямой?
5. Перечислите случаи взаимного расположения прямой и пары точек.
6. Как найти расстояние от точки до прямой?
7. Запишите уравнение пучка прямых.
8. Как найти угол между прямыми?
9. Запишите условие параллельности прямых.
10. Запишите условие перпендикулярности прямых.
11. Как найти точку пересечения непараллельных прямых?

10.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ» (ЗАДАЧИ 1–6)

Задача 1. Указать особенности в расположении прямых на плоскости (прямая общего положения, проходящая или не проходящая через начало координат; прямая, параллельная оси Ox или Oy), и сделать чертеж. Уравнения заданных прямых по вариантам представлены в таблице.

Данные к задаче 1

Вариант	Данные прямые	Вариант	Данные прямые
1	а) $2x = 3$; б) $x = -y$; в) $4 + y = 0$	2	а) $x = -1$; б) $y = 2x$; в) $y + 2 = 0$
3	а) $x = 5$; б) $3x = 2y$; в) $y - 1 = 0$	4	а) $x = 1$; б) $2x = 5y$; в) $y + 4 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Данные прямые	Вариант	Данные прямые
5	а) $x = 2$; б) $x = -2y$; в) $y = 0$	6	а) $x - 2 = 0$; б) $x - 4y = 0$; в) $y = 1$
7	а) $3x = 2$; б) $2x + 3y = 0$; в) $y = 2$	8	а) $2x = 7$; б) $x = -3y$; в) $y + 2 = 0$
9	а) $2x - 1 = 0$; б) $x = 3y$; в) $y = 3$	10	а) $x = -7$; б) $3x - 5y = 0$; в) $2y = 7$
11	а) $2x = -3$; б) $5y = x$; в) $y = 7$	12	а) $x = 0$; б) $5x = y$; в) $y + 7 = 0$
13	а) $x = -4$; б) $3x + 5y = 0$; в) $2y = 3$	14	а) $x = 6$; б) $5x + y = 0$; в) $y = 0{,}5$
15	а) $x + 5 = 0$; б) $5y + x = 0$; в) $y = 4$	16	а) $2x = 3$; б) $x + 4y = 0$; в) $4y = 5$
17	а) $2x + 3 = 0$; б) $x = 4y$; в) $4y + 5 = 0$	18	а) $x = 8$; б) $4x - y = 0$; в) $4y = 1$
19	а) $x = 3$; б) $5x = 4y$; в) $2y = 7$	20	а) $x + 3 = 0$; б) $5x = -4y$; в) $y = 5$
21	а) $3x = 5$; б) $4x = y$; в) $y + 5 = 0$	22	а) $x = 0{,}5$; б) $4x + y = 0$; в) $y = -6$
23	а) $2x = 7$; б) $4y + x = 0$; в) $y = 8$	24	а) $2x = -1$; б) $7x = 2y$; в) $2y = 6$
25	а) $x = 2$; б) $7x + 2y = 0$; в) $y = -9$	26	а) $x = -6$; б) $x + 6y = 0$; в) $y = -3$
27	а) $x = -2$; б) $x - 6y = 0$; в) $x = 11$	28	а) $x + 4 = 0$; б) $7x = y$; в) $y = -7$

Продолжение табл.

Вариант	Данные прямые	Вариант	Данные прямые
29	а) $x - 11 = 0$; б) $y + 8 = 0$; в) $7x + y = 0$	30	а) $x = 10$; б) $2x = 5y$; в) $y = 4{,}5$

Задача 2. Выбрать из имеющегося списка прямых на плоскости пары:

а) пересекающихся прямых;

б) совпадающих прямых;

в) прямых, не имеющих общих точек.

Данные к задаче 2

Вариант	Данные прямые	Вариант	Данные прямые
1	1) $2x + y + 3 = 0$; 2) $4x = 2y$; 3) $y = -2x$; 4) $7y + 14x + 5 = 0$; 5) $7x + 14y + 21 = 0$	2	1) $x - y + 7 = 0$; 2) $2x = 4y$; 3) $x + y = 7$; 4) $3x - 2y + 15 = 0$; 5) $2x + 2y = 14$
3	1) $x = y$; 2) $2x + 4y = 8$; 3) $2x + 2y = 16$; 4) $3x - 3y = 11$; 5) $x - 3y - 9 = 0$	4	1) $2x - 6y = 12$; 2) $x + y = 12$; 3) $3x - 4y = 4$; 4) $3x + 3y = 6$; 5) $12x = 36y + 72$
5	1) $x - y + 5 = 0$; 2) $2x - 2y - 7 = 0$; 3) $x = 3y$; 4) $3x - 3y + 15 = 0$; 5) $6x - 2y + 3 = 0$	6	1) $3x + 11y - 8 = 0$; 2) $2x - y + 1 = 0$; 3) $x - 2y + 4 = 0$; 4) $6x + 22y + 13 = 0$; 5) $4x - 2y + 2 = 0$
7	1) $x + 4y - 1 = 0$; 2) $x - y + 6 = 0$; 3) $2x - 2y + 3 = 0$; 4) $3x + 12y + 7 = 0$; 5) $3x + 12y - 3 = 0$	8	1) $7x + y - 2 = 0$; 2) $x + 7y - 4 = 0$; 3) $7x + 7y + 8 = 0$; 4) $14x + 2y - 6 = 0$; 5) $14x + 2y - 4 = 0$
9	1) $3x + 2y - 6 = 0$; 2) $x - y + 6 = 0$; 3) $2x + 3y + 1 = 0$; 4) $2x - 2y + 11 = 0$; 5) $6x + 9y + 3 = 0$	10	1) $4x - 11y + 2 = 0$; 2) $13x - y + 1 = 0$; 3) $2x - 7y - 7 = 0$; 4) $26x - 2y + 2 = 0$; 5) $8x - 22y + 11 = 0$
11	1) $x - 2y + 4 = 0$; 2) $2x - 3y + 8 = 0$; 3) $4x - 8y + 16 = 0$; 4) $3x + 3y + 1 = 0$; 5) $6x - 6y + 3 = 0$	12	1) $5x + y + 6 = 0$; 2) $5x + 2y - 3 = 0$; 3) $2x + 4y - 7 = 0$; 4) $x + 2y - 11 = 0$; 5) $15x + 3y + 18 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Данные прямые	Вариант	Данные прямые
13	1) $x + 6y + 2 = 0$; 2) $3x - 7y + 5 = 0$; 3) $x - 7y + 5 = 0$; 4) $2x + 12y + 13 = 0$; 5) $2x - 14y + 10 = 0$	14	1) $11x + 2y - 3 = 0$; 2) $12x + 14y - 1 = 0$; 3) $22x - 2y + 6 = 0$; 4) $6x + 7y - 3 = 0$; 5) $x + 5y + 13 = 0$
15	1) $x - 7y + 2 = 0$; 2) $2x + 3y - 11 = 0$; 3) $4x - 28y + 15 = 0$; 4) $x + 3y - 11 = 0$; 5) $3x - 21y + 6 = 0$	16	1) $2x - 5y + 6 = 0$; 2) $x - 2y + 5 = 0$; 3) $4x - 10y + 12 = 0$; 4) $3x - 6y + 11 = 0$; 5) $x + 5y - 1 = 0$
17	1) $3x + 8y - 4 = 0$; 2) $x - y + 5 = 0$; 3) $2x + 5y - 11 = 0$; 4) $3x - 3y + 10 = 0$; 5) $9x + 21y + 5 = 0$	18	1) $7x - y + 2 = 0$; 2) $x - 2y + 6 = 0$; 3) $3x + 2y - 1 = 0$; 4) $4x - 8y + 5 = 0$; 5) $6x + 4y - 2 = 0$
19	1) $x + y - 8 = 0$; 2) $2x - y + 3 = 0$; 3) $2x - 2y - 8 = 0$; 4) $4x + 4y + 11 = 0$; 5) $4x - 2y + 6 = 0$	20	1) $2x - 5y + 1 = 0$; 2) $x - 4y + 6 = 0$; 3) $7x - y + 2 = 0$; 4) $2x - 8y + 1 = 0$; 5) $6x - 15y + 3 = 0$
21	1) $5x - y + 2 = 0$; 2) $x - y + 4 = 0$; 3) $3x + 3y - 2 = 0$; 4) $10x - 2y + 4 = 0$; 5) $x + 2y - 7 = 0$	22	1) $3x - y + 7 = 0$; 2) $2x + 2y - 5 = 0$; 3) $x - 3y + 8 = 0$; 4) $6x - 2y + 3 = 0$; 5) $3x - 9y + 24 = 0$
23	1) $x - 6y + 5 = 0$; 2) $3x - 5y + 5 = 0$; 3) $2x - 12y + 7 = 0$; 4) $7x - 12y + 1 = 0$; 5) $6x - 10y + 10 = 0$	24	1) $4x - 7y + 1 = 0$; 2) $2x - y + 6 = 0$; 3) $3x + y + 2 = 0$; 4) $4x - 2y + 12 = 0$; 5) $6x + 2y + 7 = 0$
25	1) $4x - 5y + 7 = 0$; 2) $2x - y + 1 = 0$; 3) $x - 4y + 2 = 0$; 4) $4x - 2y + 11 = 0$; 5) $3x - 12y + 6 = 0$	26	1) $7x + y + 7 = 0$; 2) $x - 2y + 7 = 0$; 3) $3x - 6y + 7 = 0$; 4) $2x + 5y - 2 = 0$; 5) $14x + 2y + 14 = 0$
27	1) $x - 3y + 3 = 0$; 2) $x + 2y + 2 = 0$; 3) $3x - 9y + 9 = 0$; 4) $7x - y + 5 = 0$; 5) $3x + 6y + 7 = 0$	28	1) $x + 4y + 1 = 0$; 2) $4x - y + 2 = 0$; 3) $2x - 8y + 2 = 0$; 4) $8x - 2y + 7 = 0$; 5) $x - 4y + 1 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Данные прямые	Вариант	Данные прямые
29	1) $2x + 3y - 1 = 0$; 2) $3x + 5y + 3 = 0$; 3) $4x - 6y + 5 = 0$; 4) $6x + 10y + 6 = 0$; 5) $4x + 6y - 11 = 0$	30	1) $5x - y = 0$; 2) $2x - 5y + 3 = 0$; 3) $x + y + 6 = 0$; 4) $3x + 3y - 1 = 0$; 5) $10x = 2y$

Задача 3. Две точки на плоскости заданы координатами: $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, α — некоторый угол.

Составить:

а) уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, найти ее направляющие косинусы;

б) уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и образующей с осью абсцисс угол α.

Данные к задаче 3

Вариант	Данные	Вариант	Данные
1	$M_1(2; 4)$, $M_2(3; 1)$, $\alpha = 30°$	2	$M_1(1; 0)$, $M_2(0; -1)$, $\alpha = 60°$
3	$M_1(4; -1)$, $M_2(0; 3)$, $\alpha = 45°$	4	$M_1(1; 1)$, $M_2(2; -4)$, $\alpha = 90°$
5	$M_1(0; -1)$, $M_2(2; 3)$, $\alpha = 75°$	6	$M_1(1; 2)$, $M_2(2; 4)$, $\alpha = 120°$
7	$M_1(1; 3)$, $M_2(-3; -2)$, $\alpha = 135°$	8	$M_1(3; 1)$, $M_2(1; 2)$, $\alpha = 150°$
9	$M_1(4; 2)$, $M_2(1; -2)$, $\alpha = 30°$	10	$M_1(1; -1)$, $M_2(4; 5)$, $\alpha = 60°$
11	$M_1(2; 5)$, $M_2(-2; 1)$, $\alpha = 45°$	12	$M_1(4; 1)$, $M_2(3; -3)$, $\alpha = 90°$
13	$M_1(1; 0)$, $M_2(0; 5)$, $\alpha = 75°$	14	$M_1(4; 5)$, $M_2(5; 4)$, $\alpha = 120°$
15	$M_1(4; 1)$, $M_2(3; -1)$, $\alpha = 135°$	16	$M_1(1; 3)$, $M_2(-3; 4)$, $\alpha = 150°$
17	$M_1(4; -2)$, $M_2(1; 1)$, $\alpha = 30°$	18	$M_1(4; -3)$, $M_2(1; -1)$, $\alpha = 60°$
19	$M_1(4; 5)$, $M_2(0; 5)$, $\alpha = 45°$	20	$M_1(5; 4)$, $M_2(5; 0)$, $\alpha = 90°$
21	$M_1(2; 5)$, $M_2(0; 2)$, $\alpha = 75°$	22	$M_1(2; 6)$, $M_2(6; 6)$, $\alpha = 120°$
23	$M_1(2; 3)$, $M_2(6; 5)$, $\alpha = 135°$	24	$M_1(-2; 3)$, $M_2(-6; 5)$, $\alpha = 150°$
25	$M_1(6; 6)$, $M_2(-2; -4)$, $\alpha = 30°$	26	$M_1(-6; 5)$, $M_2(1; 3)$, $\alpha = 60°$
27	$M_1(6; 4)$, $M_2(-1; -3)$, $\alpha = 45°$	28	$M_1(2; 6)$, $M_2(-2; -2)$, $\alpha = 90°$
29	$M_1(0; 6)$, $M_2(3; 3)$, $\alpha = 75°$	30	$M_1(3; 6)$, $M_2(-1; 0)$, $\alpha = 120°$

Задача 4. Дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Записать для нее следующие виды уравнений:

а) каноническое;

б) параметрические;

в) «с угловым коэффициентом»;

г) «в отрезках»;

д) нормальное.

Построить заданную прямую в системе координат xOy.

Данные к задаче 4

Вариант	Данные	Вариант	Данные	Вариант	Данные
1	$x + 2y - 7 = 0$	2	$7x + 3y + 21 = 0$	3	$-7x + 4y + 11 = 0$
4	$2x + 15y - 15 = 0$	5	$9x + 4y - 20 = 0$	6	$-x + 5y + 35 = 0$
7	$2x + 3y - 8 = 0$	8	$-2x + 3y - 6 = 0$	9	$6x + 6y - 15 = 0$
10	$-4x - 2y + 6 = 0$	11	$2x - y + 5 = 0$	12	$-3x - 4y + 1 = 0$
13	$-x + 7y - 2 = 0$	14	$5x + 4y - 30 = 0$	15	$x - 5y - 15 = 0$
16	$2x - 3y + 5 = 0$	17	$5x + 9y - 12 = 0$	18	$5x + 7y + 15 = 0$
19	$2x - 8y - 3 = 0$	20	$3x - 15y - 1 = 0$	21	$3x - 2y - 4 = 0$
22	$4x - 4y + 10 = 0$	23	$3x - y - 8 = 0$	24	$-4x + 9y - 16 = 0$
25	$2x + 3y - 6 = 0$	26	$8x + 10y - 23 = 0$	27	$-2x + 2y + 3 = 0$
28	$8x + 3y + 1 = 0$	29	$-8x + y - 12 = 0$	30	$3x + 2y + 3 = 0$

Задача 5. Даны прямые l, l' и точка M.

Составить уравнения прямых, проходящих:

а) через точку M параллельно прямой l;

б) через точку M перпендикулярно прямой l.

Найти угол φ между прямыми l и l' и расстояние d от точки M до прямой l.

Данные к задаче 5

Вариант	Данные	Вариант	Данные	Вариант	Данные
1	l: $(6x + 9y = 0)$; l': $(x - 3y + 10 = 0)$; $M(4; 6)$	2	l: $(4x - 6y = 0)$; l': $(5x + 3y + 13 = 0)$; $M(2; 7)$	3	l: $(8x + 3y + 1 = 0)$; l': $(7x - 6y + 34 = 0)$; $M(6; 0)$

Продолжение табл.

Вари-ант	Данные	Вари-ант	Данные	Вари-ант	Данные
4	$l: (3x - 2y - 4 = 0)$; $l': (-x + 3y + 7 = 0)$; $M(8; 3)$	5	$l: (7x - 6y + 2 = 0)$; $l': (2x + 5y - 7 = 0)$; $M(-4; 1)$	6	$l: (2x + 5y - 7 = 0)$; $l': (3x - 15y - 1 = 0)$; $M(3; -4)$
7	$l: (7x - 4y - 11 = 0)$; $l': (-3x + 2y + 4 = 0)$; $M(-3; 2)$	8	$l: (3x - 4y + 5 = 0)$; $l': (5x + 4y - 30 = 0)$; $M(3; -2)$	9	$l: (3x - 7y + 4 = 0)$; $l': (-2x + 3y - 6 = 0)$; $M(4; 2)$
10	$l: (2x - y + 7 = 0)$; $l': (7x + 3y + 21 = 0)$; $M(0; 2)$	11	$l: (3x - 15y - 1 = 0)$; $l': (x + 2y - 7 = 0)$; $M(5; 0)$	12	$l: (-3x + 2y + 4 = 0)$; $l': (6x + 6y - 15 = 0)$; $M(-5; 1)$
13	$l: (-3x - 4y + 1 = 0)$; $l': (-7x + 4y + 11 = 0)$; $M(5; -2)$	14	$l: (3x + 6y - 1 = 0)$; $l': (2x + 3y - 8 = 0)$; $M(-5; -3)$	15	$l: (5x + 4y - 30 = 0)$; $l': (9x + 4y - 20 = 0)$; $M(5; 4)$
16	$l: (3x - y - 12 = 0)$; $l': (x - 5y - 15 = 0)$; $M(5; -5)$	17	$l: (-x + 5y + 35 = 0)$; $l': (10x - 4y + 5 = 0)$; $M(-5; 6)$	18	$l: (2x + 15y - 15 = 0)$; $l': (-x + 7y - 2 = 0)$; $M(5; -7)$
19	$l: (-2x + 3y - 6 = 0)$; $l': (3x + y - 18 = 0)$; $M(0; 8)$	20	$l: (7x + 3y + 21 = 0)$; $l': (2x - y + 5 = 0)$; $M(0; -9)$	21	$l: (-4x - 2y + 6 = 0)$; $l': (7x - 2y + 14 = 0)$; $M(-1; 1)$
22	$l: (-4x + 6y - 13 = 0)$; $l': (2x - 8y - 3 = 0)$; $M(-4; 1)$	23	$l: (2x - 6y + 19 = 0)$; $l': (9x + 16y + 2 = 0)$; $M(-3; 2)$	24	$l: (4x - 6y + 16 = 0)$; $l': (5x + 9y + 12 = 0)$; $M(-2; 3)$
25	$l: (6x + 8y - 9 = 0)$; $l': (7x - 5y + 10 = 0)$; $M(-1; 4)$	26	$l: (-2x + 2y + 3 = 0)$; $l': (8x + 10y - 23 = 0)$; $M(4; 2)$	27	$l: (6x + 2y - 18 = 0)$; $l': (-4x + y - 9 = 0)$; $M(3; 3)$

Продолжение табл.

Вариант	Данные	Вариант	Данные	Вариант	Данные
28	l: $(-8x + y - 12 = 0)$; l': $(-4x + 9y - 16 = 0)$; $M(2; 4)$	29	l: $(4x - 24y + 12 = 0)$; l': $(x - 8y + 8 = 0)$; $M(1; 5)$	30	l: $(-5x + 7y - 14 = 0)$; l': $(4x - 4y + 10 = 0)$; $M(4; -3)$

Задача 6. Отметить на координатной плоскости область решения системы линейных неравенств.

Данные к задаче 6

Вариант	Система неравенств	Вариант	Система неравенств	Вариант	Система неравенств
1	$\begin{cases} x \ge y; \\ 2x - y \le 0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x + 3 \ge y; \\ 2x - y \ge 0 \end{cases}$	3	$\begin{cases} x + y \le 0; \\ 2x - 3y + 7 \le 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x \le y; \\ 2x + y + 5 \ge 0 \end{cases}$	5	$\begin{cases} x + 2y \le 0; \\ y + x - 1 \ge 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x + y - 3 \ge 0; \\ 2x + y - 4 \ge 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x \le y; \\ x + y - 7 \le 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x - y + 2 \ge 0; \\ 2x + 7y - 1 \le 0 \end{cases}$	9	$\begin{cases} x \le 7; \\ x + 5y - 11 \ge 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x + y \le 0; \\ 2x + y + 1 \le 0 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 3x - y \le 0; \\ 2x - 3y \ge 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x - 2 \le 0; \\ 3x + 7y \le 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x \le 2y; \\ x + 5y - 4 \ge 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x \le 5y + 4; \\ x + 5y + 6 \le 0 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x + y \ge 0; \\ 7x - 5 \le 0 \end{cases}$
16	$\begin{cases} x \ge 5; \\ y - x + 1 \le 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 7x + y \ge 0; \\ y + 2x + 5 \ge 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 8x - 2y \le 7; \\ x + y \ge 5 \end{cases}$
19	$\begin{cases} y \le 0; \\ 2x + y \ge 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x + 4y + 1 \ge 0; \\ 3x + 4y \le 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x + 5y \le 0; \\ 2x + y + 6 \le 0 \end{cases}$
22	$\begin{cases} x + y + 1 \ge 0; \\ y \ge 2x \end{cases}$	23	$\begin{cases} x + y + 2 \ge 0; \\ x - y + 3 \le 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x + y - 3 \ge 0; \\ x + 3y \le 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x \ge 4y; \\ 3x - 2y + 11 \le 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x + y \le 3; \\ 2x + 5y \ge 6 \end{cases}$	27	$\begin{cases} x \ge -y; \\ 2x + 5y \ge 5 \end{cases}$
28	$\begin{cases} x \le 2; \\ y + 5x + 1 \le 0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x + 2y \le 0; \\ y + 4x \le 0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x - y \le 5; \\ 2x + 3y \ge 0 \end{cases}$

10.4. ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ (ЗАДАЧА 7)

Задача 7. Условия задачи приведены в таблице.

Данные к задаче 7

Вариант	Условие задачи
1	Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с прямыми $x + y = a$ и $x = 0$ треугольник площадью a^2
2	Прямая отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение этой прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв. ед.
3	Две стороны квадрата лежат на прямых: $3x + 4y + 22 = 0$, $3x + 4y - 13 = 0$. Найти площадь квадрата
4	Даны точки $A(-4; 0)$ и $B(0; 6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший по длине, чем на оси Oy
5	Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат равные отрезки, если длина отрезка прямой, заключенного между осями координат, равна $5\sqrt{2}$
6	В треугольнике с вершинами $A(3; -2)$, $B(-1; 1)$ и $C(5; -7)$ найти биссектрису внутреннего угла B
7	Даны точки $A(-2; 0)$ и $B(2; -2)$. На отрезке OA построен параллелограмм $OACD$, диагонали которого пересекаются в точке B. Написать уравнения сторон, диагоналей параллелограмма и найти угол CAD
8	Даны уравнения сторон треугольника: $x + y - 6 = 0$, $3x - 5y + 14 = 0$, $5x - 3y - 14 = 0$. Составить уравнения всех высот треугольника
9	Даны уравнения сторон треугольника: $4x - 3y - 9 = 0$, $3x + 4y + 12 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$. Определить координаты вершин треугольника
10	Найти углы и площадь треугольника, образованного прямыми: $y = 2x$, $y = -2x$, $y = x + b$
11	Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого лежат на осях координат

Продолжение табл.

Вариант	Условие задачи
12	Треугольник задан координатами своих вершин: $A(-8; 3)$, $B(8; 5)$ и $C(8; -5)$. Составить уравнения всех высот треугольника и показать, что они пересекаются в одной точке
13	Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой $2x + y = a$ равнобедренный треугольник. Найти площадь этого треугольника
14	Составить уравнение гипотенузы прямоугольного треугольника, проходящей через точку $M(2; 3)$, если катеты треугольника расположены на осях координат, а его площадь равна 12 кв. ед.
15	Уравнение одной из сторон некоторого угла имеет вид $2x - 9y - 3 = 0$, биссектриса этого угла записана уравнением $4x - y + 11 = 0$. Найти уравнение второй стороны угла
16	Найти внутренние углы треугольника ABC, если даны уравнения его сторон: $x - 3y + 3 = 0$ (AB), $x + 3y + 3 = 0$ (AC) и основание $D(-1; 3)$ высоты AD
17	Дана вершина треугольника $A(3; 9)$ и уравнения медиан: $y - 6 = 0$ и $3x - 4y + 9 = 0$. Найти координаты двух других вершин треугольника
18	В треугольнике ABC даны уравнения стороны AB $(x + 7y - 6 = 0)$ и биссектрис AL $(x + y - 2 = 0)$ и BM $(x - 3y - 6 = 0)$. Найти координаты вершин треугольника
19	Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x + y = 0$ и $x - 3y = 0$ и точка $(5; 0)$ на его основании. Найти периметр и площадь треугольника
20	Показать, что треугольник, стороны которого заданы уравнениями с целыми коэффициентами, не может быть равносторонним
21	Среди прямых, проходящих через точку $M(2; 0)$, найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми $x + 2y - 9 = 0$ и $3x - y - 13 = 0$, делится в точке M пополам
22	В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB $(3x + 2y = 12)$, уравнения высоты BM $(x + 2y = 4)$ и высоты AM $(4x + y = 6)$, где M — точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AC, BC, CH

Продолжение табл.

Вариант	Условие задачи
23	Показать, что треугольник с вершинами $A(1;\ 1)$, $B(2; 1+\sqrt{2})$, $C(3;\ 1)$ равносторонний, и вычислить его площадь
24	Найти точку, симметричную точке $A(1;\ 7)$ относительно прямой $2x - 5y + 4 = 0$
25	Диагонали параллелограмма пересекаются в начале координат, а его две стороны заданы уравнениями: $y = x - 2$ и $5y = x + 6$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей
26	Даны стороны треугольника: $AB(x - y + 2 = 0)$, $BC(x = 2)$, $AC(x + y - 2 = 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC, делящую ее (считая от вершины A) в отношении 1:3
27	Треугольник задан координатами своих вершин: $A(-1; -3)$, $B(4; -5)$, $C(2;\ 1)$. Вычислить высоту, проведенную из вершины B
28	Треугольник задан координатами своих вершин: $A(0; -4)$, $B(3;\ 0)$, $C(0;\ 6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A
29	Показать, что треугольник со сторонами $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$ и $x - y - 10 = 0$ равнобедренный. Найти угол при его вершине
30	Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x + 3y - 4 = 0$ и $3x + y + 6 = 0$. Проверить утверждение: эти биссектрисы перпендикулярны друг другу

11. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

11.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Кривой второго порядка называется линия, имеющая в некоторой декартовой системе координат уравнение второй степени относительно x и y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (48)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Можно показать, что уравнение (48) может задавать только эллипс, гиперболу или параболу. Остальные случаи будем называть вырожденными.

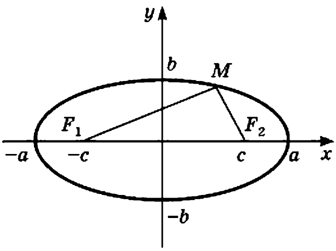
Ниже рассмотрим подробнее все перечисленные типы кривых второго порядка.

11.2. ЭЛЛИПС

Определение 2.17. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, расстояние между ними назовем *фокусным расстоянием* и обозначим $2c$, а постоянную величину, равную сумме расстояний от каждой точки эллипса до фокусов, через $2a$ (по условию $a > c$).

Введем декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 оказались на оси абсцисс, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2. В выбранной таким образом системе координат левый фокус имеет координаты $F_1(-c;\ 0)$, а правый — $F_2(c;\ 0)$ (рис. 50). Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка эллипса. По определению сумма расстояний от этой точки до фокусов равна $2a$. Исходя из этого факта и введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$, получим уравнение эллипса:



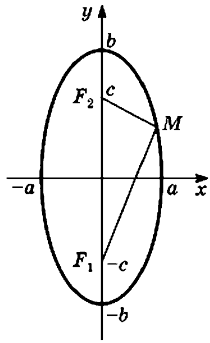
Эллипс, $a > b$

Рис. 50

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (49)$$

Уравнение (49) называется *каноническим уравнением* эллипса. Здесь a и b — *большая и малая полуоси* эллипса. Оси координат будут являться также осями симметрии эллипса.

В описанном выше случае $a > b$. Если фокусы F_1 и F_2 располагаются на оси ординат симметрично относительно начала координат, т. е. имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, то, обозначив сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов $2b$ и введя $a^2 = b^2 - c^2$, вновь получим уравнение (49), но при этом $a < b$ (рис. 51). Точка $O(0; 0)$ называется *центром*, а точки с координатами $(\pm a; 0)$ и $(\pm b; 0)$ — *вершинами* эллипса.



Эллипс, $a < b$

Рис. 51

При построении эллипс вписывают в «опорный» прямоугольник, т. е. прямоугольник с центром в начале координат (в том случае, когда эллипс задан каноническим уравнением) и длинами сторон $2a$ и $2b$. На осях координат откладывают полуоси и строят прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. При этом длины сторон $2a$ и $2b$, а серединами сторон являются точки $(\pm a; 0)$ и $(0; \pm b)$. Затем в полученный прямоугольник вписывают эллипс.

Отношение величины расстояния между фокусами к длине большей оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается e:

$$e = \frac{c}{a} < 1 \tag{50а}$$

или

$$e = \frac{c}{b} < 1. \tag{50б}$$

Отсюда и возникло название кривой: в переводе с греческого эллипс означает «недостаток».

Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Чем ближе значение e к нулю, тем больше форма эллипса напоминает окружность. Чем ближе значение e к единице, тем больше эллипс вытянут вдоль большей полуоси, т. е. получаем «сплющенный» эллипс.

Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ (см. рис. 50) называются *фокальными радиусами* точки $M(x; y)$. Очевидно, что $r_1 + r_2 = 2a$.

Причем, имеют место формулы:

$$r_1 = a + ex \text{ и } r_2 = a - ex.$$

Аналогичные формулы можно получить для случая $a < b$ (см. рис. 51).

В случае равенства осей ($a = b$) уравнение принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad (51)$$

и мы получаем частный случай эллипса — окружность.

У окружности расстояние между фокусами равно нулю ($c = 0$), оба фокуса при этом совпадают с центром окружности и $e = 0$.

11.3. ГИПЕРБОЛА

Определение 2.18. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.

Введем декартову систему координат аналогично случаю, описанному выше для эллипса, т. е. фокусы имеют координаты $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ (рис. 52).

Каноническое уравнение гиперболы в этом случае будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (52)$$

Здесь $b^2 = c^2 - a^2$ или $c^2 = a^2 + b^2$. При этом a называется *действительной*, а b — *мнимой полуосью* гиперболы.

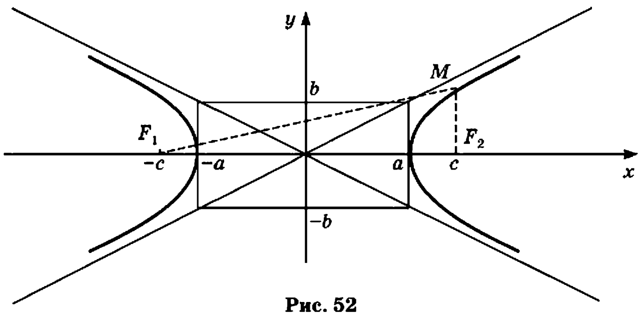


Рис. 52
Гипербола с действительной полуосью a

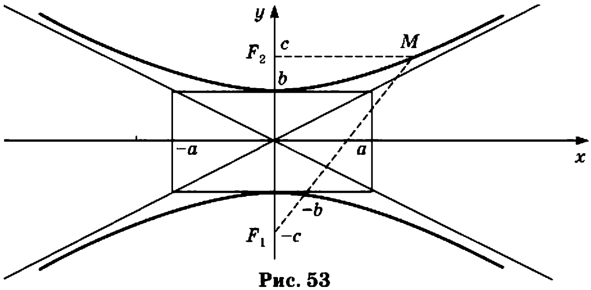


Рис. 53
Гипербола с действительной полуосью b

При $a = b$ гипербола называется *равнобочной.*

Если же декартова система координат выбрана таким образом, что фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$ (рис. 53), то каноническое уравнение гиперболы принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \qquad (53)$$

В этом случае b называется *действительной полуосью*, а a — *мнимой.*

Объединив формулы (52) и (53), получим *каноническое уравнение* гиперболы в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1. \qquad (54)$$

При $a = b$ гипербола называется *равнобочной.*

Как и в случае с эллипсом, координатные оси являются осями симметрии, а точка $O(0; 0)$ — центром симметрии гиперболы. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ обладают следующим свойством: точки гиперболы при удалении от начала координат (при $x \to \pm\infty$) подходят сколь угодно близко к этим прямым. Прямые с таким свойством называются *асимптотами*. Точка $O(0; 0)$ называется *центром* гиперболы. Точки с координатами $(\pm a; 0)$ в случае, описанном уравнением (52), и точки с координатами $(\pm b; 0)$ в случае, описанном уравнением (53), называются *вершинами* гиперболы.

Для построения гиперболы сначала строим «опорный» прямоугольник со сторонами длины $2a$ и $2b$, параллельными осям координат, и серединами сторон ($\pm a$; 0) и (0; $\pm b$). Каждая из двух ветвей гиперболы вписана в бесконечную область, ограниченную продолжением диагоналей опорного прямоугольника и парой его сторон. Положение ветвей определяется знаком в правой части уравнения (54): если он отрицательный, то ветви вписаны в верхнюю и нижнюю область (вершины — точки (0; $\pm b$)); если же положительный, то в правую и левую (соответственно вершинами являются точки ($\pm a$; 0)).

Отношение величины расстояния между фокусами к длине действительной полуоси называется *эксцентриситетом* гиперболы и обозначается e. Чем меньше эксцентриситет гиперболы (значение e близко к единице), тем более вытянут ее «опорный» прямоугольник. Например, для гиперболы с действительной полуосью a — ветви гиперболы широкие, почти вертикальные. И наоборот, чем больше эксцентриситет гиперболы, тем больше гипербола приближается к оси Ox, ветви гиперболы узкие.

$$e = \frac{c}{a} > 1 \qquad (55a)$$

или

$$e = \frac{c}{b} > 1. \qquad (55б)$$

Отсюда и возникло название кривой: в переводе с греческого гипербола означает «избыток».

Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ (см. рис. 52) называются *фокальными радиусами* точки $M(x; y)$. Очевидно, что $|r_1 - r_2| = 2a$.

Причем имеют место формулы (для правой ветви гиперболы):

$$r_1 = ex + a \text{ и } r_2 = ex - a.$$

Аналогично, если взять точку $M(x; y)$ на левой ветви гиперболы, то получим следующие формулы:

$$r_1 = -(ex + a) \text{ и } r_2 = -(ex - a).$$

Для гиперболы с действительной полуосью b (рис. 53) можно получить аналогичные формулы.

11.4. ПАРАБОЛА

Определение 2.19. Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы p. Эта величина называется *параметром параболы*.

Пусть фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Тогда уравнение параболы запишется в виде

$$y^2 = 2px. \tag{56}$$

Уравнение (56) называется *каноническим уравнением параболы*. Ось абсцисс является осью симметрии параболы, заданной уравнением (56). При $p > 0$ все точки такой параболы располагаются в правой полуплоскости (рис. 54), а при $p < 0$ — в левой.

Фокальный радиус точки $M(x; y)$, т. е. ее расстояние до фокуса на оси абсцисс (рис. 54), находится по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Если же поместить фокус на ось ординат в точку $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, а директрису задать уравнением

$$y = -\frac{p}{2},$$

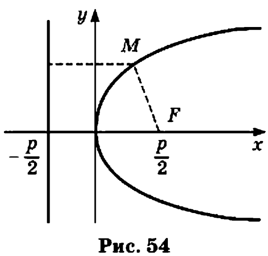


Рис. 54
Парабола $y^2 = 2px$

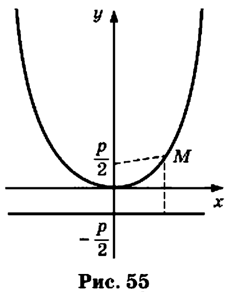


Рис. 55
Парабола $x^2 = 2py$

то каноническое уравнение параболы можно записать в виде

$$x^2 = 2py. \tag{57}$$

Для параболы, заданной уравнением (57), осью симметрии является ось ординат. При $p > 0$ все точки такой параболы располагаются в верхней полуплоскости (см. рис. 55), а при $p < 0$ — в нижней.

11.5. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вернемся к общему уравнению кривой второго порядка (48). Предположим для начала, что коэффициент уравнения B равен нулю, т. е. в уравнении отсутствует смешанное произведение x и y.

Итак, уравнение является пятичленным:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{58}$$

Рассмотрим следующие случаи уравнения (58).

1. Пусть $AC > 0$; тогда уравнение определяет эллипс. Если $A = C$, то получим окружность.

2. Пусть $AC < 0$; тогда мы имеем дело с гиперболой.

3. Пусть $AC = 0$, но $A^2 + C^2 \neq 0$; тогда уравнение описывает параболу.

Для установления вида кривой и ее расположения необходимо привести уравнение к каноническому виду, первоначально выделив полные квадраты по переменным x и y.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = A\cdot\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\cdot\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F =$$

$$= A\cdot\left(x^2 + 2\cdot\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{D^2}{4A^2}\right) +$$

$$+ C\cdot\left(y^2 + 2\cdot\frac{E}{2C}y + \frac{E^2}{4C^2} - \frac{E^2}{4C^2}\right) + F =$$

$$= A\cdot\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\cdot\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}.$$

Обозначим

$$x_0 = -\frac{D}{2A},\ y_0 = -\frac{E}{2C},\ G = -\left(F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}\right).$$

Получим

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 - G = 0. \qquad (59)$$

Остается только перенести G в правую сторону равенства (59) и, разделив обе части на G, получить каноническое уравнение кривой в новой декартовой системе координат, полученной из старой параллельным переносом начала координат $O(0;\ 0)$ в точку $O'(x_0;\ y_0)$. Для случая параболы необходимо провести выделение полного квадрата только по одной из переменных (x или y).

Теперь рассмотрим уравнение кривой второго порядка, в котором коэффициент $B \neq 0$.

В этом случае необходимо применить преобразование поворота осей координат (см. п. 6.3.2) по формулам (20):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

При этом угол α подбирается таким образом, чтобы уравнение стало пятичленным, т. е. не содержащим произведения xy. Дальнейшие преобразования аналогичны приведенным выше преобразованиям для пятичленного уравнения.

Приведем отдельно вырожденные случаи кривых второго порядка. При приведении уравнения кривой к каноническому виду, кроме рассмотренных ранее, могут быть получены следующие уравнения.

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1.$

В этом случае мы имеем дело с мнимым эллипсом. Данному уравнению не удовлетворяет ни одна вещественная точка.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

Это уравнение вырожденного эллипса или пары мнимых пересекающихся прямых. Такое уравнение определяет ровно одну точку с координатами $x = 0$, $y = 0$.

3. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0.$

Уравнение описывает вырожденную гиперболу или пару пересекающихся прямых.

Левая часть уравнения легко раскладывается на линейные множители, после чего получаем уравнения двух прямых:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ и } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

4. $y^2 = a^2(x^2 = a^2)$.

Данное уравнение определяет вырожденную параболу или пару параллельных прямых $y = \pm a$. В случае $y^2 = 0$ говорим о двух слившихся параллельных прямых.

5. $y^2 = -a^2\ (x^2 = -a^2),\ a \neq 0$.

В этом случае имеем уравнение мнимой параболы или пары мнимых параллельных прямых, которому не соответствует ни одна вещественная точка.

12. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

12.1. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 2.12. Составить каноническое уравнение эллипса и гиперболы с полуосями $a = 3$ и $b = 4$, выписать координаты фокусов.

Решение. Составим сначала уравнение эллипса по формуле (49):

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

или

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Так как $b > a$, то фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, где

$$c^2 = b^2 - a^2; c = \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}.$$

То есть координаты фокусов $F_1(0; -\sqrt{7})$ и $F_2(0; \sqrt{7})$.

Составим уравнение гиперболы, для которой действительная полуось a, а мнимая — b. Воспользуемся формулой (52). Получим

$$\frac{x^2}{3^3} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Для гиперболы

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

Поэтому фокусы имеют координаты $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$.

В случае, когда полуось a является мнимой, а полуось b — действительной, уравнение гиперболы получим по формуле (53):

$$-\frac{x^2}{3^3} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

или

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Фокусы этой гиперболы имеют координаты $F_1(0; -5)$ и $F_2(0; 5)$.

Пример 2.13. Составить канонические уравнения парабол с параметром $p = \frac{21}{2}$, выписать координаты фокуса и уравнение директрисы.

Р е ш е н и е. В случае, когда парабола симметрична относительно оси Ox, ее уравнение, согласно формуле (56), имеет вид

$$y^2 = 2 \cdot \frac{21}{2} x \text{ или } y^2 = 21x.$$

При этом фокус лежит на оси Ox на расстоянии $\frac{p}{2}$ от начала координат, т. е. координаты фокуса $F\left(\frac{21}{4}; 0\right)$, уравнение директрисы имеет вид

$$x = -\frac{21}{4}.$$

Если же осью симметрии параболы является ось Oy, то уравнение примет вид

$$x^2 = 2 \cdot \frac{21}{2} y \text{ или } x^2 = 21y.$$

Соответственно фокус находится на оси Oy, имеет координаты $F\left(0; \frac{21}{4}\right)$, а уравнение директрисы

$$y = -\frac{21}{4}.$$

Пример 2.14. Построить кривые второго порядка, заданные уравнениями:

а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1;$

б) $4y^2 - 9x^2 = 1;$

в) $y^2 = 21x.$

Решение.

а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

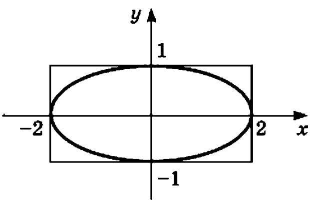


Рис. 56
Чертеж эллипса к примеру 2.14*а*

Данное уравнение задает эллипс с полуосями $a = 2$ и $b = 1$. Для построения отложим от начала координат в обе стороны расстояние $a = 2$ на оси Ox и $b = 1$ на оси Oy. Используя полученные точки, построим прямоугольник со сторонами $2a = 4$ и $2b = 2$, а в прямоугольник впишем эллипс (рис. 56).

б) $4y^2 - 9x^2 = 1.$

Уравнение преобразуем к виду

$$\frac{y^2}{1/4} - \frac{x^2}{1/9} = 1 \text{ или } \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1.$$

Значит, это гипербола с действительной осью $b = \frac{1}{3}$ и мнимой осью $a = \frac{1}{2}$. Для построения отложим от начала координат в обе стороны $\frac{1}{2}$ по оси Ox и $\frac{1}{3}$ по оси Oy (рис. 57).

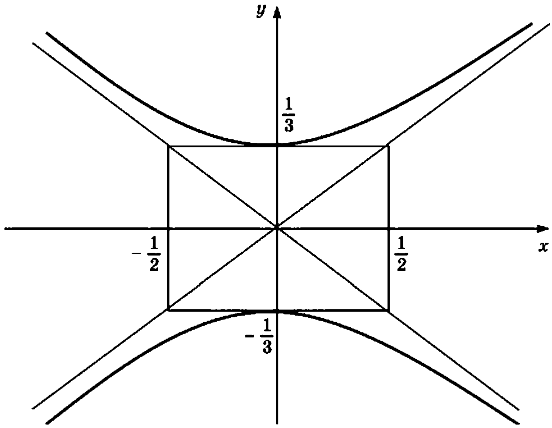


Рис. 57
Чертеж гиперболы к примеру 2.14*б*

Аналогично случаю а) построим прямоугольник, затем проведем в нем диагонали и продлим их за прямоугольник. Продолжения диагоналей являются асимптотами гиперболы. Ветви гиперболы будут располагаться выше и ниже построенного прямоугольника, вершинами гиперболы являются точки $A\left(\frac{1}{3};0\right)$ и $B\left(-\frac{1}{3};0\right)$. По мере удаления от начала координат ветви гиперболы будут неограниченно приближаться к асимптотам, но никогда их не пересекут.

в) $y^2 = 21x$.

Уравнение задает параболу, симметричную относительно оси Ox и направленную влево. Вершиной параболы является начало координат. Для построения найдем пару дополнительных точек. Ими являются, например, (21; 21) и (21; −21). Можно найти еще несколько точек, вычислив их координаты хотя бы приблизительно (рис. 58).

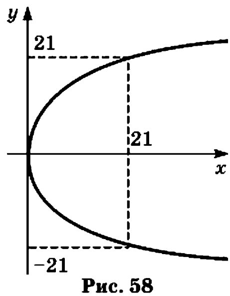


Рис. 58
Чертеж параболы к примеру 2.14*в*

Пример 2.15. Привести к каноническому виду уравнение $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Найти координаты фокусов. Построить кривую.

Р е ш е н и е. Сгруппируем слагаемые и дополним до полного квадрата. Получим:

$$(x^2 - 4x) + 4 \cdot (y^2 + 2y) + 4 = 0,$$
$$(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4 \cdot (y^2 + 2y + 1 - 1) + 4 = 0,$$
$$(x - 2)^2 + 4 \cdot (y + 1)^2 - 4 - 4 + 4 = 0,$$
$$(x - 2)^2 + 4 \cdot (y + 1)^2 = 4,$$
$$\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{1^2} = 1.$$

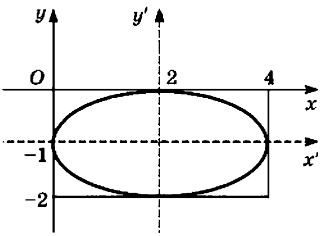


Рис. 59
Чертеж эллипса к примеру 2.15

Перенесем начало координат в точку $O'(2; -1)$ (рис. 59) и применим преобразование координат (см. п. 6.3.1) $x' = x - 2$, $y' = y + 1$, получим уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{1^2} = 1.$$

Полуоси данного эллипса $a = 2$, $b = 1$. Так как $a > b$, то

$$c^2 = a^2 - b^2; \; c = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Координаты фокусов в новой системе координат $F_1'(-\sqrt{3}; 0)$ и $F_2'(\sqrt{3}; 0)$. Из преобразования координат (см. п. 6.3.1) имеем:

$$x = x' + 2; \; y = y' - 1,$$

поэтому координаты фокусов в исходной системе координат выглядят так:

$$F_1(-\sqrt{3} + 2; -1) \text{ и } F_2(\sqrt{3} + 2; -1).$$

Пример 2.16. Привести уравнение $2x^2 - 2y^2 + 12x + 4y + 16 = 0$ к каноническому виду, сделать чертеж, если это возможно.

Р е ш е н и е. Сгруппируем слагаемые, сразу дополняя до полного квадрата:

$$2 \cdot (x^2 + 6x + 9 - 9) - 2 \cdot (y^2 - 2y + 1 - 1) + 16 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot (x + 3)^2 - 2 \cdot (y - 1)^2 - 18 + 2 + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(x+3)^2 - 2\cdot(y-1)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+3)^2 - (y-1)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+3-y+1)\cdot(x+3+y-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-y+4)\cdot(x+y+2) = 0.$$

То есть данная кривая распадается на пару пересекающихся прямых, задаваемых уравнениями $x - y + 4 = 0$ и $x + y + 2 = 0$ (рис. 60).

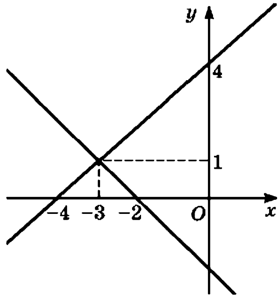


Рис. 60
Чертеж прямых к примеру 2.16

Пример 2.17. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой расстояние до точки $A(-2; 1)$ в 2 раза больше расстояния до прямой l: $x = -5$.

Р е ш е н и е. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой кривой. Тогда расстояние

$$MA = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}.$$

Так как прямая l: $x = -5$ перпендикулярна оси Ox, то расстояние до нее от точки M равно $x - (-5) = x + 5$.

Тогда по условию получаем:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 2\cdot(x+5).$$

Возведем обе части полученного равенства в квадрат и проведем необходимые преобразования:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4\cdot(x+5)^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 =$$
$$= 4x^2 + 40x + 100 \Rightarrow 3x^2 - y^2 + 36x + 2y + 95 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\cdot(x^2 + 12x) - (y^2 - 2y) + 95 = 0 \Rightarrow 3\cdot(x^2 + 12x + 36 - 36) -$$
$$-(y^2 - 2y + 1 - 1) + 95 = 0 \Rightarrow 3\cdot(x+6)^2 - (y-1)^2 -$$
$$-108 + 1 + 95 = 0 \Rightarrow 3\cdot(x+6)^2 - (y-1)^2 = 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(x+6)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1.$$

Применив преобразование координат $x' = x + 6$, $y' = y - 1$, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1.$$

То есть искомая кривая — это гипербола с центром симметрии $O'(-6; 1)$.

Пример 2.18. Привести уравнение $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$ к каноническому виду. Определить тип кривой.

Решение. Применим формулу (20) (см. пп. 6.3.2 и 11.5), получим:

$$14 \cdot (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 24 \cdot (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) \times \\ \times (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 21 \cdot (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 - \\ - 4 \cdot (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 18 \cdot (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) - 139 = 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$(14\cos^2\alpha + 24\sin\alpha\cos\alpha + 21\sin^2\alpha)x'^2 + \\ + (14\sin^2\alpha - 24\sin\alpha\cos\alpha + 21\cos^2\alpha)y'^2 + \\ + (24\cos^2\alpha + 14\sin\alpha\cos\alpha - 24\sin^2\alpha)x'y' + \\ + (18\sin\alpha - 4\cos\alpha)x' + (4\sin\alpha + 18\cos\alpha)y' - 139 = 0.$$

Приравняем к нулю коэффициент при $x'y'$ и, решив тригонометрическое уравнение, найдем α:

$$24\cos^2\alpha + 14\sin\alpha\cos\alpha - 24\sin^2\alpha = 0$$

или

$$12\mathrm{tg}^2\alpha + 7\mathrm{tg}\,\alpha - 12 = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$$

или

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}.$$

Очевидно, что эти значения тангенса соответствуют двум перпендикулярным направлениям, поэтому достаточно взять одно из них, так как при втором мы просто поменяем местами x' и y'. Возьмем $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$. Тогда $\sin\alpha = \pm\frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$. Пусть $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}$. То есть совершаем поворот координатных осей на угол $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{4}{3}$ (см. п. 6.3.2).

Подставим в уравнение и получим:

$$30x'^2 + 5y'^2 + 12x' + 14y' - 139 = 0.$$

Теперь выделяем полные квадраты, аналогично случаю пятичленного уравнения.

$$30\cdot\left(x'^2+\frac{2}{5}x'+\frac{1}{25}-\frac{1}{25}\right)+5\cdot\left(y'^2+\frac{14}{5}y'+\frac{49}{25}-\frac{49}{25}\right)-139=0,$$

$$30\cdot\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2+5\cdot\left(y'+\frac{7}{5}\right)^2=150,\ \frac{\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2}{5}+\frac{\left(y'+\frac{7}{5}\right)^2}{30}=1.$$

Возьмем за новое начало координат точку $O'\left(-\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$ и, применив преобразование координат (см. п. 6.3.1) $x''=$ $=x'+\frac{1}{5}, y''=y'+\frac{7}{5}$, получим уравнение эллипса:

$$\frac{x''^2}{5}+\frac{y''^2}{30}=1.$$

Полуоси данного эллипса:

$$a=\sqrt{5} \text{ и } b=\sqrt{30}.$$

12.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какая линия называется кривой второго порядка?
2. Дайте определение эллипса как геометрического места точек (ГМТ).
3. Запишите каноническое уравнение эллипса, определите геометрический смысл коэффициентов a и b.
4. Запишите координаты фокусов эллипса.
5. Запишите формулу для эксцентриситета эллипса.
6. Запишите каноническое уравнение окружности с центром в начале координат.
7. Как построить эллипс по его каноническому уравнению?
8. Дайте определение гиперболы как ГМТ.
9. Запишите каноническое уравнение гиперболы, определите геометрический смысл коэффициентов a и b.
10. Какая полуось у гиперболы действительная, какая мнимая?
11. Запишите координаты фокусов гиперболы.
12. Запишите уравнения асимптот гиперболы.
13. Запишите формулу для эксцентриситета гиперболы.
14. Как построить гиперболу по ее каноническому уравнению?
15. Дайте определение параболы.

16. Запишите каноническое уравнение параболы, симметричной относительно осей Ox и Oy.
17. Запишите координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.
18. Как построить параболу по ее каноническому уравнению?
19. Запишите общее уравнение кривой второго порядка в случае, когда коэффициент уравнения B равен нулю.
20. В каком случае уравнение $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ определяет эллипс? гиперболу? параболу?

12.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА» (ЗАДАЧИ 1–6)

Задача 1.

1. Составить каноническое уравнение эллипса (в нечетных вариантах) или гиперболы (в четных вариантах) с полуосями a и b (в вариантах 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26 и 30 действительная полуось a, мнимая — b, в вариантах 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 — наоборот) по данным таблицы, выписать координаты фокусов.

2. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в точке (0; 0) с заданными параметром p и осью симметрии по данным таблицы, выписать координаты фокуса и уравнение директрисы.

Данные к задаче 1

Вариант	Данные				Вариант	Данные			
	a	b	p	Ось симметрии		a	b	p	Ось симметрии
1	3	1	5,5	Ox	2	6	5	3,5	Oy
3	7	4	−5	Oy	4	2	1	−4,5	Ox
5	4	3	4	Ox	6	5	2	2,5	Oy
7	7	5	−3	Oy	8	6	1	−0,5	Ox
9	7	7	2	Ox	10	3	2	1,5	Oy
11	4	1	−1	Oy	12	6	6	−3,25	Ox
13	5	4	6	Ox	14	8	5	3,75	Oy
15	7	3	−7	Oy	16	5	5	−0,75	Ox

Продолжение табл.

Вариант	Данные				Вариант	Данные			
	a	b	p	Ось симметрии		a	b	p	Ось симметрии
17	8	3	6,5	Ox	18	3	3	8	Oy
19	5	1	−4,75	Oy	20	7	6	−8,5	Ox
21	4	4	10	Ox	22	8	7	0,25	Oy
23	6	3	−1,25	Oy	24	4	2	−9	Ox
25	7	1	9,5	Ox	26	8	2	2,75	Oy
27	2	2	−1,75	Oy	28	7	2	−4,75	Ox
29	6	2	7,5	Ox	30	5	3	4,25	Oy

Задача 2. Выбрав соответствующий масштаб, построить кривые 2-го порядка, заданные уравнениями, приведенными в таблице.

Данные к задаче 2

Вариант	Уравнения кривых		
1	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$	$25y^2 - x^2 = 1$	$2x^2 = y$
2	$9x^2 + 4y^2 = 1$	$x^2-\frac{y^2}{4}=1$	$2y^2 = -x$
3	$\frac{x^2}{9}+y^2=1$	$16x^2 - 4y^2 = 1$	$3x^2 = -y$
4	$25x^2 + 9y^2 = 1$	$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$	$3y^2 = x$
5	$\frac{x^2}{4}+y^2=1$	$9x^2 - y^2 = 1$	$8x^2 = -y$
6	$16x^2 + y^2 = 1$	$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$	$4y^2 = -x$
7	$\frac{x^2}{25}+y^2=1$	$9x^2 - 4y^2 = 1$	$5x^2 = y$
8	$9x^2 + y^2 = 1$	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$	$2y^2 = x$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения кривых		
9	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$	$25y^2-4x^2=1$	$3x^2=y$
10	$25x^2+y^2=1$	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$	$9y^2=-x$
11	$25x^2+16y^2=1$	$x^2-\frac{y^2}{9}=1$	$8x^2=y$
12	$36x^2+9y^2=1$	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$	$7y^2=x$
13	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$	$4y^2-x^2=1$	$x^2=-7y$
14	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$	$16y^2-9x^2=1$	$8y^2=x$
15	$9y^2+25x^2=1$	$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$	$4x^2=-y$
16	$4x^2+9y^2=1$	$\frac{x^2}{4}-y^2=1$	$y^2=-2x$
17	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$	$y^2-25x^2=1$	$x^2=2y$
18	$9x^2+25y^2=1$	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$	$y^2=3x$
19	$x^2+\frac{y^2}{9}=1$	$4x^2-16y^2=1$	$x^2=-3y$
20	$x^2+16y^2=1$	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$	$y^2=-4x$
21	$x^2+\frac{y^2}{4}=1$	$x^2-9y^2=1$	$x^2=-8y$
22	$x^2+9y^2=1$	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$	$y^2=2x$
23	$x^2+\frac{y^2}{25}=1$	$4x^2-9y^2=1$	$x^2=5y$
24	$x^2+25y^2=1$	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$	$y^2=-9x$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения кривых		
25	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$	$4x^2-25y^2=1$	$x^2=3y$
26	$9x^2+36y^2=1$	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$	$y^2=7x$
27	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$	$9y^2-16x^2=1$	$2x^2=-y$
28	$16x^2+25y^2=1$	$\frac{x^2}{9}-y^2=1$	$y^2=-7x$
29	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$	$-4x^2+y^2=1$	$7x^2=-y$
30	$36x^2+16y^2=1$	$\frac{y^2}{16}-x^2=1$	$y^2=6x$

Задача 3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду, построить кривые, найти координаты фокусов.

Данные к задаче 3

Вариант	Уравнение кривой	
1	$9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$	$x^2-8x-y+15=0$
2	$x^2-y^2-2x+4y-7=0$	$y^2-2y+x+2=0$
3	$x^2+4y^2+4x-24y+36=0$	$x^2+4x-2y+6=0$
4	$x^2-y^2+6x+4y-4=0$	$y^2+2y+2x-3=0$
5	$16x^2+y^2+96x-4y-132=0$	$x^2+2x+3y+7=0$
6	$16y^2-9x^2+18x+32y-137=0$	$x^2-4x-4y+8=0$
7	$x^2+16y^2-4x-32y+4=0$	$y^2-6y-3x+6=0$
8	$16y^2-x^2-2x-64y+47=0$	$y^2+6y+4x+17=0$
9	$16x^2+4y^2+128x+8y+244=0$	$x^2+2x+5y-4=0$
10	$y^2-x^2-10x-6y-17=0$	$y^2-8y-5x+11=0$
11	$9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$	$x^2+2x-y+5=0$
12	$x^2-y^2-4x+4y-4=0$	$y^2+2y+x=0$
13	$x^2+4y^2-6x+16y+21=0$	$x^2-2x-2y-3=0$
14	$x^2-y^2-4x-4y-9=0$	$y^2-4y+2x+6=0$
15	$16x^2+y^2-64x+6y+57=0$	$x^2+4x+3y+7=0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнение кривой	
16	$x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$	$y^2 + 2y - 3x - 2 = 0$
17	$4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0$	$x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$
18	$16y^2 - x^2 + 4x + 32y - 4 = 0$	$y^2 + 4y + 4x + 16 = 0$
19	$16x^2 + 4y^2 + 32x + 32y + 16 = 0$	$x^2 - 2x + 5y + 6 = 0$
20	$x^2 - y^2 + 10x + 6y + 15 = 0$	$y^2 + 2y - 5x + 21 = 0$
21	$4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$	$x^2 - 2x - y + 5 = 0$
22	$x^2 - y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$	$y^2 - 2y + x = 0$
23	$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$	$x^2 + 4x + 2y + 2 = 0$
24	$x^2 - y^2 + 2x + 6y - 17 = 0$	$y^2 + 4y - 2x + 2 = 0$
25	$x^2 + 16y^2 - 4x + 96y + 132 = 0$	$x^2 - 4x + 3y + 7 = 0$
26	$x^2 - y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$	$y^2 - 2y - 3x + 4 = 0$
27	$9x^2 + 4y^2 - 72x + 16y + 124 = 0$	$x^2 + 2x + 4y + 9 = 0$
28	$y^2 - 16x^2 + 64x + 2y - 79 = 0$	$y^2 - 4y - 4x - 8 = 0$
29	$4x^2 + 16y^2 + 8x + 128y + 196 = 0$	$x^2 + 2x - 5y - 4 = 0$
30	$x^2 - y^2 + 10x - 6y + 15 = 0$	$y^2 - 2y - 5x + 11 = 0$

Задача 4. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, сделать чертеж, если это возможно.

Данные к задаче 4

Вариант	Уравнение кривой	Вариант	Уравнение кривой
1	$4x^2 - 16y^2 - 24x - 64y - 28 = 0$	2	$16x^2 + 9y^2 - 96x + 36y + 180 = 0$
3	$4x^2 - 9y^2 - 16x + 36y - 20 = 0$	4	$16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 98 = 0$
5	$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0$	6	$4x^2 + 9y^2 + 16x - 72y + 160 = 0$
7	$x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$	8	$9x^2 + y^2 - 54x + 2y + 83 = 0$
9	$4y^2 - x^2 + 16y + 10x - 9 = 0$	10	$x^2 + 25y^2 + 6x + 50y + 9 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнение кривой	Вариант	Уравнение кривой
11	$4x^2 - 16y^2 + 16x - 96y - 128 = 0$	12	$16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 145 = 0$
13	$4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 20 = 0$	14	$16x^2 + 9y^2 - 96x + 18y + 154 = 0$
15	$9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 32 = 0$	16	$x^2 + 16y^2 - 2x - 64y + 65 = 0$
17	$9y^2 - 16x^2 + 18y + 32x - 7 = 0$	18	$9x^2 + y^2 + 18x - 6y + 18 = 0$
19	$4y^2 - x^2 - 40y - 4x + 96 = 0$	20	$x^2 + 25y^2 + 2x + 100y + 101 = 0$
21	$x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$	22	$9x^2 + 16y^2 + 36x - 96y + 180 = 0$
23	$9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y + 20 = 0$	24	$9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y + 97 = 0$
25	$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 7 = 0$	26	$16x^2 + y^2 - 32x - 4y + 20 = 0$
27	$16y^2 - 9x^2 + 32y + 18x + 7 = 0$	28	$x^2 + 9y^2 + 2x - 54y + 82 = 0$
29	$y^2 - 4x^2 - 10y - 16x + 9 = 0$	30	$25x^2 + y^2 + 50x + 4y + 29 = 0$

Задача 5. Для каждой точки кривой отношение расстояния до точки A к расстоянию до прямой l равно n. Найти уравнение кривой на плоскости, привести полученное уравнение к каноническому виду, указать тип кривой.

Данные к задаче 5

Вариант	Исходные данные			Вариант	Исходные данные		
	A	n	l		A	n	l
1	(0; 1)	2	$x = -3$	2	(1; −1)	$\frac{1}{3}$	$y = 7$
3	(−4; 2)	1	$x = 4$	4	(−2; 1)	3	$x = 6$
5	(3; 3)	$\frac{1}{2}$	$y = 0$	6	(−1; 4)	1	$x = 3$
7	(2; 6)	2	$y = -3$	8	(4; 5)	$\frac{2}{3}$	$y = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Исходные данные			Вариант	Исходные данные		
	A	n	l		A	n	l
9	(–1; 1)	1	$x = -3$	10	(3; 2)	$\frac{3}{2}$	$x = -2$
11	(2; 0)	2	$y = -3$	12	(–1; 4)	$\frac{1}{3}$	$x = 7$
13	(5; –4)	1	$y = 4$	14	(–4; –2)	3	$y = 6$
15	(3; –1)	$\frac{1}{2}$	$x = 0$	16	(–2; –1)	1	$y = 3$
17	(6; –6)	2	$x = -3$	18	(5; 2)	$\frac{2}{3}$	$x = 0$
19	(2; –1)	1	$y = -3$	20	(–2; 3)	$\frac{3}{2}$	$y = -2$
21	(0; –1)	2	$x = 3$	22	(2; 1)	$\frac{1}{3}$	$y = -7$
23	(4; –1)	1	$x = -4$	24	(2; –3)	3	$x = -6$
25	(–5; –3)	$\frac{1}{2}$	$y = 0$	26	(1; 2)	1	$x = -3$
27	(–3; –6)	2	$y = 3$	28	(1; –5)	$\frac{2}{3}$	$y = 0$
29	(1; –2)	1	$x = 3$	30	(–3; 4)	$\frac{3}{2}$	$x = 2$

Задача 6. Исследовать кривую второго порядка и привести ее уравнение к каноническому виду.

Данные к задаче 6

Вариант	Уравнение кривой	Вариант	Уравнение кривой
1	$x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$	2	$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
3	$3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$	4	$4xy + 4x - 4y = 0$
5	$x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$	6	$-2x^2 + 2xy - 2y^2 - 6x + 6y + 3 = 0$

Продолжение табл.

Вари-ант	Уравнение кривой	Вари-ант	Уравнение кривой
7	$4xy + 4x - 4y + 4 = 0$	8	$-3x^2 + 4xy - 3y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$
9	$-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$	10	$-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
11	$-x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$	12	$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$
13	$2x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 8y + 1 = 0$	14	$-4x^2 + 2xy - 4y^2 + 10x - 10y + 1 = 0$
15	$-x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$	16	$4xy + 4x - 4y - 2 = 0$
17	$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x + 8y + 1 = 0$	18	$x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$
19	$5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$	20	$x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$
21	$-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$	22	$-x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$
23	$3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$	24	$2xy + 2x + 2y - 3 = 0$
25	$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 12x - 4y + 1 = 0$	26	$4x^2 + 2xy + 4y^2 + 10x + 10y + 1 = 0$
27	$4xy + 4x + 4y + 1 = 0$	28	$3x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x + 12y + 1 = 0$
29	$x^2 - 8xy + y^2 - 20x + 20y + 1 = 0$	30	$-x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

12.4. ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

12.4.1. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Рассмотрим построение кривой второго порядка в полярной системе координат.

Пример 2.19. Кривая задана уравнением в ПСК

$$\rho = \frac{21}{5 - 2\cos\varphi}.$$

1. Построить график кривой в ПСК по точкам.

2. Найти уравнение данной кривой в ДПСК, начало которой совпадает с полюсом, а ось Ox — с полярной осью ПСК.

3. Полученное уравнение исследовать и привести к каноническому виду.

Решение.

1. Пользуемся правилом построения кривых в ПСК (см. п. 6.4):

а) решаем неравенство $\rho \geq 0$; $\dfrac{21}{5-2\cos\varphi} \geq 0$; так как $21 > 0$, тогда $5 - 2\cos\varphi > 0$, $\cos\varphi < 5/2$, $\varphi \in R$ (см. табл. 5);

б) выбираем значения углов: $\varphi \in [0; 2\pi)$, разбив его на отрезки длиной $\pi/8$;

в) составим таблицу значений ρ в зависимости от φ:

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
ρ	7,0	6,6	5,8	5,0	4,3	3,7	3,3	3,1

φ	π	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$
ρ	3,0	3,1	3,3	3,7	4,3	5,0	5,8	6,6

г) строим точки с найденными координатами $(\rho; \varphi)$ (построение точек в ПСК рассмотрено в п. 6.3, см. пример 2.1);

д) соединив точки плавной линией, получим кривую эллипс (рис. 61).

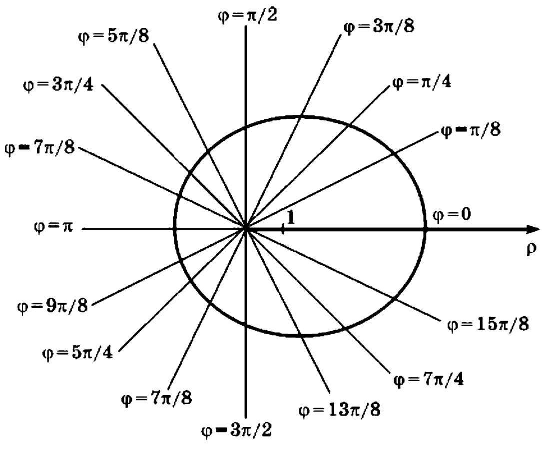


Рис. 61

2. По формулам (15) (см. п. 6.2) перехода из ПСК в ДПСК получим:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{21}{5-2x/\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отсюда после алгебраических преобразований имеем уравнение

$$5\sqrt{x^2+y^2}-2x=21.$$

Выделив радикал и возведя в квадрат, получим уравнение кривой в ДПСК:

$$25x^2+25y^2=(21+2x)^2,$$

после приведения подобных:

$$21x^2+25y^2-84x-441=0.$$

3. Выделим в левой части уравнения кривой полный квадрат:

$$21x^2-84x+84+25y^2-441-84=0;$$
$$21(x-2)^2+25y^2=525.$$

Разделим обе части уравнения на 525, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1.$$

Центр данного эллипса находится в точке с координатами (2; 0), эллипс имеет полуоси:

$$a=\sqrt{25}=5;\ b=\sqrt{21}=4{,}6.$$

Пример 2.20. Дано уравнение кривой в ДПСК $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. Перейти к полярному уравнению кривой и построить ее в ПСК.

Р е ш е н и е. Дано каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. Для перехода к полярному уравнению этой кривой воспользуемся формулами (15) (см. п. 6.2):

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi.$$

Имеем

$$\rho^2\cos^2\varphi - \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{4} = 1;$$
$$4\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = 4;$$
$$\rho^2\cdot(4\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4.$$

Далее, используя тригонометрические формулы $\cos^2\varphi = = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$; $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$, получаем:

$$\rho^2\cdot(2 + 2\cos 2\varphi - 0,5 + 0,5\cos 2\varphi) = 4;$$
$$\rho^2\cdot(1,5 + 2,5\cos 2\varphi) = 4;$$
$$0,5\rho^2\cdot(3 + 5\cos 2\varphi) = 4;$$
$$\rho^2\cdot(3 + 5\cos 2\varphi) = 8;$$
$$\rho^2 = \frac{8}{3+5\cos 2\varphi}; \rho = \pm\sqrt{\frac{8}{3+5\cos 2\varphi}}.$$

Так как $\rho \geq 0$, то возможен только вариант

$$\rho = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3+5\cos 2\varphi}}.$$

Поскольку подкоренное выражение должно быть положительным, то

$$3 + 5\cos 2\varphi > 0;$$
$$5\cos 2\varphi > -3;$$
$$\cos 2\varphi > 0,6;$$
$$-\arccos(-0,6) + 2\pi n < 2\varphi < \arccos(-0,6) + 2\pi n,\ n \in Z,$$
$$-0,5\arccos(-0,6) + \pi n < \varphi < 0,5\arccos(-0,6) + \pi n,\ n \in Z.$$

Перед тем как заполнить таблицу значений φ и ρ, вычислим значения

$$\arccos(-0,6) = \pi - \arccos 0,6 \approx 127°,$$
$$0,5\arccos(-0,6) \approx 64°,$$

т. е.

$$-64° + 180°n < \varphi < 64° + 180°n,\ n \in Z.$$

Вследствие того, что $\cos 2\varphi$ — четная функция, т. е. $\cos(-2\varphi) = \cos 2\varphi$, при построении достаточно ограничиться значениями $0 \leq \varphi \leq \pi$, а затем отобразить график симметрично относительно полярной оси. Заполним таблицу,

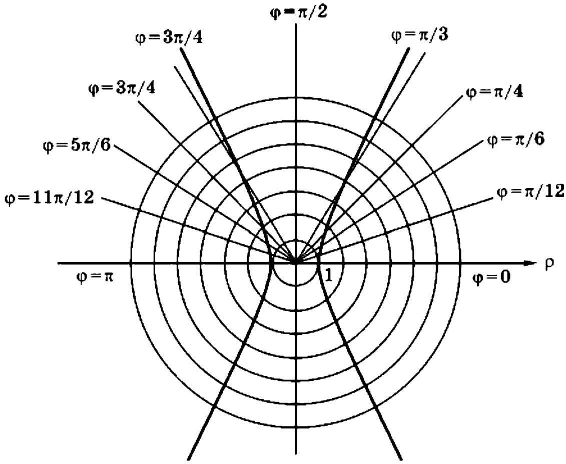


Рис. 62

придавая полярному углу φ значения из промежутков: $0 \le \varphi < 64°$; $116° < \varphi \le 180°$, и построим график (рис. 62).

φ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	...	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/15$
ρ	1	1,04	1,23	1,63	4,04	...	4,04	1,63	1,23	1,04

Отметим, что при $\varphi \to 64°$, $\rho \to \infty$, при $\varphi \to 116°$, $\rho \to \infty$.

12.4.2. ВАРИАНТЫ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ «УРАВНЕНИЕ КРИВОЙ И ЕЕ ГРАФИК В ПСК» (ЗАДАЧИ 7 И 8)

Задача 7. Кривая задана уравнением в ПСК.

1. Построить график кривой в ПСК по точкам.
2. Найти уравнение данной кривой в ДПСК, начало которой совпадает с полюсом, а ось Ox — с полярной осью ПСК.
3. Полученное уравнение исследовать и привести к каноническому виду.

Данные к задаче 7

Вариант	$\rho = \rho(\varphi)$	Вариант	$\rho = \rho(\varphi)$	Вариант	$\rho = \rho(\varphi)$
1	$\rho = \dfrac{8}{1+3\cos\varphi}$	2	$\rho = \dfrac{6}{1-2\sin\varphi}$	3	$\rho = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$

Продолжение табл.

Вариант	$\rho=\rho(\varphi)$	Вариант	$\rho=\rho(\varphi)$	Вариант	$\rho=\rho(\varphi)$
4	$\rho=\frac{1}{1+\cos\varphi}$	5	$\rho=\frac{6}{1-2\cos\varphi}$	6	$\rho=\frac{3}{1+2\sin\varphi}$
7	$\rho=\frac{8}{3-\cos\varphi}$	8	$\rho=\frac{8}{3-\sin\varphi}$	9	$\rho=\frac{3}{1+2\cos\varphi}$
10	$\rho=\frac{5}{6+4\sin\varphi}$	11	$\rho=\frac{3}{2+\cos\varphi}$	12	$\rho=\frac{3}{2+\sin\varphi}$
13	$\rho=\frac{8}{3+\sin\varphi}$	14	$\rho=\frac{1}{3-3\sin\varphi}$	15	$\rho=\frac{5}{2-3\cos\varphi}$
16	$\rho=\frac{5}{2-3\sin\varphi}$	17	$\rho=\frac{1}{3-3\cos\varphi}$	18	$\rho=\frac{9}{2-\sin\varphi}$
19	$\rho=\frac{1}{2+2\cos\varphi}$	20	$\rho=\frac{1}{2+2\sin\varphi}$	21	$\rho=\frac{9}{2-\cos\varphi}$
22	$\rho=\frac{3}{1-2\sin\varphi}$	23	$\rho=\frac{5}{6-4\cos\varphi}$	24	$\rho=\frac{3}{1-2\cos\varphi}$
25	$\rho=\frac{9}{1-2\sin\varphi}$	26	$\rho=\frac{8}{1+3\sin\varphi}$	27	$\rho=\frac{5}{6+4\cos\varphi}$
28	$\rho=\frac{8}{3+\cos\varphi}$	29	$\rho=\frac{9}{2+\cos\varphi}$	30	$\rho=\frac{9}{2+\sin\varphi}$

Задача 8. Даны уравнения кривых в ДПСК. Перейти к полярному уравнению кривой и построить ее в ПСК.

Данные к задаче 8

Вариант	$F(x;y)=0$	Вариант	$F(x;y)=0$
1	а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $x^2=2y$	2	а) $x^2-\frac{y^2}{2}=1$; б) $x^2=3y$
3	а) $x^2-y^2=9$; б) $y=\frac{x^2}{4}$	4	а) $\frac{x^2}{2}-y^2=1$; б) $y=5x^2$
5	а) $y^2-\frac{x^2}{4}=1$; б) $x=4y^2$	6	а) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$; б) $x=7y^2$

Продолжение табл.

Вариант	$F(x; y) = 0$	Вариант	$F(x; y) = 0$
7	а) $x^2 - y^2 = 4$; б) $-x = 2y^2$	8	а) $y^2 - x^2 = 1$; б) $-5x = y^2$
9	а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $2x^2 = y$	10	а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $x^2 = 4y$
11	а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; б) $5x^2 = -y$	12	а) $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$; б) $x^2 = -2y$
13	а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; б) $y^2 = -6x$	14	а) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$; б) $x^2 = 5y$
15	а) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; б) $y^2 = 7x$	16	а) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$; б) $4x^2 = -y$
17	а) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{8} = 1$; б) $y^2 = 3x$	18	а) $x^2 - y^2 = 9$; б) $y^2 = -2x$
19	а) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$; б) $x^2 = -8y$	20	а) $\frac{y^2}{16} - x^2 = 1$; б) $y^2 = -9x$
21	а) $x^2 - y^2 = 10$; б) $y^2 = -4x$	22	а) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{7} = 1$; б) $x^2 = -5y$
23	а) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{7} = 1$; б) $3x^2 = y$	24	а) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$; б) $4y^2 = -x$
25	а) $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$; б) $6y^2 = -x$	26	а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; б) $x^2 = -7y$
27	а) $4y^2 - 25x^2 = 9$; б) $8y^2 = x$	28	а) $9y^2 - 16x^2 = 1$; б) $9y^2 = -x$
29	а) $x^2 - 9y^2 = 1$; б) $10x^2 = -y$	30	а) $y^2 - 25x^2 = 1$; б) $9x^2 = y$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

13. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ: ВИДЫ УРАВНЕНИЙ

13.1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Зададим в пространстве декартову прямоугольную систему координат (ДПСК). Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — фиксированная точка пространства, $\vec{n} = (A; B; C)$ — ненулевой вектор. Тогда *уравнение плоскости в пространстве*, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к вектору $\vec{n}$, может быть записано *в векторной форме*:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \tag{60}$$

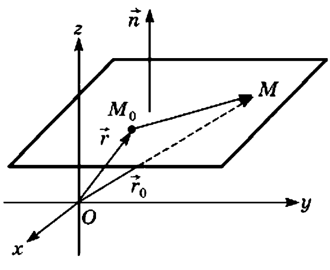


Рис. 63

где векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ — радиус-векторы точек $M(x; y; z)$ (произвольной точки этой плоскости) и M_0 соответственно (рис. 63). В этом случае вектор $\vec{n}$ называют *нормальным* вектором данной плоскости или *нормалью*.

Переписав уравнение (60) в координатной форме, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{61}$$

Раскроем скобки в левой части равенства (61) и введем обозначение

$$-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D.$$

Тогда уравнение плоскости можно записать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{62}$$

Утверждение 3.1. Если в уравнении (62) хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю, то уравнение (62) в пространстве определяет некоторую плоскость. Уравнение вида (62) называется *общим уравнением* плоскости в пространстве.

Замечание 3.1. Вывод уравнения (62) позволяет считать, что вектор с координатами $\{A; B; C\}$ является нормальным вектором плоскости, заданной общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Например, если плоскость задана уравнением $3x - 4y + z - 2 = 0$, то вектор нормали будет иметь координаты: $\vec{n} = \{3; -4; 1\}$.

13.2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПАРАЛЛЕЛЬНО ДВУМ ЗАДАННЫМ (НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ) ВЕКТОРАМ

Пусть в пространстве заданы фиксированная точка $M(x_0; y_0; z_0)$ и два неколлинеарных вектора — $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Рассмотрим плоскость в пространстве, проходящую через данную точку параллельно заданным векторам. Если $M\ (x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overline{M_0M}, \vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны (рис. 64). Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения, запишем это условие в координатной форме:

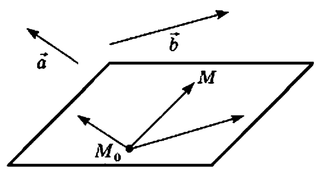


Рис. 64

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (63)$$

Из уравнения (63), раскрыв определитель и приведя подобные, получим общее уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 параллельно двум неколлинеарным векторам. Уравнение вида (63) называют *детерминантным уравнением* плоскости.

13.3. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТРИ ДАННЫЕ ТОЧКИ

Рассмотрим три фиксированные точки пространства (рис. 65), не лежащие на одной прямой, и запишем их координаты: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$. Поскольку точки не лежат на одной прямой, то векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ не являются коллинеарными. Таким образом, плоскость, проходящая через точки M_1, M_2, M_3 совпадает с плоскостью, проходящей через точку M_1 параллельно двум заданным (неколлинерным) векторам — $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$. Ее уравнение можно записать, пользуясь формулой (63). В качестве точки M_0 возьмем точку M_1 (рис. 65), координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заменим координатами векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ соответственно и получим:

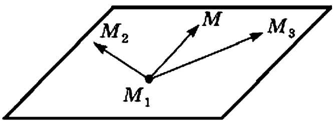


Рис. 65

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (64)$$

Таким образом, уравнение (64) является уравнением плоскости в пространстве, проходящей через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

13.4. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ «В ОТРЕЗКАХ»

Пусть плоскость задана своим общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Предположим, что коэффициент $D\neq 0$. Перепишем данное уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz=-D,$$

разделим обе части полученного равенства на $-D$ и получим уравнение плоскости в виде

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1. \qquad (65)$$

Введем следующие обозначения:

$$-\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c.$$

Тогда уравнение (65) примет вид, называемый уравнением плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \quad (66)$$

Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Очевидно, что точки пространства с координатами (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c) принадлежат плоскости, заданной уравнением (66). Следовательно, рассматриваемая плоскость отсекает на осях координат отрезки, значения длины которых соответствуют значениям параметров a, b, c, взятым по модулю. При этом положительный знак параметра означает, что отрезок отсекается на положительной части соответствующей оси координат, а отрицательный — на отрицательной.

Пример 3.1. Записать уравнение плоскости σ: $3x - 2y + z - 6 = 0$ «в отрезках» и построить данную плоскость в ДПСК.

Р е ш е н и е. Перенесем свободный член данного уравнения в его правую часть:

$$3x - 2y + z = 6.$$

После деления уравнения на 6 проведем соответствующие преобразования коэффициентов и получим

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{6}=1.$$

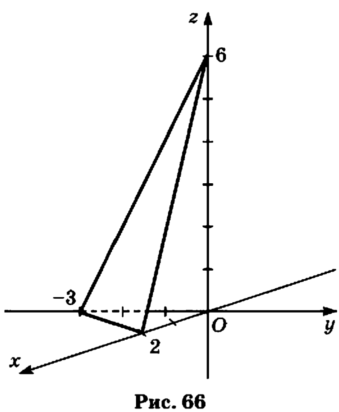


Рис. 66

Это и есть требуемое уравнение плоскости σ «в отрезках». Схематичное изображение плоскости, которая отсекает на положительной части оси Ox отрезок длины 2, на отрицательной части оси Oy — отрезок длины 3, на положительной части оси Oz — отрезок длины 6, приведен на рисунке 66.

13.5. НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим в ДПСК какую-либо плоскость σ. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную плоскости σ, и обозначим буквой P точку пересечения прямой n и плоскости σ. Возьмем на прямой n единичный вектор $\vec{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, направление которого совпадает с направлением $\overrightarrow{OP}$ (здесь α, β, γ углы вектора $\vec{n}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно). В случае совпадения точек O и P направление $\vec{n}$ выберем произвольно (рис. 67). Обозначим длину отрезка OP через p. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $P(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n}$:

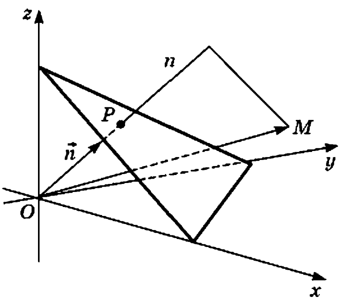


Рис. 67

$$\cos\alpha \cdot (x - x_0) + \cos\beta \cdot (y - y_0) + \cos\gamma \cdot (z - z_0) = 0. \quad (67)$$

Учитывая, что

$$\cos\alpha \cdot x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma \cdot z_0 = p,$$

получим уравнение

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0, \quad (68)$$

называемое *нормальным уравнением плоскости*.

З а м е ч а н и е 3.2. Общее уравнение плоскости (62) легко приводится к нормальному виду умножением его на соответствующий нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (69)$$

взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена в уравнении (62).

13.6. ПОЛЯРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛОСКОСТИ

Пусть плоскость задана нормальным уравнением (68). Тогда длина p перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, есть *полярное расстояние* плоскости. Полярное расстояние положительно или равно нулю. *Полярными углами* плоскости называют углы α, β, γ из уравнения (68), эти углы связаны между собой соотношением: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Полярное расстояние и полярные углы называют *полярными параметрами* плоскости.

Если плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то полярные параметры плоскости можно определить по формулам:

$$\begin{cases} p = \dfrac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos\alpha = \pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos\beta = \pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos\gamma = \pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{cases} \quad (70)$$

где в последних трех формулах системы (70) знак «+» берется при $D < 0$, а знак «−» — при $D > 0$. Если $D = 0$, то знак можно выбрать произвольно (в этом случае выбирают только знак «+» или только знак «−» во всех трех формулах).

13.7. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Исследуем общее уравнение плоскости (62).

1. При $D \neq 0$ $Ax + By + Cz = -D$, плоскость не проходит через начало координат; в этом случае возможны следующие варианты расположения плоскости относительно системы координат:

а) при $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ получим

$$By + Cz = -D \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

плоскость параллельна оси Ox и отсекает на осях координат Oy и Oz отрезки b и c соответственно (схематичное изображение плоскости такого вида для случая, когда $b > 0$ и $c > 0$, рисунок 68);

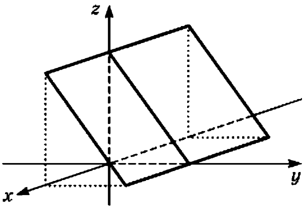


Рис. 68

б) при $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ получим

$$Ax + Cz = -D$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,$$

плоскость параллельна оси Oy и отсекает на осях координат Ox и Oz отрезки a и c соответственно (рис. 69);

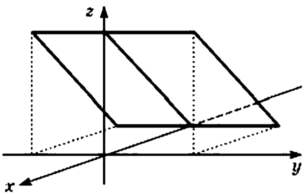


Рис. 69

в) при $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ получим

$$Ax + By = -D$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

плоскость параллельна оси Oz и отсекает на осях координат Ox и Oy отрезки a и b соответственно (рис. 70);

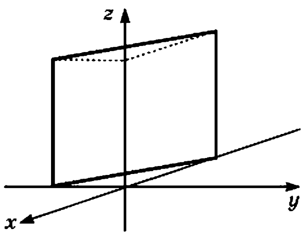


Рис. 70

г) при $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$ получим

$$x = -\frac{D}{A},$$

плоскость параллельна координатной плоскости yOz (схематичное изображение плоскости такого вида для случая, когда $\left(-\frac{D}{A}\right) > 0$, рисунок 71);

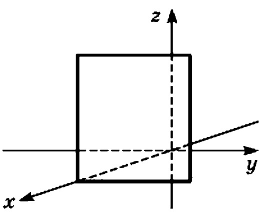


Рис. 71

д) при $A = 0, B \neq 0, C = 0$ получим

$$y = -\frac{D}{B},$$

плоскость параллельна координатной плоскости xOz (рис. 72);

е) при $A = 0, B = 0, C \neq 0$ получим

$$z = -\frac{D}{C},$$

плоскость параллельна координатной плоскости xOy (рис. 73).

2. При $D = 0$ $Ax + By + Cz = 0$, плоскость проходит через начало координат; в этом случае возможны следующие варианты расположения плоскости относительно системы координат:

а) при $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ получим

$$y = -\frac{C}{B}z; y = kz,$$

плоскость проходит через ось Ox (рис. 74);

б) при $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ получим

$$x = -\frac{C}{A}z; x = kz,$$

плоскость проходит через ось Oy (рис. 75);

в) при $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ получим

$$x = -\frac{B}{A}y; x = ky,$$

плоскость проходит через ось Oz (рис. 76);

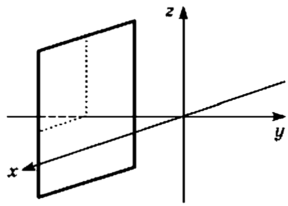


Рис. 72

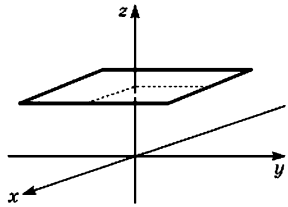


Рис. 73

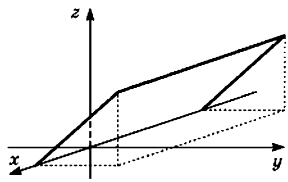


Рис. 74

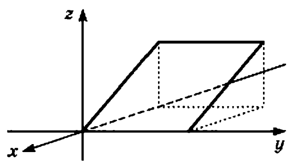


Рис. 75

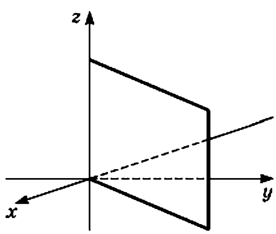


Рис. 76

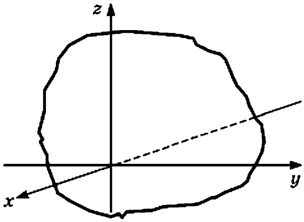


Рис. 77

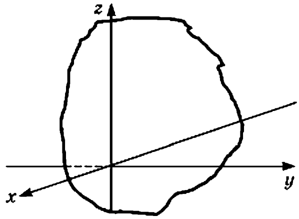


Рис. 78

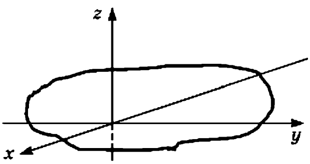


Рис. 79

г) при $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$ получим уравнение координатной плоскости yOz (рис. 77):

$$x = 0;$$

д) при $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ получим уравнение координатной плоскости xOz (рис. 78):

$$y = 0;$$

е) при $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ получим уравнение координатной плоскости xOy (рис. 79):

$$z = 0.$$

Замечание 3.3. В случае, когда $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, плоскость, представленную уравнением (62), называют плоскостью общего положения, проходящей ($D = 0$) или не проходящей ($D \neq 0$) через начало координат.

Все случаи, рассмотренные выше, можно свести в одну таблицу (табл. 6).

Таблица 6

Особенности расположения плоскости σ: $Ax + By + Cz + D = 0$

№	Коэффициенты		Варианты расположения плоскости
1.	$D \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$O(0; 0; 0) \notin \sigma$
а)	$A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \parallel Ox$
б)	$B = 0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \parallel Oy$
в)	$C = 0, A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \parallel Oz$

Продолжение табл. 6

№	Коэффициенты		Варианты расположения плоскости
г)	$B=0, C=0, A\neq 0, D\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \parallel yOz$
д)	$A=0, C=0, B\neq 0, D\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \parallel xOz$
е)	$A=0, B=0, C\neq 0, D\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \parallel xO$
2.	$D=0$	$\Leftrightarrow$	$O(0; 0; 0) \in \sigma$
а)	$A=0, D=0, B\neq 0, C\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$Ox \subseteq \sigma$
б)	$B=0, D=0, A\neq 0, C\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$Oy \subseteq \sigma$
в)	$C=0, D=0, A\neq 0, B\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$Oz \subseteq \sigma$
г)	$B=0, C=0, D=0, A\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \equiv yOz$
д)	$A=0, C=0, D=0, B\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \equiv xOz$
е)	$A=0, B=0, D=0, C\neq 0$	$\Leftrightarrow$	$\sigma \equiv xOy$

14. ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ: ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ

14.1. УСЛОВИЕ, ПРИ КОТОРОМ ЧЕТЫРЕ ТОЧКИ ЛЕЖАТ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Четыре точки пространства $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $M_4(x_4;\ y_4;\ z_4)$ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_4}$ компланарны, т. е. выполнено условие:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (71)$$

Равенство нулю определителя (71) означает, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}, \overline{M_1M_4}$, равен нулю.

14.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПАРЫ ТОЧЕК

Взаимное расположение точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно определить по следующим признакам:

1) если числа

$$k_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \text{ и } k_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

имеют одинаковые знаки, то в этом случае точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ лежат по одну сторону от плоскости;

2) если числа k_1 и k_2, определенные в п. 1), имеют противоположные знаки, то в этом случае точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ лежат по разные стороны от плоскости (отрезок M_1M_2 пересекает плоскость);

3) если одно из чисел k_1, k_2 равно нулю или они оба равны нулю, то в этом случае одна из точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ соответственно или обе точки принадлежат плоскости.

14.3. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

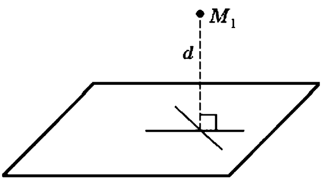


Рис. 80

Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (рис. 80) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (72)$$

14.4. ПУЧОК ПЛОСКОСТЕЙ

Через одну фиксированную прямую l в пространстве (рис. 81) проходит бесконечное множество плоскостей. Это множество называется *пучком плоскостей*, а прямая l — *осью пучка*.

Если пара различных плоскостей — σ_1 и σ_2, принадлежащих пучку, задана уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно, λ_1 и λ_2 — произвольные, одновременно не равные нулю числа, то каждую плоскость пучка можно представить уравнением вида

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (73)$$

которое называется *уравнением пучка плоскостей*.

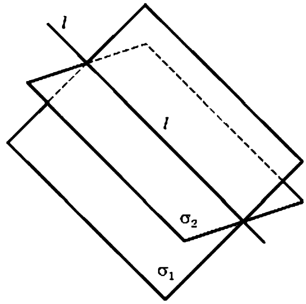


Рис. 81

Замечание 3.4. Уравнение (73) также задает плоскости σ_1 и σ_2. Например, при $\lambda_1 = 0$ получим уравнение плоскости σ_2, а при $\lambda_2 = 0$ — уравнение плоскости σ_1.

14.5. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Углом между двумя плоскостями σ_1 и σ_2 называют один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Если пара плоскостей в пространстве (рис. 82) задана общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\text{и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то косинус угла между этими плоскостями вычисляется по формуле

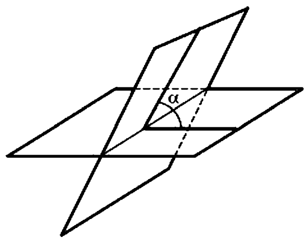


Рис. 82

$$\cos\alpha = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (74)$$

Замечание 3.5. Углом между плоскостями принято считать тот из образованных ими двугранных углов, который является острым (для нахождения острого угла берется модуль правой части формулы (74)). Обозначим значение выражения, полученного по формуле (74) через a. Тогда при $\cos\alpha > 0$ угол между плоскостями равен $\arccos a$, а при $\cos\alpha < 0$ равен $(\pi - \arccos a)$.

14.6. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Утверждение 3.2. Пусть в пространстве заданы две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда выполняется одно и только одно из трех условий:

1) плоскости не имеют общих точек

$$\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}\right);$$

2) плоскости пересекаются по прямой

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\right);$$

3) плоскости совпадают

$$\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}\right).$$

Пусть плоскости σ_1 и σ_2 заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

соответственно.

Очевидно, что рассматриваемые плоскости (рис. 83) параллельны в том и только в том случае, если параллельны (коллинеарны) их нормальные векторы. Так как плоскость σ_1 имеет нормальный вектор $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, а плоскость σ_2 — $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то условие коллинеарности векторов соответствует условию $\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$ (для некоторого коэффициента пропорциональности $k \neq 0$). Для векторов, заданных координатами это означает пропорциональность соответствующих координат. Таким образом, согласно утверждению 3.2 несовпадающие плоскости σ_1 и σ_2 параллельны, если выполняется условие

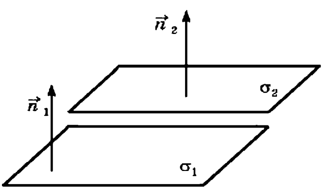


Рис. 83

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \qquad (75)$$

З а м е ч а н и е 3.6. Если для плоскостей σ_1 и σ_2 выполняется условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

то уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

имеют пропорциональные коэффициенты и, следовательно, задают в пространстве одну и ту же плоскость.

Если нарушается хотя бы одно из равенств в условии (75), то согласно утверждению 3.2 плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются по прямой. В этом случае можно рассматривать угол, образуемый рассматриваемыми плоскостями. В случае перпендикулярности плоскостей (рис. 84) имеем перпендикулярность (ортогональность) их нормальных векторов, что соответствует равенству нулю их скалярного произведения. Таким образом, условие перпендикулярности плоскостей можно записать так:

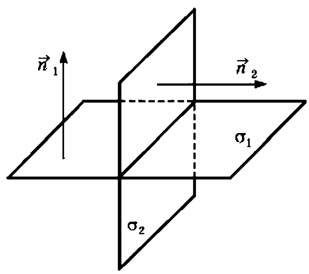


Рис. 84

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \qquad (76)$$

15. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

15.1. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 3.2. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3 в пространстве: $M_1(3; 7; 0)$, $M_2(-3; 1; 2)$, $M_3(0; 0; 2)$. Составить следующие виды уравнений плоскости σ, проходящей через эти точки:

1) общее;

2) нормальное;

3) «в отрезках» (если возможно).

Решение.

1. Общее уравнение.

Для составления уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки, воспользуемся формулой (64), представленной в п. 13.3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-0 \\ -3-3 & 1-7 & 2-0 \\ 0-3 & 0-7 & 2-0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (77)$$

Раскроем определитель в формуле (77) по первой строке и получим:

$$(x-3)[-6\cdot 2-(-7)\cdot 2]-(y-7)[-6\cdot 2-2\cdot(-3)]+$$
$$+z\cdot[(-6)\cdot(-7)-(-6)\cdot(-3)]=0.$$

Далее, раскрывая скобки и приводя подобные, получим общее уравнение плоскости:

$$2x+6y+24z-48=0.$$

Коэффициенты полученного уравнения разделим на 2. Итак, общее уравнение плоскости σ, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, имеет вид

$$x+3y+12z-24=0. \qquad (78)$$

2. Нормальное уравнение.

Согласно замечанию 3.2 из п. 13.5 общее уравнение плоскости приводится к нормальному виду умножением на множитель, заданный формулой (69) из п. 13.5. Вычислим этот множитель, пользуясь коэффициентами уравнения (78):

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{1^2+3^2+12^2}}=\frac{1}{\sqrt{154}}. \qquad (79)$$

Заметим, что знак в используемой формуле выбран противоположным знаку свободного члена в уравнении (78). После умножения получим нормальное уравнение плоскости σ:

$$\frac{1}{\sqrt{154}}x+\frac{3}{\sqrt{154}}y+\frac{12}{\sqrt{154}}z-\frac{24}{\sqrt{154}}=0. \qquad (80)$$

3. Уравнение «в отрезках».

Общее уравнение плоскости приводится к уравнению «в отрезках» в том случае, если свободный член уравнения $D \neq 0$. Поскольку в уравнении (78) свободный член действительно не равен нулю ($D = -24$), то можно записать уравнение плоскости σ «в отрезках»:

$$\frac{x}{24}+\frac{y}{8}+\frac{z}{2}=1.$$

Получение такого уравнения подробно описано в п. 13.4.

Пример 3.3. Даны координаты точки $M_0(3; 0; -2)$ и вектора $\vec{n}=\{4;-1;0\}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к вектору $\vec{n}$.

Решение. Искомое уравнение получим, пользуясь формулой (61) из п. 13.1.

Из условия задачи имеем:

$$x_0 = 3;\ y_0 = 0;\ z_0 = -2;\ A = 4;\ B = -1;\ C = 0.$$

После подстановки данных в формулу (61) получим

$$4 \cdot (x-3) - 1 \cdot (y-0) + 0 \cdot [z-(-2)] = 0.$$

Далее, раскрыв скобки и приведя подобные, имеем уравнение

$$4x - y - 12 = 0.$$

Пример 3.4. Даны координаты точки $M_0(5; -1; 0)$ и векторов $\vec{a}=\{2;1;-5\}$ и $\vec{b}=\{-1;0;3\}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Для получения уравнения искомой плоскости воспользуемся формулой (63) из п. 13.2.

Из условия задачи имеем:

$$x_0 = 5;\ y_0 = -1;\ z_0 = 0;\ a_x = 2;\ a_y = 1;$$
$$a_z = -5;\ b_x = -1;\ b_y = 0;\ b_z = 3.$$

После подстановки данных в указанную формулу получим

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z-0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (81)$$

В формуле (81) разложим определитель по первой строке и запишем:

$$(x - 5) \cdot 3 - (y + 1) \cdot (6 - 5) + z \cdot 1 = 0,$$

а раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение

$$3x - y + z - 16 = 0.$$

Пример 3.5. Три точки в пространстве заданы своими координатами: $M_1(3;\ 0;\ 0)$, $M_2(-2;\ 4;\ 0)$, $M_3(4;\ -2;\ 1)$. Построить данные точки в ДПСК и указать для каждой из точек особенности расположения (общее положение; лежит на какой-либо из координатных осей или на какой-либо из координатных плоскостей).

Р е ш е н и е. Введем ДПСК в пространстве. Для построения точки M_1 отложим от начала координат на оси Ox в положительном направлении отрезок, равный 3 ед., так как $x_1 = 3$. Поскольку

$$y_1 = z_1 = 0,$$

то точка M_1 лежит на оси Ox (рис. 85).

Для построения точки M_2 отметим на оси Ox вспомогательную точку O_1 на расстоянии 2 ед. от начала координат в отрицательном направлении оси Ox, так как $x_2 = -2$ (рис. 86). Через полученную точку O_1 проведем прямую, параллельную оси Oy, на которой отметим точку O_2, отстоящую от точки O_1 на расстоянии 4 ед. в положительном направлении оси Oy, так как $y_2 = 4$. Поскольку $z_1 = 0$, то точка M_2 лежит на плоскости xOy.

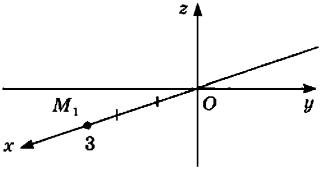


Рис. 85

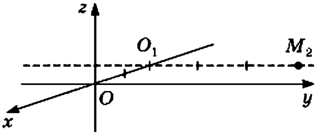


Рис. 86

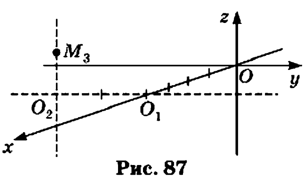


Рис. 87

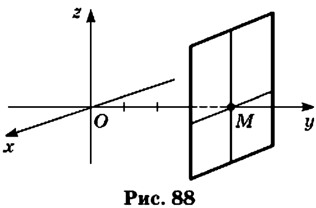


Рис. 88

Для построения точки M_3 отметим на оси Ox вспомогательную точку O_1 на расстоянии 4 ед. от начала координат в положительном направлении оси Ox, так как $x_3 = 4$ (рис. 87).

Через полученную точку O_1 (рис. 87) проведем прямую, параллельную оси Oy, на которой отметим точку O_2 на расстоянии 2 ед. от точки O_1 в отрицательном направлении оси Oy, так как $y_3 = -2$. Далее через точку O_2 проведем прямую, параллельную оси Oz, на которой отметим точку M_3 на расстоянии 1 ед. от точки O_2 в положительном направлении оси Oz, так как $z_3 = 1$. Поскольку ни одна из координат точки M_3 не равна нулю, то M_3 — точка общего положения, т. е. точка, не лежащая ни на какой из координатных осей или координатных плоскостей.

Пример 3.6. Указать особенности расположения плоскостей относительно системы координат (проходит или не проходит через начало координат; параллельна какой-либо из координатных осей; параллельна какой-либо из координатных плоскостей) и построить их. Плоскости заданы уравнениями:

1) $3x - 2y + z - 6 = 0$;
2) $y = 4$;
3) $3x - 2z = 0$;
4) $3y + z = 6$;
5) $2x + 5y - 2z = 0$.

Решение.

1. $3x - 2y + z - 6 = 0$.

Поскольку ни один из коэффициентов уравнения $3x - 2y + z - 6 = 0$ не равен нулю, то рассматриваемое уравнение задает в пространстве плоскость общего положения, не проходящую через начало координат. Уравнение такой плоскости можно записать «в отрезках». Построение плоскости подробно описано п. 13.4.

2. $y = 4$.

Анализируя уравнение $y = 4$, видим, что $A = 0$; $B \neq 0$; $C = 0$; $D \neq 0$, следовательно, плоскость параллельна координатной плоскости xOz (см. п. 13.7) и проходит через точку M с координатами (0; 4; 0). Схематичное изображение данной плоскости представлено на рисунке 88.

3. $3x - 2z = 0$.

В уравнении $3x - 2z = 0$ $A \neq 0$; $B = 0$; $C \neq 0$; $D = 0$, значит, плоскость проходит через ось Oy (см. п. 13.7). Для построения плоскости отметим точку O_1, лежащую на координатной плоскости xOz (для всех таких точек их координата $y = 0$) и принадлежащую данной плоскости. Положим $x = 2$, тогда при подстановке этого значения переменной x в уравнение плоскости получим

$$3 \cdot 2 - 2z = 0,$$

отсюда $z = 3$, т. е. $O_1(2; 0; 3)$. Поскольку данная плоскость проходит через начало координат ($D = 0$), то точка $O(0; 0; 0)$ также принадлежит плоскости, значит, прямая, проходящая через точки O и O_1, лежит в рассматриваемой плоскости. Схематично плоскость изображена с помощью пересечения прямой OO_1 и оси Oy на рисунке 89.

4. $3y + z = 6$.

В уравнении $3y + z = 6$ коэффициенты $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq$ $\neq 0$; $D \neq 0$, поэтому рассматриваемая плоскость параллельна оси Ox, причем сама ось Ox не принадлежит этой плоскости (см. п. 13.7). Рассмотрим сечение данной плоскости координатной плоскостью yOz. В результате получим прямую $3y + z = 6$, лежащую в плоскости $x = 0$. Для построения этой прямой запишем ее уравнение «в отрезках»:

$$\frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1.$$

Откладывая на осях Oy, Oz соответствующие отрезки, получим две вспомогательные точки $O_1(0; 2; 0)$ и $O_2(0; 0; 6)$.

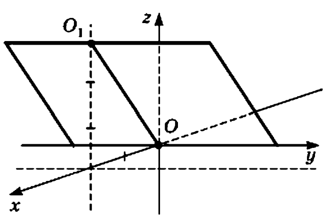


Рис. 89

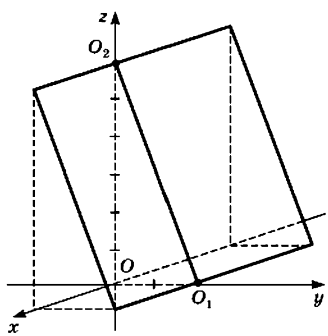


Рис. 90

Нужная плоскость проходит через прямую O_1O_2 параллельно оси Ox (рис. 90).

5. $2x + 5y - 2z = 0$.

Поскольку среди коэффициентов уравнения $2x + 5y - 2z = 0$ равен нулю только коэффициент D, то имеем плоскость общего положения, проходящую через начало координат. Рассмотрим сечение данной плоскости какой-либо плоскостью, параллельной, например, плоскости xOy. В качестве секущей плоскости возьмем $z = 5$ и в сечении получим прямую

$$2x + 5y - 10 = 0,$$

лежащую в этой плоскости. Чтобы построить полученную вспомогательную прямую, построим плоскость $z = 5$ (см. п. 13.7), а в ней — полученную прямую, предварительно записав ее уравнение «в отрезках»:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1.$$

На рисунке 91*а* для наглядности отмечен отрезок, заключенный между соответствующими координатными плоскостями. Аналогично построим сечение данной плоскости плоскостью $z = -5$ и, получив в сечении прямую

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{-2} = 1,$$

построим ее в плоскости $z = -5$. Поскольку искомая плоскость проходит через построенные прямые и начало коор-

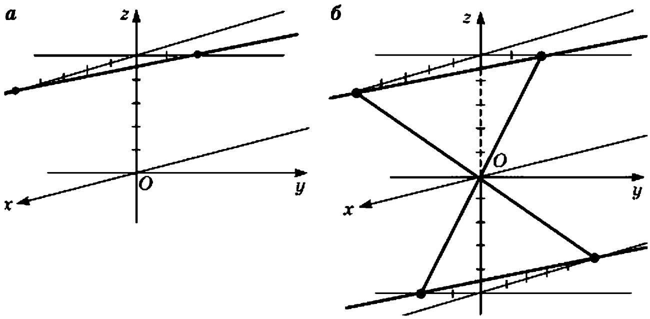


Рис. 91

динат ($D = 0$), то схематично ее изображают так, как показано на рисунке 91*б*. Изображение такой плоскости часто называют «крылья бабочки».

Пример 3.7. Даны координаты точек $M_1(0; 2; -1)$, $M_2(1; 4; -6)$ и общее уравнение плоскости σ: $2x - y + 3z - 5 = 0$. Определить, лежат ли точки M_1 и M_2 по одну сторону от плоскости σ или по разные. Найти расстояние от точки M_1 до плоскости σ.

Р е ш е н и е. Вычислим значения коэффициентов k_1 и k_2, воспользовавшись формулами из п. 14.2. Для этого подставим в данное уравнение плоскости σ значения координат точки M_1, получим:

$$k_1 = 2 \cdot 0 - 2 + 3 \cdot (-1) - 5 = -2 - 3 - 5 = -10 < 0.$$

Аналогично, подставляя в данное уравнение координаты точки M_2, получим:

$$k_2 = 2 - 4 + 3 \cdot (-6) - 5 = -25 < 0.$$

Поскольку k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки (оба отрицательны), это означает, что точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от плоскости σ.

Для вычисления расстояния от точки до плоскости воспользуемся формулой (72) из п. 14.3:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 2 + 3 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \text{ (ед.)}$$

Пример 3.8. Выбрать из предложенного списка плоскостей пары параллельных, совпадающих и пересекающихся плоскостей. Для каждой пары пересекающихся плоскостей найти угол между ними.

Плоскости заданы уравнениями:

$$\sigma_1\colon 5x - 7y + z - 1 = 0;$$
$$\sigma_2\colon x - 5y + 2z = 0;$$
$$\sigma_3\colon 3x - 15y + 6z - 1 = 0;$$
$$\sigma_4\colon 3x - 15y + 6z = 0;$$
$$\sigma_5\colon x - y + 5z - 5 = 0.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим уравнения плоскостей попарно.

1. Плоскости σ_1 и σ_2 имеют нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{5; -7; 1\}$ и $\vec{n}_2 = \{1; -5; 2\}$ соответственно.

Составим отношения координат полученных векторов и получим:

$$\frac{5}{1} \neq \frac{-7}{-5}.$$

Значит согласно утверждению 3.2 из п. 14.6 плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются.

Для вычисления угла между плоскостями воспользуемся формулой (74) из п. 14.5:

$$\cos\alpha_1 = \frac{|5+35+2|}{\sqrt{25+49+1}\cdot\sqrt{1+25+4}} = \frac{42}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{30}} = \frac{42}{15\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{25}.$$

Тогда угол между плоскостями

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{7\sqrt{10}}{25}\right) \approx 28^\circ.$$

2. Плоскости σ_2 и σ_3 имеют нормальные векторы $\vec{n}_2 = \{1; -5; 2\}$ и $\vec{n}_3 = \{3; -15; 6\}$ соответственно.

Составим отношения координат полученных векторов и получим:

$$\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15} = \frac{2}{6}.$$

Значит согласно утверждению 3.2 из п. 14.6 плоскости σ_2 и σ_3 либо параллельны, либо совпадают, но так как

$$\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15} = \frac{2}{6} \neq \frac{0}{-1},$$

то плоскости σ_2 и σ_3 параллельны.

3. Плоскости σ_2 и σ_4 имеют нормальные векторы $\vec{n}_2 = \{1; -5; 2\}$ и $\vec{n}_4 = \{3; -15; 6\}$ соответственно.

Составим отношения координат полученных векторов и запишем:

$$\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15} = \frac{2}{6}.$$

Значит согласно утверждению 2 из п. 14.6 плоскости σ_2 и σ_4 либо параллельны, либо совпадают, но так как свободные члены этих уравнений равны нулю, то плоскости σ_2 и σ_4 совпадают, т. е. их уравнения в пространстве задают одну и ту же плоскость.

Аналогичным образом исследуются остальные пары плоскостей.

В результате исследования получаем семь пар пересекающихся плоскостей (σ_1 и σ_2, σ_1 и σ_3, σ_1 и σ_4, σ_1 и σ_5, σ_2 и σ_5, σ_3 и σ_5, σ_4 и σ_5); две пары параллельных плоскостей (σ_2 и σ_3, σ_3 и σ_4) и одну пару совпадающих плоскостей (σ_2 и σ_4).

15.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Запишите векторную форму уравнения плоскости в пространстве.
2. Какой вектор называют нормальным вектором данной плоскости?
3. Запишите общее уравнение плоскости в пространстве.
4. Дано уравнение плоскости: $3x - 8y + z - 1 = 0$. Какие координаты будет иметь вектор нормали к данной плоскости?
5. Запишите детерминантное уравнение плоскости.
6. Запишите уравнение плоскости в пространстве, проходящей через три данные точки, не лежащие на одной прямой.
7. Запишите уравнение плоскости «в отрезках»: $3x - 6y + z - 12 = 0$.
8. Запишите нормальное уравнение плоскости.
9. По каким формулам можно определить полярные параметры плоскости?
10. Укажите особенности расположения каждой из плоскостей относительно системы координат (проходит или не проходит через начало координат; параллельна какой-либо из координатных осей или параллельна какой-либо из координатных плоскостей): $3x + y - 2z = -6$; $x - 3y - 1 = 0$; $x - z = 0$; $8x - 5y + 4z = 0$; $y + 2 = 0$; $y - 3z - 3 = 0$; $x + 3 = 0$; $z - 7 = 0$.
11. Когда четыре точки пространства лежат в одной плоскости?
12. В каком случае две точки лежат: а) по одну сторону от плоскости; б) по разные стороны; в) принадлежат плоскости?
13. Как найти расстояние от точки до плоскости?
14. Что называется пучком плоскостей?
15. Как найти угол между плоскостями?
16. В каком случае две плоскости: а) не имеют общих точек; б) пересекаются по прямой; в) совпадают?
17. В каком случае две плоскости параллельны?
18. Запишите условие перпендикулярности плоскостей.

15.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ» (ЗАДАЧИ 1–7)

Задача 1. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3 в пространстве.

Составить следующие виды уравнений плоскости σ, проходящей через эти точки:

а) общее;

б) нормальное;

в) «в отрезках» (если возможно).

Исходные данные к задаче 1

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
1	$M_1(3; -7; 1)$, $M_2(0; 2; 1)$, $M_3(4; 0; -1)$	2	$M_1(1; -6; 0)$, $M_2(-1; 3; 0)$, $M_3(3; 1; -2)$	3	$M_1(1; -5; -1)$, $M_2(-2; 4; -1)$, $M_3(2; 2; -3)$
4	$M_1(5; -4; -2)$, $M_2(-3; 5; -2)$, $M_3(1; 0; -4)$	5	$M_1(-1; -3; 3)$, $M_2(-4; 6; -3)$, $M_3(0; 4; -5)$	6	$M_1(-2; -2; -4)$, $M_2(-5; 7; -2)$, $M_3(-1; 5; -6)$
7	$M_1(4; 0; 3)$, $M_2(-7; 6; 2)$, $M_3(0; -3; 5)$	8	$M_1(3; 1; 2)$, $M_2(-6; 5; 3)$, $M_3(-1; -2; 4)$	9	$M_1(2; 2; 1)$, $M_2(-5; 4; 4)$, $M_3(-2; -1; 3)$
10	$M_1(1; 3; 0)$, $M_2(-4; 3; 5)$, $M_3(-3; 0; 2)$	11	$M_1(0; 4; -1)$, $M_2(-3; 2; 4)$, $M_3(-4; 1; 1)$	12	$M_1(-1; 5; 0)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(-5; 2; 0)$
13	$M_1(-2; 6; 1)$, $M_2(-1; 0; 2)$, $M_3(-6; 3; 1)$	14	$M_1(-3; 7; 2)$, $M_2(0; -1; 1)$, $M_3(-7; 4; 2)$	15	$M_1(3; 0; -2)$, $M_2(5; 8; -3)$, $M_3(9; -6; 5)$
16	$M_1(2; 1; -1)$, $M_2(4; 7; -2)$, $M_3(8; -5; 4)$	17	$M_1(1; 2; 0)$, $M_2(3; 6; -1)$, $M_3(7; -4; 3)$	18	$M_1(0; 3; 1)$, $M_2(2; 5; 0)$, $M_3(6; -3; 2)$
19	$M_1(-1; 4; 2)$, $M_2(1; 4; 1)$, $M_3(5; -2; 3)$	20	$M_1(-2; 5; 3)$, $M_2(0; 3; 2)$, $M_3(1; -1; 2)$	21	$M_1(-3; -6; 1)$, $M_2(5; 7; -4)$, $M_3(6; -5; 9)$
22	$M_1(-2; -5; 0)$, $M_2(4; 6; -3)$, $M_3(5; -4; 8)$	23	$M_1(-1; -4; -1)$, $M_2(3; 5; -2)$, $M_3(4; -3; 7)$	24	$M_1(0; -3; -2)$, $M_2(2; 4; -1)$, $M_3(3; -2; 6)$

Продолжение табл.

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
25	$M_1(1; -2; -3)$, $M_2(1; 3; 0)$, $M_3(2; -1; 5)$	26	$M_1(2; -1; -4)$, $M_2(0; 2; 1)$, $M_3(1; 0; 4)$	27	$M_1(3; 0; -5)$, $M_2(-1; 1; 2)$, $M_3(0; 1; 3)$
28	$M_1(4; 1; -6)$, $M_2(-2; 0; 3)$, $M_3(-1; 2; 2)$	29	$M_1(5; 2; -7)$, $M_2(-3; -1; 4)$, $M_3(-2; 3; 1)$	30	$M_1(6; 3; -8)$, $M_2(-4; -2; 5)$, $M_3(-3; 4; 0)$

Задача 2. Даны координаты точки M_0 и вектора $\vec{n}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к вектору $\vec{n}$.

Исходные данные к задаче 2

Вариант	Координаты точек и вектора	Вариант	Координаты точек и вектора	Вариант	Координаты точек и вектора
1	$M_0(-1; 3; 0)$, $\vec{n} = \{2; 0; -3\}$	2	$M_0(1; -3; 2)$, $\vec{n} = \{9; 0; -5\}$	3	$M_0(1; 5; -7)$, $\vec{n} = \{0; -3; 4\}$
4	$M_0(-3; 2; 8)$, $\vec{n} = \{-3; 5; 0\}$	5	$M_0(9; -3; 6)$, $\vec{n} = \{-8; 0; 9\}$	6	$M_0(3; 7; 2)$, $\vec{n} = \{0; 5; -2\}$
7	$M_0(6; -6; 1)$, $\vec{n} = \{2; -5; 0\}$	8	$M_0(8; 7; -4)$, $\vec{n} = \{6; 0; -1\}$	9	$M_0(4; -2; 1)$, $\vec{n} = \{0; 2; 1\}$
10	$M_0(0; 7; -6)$, $\vec{n} = \{-9; 4; -3\}$	11	$M_0(-2; 0; 4)$, $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$	12	$M_0(8; 1; 0)$, $\vec{n} = \{8; 8; 7\}$
13	$M_0(0; 3; -7)$, $\vec{n} = \{-7; -2; 8\}$	14	$M_0(-7; 0; 1)$, $\vec{n} = \{-8; 3; -3\}$	15	$M_0(4; 7; 0)$, $\vec{n} = \{4; -2; 2\}$
16	$M_0(0; -3; 2)$, $\vec{n} = \{1; 6; -1\}$	17	$M_0(5; 0; 4)$, $\vec{n} = \{1; -7; 8\}$	18	$M_0(-3; 5; 0)$, $\vec{n} = \{-4; 8; 3\}$
19	$M_0(1; -3; 5)$, $\vec{n} = \{3; 2; 0\}$	20	$M_0(7; 4; -2)$, $\vec{n} = \{8; 0; -7\}$	21	$M_0(9; -3; 5)$ $\vec{n} = \{0; -1; 2\}$
22	$M_0(-7; 1; 5)$, $\vec{n} = \{2; 4; 7\}$	23	$M_0(3; -6; 0)$, $\vec{n} = \{9; -7; 0\}$	24	$M_0(-3; -4; 6)$, $\vec{n} = \{1; 0; 1\}$
25	$M_0(2; 4; 0)$, $\vec{n} = \{0; 5; -2\}$	26	$M_0(2; -3; 2)$, $\vec{n} = \{-3; 2; 1\}$	27	$M_0(-3; 8; 3)$, $\vec{n} = \{9; 0; 5\}$
28	$M_0(6; 4; -3)$, $\vec{n} = \{-1; 0; 6\}$	29	$M_0(5; 4; -8)$, $\vec{n} = \{1; 2; 3\}$	30	$M_0(3; -3; 7)$, $\vec{n} = \{2; -2; -3\}$

Задача 3. Даны координаты точки M_0 и векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Исходные данные к задаче 3

Вариант	Координаты точек и векторов	Вариант	Координаты точек и векторов	Вариант	Координаты точек и векторов
1	$M_0(7; 1; -5)$, $\vec{a}=\{0;3;-1\}$, $\vec{b}=\{4;9;-6\}$	2	$M_0(6; 2; -4)$, $\vec{a}=\{1;2;0\}$, $\vec{b}=\{3;8;-5\}$	3	$M_0(5; 3; -3)$, $\vec{a}=\{2;1;1\}$, $\vec{b}=\{2;7;-4\}$
4	$M_0(4; 4; -2)$, $\vec{a}=\{3;0;2\}$, $\vec{b}=\{1;6;-3\}$	5	$M_0(3; 5; -1)$, $\vec{a}=\{4;-1;3\}$, $\vec{b}=\{0;5;-2\}$	6	$M_0(2; 6; 0)$, $\vec{a}=\{5;-2;4\}$, $\vec{b}=\{-1;4;-1\}$
7	$M_0(1; 5; 1)$, $\vec{a}=\{6;-3;5\}$, $\vec{b}=\{-2;3;0\}$	8	$M_0(0; 4; 2)$, $\vec{a}=\{7;-4;4\}$, $\vec{b}=\{-3;2;1\}$	9	$M_0(-1; 3; 3)$, $\vec{a}=\{6;-5;3\}$, $\vec{b}=\{-4;1;2\}$
10	$M_0(-2; 2; 4)$, $\vec{a}=\{5;-6;2\}$, $\vec{b}=\{-5;0;3\}$	11	$M_0(-3; 1;5)$, $\vec{a}=\{4;-7;1\}$, $\vec{b}=\{-6;-1;4\}$	12	$M_0(-4; 0; 6)$, $\vec{a}=\{3;-8;0\}$, $\vec{b}=\{-5;-2;5\}$
13	$M_0(-5; -1; 7)$, $\vec{a}=\{2;-7;-1\}$, $\vec{b}=\{-4;-3;6\}$	14	$M_0(-6; -2; 8)$, $\vec{a}=\{1;-6;-2\}$, $\vec{b}=\{-3;-4;7\}$	15	$M_0(-7; -3; 7)$, $\vec{a}=\{0;-5;-3\}$, $\vec{b}=\{-2;-5;8\}$
16	$M_0(-8; -4; 6)$, $\vec{a}=\{-1;-4;-4\}$, $\vec{b}=\{-1;-6;9\}$	17	$M_0(-9; -3; 5)$, $\vec{a}=\{-2;-3;-5\}$, $\vec{b}=\{0;-7;0\}$	18	$M_0(-10; -2; 4)$, $\vec{a}=\{-3;-2;4\}$, $\vec{b}=\{1;-8;1\}$
19	$M_0(-11; -1; 3)$, $\vec{a}=\{-4;-1;2\}$, $\vec{b}=\{2;-9;0\}$	20	$M_0(-7; 3; 0)$, $\vec{a}=\{5;-4;2\}$, $\vec{b}=\{0;1;-3\}$	21	$M_0(-6; 4; 1)$, $\vec{a}=\{4;-3;3\}$, $\vec{b}=\{1;2;-2\}$
22	$M_0(-5; 5; 2)$, $\vec{a}=\{3;-2;4\}$, $\vec{b}=\{2;3;-1\}$	23	$M_0(-4; 6; 3)$, $\vec{a}=\{2;-1;5\}$, $\vec{b}=\{3;4;0\}$	24	$M_0(-3; 7; 4)$, $\vec{a}=\{1;0;6\}$, $\vec{b}=\{4;5;1\}$
25	$M_0(-2; 8; 5)$, $\vec{a}=\{0;1;-6\}$, $\vec{b}=\{-4;-5;-1\}$	26	$M_0(-1; 7; -5)$, $\vec{a}=\{-1;2;-5\}$, $\vec{b}=\{-3;-4;0\}$	27	$M_0(0; 6; -4)$, $\vec{a}=\{-2;3;-4\}$, $\vec{b}=\{-2;3;1\}$
28	$M_0(1; 5; -3)$, $\vec{a}=\{-3;4;-3\}$, $\vec{b}=\{-1;2;-1\}$	29	$M_0(2; 4; -2)$, $\vec{a}=\{-4;5;-2\}$, $\vec{b}=\{0;-3;0\}$	30	$M_0(3; 3;-1)$, $\vec{a}=\{-5;6;-1\}$, $\vec{b}=\{0;-2;1\}$

Задача 4. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3 в пространстве. Построить эти точки в декартовой прямоугольной системе координат и указать особенности расположения для каждой точки:

а) общее положение;

б) лежит на какой-либо из координатных осей или на какой-либо из координатных плоскостей.

Исходные данные к задаче 4

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
1	$M_1(2; 0; 0)$, $M_2(0; 2; 1)$, $M_3(1; -3; 2)$	2	$M_1(0; -2; 0)$, $M_2(6; 0; -1)$, $M_3(1; 5; -7)$	3	$M_1(0; 0; 9)$, $M_2(2; -5; 0)$, $M_3(-3; 2; 8)$
4	$M_1(-9; 0; 0)$, $M_2(0; 5; -2)$, $M_3(9; -3; 6)$	5	$M_1(0; 4; 0)$, $M_2(-8; 0; 9)$, $M_3(3; 7; 2)$	6	$M_1(0; 0; 6)$, $M_2(-3; 5; 0)$, $M_3(6; -6; 1)$
7	$M_1(-4; 0; 0)$, $M_2(0; -3; 4)$, $M_3(8; 7; -4)$	8	$M_1(0; 2; 0)$, $M_2(9; 0; -3)$, $M_3(4; -2; 1)$	9	$M_1(0; 0; 3)$, $M_2(4; -8; 0)$, $M_3(-7; -5; 3)$
10	$M_1(-3; 0; 0)$, $M_2(0; 7; 6)$, $M_3(-4; 8; 2)$	11	$M_1(0; 5; 0)$, $M_2(-2; 0; 4)$, $M_3(1; -7; 8)$	12	$M_1(0; 0; -2)$, $M_2(8; 1; 0)$, $M_3(1; 6; -1)$
13	$M_1(8; 0; 0)$, $M_2(0; 3; -7)$, $M_3(4; -2; -2)$	14	$M_1(5; 0; 0)$, $M_2(-7; 0; 1)$, $M_3(-8; 3; -3)$	15	$M_1(0; 1; 0)$, $M_2(4; 7; 0)$, $M_3(-7; -2; 8)$
16	$M_1(0; 0; 4)$, $M_2(0; -3; 2)$, $M_3(8; 8; 7)$	17	$M_1(0; 8; 0)$, $M_2(5; 0; 4)$, $M_3(1; -2; 3)$	18	$M_1(0; 0; 7)$, $M_2(-3; 5; 0)$, $M_3(-9; 4; -3)$
19	$M_1(1; 0; 0)$, $M_2(0; -1; 2)$, $M_3(-1; -3; 5)$	20	$M_1(0; -9; 0)$, $M_2(8; 0; -7)$, $M_3(7; -4; 2)$	21	$M_1(0; 0; -7)$, $M_2(3; 2; 0)$, $M_3(9; 3; -3)$
22	$M_1(3; 0; 0)$, $M_2(0; -5; 3)$, $M_3(-7; 1; 5)$	23	$M_1(0; 7; 0)$, $M_2(3; 0; 4)$, $M_3(3; -6; -1)$	24	$M_1(0; 0; -5)$, $M_2(-8; 5; 0)$, $M_3(-3; -4; 6)$

Продолжение табл.

Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек	Вариант	Координаты точек
25	$M_1(4; 0; 0)$, $M_2(0; -6; 8)$, $M_3(2; 4; 8)$	26	$M_1(0; -2; 0)$, $M_2(9; 0; 5)$, $M_3(2; -3; 2)$	27	$M_1(-8; 0; 0)$, $M_2(-3; 2; 0)$, $M_3(-3; 8; 3)$
28	$M_1(0; -4; 0)$, $M_2(0; 5; -2)$, $M_3(6; 4; -3)$	29	$M_1(0; 0; 2)$, $M_2(9; 0; 9)$, $M_3(5; -4; -8)$	30	$M_1(0; -8; 0)$, $M_2(9; -7; 0)$, $M_3(-2; -4; 7)$

Задача 5. Указать особенности расположения каждой из плоскостей относительно системы координат (проходит или не проходит через начало координат; параллельна какой-либо из координатных осей или параллельна какой-либо из координатных плоскостей) и построить их.

Исходные данные к задаче 5

Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей
1	1) $3x - 7y + z - 1 = 0$; 2) $x - 2 = 0$; 3) $x + y = 0$; 4) $y - 5z - 2 = 0$; 5) $2x - 6y - z = 0$	2	1) $x + 4y - z - 2 = 0$; 2) $y - 3 = 0$; 3) $x - y = 0$; 4) $2y - 7z - 6 = 0$; 5) $3x + 5y - 2z = 0$	3	1) $4x + y - z - 3 = 0$; 2) $z - 4 = 0$; 3) $-x + y = 0$; 4) $x + z - 4 = 0$; 5) $5x - 7y + 2z = 0$
4	1) $x - y - 2z - 4 = 0$; 2) $x + 3 = 0$; 3) $2x + 3y = 0$; 4) $x - z - 3 = 0$; 5) $6x - 5y - 3z = 0$	5	1) $x - y - 4z - 4 = 0$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $2x - 3y = 0$; 4) $y + z - 2 = 0$; 5) $4x - 3y + 5z = 0$	6	1) $3x + 2y + 4z = 5$; 2) $z = -4$; 3) $2y - 3x = 0$; 4) $y - z = 4$; 5) $2x - y - 3z = 0$
7	1) $5x + 8y - 3z = 6$; 2) $x = 3$; 3) $2x + y = 0$; 4) $z - y = 1$; 5) $4x - 7y - 2z = 0$	8	1) $3x + y - 2z = -6$; 2) $y = 5$; 3) $y - 2x = 0$; 4) $3y + z = 1$; 5) $2x - 2y + 3z = 0$	9	1) $x + 3y - z - 5 = 0$; 2) $z - 7 = 0$; 3) $x + z = 0$; 4) $y - 3z - 3 = 0$; 5) $x - 5y + 6z = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей
10	1) $x + 2y - z + 4 = 0$; 2) $x + 4 = 0$; 3) $2z - 3y - 6 = 0$; 4) $x - z = 0$; 5) $2x + y - 3z = 0$	11	1) $4x + y + z + 3 = 0$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $2z - x = 0$; 4) $x - y - 1 = 0$; 5) $6x - 3y - z = 0$	12	1) $x - y - 2z + 2 = 0$; 2) $z + 5 = 0$; 3) $3z - 2x = 0$; 4) $x + y - 4 = 0$; 5) $8x - 5y + 4z = 0$
13	1) $9x - 6y + z = -1$; 2) $x - 4 = 0$; 3) $z + 2x = 0$; 4) $y - x - 2 = 0$; 5) $7x - 4y - 3z = 0$	14	1) $-6x - 3y + 2z = 1$; 2) $x - 5 = 0$; 3) $3x + z = 0$; 4) $2x - y + 3 = 0$; 5) $5x - 2y + 3z = 0$	15	1) $4x - y + 2z = 2$; 2) $x - 6 = 0$; 3) $3z + 2x = 0$; 4) $2x + y - 2 = 0$; 5) $-x + 4y - z = 0$
16	1) $x - 3y + 2z = 3$; 2) $x + 7 = 0$; 3) $z - x = 0$; 4) $2y - x - 1 = 0$; 5) $x + 5y - 7z = 0$	17	1) $-x - 3y + 5z = 3$; 2) $y + 6 = 0$; 3) $y + z = 0$; 4) $x - 3y - 1 = 0$; 5) $7x - 4y + 2z = 0$	18	1) $9x + 3y - 3z = 4$; 2) $y - 7 = 0$; 3) $y - z = 0$; 4) $x + 3y - 2 = 0$; 5) $-7x + y + 5z = 0$
19	1) $3x - 6y - z = 6$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $z - y = 0$; 4) $y - 3x - 3 = 0$; 5) $-3x - 4y + 6z = 0$	20	1) $2x + 4y + 8z = 8$; 2) $y + 1 = 0$; 3) $2z + y = 0$; 4) $z - x - 6 = 0$; 5) $2x - 3y + 2z = 0$	21	1) $3x - 8y + 3z = 12$; 2) $y - 9 = 0$; 3) $2y - z = 0$; 4) $2x + z - 4 = 0$; 5) $6x + 4y - 3z = 0$
22	1) $5x - 4y - 8z = 6$; 2) $z + 3 = 0$; 3) $2y + z = 0$; 4) $2x - z - 2 = 0$; 5) $-2x - 4y + 7z = 0$	23	1) $3x - 6y + z = 1$; 2) $z + 7 = 0$; 3) $3z - 2y = 0$; 4) $z - 2x - 1 = 0$; 5) $x - 4y - z = 0$	24	1) $x - 2y - 3z = 2$; 2) $z = 0$; 3) $3y - 2z = 0$; 4) $3z - x - 3 = 0$; 5) $2x - y + 4z = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей
25	1) $4x + y - 6z = 8$; 2) $z - 5 = 0$; 3) $2y + z = 0$; 4) $x + 3z - 6 = 0$; 5) $5x + 2y + 7z = 0$	26	1) $6x + 3y + 8z = 12$; 2) $z - 3 = 0$; 3) $2y + 3z = 0$; 4) $2x - 3z - 2 = 0$; 5) $-x - 2y + 5z = 0$	27	1) $-3x - y + 4z = 4$; 2) $z + 4 = 0$; 3) $3y - z = 0$; 4) $2z - 3x - 1 = 0$; 5) $x - y - 2z = 0$
28	1) $2x + 4y - z = 6$; 2) $z - 9 = 0$; 3) $2y - 5z = 0$; 4) $2z + 3x - 3 = 0$; 5) $3x + 5y + 2z = 0$	29	1) $6x - 5y + 9z = 10$; 2) $z + 6 = 0$; 3) $5x - y = 0$; 4) $2y + 3z - 6 = 0$; 5) $4x + 3y - 7z = 0$	30	1) $3x - 4y + 8z = 2$; 2) $z + 1 = 0$; 3) $2z - x = 0$; 4) $2z + 3y - 6 = 0$; 5) $2x + y - 5z = 0$

Задача 6. Даны координаты точек M_1, M_2 и общее уравнение плоскости σ. Определить, лежат ли точки M_1 и M_2 по одну сторону от плоскости σ или по разные. Найти расстояние от точки M_1 до плоскости σ.

Исходные данные к задаче 6

Вариант	Координаты точек, уравнение плоскости	Вариант	Координаты точек, уравнение плоскости	Вариант	Координаты точек, уравнение плоскости
1	$M_1(2; 4; 0)$, $M_2(3; 1; -9)$, $3x - 7y + 5z - 11 = 0$	2	$M_1(7; 0; -2)$, $M_2(2; 1; -3)$, $x - y + 5 = 0$	3	$M_1(0; 1; -7)$, $M_2(-2; 0; 1)$, $2x + y - 7z = 0$
4	$M_1(1; -1; 5)$, $M_2(0; 2; 4)$, $x - y + 2z - 3 = 0$	5	$M_1(2; 2; 1)$, $M_2(0; 0; -3)$, $2y - 5z + 12 = 0$	6	$M_1(0; -1; 5)$, $M_2(2; 2; 3)$, $4x - 2y + 5z = 0$
7	$M_1(1; 1; -1)$, $M_2(2; 0; 7)$, $7x - 8z + 5 = 0$	8	$M_1(2; 0; -5)$, $M_2(1; 0; -3)$, $x + 5y - 7 = 0$	9	$M_1(0; 2; 1)$, $M_2(1; -3; 2)$, $7x - 4y - 2z + 2 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Координаты точек, уравнение плоскости	Вариант	Координаты точек, уравнение плоскости	Вариант	Координаты точек, уравнение плоскости
10	$M_1(-9; 0; 1)$, $M_2(9; -3; 6)$, $8x - 5y + 4z = 0$	11	$M_1(8; 7; -4)$, $M_2(-4; 8; 2)$, $x + 5y = 4$	12	$M_1(6; 0; -1)$, $M_2(1; 5; -7)$, $3z - 2x + 5 = 0$
13	$M_1(2; -5; 0)$, $M_2(-3; 2; 8)$, $4x - y + 2z - 7 = 0$	14	$M_1(-8; 0; 9)$, $M_2(3; 7; 2)$, $-x + 4y - z = 0$	15	$M_1(6; -6; 1)$, $M_2(4; -2; 1)$, $x - 3y + 2z - 3 = 0$
16	$M_1(0; 0; 3)$, $M_2(3; -2; 4)$, $x + 5y - 7z - 6 = 0$	17	$M_1(4; -8; 0)$, $M_2(1; -7; 8)$, $x + 3y - 5z - 3 = 0$	18	$M_1(-7; -5; 3)$, $M_2(-7; 0; 1)$, $7x - 4y + 2z = 0$
19	$M_1(0; 0; -2)$, $M_2(0; 3; -7)$, $9x + 3y - 3z - 4 = 0$	20	$M_1(8; 1; 0)$, $M_2(-4; 8; 2)$, $7x - y - 5z = 0$	21	$M_1(1; 6; -1)$, $M_2(8; 8; 7)$, $x + 3y - 2 = 0$
22	$M_1(0; 1; 0)$, $M_2(-7; 1; 5)$, $y - 3x - 3 = 0$	23	$M_1(4; 7; 0)$, $M_2(2; 4; 8)$, $3x - 6y - z - 2 = 0$	24	$M_1(2; -3; 2)$, $M_2(-3; 8; 3)$, $3x + 4y - 6z = 0$
25	$M_1(-3; 2; 0)$, $M_2(9; 0; 5)$, $5x - 4y - 8z - 6 = 0$	26	$M_1(0; 5; -2)$, $M_2(6; 4; -3)$, $2x + 4y - 7z = 0$	27	$M_1(5; -4; -8)$, $M_2(-2; -4; 7)$, $2x - z - 2 = 0$
28	$M_1(3; -1; 5)$, $M_2(0; 2; -1)$, $3x - 8z - 5 = 0$	29	$M_1(3; -3; 2)$, $M_2(0; -4; 0)$, $2x + 4y - z - 8 = 0$	30	$M_1(2; -1; 5)$, $M_2(3; 2; -1)$, $3x - 6y + z + 1 = 0$

Задача 7. Выбрать из предложенного списка плоскостей пары параллельных, совпадающих и пересекающихся плоскостей.

Для каждой пары пересекающихся плоскостей найти угол между ними.

Исходные данные к задаче 7

Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей
1	σ_1: $x - 2y + 3z + 1 = 0$; σ_2: $3x - 6y + 9z + 1 = 0$; σ_3: $-x + 2y - 3z = 0$; σ_4: $3y + 2z - 2 = 0$; σ_5: $3x + 2y + 6 = 0$	2	σ_1: $-x + 4y + 2z + 5 = 0$; σ_2: $x + 3y - 4z - 2 = 0$; σ_3: $2x + 2y + 5z = 0$; σ_4: $4z - 7 = 0$; σ_5: $-2x - 6y + 8z + 4 = 0$
3	σ_1: $3x - 5z + 3 = 0$; σ_2: $5x + 3z - 12 = 0$; σ_3: $6x + 10z + 9 = 0$; σ_4: $6x - y + 2z + 1 = 0$; σ_5: $-18x + 3y - 6z - 3 = 0$	4	σ_1: $2x - 9y + 4z - 1 = 0$; σ_2: $3y + z + 5 = 0$; σ_3: $-3x - y + 2 = 0$; σ_4: $-9y - 3z - 15 = 0$; σ_5: $2x + 2y + 5z + 4 = 0$
5	σ_1: $2x - 7y + z - 5 = 0$; σ_2: $-4x + 14y + 2z + 10 = 0$; σ_3: $3x + y - z - 3 = 0$; σ_4: $9x + 3y - 3z + 9 = 0$; σ_5: $2y + 7z - 2 = 0$	6	σ_1: $3x + 7y - z + 1 = 0$; σ_2: $4x + 2z - 1 = 0$; σ_3: $2x - 4z + 2 = 0$; σ_4: $-3x + 7y + z - 1 = 0$; σ_5: $2x + 2y + 7 = 0$
7	σ_1: $2x - 5z + 9 = 0$; σ_2: $5x - 2y + 1 = 0$; σ_3: $4x - 10y - 2 = 0$; σ_4: $2x + 7y + z - 9 = 0$; σ_5: $10x - 4y + 2 = 0$	8	σ_1: $x - y + 2z - 7 = 0$; σ_2: $-x + y - 2z + 7 = 0$; σ_3: $2x - 2y - 7 = 0$; σ_4: $4x + 4z + 5 = 0$; σ_5: $x + y + z = 0$
9	σ_1: $-y + 3z + 4 = 0$; σ_2: $x + 3y + 2z - 3 = 0$; σ_3: $-2x - 6y - 4z + 6 = 0$; σ_4: $x + 2y + z - 3 = 0$; σ_5: $5x + 2z + 4 = 0$	10	σ_1: $4x + y - 3z + 2 = 0$; σ_2: $2x + y - 3z - 4 = 0$; σ_3: $-4x - 2y + 6z + 8 = 0$; σ_4: $3x + 3y + 2z = 0$; σ_5: $-x - y - 6 = 0$
11	σ_1: $5x - 5y + z + 2 = 0$; σ_2: $-10x + 10y + 2z - 4 = 0$; σ_3: $x + y + 5z + 3 = 0$; σ_4: $y + 5z = 0$; σ_5: $2x - 2y - 5 = 0$	12	σ_1: $3x + 4y - 7z = 0$; σ_2: $7y + 4z + 1 = 0$; σ_3: $x - 2y - 5z + 3 = 0$; σ_4: $-3x + 6y + 15z - 3 = 0$; σ_5: $2y + 7 = 0$
13	σ_1: $x - 2y + 5z - 3 = 0$; σ_2: $x - 2y + z - 3 = 0$; σ_3: $2x - 4y + 10z = 0$; σ_4: $x - y + 8 = 0$; σ_5: $3y - 5z + 6 = 0$	14	σ_1: $2y - 7z - 1 = 0$; σ_2: $10y - 35z + 11 = 0$; σ_3: $2x - y + 1 = 0$; σ_4: $6x - 2y + z = 0$; σ_5: $x + 5y - 11z - 2 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения плоскостей	Вариант	Уравнения плоскостей
15	σ_1: $2x - 2y + 5z = 0$; σ_2: $4x - 4y + 5 = 0$; σ_3: $x + 3y - z - 2 = 0$; σ_4: $2x + 6y - 2z - 2 = 0$; σ_5: $x - z = 0$	16	σ_1: $7x - 2z - 5 = 0$; σ_2: $7y - 2z - 5 = 0$; σ_3: $y + 2z - 1 = 0$; σ_4: $5y + 10z - 10 = 0$; σ_5: $7x - 2z - 13 = 0$
17	σ_1: $5x - 2y + z - 3 = 0$; σ_2: $5x + z - 3 = 0$; σ_3: $15x - 6y + 3z - 3 = 0$; σ_4: $x - 5z - 5 = 0$; σ_5: $x + y + 5z - 3 = 0$	18	σ_1: $3x - y + 2z - 7 = 0$; σ_2: $x - 3y + 11 = 0$; σ_3: $6x - 2y + 4z - 5 = 0$; σ_4: $5x - 15y + 55 = 0$; σ_5: $x - 2z - 3 = 0$
19	σ_1: $x - 5y + 2z = 0$; σ_2: $3x - 15y + 6 = 0$; σ_3: $9x - 15y + z - 2 = 0$; σ_4: $3x - 15y + 6z - 2 = 0$; σ_5: $z + 5 = 0$	20	σ_1: $5x - 2z - 7 = 0$; σ_2: $x + y - 7z - 5 = 0$; σ_3: $3y - 5z - 9 = 0$; σ_4: $9y - 15z - 9 = 0$; σ_5: $5x + 5y - 35z - 25 = 0$
21	σ_1: $7y + 2z + 5 = 0$; σ_2: $7x + 7y + 10 = 0$; σ_3: $2x - y + 3z - 2 = 0$; σ_4: $8x - 4y + 12z - 2 = 0$; σ_5: $6x - 3y + 9z - 6 = 0$	22	σ_1: $x - 5y + 11z - 6 = 0$; σ_2: $5x - 15y + 55z - 66 = 0$; σ_3: $2x - 10y + 22z + 3 = 0$; σ_4: $x + y - 2z = 0$; σ_5: $2x + 2y - 6z + 1 = 0$
23	σ_1: $2z - 7 = 0$; σ_2: $x + 2z - 7 = 0$; σ_3: $5x - 10z - 7 = 0$; σ_4: $2y - 7 = 0$; σ_5: $3x - 6z - 7 = 0$	24	σ_1: $x - 3y + 12 = 0$; σ_2: $2x - 2y + z = 0$; σ_3: $3x - 9y + 13 = 0$; σ_4: $3x - 9y + 13z = 0$; σ_5: $4x - 4y + 2z + 4 = 0$
25	σ_1: $11x - 5z + 2 = 0$; σ_2: $x - 5z + 22 = 0$; σ_3: $2x - 10z + 11 = 0$; σ_4: $5x + z - 13 = 0$; σ_5: $33x - 15z + 6 = 0$	26	σ_1: $7x - 5y + 2z = 0$; σ_2: $x - 5y + 5z + 2 = 0$; σ_3: $14x - 10y - 4z - 5 = 0$; σ_4: $4x - 20y + 20z + 8 = 0$; σ_5: $21x - 15y + 6z - 5 = 0$
27	σ_1: $x - 3y + 6z - 2 = 0$; σ_2: $3x - 9y + 18z = 0$; σ_3: $5x - 2z = 0$; σ_4: $5x - 2y = 0$; σ_5: $6x - 18y - 36z - 12 = 0$	28	σ_1: $2y - 5z + 1 = 0$; σ_2: $2x - 5y + z = 0$; σ_3: $x - y + 2z = 0$; σ_4: $5x - 5y + 10z + 16 = 0$; σ_5: $x + y - 2z + 1 = 0$
29	σ_1: $3x - y + z - 2 = 0$; σ_2: $x - 3y + z + 2 = 0$; σ_3: $5x - 15y - 5z + 10 = 0$; σ_4: $6x - 2y + 2z - 12 = 0$; σ_5: $x + y - z = 0$	30	σ_1: $x + 2y - 6z - 2 = 0$; σ_2: $2x - 4y - 12z - 2 = 0$; σ_3: $3x + 6y - 12z + 1 = 0$; σ_4: $5x - 15z + 2 = 0$; σ_5: $x - 3z + 12 = 0$

15.4. ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ (ЗАДАЧА 8)

Задача 8. Решить задачу согласно номеру своего варианта.

Исходные данные к задаче 8

Вариант	Условие задачи
1	Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 2; -2)$ и перпендикулярной к плоскостям $3x - 2y - z + 1 = 0$ и $x - y - z = 0$
2	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -15; 1)$, $M_2(3; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $3x - y - 4z = 0$
3	Составить уравнение плоскости, если известно, что точка $C(2; 9; -6)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость
4	Доказать, что плоскости $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ и $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходят через одну прямую
5	Вычислить объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$
6	Доказать, что плоскости $x - y - z = 10$, $4x + 11z + 43 = 0$ и $7x - 5y = 31$ имеют единственную точку пересечения, и найти ее
7	Составить уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0; 1; 3)$ и $M_2(2; 4; 5)$
8	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -3; 5)$ и отсекающей на осях Oy и Oz вдвое большие по длине отрезки, чем на оси Ox
9	Найти углы между плоскостью $3y - z = 0$ и плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $M(0; 1; -2)$
10	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-4; 0; -4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 4$ и $b = 3$
11	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(7; -6; 2)$ и отсекающей на осях координат положительные и равные между собой отрезки

Продолжение табл.

Вариант	Условие задачи
12	Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и составляющей с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол 60°
13	Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранный угол, образованный плоскостями $2x + 2y = z$ и $z = 0$
14	Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 6 = 0$, $x + 2y - z + 3 = 0$ и точку $S(1; 2; 4)$
15	Найти две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через прямую пересечения плоскостей $x = y$ и $z = 0$, если одна из искомых плоскостей проходит через точку $K(0; 4; 2)$
16	Найти угол между плоскостью $x - y + z = 0$ и плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $N(1; 1; 1)$
17	Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и составляющей с плоскостью $y = x$ угол 60°
18	Найти расстояние от точки $F(a; b; c)$ до плоскости, отсекающей на осях координат отрезки a, b и c
19	Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$ и $x + ay - 6z + 10 = 0$ имеют одну общую точку
20	Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$ и $x + ay - 6z + 10 = 0$ проходят через одну прямую
21	Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла xOy
22	Две грани куба лежат в плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба
23	На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстояние $d = 4$
24	На оси Ox найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ и $2x + 2y - z - 1 = 0$
25	Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 6 = 0$ и $x + 5y - z + 10 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $2x - y + 5z - 5 = 0$

Продолжение табл.

Вари-ант	Условие задачи
26	Проверить, можно ли провести плоскость через следующие точки: $A(1; -1; 1)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 3; 3)$, $D(4; 0; -3)$
27	Составить уравнение плоскостей, параллельных плоскости $2x - 2y - z - 3 = 0$ и отстоящих от нее на расстояние $d = 5$
28	Найти угол между плоскостью, проходящей через точки $O(0; 0; 0)$, $M(a; -a; 0)$ и $N(a; a; a)$, и плоскостью xOy
29	Определить, лежат ли точки $M(2; -1; 1)$ и $N(1; 2; -3)$ в одном, в смежных или вертикальных двугранных углах, образованных при пересечении плоскостей $2x - y + 5z - 1 = 0$ и $3x - 2y + 6z - 1 = 0$
30	Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот из двугранных углов, который образован плоскостями $2x - 14y + 6z - 1 = 0$ и $3x + 5y - 5z + 3 = 0$ и при этом содержит начало координат

16. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ: ВИДЫ УРАВНЕНИЙ

16.1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Учитывая случаи взаимного расположения пары плоскостей в пространстве (см. подробно п. 14.6 утверждение 3.2), получим уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{82}$$

которые задают прямую в пространстве (если выполнено условие (2)). Уравнения прямой вида (82) называют *общими уравнениями прямой* в пространстве.

Обозначим плоскости, заданные уравнениями (82), через σ_1 и σ_2, тогда прямую a, образованную их пересечением, можно изобразить так, как показано на рисунке 92.

Замечание 3.7. Поскольку одна и та же плоскость в пространстве может быть задана различными уравнениями

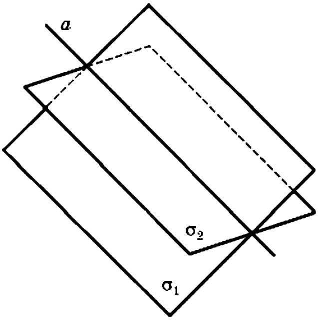


Рис. 92

(подробнее см. п. 13, 14), следовательно, прямую в пространстве можно задавать неоднозначно. Иногда число способов задания прямой в пространстве может быть бесконечным. Например, прямая (82) может быть записана с помощью любых двух различных уравнений пучка плоскостей:

$$\alpha \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

отвечающих произвольно взятым и одновременно не равным нулю числам α и β (подробное описание пучка плоскостей можно посмотреть в п. 14.4).

Однако при решении задач более удобными являются другие виды уравнений прямой в пространстве, которые будут рассмотрены ниже.

16.2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПАРАЛЛЕЛЬНО ЗАДАННОМУ ВЕКТОРУ

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — фиксированная точка пространства, $\vec{s} = \{l; m; n\}$ — ненулевой вектор. Выведем *уравнение прямой* в пространстве, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{s}$ (рис. 93). Вектор $\vec{s}$ (а также любой ненулевой вектор, коллинеарный $\vec{s}$) называют направляющим вектором прямой.

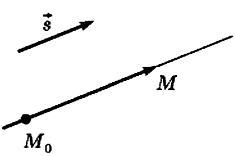


Рис. 93

Точка $M(x; y; z)$ пространства принадлежит рассматриваемой прямой в том и только том случае, если векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны.

Из курса векторной алгебры известно, что координаты коллинеарных векторов пропорциональны (см. формулу (4) из п. 1.2).

Таким образом получаем уравнения:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (83)$$

Уравнения (83) это искомые уравнения прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ и параллельной вектору $\vec{s}=(l;m;n)$. Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой* в пространстве.

Замечание 3.8. Рассмотрим направляющий вектор прямой, имеющий единичную длину, его координатами являются направляющие косинусы вектора $\vec{s}$. Такой направляющий вектор прямой будет единственным с точностью до знака (имеется в виду, что можно получить два противоположно направленных единичных вектора, коллинеарных $\vec{s}$). Координаты таких векторов принято называть *направляющими косинусами прямой* (см. также п. 8.3).

Замечание 3.9. Поскольку в качестве точки M_0 можно взять любую точку рассматриваемой прямой, а в качестве направляющего вектора любой (ненулевой) вектор, коллинеарный $\vec{s}$, то можно составить различные канонические уравнения одной и той же прямой в пространстве.

Замечание 3.10. В уравнениях (83) одно или два из чисел l, m, n могут быть равными нулю (все три числа l, m, n равными нулю быть не могут, так как это противоречит тому, что вектор $\vec{s}$ ненулевой). В этом случае следует иметь в виду, что уравнения в (83) представляют собой пропорции вида

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

которые следует понимать как равенства вида

$$a\cdot d=c\cdot b,$$

откуда понятно, что обращение в нуль знаменателя дает равенство нулю и соответствующего числителя.

Например, в случае, когда $l=0$, $n\neq 0$ пропорция

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n},$$

эквивалентная равенству

$$(x-x_0)n=(z-z_0)\cdot l,$$

и означает, что $x-x_0=0$.

16.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим канонические уравнения прямой и положим каждое из соотношений (83) равным параметру t. Поскольку, по крайней мере, один из знаменателей отличен от нуля, а соответствующий ему числитель может принимать какие угодно значения, то областью изменения параметра t является вся действительная ось, т. е. $t \in R$.

Перепишем уравнения (83), используя введенный параметр:

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot l; \\ y - y_0 = t \cdot m; \\ z - z_0 = t \cdot n. \end{cases} \tag{84}$$

Выполнив элементарные преобразования, получим *параметрические уравнения прямой* в пространстве:

$$\begin{cases} x = l \cdot t + x_0; \\ y = m \cdot t + y_0; \\ z = n \cdot t + z_0. \end{cases} \tag{85}$$

З а м е ч а н и е 3.11. Если параметр t принять за время, отсчитываемое от некоторого начального момента $t = 0$, то параметрические уравнения прямой дадут закон движения материальной точки в пространстве по прямой линии с постоянной скоростью

$$v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

из начального положения $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

16.4. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ

Предположим, что в пространстве заданы две различные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

В этом случае вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ будет направляющим вектором единственной прямой, *про-*

ходящей через две заданные точки, канонические уравнения такой прямой запишем в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (86)$$

16.5. ПЕРЕХОД ОТ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ К КАНОНИЧЕСКИМ

Пусть прямая в пространстве задана общими уравнениями вида (82). Для записи канонических уравнений прямой достаточно найти координаты любой точки $M_0(x_0;$ $y_0;\ z_0)$, принадлежащей прямой и координаты любого (ненулевого) вектора $\vec{s}=(l;m;n)$, коллинеарного заданной прямой.

Найдем координаты точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Так как плоскости, заданные уравнениями (82), не параллельны и не совпадают, то согласно утверждению 3.2 из п. 14.6

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{C_1}{C_2}, \text{ или } \frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

Для определенности предположим, что $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ или, что то же самое, $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$.

Тогда, выбрав в качестве координаты z произвольное число z_0, подставим его в уравнения (82) и найдем решение полученной системы уравнений:

$$x_0=\frac{B_1(C_2z_0+D_2)-B_2(C_1z_0+D_1)}{A_1B_2-A_2B_1},$$
$$y_0=\frac{A_2(C_1z_0+D_1)-A_1(C_2z_0+D_2)}{A_1B_2-A_2B_1}. \qquad (87)$$

Если положить, например, $z_0=0$, то искомая точка M_0 будет иметь координаты:

$$M_0\left(\frac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1};\frac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1};0\right).$$

Для вычисления координат направляющего вектора прямой воспользуемся условием, что такой вектор $\vec{s}$ пер-

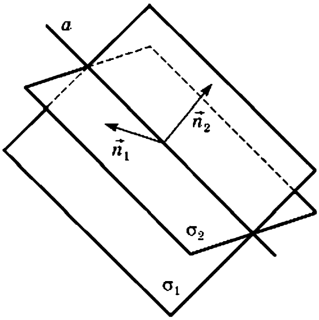


Рис. 94

пендикулярен каждому из нормальных векторов плоскостей σ_1 и σ_2 (рис. 94).

Поэтому положим

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2,$$

где $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ — нормальный вектор плоскости σ_1; $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ — нормальный вектор плоскости σ_2.

Используя стандартную формулу для вычисления векторного произведения векторов в координатной форме, получим:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = (B_1C_2 - B_2C_1; C_1A_2 - C_2A_1; A_1B_2 - A_2B_1). \quad (88)$$

Таким образом, в общем виде канонические уравнения прямой в пространстве (для случая $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$) можно записать так:

$$\frac{x - \dfrac{B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - \dfrac{A_2D_1 - A_1D_2}{A_1B_2 - A_2B_1}}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{z}{A_1B_2 - A_2B_1}. \quad (89)$$

Отметим, что уравнения (89) не являются единственными каноническими уравнениями данной прямой в пространстве.

Подробный пример решения задачи такого типа будет рассмотрен ниже.

17. ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ: ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ

Утверждение 3.3. Пусть в пространстве заданы две прямые:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

В этом случае справедливо одно и только одно из следующих утверждений:

1) прямые совпадают (все строки матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

пропорциональны);

2) прямые не имеют общих точек и лежат в одной плоскости, т. е. параллельны (2-я и 3-я строки матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

пропорциональны, 1-я им не пропорциональна);

3) прямые пересекаются и лежат в одной плоскости (2-я и 3-я строки матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

не являются пропорциональными, а 1-я строка есть линейная комбинация 2-й и 3-й);

4) прямые не лежат в одной плоскости, т. е. скрещиваются (определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

не равен нулю).

17.1. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Если пара прямых в пространстве задана каноническими уравнениями $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ (см. рис. 95, прямая f) и $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ (рис. 95, прямая g), то косинус угла между этими прямыми может быть вычислен по формуле

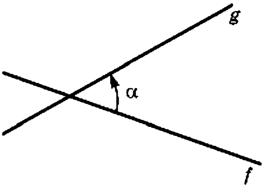


Рис. 95

$$\cos\alpha = \\ = \frac{|l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (90)$$

Если пара прямых в пространстве задана уравнениями другого вида, то предварительно достаточно найти координаты направляющих векторов для этих прямых, а затем воспользоваться формулой (90).

З а м е ч а н и е 3.12. При использовании формулы (90) следует иметь в виду, что по ней вычисляется не только угол между пересекающимися прямыми, но и угол между скрещивающимися прямыми.

Знак модуля в формуле (90) позволяет определять острый угол между прямыми.

17.2. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Пусть в пространстве заданы две прямые:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Эти прямые взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0. \quad (91)$$

Данные прямые параллельны, если только выполнено условие:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (92)$$

при этом следует учитывать случай совпадения прямых (см. утверждение 3.3).

Если пара прямых в пространстве задана уравнениями другого вида, то предварительно необходимо найти координаты направляющих векторов для этих прямых, а затем для определения перпендикулярности или параллельности прямых воспользоваться формулами (91) или (92) соответственно.

17.3. ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМЫХ

Если прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

то они имеют единственную точку пересечения, если

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Найти координаты этой точки можно, решив соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}; \\ \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}. \end{cases} \qquad (93)$$

В случае, когда прямые заданы общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0; \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0, \end{cases}$$

соответствующая система линейных уравнений, которая будет иметь в этом случае единственное решение, выглядит так:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0; \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0. \end{cases} \qquad (94)$$

18. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

18.1. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 3.9. Даны координаты точек $M_1(3; 7; 0)$, $M_2(-1; 3; 2)$ и вектор $\vec{s} = \{0; 3; -2\}$. Составить:

1) канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_1 параллельно вектору $\vec{s}$;

2) общие уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Решение.

1. Канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_1 параллельно вектору $\vec{s}$.

Для составления требуемых уравнений достаточно воспользоваться формулой (83). Учитывая, что

$$x_0 = 3,\ y_0 = 7,\ z_0 = 0,\ l = 0,\ m = 3,\ n = -2,$$

получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{-2}. \tag{95}$$

Пользуясь формулой (85), запишем параметрические уравнения рассматриваемой прямой:

$$\begin{cases} x = 3; \\ y = 3t + 7; \\ z = -2t. \end{cases} \tag{96}$$

2. Общие уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Чтобы найти общие уравнения искомой прямой, предварительно составим канонические уравнения этой прямой. Канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки, можно записать, воспользовавшись формулой (85). Подставив исходные данные в эту формулу, получим:

$$\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-7}{3-7}=\frac{z-0}{2-0}. \tag{97}$$

Выполним в уравнениях (97) необходимые вычисления и преобразуем эту систему уравнений к виду:

$$\begin{cases}(x-3)\cdot(-4)=(y-7)\cdot(-4);\\(y-7)\cdot 2=z\cdot(-4).\end{cases} \tag{98}$$

После алгебраических преобразований уравнений системы (98) получим требуемые общие уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\begin{cases}x-y+4=0;\\y+2z-7=0.\end{cases} \tag{99}$$

Пример 3.10. Прямая в пространстве задана общими уравнениями:

$$\begin{cases}3x-y+2z-1=0;\\x-4z+5=0.\end{cases}$$

Найти направляющие косинусы (с точностью до знака) прямой и записать ее канонические и параметрические уравнения.

Р е ш е н и е. Вычислим сначала координаты какого-либо направляющего вектора прямой.

Поскольку рассматриваемая прямая принадлежит каждой из плоскостей

$$3x-y+2z-1=0 \text{ и } x-4z+5=0,$$

то ее направляющий вектор будет перпендикулярен нормальным векторам этих плоскостей, значит, его можно найти, вычислив векторное произведение векторов $\vec{n}_1 = \{3;-1;2\}$ и $\vec{n}_2=\{1;0;-4\}$:

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\3 & -1 & 2\\1 & 0 & -4\end{vmatrix}= \tag{100}$$
$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\0 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & -4\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\1 & 0\end{vmatrix}=\{4;14;1\}.$$

Для определения направляющих косинусов вектора $\vec{s}=\{4;14;1\}$ вычислим его модуль:

$$|\vec{s}|=\sqrt{4^2+14^2+1^2}=\sqrt{213}.$$

Получаем значения направляющих косинусов прямой:

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{213}};\cos\beta=\frac{14}{\sqrt{213}};\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{213}}.$$

Замечание 3.13. Если в формуле (100) вычислить $\vec{s}=\vec{n}_2\times\vec{n}_1$, то направляющие косинусы получим в виде:

$$\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{213}};\cos\beta=-\frac{14}{\sqrt{213}};\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{213}}.$$

Поэтому, с точностью до знака, направляющие косинусы прямой имеют вид:

$$\cos\alpha=\pm\frac{4}{\sqrt{213}};\cos\beta=\pm\frac{14}{\sqrt{213}};\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{213}}.$$

Для того чтобы записать канонические и параметрические уравнения прямой, необходимо знать координаты некоторой точки, принадлежащей прямой, и координаты направляющего вектора этой прямой. Поскольку координаты направляющего вектора прямой вычислены выше ($\vec{s}=\{4;14;1\}$), найдем координаты какой-либо точки, лежащей на прямой. Выберем произвольное значение координаты x, например, $x = 3$, и подставим это значение в данные общие уравнения прямой, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}9-y+2z-1=0;\\3-4z+5=0.\end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем:

$$y = 12,\ z = 2.$$

Значит, в качестве точки, через которую проходит прямая, можно взять $M_0(3;\ 12;\ 2)$. Воспользуемся формулой (83) и запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-12}{14}=\frac{z-2}{1}. \qquad (101)$$

Аналогичным образом, подставляя исходные данные в формулу (85), получим параметрические уравнения рассматриваемой прямой:

$$\begin{cases} x = 4t + 3; \\ y = 14t + 12; \\ z = t + 2. \end{cases} \tag{102}$$

Пример 3.11. Выбрать из имеющегося списка прямых пары:

а) параллельных (в том числе и совпадающих) прямых;

б) скрещивающихся прямых (для каждой пары вычислить угол между прямыми);

в) пересекающихся прямых (для каждой пары найти точку пересечения).

Прямые заданы уравнениями:

$$a\colon\ \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{0} = \frac{z}{-2};$$

$$b\colon\ \begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0; \\ 3x + y + 12z - 2 = 0; \end{cases}$$

$$c\colon\ \begin{cases} x = t - 3; \\ y = -3t + 1; \\ z = t + 2; \end{cases}$$

$$d\colon\ \frac{x+3}{-3} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{2};$$

$$f\colon\ \begin{cases} x + 3z - 2 = 0; \\ 3y + z = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Для определения взаимного расположения прямых необходимо найти координаты направляющих векторов для этих прямых.

Для прямых, заданных каноническими или параметрическими уравнениями координаты направляющих векторов легко определить непосредственно из их уравнений, а именно: $\vec{s}_a = \{3; 0; -2\}$ — направляющий вектор прямой a; $\vec{s}_c = \{1; -3; 1\}$ — направляющий вектор прямой c; $\vec{s}_d = \{-3; 0; 2\}$ — направляющий вектор прямой d.

Направляющие векторы прямых, заданных общими уравнениями, вычисляются способом, описанным выше (см. решение примера 3.10): $\vec{s}_b = \{-14; -6; 4\}$ — направляющий вектор прямой b; $\vec{s}_f = \{-9; -1; 3\}$ — направляющий вектор прямой f.

Далее для каждой прямой необходимо найти координаты какой-либо точки, ей принадлежащей.

Для прямых, заданными каноническими или параметрическими уравнениями, это не составляет труда, поскольку координаты нужной точки указаны непосредственно в уравнениях. Таким образом, $M_a(2; -4; 0)$ — координаты точки, принадлежащей прямой a; $M_c(-3; 1; 2)$ — координаты точки, принадлежащей прямой c; $M_d(-3; 0; -2)$ — координаты точки, принадлежащей прямой d.

Вычислим координаты некоторой точки, принадлежащей прямой b. Для этого положим $z = 0$, и, подставив это значение в систему уравнений, задающих прямую b, получим:

$$\begin{cases} x - y - 6 = 0; \\ 3x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными и находим: $x = 2$, $y = -4$. Получили $M_b(2; -4; 0)$ — координаты точки, принадлежащей прямой b. Аналогичным образом находим $M_f(2; 0; 0)$ — координаты точки, принадлежащей прямой f.

Для каждой пары прямых составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}, \qquad (103)$$

где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ — координаты некоторых точек, принадлежащих прямым, $\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ суть направляющие векторы рассматриваемых прямых соответственно, и определим их взаимное расположение, пользуясь утверждением 3.3.

Рассмотрим прямые a и b. Составим для этих прямых матрицу вида (103) и вычислим ее определитель:

$$\begin{vmatrix} 2-2 & -4-(-4) & 0-0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -14 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (104)$$

Равенство нулю определителя (104) означает, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Поскольку в процессе вычислений была обнаружена точка $M(2; -4; 0)$, принадлежащая каждой из рассматриваемых прямых, то, очевидно, что прямые пересекаются (совпадать прямые не могут в силу неколлинеарности их направляющих векторов).

Рассмотрим прямые a и d.

Составим для этих прямых матрицу вида (103) и вычислим ее определитель:

$$\begin{vmatrix} 2-(-3) & -4-0 & 0-(-2) \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (105)$$

Равенство нулю определителя (105) означает, что прямые a и d лежат в одной плоскости.

Однако вторая и третья строки матрицы пропорциональны, значит, согласно утверждению 3.3, прямые параллельны.

Рассмотрим прямые c и d.

Составим для этих прямых матрицу вида (103) и вычислим ее определитель:

$$\begin{vmatrix} 2-(-3) & -4-0 & 0-(-2) \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (106)$$

Неравенство нулю определителя (106) означает, что прямые c и d не лежат в одной плоскости. Параллельность прямых невозможна, следовательно, они скрещиваются.

Вычислим угол между прямыми, пользуясь формулой (90):

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot(-3)+(-3)\cdot 0+1\cdot 2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+0^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{143}}{143}. \tag{107}$$

Значит, прямые c и d образуют угол, равный

$$\arccos\frac{\sqrt{143}}{143} \approx 85^\circ.$$

Рассматривая аналогичным образом оставшиеся пары прямых, получаем, что все остальные пары прямых скрещиваются под различными углами.

18.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Запишите общие уравнения прямой в пространстве.
2. Запишите канонические уравнения прямой.
3. Возможно ли составить различные канонические уравнения одной и той же прямой в пространстве?
4. Запишите параметрические уравнения прямой в пространстве.
5. Запишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
6. В каком случае прямые в пространстве: а) совпадают; б) параллельны; в) пересекаются; г) скрещиваются?
7. Как найти угол между прямыми?
8. В каком случае две прямые взаимно перпендикулярны?
9. При каком условии две прямые параллельны?
10. Как найти точку пересечения двух прямых?

18.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ» (ЗАДАЧИ 1–3)

Задача 1. Даны координаты точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и вектор $\vec{s} = \{l; m; n\}$. Составить:

а) канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_1 параллельно вектору $\vec{s}$;

б) общие уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Исходные данные к задаче 1

Вариант	Точки и вектор	Вариант	Точки и вектор	Вариант	Точки и вектор
1	$M_1(-3;\ 4;\ 5)$, $M_2(0;\ -2;\ 1)$, $\vec{s}=\{3;-3;1\}$	2	$M_1(2;\ 0;\ -1)$, $M_2(3;\ -5;\ 4)$, $\vec{s}=\{2;-1;0\}$	3	$M_1(1;\ -1;\ 7)$, $M_2(0;\ 0;\ 4)$, $\vec{s}=\{-5;1;3\}$
4	$M_1(2;\ -2;\ 0)$, $M_2(3;\ -1;\ 2)$, $\vec{s}=\{0;5;-1\}$	5	$M_1(1;\ -5;\ 7)$, $M_2(2;\ 1;\ 1)$, $\vec{s}=\{-3;4;2\}$	6	$M_1(-2;\ 4;\ 5)$, $M_2(0;\ -1;\ 1)$, $\vec{s}=\{4;-3;1\}$
7	$M_1(-3;\ 5;\ 0)$, $M_2(1;\ -2;\ 1)$, $\vec{s}=\{2;0;4\}$	8	$M_1(0;\ 2;\ -1)$, $M_2(1;\ 1;\ 0)$, $\vec{s}=\{2;-3;7\}$	9	$M_1(1;\ 1;\ 5)$, $M_2(-1;\ -3;\ 5)$, $\vec{s}=\{0;-2;3\}$
10	$M_1(3;\ -3;\ 2)$, $M_2(2;\ 0;\ -3)$, $\vec{s}=\{5;-1;4\}$	11	$M_1(-3;\ 3;\ 5)$, $M_2(1;\ 7;\ -2)$, $\vec{s}=\{-3;4;5\}$	12	$M_1(-3;\ 2;\ 4)$, $M_2(4;\ -5;\ 4)$, $\vec{s}=\{1;0;-1\}$
13	$M_1(2;\ 1;\ -1)$, $M_2(1;\ 0;\ 4)$, $\vec{s}=\{5;-1;7\}$	14	$M_1(1;\ 0;\ 7)$, $M_2(2;\ 0;\ 4)$, $\vec{s}=\{0;-5;1\}$	15	$M_1(2;\ -1;\ 0)$, $M_2(-1;\ 0;\ 8)$, $\vec{s}=\{0;0;7\}$
16	$M_1(3;\ 3;\ 0)$, $M_2(2;\ -1;\ 2)$, $\vec{s}=\{-2;0;1\}$.	17	$M_1(-1;\ 2;\ 0)$, $M_2(3;\ 0;\ -3)$, $\vec{s}=\{2;5;0\}$	18	$M_1(1;\ 7;\ 4)$, $M_2(-3;\ 2;\ 0)$, $\vec{s}=\{5;1;-2\}$
19	$M_1(4;\ 4;\ -1)$, $M_2(0;\ 0;\ 11)$, $\vec{s}=\{-3;0;4\}$	20	$M_1(0;\ -4;\ 5)$, $M_2(7;\ 1;\ 1)$, $\vec{s}=\{-2;3;9\}$	21	$M_1(1;\ 0;\ -6)$, $M_2(6;\ 5;\ -6)$, $\vec{s}=\{9;-1;4\}$
22	$M_1(3;\ -3;\ 1)$, $M_2(5;\ -1;\ 4)$, $\vec{s}=\{2;0;-1\}$	23	$M_1(2;\ -1;\ 0)$, $M_2(-3;\ 4;\ 5)$, $\vec{s}=\{1;-1;7\}$	24	$M_1(-5;\ 1;\ 3)$, $M_2(1;\ 0;\ -1)$, $\vec{s}=\{2;-2;0\}$
25	$M_1(0;\ 5;\ -1)$, $M_2(5;\ -1;\ 7)$, $\vec{s}=\{1;-5;7\}$	26	$M_1(3;\ 4;\ 2)$, $M_2(0;\ -5;\ 1)$, $\vec{s}=\{-2;4;5\}$	27	$M_1(4;\ -3;\ 1)$, $M_2(-2;\ 0;\ 1)$, $\vec{s}=\{-3;5;0\}$
28	$M_1(2;\ 0;\ 4)$, $M_2(2;\ 5;\ 0)$, $\vec{s}=\{0;2;-1\}$	29	$M_1(2;\ -3;\ 7)$, $M_2(5;\ 1;\ -2)$, $\vec{s}=\{1;1;5\}$	30	$M_1\ (0;\ -2;\ 3)$, $M_2(-3;\ 0;\ 4)$, $\vec{s}=\{3;-3;2\}$

Задача 2. Прямая в пространстве задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Найти направляющие косинусы прямой и записать ее канонические и параметрические уравнения.

Исходные данные к задаче 2

Вариант	Уравнения прямой	Вариант	Уравнения прямой
1	$\begin{cases} x-2y+z-1=0; \\ 3x+y-5=0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x+2y-1=0; \\ 3x-5y+4z+2=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x+4y+5z=0; \\ -2x+y+3z-3=0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} -x+z-1=0; \\ 7x+4=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -5x+y+3z+2=0; \\ 2x+3y-z+2=0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 5y-z+1=0; \\ 5x+7y+2z+1=0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x+4y+2z-2=0; \\ 4x+5y-1=0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x+4y-3z+1=0; \\ 3x-5y+6=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x-y+2z=0; \\ 4x+2y-7=0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x+y+2=0; \\ 3x-7y+z+9=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 5x-y-3z+5=0; \\ 2y-3z+3=0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x-2y+2z=0; \\ 3x+5y-z+4=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x+y-z+1=0; \\ 4y+5z-1=0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 7x+y+7=0; \\ 2x+4z=0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 5y-z+3=0; \\ 3x+2z-1=0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x-2y+1=0; \\ x-2y+3=0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3y-2z+5=0; \\ x+7y+4z-3=0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x+5z+1=0; \\ 2x-4y-4z-1=0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 2x-3y+4z=0; \\ 4y-5z+7=0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x+y-2z+3=0; \\ 9x+y-6=0 \end{cases}$

Продолжение табл. 36

Вариант	Уравнения прямой	Вариант	Уравнения прямой
21	$\begin{cases} 2x+5y-6z+9=0; \\ x-4y+3z-3=0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x+5y-z+4=0; \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} y-2z-1=0; \\ 3x-4y+5z+1=0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x-y+7z-5=0; \\ x+3y-z=0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x-2y-2z=0; \\ 5y-z+5=0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x+3y-z-5=0; \\ 7x-3y+4z+2=0 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 5x-z-2=0; \\ 4x-2y+4z-3=0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x-z-3=0; \\ 5x+2y+4=0 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 2x+5y=0; \\ 2x-y+2z+7=0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 5x+y-2z+1=0; \\ x+5y-2=0 \end{cases}$

Задача 3. Выбрать из имеющегося списка прямых пары:

а) параллельных (в том числе и совпадающих) прямых;

б) скрещивающихся прямых (для каждой пары вычислить угол между прямыми);

в) пересекающихся прямых (для каждой пары найти точку пересечения).

Исходные данные к задаче 3

Вариант	Уравнения прямых
1	a: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-5}{3}$; b: $\begin{cases} 5x-y+1=0; \\ y+3z-3=0; \end{cases}$ c: $\begin{cases} x=3t-1; \\ y=15t+1; \\ z=-5t-8; \end{cases}$ d: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+7}{-3}=\dfrac{z-2}{16}$; f: $\begin{cases} x+5y+z-2=0; \\ 3x-y+7=0 \end{cases}$
2	a: $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-6}{4}$; b: $\begin{cases} x+y+z-4=0; \\ 2x-y+3z-1=0; \end{cases}$ c: $\begin{cases} x=2t-3; \\ y=t-2; \\ z=-10; \end{cases}$ d: $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{6}$; f: $\begin{cases} x-3=0; \\ 3y-z+4=0 \end{cases}$

Продолжение табл.

Вари-ант	Уравнения прямых
3	a: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+7}{7}$; b: $\begin{cases}x-2y+z-1=0;\\3x+y-5=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=2t+1;\\y=-t-6;\\z=4t;\end{cases}$ d: $\frac{x}{2}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-11}{14}$; f: $\begin{cases}5x-y+12=0;\\x+y-12z+5=0\end{cases}$
4	a: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$; b: $\begin{cases}2x+3y-z+4=0;\\x-y+5z+3=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=14t+1;\\y=-11t-2;\\z=-4t;\end{cases}$ d: $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{0}$; f: $\begin{cases}x+y-2=0;\\x-3z-5=0\end{cases}$
5	a: $\frac{x+4}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{2}$; b: $\begin{cases}x-2y+z-11=0;\\x+y-2z+12=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=t-3;\\y=t-1;\\z=t+4;\end{cases}$ d: $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-3}$; f: $\begin{cases}5x-y+2z=0;\\x+5y-2=0\end{cases}$
6	a: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{1}$; b: $\begin{cases}x-y+2z+6=0;\\2y-3z+11=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=t-1;\\y=4t+5;\\z=t-4;\end{cases}$ d: $\frac{x+3}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-1}$; f: $\begin{cases}2x-y+2=0;\\x+3y-2z+4=0\end{cases}$
7	a: $\frac{x}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{3}$; b: $\begin{cases}5x-3y+2z-4=0;\\x-z+1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=3t+2;\\y=5t-1;\\z=4t;\end{cases}$ d: $\frac{x+2}{-6}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z-4}{-6}$; f: $\begin{cases}x+y-2z+13=0;\\2x-2y+z=0\end{cases}$
8	a: $\frac{x+3}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$; b: $\begin{cases}2y-4z+1=0;\\x+y-2z=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=t+1;\\y=2t+3;\\z=-3t+2;\end{cases}$ d: $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{-1}$; f: $\begin{cases}2x+2y-7z-13=0;\\5x+5y-2z+1=0\end{cases}$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения прямых
9	a: $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{3}$; b: $\begin{cases}x+5y-z+7=0;\\2x-y+2z-1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=9t-9;\\y=4t+1;\\z=-11t;\end{cases}$ d: $\dfrac{x+10}{2}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-11}{-3}$; f: $\begin{cases}2x-3y+4z-1=0;\\x-3y+4z-11=0\end{cases}$
10	a: $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+5}{2}$; b: $\begin{cases}3y-2z+5=0;\\x+y-2z+5=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=4t+1;\\y=-2t-1;\\z=3t+4;\end{cases}$ d: $\dfrac{x+3}{12}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-2}{4}$; f: $\begin{cases}x-3z+2=0;\\2x-4y+z=0\end{cases}$
11	a: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-7}{3}$; b: $\begin{cases}4x-y+2z-3=0;\\x+4y-2z-6=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=2t+2;\\y=3t-3;\\z=7t;\end{cases}$ d: $\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y+3}{10}=\dfrac{z}{17}$; f: $\begin{cases}x-4y+6z+2=0;\\2x-y+2z-3=0\end{cases}$
12	a: $\dfrac{x+5}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$; b: $\begin{cases}x-y+z-7=0;\\2x+2y+3z-1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=2t-7;\\y=-3t+3;\\z=t+2;\end{cases}$ d: $\dfrac{x+7}{-2}=\dfrac{y-7}{3}=\dfrac{z+4}{-1}$; f: $\begin{cases}2x-3y+4z-5=0;\\x+2y+2z+3=0\end{cases}$
13	a: $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z+2}{10}$; b: $\begin{cases}7x-y-2=0;\\x+7y+5z+7=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=3t+2;\\y=-2t+1;\\z=4t-6;\end{cases}$ d: $\dfrac{x+1}{9}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+7}{4}$; f: $\begin{cases}2y-3z+6=0;\\2x-3y+3=0\end{cases}$
14	a: $\dfrac{x}{18}=\dfrac{y-1}{12}=\dfrac{z+5}{7}$; b: $\begin{cases}2x-3y+6=0;\\x+2y-6z+1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=18t+1;\\y=12t;\\z=-7t+3;\end{cases}$ d: $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{5}$; f: $\begin{cases}x+y+z=0;\\3x-2y+z+3=0\end{cases}$

Продолжение табл.

Вари-ант	Уравнения прямых
15	a: $\frac{x+5}{-1}=\frac{y-5}{0}=\frac{z+4}{-2}$; b: $\begin{cases}3x+5y-z+11=0;\\ -x+3y+4z=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=-7t+2;\\ y=11t-6;\\ z=17t+1;\end{cases}$ d: $\frac{x}{23}=\frac{y+2}{11}=\frac{z+2}{14}$; f: $\begin{cases}5x-3y+4z+2=0;\\ 3x+5y-2z+6=0\end{cases}$
16	a: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{4}$; b: $\begin{cases}x-y+2z-3=0;\\ 2x+y-3z+7=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=5;\\ y=5t-1;\\ z=2t+5;\end{cases}$ d: $\frac{x+5}{4}=\frac{y-6}{1}=\frac{z}{-3}$; f: $\begin{cases}4x-y+5z-2=0;\\ x+2y+2z-6=0\end{cases}$
17	a: $\frac{x-5}{4}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z}{0}$; b: $\begin{cases}-x-y+2z-3=0;\\ 3x-y+2z-4=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=5;\\ y=4t-3;\\ z=2t+1;\end{cases}$ d: $\frac{x-6}{26}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-2}{-1}$; f: $\begin{cases}x-3y+5z-1=0;\\ 2x-7y+3z+4=0\end{cases}$
18	a: $\frac{x+8}{7}=\frac{y+22}{-4}=\frac{z-4}{0}$; b: $\begin{cases}x-6z+2=0;\\ 3x-y+z+5=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=7t-2;\\ y=-4t+3;\\ z=5;\end{cases}$ d: $\frac{x}{6}=\frac{y-1}{19}=\frac{z+1}{1}$; f: $\begin{cases}3x+7y-z+2=0;\\ -x-2y+5z-9=0\end{cases}$
19	a: $\frac{x+5}{-2}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-4}{-1}$; b: $\begin{cases}2x-y+z-3=0;\\ 5x-3y+6z+1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=2t+1;\\ y=7t;\\ z=t-2;\end{cases}$ d: $\frac{x+6}{-4}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-1}{2}$; f: $\begin{cases}4x+3y-z+7=0;\\ 3x-2y+z-6=0\end{cases}$
20	a: $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{-6}=\frac{z-1}{0}$; b: $\begin{cases}6x+2y-4z+9=0;\\ 3x+y+z-3=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=-t+4;\\ y=3t-6;\\ z=2;\end{cases}$ d: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{1}$; f: $\begin{cases}x-2y+4z-6=0;\\ 5x-9y+2z+1=0\end{cases}$

Продолжение табл.

Вари-ант	Уравнения прямых
21	a: $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z-3}{0}$; b: $\begin{cases}5x-3y+2=0;\\ y+3z-10=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=9t;\\ y=15t-3;\\ z=5t+5;\end{cases}$ d: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{17}=\frac{z-3}{6}$; f: $\begin{cases}x+2y-6z+1=0;\\ 3x-z+6=0\end{cases}$
22	a: $\frac{x+2}{5}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z}{-4}$; b: $\begin{cases}2x+2y-z+6=0;\\ x-y+3z-1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=5t-2;\\ y=7t+6;\\ z=4t-1;\end{cases}$ d: $\frac{x-9}{7}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+8}{-8}$; f: $\begin{cases}3x-y+5z-7=0;\\ x+2y+4z+1=0\end{cases}$
23	a: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+10}{3}=\frac{z-4}{4}$; b: $\begin{cases}x+7y-6z+9=0;\\ 2x-10y+6z-7=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=t+5;\\ y=-2t-7;\\ z=4;\end{cases}$ d: $\frac{x-5}{-2}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{0}$; f: $\begin{cases}5x-4y+3z-2=0;\\ 2x+y-5z+6=0\end{cases}$
24	a: $\frac{x-12}{0}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-5}{5}$; b: $\begin{cases}6x-5y+9z-2=0;\\ 3x-2y+3z-6=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=12t;\\ y=-2t+1;\\ z=-7t-2;\end{cases}$ d: $\frac{x}{-11}=\frac{y-7}{-15}=\frac{z}{5}$; f: $\begin{cases}x-3y-4z+1=0;\\ 2x+y-6z+5=0\end{cases}$
25	a: $\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-2}$; b: $\begin{cases}x-3y+5z+4=0;\\ 2x+5y-z-1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=3t-2;\\ y=t+1;\\ z=1;\end{cases}$ d: $\frac{x-7}{-5}=\frac{y+4}{22}=\frac{z-6}{18}$; f: $\begin{cases}6x+3y-2z+5=0;\\ 2x-2y+3z-1=0\end{cases}$
26	a: $\frac{x-10}{-4}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+6}{3}$; b: $\begin{cases}3x+3y-z+5=0;\\ x-2y+6=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=2t+2;\\ y=t-1;\\ z=9t;\end{cases}$ d: $\frac{x+5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$; f: $\begin{cases}x-6z+9=0;\\ 3x+5y-13=0\end{cases}$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения прямых
27	a: $\frac{x+2}{0}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+4}{-1}$; b: $\begin{cases}-x+2y+4z-3=0;\\3x-y-2z+5=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=4t-2;\\y=-2t+7;\\z=t-3;\end{cases}$ d: $\frac{x+6}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{3}$; f: $\begin{cases}5x-y+3z-11=0;\\6x+2z+3=0\end{cases}$
28	a: $\frac{x-12}{2}=\frac{y-24}{-1}=\frac{z+11}{6}$; b: $\begin{cases}x-y-z+6=0;\\2x-3y+4z+5=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=7t-3;\\y=6t+4;\\z=t-7;\end{cases}$ d: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-6}{-5}$; f: $\begin{cases}4x-3y+12=0;\\y+5z-10=0\end{cases}$
29	a: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{12}$; b: $\begin{cases}x-3y-2z+2=0;\\3x-2y+4z-1=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=t-2;\\y=-t+1;\\z=6t+4;\end{cases}$ d: $\frac{x-11}{1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{6}$; f: $\begin{cases}7x-y+12=0;\\x-2z+13=0\end{cases}$
30	a: $\frac{x+2}{2}=\frac{y+16}{5}=\frac{z-1}{2}$; b: $\begin{cases}3y+2z-11=0;\\3x+2y-11z+3=0;\end{cases}$ c: $\begin{cases}x=3t-2;\\y=-t+4;\\z=11t-5;\end{cases}$ d: $\frac{x}{2}=\frac{y+9}{2}=\frac{z-3}{-7}$; f: $\begin{cases}x-z+2=0;\\2x-2y+3z-1=0\end{cases}$

18.4. ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ (ЗАДАЧА 4)

Задача 4. Решить задачу согласно номеру своего варианта.

Исходные данные к задаче 4

Вариант	Условие задачи
1	Написать уравнения траектории движения точки $M(x;\ y;\ z)$, которая, выйдя из точки $A(4;\ -3;\ 1)$, движется со скоростью $\vec{v}=\{2;3;1\}$
2	Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(a;\ b;\ c)$ параллельно оси Oz

Продолжение табл.

Вариант	Условие задачи
3	Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(a;\ b;\ c)$ перпендикулярно оси Oz
4	Найти угол между прямой $\begin{cases} x = 2z - 1; \\ y = -2z + 1 \end{cases}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $(1;\ -1;\ -1)$
5	Найти угол между прямыми: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0; \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + x - 4 = 0; \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$
6	Показать, что прямая $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x = z + 1; \\ y = 1 - z \end{cases}$
7	Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-4;\ 3;\ 0)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x - 2y + z = 4; \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$
8	Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2;\ -3;\ 4)$ на ось Oz
9	Найти расстояние от точки $M(2;\ -1;\ 3)$ до прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$
10	Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$
11	Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2;\ -3;\ 4)$ на ось Oy
12	Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0; \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ с координатными плоскостями
13	Доказать, что прямая $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0; \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oy
14	Определить, при каком значении D прямая $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0; \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oz

Продолжение табл.

Вари-ант	Условие задачи
15	Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая была параллельна оси Oy
16	Составить уравнения движения точки $M(x;\ y;\ z)$, которая, двигаясь прямолинейно и равномерно, прошла расстояние от точки $M_1(-7;\ 12;\ 5)$ до точки $M_2(9;\ -4;\ -3)$ за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 4$
17	Даны вершины треугольника $A(3;\ 6;\ -7)$, $B(-5;\ 2;\ 3)$, $C(4;\ -7;\ -2)$. Составить параметрические уравнения прямой, содержащей его медиану, проведенную из вершины C
18	Даны вершины треугольника $A(3;\ -1;\ -1)$, $B(1;\ 2;\ -7)$, $C(-5;\ 14;\ -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B
19	Даны уравнения движения точки $M(x;\ y;\ z)$: $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 - t$. Определить расстояние, которое пройдет эта точки за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 7$
20	Даны прямые $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$ и $\dfrac{x-3}{l} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$. При каком значении l они пересекаются?
21	Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M(-1;\ 2;\ -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$
22	Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M(-4;\ -5;\ 3)$ и пересекает две прямые: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$ и $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-5}$
23	Даны уравнения движения точки $M(x;\ y;\ z)$: $\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = 5 + 3t, \\ z = -2t + 12. \end{cases}$ Определить модуль ее скорости
24	Даны вершины треугольника $A(1;\ -2;\ -4)$, $B(3;\ 1;\ -3)$, $C(5;\ 1;\ -7)$. Составить параметрические уравнения прямой, содержащей его высоту, опущенную из вершины B на противоположную сторону

Продолжение табл.

Вариант	Условие задачи
25	Составить уравнения движения точки $M(x; y; z)$, которая, имея начальное положение $M_0(3; -1; -5)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{s} = \{-2; 6; 3\}$ со скоростью $v = 21$
26	Точка $M(x; y; z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(20; -18; -32)$ в направлении, противоположном вектору $\vec{s} = \{3; -4; -12\}$, со скоростью $v = 26$. Составить уравнения движения точки M
27	Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая пересекала ось абсцисс
28	Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $\begin{cases} x = 3t - 7, \\ y = -2t + 4, \\ z = 3t + 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t - 8, \\ z = -t - 12 \end{cases}$
29	Определить, при каком значении D прямая $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0; \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oy
30	Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая была параллельна оси Ox

19. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ: ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ

19.1. СЛУЧАИ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Утверждение 3.4. Плоскость σ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая a:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

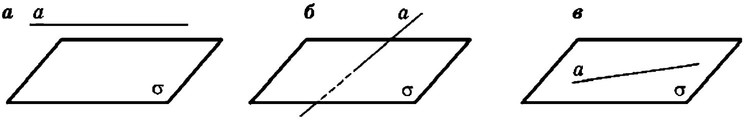


Рис. 96

в пространстве удовлетворяют одному и только одному из следующих трех условий:

1) прямая a и плоскость σ не имеют общих точек (рис. 96*а*), при этом коэффициенты данных уравнений удовлетворяют условиям:

$$Al + Bm + Cn = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0;$$

2) прямая a и плоскость σ пересекаются в единственной точке (рис. 96*б*), при этом коэффициенты данных уравнений удовлетворяют условию

$$Al + Bm + Cn \neq 0;$$

3) прямая a лежит в плоскости σ (рис. 96*в*), при этом коэффициенты данных уравнений удовлетворяют условиям:

$$Al + Bm + Cn = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Пример 3.12. Определить взаимное расположение прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{3}$ и плоскости $x + 2y - z = 0$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся аналитическими условиями, описанными в утверждении 3.4. Для этого запишем координаты точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащей данной прямой, координаты $\vec{s} = \{l; m; n\}$ ее направляющего вектора и координаты нормального вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$ данной плоскости. Имеем:

$$x_0 = 0,\ y_0 = -2,\ z_0 = 1,\ l = -1,\ m = 0,$$
$$n = 3,\ A = 1,\ B = 2,\ C = -1.$$

Свободный член уравнения плоскости $D = 0$. Таким образом, получаем:

$$Al + Bm + Cn = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = -4 \neq 0,$$

что означает, что прямая и плоскость имеют единственную точку пересечения.

19.2. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Рассмотрим плоскость σ в пространстве, заданную общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

и прямую a, заданную каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Согласно утверждению 3.4 (п. 19.1) прямая и плоскость пересекаются в единственной точке, если $Al + Bm + Cn \neq 0$. Предположим, что рассматриваемые прямая и плоскость удовлетворяют этому условию. В этом случае может быть вычислен угол α между прямой и плоскостью (рис. 97). *Углом между прямой* и *плоскостью* называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

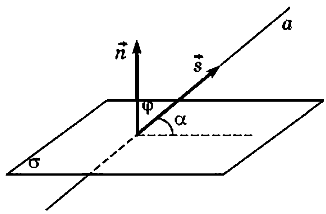


Рис. 97

Если $\vec{n}=\{A;B;C\}$ — нормальный вектор плоскости σ, то $\alpha = \pi/2 - \varphi$, где φ — угол, образованный направляющим вектором $\vec{s}=\{l;m;n\}$ прямой a и нормалью $\vec{n}$ плоскости σ.

Напомним определение скалярного произведения векторов:

$$\vec{s}\cdot\vec{n}=|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\varphi,$$

откуда получим

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Поскольку $\cos\varphi = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$, то синус угла между прямой и плоскостью может быть вычислен по формуле

$$\sin\alpha=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (108)$$

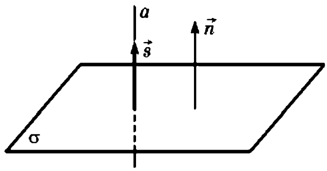


Рис. 98

Условие перпендикулярности прямой a:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

и плоскости σ:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ (рис. 98)}$$

равносильно условию коллинеарности векторов $\vec{n}=\{A; B; C\}$ и $\vec{s}=\{l; m; n\}$.

Из векторной алгебры известно, что векторы коллинеарны, если их координаты пропорциональны (см. формулу (4) из п. 1.2). Значит, условие перпендикулярности прямой a и плоскости σ можно записать в виде

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \tag{109}$$

З а м е ч а н и е 3.14. Всякую пропорцию вида

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

мы условимся понимать в смысле равенства

$$ad = bc$$

(подробнее см. замечание 3.10 из п. 16.2).

20. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

20.1. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К ЗАДАННОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть в пространстве задана некоторая точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость σ:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к плоскости σ:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поскольку искомая прямая перпендикулярна к плоскости, то ее направляющий вектор коллинеарен нормальному вектору плоскости, т. е. в качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор плоскости (рис. 99).

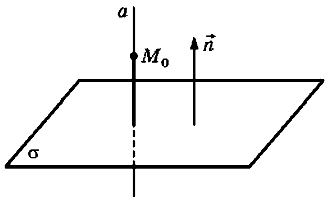


Рис. 99

Таким образом, получим канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной плоскости:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \qquad (110)$$

20.2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ЗАДАННОЙ ПРЯМОЙ

Пусть в пространстве заданы некоторая точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и прямая a:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к прямой a. В силу перпендикулярности заданной прямой и искомой плоскости (рис. 100) в качестве нормального вектора плоскости может быть выбран направляющий вектор $\vec{s}=\{l; m; n\}$ прямой a.

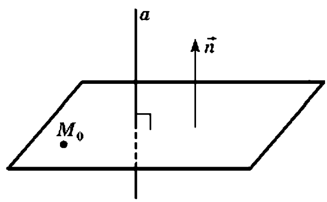


Рис. 100

Используя формулу для записи уравнения плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору (см. п. 13.1), запишем уравнение:

$$l \cdot (x - x_0) + m \cdot (y - y_0) + n \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (111)$$

Раскрыв в уравнении (111) скобки и приведя подобные, получим искомое уравнение.

20.3. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ПРЯМУЮ И ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ И НЕ ЛЕЖАЩУЮ НА ЭТОЙ ПРЯМОЙ ТОЧКУ

Пусть в пространстве задана некоторая прямая a:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(если уравнения прямой даны в другом виде, то необходимо найти координаты произвольной точки, принадлежащей этой прямой, и любой из ее направляющих векторов) и точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$, не лежащая на прямой a.

Составим уравнение плоскости σ, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и прямую a (рис. 101).

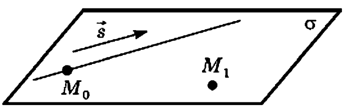


Рис. 101

Поскольку искомая плоскость σ проходит через прямую a, то, очевидно, что точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая прямой, принадлежит и плоскости σ. Таким образом, вектор $\overline{M_1M_0}$ и плоскость σ параллельны. Имеем: $M_1(x_1; y_1; z_1) \in \sigma$, $\vec{s} \| \sigma$, $\overline{M_1M_0} \| \sigma$ ($\vec{s} = \{l; m; n\}$ — направляющий вектор прямой a, $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1\}$, причем векторы $\vec{s}$ и $\overline{M_1M_0}$ не коллинеарны). Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум заданным неколлинеарным векторам (см. п. 13.2) и получим искомое уравнение плоскости σ:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad (112)$$

Если необходимо записать общее уравнение плоскости σ, то достаточно в равенстве (112) раскрыть определитель и привести подобные.

20.4. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ПРЯМУЮ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДРУГОЙ ДАННОЙ ПРЯМОЙ (ПРЯМЫЕ НЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ)

Пусть в пространстве заданы канонические уравнения непараллельной прямой a:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

и непараллельной прямой b:

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Составим уравнение плоскости σ, проходящей через прямую b параллельно прямой a (рис. 102).

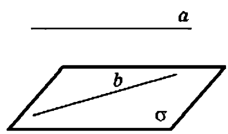


Рис. 102

Поскольку искомая плоскость проходит через прямую b, то любая из точек этой прямой будет принадлежать плоскости σ, пусть это точка $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Очевидно, что вектор $\vec{s}_2=\{l_2;m_2;n_2\}$ и плоскость σ параллельны. Согласно условию прямая a параллельна плоскости σ, поэтому ее направляющий вектор $\vec{s}_1=\{l_1;m_1;n_1\}$ и плоскость σ также параллельны. Имеем: $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)\in\sigma$, $\vec{s}_1\|\sigma$, $\vec{s}_2\|\sigma$, причем $\vec{s}_1\|\vec{s}_2$. Воспользуемся формулой (63) из п. 13.2 для записи уравнения плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум заданным неколлинеарным векторам. Получим уравнение искомой плоскости σ:

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{113}$$

Если необходимо записать общее уравнение плоскости σ, то достаточно в равенстве (113) раскрыть определитель и привести подобные.

20.5. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ПРЯМУЮ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ЗАДАННОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть в пространстве заданы прямая a:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

и плоскость σ:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через прямую a перпендикулярно к плоскости σ.

Обозначим искомую плоскость через ε (рис. 103). Поскольку плоскость ε проходит через прямую a, то $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\varepsilon$ и $\vec{s}=\{l;m;n\}\|\varepsilon$. В силу перпендикулярности плоскостей σ и ε нормальный вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$ плоскости σ будет параллелен плоскости ε. Таким образом, плоскость ε задана точкой и парой параллельных ей, но не коллинеарных между собой векторов.

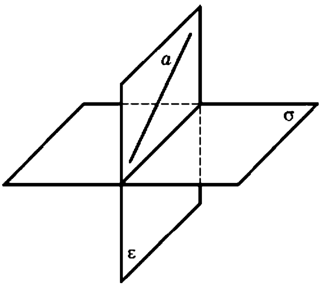


Рис. 103

Воспользуемся нужной формулой (63) из п. 13.2, получим уравнение искомой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \qquad (114)$$

20.6. УРАВНЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА, ОПУЩЕННОГО ИЗ ДАННОЙ ТОЧКИ НА ЗАДАННУЮ ПРЯМУЮ

Пусть в пространстве заданы точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и прямая a:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

причем точка M_1 не принадлежит данной прямой. Составим уравнения прямой b, удовлетворяющей следующим условиям: $M_1 \in b$, $a \perp b$.

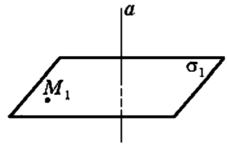


Рис. 104

Рассмотрим плоскость σ_1, проходящую через точку M_1 перпендикулярно прямой a (рис. 104). Воспользуемся формулой (111) и получим уравнение плоскости σ_1:

$$l \cdot (x - x_1) + m \cdot (y - y_1) + n \cdot (z - z_1) = 0. \qquad (115)$$

Проекция точки M_1 на прямую a может быть найдена как точка пересечения полученной плоскости (115) и данной прямой a. Для этого достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} l \cdot (x - x_1) + m \cdot (y - y_1) + n \cdot (z - z_1) = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases} \qquad (116)$$

Предположим, что система (116) решена и искомая проекция точки M_1 на прямую a имеет координаты $P(x_2;$ $y_2;$ $z_2)$.

Тогда уравнения перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую a, можно составить как уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $P(x_2; y_2; z_2)$:

$$b: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (117)$$

Пример 3.13. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $B(-1; 3; 0)$ на прямую a, заданную каноническими уравнениями

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 3}{0}.$$

Р е ш е н и е. Для решения задачи сначала найдем проекцию P точки B на прямую a.

Составим уравнение плоскости σ_1, проходящей через точку B перпендикулярно прямой a. Запишем значения коэффициентов:

$$x_0 = 0,\ y_0 = -1,\ z_0 = 3,\ x_1 = -1,\ y_1 = 3,$$
$$z_1 = 0,\ l = 2,\ m = -1,\ n = 0.$$

Воспользуемся формулой (115) и получим:

$$2 \cdot (x + 1) - 1 \cdot (y - 3) + 0 \cdot (z - 0) = 0. \qquad (118)$$

Раскроем скобки в равенстве (118), приведем подобные и запишем общее уравнение плоскости σ_1:

$$2x - y + 5 = 0. \qquad (119)$$

Теперь для определения координат проекции P достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0, \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{0}. \end{cases} \qquad (120)$$

Решение системы (120) начнем с записи уравнений прямой, входящих в систему, в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -t - 1, \\ z = 3. \end{cases} \qquad (121)$$

Теперь подставим полученные выражения в первое уравнение системы (120), решим его и получим:

$$t = -\frac{6}{5}.$$

Далее подставим значение найденного параметра t в уравнения (121) и найдем $P\left(-\frac{12}{5}; \frac{1}{5}; 3\right)$.

Поскольку перпендикуляр, опущенный из точки $B(-1;$ $3;\ 0)$ на прямую a, проходит через точку $P\left(-\frac{12}{5}; \frac{1}{5}; 3\right)$, то для записи уравнений искомого перпендикуляра воспользуемся уравнениями (117), и получим:

$$\frac{x+1}{\frac{-12}{5}+1} = \frac{y-3}{\frac{1}{5}-3} = \frac{z}{3}. \qquad (122)$$

Проведем алгебраические преобразования в уравнениях (122) и получим уравнения искомого перпендикуляра в виде:

$$\frac{x+1}{-7}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z}{15}. \tag{123}$$

20.7. КРАТЧАЙШЕЕ РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в пространстве заданы точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и прямая a:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Вычислим кратчайшее расстояние от данной точки до заданной прямой, т. е. найдем длину перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую a. Координаты проекции точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на прямую a найдем, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0; \\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases} \tag{124}$$

Предположим, что система (124) решена и координаты проекции найдены и имеют вид: $P(x_2; y_2; z_2)$. Кратчайшее расстояние от точки до прямой можно найти, вычислив расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до точки $P(x_2; y_2; z_2)$ по формуле

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}. \tag{125}$$

20.8. ОБЩИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К СКРЕЩИВАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ

Пусть в пространстве заданы две скрещивающиеся прямые a:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

и прямая b:

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Необходимо составить уравнения прямой c, удовлетворяющей условиям: $c \perp a$, $c \perp b$.

Составим уравнение плоскости σ_1, проходящей через прямую b параллельно прямой a (рис. 105). Получение такого уравнения описано в п. 20.4. Предположим, что это уравнение найдено и имеет вид

$$\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \tag{126}$$

Составим теперь уравнение плоскости σ_2, проходящей через прямую a перпендикулярно к полученной плоскости σ_1 (рис. 106). Получение такого уравнения описано в п. 20.5. Предположим, что это уравнение найдено и имеет вид

$$\sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{127}$$

Составим уравнение плоскости σ_3, проходящей через прямую b перпендикулярно к плоскости σ_1 (рис. 107).

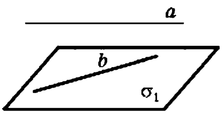


Рис. 105

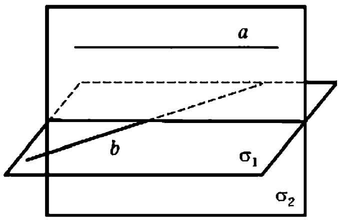


Рис. 106

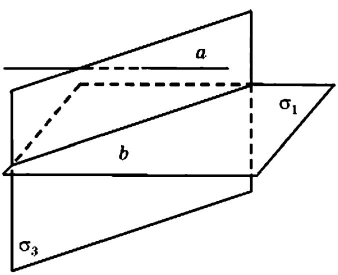


Рис. 107

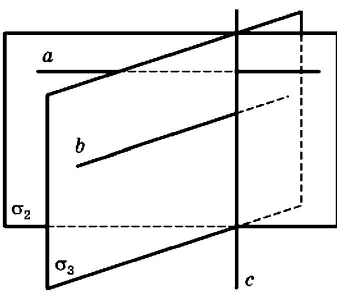


Рис. 108

Получение такого уравнения описано в п. 20.5. Предположим, что это уравнение найдено и имеет вид

$$\sigma_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \qquad (128)$$

Уравнения искомой прямой c теперь могут быть получены как пересечение плоскостей σ_2 и σ_3 (см. рис. 108). Запишем уравнения прямой c в виде:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \qquad (129)$$

20.9. КРАТЧАЙШЕЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Пусть в пространстве заданы две скрещивающиеся прямые a: $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ и b: $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$. Вычислим кратчайшее расстояние между прямыми a и b.

Составим уравнение плоскости σ, проходящей через прямую b параллельно прямой a.

Предположим, что уравнение плоскости σ найдено и имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Теперь кратчайшее расстояние d между прямыми a и b (рис. 109) может быть найдено как расстояние от произвольной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей прямой a, до плоскости σ. Расстояние от точки до плоскости вычислим по формуле (72) из п. 14.3:

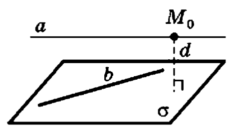


Рис. 109

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (130)$$

Пример 3.14. Проверить, что прямые a: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+3}{-3}$ и b: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{0}$ скрещиваются, и вычислить кратчайшее расстояние между ними.

Р е ш е н и е. Согласно утверждению 3.3 (п. 17) прямые $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ не лежат в одной плоскости, т. е. скрещиваются, если определитель матрицы $\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$ не равен нулю.

Из условий задачи имеем:

$$x_1=1,\ y_1=-2,\ z_1=-3,\ l_1=-2,\ m_1=1,\ n_1=-3,$$
$$x_2=0,\ y_2=-1,\ z_2=2,\ l_2=3,\ m_2=-1,\ n_2=0.$$

Вычислим нужный определитель:

$$\begin{vmatrix} 0-1 & -1-(-2) & 2-(-3) \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-11\neq 0.$$

В силу того, что определитель не равен нулю, заданные прямые скрещиваются.

Составим уравнение плоскости σ, проходящей через прямую b параллельно прямой a. Для этого воспользуемся формулой (113) и получим:

$$\sigma: \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0. \qquad (131)$$

Раскроем определитель в равенстве (131), приведем подобные и запишем уравнение плоскости σ в виде

$$3x+9y+z+7=0.$$

В качестве точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащей прямой a, выберем точку с координатами (1; −2; −3).

Вычислим расстояние от точки $M_0(1;\ -2;\ -3)$ до плоскости σ:

$$3x+9y+z+7=0$$

по формуле (130) и получим:

$$d=\frac{|3-18-3+7|}{\sqrt{9+81+1}}=\frac{11}{\sqrt{91}}=\frac{11\sqrt{91}}{91}. \qquad (132)$$

21. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

21.1. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 3.15. В пространстве заданы плоскость σ: $2x - y + 3z - 1 = 0$ и прямая a: $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-2}$. Определить взаимное расположение прямой и плоскости: прямая лежит в плоскости или прямая и плоскость не имеют общих точек (параллельны), или прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

Если прямая принадлежит плоскости, то составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости.

Если прямая и плоскость параллельны, то составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую параллельно данной плоскости.

Если прямая и плоскость пересекаются, то найти угол между прямой и плоскостью.

Решение. Для того чтобы определить взаимное расположение прямой и плоскости, достаточно проверить выполнение условий утверждения 3.4. Запишем значения коэффициентов:

$$x_0 = 2,\ y_0 = 0,\ z_0 = -1,\ l = 3,\ m = 0,\ n = -2,$$
$$A = 2,\ B = -1,\ C = 3,\ D = -1$$

и получим:

$$Al + Bm + Cn = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = 0.$$

Значит, либо прямая и плоскость параллельны, либо прямая лежит в плоскости.

Вычислим значение выражения:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) - 1 = 0.$$

Значит, прямая a принадлежит плоскости σ.

Составим уравнение плоскости ε, проходящей через прямую a перпендикулярно к плоскости σ. Воспользуемся формулой (114) и получим:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-(-1) \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (133)$$

Вычислим определитель (133), раскроем скобки, приведем подобные и запишем уравнение искомой плоскости ε:

$$2x + 13y + 3z - 1 = 0. \qquad (134)$$

Пример 3.16. В пространстве заданы точка $M(5; -4; 0)$, прямая a: $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2}$ и плоскость σ: $7x - y + 2z + 6 = 0$.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M перпендикулярно к заданной плоскости σ.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку M перпендикулярно к заданной прямой a.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую a и не лежащую на ней точку M.

4. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из данной точки M на заданную прямую a.

5. Вычислить расстояние от точки M до прямой a.

Решение.

1. Для составления уравнения прямой, проходящей через данную точку M перпендикулярно к заданной плоскости σ, воспользуемся формулой (110). Выпишем значения коэффициентов:

$$x_0 = 5,\ y_0 = -4,\ z_0 = 0,\ A = 7,\ B = -1,\ C = 2.$$

Тогда уравнения искомой прямой:

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z}{2}.$$

2. Для составления уравнения плоскости, проходящей через данную точку M перпендикулярно к заданной прямой a, воспользуемся формулой (111). Выпишем значения коэффициентов:

$$x_0 = 5,\ y_0 = -4,\ z_0 = 0,\ l = -3,\ m = 4,\ n = 2.$$

Тогда уравнение искомой плоскости:

$$-3x + 4y + 2z + 31 = 0.$$

3. Для составления уравнения плоскости, проходящей через данную прямую a и не лежащую на ней точку M, воспользуемся формулой (112). Выпишем значения коэффициентов:

$$x_0 = -2,\ y_0 = 1,\ z_0 = -1,\ l = -3,\ m = 4,$$
$$n = 2,\ x_1 = 5,\ y_1 = -4,\ z_1 = 0.$$

Подставив данные в формулу (112), получим:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+4 & z \\ -2-5 & 1+4 & -1-0 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем полученный определитель, приведем подобные и запишем уравнение искомой плоскости:

$$14x + 17y - 13z - 2 = 0.$$

4. Получение уравнений перпендикуляра, опущенного из данной точки M на заданную прямую a, описано в примере 3.13 из п. 20.6. Воспользуемся формулой (115) и получим уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно к прямой a:

$$3x - 4y - 2z - 31 = 0.$$

Далее, решив систему уравнений, аналогичную системе уравнений (116), найдем координаты проекции точки M на прямую a. Получим

$$P\left(\frac{59}{29}; -\frac{127}{29}; -\frac{107}{29}\right).$$

Воспользовавшись формулами (117) для записи уравнений прямой, проходящей через точки M и P, получим уравнения искомого перпендикуляра:

$$\frac{x-5}{116} = \frac{y+4}{11} = \frac{z}{107}.$$

5. Поскольку координаты проекции точки M на прямую a найдены в предыдущем пункте задачи, т. е.

$$P\left(\frac{59}{29}; -\frac{127}{29}; -\frac{107}{29}\right)$$

— проекция точки M на прямую a, то расстояние от точки M до точки P можно вычислить по формуле расстояния между двумя точками в пространстве:

$$d = \sqrt{\left(5-\frac{59}{29}\right)^2 + \left(-4+\frac{127}{29}\right)^2 + \left(0+\frac{107}{29}\right)^2} = \frac{\sqrt{18966}}{29}.$$

Пример 3.17. Даны уравнения прямых a: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+1}{3}$ и b: $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{4}$. Проверить, что данные прямые скрещиваются; составить уравнения общего перпендикуляра к данным прямым; вычислить кратчайшее расстояние между прямыми.

Решение. Согласно утверждению 3.3 (п. 17) прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2} == \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

не лежат в одной плоскости, т. е. скрещиваются, если определитель матрицы $\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$ не равен нулю.

Из условий задачи имеем:

$$x_1 = 3,\ y_1 = -4,\ z_1 = -1,\ l_1 = -2,\ m_1 = -1,\ n_1 = 3,$$
$$x_2 = 0,\ y_2 = -2,\ z_2 = 1,\ l_2 = -1,\ m_2 = 0,\ n_2 = 4.$$

Вычислим нужный определитель:

$$\begin{vmatrix} 0-3 & -2-(-4) & 1-(-1) \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

В силу того, что определитель не равен нулю, заданные прямые скрещиваются.

Составим уравнение плоскости σ_1, проходящей через прямую b параллельно прямой a. Для этого воспользуемся формулой (113) и получим:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (135)$$

Раскроем определитель в равенстве (135) и приведем подобные.

Запишем полученное уравнение плоскости σ_1:

$$4x - 5y + z - 11 = 0.$$

Составим уравнение плоскости σ_2, проходящей через прямую a перпендикулярно к плоскости σ_1, для чего воспользуемся формулой (114) и запишем:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z+1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (136)$$

Раскроем определитель в равенстве (136), приведем подобные и получим уравнение искомой плоскости σ_2:

$$x + y + z + 2 = 0.$$

Составим уравнение плоскости σ_3, проходящей через прямую b перпендикулярно к плоскости σ_1, аналогично тому, как было составлено уравнение плоскости σ_2.

Получим, что σ_3:

$$20x + 17y + 5z + 29 = 0.$$

Таким образом, уравнения искомого перпендикуляра запишем в виде:

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ 20x + 17y + 5z + 29 = 0. \end{cases} \qquad (137)$$

В качестве точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащей прямой a, выберем точку с координатами $(3;\ -4;\ 1)$.

Вычислим расстояние от точки $M_0(3;\ -4;\ 1)$ до плоскости σ_1:

$$4x - 5y + z - 11 = 0$$

по формуле (130) и получим:

$$d = \frac{|4 \cdot 3 - 5 \cdot (-4) + 1 - 11|}{\sqrt{16 + 25 + 1}} = \frac{22}{\sqrt{42}} = \frac{11\sqrt{42}}{21}. \qquad (138)$$

21.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В каком случае прямая и плоскость не имеют общих точек?
2. В каком случае прямая и плоскость пресекаются в единственной точке?
3. При каких условиях прямая лежит в плоскости?
4. Как найти угол между прямой и плоскостью?
5. Чему равносильно условие перпендикулярности прямой и плоскости? Запишите это условие.
6. Как выглядят канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной плоскости.
7. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной прямой.
8. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и заданную точку, не лежащую на этой прямой.
9. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной другой данной прямой.
10. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной к заданной плоскости.
11. Запишите уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на заданную прямую.
12. Как найти кратчайшее расстояние от точки до прямой в пространстве?
13. Запишите уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым.
14. Как найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми?

21.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ» (ЗАДАЧИ 1–3)

Задача 1. В пространстве заданы плоскость σ: $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая a: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$. Определить взаимное расположение прямой и плоскости: прямая лежит в плоскости или прямая и плоскость не имеют общих точек (параллельны), или прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

Если прямая принадлежит плоскости, то составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости.

Если прямая и плоскость параллельны, то составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую параллельно данной плоскости.

Если прямая и плоскость пересекаются, то найти угол между прямой и плоскостью.

Исходные данные к задаче 1

Вариант	Плоскость и прямая	Вариант	Плоскость и прямая
1	$\sigma: x-2y+z+1=0,$ $a: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-5}{3}$	2	$\sigma: x+2y-z=0,$ $a: \frac{x}{-1}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-2}{16}$
3	$\sigma: 3x+4y+5z+2=0,$ $a: \frac{x}{-3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-6}{4}$	4	$\sigma: -2x+y+3z+2=0,$ $a: \frac{x-3}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{6}$
5	$\sigma: -5x+y+3z=0,$ $a: \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+7}{7}$	6	$\sigma: 2x+3y-z=0,$ $a: \frac{x}{2}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-11}{14}$
7	$\sigma: 3x+4y+2z+5=0,$ $a: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$	8	$\sigma: 4x+5y-z=0,$ $a: \frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{0}$
9	$\sigma: x+y-3z=0,$ $a: \frac{x+4}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{2}$	10	$\sigma: x+4y-3z-2=0,$ $a: \frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-3}$
11	$\sigma: 3x-5y+6=0,$ $a: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{1}$	12	$\sigma: 2x-y+2z-1=0,$ $a: \frac{x+3}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-1}$
13	$\sigma: 4x+2y-7z-8=0,$ $a: \frac{x}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{3}$	14	$\sigma: x+y+2=0,$ $a: \frac{x+2}{-6}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z-4}{-6}$
15	$\sigma: 3x-7y+z-1=0,$ $a: \frac{x+3}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$	16	$\sigma: 5x-y-3z-1=0,$ $a: \frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{-1}$
17	$\sigma: 2y-3z+4=0,$ $a: \frac{x+1}{0}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{3}$	18	$\sigma: 3x-2y+2z=0,$ $a: \frac{x+10}{2}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-11}{-3}$
19	$\sigma: 3x+5y-z=0,$ $a: \frac{x}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{2}$	20	$\sigma: 2x+y-z+8=0,$ $a: \frac{x+3}{12}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-2}{4}$

Продолжение табл.

Вариант	Плоскость и прямая	Вариант	Плоскость и прямая
21	σ: $4y + 5z + 3 = 0$, a: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-7}{3}$	22	σ: $7x + y + z = 0$, a: $\frac{x-2}{-6} = \frac{y+3}{10} = \frac{z}{17}$
23	σ: $2x + 4z - 1 = 0$, a: $\frac{x+5}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-4}$	24	σ: $5y - z + 6 = 0$, a: $\frac{x+7}{-2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+4}{-1}$
25	σ: $3x + 2y + z + 1 = 0$, a: $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{7} = \frac{z+2}{10}$	26	σ: $2x - 2y = 0$, a: $\frac{x+1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+7}{4}$
27	σ: $x - 2y + 3z = 0$, a: $\frac{x}{18} = \frac{y-1}{12} = \frac{z+5}{7}$	28	σ: $3y - 2z + 1 = 0$, a: $\frac{x+5}{-1} = \frac{y-5}{0} = \frac{z+4}{-2}$
29	σ: $x + 7y + 4z - 9 = 0$, a: $\frac{x}{23} = \frac{y+2}{11} = \frac{z+2}{14}$	30	σ: $2x + 5z = 0$, a: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{4}$

Задача 2. В пространстве заданы точка $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$, прямая a: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскость σ: $Ax + By + Cz + D = 0$.

1. Составить уравнения прямой, проходящей через данную точку M перпендикулярно к заданной плоскости σ.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку M перпендикулярно к заданной прямой a.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую a и не лежащую на ней точку M.
4. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки M на заданную прямую a.
5. Вычислить расстояние от точки M до прямой a.

Исходные данные к задаче 2

Вариант	Точка, прямая и плоскость	Вариант	Точка, прямая и плоскость
1	$M(3;\ 3;\ 0)$, a: $\frac{x+5}{4} = \frac{y-6}{1} = \frac{z}{-3}$, σ: $2x - 4y - 4z + 1 = 0$	2	$M(-1;\ 2;\ 0)$, a: $\frac{x-5}{4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z}{0}$, σ: $2x - 3y + 4z = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Точка, прямая и плоскость	Вариант	Точка, прямая и плоскость
3	$M(1; 7; 4)$, a: $\frac{x-6}{26}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-2}{-1}$, σ: $4y-5z-1=0$	4	$M(2; -1; 2)$, a: $\frac{x+8}{7}=\frac{y+22}{-4}=\frac{z-4}{0}$, σ: $x+y-2z+6=0$
5	$M(3; 0; -3)$, a: $\frac{x}{6}=\frac{y-1}{19}=\frac{z+1}{1}$, σ: $9x+y+9=0$	6	$M(-3; 2; 0)$, a: $\frac{x+5}{-2}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-4}{-1}$, σ: $2x+5y-6z-1=0$
7	$M(4; 4; -4)$, a: $\frac{x+6}{-4}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-1}{2}$, σ: $x-4y+3z+3=0$	8	$M(0; 0; 11)$, $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{-6}=\frac{z-1}{0}$, σ: $x+5y-z=0$
9	$M(0; -4; 5)$, a: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{1}$, σ: $2x-z=0$	10	$M(7; 1; 1)$, $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z-3}{0}$, σ: $y-2z-5x+2=0$
11	$M(1; 0; -6)$, a: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{17}=\frac{z-3}{6}$, σ: $3x-4y+5z+4=0$	12	$M(6; 5; -6)$ a: $\frac{x+2}{5}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z}{-4}$, σ: $x-y+7z=0$
13	$M(3; -3; 1)$, a: $\frac{x-9}{7}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+8}{-8}$, σ: $x+3y-z=0$	14	$M(5; -1; 4)$, a: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+10}{3}=\frac{z-4}{4}$, σ: $5y-z-3=0$
15	$M(2; -1; 0)$, a: $\frac{x-5}{-2}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{0}$, σ: $x+3y-z-4=0$	16	$M(-3; 4; 5)$, a: $\frac{x-12}{0}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-5}{5}$, σ: $7x-3y+4z=0$
17	$M(-5; 1; 3)$, a: $\frac{x}{-11}=\frac{y-7}{-15}=\frac{z}{5}$, σ: $5x-z+9=0$	18	$M(1; 0; -1)$, a: $\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-2}$, σ: $4x+2y+4z+1=0$
19	$M(0; 5; -1)$, a: $\frac{x-7}{-5}=\frac{y+4}{22}=\frac{z-6}{18}$, σ: $2x-z=0$	20	$M(5; -1; 7)$, a: $\frac{x-10}{-4}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+6}{3}$, σ: $5x+2y+4z-4=0$
21	$M(3; 4; 2)$, a: $\frac{x+5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$, σ: $2x+5y+3=0$	22	$M(0; -5; 1)$, a: $\frac{x+2}{0}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+4}{-1}$, σ: $2x-y+2z-4=0$

Продолжение табл.

Вариант	Точка, прямая и плоскость	Вариант	Точка, прямая и плоскость
23	$M(4; -3; 1)$, $\frac{x+6}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{3}$, σ: $5x+y-2z+1=0$	24	$M(-2; 0; 1)$, $\frac{x-12}{2}=\frac{y-24}{-1}=\frac{z+11}{6}$, σ: $x+5y-5=0$
25	$M(2; 0; 4)$, a: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-6}{-5}$, σ: $x-2y+z-3=0$	26	$M(2; 5; 0)$, a: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{12}$, σ: $3x+y+8=0$
27	$M(2; -3; 7)$, a: $\frac{x-11}{1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{6}$, σ: $x+2y-1=0$	28	$M(5; 1; -2)$, a: $\frac{x+2}{2}=\frac{y+16}{5}=\frac{z-1}{2}$, σ: $3x-5y+4z=0$
29	$M(0; -2; 3)$, a: $\frac{x}{2}=\frac{y+9}{2}=\frac{z-3}{-7}$, σ: $5x+y-2z=0$	30	$M(-3; 0; 4)$, a: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{5}$, σ: $4x-2y+z-1=0$

Задача 3. Даны уравнения прямых a: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и b: $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$. Проверить, что данные прямые скрещиваются; составить уравнения общего перпендикуляра к данным прямым; вычислить кратчайшее расстояние между прямыми.

Исходные данные к задаче 3

Вариант	Уравнения прямых	Вариант	Уравнения прямых
1	a: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-5}{3}$, b: $\frac{x}{-1}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-2}{16}$	2	a: $\frac{x}{-3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-6}{4}$, b: $\frac{x-3}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{6}$
3	a: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+7}{7}$, b: $\frac{x}{2}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-11}{14}$	4	a: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$, b: $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{0}$

Продолжение табл.

Вари-ант	Уравнения прямых	Вари-ант	Уравнения прямых
5	a: $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$, b: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-3}$	6	a: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-5}{1}$, b: $\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+5}{-1}$
7	a: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{3}$, b: $\dfrac{x+2}{-6}=\dfrac{y-3}{-14}=\dfrac{z-4}{-6}$	8	a: $\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$, b: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$
9	a: $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{3}$, b: $\dfrac{x+10}{2}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-11}{-3}$	10	a: $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+5}{2}$, b: $\dfrac{x+3}{12}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-2}{4}$
11	a: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-7}{3}$, b: $\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y+3}{10}=\dfrac{z}{17}$	12	a: $\dfrac{x+5}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$, b: $\dfrac{x+7}{-2}=\dfrac{y-7}{3}=\dfrac{z+4}{-1}$
13	a: $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z+2}{10}$, b: $\dfrac{x+1}{9}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+7}{4}$	14	a: $\dfrac{x}{18}=\dfrac{y-1}{12}=\dfrac{z+5}{7}$, b: $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{5}$
15	a: $\dfrac{x+5}{-1}=\dfrac{y-5}{0}=\dfrac{z+4}{-2}$, b: $\dfrac{x}{23}=\dfrac{y+2}{11}=\dfrac{z+2}{14}$	16	a: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$, b: $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z}{-3}$
17	a: $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+5}{-5}=\dfrac{z}{0}$, b: $\dfrac{x-6}{26}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z-2}{-1}$	18	a: $\dfrac{x+8}{7}=\dfrac{y+22}{-4}=\dfrac{z-4}{0}$, b: $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-1}{19}=\dfrac{z+1}{1}$
19	a: $\dfrac{x+5}{-2}=\dfrac{y+3}{-7}=\dfrac{z-4}{-1}$, b: $\dfrac{x+6}{-4}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z-1}{2}$	20	a: $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z-1}{0}$, b: $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{1}$
21	a: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z-3}{0}$, b: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{17}=\dfrac{z-3}{6}$	22	a: $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-2}{-7}=\dfrac{z}{-4}$, b: $\dfrac{x-9}{7}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+8}{-8}$

Продолжение табл.

Вари-ант	Уравнения прямых	Вари-ант	Уравнения прямых
23	a: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+10}{3}=\frac{z-4}{4}$, b: $\frac{x-5}{-2}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{0}$	24	a: $\frac{x-12}{0}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-5}{5}$, b: $\frac{x}{-11}=\frac{y-7}{-15}=\frac{z}{5}$
25	a: $\frac{x+4}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{2}$, b: $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-3}$	26	a: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{1}$, b: $\frac{x+3}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-1}$
27	a: $\frac{x+2}{0}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+4}{-1}$, b: $\frac{x+6}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{3}$	28	a: $\frac{x-12}{2}=\frac{y-24}{-1}=\frac{z+11}{6}$, b: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-6}{-5}$
29	a: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{12}$, b: $\frac{x-11}{1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{6}$	30	a: $\frac{x+2}{2}=\frac{y+16}{5}=\frac{z-1}{2}$, b: $\frac{x}{2}=\frac{y+9}{2}=\frac{z-3}{-7}$

21.4. ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ (ЗАДАЧА 4)

Задача 4. Решить задачу согласно номеру своего варианта.

Исходные данные к задаче 4

Вари-ант	Условие задачи
1	Найти угол между прямой $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$
2	Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$
3	Написать уравнения прямой, проходящей через начало координат и составляющей равные углы с плоскостями $4y = 3x$, $y = 0$ и $z = 0$. Найти эти углы

Продолжение табл.

Вари-ант	Условие задачи
4	Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$
5	Показать, что прямые $\begin{cases}x=z-2,\\ y=2z+1\end{cases}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, в которой они расположены
6	Из точки $P(2;\ 3;\ -5)$ на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания
7	На плоскости $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ найти такую точку M, чтобы прямая OM составляла с осями координат равные углы
8	Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $P(1;\ -4;\ 2)$ и $Q(7;\ 1;\ -5)$
9	Найти уравнения проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на плоскость $x + y + 2z - 5 = 0$
10	Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ -4;\ -1)$ и середину отрезка прямой $\begin{cases}3x+4y+5z-26=0,\\ 3x-3y-2z-5=0,\end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x + 3y - 4z + 11 = 0$ и $5x + 3y - 4z - 41 = 0$
11	Найти точку Q, симметричную точке $P(4;\ 1;\ 6)$ относительно прямой $\begin{cases}x-y-4z+12=0,\\ 2x+y-2z+3=0\end{cases}$
12	Найти точку Q, симметричную точке $P(2;\ -5;\ 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;\ 4;\ 6)$ и $M_2(-2;\ -17;\ -8)$
13	Найти точку Q, симметричную точке $P(1;\ 3;\ -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$
14	Убедившись, что прямые $\begin{cases}2x+2y-z-10=0,\\ x-y-z-22=0\end{cases}$ и $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние между ними

Продолжение табл.

Вариант	Условие задачи
15	Найти точку Q, симметричную точке $P(3; -4; -6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ и $M_3(10; -7; 1)$
16	Найти точку Q, симметричную точке $P(-3; 2; 5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0, \\ 5x-3y+2z+5=0 \end{cases}$
17	Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$
18	Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$ и $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$
19	Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$ и $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$
20	Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$
21	Найти уравнения проекции прямой $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$
22	Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=2t+3, \\ z=-t-2 \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$

Продолжение табл.

Вариант	Условие задачи
23	Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$
24	Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t+2, \\ z=2t-3 \end{cases}$ и точку $M_1(2; -2; 1)$
25	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$
26	Точка $M(x; y; z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(15; -24; -16)$ со скоростью $v = 12$ в направлении вектора $\vec{s}=\{-2;2;1\}$. Убедившись, что траектория точки M пересекает плоскость $3x + 4y + 7z - 17 = 0$, найти точку P их пересечения
27	Точка $M(x; y; z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(28; -30; -27)$ со скоростью $v = 12{,}5$ по перпендикуляру, опущенному из точки M_0 на плоскость $15x - 16y - 12z + 26 = 0$. Составить уравнения движения точки M и найти длину отрезка M_0P
28	Точка $M(x; y; z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(11; -21; 20)$ со скоростью $v = 12$ в направлении вектора $\vec{s}=\{-1;2;-2\}$. Определить, за какое время она пройдет отрезок своей траектории, заключенный между параллельными плоскостями $2x + 3y + 5z - 41 = 0$ и $2x + 3y + 5z + 31 = 0$
29	На плоскости xOz найти такую точку P, разность расстояний которой до точек $M_1(3; 2; -5)$ и $M_2(8; -4; -13)$ была бы наибольшей
30	На плоскости $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(3; -4; 7)$ и $B(-5; -14; 17)$ была бы наименьшей

22. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 3.1. Уравнение вида $F(x, y, z) = 0$ называется *уравнением поверхности*, а множество точек пространства, удовлетворяющих этому уравнению, называется *поверхностью*.

Например, $Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость в пространстве, $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ — сфера с центром в точке (a, b, c) и радиусом R.

Определение 3.2. Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени вида:

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \end{gathered} \tag{139}$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{00}$ — действительные числа.

Уравнение (139) может и не определять действительного геометрического образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет *мнимую* поверхность второго порядка.

В прямоугольной системе координат уравнение (139) в зависимости от коэффициентов приводится к каноническому виду (канонические уравнения будут приведены ниже), каждому из которых соответствует определенный класс поверхностей.

Для изучения формы поверхности удобно задавать ее в прямоугольной системе координат и использовать метод сечений.

Сущность этого метода состоит в следующем: поверхность рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям или самими координатными плоскостями, определяются линии пересечения поверхности с этими плоскостями, и по виду этих линий судят о форме поверхности.

Пример 3.18. Пусть дана поверхность второго порядка, заданная уравнением $x^2 + y^2 = z^2$. Исследовать форму поверхности с помощью метода плоских сечений.

Р е ш е н и е. Рассмотрим пересечение этой поверхности плоскостью $z = t$, параллельной плоскости Oxy и проходящей через точку (0; 0; t), т. е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = t, \end{cases} \quad z = t, \; x^2 + y^2 = t^2.$$

Таким образом, в плоскости $z = t$ мы получим кривую, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = t^2,$$

а это есть окружность радиуса t. Причем, чем больше t, тем больше радиус окружности, полученной в сечении.

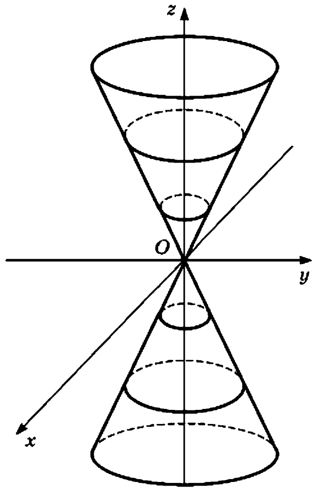


Рис. 110

Пересечем поверхность координатной плоскостью $x = = 0$, т. е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x = 0, \end{cases} \quad x = 0, \; y^2 = z^2$$

или $y = \pm z$.

Таким образом, в координатной плоскости Oyz мы получим пару прямых, пересекающихся в начале координат.

Аналогично, если пересечь поверхность координатной плоскостью $y = 0$, получим пару пересекающихся прямых $x = \pm z$.

Следовательно, получается поверхность, называемая, как мы выясним далее, конусом (рис. 110).

22.1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Зададим в пространстве некоторую плоскость π и возьмем на ней некоторую кривую L, кроме того, рассмотрим направление в пространстве, которое определяется вектором $\vec{k}$, непараллельным плоскости π.

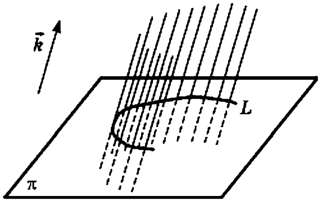


Рис. 111

Через каждую точку кривой проведем прямые, параллельные вектору $\vec{k}$ (рис. 111). Полученная таким образом поверхность в пространстве называется *цилиндрической поверхностью*, или *цилиндром*. L — называется *направляющей* цилиндра, а прямые параллельные вектору $\vec{k}$ — *образующими* цилиндра. Если L — кривая второго порядка, то цилиндр называется *цилиндром второго порядка*.

Теорема 3.1. Пусть в прямоугольной системе координат направляющая цилиндрической поверхности задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$ и пусть все образующие параллельны оси Oz, тогда уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей, т. е. $\varphi(x, y) = 0$.

Следствие. Если в уравнении $F(x, y, z) = 0$ отсутствует одна текущая координата, то уравнение определяет цилиндрическую поверхность, причем:

а) $\varphi(x, y) = 0$ — цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси Oz (см. рис. 112);

б) $\varphi(x, z) = 0$ — цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси Oy (см. рис. 113);

в) $\varphi(y, z) = 0$ — цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси Ox (см. рис. 114).

Различают *три типа цилиндров* второго порядка:

1. Эллиптический (см. цв. вкл., ил. 2).
2. Гиперболический (см. цв. вкл., ил. 1).
3. Параболический (см. цв. вкл., ил. 3).

Канонические уравнения соответствующих цилиндров второго порядка (в случае, когда их образующие параллельны оси Oz):

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр;

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр;

$y^2 = 2px$ — параболический цилиндр;

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей;

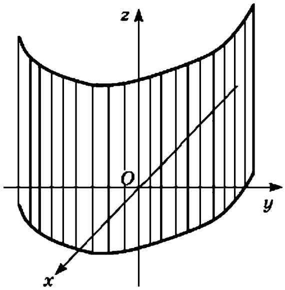


Рис. 112

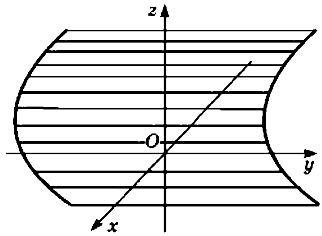


Рис. 113

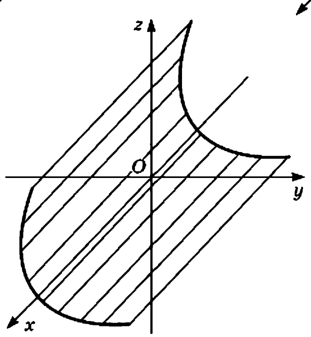


Рис. 114

$x^2 - a^2 = 0$ — пара параллельных плоскостей;

$x^2 = 0$ — пара совпадающих плоскостей Oyz;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллиптический цилиндр;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся по действительной прямой Oz плоскостей;

$x^2 + a^2 = 0$ — пара мнимых параллельных плоскостей.

Пример 3.19. Построить поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

Р е ш е н и е. Заданное уравнение определяет эллиптический цилиндр, направляющей служит эллипс, образующие параллельны оси Oy (см. Следствие б)). Построим эту поверхность.

Сначала в плоскости Oxz построим эллипс, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

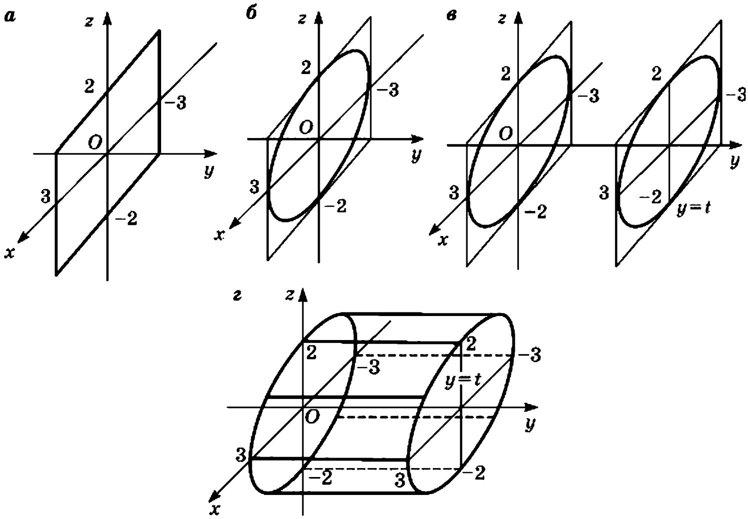


Рис. 115

Уравнение задает эллипс с полуосями $a = 3$ и $c = 2$. Для построения отложим от начала координат в обе стороны расстояние $a = 3$ на оси Ox и $c = 2$ на оси Oz. Используя полученные точки, построим прямоугольник со сторонами $2a = 6$ и $2c = 4$ (проведем через точки ± 3 на оси Ox прямые параллельные оси Oz, а через точки ± 2 на оси Oz прямые параллельные оси Ox). Таким образом, на плоскости получим параллелограмм (рис. 115*а*), в который впишем эллипс (рис. 115*б*). Затем в плоскости $y = t$ (плоскость $y = t$ параллельна плоскости Oxz) построим еще один такой же эллипс (рис. 115*в*) и проведем образующие. Учитывая видимые и невидимые линии, окончательно построим эллиптический цилиндр (рис. 115*г* и цв. вкл., ил. 2).

Пример 3.20. Построить поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение определяет гиперболический цилиндр, направляющей является гипербола, образующие параллельны оси Oz (см. Следствие *а*)). Построим эту поверхность.

Сначала в плоскости Oxy построим гиперболу, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1.$$

Это гипербола с действительной полуосью $a = 4$ и мнимой полуосью $b = 3$. Для построения отложим от начала координат в обе стороны 4 по оси Ox и 3 по оси Oy. Используя полученные точки, построим прямоугольник со сторонами $2a = 8$ и $2b = 6$ (проведем через точки ± 4 на оси Ox прямые, параллельные оси Oy, а через точки ± 3, на оси Oy прямые, параллельные оси Ox). В полученном таким образом параллелограмме проведем диагонали и продлим их за параллелограмм. Данные диагонали являются асимптотами гиперболы (рис. 116*а*). Ветви гиперболы будут располагаться выше и ниже построенного параллелограмма,

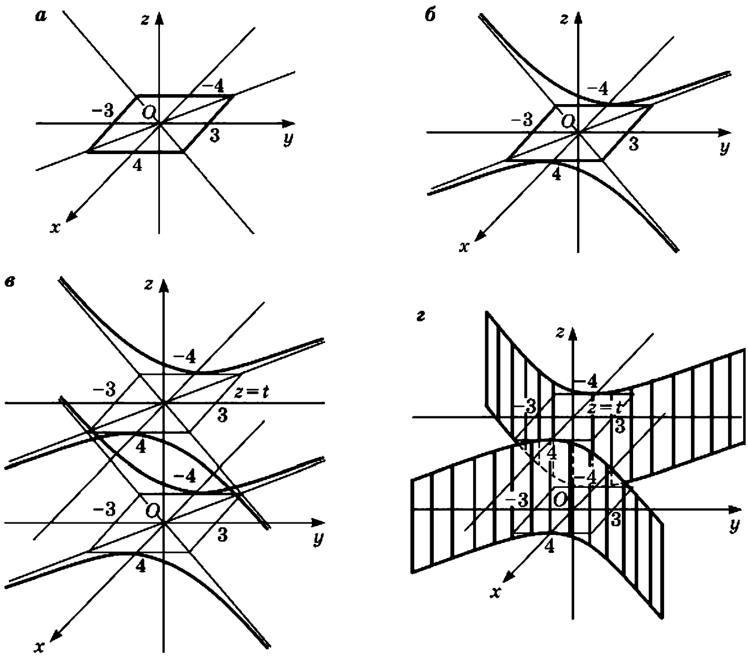


Рис. 116

их вершинами являются точки (4; 0) и (−4; 0). По мере удаления от начала координат ветви гиперболы будут неограниченно приближаться к асимптотам, но никогда их не пересекут (рис. 116*б*). Затем в плоскости $z = t$ (плоскость $z = t$ параллельна плоскости Oxy) построим еще одну такую же гиперболу (рис. 116*в*) и проведем образующие. Учитывая видимые и невидимые линии, окончательно построим гиперболический цилиндр (рис. 116*г* и цв. вкл., ил. 1).

Пример 3.21. Построить поверхность, заданную уравнением $y^2 = 2x$.

Р е ш е н и е. Дано уравнение параболического цилиндра, направляющей является парабола, образующие параллельны оси Oz (см. Следствие *а*)). Построим эту поверхность.

Сначала в плоскости Oxy построим параболу, заданную уравнением $y^2 = 2x$. Уравнение задает параболу, симметричную относительно оси Ox и направленную влево. Вершиной параболы является начало координат. Для по-

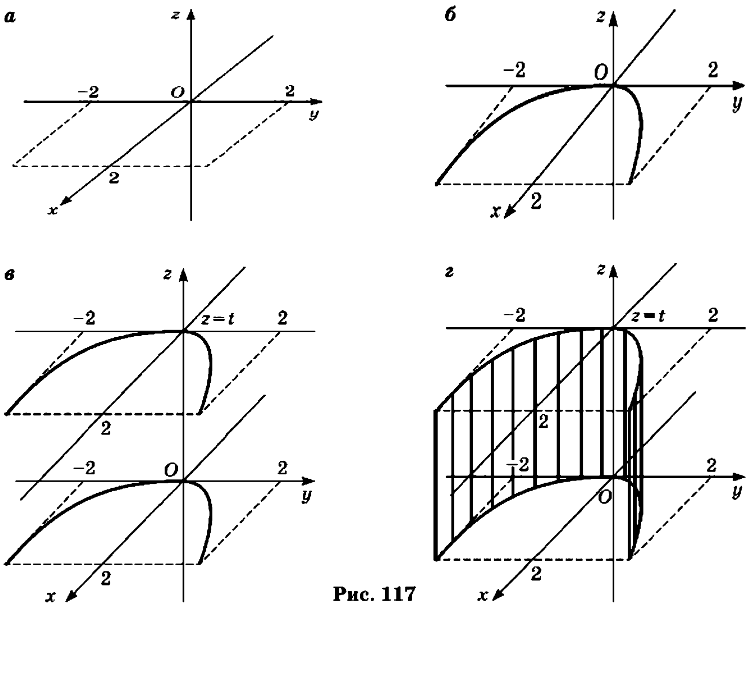


Рис. 117

строения найдем пару дополнительных точек. Ими являются, например, (2; 2) и (2; −2) (см. рис. 117*а*). Можно найти еще несколько точек, вычислив их координаты хотя бы приблизительно (рис. 117*б*). Затем в плоскости $z = t$ (плоскость $z = t$ параллельна плоскости Oxy) построим еще одну такую же параболу (рис. 117*в*) и проведем образующие (рис. 117*г* и цв. вкл., ил. 3).

22.2. КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Возьмем в пространстве любую плоскость π и рассмотрим на ней любую кривую L, и точку $S \notin \pi$. Проведем прямые через точку S и каждую точку кривой L. Полученная таким образом поверхность называется *конической поверхностью*, или *конусом* (рис. 118). S — вершина конуса или конической поверхности, L — направляющая, прямые образующие. Если L является кривой второго порядка, то и конус называется *конусом второго порядка*, или *конической поверхностью второго порядка* (см. цв. вкл., ил. 5).

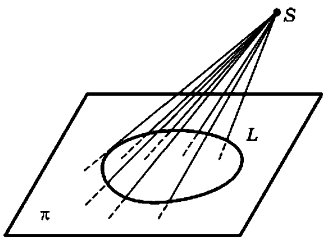


Рис. 118

Каноническое уравнение конуса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

(это уравнение эллиптического конуса при условии, что вершина конуса проецируется в центр конуса).

Пример 3.22. Построим конус, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}-\frac{z^2}{5^2}=0.$$

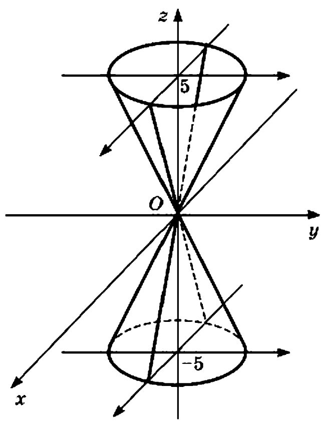


Рис. 119

Р е ш е н и е. В плоскостях $z = \pm 5$ (параллельных плоскости Oxy) построим эллипсы (построение эллипса см. подробно в примере 3.19), определяемые уравнением

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

Затем проведем образующие (прямые, соединяющие соответствующие точки эллипсов и точку O — начало координат) (см. рис. 119).

22.3. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 3.3. Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Теорема 3.2. Пусть кривая L задана системой уравнений

$$\begin{cases} z=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

в прямоугольной декартовой системе координат.

При вращении вокруг оси Oy эта кривая описывает в пространстве поверхность σ, которая задается уравнением (рис. 120)

$$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2+z^2};\ y\right)=0.$$

При вращении вокруг оси Ox уравнение поверхности σ имеет вид

$$\varphi(\pm\sqrt{y^2+z^2};x)=0.$$

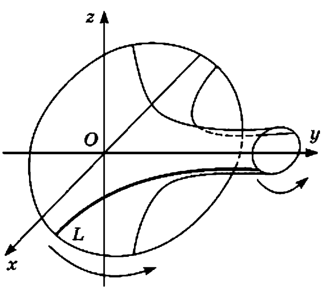


Рис. 120

Если кривая L лежит в плоскости Oyz:

$$\begin{cases} x=0, \\ \varphi(y,z)=0, \end{cases}$$

то уравнение поверхности, образованной вращением кривой L вокруг оси Oz, есть

$$\varphi(\pm\sqrt{x^2+y^2}; z)=0.$$

Рассмотрим канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Определение 3.4. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

называется *эллипсоидом* (рис. 121 и цв. вкл., ил. 9).

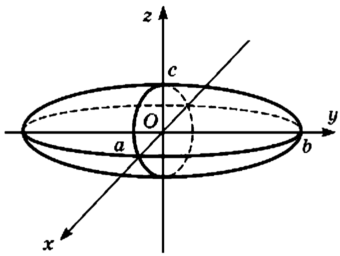


Рис. 121

Величины a, b, c называются *полуосями* эллипсоида.

Если a, b, c различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Если две полуоси равны, то трехосный эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*, а если все полуоси равны (т. е. $a = b = c$), то — сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

В прямоугольной системе координат сфера, имеющая центр в точке M $(x_0; y_0; z_0)$ и радиус r, определяется уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Определение 3.5. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

называется *однополостным гиперболоидом* (рис. 122 и цв. вкл., ил. 7).

Определение 3.6. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

называется *двуполостным гиперболоидом* (см. рис. 123 и цв. вкл., ил. 6).

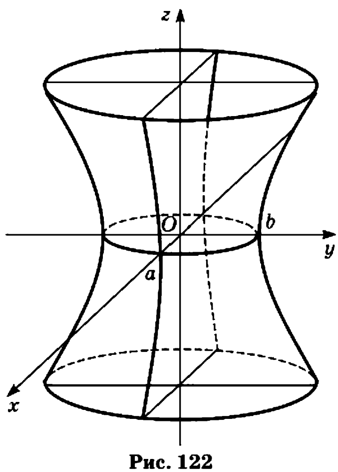


Рис. 122

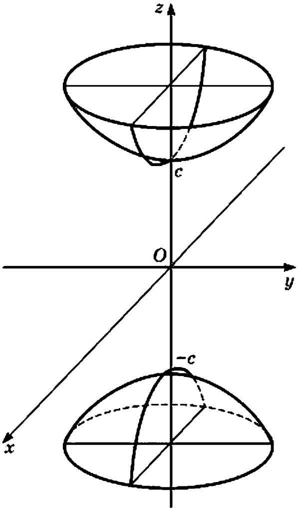


Рис. 123

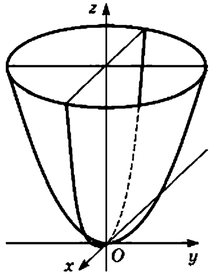


Рис. 124

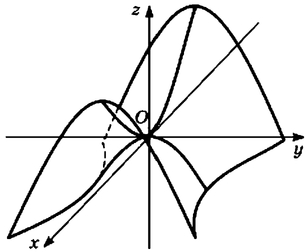


Рис. 125

Определение 3.7. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$

называется *эллиптическим параболоидом* (рис. 124 и цв. вкл., ил. 8).

Определение 3.8. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

называется гиперболическим параболоидом (рис. 125 и цв. вкл., ил. 4).

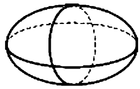
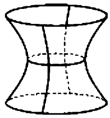
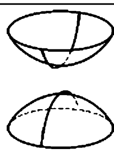
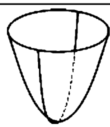
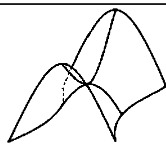
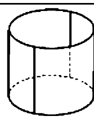
Поверхность имеет вид седла (см. цв. вкл., ил. 4).

Для удобства все вышесказанное можно свести в одну таблицу (табл. 43).

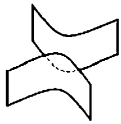
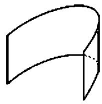
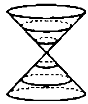
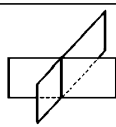
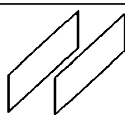
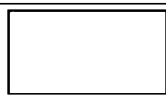
З а м е ч а н и е 3.15. Уравнения мнимого эллипсоида и цилиндра напоминают уравнения «обычного» эллипсоида и цилиндра, но им не соответствует ни одна вещественная точка пространства. Отсюда и происходит название со словом «мнимый».

Таблица 43

Основные типы поверхностей второго порядка и их канонические уравнения

№	Каноническое уравнение	Название поверхности	Изображение
Нераспадающиеся поверхности			
1. Невырождающиеся поверхности			
Эллиптические			
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Эллипсоид	
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	Мнимый эллипсоид	
Гиперболические			
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однополостный гиперболоид	
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двуполостный гиперболоид	
Параболические ($p>0$, $q>0$)			
5	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$	Эллиптический параболоид	
6	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$	Гиперболический параболоид	
2. Вырождающиеся поверхности			
Цилиндрические			
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Эллиптический цилиндр	

Продолжение табл. 43

№	Каноническое уравнение	Название поверхности	Изображение
8	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Мнимый эллиптический цилиндр	
9	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гиперболический цилиндр	
10	$y^2 = 2px$	Параболический цилиндр	
Конические			
11	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Конус	
12	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	Точка	
Распадающиеся вырождающиеся поверхности			
13	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара пересекающихся плоскостей	
14	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара мнимых пересекающихся плоскостей	Точка
15	$x^2 - a^2 = 0$	Пара параллельных плоскостей	
16	$x^2 + a^2 = 0$	Пара мнимых параллельных плоскостей	
17	$x^2 = 0$	Пара совпадающих плоскостей	

Отметим, что поверхности, составленные из прямых линий, называются *линейчатыми*. Ими являются цилиндрические и конические поверхности, однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью является кривой второго порядка.

23. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

23.1. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Пример 3.23. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0.$$

Решение. Приведем уравнение сферы к каноническому виду, выделив полные квадраты:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + (y^2 + 2y + 1) - 1 + z^2 + 1 = 0;$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Полученное уравнение задает сферу с центром в точке $O'\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right)$ и радиусом $r = \frac{1}{2}$.

Пример 3.24. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду: $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$4 \cdot (x^2 - 2x) + 9 \cdot (y^2 - 2y) + 36 \cdot (z^2 - 2z) + 13 = 0,$$

$$4 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 4 + 9 \cdot (y^2 - 2y + 1) - 9 + {} + 36 \cdot (z^2 - 2z + 1) - 36 + 13 = 0,$$

$$4 \cdot (x - 1)^2 + 9 \cdot (y - 1)^2 + 36 \cdot (z - 1)^2 = 36.$$

Разделив обе части уравнения на 36, получим

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$$

Последнее уравнение определяет эллипсоид с центром в точке $O'(1;\ 1;\ 1)$, полуоси которого равны 3, 2, 1 соответственно (рис. 126*г*).

Чтобы построить эллипсоид, необходимо последовательно выполнить следующие шаги:

1) построить эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ с центром в точке O' в плоскости, параллельной плоскости Oxy (построение эллипса см. подробно в примере 3.19) (см. рис. 126*а*);

2) построить эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$ с центром в точке O' в плоскости, параллельной плоскости Oxz (рис. 126*б*);

3) построить эллипс $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ с центром в точке O' в плоскости, параллельной плоскости Oyz (рис. 126*в*);

4) отмечая видимые и невидимые линии, окончательно построить эллипсоид (рис. 126*г* и цв. вкл., ил. 9).

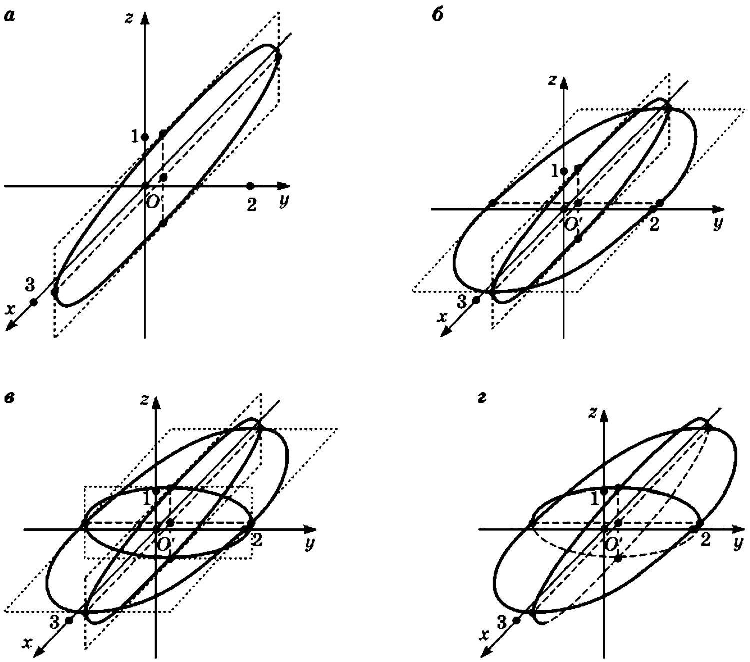


Рис. 126

Пример 3.25. Какая поверхность определяется уравнением $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$?

Р е ш е н и е. Выделим полные квадраты:

$$x^2 + (y^2 - 2y) - (z^2 - 2z) = 0;$$
$$x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 - (z^2 - 2z + 1) = 0;$$
$$x^2 + (y - 1)^2 - (z - 1)^2 = 0.$$

Это уравнение определяет конус с вершиной в точке $O'(0; 1; 1)$ (рис. 127). Построение конуса подробно описано в примере 3.22.

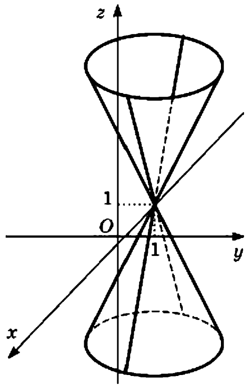


Рис. 127

Рассмотрим подробно метод сечений. Он заключается в построении линий пересечения данной поверхности с различными плоскостями.

В большинстве случаев удобно рассекать поверхность координатными плоскостями или плоскостями, параллельными координатным. Например, плоскость, параллельная плоскости Oxy, имеет уравнение $z = a$, где a — некоторое число. В результате найдем ряд сечений поверхности, которую нужно построить. Плоская кривая, получаемая в сечении, задается системой уравнений, одно из которых есть уравнение (139), а другое уравнение получается подстановкой в данное уравнение поверхности вместо координаты z значения a. Это уравнение позволяет построить сечение. Зная ряд сечений, получим представление о виде самой поверхности.

Пример 3.26. Построить поверхность $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0$.

Р е ш е н и е. Чтобы составить представление о форме поверхности, найдем ее сечения плоскостями $y = 2$ и $y = 1$:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = 1; \\ y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = \frac{1}{4}; \\ y = 1. \end{cases}$$

Получили соответствующие эллипсы:

$$x^2 + \frac{z^2}{9} = \frac{1}{4} \text{ и } x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$

(такие же эллипсы получим, если рассечем поверхность плоскостями $y = -1$ и $y = -2$).

Теперь возьмем в качестве секущих координатные плоскости $Oyz(x = 0)$ и $Oxy(z = 0)$.

Линия пересечения представится системой:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{9} = \dfrac{y^2}{4}; \\ z = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 = \dfrac{y^2}{4}; \\ z = 0. \end{cases}$$

Последняя система задает пару пересекающихся прямых:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2}; \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{y}{2}; \\ z = 0. \end{cases}$$

Сечения поверхности $x^2 + \dfrac{z^2}{9} = \dfrac{y^2}{4}$ плоскостями, параллельными плоскости $Oxy(z = 0)$, могут дополнить сведения о форме поверхности, а именно в системе

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{9} = \dfrac{y^2}{4}; \\ z = a \end{cases}$$

положим $a = \pm 3$, получим

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{y^2}{4} - 1; \\ z = 3, \end{cases}$$

т. е. сечения поверхности плоскостями $Oxy(z = 0)$ — гиперболы.

Выполнив описанные построения, видим, что решением данной задачи является эллиптический конус (построение см. подробно в примере 3.22) (рис. 128).

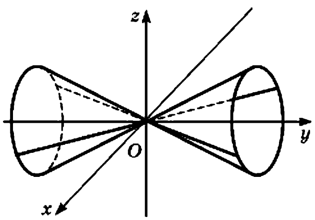
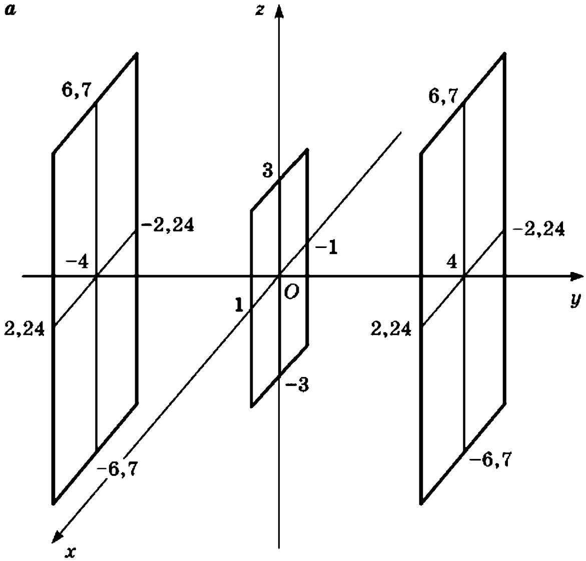


Рис. 128

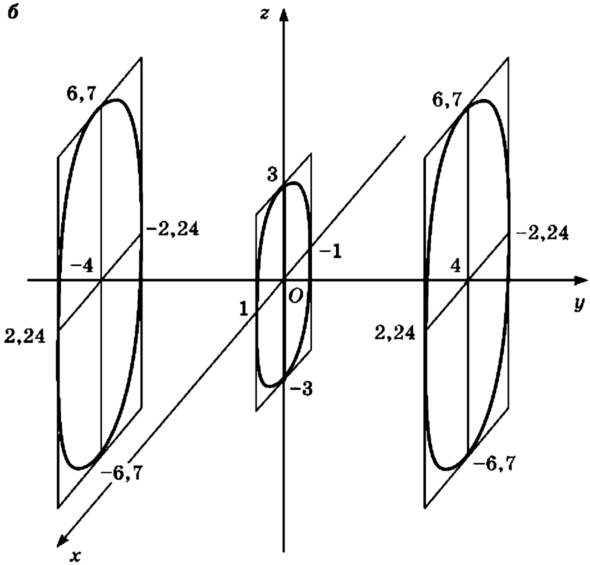
Пример 3.27. Построить поверхность:

$$x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим сечения поверхности плоскостями, параллельными Oxz, т. е. имеющими уравнения $y = a$ при различных значениях a:



а
z
6,7
3
6,7
−2,24
−1
−2,24
−4
4
O
y
1
2,24
2,24
−3
−6,7
−6,7
x



б
z
6,7
6,7
3
−2,24
−2,24
−1
−4
4
O
y
1
2,24
2,24
−3
−6,7
−6,7
x

Рис. 129

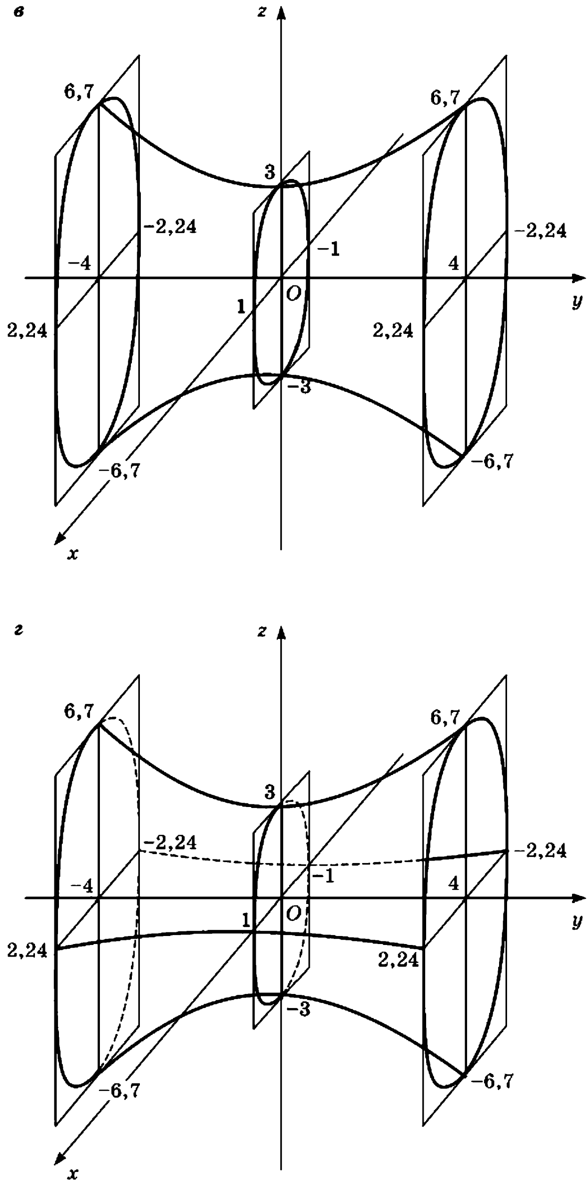

в
z
6,7
6,7
3
−2,24
−2,24
−1
−4
4
O
y
1
2,24
2,24
−3
−6,7
−6,7
x
г
z
6,7
6,7
3
−2,24
−2,24
−1
−4
4
O
1
y
2,24
2,24
−3
−6,7
−6,7
x

Рис. 129

$$\begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = 1; \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = 2; \\ y = \pm 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = 5; \\ y = \pm 4. \end{cases}$$

В сечении получили кривые второго порядка — эллипсы. Теперь рассечем поверхность координатными плоскостями Oyz ($x = 0$) и Oxy ($z = 0$):

$$\begin{cases} \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1; \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1; \\ z = 0. \end{cases}$$

В сечении получили гиперболы. Из сказанного выше и вида канонического уравнения можно сделать вывод, что данная поверхность — однополостный гиперболоид (см. рис. 129*г*).

Чтобы построить однополостный гиперболоид, необходимо последовательно выполнить следующие шаги:

1) построить эллипс $x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ с центром в точке O в плоскости Oxz ($y = 0$) (построение эллипса см. подробно в примере 3.19); построить, например, в плоскостях $y = \pm 4$, параллельных плоскости Oxz, эллипсы $x^2 + \frac{z^2}{9} = 5$ с центрами в точках (0; −4; 0) и (0; 4; 0) (рис. 129*а*, *б*);

2) соединив вершины эллипсов (0; 4; ±6,7), (0; −4; ±6,7) и (0; 0; ±3) (рис. 129*в*), получить гиперболу $\frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ в плоскости $x = 0$ (Oyz);

3) соединив вершины эллипсов (±2,24; −4; 0), (±2,24; 4; 0) и (±1; 0; 0), получить гиперболу $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ в плоскости $z = 0$ (Oxy); отмечая видимые и невидимые линии, построить однополостный гиперболоид (рис. 129*г* и цв. вкл., ил. 7).

Пример 3.28. Построить поверхность: $x^2 + \frac{y^2}{4} = z$.

Р е ш е н и е. Так как левая часть уравнения поверхности неотрицательна при любых x и y, то $z \geq 0$. Рассечем ее плоскостями, параллельными Oxy: $z = 1$ и $z = 4$.

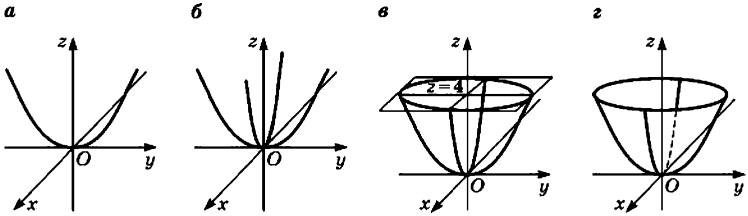


Рис. 130

Запишем уравнения полученных сечений:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1; \\ z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1; \\ z = 4. \end{cases}$$

Это уравнения эллипсов.

Теперь рассечем поверхность координатными плоскостями Oyz и Oxz:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{4} = z; \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = z; \\ y = 0. \end{cases}$$

Получим уравнения парабол. Из вида канонического уравнения и исследования сечений можно сделать вывод, что данная поверхность — эллиптический параболоид (рис. 130*г* и цв. вкл., ил. 9).

Построим эллиптический параболоид, последовательно выполнив следующие шаги:

1) построим параболу $\dfrac{y^2}{4} = z$ с вершиной в точке O в плоскости $x = 0$ (Oyz) (построение параболы см. подробно в примере 3.21) (рис. 130*а*);

2) построим параболу $x^2 = z$ с вершиной в точке O в плоскости $y = 0$ (Oxz) (рис. 130*б*);

3) построим, например, в плоскости $z = 4$, параллельной плоскости Oxy, эллипс $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ с центром в точке $O'(0; 0; 4)$ (рис. 130*в*);

4) отмечая видимые и невидимые линии, построим эллиптический параболоид (рис. 130*г* и цв. вкл., ил. 8).

Пример 3.29. Построить поверхность $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$.

Р е ш е н и е. Если данную поверхность пересечь плоскостями $z = \pm 4,5$, параллельными Oxy, то линии пересечения определяются уравнениями:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1;\\ z=4,5;\end{cases} \begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1;\\ z=-4,5.\end{cases}$$

Это уравнения эллипсов. Пересекая поверхность координатными плоскостями $x = 0$ (Oyz) и $y = 0$ (Oxz), получим в сечении гиперболы, уравнения которых соответственно имеют вид:

$$\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1 \text{ и } \frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=-1$$

или

$$-\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1 \text{ и } -\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1.$$

У обеих гипербол действительной осью является ось Oz. Из вида канонического уравнения и исследования сечений можно сделать вывод, что данная поверхность — двуполостный гиперболоид (см. рис. 131*г*).

Чтобы построить двуполостный гиперболоид, необходимо последовательно выполнить следующие шаги:

1) построить эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ с центром в точке $O'(0; 0; 4,5)$ в плоскости $z = 4,5$, параллельной плоскости Oxy (построение эллипса см. подробно в примере 3.19) (рис. 131*а*);

2) построить эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ с центром в точке $O'(0; 0; -4,5)$ в плоскости $z = -4,5$, параллельной плоскости Oxy (рис. 131*б*);

3) учитывая, что у обеих гипербол действительной осью является ось Oz, делаем вывод, что вершины гипербол находятся в точках $(0; 0; -2)$ и $(0; 0; 2)$;

4) соединив вершины эллипсов $(0; \pm 2; 4,5)$ и $(0; \pm 2; -4,5)$ с вершинами гиперболы в точках $(0; 0; -2)$ и $(0; 0; 2)$, получить гиперболу $-\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1$ в плоскости $x = 0$ (Oyz) (рис. 131*в*);

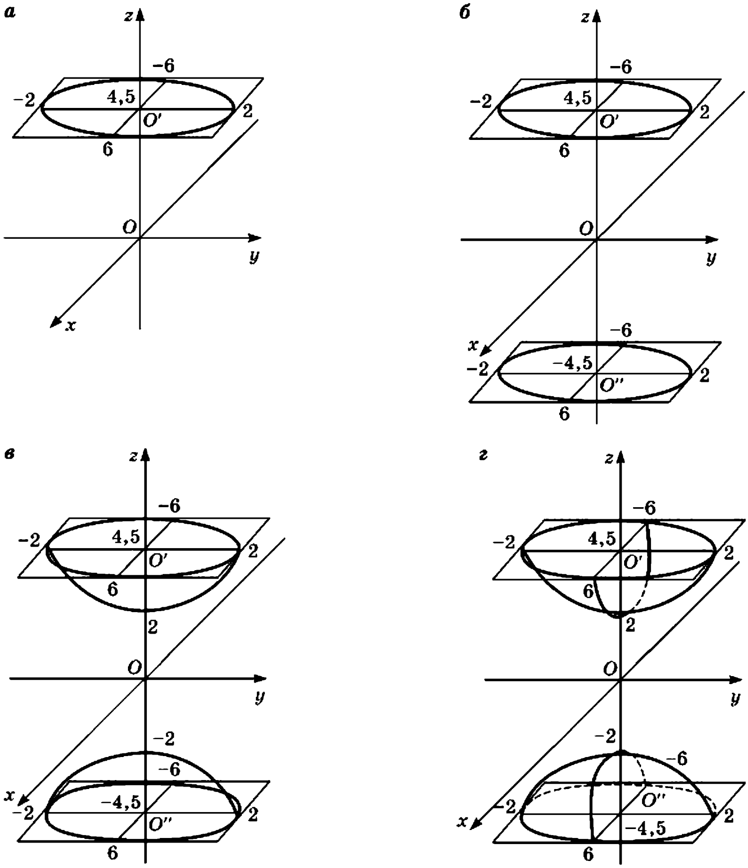


Рис. 131

5) соединив вершины эллипсов (±6; 0; 4,5) и (±6; 0; −4,5) с вершинами гиперболы в точках (0; 0; −2) и (0; 0; 2), получить гиперболу $-\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ в плоскости $y = 0$ (Oxz); отмечая видимые и невидимые линии, построить двуполостный гиперболоид (рис. 131*г* и цв. вкл., ил. 6).

Пример 3.30. Построить поверхность $-\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=2z$.

Р е ш е н и е. Пересечем поверхность плоскостью $x = 0$ и получим параболу, определяемую уравнением $y^2 = 4z$, с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz. Если пересечем поверхность плоскостями, параллельными плоскости $x = 0$, например, $x = \pm 4$, то получим параболы $y^2 = 4z + 4$, ветви которых направлены вверх. Пересечем поверхность плоскостью $y = 0$ и получим параболу, определяемую уравнением $x^2 = -16z$, с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz. Пересекая поверхность плоскостями $y = \pm 4$, получим параболы $x^2 = -16z + 32$, ветви которых направлены вниз.

Рассекая поверхность плоскостями $z = \pm 4$, получим кривые

$$-\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1\,(z=4) \text{ и } \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1\,(z=-4),$$

которые являются гиперболами.

При $z = 0$ линия пересечения

$$-\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=0$$

распадается на пару пересекающихся прямых

$$-\frac{x}{\sqrt{8}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=0 \text{ и } \frac{x}{\sqrt{8}}-\frac{y}{\sqrt{2}}=0.$$

Анализ полученных сечений позволяет сделать вывод, что данная поверхность — гиперболический параболоид («седло») (см. рис. 132*г*).

Чтобы построить гиперболический параболоид, необходимо последовательно выполнить следующие шаги:

1) построить параболу $y^2 = 4z$ с вершиной в точке O в плоскости $x = 0$ (Oyz) (построение параболы см. подробно в примере 3.21) (рис. 132*а*);

2) построить параболу $x^2 = -16z$ с вершиной в точке O в плоскости $y = 0$ (Oxz) (рис. 132*б*);

3) в плоскостях, параллельных плоскости Oxz, например, $y = \pm 4$, построить параболы $x^2 = -16z + 32$ (рис. 132*в*);

4) отмечая видимые и невидимые линии, построить гиперболический параболоид (рис. 132*г* и цв. вкл., ил. 4).

Пример 3.31. Построить тело, ограниченное следующими поверхностями: $y^2-\frac{x^2}{4}=1, z=-1, z=3, y=\sqrt{5}, (y>0)$.

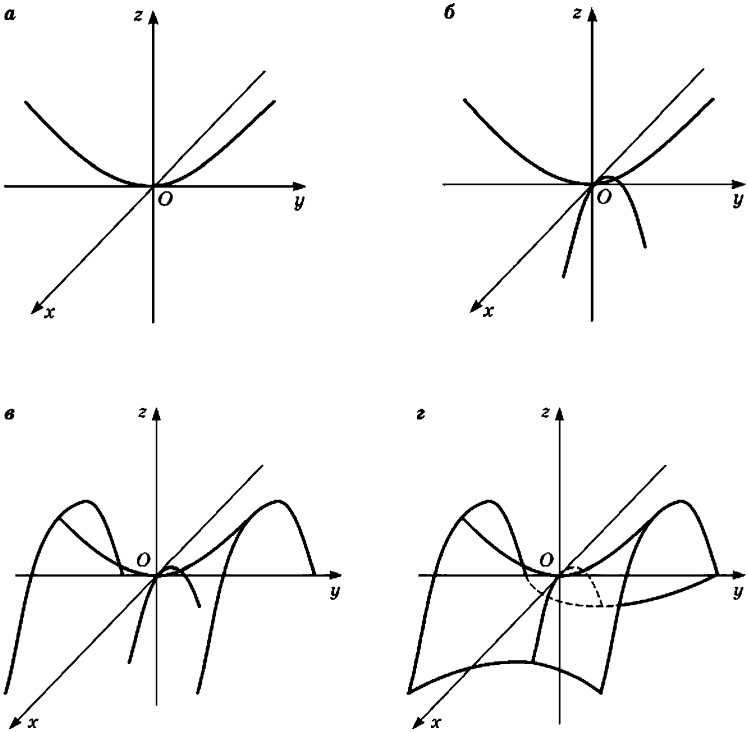


Рис. 132

Р е ш е н и е. Рассмотрим сечение поверхности $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ плоскостью $y = \sqrt{5}$.

Запишем уравнения сечений:

$$\begin{cases} 5 - \frac{x^2}{4} = 1; \\ y = \sqrt{5} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 = 16; \\ y = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Данная система уравнений задает пару параллельных прямых:

$$x = 4 \text{ и } x = -4$$

в плоскости $y = \sqrt{5}$.

Отсутствие координаты z в уравнении свидетельствует о том, что при любых значениях z сечениями данной

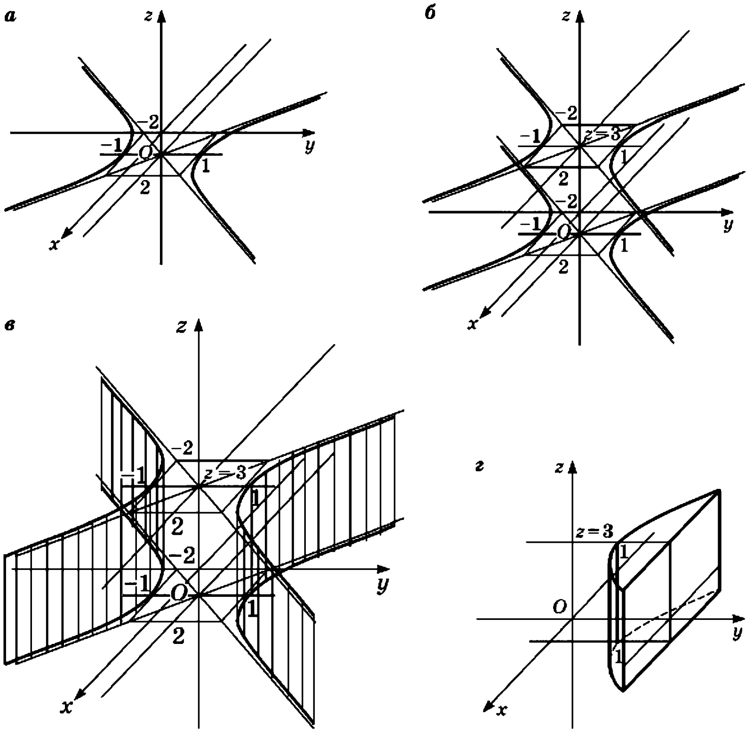


Рис. 133

поверхности плоскостями $z = a$ являются гиперболы (рис. 133*г*).

Чтобы построить тело, ограниченное данными поверхностями, необходимо выполнить следующие шаги:

1) в плоскости $z = -1$ построить гиперболу $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$ (построение гиперболы см. подробно в примере 3.20) (рис. 133*а*);

2) в плоскости $z = 3$ построить гиперболу $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$ (рис. 133*б*);

3) получить гиперболический цилиндр (рис. 133*в*);

4) пересечь гиперболический цилиндр плоскостью $y = \sqrt{5}$, учесть, что по условию $y > 0$, окончательно построить тело (рис. 133*г*), учитывая видимые и невидимые линии.

23.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Написать общее уравнение поверхности второго порядка.
2. В каких случаях говорят, что общее уравнение поверхности второго порядка определяет мнимую поверхность?
3. Перечислите основные типы поверхностей второго порядка.
4. Перечислите невырожденные эллиптические поверхности, напишите их канонические уравнения и сделайте схематические чертежи.
5. Перечислите невырожденные гиперболические поверхности, напишите их канонические уравнения и сделайте схематические чертежи.
6. Перечислите невырожденные параболические поверхности, напишите их канонические уравнения и сделайте схематические чертежи.
7. Перечислите вырожденные цилиндрические поверхности, напишите их канонические уравнения.
8. Перечислите вырожденные конические поверхности, напишите их канонические уравнения.
9. Перечислите распадающиеся вырожденные поверхности и напишите их канонические уравнения.
10. Дайте определение и запишите общий вид уравнений поверхностей тел вращения относительно всех трех координатных осей.
11. Запишите канонические уравнения поверхностей вращения второго порядка.
12. Запишите в прямоугольной декартовой системе координат общее уравнение сферы с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом r.
13. Запишите в прямоугольной декартовой системе координат общее уравнение сферы с центром в начале координат.

23.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

Задача 1. Построить тело, ограниченное данными поверхностями.

1. $x^2 + y^2 = 4;\ z = -3;\ z = 2.$
2. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1;\ z = -2;\ z = 2.$
3. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1;\ y = -2;\ y = 2;\ x = 2\sqrt{2}\ (x > 0).$
4. $x^2 - z^2 = 16;\ y = 0;\ y = 3;\ x = 5(x > 0).$

5. $x^2 = -9z$; $y = 0$; $y = 2$; $z = -9$.
6. $x^2 - \frac{z^2}{9} = 1$; $y = 0$; $y = 3$; $x = \sqrt{2}$ $(x > 0)$.
7. $y^2 + 4z^2 = 16$; $x = -1$; $x = 5$.
8. $x^2 - 4y = 0$; $z = 0$; $z = 2$; $y = 4$.
9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $z = 0$; $z = 4$.
10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; $z = 0$; $z = 3$; $x = 3\sqrt{2}$ $(x > 0)$.
11. $y^2 + 4x^2 = 16$; $z = 0$; $z = 3$.
12. $x^2 = 4z$; $y = 0$; $y = 3$; $z = 4$.
13. $x^2 + z^2 = 4$; $y = -2$; $y = 3$.
14. $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$; $z = 3$; $x = \sqrt{5}$ $(x > 0)$.
15. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; $z = -2$; $z = 2$.
16. $y^2 + z^2 = 1$; $x = 0$; $x = 4$.
17. $x^2 = 9y$; $z = 0$; $z = 2$; $y = 9$.
18. $y^2 - 4z = 0$; $x = 0$; $x = 3$; $z = 4$.
19. $x^2 + 4z^2 = 16$; $y = 0$; $y = 3$.
20. $y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$; $x = 0$; $x = 4$; $y = \sqrt{2}$ $(y > 0)$.
21. $y^2 = 9z$; $x = 0$; $x = 2$; $z = 9$.
22. $x^2 + y^2 = 9$; $z = -3$; $z = 2$.
23. $y^2 = 4z$; $x = 0$; $x = 3$; $z = 4$.
24. $y^2 - x^2 = 9$; $z = 0$; $z = 5$; $y = 5(y > 0)$.
25. $z^2 = 4y$; $x = 0$; $z = 3$; $y = 4$.
26. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$; $z = 0$; $y = 3$; $x = \sqrt{2}$ $(x > 0)$.
27. $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$; $x = 0$; $x = 4$.
28. $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$; $y = 0$; $y = 5$.
29. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; $z = 0$; $z = 5$; $x = 4\sqrt{2}$ $(x > 0)$.
30. $x^2 = -4z$; $y = 0$; $y = 3$; $z = -4$.

Задача 2. Построить методом сечений поверхности второго порядка, заданные каноническими уравнениями.

1. а) $2x^2 - y^2 + z^2 = 0$; б) $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$;
   в) $4y^2 + z^2 = -x$.

2. а) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{16}=1$;
в) $x^2 + 2y^2 = 12z$.
3. а) $y^2 + 9z^2 - 4x^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$;
в) $9x^2 + 4z^2 = 36y$.
4. а) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$; б) $\frac{y^2}{4}-x^2+z^2=1$; в) $y^2 + z^2 = 4x$.
5. а) $x^2+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=0$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$; в) $x^2 + 4z^2 = 4y$.
6. а) $4x^2 + z^2 - y^2 = 0$; б) $4x^2 + 4z^2 + y^2 = 16$;
в) $9x^2 + z^2 = 18y$.
7. а) $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=0$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$; в) $x^2+\frac{z^2}{2}=y$.
8. а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-z^2=0$; б) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{9}+y^2=z$.
9. а) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-z^2=-1$;
в) $x^2 + y^2 = -z$.
10. а) $x^2 + 9z^2 - 4y^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$;
в) $4x^2 + 9y^2 = -36z$.
11. а) $x^2+\frac{z^2}{4}-y^2=0$; б) $x^2 + z^2 - y^2 = 1$; в) $x^2+\frac{y^2}{2}=z$.
12. а) $y^2 + z^2 - 4x^2 = 0$; б) $y^2+z^2-\frac{x^2}{4}=-1$;
в) $y^2 + 9z^2 = 9x$.
13. а) $x^2 + z^2 - 2y^2 = 0$; б) $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$;
в) $4x^2 + y^2 = z$.
14. а) $y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$; б) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$; в) $y^2+\frac{z^2}{4}=x$.
15. а) $x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$;
в) $2x^2 + y^2 = 12z$.
16. а) $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$; б) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$;
в) $9x^2 + y^2 = z$.
17. а) $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-x^2=0$; б) $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$;
в) $x^2 + 4z^2 = 4y$.
18. а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+z^2=0$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{9}+z^2=y$.
19. а) $y^2+\frac{z^2}{4}-x^2=0$; б) $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=-1$; в) $y^2+\frac{z^2}{2}=x$.

20. а) $4x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$; в) $x^2 + 9z^2 = 18y$.

21. а) $x^2 - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$;
в) $y^2 + 4z^2 = 4x$.

22. а) $-x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$;
в) $x^2 + 4y^2 = z$.

23. а) $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0$; б) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = -1$;
в) $x^2 + 9y^2 = 9z$.

24. а) $x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{4} - y^2 + z^2 = 1$;
в) $\frac{y^2}{4} + z^2 = x$.

25. а) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = -1$;
в) $9x^2 + y^2 = 9z$.

26. а) $x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$; б) $4y^2 + 4z^2 + x^2 = 16$;
в) $9y^2 + z^2 = 18x$.

27. а) $4x^2 + 9z^2 - y^2 = 0$; б) $\frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{16} - x^2 = -1$;
в) $x^2 + y^2 = z$.

28. а) $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + z^2 = -1$;
в) $x^2 + 9z^2 = y$.

29. а) $y^2 + 9z^2 - 4x^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$;
в) $4x^2 + 9z^2 = 36y$.

30. а) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$;
в) $x^2 + 9z^2 = 9y$.

Задача 3. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной данным уравнением. Построить эту сферу в декартовой прямоугольной системе координат.

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 3 = 0$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 + 8y + 14z + 1 = 0$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 + 16x = 0$.
4. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 9 = 0$.
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 14y + 2z + 41 = 0$.
6. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 13 = 0$.
7. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 21 = 0$.
8. $x^2 + y^2 + z^2 + 16x - 16z - 16 = 0$.
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 1 = 0$.
10. $x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 32 = 0$.
11. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 21 = 0$.

12. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$.
13. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 5 = 0$.
14. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$.
15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y + 2z + 19 = 0$.
16. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16z - 11 = 0$.
17. $x^2 + y^2 + z^2 + 12y = 0$.
18. $x^2 + y^2 + z^2 + 16x + 16y + 28 = 0$.
19. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 8y - 4z + 27 = 0$.
20. $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 21 = 0$.
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 25 = 0$.
22. $x^2 + y^2 + z^2 + 14z = 0$.
23. $x^2 + y^2 + z^2 + 12y - 13 = 0$.
24. $x^2 + y^2 + z^2 - 10y + 16 = 0$.
25. $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.
26. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x = 0$.
27. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 10y - 2z + 29 = 0$.
28. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 14z + 65 = 0$.
29. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$.
30. $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 10z + 60 = 0$.

Задача 4. Привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду, определить их тип и построить эти поверхности.

1. а) $4x^2 + y^2 - 2z^2 - 12z - 18 = 0$;
   б) $-x^2 + 4y^2 + z^2 + 32y + 68 = 0$;
   в) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$.
2. а) $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 54y + 8z + 41 = 0$;
   б) $y^2 + 6y - z = 0$;
   в) $4x^2 + 25y^2 + 100z^2 - 16x - 150y + 800z + 1741 = 0$.
3. а) $x^2 + y^2 - z^2 + 4x + 6y - 4z + 13$;
   б) $y^2 + z^2 + x - 3 = 0$;
   в) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 135 = 0$.
4. а) $y^2 + z^2 - 4y - 4z - 1 = 0$;
   б) $-y^2 + z^2 + 2z = 0$;
   в) $12x^2 - y^2 + 3z^2 - 72x + 2y - 12z + 119 = 0$.
5. а) $16x^2 + y^2 + 4z^2 + 96x + 128 = 0$;
   б) $-y^2 + z^2 - 10y - 4z - 25 = 0$;
   в) $2x^2 + y^2 - 8x - 8y - z + 24 = 0$.
6. а) $-x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 16y + 8 = 0$;
   б) $25x^2 + y^2 + 25z^2 + 50x + 8y - 100z + 116 = 0$;

в) $x^2 + 4z^2 - 4x - 8z - 92 = 0$.

7. а) $x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 6x + 24y - 43 = 0$;
   б) $x^2 - y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$;
   в) $y^2 - 4y - 2z + 4 = 0$.
8. а) $9x^2 - z^2 + 18x = 0$;
   б) $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$;
   в) $x^2 + y^2 - 4z^2 - 6y + 8z + 5 = 0$.
9. а) $9x^2 + 9y^2 + z^2 - 54y - 2z + 73 = 0$;
   б) $9x^2 - y^2 + 9z^2 + 36x - 4y + 32 = 0$;
   в) $-16x^2 + y^2 - 96x - 10y - 135 = 0$.
10. а) $-9x^2 + 9y^2 + z^2 + 36x + 72y - 2z + 100 = 0$;
    б) $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 24x + 2z + 39 = 0$;
    в) $x^2 + 4x - z + 2 = 0$.
11. а) $16x^2 + 4y^2 + z^2 - 64x - 32y - 2z + 113 = 0$;
    б) $x^2 - 6x - y + 9 = 0$;
    в) $9x^2 - 9y^2 + z^2 + 72x + 36y - 2z + 118 = 0$.
12. а) $9x^2 + z^2 - 9y + 18 = 0$;
    б) $9x^2 - y^2 + 9z^2 + 36x + 8y + 11 = 0$;
    в) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + z + 25 = 0$.
13. а) $x^2 + z^2 - 2y + 4z + 4$;
    б) $4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 11 = 0$;
    в) $x^2 + 4y^2 + 4z + 8 = 0$.
14. а) $x^2 + 9y^2 - \mathrm{z}^2 - 108y + 333 = 0$;
    б) $-x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 90y + 36z + 252 = 0$;
    в) $25x^2 + 4y^2 + 200x - 32y + 364 = 0$.
15. а) $-9x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 36x - 128y + 220 = 0$;
    б) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + z + 27 = 0$;
    в) $x^2 + 6x - 6z - 15 = 0$.
16. а) $9x^2 - 4y^2 + 9z^2 + 32y - 64 = 0$;
    б) $-9x^2 + z^2 + 54x - 90 = 0$;
    в) $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 16x - 24y - 6z + 27 = 0$.
17. а) $9x^2 + 9y^2 - z^2 - 72x - 90y + 360 = 0$;
    б) $x^2 + 4x - z + 3 = 0$;
    в) $x^2 + 36y^2 + 9z^2 - 54z + 45 = 0$.
18. а) $-x^2 + 4y^2 + z^2 - 40y + 104 = 0$;
    б) $-9x^2 + y^2 + 18x - 8y - 2 = 0$;
    в) $x^2 + z^2 + 10x + 2y + 27 = 0$.
19. а) $x^2 + y^2 - z^2 - 8x - 14y + 56 = 0$;
    б) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + z + 4 = 0$;
    в) $4y^2 + 9z^2 - 24y - 36z + 36 = 0$.

20. а) $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 24x - 2y - 16z + 51 = 0$;
б) $16x^2 + 4y^2 + z^2 + 32x + 24y + 36 = 0$;
в) $y^2 - 4y + z + 5 = 0$.
21. а) $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 36 = 0$;
б) $16x^2 - y^2 + 16z^2 - 96x + 4y + 156 = 0$;
в) $4x^2 - y^2 + z^2 + 16x + 2y + 6z + 24 = 0$.
22. а) $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 16x - 40y + 116 = 0$;
б) $y^2 - 4z^2 + 6y + 24z - 31 = 0$;
в) $36x^2 + y^2 + 36z^2 - 144z + 108 = 0$.
23. а) $x^2 - y^2 + z^2 - 6x - 4z + 12 = 0$;
б) $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 216x - 32y + 54z + 433 = 0$;
в) $-y^2 + z^2 - 8y - 2z - 16 = 0$.
24. а) $x^2 + y^2 - z^2 + 4x - 6y + 6z + 5 = 0$;
б) $-4x^2 + z^2 + 16x - 2z - 19 = 0$;
в) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 + 18x - 144y - 8z + 13 = 0$.
25. а) $3x^2 + y^2 + 12x + 8y - 3z + 28 = 0$;
б) $-x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 2x + 250y - 50z + 624 = 0$;
в) $3x^2 - 6x - z + 4 = 0$.
26. а) $9x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 18x + 16y + 8z + 21 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 16x - 24y - 6z - 3 = 0$;
в) $2y^2 + 8y + z = 0$.
27. а) $2x^2 + 2z^2 + 20x + y + 52 = 0$;
б) $25y^2 + 4z^2 + 200y - 32z + 364 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 18z + 8 = 0$.
28. а) $x^2 + 2y^2 - 6x - 20y + 57 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 16x - 24y - 6z + 39 = 0$;
в) $-4x^2 + 100y^2 + 25z^2 - 40x - 800y + 1500 = 0$.
29. а) $9x^2 + 9y^2 - z^2 - 54x - 126y + 531 = 0$;
б) $4x^2 + 36y^2 + 9z^2 + 32x + 72y - 36z + 100 = 0$;
в) $2x^2 + 4x + y = 0$.
30. а) $x^2 - y^2 + 6x + 8y - 11 = 0$;
б) $9x^2 + 9y^2 + z^2 + 36x + 72y - 2z + 100 = 0$;
в) $-x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 96y - 8z + 132 = 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Найти длину и направление вектора $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$.

2. Известны длины векторов: $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} - \vec{b}| = 22$. Найти длину вектора $|\vec{a} + \vec{b}|$.

3. Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

4. Докажите, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4;\ -4;\ 4)$, $B(-3;\ 2;\ 2)$, $C(2;\ 5;\ 1)$, $D(3;\ -2;\ 2)$, взаимно перпендикулярны.

5. Вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b} = (12; -16; 15)$, образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\vec{a}| = 100$, найти координаты вектора $\vec{a}$.

6. Найти m и n, если известно, что вектор $\vec{a} = (3; m; -1)$ перпендикулярен вектору $\vec{b} = (2; 1; n)$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

7. Что больше проекция $np_{\vec{c}}\vec{a}$ или $np_{\vec{c}}\vec{b}$? Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$ и $A(4;\ 0;\ 4)$, $B(-1;\ 2;\ 2)$, $C(-2;\ 4;\ 5)$.

8. Найти равнодействующую $\vec{F}$ трех сил $\vec{F}_1 = 10\vec{i} + 20\vec{j}$, $\vec{F}_2 = -10\vec{j} + 20\vec{k}$, $\vec{F}_3 = -10\vec{i} - 20\vec{k}$ и ее направление.

9. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F} = (3; 2; 4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(4;\ -4;\ 4)$ в положение $B(1;\ 2;\ 2)$. Под каким углом к AB направлена сила $\vec{F}$?

10. Найти векторное произведение $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}]$, если $\vec{a} = -3\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$.

11. Найти площадь S и и острый угол φ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1; -2; 3)$ и $\vec{b} = (3; 2; 1)$.

12. Найти момент равнодействующей трех сил $\vec{f}_1 = \vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{f}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{f}_3 = -\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, приложенных к точке $B(1;\ -2;\ 5)$ относительно точки $A\ (2;\ 5;\ 5)$.

13. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$.

14. Даны вершины пирамиды $ABCD$: $A(-1; 1; 0)$, $B(-3; 6; 2)$, $C(6; 5; -1)$, $D(1; 2; 2)$. Найти ее объем.

15. Найти объем и высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 в полярной системе координат: $M_1(5; -\pi/4)$, $M_2(3{,}5; 17\pi/6)$, $M_3(1; -7\pi/9)$, $M_4(4, \pi)$.

Требуется:

1) построить точки в ПСК;

2) найти их координаты в ДПСК.

2. Заданы координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 в ДПСК: $M_1(3; \sqrt{5})$; $M_2(-1/2; \sqrt{3}/2)$; $M_3(-4{,}5; 0)$; $M_4(0; -9/5)$.

Требуется:

1) найти их полярные координаты;

2) построить точки в ПСК и ДПСК, совместив эти системы координат.

3. В ПСК заданы точки $M_1(3; \pi/18)$; $M_2(5; 7\pi/18)$.

Найти:

а) расстояние между точками M_1, M_2;

б) площадь треугольника OM_1M_2 (O — полюс).

4. В ПСК даны две противоположные вершины квадрата $A\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$ и $C\left(2; \frac{2\pi}{3}\right)$. Найти его площадь.

5. Найти полярные координаты точек, симметричные точкам $\left(2; \frac{\pi}{4}\right), \left(1; -\frac{\pi}{3}\right), (3; 0)$ относительно: а) полюса, б) полярной оси.

6. В ПСК даны две вершины правильного треугольника: $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(8; -\frac{\pi}{12}\right)$. Найти его площадь.

7. Построить кривую в ПСК, определив ее вид:

а) $\rho = 2\sqrt{3}\varphi$;

б) $\rho = 5{,}5\cos\varphi$.

8. Даны уравнения кривых в ДПСК $F(x, y) = 0$. Получить их полярные уравнения и построить их в ПСК:

а) $3x^2 + 3y^2 = 16$;

б) $x^2 + 5y/2 + y^2 = 0$.

9. Дано уравнение кривой в ПСК $F(\rho, \varphi) = 0$. Построить кривую в ПСК и получить ее уравнение в ДПСК: $\rho = 3{,}5(1 + \cos\varphi)$.

10. Дано уравнение кривой в ДПСК $F(x, y) = 0$. Записать полярное уравнение линии и построить ее в ПСК: $x^2 + y^2 = 6\cdot(\sqrt{x^2 + y^2} - y)$.

11. Построить линии в ПСК:

а) $\rho = 2{,}5\cos 3\varphi$;

б) $\rho = 10\sin 4\varphi$.

12. Даны уравнения кривых в ДПСК. Перейти к полярному уравнению $\rho = \rho(\varphi)$ и представить ее графически в ПСК:

а) $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$;

б) $(x^2 + y^2)^3 = 16\cdot(x^2 - y^2)^2$;

в) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

13. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины прямого угла на отрезок опущен перпендикуляр OM. Найти уравнение геометрического места оснований этих перпендикуляров в ПСК и построить эту линию при $a = 3$.

14. Дано уравнение кривой в ДПСК $F(x, y) = 0$. Перейти к полярному уравнению $\rho = \rho(\varphi)$ и представить ее графически в ПСК: $(x^2 + y^2)\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)^2 = 25$.

15. Построить кривую $\rho = e^{\varphi/2}$.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Указать особенности в расположении прямых на плоскости (прямая общего положения, проходящая или не проходящая через начало координат; прямая, параллельная оси Ox или Oy):

1) $x - 4 = 0$;
2) $8x + 3y = 0$;
3) $5y = 2$.

Сделать чертеж каждой прямой в системе координат xOy.

2. Выбрать из имеющегося списка прямых на плоскости пары: пересекающихся прямых; совпадающих прямых; прямых, не имеющих общих точек:

1) $x - y + 1 = 0$;
2) $5x - 5y - 1 = 0$;
3) $x = 2y$;
4) $2x - y + 35 = 0$;
5) $3x = 11 + 6y$.

3. Две точки на плоскости заданы координатами: $M_1(-9;\ 1)$ и $M_2(0;\ -2)$, $\alpha = 45°$ — некоторый угол.

Составить:

1) уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2, найти ее направляющие косинусы;

2) уравнение прямой, проходящей через точку M_1 и образующей с осью абсцисс угол α.

4. Дано общее уравнение прямой: $x + 8y - 3 = 0$, записать для нее следующие виды уравнений:

1) каноническое;
2) параметрические;
3) «с угловым коэффициентом»;
4) «в отрезках»;
5) нормальное.

Построить заданную прямую в системе координат xOy.

5. Даны прямые l: $(x - 7y + 1 = 0)$, l': $(2x + y - 9 = 0)$ и точка $M(4;\ -3)$. Составить уравнения прямых, проходящих: 1) через точку M параллельно прямой l; 2) через точку M перпендикулярно прямой l. Найти угол φ между прямыми l и l' и расстояние d от точки M до прямой l.

6. Отметить на координатной плоскости область решения системы линейных неравенств $\begin{cases} 2 - x \geq 1; \\ 4y - x \leq 0. \end{cases}$

7. Даны точки $A(4;\ -5)$ и $B(-1;\ 2)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое меньший, чем на оси Oy.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Составить канонические уравнения эллипса и гиперболы с центром в начале координат, полуосями $a = 5$ и $b = 2$, выписать координаты фокусов.

2. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в точке (0; 0) с заданными параметром $p = 4$ и осью симметрии Oy, выписать координаты фокуса и уравнение директрисы.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду, определить вид кривой, найти координаты фокусов:

а) $x^2 + 4y^2 + 32x + 24y + 4 = 0$;

б) $2x^2 - 3y^2 + 32x + 24y + 56 = 0$;

в) $2y^2 - 64x + 36y + 98 = 0$.

4. Для каждой точки кривой отношение расстояния до точки $A(-1; -4)$ к расстоянию до прямой l: $y = -12$ равно 1/3. Найти уравнение кривой на плоскости, привести полученное уравнение к каноническому виду, указать тип кривой.

5. Найти точки пересечения кривой второго порядка $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ и прямой $3x - y - 16 = 0$.

6. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами равно 10.

7. Составить уравнение эллипса, зная, что его большая ось равна 26 и фокусы $F_1(-10, 0)$, $F_2(14, 0)$.

8. Составить уравнение эллипса, пересекающего ось Ox в точках (1; 0), (9; 0) и касающегося оси Oy в точке (0; 3), зная, что его оси параллельны осям координат.

9. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ и $C(2; 0)$.

10. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее вершинами равно 24, и фокусы $F_1(-10, 2)$, $F_2(16, 2)$.

11. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус $F(0, -3)$ и проходит через начало координат, зная, что ее осью служит ось Oy.

12. Исследовать кривую второго порядка и привести ее уравнение к каноническому виду:

а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$.

13. Кривая задана уравнением в ПСК: $\rho = \dfrac{7}{4 - 3\cos\varphi}$. Необходимо:

а) построить график кривой в ПСК по точкам;

б) найти уравнение данной кривой в ДСК, если начало координат совпадает с полюсом, а ось Ox — с полярной осью в ПСК;

в) полученное уравнение привести к каноническому виду и указать тип кривой.

14. Даны уравнения кривых в ДПСК. Записать их полярные уравнения и построить в ПСК:

а) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;

б) $y^2 = 3x$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Три точки в пространстве заданы своими координатами: $M_1(-2;\ 1;\ 0)$, $M_2(3;\ -1;\ 6)$, $M_3(0;\ -3;\ 5)$.

Составить следующие виды уравнений плоскости σ, проходящей через эти точки:

1) общее;

2) нормальное;

3) «в отрезках» (если возможно).

2. Даны координаты точки $M_0(1;\ 3;\ -9)$ и вектора $\vec{n} = \{2; -2; 5\}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к вектору $\vec{n}$.

3. Даны координаты точки $M_0(-8;\ 0;\ 4)$ и векторов $\vec{a} = \{2; 5; -1\}$ и $\vec{b} = \{-1; -5; 0\}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Три точки в пространстве заданы своими координатами: $M_1(-2;\ 0;\ 0)$, $M_2(2;\ -1;\ 0)$, $M_3(0;\ -2;\ 7)$. Построить

данные точки в ДПСК и указать для каждой из точек особенности расположения (общее положение; лежит на какой-либо из координатных осей или на какой-либо из координатных плоскостей).

5. Указать особенности расположения плоскостей относительно системы координат (проходит или не проходит через начало координат; параллельна какой-либо из координатных осей; параллельна какой-либо из координатных плоскостей) и построить их. Плоскости заданы уравнениями:

1) $x - 2y + 5z - 6 = 0$;
2) $y = -3$;
3) $x - 5z + 7 = 0$;
4) $3y = 6 + 5z$;
5) $-x + 5z = 0$.

6. Даны координаты точек $M_1(7; -2; -1)$, $M_2(1; 2; -3)$ и общее уравнение плоскости σ: $2x - 3y + z - 1 = 0$. Определить, лежат ли точки M_1 и M_2 по одну сторону от плоскости σ или по разные. Найти расстояние от точки M_1 до плоскости σ.

7. Выбрать из предложенного списка плоскостей пары параллельных, совпадающих и пересекающихся плоскостей. Для каждой пары пересекающихся плоскостей найти угол между ними. Плоскости заданы уравнениями:

$$\sigma_1: 2x - 7y + 3z - 9 = 0;$$
$$\sigma_2: x - 5y + z = 0;$$
$$\sigma_3: -2x + 7y - 3z - 1 = 0;$$
$$\sigma_4: x + y - z = 0;$$
$$\sigma_5: x - y - z - 2 = 0.$$

8. Вычислить объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x - 4y + 2z - 1 = 0$.

9. Даны координаты точек $M_1(-9; 0; 1)$, $M_2(0; -3; 3)$ и вектор $\vec{s} = \{3; -2; 6\}$.

Составить:

а) канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_1 параллельно вектору $\vec{s}$;

б) общие уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

10. Прямая в пространстве задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} 5x - y + 2z + 5 = 0; \\ x + 6y - z - 13 = 0. \end{cases}$$

Найти направляющие косинусы прямой и записать ее канонические и параметрические уравнения.

11. Выбрать из имеющегося списка прямых пары:

а) параллельных (в том числе и совпадающих) прямых;

б) скрещивающихся прямых (для каждой пары вычислить угол между прямыми);

в) пересекающихся прямых (для каждой пары найти точку пересечения).

Данные прямые:

$$a\colon\ \frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{3};\quad b\colon\ \begin{cases} x - 3y + 1 = 0; \\ 2y + 3z - 4 = 0; \end{cases}$$

$$c\colon\ \begin{cases} x = -2t - 1; \\ y = 7; \\ z = 3t - 1; \end{cases}\qquad d\colon\ \frac{x+6}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{6};$$

$$f\colon\ \begin{cases} x + 5y + z - 2 = 0; \\ 3x - y + 7 = 0. \end{cases}$$

12. Найти угол между прямой $\begin{cases} x = 2z - 6y; \\ y = z + 1 \end{cases}$ и прямой, проходящей через точки $A(1; -1; -1)$ и $B(-5; 0; 3)$.

13. В пространстве заданы плоскость σ: $4x - y + 7z - 2 = 0$ и прямая $a\colon \frac{x-8}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{0}$. Определить взаимное расположение прямой и плоскости: прямая лежит в плоскости или прямая и плоскость не имеют общих точек (параллельны), или прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

Если прямая принадлежит плоскости, то составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости.

Если прямая и плоскость параллельны, то составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую параллельно данной плоскости.

Если прямая и плоскость пересекаются, то найти угол между прямой и плоскостью.

14. В пространстве заданы точка $M(-7;\ 0;\ 0)$, прямая a: $\frac{x-2}{-9}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-6}{5}$ и плоскость σ: $-x+6y-z+3=0$.

1) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M перпендикулярно заданной плоскости σ;

2) составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку M перпендикулярно заданной прямой a;

3) составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую a и не лежащую на ней точку M;

4) составить уравнение перпендикуляра, опущенного из данной точки M на заданную прямую a;

5) вычислить расстояние от точки M до прямой a.

15. Даны уравнения прямых a: $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$ и b: $\frac{x-1}{0}=$ $=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Проверить, что данные прямые скрещиваются; составить уравнения общего перпендикуляра к данным прямым; вычислить кратчайшее расстояние между прямыми.

16. На плоскости $x+2y-7z-11=0$ найти такую точку M, чтобы прямая OM составляла с осями координат равные углы.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Построить тело, ограниченное данными поверхностями: $4z^2=y$, $x=0$, $x=6$, $y=4$. Назвать построенную поверхность второго порядка.

2. Построить методом сечений поверхности второго порядка, заданные каноническими уравнениями:

а) $x^2-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0;$

б) $x^2+y^2-z^2=-1;$

в) $x^2+\frac{y^2}{9}=\frac{z}{2}.$

Назвать эти поверхности.

3. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной данным уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z + 4 = 0.$$

Построить эту сферу в декартовой системе координат.

4. Привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду, определить их тип и построить эти поверхности.

а) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$;

б) $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$;

в) $x^2 + z^2 - 4x - 8y - 4z - 8 = 0$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. $|\vec{a}|=2,\ \alpha=\dfrac{\pi}{3},\ \beta=\dfrac{2\pi}{3},\ \gamma=\dfrac{\pi}{4}.$
2. 24.
3. $3\sqrt{3}.$
4. Верно.
5. (48; –64; 60).
6. $n=\dfrac{41}{12},\ m=-\dfrac{31}{12}.$
7. $np_{\vec{c}}\vec{a}=-\dfrac{3}{\sqrt{14}}>np_{\vec{c}}\vec{b}=-\dfrac{17}{\sqrt{14}}.$
8. $\vec{F}=10\vec{j},\quad \alpha=\gamma=\dfrac{\pi}{2},\ \beta=0.$
9. $A=-5,\ \varphi=\arccos\left(-\dfrac{5}{7\sqrt{29}}\right).$
10. (–132; –30; –39).
11. $S=8\sqrt{3},\ \varphi=\arccos\dfrac{1}{7}.$
12. $\vec{M}=-63\vec{i}+9\vec{j}+30\vec{k}.$
13. Нет.
14. $V=\dfrac{50}{3}.$
15. $V=3,\ h=\dfrac{1}{\sqrt{51}}.$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1. 1) *Указания*: $\varphi=17\pi/6=5\pi/6=150°$; $\varphi=-7\pi/9=-140°$.
2) $M_1(5\sqrt{2}/2;-5\sqrt{2}/2),\ M_2(-7\sqrt{3}/4;7/4);$
$M_3(-0{,}766;\ -0{,}6428);\ M_4(-4;\ 0).$

2. $M_1(\sqrt{14}; \operatorname{arctg}(\sqrt{5}/3))$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{5}/3) \approx 36{,}7°$;
$M_2(1;\ 2\pi/3)$; $M_3(4{,}5;\ \pi)$; $M_4(9/5;\ -\pi/2)$.

3. а) $|M_1M_2| = \sqrt{19}$.

Указания: воспользоваться формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

и записать ее полярное уравнение, применив формулы перехода

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

б) $S = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

Указания: воспользоваться формулой для площади треугольника со сторонами a и $в$ и углом α между ними

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$

4. $S = 8$.

5. а) $\left(2; -\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\left(1; \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $(3;\ \pi)$; б) $\left(2; -\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(1; \dfrac{\pi}{3}\right)$, $(3;\ 0)$.

6. $S = \dfrac{49\sqrt{3}}{4}$.

Указания: воспользоваться формулой $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

7. а) спираль Архимеда; б) окружность.

8. а) $\rho = 4\sqrt{3}/3$, окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 4\sqrt{3}/3$.

б) $\rho = -2{,}5\sin\varphi$, окружность с центром в точке $(0;\ -5/4)$ и радиусом $R = 5/4$.

9. Кардиоида, $x^2 + y^2 = 3{,}5(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$.

10. Кардиоида, $\rho = 6 \cdot (1 - \sin\varphi)$.

11. а) трехлепестковая роза; б) четырехлепестковая роза.

12. а) $\rho^2 = 4\sin 2\varphi$ — лемниската Бернулли, $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\rho \geq 0$;
б) $\rho^2 = 16\cos 22\varphi$ — четырехлепестковая роза.

Указания: получаем две явные функции $\rho_1 = 4\cos 2\varphi$, $\rho_2 = -4\cos 2\varphi$;

в) $\rho^2 = \sin 22\varphi$ — четырехлепестковая роза.

13. $\rho = a\sin 2\varphi$.

Указания: за полюс принять вершину прямого угла, за полярную ось — одну из его сторон. Построить линию $\rho = 3\sin 2\varphi$ — двухлепестковая роза.

14. Название линии — гиперболическая спираль $\rho = 5/\varphi$, $\rho > 0$.

Указания: при неограниченном возрастании φ полярный радиус ρ неограниченно убывает, при этом соответствующая точка кривой неограниченно приближается к полюсу.

Таблица значений (φ; ρ):

φ	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	...
ρ	$30/\pi$	$20/\pi$	$15/\pi$	$10/\pi$	$10/3\pi$	$5/2\pi$	$10/5\pi$	...

15. Название линии — логарифмическая спираль. *Указания*: когда угол φ неограниченно возрастает, то ρ тоже неограниченно возрастает. Когда угол $\varphi \to -\infty$, то полярный радиус стремится к нулю, т. е. $\rho \to 0$ и кривая неограниченно приближается к полюсу, закручиваясь около него.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. 1) прямая, параллельная оси Oy, проходящая через точку с координатами (4; 0); 2) прямая общего положения, проходящая через начало координат; 3) прямая, параллельная оси Ox, проходящая через точку с координатами $\left(0; \frac{2}{5}\right)$.

2. Совпадающих прямых нет; пары параллельных прямых: 1) и 2), 3) и 5); остальные прямые попарно пересекаются.

3. 1) $x + 3y + 6 = 0$, $\cos\alpha = \pm 3/\sqrt{10}$, $\cos\beta = \mp 1/\sqrt{10}$;

2) $x - y + 10 = 0$.

4. 1) $\frac{x+5}{8} = \frac{y-1}{-1}$ (уравнение прямой нельзя записать однозначно, это один из возможных вариантов записи);

2) $\begin{cases} x = 8t - 5; \\ y = -t + 1; \end{cases}$ 3) $y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$; 4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{3}{8}} = 1$;

5) $\frac{x}{\sqrt{65}} + \frac{8y}{\sqrt{65}} - \frac{3}{\sqrt{65}} = 0.$

5. 1) $x - 7y - 25$; $\arccos(1/\sqrt{10}) \approx 72°$;

2) $7x + y - 25 = 0$; $d = \frac{26}{5\sqrt{2}}$.

6. Множество решений системы неравенств занимает область на координатной плоскости xOy, расположенную левее прямой $x = 1$ и ниже прямой $x = 4y$.

7. $4x + 2y - 3 = 0$; $4x - 2y - 9 = 0$.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, $F_1(-\sqrt{21};0)$, $F_2(\sqrt{21};0)$; гипербола $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$, $F_1(-\sqrt{29};0)$, $F_2(\sqrt{29};0)$ или $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=-1$, $F_1(0;-\sqrt{29})$, $F_2(0;\sqrt{29})$.

2. $x_2 = 8y$, $F(0;\ 2)$.

3. а) $\frac{(x+16)^2}{288}+\frac{(y+3)^2}{72}=1$, $F_1(-\sqrt{216}-16;-3)$,

$F_2(\sqrt{216}-16;-3)$;

б) $\frac{(x+8)^2}{12}-\frac{(y-4)^2}{8}=1$, $F_1(-\sqrt{20}-8;4)$, $F_2(\sqrt{20}-8;4)$;

в) $(y+9)^2 = 32\cdot(x+1)$, $F(7;\ -9)$.

4. Эллипс $\frac{(x+1)^2}{8}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$.

5. $(3;\ -7)$, $(6;\ 2)$.

6. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

7. $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

8. Окружность $(x-5)^2+(y-3)^2=25$.

9. $(x-1)^2+y^2=1$.

10. $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$.

11. $x^2 = -12y$.

12. а) гипербола $\frac{x''^2}{1}-\frac{y''^2}{4}=1$, центр $O'(2;\ -1)$, поворот на угол $\alpha = 45°$;

б) эллипс $\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{9}=1$, центр $O'(-1;\ 1)$, поворот на угол $\alpha = 45°$.

13. а) $7x^2 + 16y^2 - 42x - 49 = 0$.

Указание: воспользоваться формулами перевода из ПСК в ДСК:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

б) эллипс $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

14. а) $\rho=\frac{6}{\sqrt{7+11\cos2\varphi}}$; б) $\rho=\frac{6\cos\varphi}{1-\cos2\varphi}$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. 1) $14x - 13y - 16z + 41 = 0$;

2) $-\dfrac{14x}{3\sqrt{69}} + \dfrac{13y}{3\sqrt{69}} + \dfrac{16z}{3\sqrt{69}} - \dfrac{41}{3\sqrt{69}} = 0$;

3) $\dfrac{x}{-\dfrac{41}{14}} + \dfrac{y}{\dfrac{41}{13}} + \dfrac{z}{\dfrac{41}{16}} = 1$.

2. $2x - 2y + 5z + 49 = 0$.

3. $5x - - y + 5z + 20 = 0$.

4. M_1 лежит на оси Ox, M_2 лежит на плоскости xOy, M_3 лежит на плоскости yOz.

5. 1) плоскость общего положения, не проходящая через начало координат; 2) плоскость, параллельная плоскости xOz; 3) плоскость, параллельная оси Oy; 4) плоскость, параллельная оси Ox; 5) плоскость, проходящая через ось Oy.

6. Точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны от плоскости σ; расстояние равно $18/\sqrt{14}$.

7. Совпадающих плоскостей нет,
параллельны 1 и 3,
остальные попарно пересекаются;
1 и 2 образуют угол $\arccos(40/3\sqrt{186}) \approx 12°$;
1 и 4 образуют угол $\arccos(8/\sqrt{186}) \approx 54°$;
1 и 5 образуют угол $\arccos(6/\sqrt{186}) \approx 64°$;
2 и 3 образуют угол $\arccos(40/3\sqrt{186}) \approx 12°$;
2 и 4 образуют угол $\arccos(5/9) \approx 56°$;
2 и 5 образуют угол $\arccos(5/9) \approx 56°$;
3 и 4 образуют угол $\arccos(8/\sqrt{186}) \approx 54°$;
3 и 5 образуют угол $\arccos(6\sqrt{186}) \approx 64°$;
4 и 5 образуют угол $\arccos(1/3) \approx 71°$.

8. 1/48.

9. $\dfrac{x+9}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{6}$; $\begin{cases} x = 3t - 9; \\ y = -2t; \\ z = 6t + 1; \end{cases}$ $x + 3y + 9 = 0$; $2y + 3z - 3 = 0$

(уравнения не записываются однозначно, представлен один из возможных вариантов).

10. $\dfrac{x}{-11}=\dfrac{y-\dfrac{21}{11}}{7}=\dfrac{z+\dfrac{17}{11}}{31}$; $\begin{cases} x=-11t; \\ y=7t+\dfrac{21}{11}; \\ z=31t-\dfrac{17}{11}. \end{cases}$

11. Совпадающих и пересекающихся прямых нет, a и c параллельны (не имеют общих точек), остальные прямые попарно скрещиваются;

a и b образуют угол $\arccos(24/\sqrt{1222})\approx 47^\circ$;

a и d образуют угол $\arccos(20/\sqrt{481})\approx 24^\circ$;

a и f образуют угол $\arccos(50/\sqrt{3458})\approx 32^\circ$;

b и c образуют угол $\arccos(24/\sqrt{1222})\approx 47^\circ$;

b и d образуют угол $\arccos(21/\sqrt{3478})\approx 69^\circ$;

b и f образуют угол $\arccos(25/\sqrt{6251})\approx 72^\circ$;

c и f образуют угол $\arccos(50/\sqrt{3458})\approx 32^\circ$;

c и d образуют угол $\arccos(20/\sqrt{481})\approx 24^\circ$;

d и f образуют угол $\arccos(97/\sqrt{9842})\approx 12^\circ$.

12. $\arccos(29/3\sqrt{106})\approx 20^\circ$.

13. Пересекаются, $\arcsin(16/5\sqrt{66})\approx 23^\circ$.

14. 1) $\dfrac{x+7}{-1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{-1}$;

2) $9x-3y-5z+63=0$;

3) $23x+99y-18z+161=0$;

4) $\dfrac{x+7}{549}=\dfrac{y}{47}=\dfrac{z}{960}$;

5) $\sqrt{1\,225\,210}/115$.

15. $\begin{cases} 4x-6y+5z+16=0; \\ 8x-y-z-6=0; \end{cases}$ $13/\sqrt{33}$.

16. $M(1{,}1;\ 1{,}1;\ -1{,}1)$.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox.

2. а) конус;

б) двуполостный гиперболоид;

в) эллиптический параболоид.

3. Координаты центра $O(2;\ 3;\ -4)$, радиус $R = 5$.

4. а) эллипсоид с центром $O(1;\ 1;\ 1)$ и полуосями $a = 3;\ b = 2;$ $c = 1;$

б) однополостный гиперболоид с центром $O(3;\ 2;\ 1)$ и полуосями $a = 1;\ b = 2;\ c = 1;$

в) параболоид вращения с вершиной $O(2;\ -4;\ 2)$ и параметром $p = 2$. Ось вращения параллельна оси Oy.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин, И. В.* Высшая математика для студентов экономических, технических, естественнонаучных специальностей вузов / И. В. Виленкин, В. М. Гробер. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2004.
2. *Выгодский, М. Я.* Справочник по высшей математике. — М. : Астрель, 2005.
3. *Ефимов, Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М. : Физматлит, 2004.
4. *Кузнецова, Л. Г.* Математика: Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии : учеб. пособие. — Омск : Изд-во «Прогресс» ОмИПП, 2003.
5. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. — М. : Айрис-пресс, 2006.
6. *Погорелов, А. В.* Аналитическая геометрия. — М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
7. *Цубербиллер, О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — СПб. : Лань, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лиана Валериевна АВИЛОВА
Владимир Анатольевич БОЛОТЮК
Людмила Анатольевна БОЛОТЮК
Юлия Геннадьевна ГАЛИЧ
Олег Владимирович ГАТЕЛЮК
Лариса Вячеславовна ДОЛГОВА
Алла Михайловна СОКОЛЬНИКОВА
Владимир Алексеевич ФЁДОРОВ
Елена Анатольевна ШВЕД

ПРАКТИКУМ И ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ (ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ)

Учебное пособие

Ответственный редактор *А. Д. Пузовик*
Технический редактор *Е. С. Жукович*
Корректор *М. Л. Водолазова*
Подготовка иллюстраций *Н. А. Платонова*
Верстка *Е. Е. Егорова*
Выпускающие *Н. В. Черезова, Т. С. Симонова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

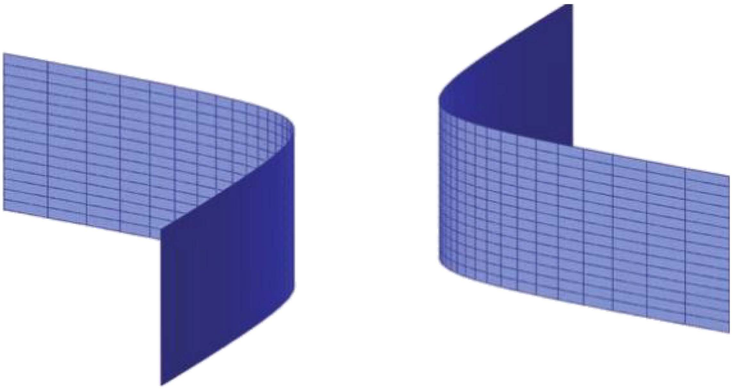
Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

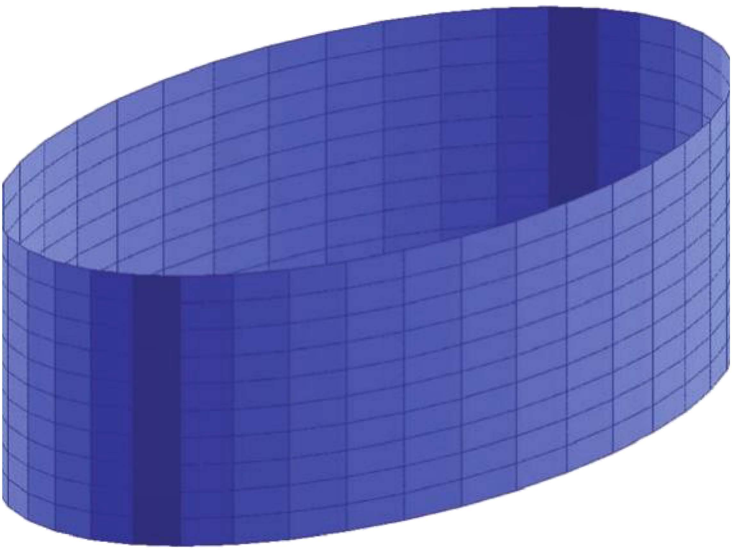
Подписано в печать 21.06.13.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 1/32.
Печать офсетная. Усл. п. л. 15,12. Тираж 1000 экз.

Заказ №

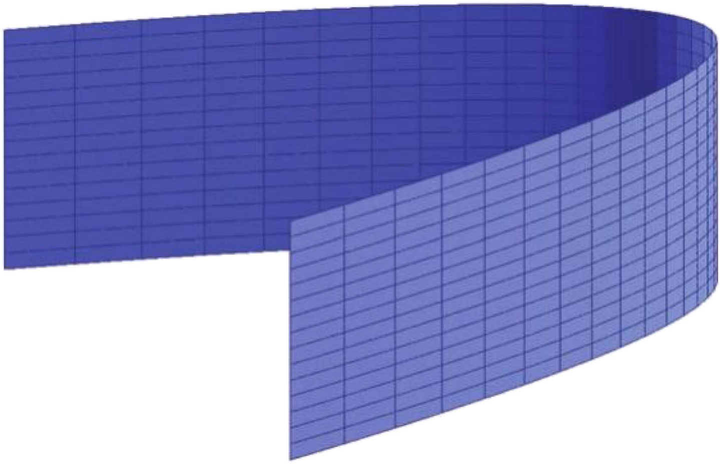
Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru



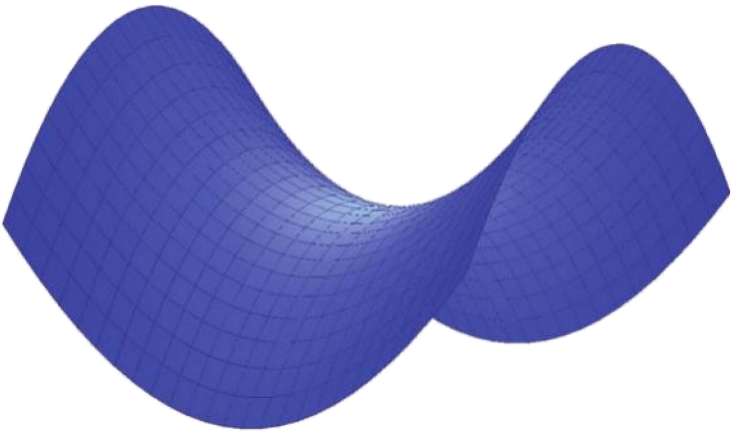
Ил. 1
Гиперболический цилиндр



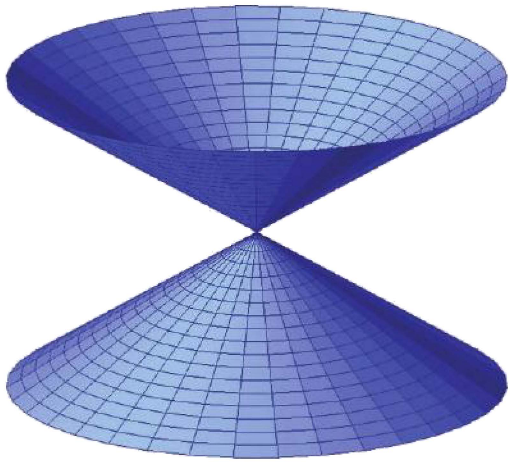
Ил. 2
Эллиптический цилиндр



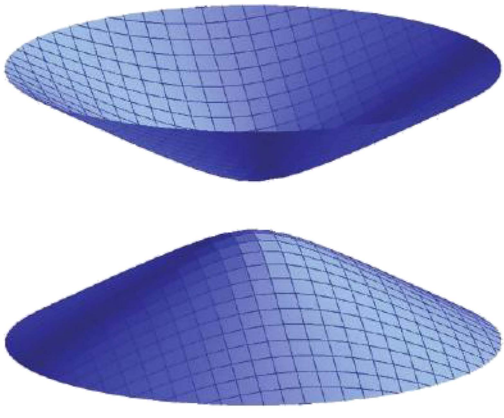
Ил. 3
Параболический цилиндр



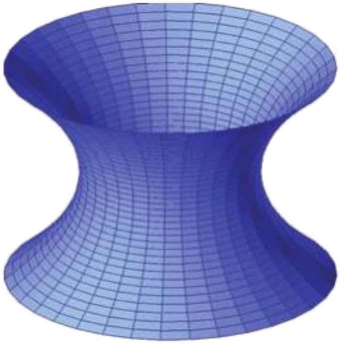
Ил. 4
Гиперболический параболоид



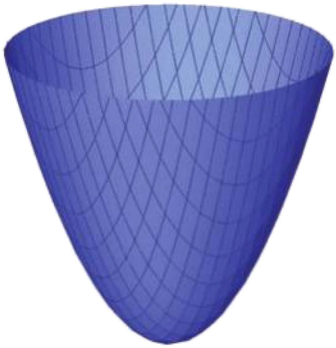
Ил. 5
Коническая поверхность (конус)



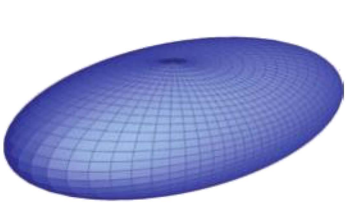
Ил. 6
Двуполостный гиперболоид



Ил. 7
Однополостный гиперболоид



Ил. 8
Эллиптический параболоид



Ил. 9
Эллипсоид