

МАГИСТРАТУРА И СПЕЦИАЛИТЕТ

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

В. А. Павловский, Д. В. Никущенко



[www.e.lanbook.com](http://www.e.lanbook.com)



**ЭБС  
ЛАНЬ**

---

В. А. ПАВЛОВСКИЙ,  
Д. В. НИКУЩЕНКО

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

*РЕКОМЕНДОВАНО*

*Федеральным УМО в системе высшего образования  
по укрупненной группе специальностей и направлений  
подготовки «Техника и технологии кораблестроения  
и водного транспорта» в качестве учебного пособия  
для обучающихся по основным образовательным  
программам высшего образования по направлению  
подготовки «Кораблестроение, океанотехника  
и системотехника объектов морской инфраструктуры»*



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •  
• МОСКВА • КРАСНОДАР •  
• 2018 •

---

ББК 22.253.3я73

П 12

**Павловский В. А., Никущенко Д. В.**

**П 12** Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 368 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-2924-0**

Книга посвящена систематическому изложению теоретических основ для постановки задач математического моделирования течений жидкостей и газов. Особое внимание уделено вопросам построения замкнутых систем уравнений для турбулентного режима этих течений. Подробно рассмотрены модели турбулентности, используемые в современных программных комплексах. Изложение материала выполнено с широким использованием математического аппарата прямого (бескомпонентного) тензорного исчисления, краткие сведения из которого предваряет это изложение. При записи физических соотношений в компонентном виде используется декартова прямоугольная система координат, поскольку в современных программных комплексах для проведения вычислительных процедур применяется только она.

Книга предназначена для научных работников и инженеров, занимающимися исследованиями и решениями прикладных задач области гидродинамики, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей: «Механика жидкостей, газа и плазмы», «Аэродинамика и процессы теплообмена летательных аппаратов», «Теория корабля и строительная механика», «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**ББК 22.253.3я73**

**Рецензент**

*Г. И. КУРБАТОВА* — доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета;

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2018

© В. А. Павловский,

Д. В. Никущенко, 2018

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Список условных обозначений.....	7
Предисловие.....	10
Введение.....	12
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ГИДРОДИНАМИКИ.	
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.....	17
1.1. Общие замечания о тензорах. Индексные и символические обозначения тензоров.....	17
1.2. Векторы и тензоры.....	22
1.3. Примеры тензоров второго ранга: тензор инерции и тензор напряжений.....	29
1.4. Элементы тензорной алгебры. Простейшие операции над тензорами.....	35
1.5. Инварианты тензоров и тензорные поверхности.....	42
1.6. Поля физических величин. Элементы тензорного анализа.....	54
1.7. Градиент скорости и связанные с ним кинематические тензоры.....	65
1.8. Материальные производные векторов и тензоров.....	72
ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ, ЭНЕРГИИ, ДИФФУЗИИ.....	
2.1. Формула И.С. Громеки и другие сопряженные с ней соотношения.....	87
2.2. Дифференциальные операторы для поля скоростей.....	91
2.3. Уравнение неразрывности.....	99
2.4. Уравнения движения жидкости с постоянными и переменными физическими свойствами.....	101
2.5. Вихрь скорости и его ассоциированный тензор.....	106
2.6. Уравнение переноса завихренности.....	109
2.7. Уравнение баланса механической энергии потока.....	114
2.8. Уравнение энергии движущейся жидкости и его различные формы записи.....	119

2.9. Запись уравнения энергии как уравнения переноса скалярной величины .....	128
2.10. Дивергентный вид уравнений переноса .....	135
2.11. О дивергентном виде слагаемых дифференциальных уравнений .....	138
2.12. О вязкостях $\mu$ и $\lambda$ .....	145
2.13. Диффузия и основы массопереноса .....	154
2.14. Система уравнений движения многокомпонентной жидкости .....	161
2.15. Обобщенное уравнение переноса .....	166
2.16. Теория подобия. Критерии подобия .....	168
ГЛАВА 3. ПОНЯТИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ .....	
3.1. Турбулентность. Осредненные величины .....	183
3.2. Уравнения движения турбулентного потока .....	191
3.3. Гипотеза Буссинеска .....	196
3.4. Модель пути перемешивания Л. Прандтля. Закон стенки .....	199
3.5. Турбулентное течение сжимаемой жидкости: процедура осреднения по Фавру .....	203
3.6. Система уравнений турбулентного движения многокомпонентных сжимаемых сред .....	211
3.7. Учет кривизны при расчете турбулентных течений .....	213
ГЛАВА 4. ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗ КОМБИНАЦИЙ УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ И ЭНЕРГИИ .....	
4.1. Схема комбинаций уравнений .....	217
4.2. Трансформация уравнения неразрывности .....	219
4.3. Уравнение Лайтхилла и связанные с ним соотношения .....	221
4.4. Трансформация уравнения Навье-Стокса .....	233
4.5. Пульсации скорости и виды диссипации турбулентности .....	242
4.6. Уравнение переноса тензора напряжений Рейнольдса .....	248

## ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В РАМКАХ

ПОДХОДА О. РЕЙНОЛЬДСА .....	257
5.1. Система уравнений Навье–Стокса и ее интегрирование .....	257
5.2. Основные подходы к моделированию турбулентных течений .....	260
5.3. Уравнение переноса напряжений Рейнольдса. Тензор анизотропии .....	268
5.4. Дифференциальные модели переноса напряжений Рейнольдса .....	275
5.4.1. Диффузия турбулентных напряжений .....	275
5.4.2. Диссипация турбулентности .....	278
5.4.3. Перераспределение турбулентности .....	284
5.4.4. Модели переноса напряжений Рейнольдса .....	293
5.4.4.1. Модель Launder–Reece–Rodi (LRR) .....	295
5.4.4.2. Модель Shima .....	295
5.4.4.3. Модель Speziale–Sarkar–Gatski (SSG) .....	297
5.4.4.4. Модель Two–Component–Limit (TCL) .....	298
5.4.4.5. Модель, использованная в ISIS–CFD .....	299
5.4.5. Модели третьего порядка .....	302
5.4.6. Общие выводы по моделям переноса напряжений Рейнольдса .....	304
5.5. Модели турбулентной вязкости .....	305
5.5.1. Общая структура моделей турбулентной вязкости .....	305
5.5.2. Алгебраические модели .....	310
5.5.3. Модели с одним уравнением переноса .....	312
5.5.4. Модели с двумя уравнениями .....	317
5.5.4.1. Класс $k$ – $\epsilon$ моделей .....	319
Стандартная $k$ – $\epsilon$ модель .....	319
RNG $k$ – $\epsilon$ модель .....	323
Realizable $k$ – $\epsilon$ (KER) .....	323
5.5.4.2. Стандартная $k$ – $\omega$ модель .....	325
5.5.4.3. Shear Stress Tensor $k$ – $\omega$ модель .....	327

5.5.5. Моделирование пристеночной области в диссипативных моделях турбулентности .....	331
5.5.6. Некоторые замечания относительно построения двухпараметрических линейных моделей вихревой вязкости .....	334
5.6. Нелинейные модели вихревой вязкости .....	340
5.6.1. Нелинейные модели вихревой вязкости (NLEVM) .....	341
5.6.2. Явные алгебраические модели напряжений Рейнольдса (EARSМ)...	344
5.6.3. Некоторые замечания относительно нелинейных моделей вихревой вязкости.....	349
5.7. Особенности моделирования турбулентности при движении сжимаемых сред.....	351
Литература .....	353

## СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

### Латинские буквы

Обозначение	Размерность	Описание
$a$	$m^2 / c$	коэффициент температуропроводности
$a_{ij}$	$m^2 / c^2$	компонента тензора анизотропии напряжений Рейнольдса, $i, j = 1, 2, 3$
$c_p$	$Дж / кг \cdot K$	изобарная теплоемкость
$c_v$	$Дж / кг \cdot K$	изохорная теплоемкость
$\vec{e}_j$		единичный вектор декартовой прямоугольной системы координат
$Fr$		число Фруда
$g$	$m / c^2$	ускорение свободного падения
$k$	$m^2 / c^2$	кинетическая энергия турбулентности
$Ma$		число Маха
$Nu$		число Нуссельта
$P$	$Па$	гидродинамическое давление
$\underline{R}$	$Па$	тензор турбулентных напряжений (напряжений Рейнольдса)
$Re$		число Рейнольдса
$S = \sqrt{2\underline{S} : \underline{S}}$	$1 / c$	скалярная мера интенсивности тензора скоростей деформаций
$\underline{S}$	$1 / c$	тензор скоростей деформаций
$Sh$		число Струхала
$\vec{V}$	$m / c$	вектор скорости
$\overline{\vec{V}}$	$m / c$	осредненная составляющая вектора скорости в турбулентном течении
$\vec{V}'$	$m / c$	пульсационная составляющая вектора скорости в турбулентном течении

---

$V_*$	$m / c$	динамическая скорость
$x_j$	$m$	пространственная координата
$y^+$		безразмерное расстояние до стенки

### Греческие буквы

Обозначение	Размерность	Описание
$\delta_{ij}$		символ Кронекера
$\varepsilon$	$m^2 / c^3$	скорость диссипации кинетической энергии турбулентности
$\varepsilon_{ijk}$		компонента альтернирующего тензора (тензора Леви-Чивита)
$\lambda$	$Вт / м \cdot К$	коэффициент теплопроводности
$\mu$	$Па \cdot c$	динамическая (молекулярная) вязкость
$\mu_t$	$Па \cdot c$	турбулентная вязкость
$\mu_{eff}$	$Па \cdot c$	эффективная вязкость
$\nu$	$m^2 / c$	кинематическая вязкость жидкости
$\rho$	$кг / м^3$	плотность жидкости
$\tau_{ij}$	$Па$	компонента тензора вязких напряжений, $i, j = 1, 2, 3$
$\tau_w$	$Па$	напряжение трения на твердой поверхности
$\omega$	$1 / c$	удельная скорость диссипации энергии турбулентности
$\Omega = \sqrt{2\underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\Omega}}}$	$1 / c$	скалярная мера тензора завихренности
$\underline{\underline{\Omega}}$	$1 / c$	тензор вращения (завихренности)

---

## Операторы

Обозначение	Описание
$\otimes$	знак операции тензорного произведения
$\vec{\nabla} = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$	оператор Гамильтона
$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$	оператор Лапласа
$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$	оператор материальной (эйлеровой) производной

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Вычислительная гидродинамика за несколько последних десятилетий проделала путь, сопоставимый со столетиями для классической гидродинамики. Этим она обязана бурному развитию компьютерной техники и разработке эффективных численных методов. Еще сравнительно недавно основой расчетов служили программы, составленные исследователем, которые реализовывались в вычислительных центрах. Результаты расчетов обрабатывались вручную. В настоящее время, на индустриальном этапе вычислительной гидродинамики, широкое распространение получили универсальные и специализированные пакеты прикладных программ, имеющие структуру «триады»: генератор расчетной сетки, решатель, графический обработчик результатов. В наполнение пакетов входят каталоги математических моделей физических процессов, на базе которых строится решение конкретной инженерной задачи. Такие пакеты доступны всем пользователям персональных компьютеров.

Эффективное использование пакетов прикладных программ предполагает:

- освоение используемых моделей физических процессов, описание которых невозможно воспринимать без овладения математическим аппаратом тензорного исчисления;
- создание более совершенных математических моделей процессов, поскольку научные исследования в области гидродинамики, как в любой другой области науки, еще далеки от своего завершения, особенно это касается теории турбулентности. Здесь также получение новых научных результатов возможно без опоры на математический аппарат тензорного исчисления.

Отсюда видна роль тензорного исчисления как математического аппарата вычислительной гидродинамики. Однако, в настоящее время практически отсутствует литература, посвященная приложениям этого аппарата в механике жидкости и газа. Предлагаемая вниманию читателя книга восполняет этот пробел.

Книга содержит пять глав, в которых излагаются сведения из тензорной алгебры и анализа применительно к трехмерному евклидову пространству с декартовой системой координат. В ней подробно рассмотрены вопросы построения замкнутой системы уравнений для решения гидродинамических задач. Изложены различные подходы к теоретическому описанию турбулентных течений. Для построения новых, более совершенных, моделей турбулентности полезны результаты по получению новых уравнений переноса из комбинаций основных уравнений гидромеханики. Особое внимание уделено вопросам моделирования турбулентности, анализу современных моделей турбулентности, используемых в пакетах прикладных программ, их достоинствам и недостаткам.

Книга представляет значительный интерес для инженеров, исследователей и научных работников, занимающихся вопросами моделирования течений жидкостей и газов. Она полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов при изучении соответствующих дисциплин.

Н.Ф. Морозов, доктор физико-математических наук,  
академик РАН

## ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика является одним из разделов механики сплошных сред, объектом ее изучения являются течения жидкостей и газов. При моделировании течений жидкостей и газов в конечном итоге главной задачей является получение либо интегральных характеристик течения, либо распределений полевых величин, которые связываются между собой дифференциальными соотношениями, в общем случае являющимися уравнениями переноса. Для выполнения этой задачи система уравнений гидродинамики должна быть замкнутой – число уравнений должно соответствовать числу неизвестных. При этом соответствие должно выполняться как по числу переменных, так и по рангам тензорных объектов – для неизвестной тензорной величины ранга  $N$  соответствующее уравнение должно быть того же ранга. Так, если в состав неизвестных величин входят, например, две скалярных величины (тензоры нулевого ранга), одна векторная (тензор первого ранга) и одна тензорная второго ранга, то система уравнений должна содержать два скалярных уравнения, одно векторное и одно тензорное. В частности, для течений несжимаемой жидкости, когда неизвестными величинами являются давление  $p$  и скорость  $\vec{V}$  частиц жидкости в области течения, соответствующая замкнутая система содержит два уравнения: одно векторное – уравнение движения (Эйлера или Навье-Стокса), и одно скалярное – уравнение неразрывности. В случае учета сжимаемости появляется еще одна неизвестная величина – плотность  $\rho$ . Это влечет за собой необходимость привлечения еще одного скалярного уравнения для замыкания системы уравнений. В качестве такового в гидродинамике выступает уравнение энергии. Но в этом уравнении помимо плотности содержится новая неизвестная скалярная величина – температура  $T$  (или же связанные с ней энтальпия  $h$  либо внутренняя энергия  $E$ ). Таким образом, построенная система из трех уравнений (движения, неразрывности и энергии) вновь оказывается незамкнутой – для ее замыкания необходимо ввести в рассмотрение еще

---

одно скалярное уравнение. Этим уравнением является термическое уравнение состояния, связывающее между собой три термодинамических параметра – скалярные величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ . В качестве уравнения состояния при описании течений газов обычно используют модель совершенного газа, поведение которого подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона и для которого теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  являются константами, значения которых дает молекулярно-кинетическая теория газов. В более сложных случаях, когда газ не является совершенным или сжимаемая жидкость является капельной, термодинамические уравнения состояния дают специальные разделы термодинамики. В итоге система уравнений сжимаемой жидкости вновь оказывается замкнутой.

Для замыкания системы уравнений, описывающих течения многокомпонентных сред, когда в рассмотрение вводятся массовые, а в ряде случаев молярные, концентрации отдельных компонент, приходится записывать уравнения диффузии для каждой компоненты. Если же между компонентами к тому же происходят химические реакции (задачи теории горения), то появляются новые скалярные величины, связанные с выделением (или поглощением) тепла и для замыкания системы уравнений в нее необходимо привлекать уравнения химической кинетики.

Процесс усложнения замкнутой системы уравнений по мере необходимости учета все более и более специфических черт течений жидкости может продолжаться сколь угодно далеко. Так, например, при описании поведения проводящих сред, что является предметом изучения магнитной гидродинамики, в уравнениях движения появляются пондеромоторные (лоренцовы) силы, в которых фигурируют векторы напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ . В этом случае приходится для замыкания привлекать векторные уравнения электродинамики – уравнения Максвелла.

Все сказанное выше относилось к сравнительно медленным, плавным, ламинарным (слоистым) течениям. В случае турбулентного режима все физи-

ческие величины, фигурирующие в соответствующей замкнутой системе уравнений, рассматриваются как мгновенные, которые в каждой точке потока пульсируют относительно некоторого осредненного (по времени или по пространству) значения. Разбиение этих мгновенных величин на сумму осредненных и пульсационных значений и последующая процедура осреднения уравнений (по Рейнольдсу для несжимаемых сред или по Фавру для сжимаемых) приводит к появлению новых неизвестных – корреляций пульсационных величин. Оказывается, что для замыкания системы уравнений, описывающей турбулентный режим течения нужны новые уравнения для вновь возникающих неизвестных корреляций. Замкнутая система уравнений для турбулентного режима течения становится намного сложнее по сравнению с ламинарным.

Так, даже в самом простом случае течения – течения несжимаемой вязкой жидкости, когда система состоит из двух уравнений (неразрывности и Навье-Стокса) – процедура осреднения приводит к появлению тензора корреляций пульсаций скорости (отнесенного к единице массы движущейся жидкости), который в литературе называют тензором напряжений Рейнольдса. Система уравнений становится незамкнутой и должна быть дополнена каким-либо тензорным уравнением относительно этого нового тензора второго ранга. Если далее на основе уравнения Навье-Стокса записать уравнение переноса для этого тензора второго ранга, возникают новые неизвестные величины – корреляции пульсаций скорости в виде тензора третьего ранга в сочетании с сопутствующим неизвестными тензорами меньших рангов. Последующая запись уравнения переноса для возникающего тензора третьего ранга порождает тензор пульсаций четвертого ранга и т. д. Возникает цепочка уравнений переноса тензоров для пульсационных характеристик потока все более и более высоких рангов, которая в литературе по турбулентности называется цепочкой Фрийдмана-Келлера. В итоге даже для простого сдвигового течения несжимаемой жидкости систему уравнений невозможно сделать замкнутой,

---

используя только строгие математические процедуры. Это и составляет суть проблемы замыкания в теории турбулентности. Для ее решения на современном этапе развития теории турбулентности приходится выполнять на чисто эмпирическом уровне – обрывая в каком-либо месте цепочку Фридмана-Келлера. Так, если эта цепочка обрывается уже в самом ее начале, когда только возникает тензор второго ранга для пульсационных величин, то соответствующую полуэмпирическую теорию турбулентности называют теорией первого порядка. Эти теории дают алгебраическую связь между тензором напряжений Рейнольдса и тензором осредненных скоростей деформаций на основе гипотезы Буссинеска о турбулентной вязкости. При этом сама турбулентная вязкость может быть записана или через осредненные градиенты скоростей (теории Л. Прандтля, Т. Кармана, В.В. Новожилова и другие), или через осредненные пульсационные характеристики течения, которые определяются соответствующими дифференциальными уравнениями переноса (модели « $k-\epsilon$ », « $k-\omega$ », и другие). Теории турбулентности второго порядка решают проблему замыкания с помощью записи тензорного дифференциального уравнения переноса для собственно тензора напряжений Рейнольдса, а также полуэмпирических соотношений для вновь возникших тензоров пульсационных величин. Классификация моделей турбулентности будет рассмотрена далее.

В предлагаемой работе детально рассмотрены проблемы замыкания систем уравнений, возникающих в гидродинамике при рассмотрении разнообразных течений жидкости. При изложении материала широко используется математический аппарат прямого тензорного исчисления, позволяющий компактно и прозрачно (с точки зрения физического смысла) записывать тензорные соотношения. Дифференциальные уравнения переноса приводятся к дивергентному виду для облегчения проведения вычислительных процедур. Дается обзор и проводится обсуждение современных моделей турбулентности,

используемых при проведении расчетов турбулентных течений с помощью пакетов прикладных программ (например, ANSYS Fluent, NUMECA, CD-Adapco StarCD/CCM+, FlowVision, и т. д.).

Поскольку для турбулентного режима при выполнении процедур осреднения возникает большое число новых неизвестных корреляций пульсационных величин в виде тензоров различных рангов, а для их конкретизации и тем самым для замыкания соответствующих систем уравнений требуется все новые и новые уравнения связи такого рода тензоров с другими, то в работе также рассматриваются вопросы получения самых разнообразных тензорных соотношений, связанных с пульсациями физических величин. Для этого обсуждаются вопросы получения новых уравнений переноса из комбинаций уравнений неразрывности, движения и энергии.

Авторы уверены, что глубокое понимание этих вопросов способно серьезно облегчить исследователю обоснованный выбор той или иной математической модели течения при решении практических задач, или же поможет ему в создании собственных реологических соотношений механики жидкости и газа.

В дальнейшем замечания и примеры будут выделяться курсивом для облегчения чтения текста.

## ГЛАВА 1 . МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ГИДРОДИНАМИКИ. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### 1.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕНЗОРАХ. ИНДЕКСНЫЕ И СИМВОЛИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРОВ

При описании течений и процессов в гидродинамике используются понятия трехмерного евклидова пространства с различными системами координат и классического времени. Тем самым принимается ньютоновская модель пространства и времени, согласно которой трехмерное евклидово пространство  $\epsilon$  равномерно скользит по оси времени. Напомним, что евклидовым называется пространство с операцией скалярного умножения – так, скалярное произведение вектора на единичный вектор (орт оси) дает его проекцию на эту ось. Выбор системы координат произволен и не должен сказываться на физических следствиях получаемых уравнений. Математические объекты, с помощью которых описываются физические явления, не должны зависеть от частного выбора системы координат, а физические законы должны выражаться через эти объекты математическими соотношениями, инвариантными относительно преобразований системы координат. Такими математическими объектами являются тензоры различных рангов, а физические законы и уравнения имеют вид тензорных соотношений [6; 23; 33; 35; 42; 65].

В трехмерном евклидовом пространстве можно выбрать базис – произвольную тройку некопланарных векторов, соответствующих той или иной системе координат. Наиболее удобным и простым в использовании является базис декартовой прямоугольной системы координат  $(x, y, z)$ , который и будем далее использовать. Этот базис  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  является ортонормированным (ортогональным и нормированным, т. е. базисные векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину). Удобство декартова прямоугольного ба-

зиса заключается в том, что векторы базиса не меняются при переходе от одной точки пространства к другой. Любой вектор  $\vec{a}$  в этом базисе может быть представлен в виде разложения по базису

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (1.1.1)$$

где  $a_x, a_y, a_z$  – проекции вектора  $\vec{a}$  на оси  $x, y, z$ , соответственно, т. е.  $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}$ ,  $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}$ ,  $a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}$ . Здесь и далее точки являются символами скалярного произведения. На Рис. 1.1 показан радиус-вектор  $\vec{r}$  произвольной точки с координатами  $(x, y, z)$ , который в координатном виде записывается как

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.1.2)$$

Очевидно, что координаты его суть проекции на оси, т. е.  $x = \vec{r} \cdot \vec{i}$ ,  $y = \vec{r} \cdot \vec{j}$ ,  $z = \vec{r} \cdot \vec{k}$ .

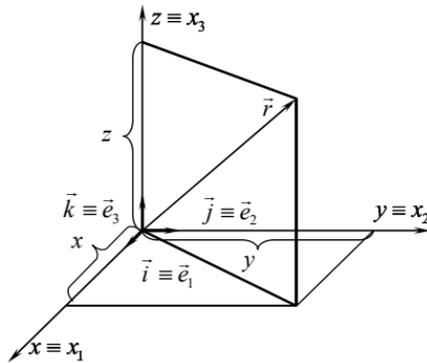


Рис. 1.1. Декартова прямоугольная система координат

В дальнейшем, для удобства, будем использовать индексную форму записи, приписывая индекс 1 оси  $x$ , индекс 2 – оси  $y$  и индекс 3 – оси  $z$ . Тогда

базисные векторы будут обозначаться как  $\vec{i} = \vec{e}_1$ ,  $\vec{j} = \vec{e}_2$ ,  $\vec{k} = \vec{e}_3$ , соответственно, а компоненты радиус-вектора примут следующие обозначения:  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$ , и вместо (1.1.2) можно будет записать:

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad (1.1.3)$$

а вместо (1.1.1):

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \quad (1.1.4)$$

Если использовать знак суммирования, эти выражения записываются в компактном виде следующим образом:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i\vec{e}_i, \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i\vec{e}_i, \quad (1.1.5)$$

где индексы пробегают значения 1, 2, 3, т. е. по ним идет суммирование. Индексы могут быть обозначены и другими буквами, например,  $\vec{r} = \sum_{j=1}^3 x_j\vec{e}_j$ , и т. д.

Вместо выражений (1.1.5) можно записать:

$$\vec{r} = x_i\vec{e}_i, \quad \vec{a} = a_i\vec{e}_i, \quad (1.1.6)$$

отбрасывая для краткости записи знак суммирования и используя правило суммирования, которое заключается в следующем. По правилам индексных обозначений один и тот же индекс в каждом одночленном выражении может встречаться или один, или два раза. Если индекс употреблен один раз, то подразумевается, что он принимает одно из значений 1, 2, 3. Если же индекс употреблен дважды, как в выражениях (1.1.5), то используется правило суммирования: если в одночленном выражении один и тот же индекс используется дважды, то по нему происходит суммирование по значениям этого индекса 1, 2, 3. Индекс, по которому происходит суммирование, называется немым – его можно заменять на любой другой (например,  $a_i x_i = a_j x_j = \dots$ ).

Тензор как математический объект существует независимо от системы координат. В то же время, в каждой системе координат тензор можно задать

некоторой совокупностью величин, называемых его компонентами. Если компоненты тензора заданы в одной системе координат, то они определены и в другой, так как определение тензора включает в себя и закон преобразования его компонент. Тензоры можно классифицировать по рангу или по порядку, что связано с числом компонент тензора. В трехмерном евклидовом пространстве, таком как обычное физическое пространство, число компонент тензора равно  $3^N$ , где  $N$  – ранг тензора. Тензор нулевого ранга (скаляр) имеет одну компоненту и выражает физическую величину, характеризующуюся только числом (температура, плотность и т. д.). Тензоры первого ранга (векторы) имеют три компоненты, и характеризуются как численным значением, так и направлением (скорость, сила, интенсивность теплового потока и т. д.). Тензоры второго ранга в трехмерном евклидовом пространстве имеют девять компонент и описывают такие важные характеристики, как напряжения, деформации, скорости деформаций и т. д. Также широко используют и тензоры более высокого ранга, в частности 3-го и 4-го, которые имеют 27 и 81 компоненту, соответственно.

*Исторически сложились два подхода к изложению теории тензоров. Первый трактует тензоры как объекты, компоненты которых подчиняются определенным операциям. Этот подход, отождествляющий тензоры с их компонентами (в литературе условно называемый подходом Эйнштейна), является пока наиболее распространенным в курсах гидродинамики. Недостатки его очевидны – громоздкость записи и так называемая «вакханалия» индексов. Второй подход (часто называемый подходом Гиббса), трактует тензоры как объекты, с которыми непосредственно производятся определенные действия. Преимущества этого подхода заключаются в простоте записи и, как следствие этого, обозримости результатов и четко проступающем математическом и физическом смысле в производимых выкладках. На*

наш взгляд, подход Гиббса является наиболее перспективным и все возрастающее количество научных публикаций в последнее время использует именно его.

В дальнейшем будем широко использовать второй подход в теории тензоров и применять главным образом символические безиндексные тензорные обозначения, но наряду с этим при записи компонент тензоров будем использовать индексные обозначения. Так, скалярные величины будем в основном обозначать строчной буквой:  $a, \alpha, \dots$ . Векторы в символической форме – строчными буквами латинского алфавита со стрелкой наверху  $\vec{a}, \vec{b}, \dots$  или жирным шрифтом, а тензоры – в основном прописной буквой латинского алфавита с чертой внизу  $\underline{A}, \underline{B}, \dots$ .

В индексных обозначениях при выбранном базисе к характерной букве, представляющей компоненту интересующей нас тензорной величины, добавляют буквенные индексы, пробегающие значения 1, 2, 3:  $a_i, b_j, C_{ij}, \dots$ . По правилам индексных обозначений, как уже отмечалось, буквенный индекс может встречаться в каждом члене один или два раза. Если индекс употреблен дважды, то применяют рассмотренное выше правило суммирования по повторяющемуся индексу.

В качестве примера расшифруем следующие тензорные символы в трехмерном пространстве:  $A_{ii}, B_{ij}, C_{ij}$  :

- $A_{ii}$  характеризует скаляр и представляет собой сумму:  $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ ;
- $B_{ij}$  характеризует вектор, который имеет три компоненты: при  $i=1$  это  $B_{111} + B_{122} + B_{133}$ , при  $i=2$ :  $B_{211} + B_{222} + B_{233}$ , при  $i=3$ :  $B_{311} + B_{322} + B_{333}$ ;
- $C_{ij}$  характеризует тензор второго ранга, имеющий девять компонент:  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$ .

Дельта Кронекера по определению:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.1.7)$$

т. е. при одинаковых цифровых индексах значения дельты Кронекера равны единице, а при разных – нулю:  $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ ,  $\delta_{12} = 0$ ,  $\delta_{13} = 0$ ,  $\delta_{23} = 0$  и т. д.

Для примера вычислим значение величины  $\delta_{ik}\delta_{ki}$ . Поскольку индексы  $i$  и  $k$  встречаются по два раза, по ним происходит суммирование. Просуммируем сначала по  $i$ , затем по  $k$  (можно наоборот):

$$\delta_{ik}\delta_{ki} = \delta_{1k}\delta_{k1} + \delta_{2k}\delta_{k2} + \delta_{3k}\delta_{k3} = \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{21} + \delta_{13}\delta_{31} + \delta_{21}\delta_{12} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{23}\delta_{32} + \delta_{31}\delta_{13} + \delta_{32}\delta_{23} + \delta_{33}\delta_{33} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3.$$

## 1.2. ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

Вектор как геометрический объект трехмерного евклидова пространства представляет собой отрезок снабженный стрелкой. Абсолютную величину произвольного вектора  $\vec{a}$  обозначают просто как  $a$  ( $|\vec{a}| = a$ ). Сложение векторов подчиняется известному правилу параллелограмма (Рис. 1.2а):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

В трехмерном евклидовом пространстве для векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определена операция скалярного умножения векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (точка символизирует эту операцию). Если вектор  $\vec{a}$  – единичный, т. е.  $|\vec{a}| = 1$ , то произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  есть проекция вектора  $\vec{b}$  на направление  $\vec{a}$  (Рис. 1.2).

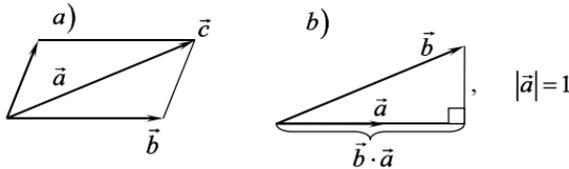


Рис. 1.2. Сложение и проектирование векторов

Для получения компонент вектора, как уже отмечалось, нужно ввести в рассмотрение базис  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Для декартовой прямоугольной системы координат это ортонормированный базис. Это означает что скалярные произведения базисных векторов или 1, или 0 (так  $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  и т. д.). Отсюда следует, что эти произведения могут быть записаны через дельту Кронекера (1.1.7):

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}. \quad (1.2.1)$$

Тогда в базисе  $\vec{e}_i$  разложение вектора  $\vec{a}$  по базису будет  $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ , где компоненты вектора  $a_i$  вычисляются как результат проектирования  $\vec{a}$  на направления базисных векторов  $\vec{e}_i$  (т. е. как результат скалярного произведения вектора  $\vec{a}$  на базисный вектор  $\vec{e}_i$ ):  $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$ . Действительно:

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_i = a_k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i = a_k (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) = a_k \delta_{ki}.$$

Но, согласно определению (1.1.7), величина  $\delta_{ki}$  не равна нулю и равна единице только при  $k = i$ . Следовательно, индекс  $k$  может быть заменен на  $i$ , тогда  $a_k \delta_{ki} = a_i \cdot 1 = a_i$ . Отсюда и следует, что

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_i = a_i,$$

т. е. действительно, для получения проекции вектора на направление базисного вектора нужно скалярно умножить его на базисный вектор.

Например, запишем в компонентном виде выражения  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  и  $\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \vec{e}_i \cdot b_j \vec{e}_j = a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i;$$

$$\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x_i \vec{e}_i \cdot x_k \vec{e}_k = x_i \cdot x_k (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) = x_i x_k \delta_{ik} = x_i x_i,$$

или, более подробно, в обычном виде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

$$\vec{r}^2 = x_i x_i = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Заметим, что появление в процессе выкладок для  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  дельты Кронекера  $\delta_{ij}$  означает, что  $i = j$ . Это позволяет записать данное произведение в виде  $a_i b_i$ , или в виде  $a_j b_j$ , что одно и то же, поскольку индексы  $i$  и  $j$  являются неммыми

(дважды повторяющимися), и их можно заменять на любые другие. То же самое касается и дельты Кронекера  $\delta_{ik}$  в выражении для  $\vec{r}^2$ , что позволяет записать его или в виде  $x_i x_i$ , или в виде  $x_j x_j$ , или  $x_s x_s$ , и так далее. При этом любые повторяющиеся индексы всегда пробегают значения 1, 2, 3.

*Следует отметить, что записывать  $x_i x_i$  в виде  $x_i^2$  (как иногда встречается в литературе) нельзя, т. к. в этом случае исчезает возможность применения правила суммирования по повторяющемуся индексу. В этом случае величина  $x_i^2$  обозначает не сумму  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , а одно из трех значений – или  $x_1^2$ , или  $x_2^2$ , или  $x_3^2$ .*

В трехмерном евклидовом пространстве паре векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно сопоставить:

- скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (скаляр);
- векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b}$  (вектор);
- тензорное произведение  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  (тензор второго ранга),  $\otimes$  – знак тензорного произведения.

Так, для скалярного произведения  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сопоставляется число:

$$\lambda = a \cdot b \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \text{ или, если выбран базис, } \lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i.$$

Модуль вектора  $\vec{a}$  по определению

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_i a_i}.$$

Используя понятие векторного произведения векторов, паре векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно сопоставить вектор

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = [ab \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})] \vec{e}_\perp,$$

где  $\vec{e}_\perp$  – единичный вектор, перпендикулярный плоскости векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и направленный для правоориентированного пространства так, что глядя с его

конца мы видим поворот вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$  по кратчайшему расстоянию против часовой стрелки (рис. 1.3).

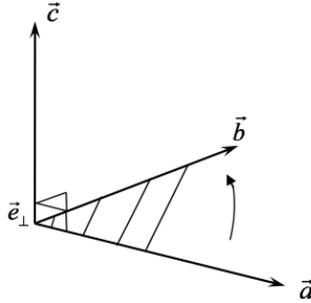


Рис. 1.3. Векторное произведение

Запись векторного произведения через компоненты в выбранном базисе затруднена. Действительно,

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_i \vec{e}_i \times b_j \vec{e}_j = a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j),$$

но величину  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$  – векторное произведение базисных векторов – можно будет записать через базисные элементы  $\vec{e}_i$  только после введения в дальнейшем в рассмотрение специального тензора третьего ранга  ${}^3\underline{\varepsilon}$  – тензора Леви-Чивита.

Иногда в литературе скалярное произведение векторов записывают, применяя для него круглые скобки –  $(\vec{a}, \vec{b})$ , а для векторного – прямые  $[\vec{a}, \vec{b}]$ . Смешанное произведение трех векторов дает объем параллелепипеда, построенного на этих векторах:  $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ . В этом выражении учтено, что скалярное и векторное произведения можно менять местами. А так как векторное произведение выполняется первым, то скобки можно опустить и записать:  $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ . В литературе такое произведение часто обозначают просто как  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ .

Наряду со скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно ввести в рассмотрение тензорное (диадное) произведение их:  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  (диады  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  и  $\vec{b} \otimes \vec{a}$ , вообще говоря, различны). В результате паре элементов исходного трехмерного евклидова пространства  $\mathcal{E}$  сопоставляется единственным образом некоторый элемент  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  трехмерного пространства  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ . Это соответствие является билинейным:

$$\begin{aligned}(\gamma_1 \vec{a}_1 + \gamma_2 \vec{a}_2) \otimes \vec{b} &= \gamma_1 \vec{a}_1 \otimes \vec{b} + \gamma_2 \vec{a}_2 \otimes \vec{b}; \\ \vec{a} \otimes (\mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2) &= \mu_1 \vec{a} \otimes \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a} \otimes \vec{b}_2.\end{aligned}$$

Базис нового (тензорного) пространства представляет собой тензорные произведения (диады) элементов исходного базиса:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1; \quad \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2; \quad \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3; \\ \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1; \quad \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2; \quad \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3; \\ \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1; \quad \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2; \quad \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Элементы пространства  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$  называются тензорами второго ранга, и они представляют собой линейные комбинации относительно элементов тензорного базиса. Разложим тензор второго ранга  $\underline{A}$  по элементам этого базиса:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= A_{11} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + A_{12} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + A_{13} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \\ &+ A_{21} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + A_{22} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + A_{23} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \\ &+ A_{31} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + A_{32} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + A_{33} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3,\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

или, в компактном виде, используя правило суммирования, можно записать:

$$\underline{A} = A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.\tag{1.2.3}$$

При проведении выкладок знак диадного произведения  $\otimes$  можно опускать, и записывать  $\underline{A} = A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ .

Геометрический смысл тензора второго ранга заключается в следующем: он представляет собой линейный оператор, который переводит векторы в векторы (Рис. 1.4).

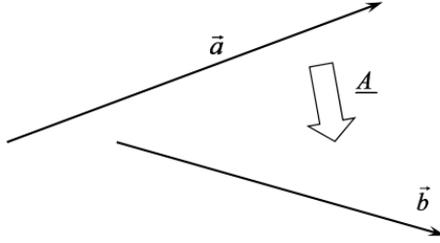


Рис. 1.4. Смысл тензора  $\underline{A}$  – перевод вектора в вектор

На вектор  $\vec{a}$  подействовал тензор  $\underline{A}$  и в результате получился другой вектор – вектор  $\vec{b}$ . Аналитически это записывается следующим образом:

$$\vec{a} \cdot \underline{A} = \vec{b}, \quad (1.2.4)$$

Покажем, что это так, записывая левую часть в компонентном виде:

$$\vec{a} \cdot \underline{A} = a_i \vec{e}_i \cdot A_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k = a_i A_{jk} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_k = a_i A_{jk} \delta_{ij} \vec{e}_k = a_j A_{jk} \vec{e}_k.$$

Согласно правилу суммирования величина  $a_j A_{jk}$  есть  $k$ -тая компонента некоторого вектора  $\vec{b}$ , которую обозначим как  $b_k$ . Тогда  $\vec{a} \cdot \underline{A} = b_k \vec{e}_k = \vec{b}$ .

Компоненты тензора второго ранга находятся легко, если выбран базис  $\vec{e}_k$ . Тогда после представления тензора в компонентном виде как  $\underline{A} = A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$  его компоненты могут быть найдены умножением  $\underline{A}$  скалярно на базисные векторы слева и справа:

$$A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \underline{A} \cdot \vec{e}_j. \quad (1.2.5)$$

Действительно:

$$\vec{e}_i \cdot \underline{A} \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot A_{ks} \vec{e}_k \vec{e}_s \cdot \vec{e}_j = A_{ks} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) (\vec{e}_s \cdot \vec{e}_j) = A_{ks} \delta_{ik} \delta_{sj} = A_{ij}.$$

Здесь учтено, что дельты Кронекера  $\delta_{ik}$  и  $\delta_{sj}$  не равны нулю и равны единицам только при равенстве значений индексов, т. е. при  $k = i$  и  $s = j$ .

Каждому тензору второго ранга соответствует его матрица компонент:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

Единичный тензор  $\underline{E}$  (тензорная единица) является тензором второго ранга, он имеет своими компонентами дельты Кронекера:

$$\underline{E} = \delta_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j. \quad (1.2.7)$$

Он переводит вектор сам в себя, и вообще, скалярное произведение произвольного тензора на единичный тензор не меняет этот тензор. Матрица компонент единичного тензора имеет вид:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.8)$$

Тензоры более высоких, нежели второго, рангов можно в компонентном виде записывать через базисные полиады. Так, тензор третьего ранга в качестве базисных элементов имеет базисные триады, тензоры четвертого ранга – базисные тетрады и т. д.:

$${}^3 \underline{A} = A_{ijk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k, \quad (1.2.9)$$

$${}^4 \underline{A} = A_{ijkl} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l. \quad (1.2.10)$$

Здесь слева у обозначения тензора помечен его ранг (не путать обозначения  ${}^3 \underline{A}$  для тензора третьего ранга с  $\underline{A}^3$  – кубом тензора второго ранга). Видно, что тензор третьего ранга имеет 27 компонент, тензор четвертого ранга – 81 компоненту и т. д. Заметим, что в механике жидкости тензоры ранга больше четырех не используются, так как они не имеют физического смысла.

### 1.3. ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА: ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ И ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

#### Тензор инерции

В классической механике твердого тела вводят понятие тензора моментов инерции  $\underline{I}$  [34; 62]. Этот тензор переводит вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  в вектор кинетического момента  $\vec{K}$  относительно рассматриваемой точки тела  $O$  (Рис. 1.5):

$$\vec{\omega} \cdot \underline{I} = \vec{K}. \quad (1.3.1)$$

В выбранном базисе  $\vec{e}_i$  тензор  $\underline{I}$  можно представить в компонентном виде следующим образом:

$$\underline{I} = I_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \quad (1.3.2)$$

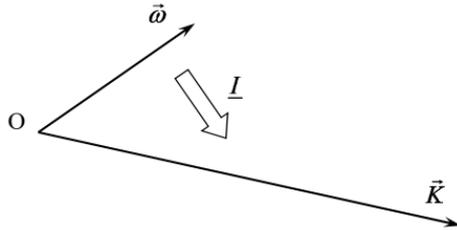


Рис. 1.5. Перевод вектора угловой скорости в вектор кинетического момента

Матрица компонент этого тензора второго ранга имеет вид:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Она является симметричной относительно главной диагонали:  $I_{ij} = I_{ji}$ . На этой диагонали находятся осевые моменты инерции, вне ее – центробежные.

Покажем, что тензор  $\underline{I}$  действительно переводит вектор  $\vec{\omega}$  в вектор  $\vec{K}$ . Переходя к компонентной форме записи, левую часть выражения (1.3.1) представим в следующем виде:

$$\vec{\omega} \cdot \underline{I} = \omega_i \vec{e}_i \cdot I_{js} \vec{e}_j \vec{e}_s = \omega_i I_{js} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_s = \omega_i I_{js} \delta_{ij} \vec{e}_s = \omega_i I_{is} \vec{e}_s.$$

Здесь по индексу  $i$  идет суммирование. Величина  $\omega_i I_{is}$  есть компонента некоторого вектора  $\vec{K}$ , которую можно обозначить как « $s$ -тую» компоненту этого вектора, т. е. записать:  $K_s = \omega_i I_{is}$ . В итоге имеем:

$$\vec{\omega} \cdot \underline{I} = \omega_i I_{is} \vec{e}_s = K_s \vec{e}_s = \vec{K}.$$

Структура тензора моментов инерции определяется выражением:

$$\underline{I} = \int_V \rho (r^2 \underline{E} - \vec{r} \otimes \vec{r}) dV, \quad (1.3.3)$$

В этом интеграле по объему  $\rho$  – плотность материала в произвольной точке тела, положение которой относительно точки начала отсчета  $O$  определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ . Запишем этот тензор в компонентном виде в базисе  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ , учитывая что  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x_k x_k$ :

$$I_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \int_V \rho [x_k x_k \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j - x_i x_j \vec{e}_i \vec{e}_j] dV.$$

Отсюда видно, что компоненты тензора моментов инерции определяются выражениями:

$$I_{ij} = \int_V \rho [x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j] dV.$$

Для осевого момента инерции при  $i = j = 1$  получаем:

$$I_{xx} = I_{11} = \int_V \rho [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot 1 - x_1^2] dV = \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) dV = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV,$$

а для центробежного момента при  $i=1, j=2$ :

$$I_{xy} = I_{12} = \int_V \rho [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot 0 - x_1 x_2] dV = - \int_V \rho x_1 x_2 dV = - \int_V \rho xy dV.$$

Очевидно, что  $I_{xy} = I_{yz}$ . Остальные компоненты тензора можно получить аналогично, они имеют вид:

$$I_{yy} = \int_V \rho (x^2 + z^2) dV; I_{zz} = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV;$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int_V \rho yz dV; I_{zx} = I_{xz} = - \int_V \rho xz dV.$$

### Тензор напряжений

Следуя О. Коши, тензор напряжений  $\underline{\sigma}$  вводят в рассмотрение следующим образом: представляют элементарный объем  $dV$  сплошной среды рассеченным на две части (Рис. 1.6) и ставят вопрос о воздействии отброшенной части на оставшуюся. Это воздействие характеризуется вектором интенсивности поверхностной силы – вектором напряжений  $\vec{\sigma}_n$ , приложенного к площадке, разделяющей эти части. Вообще говоря, этот вектор зависит от ориентации получившейся в месте рассечения площадки, положение которой определяется вектором единичной нормали  $\vec{n}$ . Зависимость между этими векторами, следуя Коши, принимается линейной. Тогда из определения понятия тензора второго ранга как оператора, переводящего вектор в вектор, следует, что

$$\vec{n} \cdot \underline{\sigma} = \vec{\sigma}_n. \quad (1.3.4)$$

Тензор  $\underline{\sigma}$  называется тензором напряжений и, в отличие от вектора напряжения  $\vec{\sigma}_n$ , в рассматриваемой точке среды от ориентации площадки не зависит.

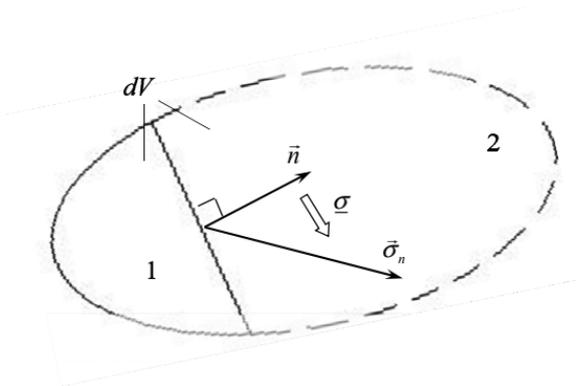


Рис. 1.6. К определению тензора напряжений – воздействие отброшенной части объема 2 (пунктирная линия) на оставшуюся 1 (сплошная)

Тензор напряжений  $\underline{\sigma}$  в терминах компонент может быть записан в виде:

$$\underline{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \quad (1.3.5)$$

его компоненты образуют симметричную матрицу:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \text{ или иначе } \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.3.6)$$

На главной диагонали матрицы находятся нормальные напряжения, вне ее – касательные. Для описания движения жидкости необходимо связать тензор  $\underline{\sigma}$  с деформационными характеристиками жидкости, которые зависят от ее сжимаемости и вязкости.

Рассмотрим физический смысл компонент тензора напряжений. Для этого в окрестности рассматриваемой точки жидкости выделим элементарный кубик с гранями, перпендикулярными осям координат и тем самым базисным векторам (Рис. 1.7). На грань, перпендикулярную оси  $x_1 \equiv x$ , действует сила  $\vec{\sigma}_1$ , которая находится следующим образом согласно определению тензора:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 &= \bar{e}_1 \cdot \underline{\sigma} = \bar{e}_1 \cdot \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \sigma_{ij} \delta_{1i} \bar{e}_j = \sigma_{1j} \bar{e}_j = \\ &= \sigma_{11} \bar{e}_1 + \sigma_{12} \bar{e}_2 + \sigma_{13} \bar{e}_3 = \sigma_{xx} \bar{e}_x + \sigma_{xy} \bar{e}_y + \sigma_{xz} \bar{e}_z. \end{aligned}$$

Компоненты вектора  $\vec{\sigma}_1$ , действующего на грань, перпендикулярную оси  $x$ , показаны на Рис. 1.7.

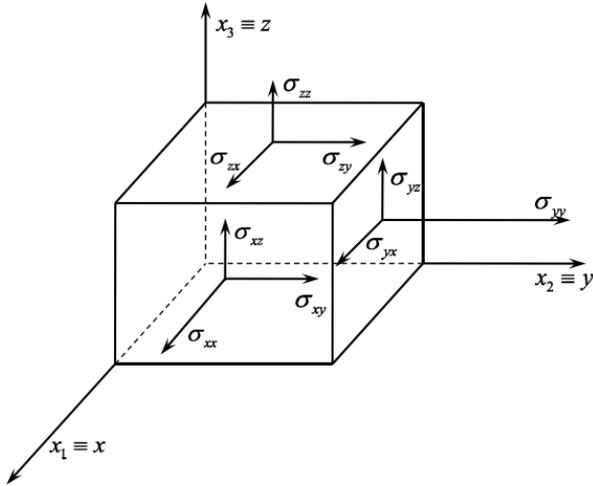


Рис. 1.7. Компоненты тензора напряжений

Аналогичным образом для граней, перпендикулярных осям  $y$  и  $z$ , можно указать векторы  $\vec{\sigma}_2$  и  $\vec{\sigma}_3$ , приложенные к этим граням:

$$\vec{\sigma}_2 = \vec{e}_2 \cdot \underline{\sigma} = \vec{e}_2 \cdot \sigma_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \sigma_{ij} \delta_{2i} \vec{e}_j = \sigma_{2j} \vec{e}_j = \sigma_{yx} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \sigma_{yz} \vec{e}_z;$$

$$\vec{\sigma}_3 = \vec{e}_3 \cdot \underline{\sigma} = \vec{e}_3 \cdot \sigma_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \sigma_{ij} \delta_{3i} \vec{e}_j = \sigma_{3j} \vec{e}_j = \sigma_{zx} \vec{e}_x + \sigma_{zy} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z.$$

Компоненты этих сил также показаны на Рис. 1.7. Из сказанного видно, что компонента тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  обозначает удельную силу, приложенную к площадке с нормалью  $\vec{e}_i$ , т. е. перпендикулярной оси  $x_i$  в направлении оси  $x_j$ . Например,  $\sigma_{yx}$  есть вектор, приложенный к площадке, перпендикулярной оси  $y$ , в направлении оси  $x$ .

Согласно О. Коши [23; 38; 53], тензор напряжений  $\underline{\sigma}$  является симметричным, что означает симметрию компонент относительно главной диагонали, т. е.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Это следует из известного закона парности касательных напряжений, согласно которому выполняется следующее равенство значений касательных компонент:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

Физический смысл этих равенств – отсутствие главного момента сил, действующих на элементарный объем, относительно центра масс этого объема. Если отказаться от этого предположения Коши, то придется вводить в рассмотрение тензор моментных напряжений  $\underline{m} = m_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ . Теории, учитывающие этот тензор при описании поведения жидкости, называются моментными. Они сложны, громоздки и в современной механике используются редко [53].

Пользуясь понятием тензора напряжений, запишем известный закон Паскаля в тензорном виде. Этот закон гласит, что в покоящейся жидкости давление не зависит от ориентации площадки, и всегда направлено по нормали к ней (Рис. 1.8). Отсюда:

$$\vec{\sigma}_n = -p\vec{n}, \quad (1.3.7)$$

где  $p$  – давление жидкости в рассматриваемой точке.

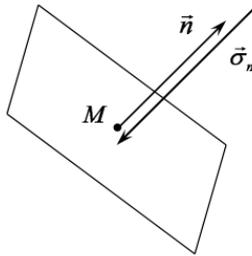


Рис. 1.8. Вектор напряжения  $\vec{\sigma}_n$  по закону Паскаля

Равенство (1.3.7) можно переписать в несколько другом виде, используя выражение для вектора напряжений и понятие тензорной единицы  $\underline{E}$  (1.2.7):

$$\vec{n} \cdot \underline{\sigma} = -p\vec{n} \cdot \underline{E}.$$

После несложной цепочки преобразований имеем:

$$\vec{n} \cdot \underline{\sigma} + p\vec{n} \cdot \underline{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot (\underline{\sigma} + p\underline{E}) = 0,$$

откуда следует:

$$\underline{\sigma} + p\underline{E} = 0. \quad (1.3.8)$$

Отсюда имеем выражение для тензора напряжений:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{E}. \quad (1.3.9)$$

Это и есть закон Паскаля в тензорном виде. В компонентном виде это выражение записывается как  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ , т. е. матрица тензора напряжений имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Видно, что нормальные напряжения равны между собой, а касательные отсутствуют. А поскольку в идеальной жидкости и при ее движении нет касательных напряжений (в силу отсутствия сил вязкости), то тензор напряжений в ней всегда записывается в виде (1.3.9).

В случае течения вязкой жидкости появляется добавочное слагаемое:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{E} + \underline{\tau}, \quad (1.3.10)$$

где  $\underline{\tau}$  – тензор вязких напряжений, выражение для которого дается законом вязкого трения Ньютона [33; 50; 72].

#### 1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ

Рассмотрим простейшие операции над тензорами.

1. Умножение на число: каждая компонента тензора умножается на одно и то же число. Например,  $\alpha \underline{A}$  в компонентном виде записывается следующим образом:

$$\alpha \underline{A} = \alpha A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (1.4.1)$$

2. Сложение тензоров одинакового ранга:  $\underline{A} + \underline{B}$ . В терминах компонент это:

$$\underline{A} + \underline{B} = (A_{ij} + B_{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (1.4.2)$$

3. Скалярное произведение тензоров (свертка): скалярно перемножаются два соседних базисных вектора, в результате чего появляется новый тензор, который имеет ранг на два меньший суммы рангов исходных тензоров. Пусть, для

примера,  $\underline{A} = A_{km} \bar{e}_k \bar{e}_m$  и  ${}^3 \underline{B} = B_{jst} \bar{e}_j \bar{e}_s \bar{e}_t$ . Их скалярное произведение дает тензор третьего ранга:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot {}^3 \underline{B} &= A_{km} \bar{e}_k \bar{e}_m \cdot B_{jst} \bar{e}_j \bar{e}_s \bar{e}_t = A_{km} B_{jst} \bar{e}_k (\bar{e}_m \cdot \bar{e}_j) \bar{e}_s \bar{e}_t = \\ &= A_{km} B_{jst} \delta_{mj} \bar{e}_k \bar{e}_s \bar{e}_t = A_{kj} B_{jst} \bar{e}_k \bar{e}_s \bar{e}_t \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Другие примеры:

а) скалярное произведение векторов и тензоров:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_k \bar{e}_k \cdot b_s \bar{e}_s = a_k b_s (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_s) = a_k b_s \delta_{ks} = a_k b_k; \\ \vec{a} \cdot \underline{A} &= a_i \bar{e}_i \cdot A_{kj} \bar{e}_k \bar{e}_j = a_i A_{kj} \delta_{ik} \bar{e}_j = a_i A_{ij} \bar{e}_j; \\ \underline{A} \cdot \vec{a} &= A_{jk} \bar{e}_j \bar{e}_k \cdot a_i \bar{e}_i = A_{ji} a_i \bar{e}_j. \end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае  $\vec{a} \cdot \underline{A} \neq \underline{A} \cdot \vec{a}$ .

б) умножение на единичный тензор (справа и слева):

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \underline{E} &= a_i \bar{e}_i \cdot \delta_{ks} \bar{e}_k \bar{e}_s = a_i \delta_{ks} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k) \bar{e}_s = a_i \delta_{ks} \delta_{ik} \bar{e}_s = a_i \bar{e}_i = \vec{a}; \\ \underline{E} \cdot \vec{a} &= \delta_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot a_k \bar{e}_k = a_k \delta_{ij} \delta_{jk} \bar{e}_i = a_i \bar{e}_i = \vec{a}; \\ \underline{A} \cdot \underline{E} &= A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot \delta_{ks} \bar{e}_k \bar{e}_s = A_{ij} \delta_{ks} \delta_{jk} \bar{e}_i \bar{e}_s = A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \underline{A}; \\ \underline{E} \cdot \underline{A} &= \delta_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot A_{pq} \bar{e}_p \bar{e}_q = A_{pq} \delta_{ij} \delta_{jp} \bar{e}_i \bar{e}_q = A_{pq} \bar{e}_p \bar{e}_q = \underline{A}. \end{aligned}$$

Таким образом, умножение на единичный тензор не меняет исходного тензора.

**4. Степени тензоров**, т. е. скалярные произведения тензора самого на себя:

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = \underline{A}^2; \quad \underline{A}^2 \cdot \underline{A} = \underline{A}^3, \text{ и т. д.}$$

В компонентном виде:

$$\begin{aligned} \underline{A}^2 &= \underline{A} \cdot \underline{A} = A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot A_{ks} \bar{e}_k \bar{e}_s = A_{ij} A_{ks} (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) \bar{e}_i \bar{e}_s = A_{ij} A_{ks} \delta_{jk} \bar{e}_i \bar{e}_s = A_{ij} A_{js} \bar{e}_i \bar{e}_s; \\ \underline{A}^3 &= \underline{A}^2 \cdot \underline{A} = A_{ij} A_{js} \bar{e}_i \bar{e}_s \cdot A_{mn} \bar{e}_m \bar{e}_n = A_{ij} A_{js} A_{sn} \bar{e}_i \bar{e}_n. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

В тензорной алгебре для получения результатов скалярных произведений тензоров первого и второго рангов можно использовать их матричное представление. Известно, что прямоугольная таблица элементов, заключенная в скобки и подчиняющаяся определенным правилам обращения с ней, называется матрицей. Символ  $A_{ij}$  обозначает элемент матрицы  $A$ , где первый ин-

декс – номер строки, а второй – номер столбца. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве имеется некоторый тензор и выбран какой-либо базис, для определенности – декартов прямоугольный, тогда любой тензор второго ранга можно записать в виде его матрицы компонент, а вектор можно представить либо в виде строки, либо в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}; (a_1 \ a_2 \ a_3); \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Произведению двух матриц  $AB = C$  соответствует скалярное произведение тензоров, которое в индексной записи выглядит как  $A_{ij}B_{jk} = C_{ik}$ . Здесь происходит умножение по принципу «строка на столбец». Например:

– скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  дает скаляр  $\lambda$ :

$$\lambda = a_i b_i = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3);$$

– скалярное произведение вектора на тензор второго ранга дает вектор:

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 A_{11} + a_2 A_{21} + a_3 A_{31} \\ a_1 A_{12} + a_2 A_{22} + a_3 A_{32} \\ a_1 A_{13} + a_2 A_{23} + a_3 A_{33} \end{pmatrix};$$

– скалярное произведение тензора на вектор дает другой вектор:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 A_{11} + a_2 A_{12} + a_3 A_{13} \\ a_1 A_{21} + a_2 A_{22} + a_3 A_{23} \\ a_1 A_{31} + a_2 A_{32} + a_3 A_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Двойное скалярное произведение тензоров (двойная свертка) – здесь перемножаются две пары соседних базисных векторов. Пусть  ${}^5 \underline{A} = A_{ijkl} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_l$  и

${}^4 \underline{B} = B_{qrst} \vec{e}_q \vec{e}_r \vec{e}_s \vec{e}_t$ , тогда для них двойное скалярное произведение есть

$$\begin{aligned}
 {}^5 \underline{A} : {}^4 \underline{B} &= A_{ijklp} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_l \bar{e}_p : B_{qrst} \bar{e}_q \bar{e}_r \bar{e}_s \bar{e}_t = A_{ijklp} B_{qrst} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k (\bar{e}_p \cdot \bar{e}_q) (\bar{e}_l \cdot \bar{e}_r) \bar{e}_s \bar{e}_t = \\
 &= A_{ijklp} B_{qrst} \delta_{pq} \delta_{lr} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_s \bar{e}_t = A_{ijklp} B_{plst} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_s \bar{e}_t.
 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Ранг полученного тензора на четыре меньше суммы рангов исходных. Можно показать, что для тензорной единицы и произвольного вектора  $\bar{a}$  справедливы равенства:  $\underline{E} : \underline{E} = 3$ ,  $\underline{E} : (\bar{a} \otimes \underline{E}) = \bar{a}$ ,  $\underline{E} : (\underline{E} \otimes \bar{a}) = 3\bar{a}$ .

**6. Тензорное произведение тензоров.** Для тензоров  $\underline{A}$  и  ${}^3 \underline{B}$ , которые, например, в компонентном виде записываются следующим образом:  $\underline{A} = A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j$ ,  ${}^3 \underline{B} = B_{kst} \bar{e}_k \bar{e}_s \bar{e}_t$ , тензорное произведение есть новый тензор, ранг которого равен сумме рангов тензоров:

$$\underline{A} \otimes {}^3 \underline{B} = A_{ij} B_{kst} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_s \bar{e}_t. \tag{1.4.6}$$

**7. Транспонирование тензоров.** Пусть дан некоторый тензор второго ранга  $\underline{A}$ .

Тензор  $\underline{A}^T$  называется транспонированным (сопряженным) по отношению к тензору  $\underline{A}$ , если для любого вектора  $\bar{a}$  выполняется равенство:

$$\underline{A} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \underline{A}^T. \tag{1.4.7}$$

Отсюда следует, что для тензора  $\underline{A} = A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j$  сопряженным является тензор  $\underline{A}^T = A_{ji} \bar{e}_i \bar{e}_j$ , что означает, что в матрице компонент произошла замена строк на столбцы. Действительно:

$$\begin{aligned}
 \underline{A} \cdot \bar{a} &= A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot a_k \bar{e}_k = A_{ij} a_k \delta_{jk} \bar{e}_i = A_{ik} a_k \bar{e}_i; \\
 \bar{a} \cdot \underline{A}^T &= a_k \bar{e}_k \cdot A_{ji} \bar{e}_i \bar{e}_j = a_k A_{ji} \delta_{ki} \bar{e}_j = a_k A_{jk} \bar{e}_j = A_{ik} a_k \bar{e}_i.
 \end{aligned}$$

Тензор называется симметричным, если он совпадает со своим транспонированным:  $\underline{A} = \underline{A}^T$ . Это равносильно равенству  $A_{ij} = A_{ji}$ , матрица компонент такого тензора симметрична относительно главной диагонали. Симметричный тензор является самосопряженным. Тензор называется антисимметричным, если  $\underline{A}^T = -\underline{A}$ , т. е.  $A_{ij} = -A_{ji}$ .

Любой тензор второго ранга можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$\underline{L} = \underline{L}^s + \underline{L}^a, \quad (1.4.8)$$

$$\underline{L}^s = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^T), \quad \underline{L}^a = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T) \quad (1.4.9)$$

Для примера, пусть дан тензор  $\underline{A}$ , компоненты которого и его транспонированного тензора  $\underline{A}^T$  имеют следующие значения:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad A_{ij}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Разобьем  $\underline{A}$  на его симметричную и антисимметричную части:

$$\underline{A}^s = \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^T); \quad A_{ij}^s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad \underline{A}^a = \frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{A}^T); \quad A_{ij}^a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что у симметричного тензора имеется симметрия относительно главной диагонали, а у антисимметричного – антисимметрия относительно нее (кроме того, для него на главной диагонали всегда находятся нули). Равенство  $\underline{A}^s + \underline{A}^a = \underline{A}$  здесь выполнено, что и следовало ожидать.

**8. Обращение тензора.** Тензор, обратный тензору  $\underline{A}$ , есть оператор, действующий в обратном направлении. Так, если  $\vec{a} \cdot \underline{A} = \vec{b}$ , то обратный тензор  $\underline{A}^{-1}$  преобразует  $\vec{b}$  в  $\vec{a}$ :

$$\vec{b} \cdot \underline{A}^{-1} = \vec{a}.$$

Очевидно, что  $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$ . Отсюда вытекает следующее правило нахождения компонент обратного тензора. Поскольку  $(A^{-1})_{is} A_{sj} = \delta_{ij}$ , то пользуясь известными свойствами алгебраических дополнений квадратной матрицы имеем:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\text{cof } A_{ji}}{\det |A_{ij}|},$$

где *cof* обозначает алгебраическое дополнение элемента  $A_{ji}$ , а *det* – определитель матрицы  $A_{ij}$ .

Тензор  $\underline{Q}$  называется ортогональным, если его обратный тензор совпадает с его транспонированным:

$$\underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^T.$$

Для такого тензора  $\underline{Q} \cdot \underline{Q}^{-1} = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T = \underline{E}$ . Ортогональный тензор характеризует жесткое вращение среды как твердого тела вокруг некоторой оси.

**9. Векторное произведение тензоров.** Операция векторного произведения векторов приводит к такому «подозрительному», зависящему от системы координат понятию, как псевдовектор. В принципе можно не рассматривать эту операцию и тем самым не рассматривать псевдовекторы и другие псевдообъекты. Однако в механике и физике традиционно широко используют операцию векторного умножения, поэтому краткое замечание по этому поводу здесь уместно.

Рассмотрим понятие псевдотензора, причем только в ортонормированном базисе  $\vec{e}_k$ . Пусть имеется некоторая линейная комбинация, относительно базисных полиад  ${}^N \underline{E} = E_{ij} \dots \vec{e}_i \vec{e}_j \dots \vec{e}_i$ . Если при переходе от правой (левой) системы координат, определяемой базисом  $\vec{e}_k$ , к левой (правой) системе координат, определяемой базисом  $\vec{e}'_k$ , компоненты  ${}^N \underline{E}$  меняют знак на противоположный, а при переходе от правой (левой) к другой правой (левой) системе координат перемены знака не происходит, то объект  ${}^N \underline{E}$  называется псевдотензором ранга  $N$ . Заметим, что для истинного тензора такой перемены знака нет. Очевидно, что псевдотензоры инвариантны по отношению к поворотам и не инвариантны к зеркальному отражению базиса. Псевдовектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  является частным случаем псевдотензора – псевдотензором первого ранга.

Для обеспечения возможности записи в компонентной форме операции векторного умножения вводят специальный псевдотензор третьего ранга, так называемый альтернирующий тензор  ${}^3\underline{\varepsilon}$  – тензор Леви-Чивита:

$${}^3\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{ijk} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k, \quad (1.4.10)$$

где компоненты  $\varepsilon_{ijk}$  определяются следующим правилом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ – четная перестановка} \\ -1, & \text{если } \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ – нечетная перестановка} \\ 0, & \text{если } i = j \text{ или } j = k \text{ или } k = i \end{cases} \quad (1.4.11)$$

т. е.  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ,  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ , остальные компоненты равны нулю.

Теперь можно записать векторное произведение векторов в компонентной форме, но сначала рассмотрим векторное произведение базисных векторов. Это произведение определяется как псевдовектор:

$$\bar{e}_i \times \bar{e}_j = \varepsilon_{kij} \bar{e}_k. \quad (1.4.12)$$

Тогда векторное произведение двух векторов можно записать в компонентной форме следующим образом:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_i \bar{e}_i \times b_m \bar{e}_m = a_i b_m \varepsilon_{skm} \bar{e}_s. \quad (1.4.13)$$

Аналогичным образом можно записать векторное произведение тензоров. Так, для тензоров второго ранга:

$$\underline{A} \times \underline{B} = A_j \bar{e}_i \bar{e}_j \times B_{mn} \bar{e}_m \bar{e}_n = A_j B_{mn} \bar{e}_i \underbrace{(\bar{e}_j \times \bar{e}_m)}_{\varepsilon_{kjm} \bar{e}_k} \bar{e}_n = A_j B_{mn} \varepsilon_{kjm} \bar{e}_i \bar{e}_k \bar{e}_n. \quad (1.4.14)$$

т. е. получаем тензор третьего ранга.

## 1.5 ИНВАРИАНТЫ ТЕНЗОРОВ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В тензорной алгебре особый интерес представляют скалярные функции тензорного аргумента – так называемые инвариантные, не зависящие от выбранной системы координат, тензорные функции. Рассмотрение простейших операций над тензорами показывает, что инвариантными скалярными функциями, в частности, являются:

$$\bar{a} \cdot \bar{b}, \quad \bar{a} \cdot \bar{a} = a^2, \quad \underline{A} : \underline{A}, \quad \underline{A} : \underline{B}, \quad \underline{A} : \underline{E}, \quad \underline{E} : \underline{A},$$

здесь  $\bar{a}, \bar{b}$  – векторы,  $\underline{A}, \underline{B}$  – тензоры второго ранга,  $\underline{E}$  – единичный тензор. Очевидно, что  $\underline{A} : \underline{E} = \underline{E} : \underline{A}$ . Эта двойная свертка тензора второго ранга с единичным называется следом тензора  $\underline{A}$  и обозначается  $tr \underline{A}$ :

$$tr \underline{A} = \underline{A} : \underline{E} = \underline{E} : \underline{A}. \quad (1.5.1)$$

Практический метод вычисления следа тензора виден из следующей цепочки преобразований:

$$tr \underline{A} = \underline{A} : \underline{E} = A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j : \delta_{mn} \bar{e}_m \bar{e}_n = A_{ij} \delta_{mn} (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_m) (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_n) = A_{ij} \delta_{mn} \delta_{jm} \delta_{in} = A_{ii}. \quad (1.5.2)$$

Здесь учтено, что из определения дельты Кронекера следует равенство индексов  $n = m = j = i$ . Видно, что след тензора – это сумма диагональных компонент этого тензора. Аналогичным образом можно получить

$$tr \underline{A}^2 = A_{ij} A_{ji}; \quad tr \underline{A}^3 = A_{ij} A_{jk} A_{ki}.$$

Для примера, вычислим след тензора, компоненты которого образуют матрицу:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

По определению имеем:  $tr \underline{B} = B_{ii} = B_{11} + B_{22} + B_{33} = 1 + 5 + 9 = 15$ .

Легко показать, что операция взятия следа тензора является линейной, т. е.:

$$tr(\underline{A} + \underline{B}) = tr \underline{A} + tr \underline{B}; \quad tr(\alpha \underline{A}) = \alpha tr \underline{A},$$

и имеют место следующие свойства следа:

$$\operatorname{tr} \underline{A}^T = \operatorname{tr} \underline{A}; \quad \operatorname{tr}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \operatorname{tr}(\underline{B} \cdot \underline{A}) = \underline{A} : \underline{B}.$$

Модуль тензора  $\underline{A}$  определяется в виде:  $|\underline{A}| = \sqrt{\operatorname{tr}(\underline{A} \cdot \underline{A}^T)} = \sqrt{\underline{A} : \underline{A}^T}$ .

Любая скалярная функция инвариантов будет также инвариантной скалярной функцией тензора. В частности, для характеристики тензора второго ранга используют следующие три скалярные функции, называемые соответственно первым, вторым и третьим инвариантами тензора  $\underline{A}$ :

$$\left. \begin{aligned} I_A &= \operatorname{tr} \underline{A} \\ II_A &= \frac{1}{2} \left[ (\operatorname{tr} \underline{A})^2 - \operatorname{tr} \underline{A}^2 \right] \\ III_A &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \underline{A}^3 - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underline{A})(\operatorname{tr} \underline{A}^2) + \frac{1}{6} (\operatorname{tr} \underline{A})^3 \end{aligned} \right\}. \quad (1.5.3)$$

Можно показать, что третий инвариант  $III_A = \det \underline{A}$ , где  $\det \underline{A}$  – детерминант матрицы компонент тензора  $\underline{A}$  в произвольном базисе.

Функции  $I_A, II_A, III_A$  называются главными инвариантами тензора  $\underline{A}$ . Они играют чрезвычайно важную роль в тензорной алгебре из-за следующей теоремы представления симметричных тензоров второго ранга: любая инвариантная скалярная функция симметричного тензорного аргумента может быть представлена как функция трех главных инвариантов этого аргумента, т. е.:

$$\alpha = f(\underline{A}) = \varphi(I_A, II_A, III_A).$$

Главные инварианты используются также в таком полезном тождестве, как соотношение Гамильтона-Келли:

$$\underline{A}^3 - I_A \underline{A}^2 + II_A \underline{A} - III_A \underline{E} = 0, \quad (1.5.4)$$

которое можно применять, в частности, при вычислении любых целых степеней тензора  $\underline{A}$ .

Например, пользуясь теоремой Гамильтона-Келли, вычислим  $\underline{A}^4$  для тензора  $\underline{A}$ , который в прямоугольной декартовой системе координат имеет следующие компоненты:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для начала определим  $\text{tr}\underline{A} = 1 + 3 - 2 = 2$ , а затем главные инварианты тензора  $\underline{A}$  по формулам (1.5.3):  $I_A = 2$ ,  $II_A = -6$ ,  $III_A = -9$ .

После умножения тождества Гамильтона-Келли скалярно на  $\underline{A}$  запишем следующее выражение для  $\underline{A}^4$ :

$$\underline{A}^4 - 2\underline{A}^3 - 6\underline{A}^2 + 9\underline{A} = 0.$$

Выражая отсюда  $\underline{A}^4$  и используя для величины  $\underline{A}^3$  соотношение Гамильтона-Келли, получаем

$$\underline{A}^4 = 10\underline{A}^2 + 3\underline{A} - 18\underline{E}; \quad (A^4)_{ij} = 10(A^2)_{ij} - 18\delta_{ij} + 3A_{ij}.$$

Вычисляя  $(A^2)_{ij} = A_{ik}A_{kj}$  как произведение соответствующих матриц:

$$(A^2)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

окончательно имеем:

$$(A^4)_{ij} = 10 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 18 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Для примера также вычислим второй инвариант некоторого тензора  $\underline{C}$ , равного сумме тензоров второго ранга  $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ :

$$\begin{aligned}
 II_C &= \frac{1}{2} \left[ (tr \underline{C})^2 - tr \underline{C}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ (tr(\underline{A} + \underline{B}))^2 - tr((\underline{A} + \underline{B}) \cdot (\underline{A} + \underline{B})) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (tr \underline{A} + tr \underline{B})^2 - tr(\underline{A}^2 + 2\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{B}^2) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (tr \underline{A})^2 + 2tr \underline{A} \cdot tr \underline{B} + (tr \underline{B})^2 - tr \underline{A}^2 - 2tr(\underline{A} \cdot \underline{B}) - tr \underline{B}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь главные векторы и главные значения тензоров. Пусть имеется некоторый произвольный симметричный тензор второго ранга  $\underline{B}$ . Из тензорной алгебры [38; 53] известно, что если для ненулевого вектора  $\vec{a}$  и тензора второго ранга выполнено условие:

$$\underline{B} \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a}, \quad (1.5.5)$$

то вектор  $\vec{a}$  называется главным (собственным) вектором тензора  $\underline{B}$ , соответствующее направление – главным направлением (главной осью) тензора  $\underline{B}$ , а число  $\lambda$  – главным (собственным, характеристическим) значением тензора  $\underline{B}$ . Равенство (1.5.5) можно записать как

$$(\underline{B} - \lambda \underline{E}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{или} \quad (B_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \cdot a_j = 0. \quad (1.5.6)$$

Система этих трех однородных линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое решение, если

$$\det |B_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (1.5.7)$$

Раскрывая (1.5.7), получаем характеристическое уравнение для тензора  $\underline{B}$ :

$$\lambda^3 - I_B \lambda^2 + II_B \lambda - III_B = 0, \quad (1.5.8)$$

где  $I_B, II_B, III_B$  – инварианты тензора  $\underline{B}$ , которые можно вычислить по формулам (1.5.3). Решение кубического уравнения (1.5.8) дает три корня  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , которые являются вещественными, поскольку матрица в выражении (1.5.7) симметрична. Эти корни являются главными значениями тензора  $\underline{B}$ . В принципе каждому значению  $\lambda_i$  соответствует свой главный вектор  $\vec{a}_i$ , компоненты которого находятся из решения уравнений (1.5.7). В результате получаем три

главных вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Заметим, что главные векторы, отвечающие различным значениям  $\lambda_i$ , взаимноортогональны, что непосредственно следует из (1.5.6).

Вообще говоря, в отношении чисел  $\lambda_i$ , являющихся корнями уравнения (1.5.8) (а следовательно, и векторов  $\vec{a}_i$ ), могут возникнуть следующие ситуации:

- 1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ , тогда тройка векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  определяется однозначно;
- 2)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ , однозначно определяется лишь  $\vec{a}_1$ , в качестве  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  можно брать любые два взаимноортогональных вектора, которые перпендикулярны  $\vec{a}_1$ ;
- 3)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , в качестве  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  можно брать любую взаимно ортогональную тройку векторов. Тензоры, для которых это имеет место, называются шаровыми. Они имеют вид  $\underline{\sigma} = \alpha \underline{E}$ ,  $\alpha = const$ .

В качестве базисных векторов для тензора  $\underline{B}$  можно взять тройку ортонормированных главных векторов  $\vec{a}_i$ , тогда этот тензор будет иметь компоненты:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

и в компонентной форме он записывается в виде:

$$\underline{B} = \lambda_1 \vec{a}_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 \vec{a}_3. \quad (1.5.9)$$

Главные инварианты тензора выражаются через собственные числа следующим образом (исходя из формул (1.5.6)):

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \quad II = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3; \quad III = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (1.5.10)$$

Интересно заметить, что для осесимметричного тензора вторую степень тензора можно свести к первой. В самом деле, для такого тензора два собственных числа одинаковы (например,  $\lambda_2 = \lambda_3$ ) и его характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 = 0, \text{ т. е. } (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

Минимальный многочлен

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{E}) \cdot (\underline{A} - \lambda_2 \underline{E}) = 0$$

после элементарных преобразований приводит к выражению

$$\underline{A}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \underline{A} + \lambda_1 \lambda_2 \underline{E} = 0.$$

Таким образом, вместо соотношения Гамильтона-Кэлли для осесимметричного тензора имеет место соотношение, позволяющее выразить вторую степень тензора через первую:  $\underline{A}^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \underline{A} - \lambda_1 \lambda_2 \underline{E}$ .

Для наглядной интерпретации симметричного тензора второго ранга  $\underline{A}$  используют некоторую поверхность второго порядка, задаваемую уравнением:

$$\vec{r} \cdot \underline{A} \cdot \vec{r} = 1. \quad (1.5.11)$$

Записывая левую часть этого равенства в терминах компонент можно увидеть, что это уравнение поверхности второго порядка. Действительно:

$$x_i \vec{e}_i \cdot A_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k \cdot x_s \vec{e}_s = x_i x_s A_{jk} \delta_{ij} \delta_{ks} = x_j A_{jk} x_k,$$

или более подробно, суммируя сначала по  $j$ , затем по  $k$ :

$$\begin{aligned} x_1 A_{1k} x_k + x_2 A_{2k} x_k + x_3 A_{3k} x_k &= x_1 A_{11} x_1 + x_1 A_{12} x_2 + x_1 A_{13} x_3 + \\ + x_2 A_{21} x_1 + x_2 A_{22} x_2 + x_2 A_{23} x_3 &+ x_3 A_{31} x_1 + x_3 A_{32} x_2 + x_3 A_{33} x_3 \end{aligned}$$

Учитывая, что для симметричного тензора  $A_{ij} = A_{ji}$ , в результате имеем уравнение поверхности второго порядка:

$$x_1^2 A_{11} + x_2^2 A_{22} + x_3^2 A_{33} + 2x_1 x_2 A_{12} + 2x_1 x_3 A_{13} + 2x_2 x_3 A_{23} = 1.$$

или, в обычных обозначениях:

$$A_{xx} x^2 + A_{yy} y^2 + A_{zz} z^2 + 2A_{xy} xy + 2A_{xz} xz + 2A_{yz} yz = 1. \quad (1.5.12)$$

Эта квадратичная форма является уравнением поверхности эллипсоида, который называется тензорным эллипсоидом для тензора  $\underline{A}$  в рассматриваемой точке среды. Коэффициентами этой формы служат компоненты тензора  $\underline{A}$ . На Рис. 1.9 показан тензорный эллипсоид, построенный в некоторой точке  $M$  для тензора  $\underline{A}$ .

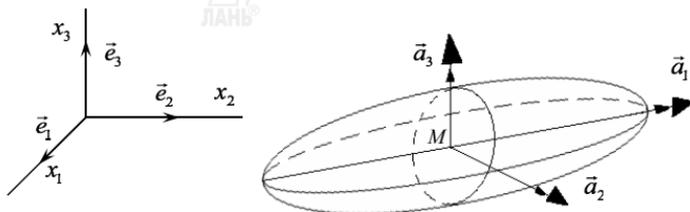


Рис. 1.9. Тензорный эллипсоид

Главные оси тензора  $\underline{A}$  совпадают с направлениями  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  главных векторов этого тензора. Два тензора называются соосными, если главные оси их тензорных эллипсоидов совпадают. Очевидно, что при  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$  тензорный эллипсоид есть эллипсоид вращения, а при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  тензорная поверхность является сферой (шаровому тензору соответствует поверхность сферы).

Приведенные выше понятия главных векторов и главных значений тензоров, а также наглядную их интерпретацию с помощью понятия тензорного эллипсоида часто используют для тензора напряжений  $\underline{\sigma}$  и других тензоров. В этом случае говорят об эллипсоиде напряжений, эллипсоиде деформаций (или скоростей деформаций), и т. д.

Полезно еще раз подчеркнуть, что для всякого симметричного тензора второго ранга все его собственные числа вещественны. Говорят, что тензор  $\underline{A}$  имеет простой спектр, если среди его собственных чисел нет кратных, т. е. все они различны. При этом триэдр главных (собственных) направлений, определяемый главными (собственными) векторами  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ , определяется однозначно (с точностью до ориентации, связанной с различием правых и левых

троек векторов). Тензорная поверхность для этого случая, когда нет нулевых собственных чисел, схематично показана на Рис. 1.10а. Симметричный тензор называют осесимметричным, если два его собственных числа совпадают, но не равны третьему, т. е. при  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$  тензорный эллипсоид есть эллипсоид вращения. В этом случае однозначно определено лишь одно собственное направление, а в нормальной плоскости любое направление является собственным. Соответствующая ему тензорная поверхность, являющаяся эллипсоидом вращения в общем случае, показана на Рис. 1.10б. При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  тензорная поверхность является сферой (шаровому тензору соответствует поверхность сферы). Для шарового тензора все собственные числа одинаковы, и он с точностью до множителя совпадает с единичным. Все направления в пространстве для него являются собственными. Соответствующая тензорная поверхность (сфера) показана на Рис. 1.10в. Вырожденные поверхности имеют место при наличии нулевых собственных чисел.

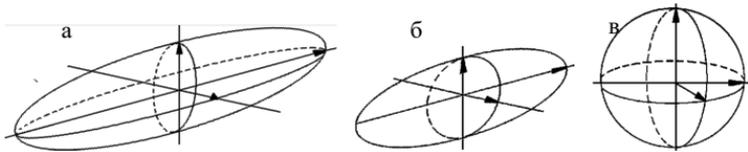


Рис. 1.10. Тензорные поверхности

В качестве примера определим главные напряжения (главные значения) и главные оси тензора напряжений  $\underline{\sigma}$ , который в некоторой точке в прямоугольной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  имеет компоненты:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (1.5.7) главные напряжения определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или после раскрытия определителя:

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -3$  и будут являться главными напряжениями:  $\sigma_{(1)} = 4$ ,  $\sigma_{(2)} = 1$ ,  $\sigma_{(3)} = -3$ .

Главные направления этого тензора определим следующим образом. Пусть каждому главному направлению соответствует своя ось новой системы координат  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Для каждой из таких новых осей введем в рассмотрение и определим направляющие косинусы  $n_i$  этих осей относительно старых  $(x_1, x_2, x_3)$ . Так, пусть главному значению  $\lambda_1 = 4$  соответствует ось  $x'_1$  с направляющими косинусами  $n_i^{(1)}$ . Тогда согласно (1.5.7):

$$\left. \begin{aligned} (3-4)n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} &= 0; \\ n_1^{(1)} - 4n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} &= 0; \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} - 4n_3^{(1)} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда, учитывая, что  $n_1^{(1)2} + n_2^{(1)2} + n_3^{(1)2} = 1$ , получаем:

$$n_1^{(1)} = -2/\sqrt{6}; \quad n_2^{(1)} = -1/\sqrt{6}; \quad n_3^{(1)} = -1/\sqrt{6}.$$

Аналогично можно составить системы уравнений для определения направляющих косинусов  $n_i^{(2)}$  и  $n_i^{(3)}$ , связанных с осями  $x'_2$  и  $x'_3$ , соответствующих главным значениям  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned} n_1^{(2)} &= 1/\sqrt{3}; \quad n_2^{(2)} = -1/\sqrt{3}; \quad n_3^{(2)} = -1/\sqrt{3}; \\ n_1^{(3)} &= 0; \quad n_2^{(3)} = -1/\sqrt{2}; \quad n_3^{(3)} = -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Вектором симметричного тензора напряжений  $\underline{\sigma}$  по площадке с единичной нормалью является вектор напряжений  $\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \underline{\sigma}$  (Рис. 1.11). Составляющая этого вектора по направлению нормали  $\vec{n}$  называется нормальной составляющей:

$$\sigma_{nn} \vec{n} = \vec{\sigma}_n = (\vec{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Вторая составляющая этого вектора  $\vec{\sigma}_n$  лежит в плоскости площадки и имеет направление, определяемое некоторым единичным вектором  $\vec{\tau}$  (очевидно, что  $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ ):

$$\sigma_{nr} \vec{\tau} = \vec{\sigma}_{nr} = \vec{n} \cdot \underline{\sigma} - (\vec{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Эта составляющая является касательной составляющей вектора  $\vec{\sigma}_n$ . В литературе нормальную составляющую вектора напряжений называют нормальным напряжением, а касательную – касательным напряжением (часто их величины обозначают как  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  соответственно).

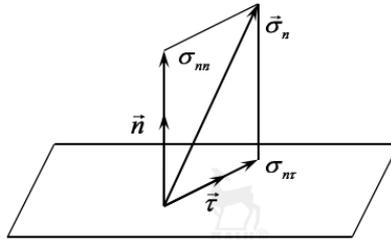


Рис. 1.11. Разложение вектора тензора на нормальную и касательную составляющие

Если сформулировать и решить задачу об условном экстремуме  $\sigma_{nn}$  на всех единичных нормалях  $\vec{n}$ , то результат будет следующим: экстремальные значения  $\sigma_{nn}$  как раз равны главным значениям тензора  $\underline{\sigma}$ , а именно  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Нормали, на которых достигаются экстремумы, имеют направления главных направлений тензора  $\underline{\sigma}$ . В этом случае касательные напряжения  $\sigma_{nr} = 0$ . Экстремальные значения  $\sigma_{nr}$  достигаются в плоскостях, которые биссектральны по отношению к плоскостям, нормальным к главным осям тензора. Они равны

$$\pm \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_3); \quad \pm \frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_1).$$

Нормальные напряжения по этим плоскостям в общем случае не являются левыми.

Если в качестве базисных векторов для некоторого тензора второго ранга  $A$  взять тройку главных векторов  $\vec{a}_i$ , то этот тензор будет иметь компоненты

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Например, пусть в некоторой точке в прямоугольной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  тензор напряжений имеет компоненты

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

и в этой точке имеется площадка с единичным вектором  $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$ ,

где  $\vec{e}_i$  – базисные векторы (в данном случае это суть векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ). Найдём вектор напряжения  $\vec{\sigma}_n$  в этой точке и нормальную составляющую  $\sigma_n$  этого вектора.

Вектор напряжения равен  $\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \underline{\sigma}$  или, в компонентной форме записи,  $\vec{\sigma}_n = n_i \sigma_{ij} \vec{e}_j$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_n &= \left( 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \right) \vec{e}_1 + \left( 1 \cdot \frac{2}{3} - 0 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \right) \vec{e}_2 + \left( 1 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \right) \vec{e}_3 = \\ &= \frac{5}{3} \vec{e}_1 + \frac{4}{3} \vec{e}_2 - \frac{2}{3} \vec{e}_3. \end{aligned}$$



Нормальная составляющая этого вектора  $\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}$  или в компонентной форме  $\sigma_{nn} = (\sigma_n)_i n_i$ . Отсюда  $\sigma_{nn} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0$ . Следовательно, вектор  $\vec{\sigma}_n$  имеет лишь касательную составляющую  $\sigma_{nt}$ .

Очень часто бывает полезным разложить произвольный тензор  $\underline{A}$  на шаровую и девиаторную части:

$$\underline{A} = \alpha \underline{E} + dev \underline{A}, \quad (1.5.13)$$

где  $\alpha \underline{E}$  – шаровая часть тензора  $\underline{A}$ ,  $\alpha = \frac{1}{3} tr \underline{A}$ ;  $dev \underline{A}$  – девиатор тензора  $\underline{A}$ ,  $dev \underline{A} = \underline{A} - \alpha \underline{E}$ . Очевидно, что главные оси девиатора  $\underline{A}$  совпадают с главными осями тензора  $\underline{A}$ .

Пусть, для примера, тензор напряжений в некоторой точке в выбранном базисе имеет компоненты

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

выделим его шаровую и девиаторную части. Так как  $\frac{1}{3} tr \underline{\sigma} = \frac{1}{3}(7 + 5 + 0) = 4$ , то

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, в качестве инвариантов тензора могут быть взяты любые другие три скалярные величины, являющиеся функциями от инвариантов I, II, III или, что то же самое, от главных нормальных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , являющихся корнями характеристического уравнения. В частности, используется и система инвариантов  $(I_1, I_2, I_3)$ , в которой первый, второй и третий инварианты определяются как  $I_1 = tr \underline{\sigma}$ ;  $I_2 = tr \underline{\sigma}^2$ ;  $I_3 = tr \underline{\sigma}^3$ . Связь этих инвариантов с инвариантами I, II, III выражается элементарными формулами. Очевидно,

что  $I = I_1 = tr\sigma$ , откуда следует, что физический смысл первого инварианта тензора напряжений заключается в том, что он характеризует среднее нормальное напряжение. Второй и третий инварианты для систем инвариантов  $(I, II, III)$  и  $(I_1, I_2, I_3)$  не имеют ясного физического смысла. В этом отношении предпочтительна для анализа поведения сплошной среды система инвариантов  $(\sigma, s_2, \xi)$ , предложенная В.В. Новожиловым [46; 48; 50], которая имеет ясный физический смысл.

## 1.6. ПОЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

В гидродинамике в основном оперируют не с постоянными векторами и тензорами, а с полями скалярных, векторных и тензорных величин. Компоненты векторов и тензоров являются функциями координат и времени. При описании движения жидкости возникает необходимость дифференцирования скалярных, векторных и тензорных полей – полей плотности, давления, скоростей, напряжений и других.

Полем физической величины  $\mathfrak{M}$  называется совокупность значений этой величины для любой точки пространства и для любого момента времени. Положение точки в пространстве определяется радиус-вектором  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , который в индексной форме записи записывается в соответствии с (1.1.6) как  $\vec{r} = x_i\vec{e}_i, i=1,2,3$ . Задать поле физической величины  $\mathfrak{M}$  – это значит задать зависимость

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\vec{r}, t), \text{ т. е. } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y, z, t). \quad (1.6.1)$$

Если зависимости от времени нет, то поле называется стационарным, если же нет зависимости от координат, то поле называется однородным. Для стационарного поля:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\vec{r}), \text{ т. е. } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y, z), \quad (1.6.2)$$

для однородного нестационарного поля:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(t), \tag{1.6.3}$$

для однородного стационарного:

$$\mathfrak{M} = \text{const} \tag{1.6.4}$$

В качестве примеров физических полей приведем следующие, записанные для простоты в виде некоторых степенных функций координат и времени:

– поле давлений, заданное скалярной функцией:

$$p = 2x^2yz^3t^2 \tag{1.6.5}$$

– поле скоростей, заданное вектор-функцией:

$$\vec{V} = \underbrace{x^3y^2zt}_{V_x}\vec{i} + \underbrace{2x^2z^2}_{V_y}\vec{j} + \underbrace{3xy^2z^3t^2}_{V_z}\vec{k}, \tag{1.6.6}$$

– поле напряжений  $\underline{\sigma}$ , заданное тензорной функцией с компонентами:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2xy^2zt & x^2y^2t^2 & 3xyzt^2 \\ x^2y^2t^2 & x^3t^3 & 4x^2y^3z^4 \\ 3xyzt^2 & 4x^2y^3z^4 & 5x^2y^2z^2t \end{pmatrix}. \tag{1.6.7}$$

Для каждой точки пространства и для любого момента времени этим полям соответствуют свои числовые значения. Так, для точки (1,1,1) при  $t=1$  имеем:

$$p = 2, \quad \vec{V}(1,2,3), \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Неоднородность полей характеризуется линейными дифференциальными операторами – градиентом (*grad*), дивергенцией (*div*), ротором (*rot*), которые являются операторами первого порядка (содержат частные производные первого порядка), а также дифференциальным скалярным оператором второго порядка – лапласианом  $\Delta$ . Все эти операторы можно определить через векторный дифференциальный оператор – оператор Гамильтона (набла)  $\vec{\nabla}$ . В декартовой прямоугольной системе координат он имеет вид:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.6.8)$$

или, используя индексную форму записи:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k=1,2,3. \quad (1.6.9)$$

Запишем операции *grad*, *div*, *rot* и  $\Delta$  подробно, выразив их через  $\vec{\nabla}$ , и применим их в дальнейшем в качестве упражнения к полям, заданным выражениями (1.6.5) – (1.6.7).

Градиент скалярной функции  $f(\vec{r}, t)$  является вектором, который характеризует направление наибольшего изменения функции и быстроту этого изменения. Через оператор Гамильтона (набла) он записывается так:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_k} \vec{e}_k, \quad k=1,2,3, \quad (1.6.10)$$

или, в развернутом виде, переходя к обычным обозначениям для декартовой прямоугольной системы координат:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Таким образом, градиент скалярной функции есть вектор  $\vec{\nabla} f$  с компонентами

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \text{ т. е. } \vec{\nabla} f \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Вычислим *grad p* для поля давлений, заданного выражением (1.6.5):

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} = 4xyz^3 t^2 \vec{i} + 2x^2 z^3 t^2 \vec{j} + 6x^2 yz^2 t^2 \vec{k},$$

в точке (1,1,1) при  $t=1$  это вектор  $\vec{\nabla} p(4,2,6)$ .

Градиент вектор-функции является результатом умножения оператора Гамильтона на вектор, т. е. тензором второго ранга. Так, для произвольной вектор-функции  $\vec{a}(\vec{r})$  ее градиент:

$$\text{grad } \bar{a} = \bar{\nabla} \bar{a} = \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_j \bar{e}_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j. \quad (1.6.11)$$

Здесь учтено, что производные базисных векторов по координатам равны нулю, т. е.  $\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial x_k} = 0$ , поскольку базисные векторы декартовой прямоугольной системы координат не меняются от точки к точке ни по величине, ни по направлению.

Например, матрица компонент градиента вектор-функции (1.6.6) равна:

$$\bar{\nabla} \bar{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} x^3 y^2 z t & \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 z^2 & \frac{\partial}{\partial x} 3xy^2 z^3 t^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} x^3 y^2 z t & \frac{\partial}{\partial y} 2x^2 z^2 & \frac{\partial}{\partial y} 3xy^2 z^3 t^2 \\ \frac{\partial}{\partial z} x^3 y^2 z t & \frac{\partial}{\partial z} 2x^2 z^2 & \frac{\partial}{\partial z} 3xy^2 z^3 t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 z t & 4xz^2 & 3y^2 z^3 t^2 \\ 2x^3 y z t & 0 & 6xy z^3 t^2 \\ x^3 y^2 t & 4x^2 z & 9xy^2 z^3 t^2 \end{pmatrix},$$

в точке (1,1,1) при  $t=1$  это тензор с компонентами:

$$\bar{\nabla} \bar{V} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Дивергенция вектор-функции характеризует разность потоков вектора, входящего и выходящего из рассматриваемого объема пространства. Через оператор  $\bar{\nabla}$  она записывается как результат скалярного произведения вектора  $\bar{\nabla}$  и соответствующего вектора, например, вектора скорости  $\bar{V}$ :

$$\text{div } \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} V_i \bar{e}_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \delta_{ki} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}. \quad (1.6.12)$$

или, в развернутом виде, в обычной форме записи:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.6.13)$$

Вычислим дивергенцию поля скоростей, заданного выражением (1.6.6):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 3x^2 y^2 z t + 0 + 9xy^2 z^2 t^2,$$

в точке (1,1,1) при  $t=1$  эта скалярная величина есть число  $3+0+9=12$ .

Дивергенция тензора второго ранга  $A$  дает векторную величину:

$$\vec{\nabla} \cdot A = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_j = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \delta_{ki} \bar{e}_j = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} \bar{e}_j, \quad (1.6.14)$$

или, в развернутом виде:

$$\vec{\nabla} \cdot A = \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_1 + \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_2 + \left( \frac{\partial A_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_3.$$

Дивергенция тензора  $\sigma$ , заданного согласно выражению (1.6.7), будет:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \sigma &= \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_1 + \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_2 + \\ &+ \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_3 = (2y^2 z t + 2x^2 y t^2 + 3xy t^2) \bar{e}_1 + \\ &+ (2xy^2 t^2 + 0 + 16x^2 y^3 z^3) \bar{e}_2 + (3yz t^2 + 12x^2 y^2 z^4 + 10x^2 y^2 z t) \bar{e}_3. \end{aligned}$$

в точке (1,1,1) при  $t=1$  это будет вектор  $\vec{\nabla} \cdot \sigma = 7\bar{i} + 18\bar{j} + 25\bar{k}$ .

Ротор (вихрь) вектор-функции есть векторное произведение оператора Гамильтона на этот вектор. В частности, ротор вектора скорости записывается так:

$$rot \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (1.6.15)$$

Используя альтернирующий тензор Леви-Чивита, эту величину можно записать в компонентном виде следующим образом:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times V_j \bar{e}_j = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} (\bar{e}_i \times \bar{e}_j) = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{kij} \bar{e}_k. \quad (1.6.16)$$

Распишем компоненты этого вектора по осям декартовой прямоугольной системы координат:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{ij} \bar{e}_1 + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{2ij} \bar{e}_2 + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{3ij} \bar{e}_3.$$

Для первого слагаемого – компоненты ротора относительно оси  $x_1$  – компонента  $\varepsilon_{ij}$  тензора Леви-Чивита принимает значение, равное 1 при  $i=2, j=3$  и значение  $-1$  при  $i=3, j=2$ , т. е.  $\varepsilon_{123} = 1, \varepsilon_{132} = -1$ . Тем самым:

$$\varepsilon_{1ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{123} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \varepsilon_{132} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}.$$

Второе слагаемое, содержащее  $\varepsilon_{2ij}$ , имеет ненулевые значения, когда  $i=3, j=1$  и когда  $i=1, j=3$ : в первом случае  $\varepsilon_{231} = 1$ , во втором  $\varepsilon_{213} = -1$ . Тогда компонента при базисном векторе  $\vec{e}_2$  записывается в виде:

$$\varepsilon_{2ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}.$$

И, наконец, для третьего слагаемого имеем  $\varepsilon_{312} = 1$ , когда  $i=1, j=2$  и  $\varepsilon_{321} = -1$ , если  $i=2, j=1$ . В результате это слагаемое принимает вид:

$$\varepsilon_{3ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}.$$

В итоге выражение для ротора вектора в компонентном виде, в обычной форме записи для декартовой прямоугольной системы координат выглядит так:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (1.6.17)$$

Менее громоздкие выкладки в декартовой прямоугольной системе координат получаются, если этот вектор вычислять через определитель:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Для примера, вычислим ротор скорости для  $\vec{V}$ , заданного выражением (1.6.6):

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = (6xyz^3t^2 - 4x^2z) \vec{i} + (x^3y^2t - 3y^2z^3t^2) \vec{j} + (4xz^2 - 2x^3yzt) \vec{k}.$$

В точке  $(1,1,1)$  при  $t=1$  это вектор  $(2, -2, 2)$ .

Ротор (вихрь) тензорной функции второго ранга будет тензорной величиной также второго ранга:

$$\bar{\nabla} \times \underline{A} = \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times A_{jk} \bar{e}_j \bar{e}_k = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} (\bar{e}_i \times \bar{e}_j) \bar{e}_k = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} \varepsilon_{sij} \bar{e}_s \bar{e}_k. \quad (1.6.18)$$

Для примера, вычислим компоненту при базисной диаде  $\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2$  ротора тензора напряжений  $\underline{\sigma}$ , заданного выражением (1.6.7), для которого имеем:

$$\bar{\nabla} \times \underline{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_i} \varepsilon_{sij} \bar{e}_s \bar{e}_k.$$

Базисной диаде  $\bar{e}_1 \bar{e}_2$  (т. е. когда  $s=1, k=2$ ) соответствует компонента:

$$\frac{\partial \sigma_{j2}}{\partial x_i} \varepsilon_{1ij} = \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} \varepsilon_{123} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_3} \varepsilon_{132} = \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_3} = 12x^2 y^2 z^4 - 0.$$

Если взять базисную диаду  $\bar{e}_1 \bar{e}_3$  (т. е.  $s=1, k=3$ ), то ее компонента:

$$\frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial x_i} \varepsilon_{1ij} = \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_2} \varepsilon_{123} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \varepsilon_{132} = \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 10xy^2 z^2 t - 16x^2 y^3 z^3.$$

В точке  $(1,1,1)$  при  $t=1$  рассмотренные компоненты равны, соответственно, 12 и -6. Другие компоненты тензора  $\bar{\nabla} \times \underline{\sigma}$  вычисляются аналогично.

Лапласиан  $\Delta$  есть скалярный дифференциальный оператор второго порядка, который является результатом скалярного произведения вектора Гамильтона самого на себя:

$$\Delta = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}, \quad (1.6.19)$$

или, в компонентном виде:

$$\Delta = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} \delta_{ki} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (1.6.20)$$

Для декартовой прямоугольной системы координат оператор Лапласа записывается в виде:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.6.21)$$

Этот скалярный оператор второго порядка можно применять к любым тензорным величинам – он не изменяет ранг тензора.

Заметим, что записывать этот оператор в виде  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$  (как иногда встречается в литературе) недопустимо, т.к. в этом случае пропадает правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Для скалярной функции  $f$  ее лапласиан записывается следующим образом:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.6.22)$$

или, в обычных обозначениях:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.6.23)$$

Вычислим лапласиан поля давлений, заданного выражением (1.6.5):

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 4yz^3 t^2 + 0 + 12x^2 yz t^2,$$

в точке (1,1,1) при  $t=1$  это число  $4+0+12=16$ .

Лапласиан вектора является векторной величиной:

$$\Delta \vec{V} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} V_i \vec{e}_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k} \vec{e}_i = (\Delta V_i) \vec{e}_i, \quad (1.6.24)$$

здесь к каждой компоненте вектор-функции применяется оператор Лапласа.

Для поля скоростей, определяемого выражением (1.6.6), вычислим его лапласиан:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \Delta(V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) = (\Delta V_x) \vec{i} + (\Delta V_y) \vec{j} + (\Delta V_z) \vec{k} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \vec{k} = \\ &= (6xy^2zt + 2x^3zt + 0) \vec{i} + (4z^2 + 0 + 4x^2) \vec{j} + (0 + 6z^3t^2 + 18xy^2zt^2) \vec{k} \end{aligned}$$

В точке (1,1,1) при  $t=1$  это вектор  $8\vec{i} + 8\vec{j} + 24\vec{k}$ , т. е.  $\Delta \vec{V}(8,8,24)$ .

Лапласиан тензорной функции второго ранга является тензорной величиной второго ранга:

$$\Delta A = \Delta A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = (\Delta A_{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j, \quad (1.6.25)$$

т. е. к каждой компоненте тензора применяется оператор Лапласа (1.6.19).

Для тензора напряжений  $\underline{\sigma}$ , заданного выражением (1.6.7), найдем  $\Delta \underline{\sigma}$ . Для этого применим оператор Лапласа (1.6.19) к каждой из компонент этого тензора. В результате получаем следующую матрицу компонент тензора  $\Delta \underline{\sigma}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 + 4xz + 0; & 2y^2t^2 + 2x^2t^2 + 0; & 0 + 0 + 0 \\ 2y^2t^2 + 2x^2t^2 + 0; & 3xt^3 + 0 + 0; & 8y^3z^4 + 24x^2yz^4 + 48x^2y^3z \\ 0 + 0 + 0; & 8y^3z^4 + 24x^2yz^4 + 48x^2y^3z^2; & 10y^2z^2t + 10x^2z^2t + 10x^2y^2t \end{pmatrix}.$$

В точке (1,1,1) при  $t=1$  эта матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 80 \\ 0 & 80 & 30 \end{pmatrix},$$

т. е. является симметричной относительно главной диагонали, что и следовало ожидать, поскольку матрица тензора  $\underline{\sigma}$  является симметричной.

Здесь следует сделать несколько дополнительных замечаний относительно применения оператора Гамильтона  $\vec{\nabla}$ . Оператор Гамильтона является линейным оператором по определению. В результате его однократного применения возникают дифференциальные операции первого порядка. При вторичном применении оператора возникают дифференциальные операции второго порядка. Кроме уже упомянутого выше оператора Лапласа  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ ,

можно рассмотреть и другие операторы. Например, для вектор-функции  $\vec{a}$  – вектор  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a})$ , вектор  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a}$  и т. д. [23]. Возникающие при этом дифференциальные операции второго порядка вновь являются линейными. Кроме того, легко показать, что:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} = 0,$$

т. е. ротор градиента и дивергент ротора равны нулю.

Вследствие линейности оператора  $\vec{\nabla}$  для суммы (или разности) функций имеем:

$$\vec{\nabla}(f + \varphi) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}\varphi,$$

$$\Delta(f + \varphi) = \Delta f + \Delta\varphi,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b},$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times \vec{b},$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{b},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{b}.$$

Эти выражения легко проверить, записывая соответствующие выражения в компонентной форме. Также легко проверить и следующее символическое правило для вычисления дифференциальных операций к произведению функций ( $f\varphi$ ,  $f\vec{a}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  и т. д.): при использовании их необходимо помнить, что дифференциальные операции к произведению функций нужно применять к каждому сомножителю отдельно, считая другой постоянным (его удобно помечать в выкладках индексом внизу):

$$\vec{\nabla} f \varphi = \vec{\nabla} f_c \varphi + \vec{\nabla} f \varphi_c = f_c \vec{\nabla} \varphi + \varphi_c \vec{\nabla} f = f \vec{\nabla} \varphi + \varphi \vec{\nabla} f,$$

$$\vec{\nabla} f \vec{a} = \vec{\nabla} f_c \vec{a} + \vec{\nabla} f \vec{a}_c = f_c \vec{\nabla} \vec{a} + \vec{a}_c \vec{\nabla} f = f \vec{\nabla} \vec{a} + \vec{a} \vec{\nabla} f,$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{a}_c \times \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}_c) = \\ &= -\vec{a}_c \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b}_c \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b}.\end{aligned}$$

Нетрудно также доказать справедливость следующих формул:

$$\vec{\nabla} \cdot \varphi \vec{a} = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi,$$

$$\vec{\nabla} \times \varphi \vec{a} = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \times \vec{a},$$

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times \vec{\nabla} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{\nabla} \times \vec{a},$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{b} - \vec{b} \vec{\nabla} \cdot \vec{a},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} - \Delta \vec{a},$$

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{\nabla} \vec{a} \times \vec{b} - (\vec{\nabla} \vec{b}) \times \vec{a},$$

$$\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \vec{b}) \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \vec{b}),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \vec{a} = \vec{\nabla} (\vec{a}^2/2) + (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \times \vec{a},$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \underline{A}) = \varphi (\vec{\nabla} \cdot \underline{A}) + \vec{\nabla} \varphi \cdot \underline{A},$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{A} \cdot \vec{a}) = (\vec{\nabla} \cdot \underline{A}) \cdot \vec{a} + \underline{A} : \vec{\nabla} \vec{a}^T,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{B}^T \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{A}) + \underline{A}^T : \vec{\nabla} \underline{B},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \vec{a} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \underline{A}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \underline{A} - \Delta \underline{A},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \underline{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \underline{A} - \Delta \underline{A},$$

$$\Delta (\varphi \underline{A}) = (\Delta \varphi) \underline{A} + \varphi \Delta \underline{A} + 2(\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \underline{A}),$$

$$\Delta (\varphi \psi) = \varphi \Delta \psi + \psi \Delta \varphi + 2(\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi),$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\bar{\nabla}(\varphi\psi) &= \varphi\bar{\nabla}\bar{\nabla}\psi + \psi\bar{\nabla}\bar{\nabla}\varphi + (\bar{\nabla}\varphi)\bar{\nabla}\psi + (\bar{\nabla}\psi)\bar{\nabla}\varphi, \\ \bar{\nabla}\bar{\nabla}\cdot(\varphi\mathbf{A}) &= \bar{\nabla}\bar{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{A} + \varphi\bar{\nabla}\bar{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \bar{\nabla}\varphi(\bar{\nabla}\cdot\mathbf{A}) + (\bar{\nabla}\varphi\bar{\nabla})^T\cdot\mathbf{A}.\end{aligned}$$

## 1.7. ГРАДИЕНТ СКОРОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ

Градиент скорости  $\bar{\nabla}\vec{V}$  является тензором второго ранга, который характеризует поле скоростей. В декартовом базисе этот тензор и его транспонированный можно записать в виде:

$$\bar{\nabla}\vec{V} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \quad \bar{\nabla}\vec{V}^T = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j. \quad (1.7.1)$$

Геометрический смысл тензора  $\bar{\nabla}\vec{V}$  – это оператор, переводящий вектор  $d\vec{r}$  в вектор  $d\vec{V}$ :

$$d\vec{r} \cdot \bar{\nabla}\vec{V} = d\vec{V}. \quad (1.7.2)$$

Доказательство соотношений, записанных в бескомпонентном виде, здесь и в дальнейшем будем выполнять следующим образом. Фигурирующие в таких соотношениях тензорные величины будем представлять в виде их разложения по базисным элементам, и далее выполнять соответствующие операции над базисными векторами или, при необходимости, над компонентами этих тензорных величин. Поступая таким образом в отношении выражения (1.7.2), несложно убедиться в его справедливости:

$$\begin{aligned}d\vec{r} \cdot \bar{\nabla}\vec{V} &= dx_j \bar{e}_j \cdot \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \bar{e}_k \bar{e}_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} dx_j \bar{e}_i (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) = \\ &= \delta_{jk} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} dx_j \bar{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (V_i \bar{e}_i) dx_j = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_j} dx_j = d\vec{V}.\end{aligned}$$

Однако скалярное произведение  $\bar{\nabla}\vec{V} \cdot d\vec{r}$  не является дифференциалом  $d\vec{V}$ :

$$\bar{\nabla}\vec{V} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \bar{e}_k \bar{e}_i \cdot dx_j \bar{e}_j = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \delta_{jk} \bar{e}_k dx_j = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \bar{e}_k dx_i = (\bar{\nabla}V_i) dx_i.$$

Поскольку произведение вектора на тензор второго ранга подчиняется правилу  $\vec{a} \cdot \underline{A} = \underline{A}^T \cdot a$ , то произведение  $\vec{\nabla} \vec{V}^T \cdot d\vec{r}$  является дифференциалом  $d\vec{V}$ , в чем также несложно убедиться:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{V}^T \cdot d\vec{r} &= \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \vec{e}_k \vec{e}_i \cdot dx_j \vec{e}_j = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \frac{\partial V_k}{\partial x_i} dx_j \vec{e}_k = \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} dx_j \vec{e}_k = \frac{\partial (V_k \vec{e}_k)}{\partial x_j} dx_j = d\vec{V}. \end{aligned}$$

Иногда в литературе оператор Гамильтона  $\vec{\nabla} = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  записывают как частную производную по радиус-вектору:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ . Тогда градиент скалярной функции  $f$  записывают как  $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$ , градиент вектор-функции (тензор второго ранга) как  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}$  и т. д.

Градиент скорости  $\vec{\nabla} \vec{V}$  может быть представлен в виде суммы симметричной и антисимметричной составляющих, согласно (1.4.8) и (1.4.9),  $\vec{\nabla} \vec{V} = \underline{S} + \underline{\Omega}$ , где симметричная часть есть тензор скоростей деформаций  $\underline{S}$ , а антисимметричная – тензор вращения (спин)  $\underline{\Omega}$ :

$$\underline{S} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T); \quad \underline{\Omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \vec{V}^T) \quad (1.7.3)$$

В компонентном виде:

$$\underline{S} = S_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i \vec{e}_j; \quad \underline{\Omega} = \Omega_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i \vec{e}_j. \quad (1.7.4)$$

Матрицы компонент тензоров  $\underline{S}$  и  $\underline{\Omega}$ :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Также симметричным является и тензор

$$\underline{S} \cdot \underline{\Omega} + (\underline{S} \cdot \underline{\Omega})^T,$$

характеризующий вращательную часть производной Яуманна [53; 64] для тензора скоростей деформаций  $\underline{S}$  (см. п. 1.7). Заметим, что:

$$(\underline{S} \cdot \underline{\Omega})^T = -(\underline{S} \cdot \underline{\Omega}^T)^T; \quad (\bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V})^T = \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T.$$

Вычислим компоненты тензоров  $\bar{\nabla} \bar{V}$ ,  $\underline{S}$  и  $\underline{\Omega}$  для поля скоростей, заданного выражением (1.6.6):  $\bar{V} = \underbrace{x^3 y^2 z t}_{V_x} \bar{i} + \underbrace{2x^2 z^2}_{V_y} \bar{j} + \underbrace{3xy^2 z^3 t^2}_{V_z} \bar{k}$ :

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 z t & 4xz^2 & 3y^2 z^3 t^2 \\ 2x^3 y z t & 0 & 6xy z^3 t^2 \\ x^3 y^2 t & 4x^2 z & 9xy^2 z^2 t^2 \end{pmatrix},$$

В точке (1,1,1) в момент  $t=1$  этот тензор второго ранга  $\bar{\nabla} \bar{V}$  и его транспонированный имеют компоненты:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, компонентами тензоров скоростей деформаций  $\underline{S}$  и тензора вращения будут:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем в компонентном виде, в декартовом базисе, скалярные произведения для градиентов скоростей, которые сами по себе являются тензорами второго ранга:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \vec{V} \cdot \bar{\nabla} V &= \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j; & \bar{\nabla} \vec{V} \cdot \bar{\nabla} \vec{V}^T &= \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j; \\ \bar{\nabla} \vec{V}^T \cdot \bar{\nabla} \vec{V} &= \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j; & \bar{\nabla} \vec{V}^T \cdot \bar{\nabla} V^T &= \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Второй и третий из этих тензоров являются симметричными, а первый и четвертый – несимметричными. Для градиентов скоростей их двойные скалярные произведения являются скалярными величинами:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V} &= \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}; & \bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V}^T &= \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}; \\ \bar{\nabla} \vec{V}^T : \bar{\nabla} \vec{V} &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}; & \bar{\nabla} \vec{V}^T : \bar{\nabla} \vec{V}^T &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Видно, что:

$$\bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V} = \bar{\nabla} \vec{V}^T : \bar{\nabla} \vec{V}^T; \quad \bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V}^T = \bar{\nabla} \vec{V}^T : \bar{\nabla} \vec{V}. \quad (1.7.7)$$

Для следов градиентов скоростей и их скалярных произведений имеем:

$$\begin{aligned} tr \bar{\nabla} \vec{V} &= tr \bar{\nabla} \vec{V}^T = \bar{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}; \\ tr(\bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V}) &= (\bar{\nabla} \vec{V} \cdot \bar{\nabla} \vec{V}) : \underline{E} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}; \end{aligned}$$

$$\text{tr}(\bar{\nabla}\bar{V} \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T) = (\bar{\nabla}\bar{V} \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T) : \underline{E} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i};$$

$$\text{tr}(\bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}) = (\bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}) : \underline{E} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i};$$

$$\text{tr}(\bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T) = (\bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T) : \underline{E} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j},$$

откуда следует, что:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\bar{\nabla}\bar{V} \cdot \bar{\nabla}\bar{V}) &= \text{tr}(\bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T) = \bar{\nabla}\bar{V} : \bar{\nabla}\bar{V} = \bar{\nabla}\bar{V}^T : \bar{\nabla}\bar{V}^T; \\ \text{tr}(\bar{\nabla}\bar{V} \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T) &= \text{tr}(\bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}) = \bar{\nabla}\bar{V} : \bar{\nabla}\bar{V}^T = \bar{\nabla}\bar{V}^T : \bar{\nabla}\bar{V}. \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Для тензора градиентов скоростей его квадрат:

$$(\bar{\nabla}\bar{V})^2 = \bar{\nabla}\bar{V} \cdot \bar{\nabla}\bar{V} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \bar{e}_i \bar{e}_k,$$

а его куб:

$$(\bar{\nabla}\bar{V})^3 = (\bar{\nabla}\bar{V})^2 \cdot \bar{\nabla}\bar{V} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \bar{e}_i \bar{e}_s.$$

Для транспонированного тензора градиентов скоростей имеем:

$$(\bar{\nabla}\bar{V}^T)^2 = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \bar{e}_i \bar{e}_k \quad \text{и} \quad (\bar{\nabla}\bar{V}^T)^3 = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_l}{\partial x_l} \bar{e}_i \bar{e}_s.$$

Квадраты тензоров скоростей деформаций и вращения также являются результатами их скалярных произведений самих на себя:

$$\underline{S}^2 = \underline{S} \cdot \underline{S} = \frac{1}{4} [ \bar{\nabla}\bar{V} \cdot \bar{\nabla}\bar{V} + \bar{\nabla}V \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T + \bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V} + \bar{\nabla}V^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T ], \quad (1.7.9)$$

$$\underline{\Omega}^2 = \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega} = \frac{1}{4} [ \bar{\nabla}\bar{V} \cdot \bar{\nabla}V - \bar{\nabla}V \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T - \bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}V + \bar{\nabla}\bar{V}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{V}^T ]. \quad (1.7.10)$$

Эти тензоры являются симметричными.

Для некоторых приложений полезно знать третьи степени этих тензоров.

Третья степень тензора скоростей деформаций записывается как:

$$\begin{aligned}
 \underline{S}^3 &= \underline{S}^2 \cdot \underline{S} = \frac{1}{8} \left[ (\bar{\nabla} \bar{V})^3 + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V} + \right. \\
 &+ \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot (\bar{\nabla} \bar{V})^2 + (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 + \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{\nabla} \bar{V})^2 \cdot \bar{\nabla} V^T + \\
 &+ \bar{\nabla} \bar{V} \cdot (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 + \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T + (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^3 \left. \right] = \\
 &= \frac{1}{8} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} + \right. \\
 &+ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} + \\
 &\left. + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} \right) \bar{e}_i \bar{e}_s.
 \end{aligned} \tag{1.7.11}$$

Третья степень тензора вращения:

$$\begin{aligned}
 \underline{\Omega}^3 &= \underline{\Omega}^2 \cdot \underline{\Omega} = \frac{1}{8} \left[ (\bar{\nabla} \bar{V})^3 - \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V} - \right. \\
 &- \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot (\bar{\nabla} \bar{V})^2 + (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 \cdot \bar{\nabla} \bar{V} - (\bar{\nabla} \bar{V})^2 \cdot \bar{\nabla} V^T + \\
 &+ \bar{\nabla} \bar{V} \cdot (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 + \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T - (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^3 \left. \right] = \\
 &= \frac{1}{8} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} - \right. \\
 &- \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_s} \left. \right) \bar{e}_i \bar{e}_s.
 \end{aligned} \tag{1.7.12}$$

Инварианты тензоров градиентов скоростей, скоростей деформаций и вращения определяются выражениями (1.5.3), в которых:

$$tr \bar{\nabla} \bar{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V};$$

$$tr (\bar{\nabla} \bar{V})^2 = \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V};$$

$$tr (\bar{\nabla} \bar{V})^3 = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = (\bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}) : \bar{\nabla} \bar{V} = (\bar{\nabla} \bar{V})^2 : \bar{\nabla} \bar{V};$$

$$tr \bar{\nabla} \bar{V}^T = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V};$$

$$tr(\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \bar{\nabla} \bar{V}^T : \bar{\nabla} \bar{V}^T;$$

$$tr(\bar{\nabla} \bar{V}^T)^3 = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 : \bar{\nabla} \bar{V}^T.$$

$$tr \underline{S} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V};$$

$$tr \underline{S}^2 = \frac{1}{2} [\bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}^T] = \bar{\nabla} \bar{V} : \underline{S};$$

$$\begin{aligned} tr \underline{S}^3 &= \frac{1}{8} [(\bar{\nabla} \bar{V})^2 : \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T) : \bar{\nabla} \bar{V} + \\ &+ (\nabla V^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V}) : \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 : \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{\nabla} \bar{V})^2 : \bar{\nabla} \bar{V}^T + \\ &+ (\bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T) : \bar{\nabla} \bar{V}^T + (\bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V}) : \bar{\nabla} \bar{V}^T + (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2 : \bar{\nabla} \bar{V}^T] = \\ &= \frac{1}{4} [(\bar{\nabla} \bar{V})^2 + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T + \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2] : \underline{S}. \end{aligned}$$

$$tr \underline{\Omega} = 0;$$

$$tr \underline{\Omega}^2 = \frac{1}{2} [\bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} - \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}^T];$$

$$tr \underline{\Omega}^3 = \frac{1}{4} [(\bar{\nabla} \bar{V})^2 - \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T - \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{\nabla} \bar{V}^T)^2] : \underline{S}.$$

Отсюда инварианты тензора градиентов скоростей:

$$I = tr \bar{\nabla} \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V};$$

$$II = \frac{1}{2} [(tr \bar{\nabla} \bar{V})^2 - tr(\bar{\nabla} \bar{V})^2] = \frac{1}{2} [(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})^2 - \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}];$$

$$\begin{aligned} III &= \frac{1}{3} tr(\bar{\nabla} \bar{V})^3 - \frac{1}{2} (tr \bar{\nabla} \bar{V}) (tr(\bar{\nabla} \bar{V})^2) + \frac{1}{6} (tr \bar{\nabla} \bar{V})^3 = \\ &= \frac{1}{3} (\bar{\nabla} \bar{V})^2 : \bar{\nabla} \bar{V} - \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})^2 (\bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}) + \frac{1}{6} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})^2 : \bar{\nabla} \bar{V}. \end{aligned}$$

Инварианты остальных тензоров определяются аналогично.

Можно также показать, что инвариантными также являются следующие величины:

$$2\underline{S} : \underline{S} = \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T : \bar{\nabla} \bar{V}^T = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}; \quad (1.7.13)$$

$$2\underline{\Omega} : \underline{\Omega} = \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} - \bar{\nabla} \bar{V}^T : \bar{\nabla} \bar{V}^T = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}. \quad (1.7.14)$$

## 1.8. МАТЕРИАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ

Известно, что существует два способа исследования движения сплошной среды:

- метод Лагранжа, согласно которому движение каждой частицы жидкости рассматривается отдельно;
- метод Эйлера, согласно которому рассматривается движение частиц жидкости в каждой точке пространства, занятого этой жидкостью.

Рассмотрим подробно суть каждого из этих методов.

Движение любого объекта определяется по отношению к некоторой системе отсчета. В качестве таковой введем некоторую фиксированную в пространстве декартову систему координат  $x_i$  с базисом  $\bar{e}_i$  (Рис. 1.12). Пусть в момент времени  $t=0$  жидкий объем занимал некоторую область  $\Omega_0$  (отсчетная, начальная конфигурация), а в момент времени  $t$  занял область  $\Omega$  (текущая, актуальная конфигурация). Процесс движения есть непрерывное преобразование  $\Omega_0$  в  $\Omega$  [23; 64]. Каждая материальная частица занимает определенную точку рассматриваемой конфигурации. Ее положение единственным образом определяется тремя числами  $x_1, x_2, x_3$ , т. е. радиус-вектором  $\bar{r} = \bar{r}(x_1, x_2, x_3)$ .

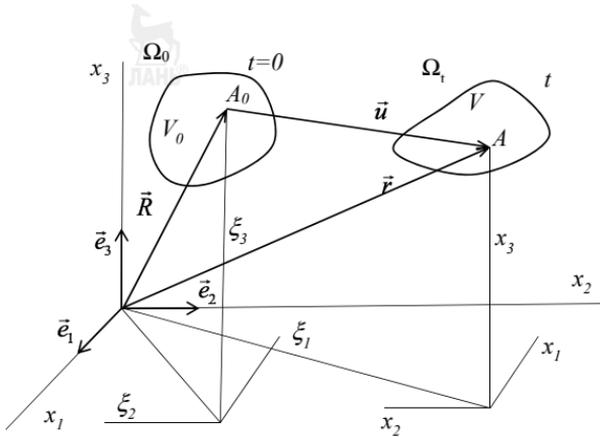


Рис. 1.12. Движение континуума

Радиус-вектор рассматриваемой жидкой частицы в момент времени  $t=0$  обозначим как  $\vec{R}$ ,  $\vec{R} = \vec{r}|_{t=0}$ ,  $\vec{R} = \vec{R}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $\xi_i = x_i|_{t=0}$ . В процессе движения частица, занимавшая в отсчетной конфигурации положение  $A_0$  займет в актуальной конфигурации положение  $A$ . Само движение задается функцией:

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t), \quad (1.8.1)$$

которая является обратимой:

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t). \quad (1.8.2)$$

А это означает, что если в точке  $A$  пространства (с радиус-вектором  $\vec{r}$ ) находится материальная частица, то она в основной конфигурации занимала положение  $A_0$  (с радиус-вектором  $\vec{R}$ ). Функции  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t)$  и  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, t)$  являются однозначными, непрерывными и дифференцируемыми.

Вектор  $\vec{u}$  определяет перемещение частицы:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{u}. \quad (1.8.3)$$

В механике сплошных сред переменные  $(\vec{R}, t)$  называют материальными, а  $(\vec{r}, t)$  – пространственными. Как видно из (1.8.1) и (1.8.2), они связаны

между собой. Движение континуума можно описывать или в материальных (лагранжевых), или пространственных (эйлеровых) координатах. Сущность подходов Лагранжа и Эйлера заключается в следующем: если необходимо знать характер изменения различных величин (скорости, ускорения, температуры) каждой индивидуальной частицы сплошной среды, то необходимо использовать материальную систему координат (подход Лагранжа), если же надо знать эти величины для частиц, проходящих через заданную точку пространства, то необходимо использовать пространственную систему координат (подход Эйлера). Иначе говоря, при подходе Лагранжа фиксируется материальная частица, а при подходе Эйлера – точка пространства. Априори трудно сказать, какой из подходов целесообразнее. Однако следует заметить, что уравнение движения сплошной среды при подходе Эйлера имеет более простой вид, чем в переменных Лагранжа, в то же время краевые условия более просты в переменных Лагранжа. В механике твердого деформируемого тела чаще всего используют подход Лагранжа, а в механике жидкости – подход Эйлера. В тех случаях, когда возможно осуществить линеаризацию задачи (перемещения малы, а граница тела изменяется пренебрежимо мало), оба подхода приводят к одним и тем же уравнениям. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера сводится к решению системы алгебраических уравнений, а обратный переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа связан с решением задачи Коши для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений [17]. Важно отметить, что при подходе Эйлера базисные векторы в рассматриваемой точке не зависят от времени:

$$\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial t} = 0. \quad (1.8.4)$$

При подходе Лагранжа базисные векторы при движении частицы (за счет ее перемещения из одной точки пространства в другую) изменяются, и производная от базисного вектора по времени в общем случае не равна нулю.

Скорость и ускорение материальной частицы определяются через понятие материальной производной. Смысл ее заключается в следующем: зафиксируем некоторую движущуюся материальную точку (положим, что  $\vec{R} = Const$ ) и рассмотрим связанную с ней тензорную физическую величину  $\mathfrak{M}$ . Для движущейся частицы величина  $\mathfrak{M}$  есть функция времени, производная по времени (при  $\vec{R} = Const$ ) от функции  $\mathfrak{M}$  называется материальной (полной, субстанциональной, индивидуальной) производной по времени данной тензорной величины. В переменных Лагранжа эта производная записывается следующим образом:

$$\dot{\mathfrak{M}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\vec{R}, t). \quad (1.8.5)$$

Если же величина  $\mathfrak{M}$  выражена в переменных Эйлера (т. е.  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\vec{r}, t) = \mathfrak{M}(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$ ), то при фиксированном  $\vec{R}$  изменение функции происходит не только из-за изменения ее в данной точке среды, но и вследствие движения среды, т. е. дифференцирование производится по правилу дифференцирования сложной функции. Таким образом, в эйлеровой системе отсчета материальной производной является производная  $\frac{d}{dt}$ , которая является нелинейным скалярным оператором, состоящим из локальной и конвективной частей:

$$\frac{d}{dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{локальная производная}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{конвективная производная}}. \quad (1.8.6)$$

Это выражение можно получить, рассматривая производную по времени от произвольного выражения  $\mathfrak{M}(x, y, z, t)$ , учитывая, что  $x, y, z$  являются функциями времени  $t$ . Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции, принимая во внимание, что производные координат по времени суть компоненты вектора скорости по направлению соответствующих базисных векторов, имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathfrak{M}(x, y, z, t) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \\
 &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} = \\
 &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \underbrace{\left( V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{v} \cdot \vec{\nabla}} \mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \mathfrak{M}
 \end{aligned} \tag{1.8.7}$$

Таким образом, оператор материальной производной (1.8.6) в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z},$$

или в индексной форме записи:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k=1,2,3. \tag{1.8.8}$$

Этот оператор не меняет ранг тензорной величины, к которой он применяется.

Для скалярной функции  $f$ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f = \frac{\partial f}{\partial t} \vec{e}_i + \left( V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) f = \frac{\partial f_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{1.8.9}$$

Для вектор-функции результатом применения оператора материальной производной будет векторная величина, например, для вектора скорости:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{\partial V_i}{\partial t} \vec{e}_i + \left( V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) V_i \vec{e}_i = \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \vec{e}_i. \tag{1.8.10}$$

В обычной форме записи формулу для  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  можно представить в таком виде:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \vec{k}}_{\text{вектор локального ускорения}} + \underbrace{\left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) V_x \vec{i} + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) V_y \vec{j} + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) V_z \vec{k}}_{\text{вектор конвективного ускорения}}.$$

В некоторых моделях течения жидкости приходится применять оператор  $\frac{d}{dt}$  к тензорной функции, ранг которой равен двум. Это характерно для моделей

переноса рейнولدсовых напряжений (см. Главу 5). Для произвольного тензора  $\underline{A}$  имеем:

$$\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A} = \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + V_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad (1.8.11)$$

или, в развернутом виде:

$$\frac{dA}{dt} = \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + V_1 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_3} \right) \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

При применении производной  $\frac{d}{dt}$ , содержащей локальную и конвективную части, к физическим величинам, являющимися скалярными и векторными, не нарушается фундаментальный принцип механики – принцип материальной объективности [5; 64]. Однако, если физическая величина является тензором 2-го ранга, то при использовании этого оператора данный принцип уже не выполняется. Поэтому структуру материальной производной приходится модифицировать – в ней кроме локальной и конвективной появляется еще и вращательная часть. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Согласно принципу материальной объективности, уравнения и соотношения, описывающие поведение сплошной среды, не зависят от выбора наблюдателя, от выбранной системы отсчета. Математическая формулировка уравнений, касающихся поведения жидкости, не должна зависеть от изменения системы отсчета, быть нейтральной к выбору системы отсчета. Принцип материальной объективности выполняется, когда тензоры, фигурирующие в рассматриваемом уравнении или соотношении, нейтральны относительно поворотов. Проверить это можно, применяя к ним ортогональный тензор  $\underline{Q}$  (тензор поворота,  $\underline{Q}^T = \underline{Q}^{-1}$ ,  $\underline{Q}^T \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T = \underline{E}$ ), зависящий в общем случае от времени  $t$ ,  $\underline{Q} = \underline{Q}(t)$ . Тензор  $\underline{Q}$  поворачивает все пространство на некоторый угол вокруг фиксированной оси. Действие этого тензора на вектор, проиллюстрировано на Рис. 1.13, где показан поворот радиус-вектора  $\vec{r}$  относительно

оси, характеризуемой радиус-вектором  $\vec{r}_c$ , проходящим через точку  $C$ , являющуюся точкой пересечения оси вращения с плоскостью, перпендикулярной этой оси и проходящей через конец  $\vec{r}$  – точку  $A$ . В результате поворота возникает вектор  $\vec{r}'$ ,  $\vec{r}' = \vec{r}_c + \overline{CB}$ , где  $\overline{CB}$  – вектор, полученный в результате поворота вектора  $\overline{CA}$  в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Очевидно, что

$$\vec{r}' = \vec{r}_c + [\vec{r} - \vec{r}_c] \cdot \underline{Q}. \quad (1.8.12)$$

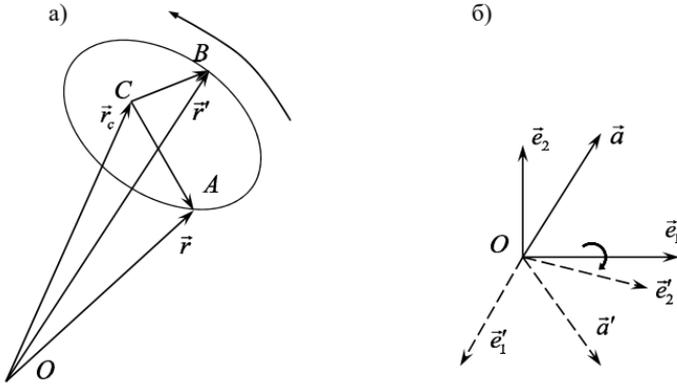


Рис. 1.13. Действие ортогонального тензора  $\underline{Q}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$  и на произвольный вектор

Условимся в дальнейшем помечать векторные и тензорные величины после поворота штрихами. Поскольку базисные векторы можно вычислять как:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \vec{e}_i, \quad (1.8.13)$$

то применяя оператор  $\partial/\partial x_i$  к выражению (1.8.12), можно получить:

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \cdot \underline{Q},$$

или

$$\underline{\vec{e}}'_i = \underline{\vec{e}}_i \cdot \underline{Q} = \underline{Q}^T \cdot \underline{\vec{e}}_i. \quad (1.8.14)$$

Тем самым тензор  $\underline{Q}$  поворачивает векторы базиса. Если подействовать поворотом на произвольный вектор  $\vec{a}$ , который в выбранном базисе  $\{\underline{\vec{e}}_i\}$  можно представить как  $\vec{a} = a_i \underline{\vec{e}}_i$ , то в результате получается вектор  $\vec{a}' = \vec{a} \cdot \underline{Q}$ , причем в компонентной форме

$$\vec{a} \cdot \underline{Q} = a_i \underline{\vec{e}}_i \cdot \underline{Q} = a_i \underline{\vec{e}}'_i.$$

Видно, что вектор  $\vec{a}$  повернулся вместе с векторами базиса, при этом компоненты вектора  $\vec{a}$  не изменились (Рис. 1.136).

Для того чтобы определить тензор  $\underline{A}'$ , получающийся в результате воздействия  $\underline{Q}$  на тензор  $\underline{A}$ , рассмотрим определение тензора как оператора, переводящего векторы в векторы

$$\vec{a} \cdot \underline{A} = \vec{b}.$$

Умножая равенства  $\vec{a}' = \vec{a} \cdot \underline{Q}$  и  $\vec{b}' = \vec{b} \cdot \underline{Q}$  на  $\underline{Q}^T$  справа, можно получить

$$\vec{a}' \cdot \underline{Q}^T = \vec{a}, \quad \vec{b}' \cdot \underline{Q}^T = \vec{b}.$$

Подстановка полученных выражений для  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в определение тензора дает:

$$\vec{a}' \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{A} = \vec{b}' \cdot \underline{Q}^T$$

или, после умножения на  $\underline{Q}$  справа:

$$\vec{b}' = \vec{a}' \cdot (\underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}) = \vec{a}' \cdot \underline{A}'.$$

Тензор  $\underline{A}'$  есть образ тензора  $\underline{A}$  после поворота:

$$\underline{A}' = \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} \quad (1.8.15)$$

В литературе тензоры, которые преобразуются согласно последнему соотношению, называются нейтральными [5]. Если тензор  $\underline{B}$  не нейтрален, то  $\underline{B}' \neq \underline{Q}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{Q}$ . Для нейтрального тензора  $\underline{A}$ , который в выбранном базисе

можно представить, например, в виде,  $\underline{A} = A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j$ , после поворота будет иметь место следующее представление в компонентной форме:

$$\underline{A}' = \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} = \underline{Q}^T \cdot A_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot \underline{Q} = A_{ij} \underline{Q}^T \cdot \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot \underline{Q} = A_{ij} (\bar{e}_i \cdot \underline{Q}) (\bar{e}_j \cdot \underline{Q}) = A_{ij} \bar{e}'_i \bar{e}'_j.$$

Отсюда видно, что базис поворачивается, а компоненты не изменяются. Проверка нейтральности тензора относительно поворотов заключается в проверке выполнения равенства (1.8.15). При этом полезно иметь в виду следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} (\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2)^T &= \underline{A}_1^T \cdot \underline{A}_2^T; \\ (\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2 \cdot \underline{A}_3)^T &= \underline{A}_3^T \cdot \underline{A}_2^T \cdot \underline{A}_1^T; \\ (\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2 \cdot \underline{A}_3)' &= (\underline{A}_2 \cdot \underline{A}_3)' \cdot \underline{A}_1' = \underline{A}_3' \cdot \underline{A}_2' \cdot \underline{A}_1'; \\ \frac{d\bar{e}'_i}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{e}_i \cdot \underline{Q}) = \frac{d\bar{e}_i}{dt} \cdot \underline{Q} + \bar{e}_i \cdot \frac{d\underline{Q}}{dt}. \end{aligned}$$

Для примера, проверим нейтральность относительно поворотов тензора скоростей деформаций  $\underline{S}$  (симметричной части тензора градиентов скоростей  $\bar{\nabla} \bar{V}$ ).

Поскольку

$$\bar{\nabla} \bar{V} = \bar{e}_k \otimes \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i} = \bar{e}_k \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \bar{e}_k \otimes \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} = \bar{e}_k \otimes \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial t},$$

то с учетом (1.8.14):

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla} \bar{V})' &= (\bar{e}_k)' \otimes \frac{\partial \bar{e}'_i}{\partial t} = (\underline{Q}^T \cdot \bar{e}_k) \otimes \frac{\partial}{\partial t} (\bar{e}_i \cdot \underline{Q}) = \\ &= (\underline{Q}^T \cdot \bar{e}_k) \otimes \left( \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial t} \cdot \underline{Q} + \bar{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \right) = \\ &= \underline{Q}^T \cdot \left( \bar{e}_k \otimes \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial t} \right) \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot (\bar{e}_k \otimes \bar{e}_i) \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} = \\ &= \underline{Q}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить

$$(\bar{\nabla}\bar{V})' = \underline{Q}^T \cdot \bar{V}\bar{\nabla} \cdot \underline{Q} + \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{Q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{S}' &= \frac{1}{2} \left( (\bar{\nabla}\bar{V})' + (\bar{V}\bar{\nabla}^T)' \right) = \\ &= \frac{1}{2} \underline{Q}^T \cdot (\bar{\nabla}\bar{V} + \bar{V}\bar{\nabla}^T) \cdot \underline{Q} + \frac{1}{2} \left( \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{Q} \right) = \\ &= \underline{Q}^T \cdot \underline{S} \cdot \underline{Q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{Q}^T \cdot \underline{Q}) = \\ &= \underline{Q}^T \cdot \underline{S} \cdot \underline{Q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E = \underline{Q}^T \cdot \underline{S} \cdot \underline{Q}, \end{aligned}$$

т. е. тензор  $\underline{S}$  действительно нейтрален.

Теперь проверим нейтральность относительно поворотов антисимметричной части тензора градиентов скоростей – тензора  $\underline{\Omega}$  (спина), для которого:

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}\bar{V} - \bar{V}\bar{\nabla}^T), \quad \underline{\Omega}' = \frac{1}{2} \left( (\bar{\nabla}\bar{V})' - (\bar{V}\bar{\nabla}^T)' \right).$$

Пользуясь результатами предыдущего примера, можно получить:

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}' &= \frac{1}{2} \underline{Q}^T \cdot (\bar{\nabla}\bar{V} - \bar{V}\bar{\nabla}^T) \cdot \underline{Q} + \frac{1}{2} \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{Q} = \\ &= \underline{Q}^T \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{Q} + \frac{1}{2} \left( \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} - \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{Q} \right) \neq \underline{Q}^T \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{Q}. \end{aligned}$$

Следовательно, спин не является нейтральным.

Выражение для  $\underline{\Omega}'$  можно преобразовать, учитывая, что

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} (\underline{Q}^T \cdot \underline{Q}) = \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{Q} = -\underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t}.$$

Тогда

$$\underline{\Omega}' = \underline{Q}^T \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t}.$$

Пусть симметричный тензор второго ранга  $\underline{A}$  является нейтральным относительно поворотов ( $\underline{A}' = \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}$ ), проверим нейтральность симметричного тензора  $\underline{B}$ , содержащего спин  $\underline{\Omega}$ :

$$\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{\Omega} + (\underline{A} \cdot \underline{\Omega})^T.$$

После воздействия ортогонального тензора  $\underline{Q}$  на тензор  $\underline{B}$  можно получить:

$$\underline{B}' = (\underline{A} \cdot \underline{\Omega})' + ((\underline{A} \cdot \underline{\Omega})^T)' = -\underline{\Omega}' \cdot \underline{A}' + \underline{A}' \cdot \underline{\Omega}'.$$

Используя результат предыдущего примера, дальнейшие преобразования можно выполнить так:

$$\begin{aligned} \underline{B}' &= -\left(\underline{Q}^T \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t}\right) \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} + \\ &+ \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} \cdot \left(\underline{Q}^T \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t}\right) = -\underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{Q} - \\ &- \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} = \\ &= \underline{Q}^T \cdot (-\underline{A} \cdot \underline{\Omega} + \underline{A} \cdot \underline{\Omega}) \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T\right) \cdot \underline{Q} = \\ &= \underline{Q}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \left(\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T - \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{A}\right) \cdot \underline{Q}. \end{aligned}$$

В этих выкладках использовано тождество

$$\underline{Q}^T \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T = \underline{E},$$

а также следующее из него соотношение для произвольного тензора  $\underline{H}$ :

$$\underline{H} = \underline{H} \cdot \underline{E} = \underline{E} \cdot \underline{H} = \underline{H} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{Q} = \underline{Q}^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{H}.$$

Второе слагаемое полученного выражения для  $\underline{B}'$  показывает, что этот тензор  $\underline{B}$  не является нейтральным.

Наконец, проверим нейтральность конвективной производной симметричного тензора второго ранга  $\underline{A}$ , заданной следующим образом:

$$\underline{L} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A},$$

где  $\vec{V}$  – вектор скорости. Очевидно:

$$\begin{aligned}
 \underline{L}' &= \left( (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A} \right)' = \left( V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{A} \right)' = V_i \frac{\partial \underline{A}'}{\partial x_i} = V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} = \\
 &= V_i \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial x_i} \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} + V_i \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial x_i} \cdot \underline{Q} + V_i \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x_i} = \\
 &= V_i \left( \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial x_i} \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x_i} \right) + \underline{Q}^T \cdot V_i \frac{\partial \underline{A}}{\partial x_i} \cdot \underline{Q} = \\
 &= \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial x_i} \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x_i} + \underline{Q}^T \cdot \left( (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A} \right) \cdot \underline{Q} = \\
 &= \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \underline{Q}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{Q} = \\
 &= \underline{Q}^T \cdot \left( \underline{Q} \cdot \frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T \right) \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{Q} = \\
 &= \underline{Q}^T \cdot \underline{L} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^T \cdot \left( -\frac{\partial \underline{Q}^T}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} \cdot \underline{Q}^T \right) \cdot \underline{Q}.
 \end{aligned}$$

Последнее слагаемое показывает, что тензор  $\underline{L}$  не является нейтральным.

Проверка нейтральности тензоров  $\underline{B}$  и  $\underline{L}$  позволяет сделать важные заключения относительно материальной производной тензора второго ранга.

В эйлеровой системе отсчета оператор  $\frac{d}{dt} = \partial/\partial t + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$ , примененный к тен-

зору  $\underline{A} = A(r, t)$  дает тензор  $\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A}$ , локальная часть которого  $\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

нейтральна  $\left( \left( \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right)' = \underline{Q}^T \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \cdot \underline{Q} \right)$ , а конвективная, как показано в примере

выше, таковой не является.

Для того чтобы материальная производная тензора второго ранга  $\underline{A}$  давала бы тензор, нейтральный относительно поворотов, необходимо добавку в тензоре  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A}$ , вызванную поворотом, как-то компенсировать. Это можно

сделать, например, за счет тензора  $\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{\Omega} + (\underline{A} \cdot \underline{\Omega})^T$ , рассмотренного ранее. Тогда материальная производная тензора второго ранга  $\underline{A}$ , которая обозначается как  $D\underline{A}/Dt$ , будет иметь вид:

$$\frac{D\underline{A}}{Dt} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A} - (\underline{A} \cdot \underline{\Omega} + (\underline{A} \cdot \underline{\Omega})^T). \quad (1.8.16)$$

В литературе эта производная называется производной Яуманна [53]. Первое слагаемое в этом выражении локальной частью, второе – конвективной, а третье – вращательной. Используя результаты приведенных ранее примеров, можно убедиться, что этот тензор является нейтральным:

$$\left( \frac{D\underline{A}}{Dt} \right)' = \underline{Q}^r \cdot \frac{D\underline{A}}{Dt} \cdot \underline{Q}.$$

Заметим, что если тензор второго ранга определять не как  $\vec{a} \cdot \underline{A} = \vec{b}$ , а как  $\underline{A} \cdot \vec{a} = \vec{b}$ , то материальная производная тензора  $\underline{A}$  принимает вид:

$$\frac{D\underline{A}}{Dt} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A} + (\underline{A} \cdot \underline{\Omega} + (\underline{A} \cdot \underline{\Omega})^T).$$

Не нейтральную добавку в тензоре  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{A}$  можно компенсировать и другими способами. Тогда вращательная часть материальной производной будет отличаться от яуманновского вида. Можно показать, что помимо производной Яуманна в качестве вращательной части для произвольного тензора второго ранга  $\underline{A}$  могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \vec{V} \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot (\vec{\nabla} \vec{V})^T, \\ & \underline{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{\nabla} \vec{V})^T \cdot \underline{A}, \\ & \vec{\nabla} \vec{V} \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot (\vec{\nabla} \vec{V})^T + (tr \vec{\nabla} \vec{V}) \underline{A}, \end{aligned}$$

и ряд других [56; 64]. Первое из них, использованное в качестве вращательной части материальной производной приводит к так называемой производной Олдройда, второе – к производной Ривлина, третье – к производной Труселла.

В настоящее время вопрос о том, какую производную целесообразнее использовать при построении реологических уравнений, является неясным. Наиболее популярной является все же производная Яуманна [53; 60].

Материальная производная Ривлина записывается следующим образом:

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \vec{V} + (\mathbf{A} \cdot \nabla \vec{V})^T. \quad (1.8.17)$$

Видно, что производная Ривлина отличается от производной Яуманна добавкой  $\mathbf{A} \cdot \underline{S} + (\mathbf{A} \cdot \underline{S})^T$ , которая является нейтральной и не играет роли при исправлении не нейтральности  $\frac{d}{dt}$ .

Вращательная производная симметричного тензора также является симметричным тензором. Для примера рассмотрим вращательную производную тензора скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \underline{S} \cdot \underline{\Omega} + (\underline{S} \cdot \underline{\Omega})^T &= \frac{1}{4} [(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) \cdot (\nabla \vec{V} - \nabla \vec{V}^T) + (\nabla \vec{V}^T + \nabla \vec{V}) \cdot (\nabla \vec{V}^T - \nabla \vec{V})] = \\ &= \frac{1}{2} [\nabla \vec{V}^T \cdot \nabla \vec{V} - \nabla \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}^T]. \end{aligned}$$

Таким образом, получился симметричный тензор второго ранга.

Все виды вращательных производных можно записать в более общем виде по предложению Мандела [5]:

$$a_1 (\text{tr} \nabla \vec{V}) \mathbf{A} + a_2 \mathbf{A} \cdot \nabla \vec{V} + a_3 \nabla \vec{V} \cdot \mathbf{A} + a_4 \nabla \vec{V} (\text{tr} \mathbf{A}),$$

где  $a_1, \dots, a_4$  – константы. Выбирая разные значения этих констант, можно получить указанные выше формы вращательных производных.

Анализируя различные формы вращательных производных, можно заметить, что в них содержится, так или иначе тензор поворотов (спин)  $\underline{\Omega}$ , который, будучи скалярно умножен на тензор  $\mathbf{A}$ , к которому применяют оператор материальной производной, дает необходимую компенсационную добавку для конвективной части производной тензора.

Изложенное выше показывает, что вид материальной производной зависит от ранга тензора, к которому она применяется. Для скалярных и векторных величин материальная производная содержит локальную и конвективную части, а для тензоров второго ранга к ним еще добавляется и вращательная часть.



## ГЛАВА 2 . УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ, ЭНЕРГИИ, ДИФФУЗИИ

### 2.1. ФОРМУЛА И.С. ГРОМЕКИ И ДРУГИЕ СОПРЯЖЕННЫЕ С НЕЙ СООТНОШЕНИЯ

В руководствах по гидродинамике [27; 33] приводятся различного рода доказательства формулы И.С. Громеки

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \quad (2.1.1)$$

Однако возможно еще одно доказательство этой формулы. Поскольку

$\vec{\nabla} \vec{v}^T = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \vec{e}_j$ , то умножение этого тензора на вектор скорости  $\vec{v}$  справа дает:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{v}^T \cdot \vec{v} &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot V_k \vec{e}_k = (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V_k \vec{e}_k = \\ &= \delta_{jk} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V_k \vec{e}_k = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

т. е. получаем вектор конвективного ускорения жидкой частицы. Далее выполним следующую цепочку преобразований:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} \vec{v}^T \cdot \vec{v} = -(\vec{\nabla} \vec{v} - \vec{\nabla} \vec{v}^T) \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (2.1.3)$$

Второе слагаемое в правой части можно здесь представить в виде градиента:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot V_k \vec{e}_k = \delta_{jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} V_k \vec{e}_i = \\ &= V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial V_j V_j}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Первое же слагаемое в правой части (2.1.2) можно записать так:

$$(\vec{\nabla} \vec{v} - \vec{\nabla} \vec{v}^T) \cdot \vec{v} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \quad (2.1.5)$$

Докажем это равенство. Левая часть его:

$$\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) \bar{e}_i \bar{e}_j \cdot V_k \bar{e}_k = \delta_{jk} V_k \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) \bar{e}_i = V_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) \bar{e}_i \quad (2.1.6)$$

Правая часть равенства (2.1.5) также есть вектор:

$$\bar{V} \times (\bar{\nabla} \times \bar{V}) = V_s \bar{e}_s \times \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{kij} \bar{e}_k\right) = V_s \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{tsk} \bar{e}_t. \quad (2.1.7)$$

Покажем, что выражения (2.1.6) и (2.1.7) эквивалентны. Для этого сравним компоненты этих векторов. В проекции на ось  $X$  выражение (2.1.6) дает (полагаем  $i=1$ ):

$$\begin{aligned} V_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_j}\right) &= V_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right) + V_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right) + V_3 \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right) = \\ &= V_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right) + V_3 \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right), \end{aligned}$$

а выражение (2.1.7) в проекции на эту же ось (полагаем  $t=1$ ) дает:

$$\begin{aligned} V_s \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{tsk} &= V_2 \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{3ij} \varepsilon_{123} + V_3 \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{2ij} \varepsilon_{132} = \\ &= V_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} \varepsilon_{312} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \varepsilon_{321}\right) \varepsilon_{123} + V_3 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} \varepsilon_{231} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \varepsilon_{213}\right) \varepsilon_{123} = \\ &= V_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right) - V_3 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right). \end{aligned}$$

Видно, что проекции на ось  $x$  выражений (2.1.6) и (2.1.7) совпадают. Аналогичное совпадение имеет место и в отношении проекций на оси  $y$  и  $z$ .

Таким образом, соотношение (2.1.3) с учетом равенств (2.1.4) и (2.1.5) принимает вид:

$$(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} = \bar{\nabla} \frac{V^2}{2} - \bar{V} \times (\bar{\nabla} \times \bar{V}),$$

а это и есть формула И.С. Громеки (2.1.1).

При доказательстве были получены некоторые полезные формулы. В частности, из соотношения (2.1.5) следует, что

$$2\underline{\Omega} \cdot \vec{V} = \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}). \quad (2.1.8)$$

С помощью формулы И.С. Громеки можно получить и такую формулу:

$$\vec{V} \cdot \underline{S} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 - \frac{1}{2} \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}). \quad (2.1.9)$$

Действительно, так как  $\vec{\nabla} \vec{V} = \underline{S} + \underline{\Omega}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \underline{S} &= \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{V} \cdot \underline{\Omega} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \underline{\Omega} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) + \frac{1}{2} \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \\ &= \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - \frac{1}{2} \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}). \end{aligned}$$

Можно привести еще одно, простейшее, доказательство формулы Громеки. Учитывая, что по определению [33] вихрь скорости  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V}$ , выполним следующую цепочку преобразований:

$$\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{V} \times 2\vec{\omega} = 2(V_2\omega_3 - V_3\omega_2)\vec{e}_1 + 2(V_3\omega_1 - V_1\omega_3)\vec{e}_2 + 2(V_1\omega_2 - V_2\omega_1)\vec{e}_3.$$

Компонента при базисном векторе  $\vec{e}_1$  может быть преобразована дальше следующим образом:

$$\begin{aligned} 2(V_2\omega_3 - V_3\omega_2) &= V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial V_2^2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_3^2}{\partial x_1} - V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_1^2}{\partial x_1} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_1} - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V_1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем компоненты и при других базисных векторах. В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \vec{V} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_3} \vec{e}_3 + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V_1 \vec{e}_1 + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V_2 \vec{e}_2 + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V_3 \vec{e}_3 = \\ &= \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}. \end{aligned}$$

Тем самым и таким способом формула Громеки доказана.

Формула для конвективного ускорения с учетом выражения (2.1.8) может быть записана в виде:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - 2\vec{\underline{\Omega}} \cdot \vec{V}, \quad (2.1.10)$$

что является модификацией формулы Громеко. Кроме того, может оказаться полезной следующая формула:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) - \vec{V} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (2.1.11)$$

Из сравнения правых и левых частей двух последних выражений также следует:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) - \vec{V} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - 2\vec{\underline{\Omega}} \cdot \vec{V}. \quad (2.1.12)$$

С формулой И.С. Громеки связано еще несколько полезных формул. В частности, лапласиан скорости можно представить в виде:

$$\Delta \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}), \quad (2.1.13)$$

или, применяя другие устоявшиеся в литературе, обозначения:  $\Delta \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \text{rot rot } \vec{V}$ . Докажем эту формулу, выполняя выкладки для  $\text{rot rot } \vec{V}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \varepsilon_{skj} \vec{e}_s \right) = \\ &= \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_k} \varepsilon_{skj} \varepsilon_{lis} \vec{e}_l = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_k} \varepsilon_{skj} \varepsilon_{1is} \vec{e}_1 + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_k} \varepsilon_{skj} \varepsilon_{2is} \vec{e}_2 + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_k} \varepsilon_{skj} \varepsilon_{3is} \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Распишем подробнее компоненты этого вектора, стоящие при базисных векторах. При базисном векторе  $\vec{e}_1$  выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_k} \varepsilon_{skj} \varepsilon_{1is} &= \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_2 \partial x_k} \varepsilon_{3kj} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_3} \varepsilon_{2kj} = \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3 \partial x_1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta V_1. \end{aligned}$$

Аналогичные выкладки можно выполнить и для компонент при базисных векторах  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$ . В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta V_1 \right] \vec{e}_1 + \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta V_2 \right] \vec{e}_2 + \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta V_3 \right] \vec{e}_3 = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}. \end{aligned}$$

Таким образом, исходная формула (2.1.13) доказана.

## 2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ

Как известно, при использовании эйлерового подхода к описанию движения жидкости появляется дополнительная компонента ускорения, обусловленная изменением пространственной конфигурации течения – конвективное ускорение  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$ . Его можно записать как результат применения скалярного дифференциального оператора  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$  к вектору  $\vec{V}$ , или, что то же самое, как результат скалярного произведения вектора скорости на тензор скоростей деформаций:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i. \quad (2.2.1)$$

Для транспонированного тензора такое произведение дает:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}^T = \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} = V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \vec{e}_i. \quad (2.2.2)$$

Конвективное ускорение можно записать также в виде:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{V}. \quad (2.2.3)$$

Дивергенция тензора скоростей деформаций может быть представлена в виде:

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{S} = \frac{1}{2} \Delta \bar{V} + \frac{1}{2} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \quad (2.2.4)$$

Учитывая известную формулу [26]

$$\Delta \bar{V} = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V}, \quad (2.2.5)$$

это выражение можно записать и по-другому:

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{S} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V} + \frac{1}{2} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V}. \quad (2.2.6)$$

Отсюда следует еще одна формула для  $rot(rot \bar{V})$ :

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V} = 2 \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - 2 \bar{\nabla} \cdot \underline{S}. \quad (2.2.7)$$

Для градиентов скоростей можно записать еще два полезных соотношения:

$$\bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}^T = \Delta \left( \frac{V^2}{2} \right) - \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}, \quad (2.2.8)$$

$$\bar{V} \cdot [\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T)] = \Delta \frac{V^2}{2} - \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}^T + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \quad (2.2.9)$$

Для поля скоростей  $\bar{V}(\bar{r}, t)$  кроме скалярного дифференциального оператора первого порядка  $(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})$ , который дает конвективную производную, можно использовать и векторный дифференциальный оператор  $(\bar{V} \times \bar{\nabla})$ . В компонентном виде его можно представить в следующем виде, используя понятие тензора Леви-Чивита согласно (1.4.11):

$$\bar{V} \times \bar{\nabla} = V_i \bar{e}_i \times \bar{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \bar{e}_k \varepsilon_{kij} V_i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (2.2.10)$$

или, подробнее, в обычной форме записи для декартовой прямоугольной системы координат, получаем вектор с компонентами:

$$\left( V_y \frac{\partial}{\partial z} - V_z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \left( V_z \frac{\partial}{\partial x} - V_x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \left( V_x \frac{\partial}{\partial y} - V_y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Если применить оператор  $(\vec{V} \times \vec{\nabla})$  к скалярной функции  $f$ , то получается величина  $(\vec{V} \times \vec{\nabla})f$ , которая является вектором:

$$(\vec{V} \times \vec{\nabla})f = \left( V_y \frac{\partial f}{\partial z} - V_z \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{i} + \left( V_z \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( V_x \frac{\partial f}{\partial y} - V_y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \vec{k}. \quad (2.2.11)$$

Оператор  $(\vec{V} \times \vec{\nabla})$ , примененный к вектору, дает тензор второго ранга.

Так, для поля скоростей имеем:

$$(\vec{V} \times \vec{\nabla})\vec{V} = \varepsilon_{kij} V_i \frac{\partial V_s}{\partial x_j} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_s. \quad (2.2.12)$$

Матрица компонент этого тензора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \left( V_y \frac{\partial V_x}{\partial z} - V_z \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \left( V_y \frac{\partial V_y}{\partial z} - V_z \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) & \left( V_y \frac{\partial V_z}{\partial z} - V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ \left( V_z \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_x \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) & \left( V_z \frac{\partial V_y}{\partial x} - V_x \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) & \left( V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} - V_x \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ \left( V_x \frac{\partial V_x}{\partial y} - V_y \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) & \left( V_x \frac{\partial V_y}{\partial y} - V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \left( V_x \frac{\partial V_z}{\partial y} - V_y \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что след этого несимметричного тензора:

$$\text{tr}[(\vec{V} \times \vec{\nabla})\vec{V}] = 2\vec{V} \cdot \vec{\omega}, \quad (2.2.13)$$

где  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V}$  – вихрь скорости. Тот же самый результат дают смешанные скалярно-векторные произведения:

$$\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = (\vec{V} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} = 2\vec{V} \cdot \vec{\omega}. \quad (2.2.14)$$

Действительно:

$$\begin{aligned}
 (\vec{V} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} &= \left( V_i \vec{e}_i \times \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \cdot V_s \vec{e}_s = V_i \varepsilon_{kij} \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot V_s \vec{e}_s = V_i \varepsilon_{kij} (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_s) \frac{\partial V_s}{\partial x_j} = \\
 &= V_i \varepsilon_{kij} \delta_{ks} \frac{\partial V_s}{\partial x_j} = V_i \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \varepsilon_{kij} = V_i \frac{\partial V_1}{\partial x_j} \varepsilon_{1ij} + V_i \frac{\partial V_2}{\partial x_j} \varepsilon_{2ij} + V_i \frac{\partial V_3}{\partial x_j} \varepsilon_{3ij} = \\
 &= V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = \\
 &= V_1 \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) + V_2 \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) + V_3 \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) = 2\vec{V} \cdot \vec{\omega}.
 \end{aligned}$$

Здесь при выполнении выкладок учтено, что ненулевыми компонентами тензора Леви-Чивита могут быть только те, у которых индексы имеют разные значения и среди них не должно быть одинаковых.

Тензорным дифференциальным оператором второго порядка является произведение  $\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}$ , т. е.  $\vec{\nabla} \vec{\nabla}$ . В компонентном виде:

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \vec{e}_i \vec{e}_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.2.15)$$

Матрица компонент этого симметричного тензора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

Оператор Лапласа – скалярный дифференциальный оператор второго порядка – есть след этого тензора:

$$\Delta = \text{tr} \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \quad (2.2.16)$$

Для двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  их скалярное и векторное произведения могут быть записаны в тензорном виде через диаду  $\vec{a} \otimes \vec{b}$ . В компонентном виде диада  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  имеет вид:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (2.2.17)$$

со следующей матрицей компонент, которая является несимметричной:

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

Видно, что след этой диады есть скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{tr}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{a} \otimes \vec{b}) : \underline{E}, \quad (2.2.18)$$

что вытекает также из следующей цепочки преобразований:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\vec{a} \otimes \vec{b}) &= (\vec{a} \otimes \vec{b}) : \underline{E} = a_i b_j \vec{e}_i \vec{e}_j : \delta_{ks} \vec{e}_k \vec{e}_s = a_i b_j \delta_{ks} (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_s) = \\ &= a_i b_j \delta_{ks} \delta_{jk} \delta_{is} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  с помощью тензора Леви-Чивита согласно выражению (1.4.10) можно представить в виде:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{2} \left[ (\vec{a} \otimes \vec{b})^T - (\vec{a} \otimes \vec{b}) \right] : ({}^3 \underline{\varepsilon}),$$

иначе говоря,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{b} \otimes \vec{a} - \vec{a} \otimes \vec{b}) : {}^3 \underline{\varepsilon}, \quad (2.2.19)$$

Действительно, левая часть этого равенства:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}.$$

а правая:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\vec{b} \otimes \vec{a} - \vec{a} \otimes \vec{b}) : ({}^3 \underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} (b_i a_j - a_i b_j) \vec{e}_i \vec{e}_j : \varepsilon_{kts} \vec{e}_k \vec{e}_t \vec{e}_s = \\ &= \frac{1}{2} (b_i a_j - a_i b_j) (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_t) \varepsilon_{kts} \vec{e}_s = \\ &= \frac{1}{2} (b_i a_j - a_i b_j) \delta_{jk} \delta_{it} \varepsilon_{kts} \vec{e}_s = \frac{1}{2} (b_i a_j - a_i b_j) \varepsilon_{jis} \vec{e}_s = \\ &= \frac{1}{2} (b_i a_j - a_i b_j) \varepsilon_{j1i} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} (b_i a_j - a_i b_j) \varepsilon_{j12} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} (b_i a_j - a_i b_j) \varepsilon_{j13} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Проекция этого вектора на ось  $x$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b_1 a_j - a_1 b_j) \varepsilon_{j1} &= \frac{1}{2}(b_1 a_j - a_1 b_j) \varepsilon_{231} + \frac{1}{2}(b_1 a_j - a_1 b_j) \varepsilon_{321} = \\ &= \frac{1}{2}(b_3 a_2 - a_3 b_2) - \frac{1}{2}(b_2 a_3 - a_2 b_3) = (b_3 a_2 - a_3 b_2), \end{aligned}$$

т. е. правая и левая части совпадают с проекцией произведения  $\vec{a} \times \vec{b}$  на эту ось. Аналогичным образом можно увидеть совпадение и для других двух проекций. Тем самым следует, что векторное произведение двух векторов есть двойное скалярное произведение антисимметричной части соответствующей диады, взятой с обратным знаком, на тензор Леви-Чивита.

Нетрудно убедиться в справедливости и таких равенств для векторного произведения векторов:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\overset{3}{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (\overset{3}{\underline{\varepsilon}}) : \frac{1}{2}(\vec{a} \otimes \vec{b} - \vec{b} \otimes \vec{a}) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (\overset{3}{\underline{\varepsilon}}) : (\vec{a} \otimes \vec{b}) \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Поскольку для скалярных произведений вектора и тензора справедливы соотношения:

$$\vec{a} \cdot \underline{A} = \underline{A}^T \cdot \vec{a}; \quad \underline{A} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \underline{A}^T,$$

что следует из определения операции транспонирования, то очевидно:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \otimes \vec{c}) = (\vec{b} \otimes \vec{c})^T \cdot \vec{a} = (\vec{c} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{a}.$$

Таким образом, перестановка местами в скалярном произведении вектора и тензора приводит к появлению у тензора символа транспонирования.

Рассмотрим теперь градиент скалярного произведения двух векторных функций  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} a_j b_j = \vec{e}_k \frac{\partial a_j}{\partial x_k} b_j + \vec{e}_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k} a_j = \\ &= b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \vec{e}_k + a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \vec{e}_k = b \cdot \vec{\nabla} \vec{a}^T + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \vec{b}^T. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула:

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \vec{b}^T + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \vec{a}^T = \vec{\nabla} \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (2.2.21)$$

Применяя эту формулу к скалярной величине  $V^2$ , присутствующей во многих соотношениях гидродинамики, получаем:

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}^T = \vec{\nabla} \vec{V} \cdot \vec{V}. \quad (2.2.22)$$

Оператор конвективной производной, примененный к скалярным и векторным функциям, позволяет переходить к дивергентной форме записи таких производных:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})f = \vec{\nabla} \cdot (f \vec{V}) - f(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}), \quad (2.2.23)$$

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) - \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (2.2.24)$$

Скалярное произведение вектора на тензор Леви-Чивита:

$$\vec{a} \cdot ({}^3 \underline{\varepsilon})$$

дает антисимметричный тензор второго ранга. В компонентном виде это:

$$\vec{a} \cdot ({}^3 \underline{\varepsilon}) = a_k \vec{e}_k \cdot \varepsilon_{sij} \vec{e}_s \vec{e}_i \vec{e}_j = a_k \delta_{ks} \varepsilon_{sij} \vec{e}_i \vec{e}_j = a_k \varepsilon_{kij} \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

Матрица компонент этого тензора:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тот же самый результат, но с обратным знаком, дает векторное произведение:

$$\vec{a} \times \underline{E} = a_k \varepsilon_{ikj} \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

Таким образом:

$$\vec{a} \times \underline{E} = -\vec{a} \cdot ({}^3 \underline{\varepsilon}). \quad (2.2.25)$$

Для антисимметричного тензора  $({}^3 \underline{\varepsilon}) \cdot \vec{\nabla} f$  его матрица компонент имеет

вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_3} & -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & -\frac{\partial f}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Другие полезные формулы [33]:

$$\bar{\nabla} \cdot \varphi \bar{a} = \varphi \bar{\nabla} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{\nabla} \varphi;$$

$$\bar{\nabla} (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{\nabla}) \bar{b} + (\bar{b} \cdot \bar{\nabla}) \bar{a} + \bar{a} \times (\bar{\nabla} \times \bar{b}) + \bar{b} \times (\bar{\nabla} \times \bar{a});$$

$$\bar{\nabla} (\bar{a}^2) = 2(\bar{a} \cdot \bar{\nabla}) \bar{a} + 2\bar{a} \times (\bar{\nabla} \times \bar{a});$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{a}) - \bar{a} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{b});$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{b} \times \bar{\nabla}) \bar{a} + (\bar{a} \cdot \bar{\nabla}) \bar{b} + \bar{a} \bar{\nabla} \cdot \bar{b} + \bar{b} \bar{\nabla} \cdot \bar{a};$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \varphi = \Delta \varphi;$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{a}) = \Delta \bar{a} + \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{a});$$

$$\bar{\nabla} \bar{r} = \underline{E}.$$

Рассмотрим теперь единичный тензор  $\underline{E}$  и другие, связанные с ним, тензоры второго ранга. Как известно, единичный тензор  $\underline{E} = \delta_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$  (тензорная единица) – тензор второго ранга – в декартовом прямоугольном базисе содержит в матрице компонент единицы, расположенные на главной диагонали:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот тензор играет важную роль в тензорной алгебре – с его помощью вычисляют след тензора второго ранга, скалярное умножение тензора любого ранга на тензор  $\underline{E}$  не меняет исходный тензор. Тензорная поверхность единичного тензора представляет собой сферу единичного радиуса. Любой шаровой тензор, характеризующий ту или иную физическую величину, записывается через

тензор  $\underline{E}$ . Так, тензор напряжений идеальной жидкости представляют в виде:  $\sigma = -p\underline{E}$ , где  $p$  – давление.

При записи физических соотношений иногда желательно иметь такой тензор второго ранга, у которого была бы лишь одна ненулевая компонента, расположенная к тому же не только на диагонали. Это нетрудно осуществить, используя определение дельты Кронекера. Например, тензоры  $\delta_i \delta_j \vec{e}_i \vec{e}_j$ ,  $\delta_{3i} \delta_{2j} \vec{e}_i \vec{e}_j$ ,  $[\delta_{2i} (\delta_{1j} + \delta_{2j} + \delta_{3j})] \vec{e}_i \vec{e}_j$  имеют следующие матрицы компонент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

### 2.3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Уравнение неразрывности представляет собой закон сохранения массы, и является скалярным уравнением, связывающим плотность  $\rho$  и скорость  $\vec{V}$  частиц жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (2.3.1)$$

Это уравнение может быть записано еще в двух (эквивалентной (2.3.1)) формах [27; 33]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0. \quad (2.3.3)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности упрощается:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (2.3.4)$$

Применим к уравнению неразрывности (2.3.1) оператор градиента:

$$\bar{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \rho] + \bar{\nabla} [\rho \bar{\nabla} \cdot \bar{V}] = 0.$$

После несложных преобразований можно получить векторное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \rho + \bar{\nabla} \rho \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{\nabla} \rho + (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \bar{\nabla} \rho + \rho \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = 0, \quad (2.3.5)$$

которое может быть записано в более компактном виде:

$$\frac{d}{dt} \bar{\nabla} \rho + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \bar{\nabla} \rho + \rho \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = 0. \quad (2.3.6)$$

или, в несколько другой форме:

$$\frac{d}{dt} \bar{\nabla} \rho + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + \bar{\nabla} (\rho \bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = 0. \quad (2.3.7)$$

Эти выражения содержат градиент дивергенции вектора  $\bar{V}$ , который согласно формуле (2.2.5) равен:

$$\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = \Delta \bar{V} + \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V}.$$

Для несжимаемой жидкости левая часть этого соотношения равна нулю, откуда для ротора вектора скорости этой жидкости:

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V} = -\Delta \bar{V}. \quad (2.3.8)$$

Для сжимаемой жидкости согласно формуле (2.3.7) в правой части этого выражения появляются дополнительные слагаемые:

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V} = - \left( \Delta \bar{V} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \bar{\nabla} \rho + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + \frac{(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})}{\rho} \bar{\nabla} \rho \right). \quad (2.3.9)$$

Уравнению неразрывности можно придать тензорный вид:

$$\frac{1}{3} \text{tr} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \underline{E} \right) + \text{tr} (\bar{\nabla} \rho \bar{V}) = 0 \quad (2.3.10)$$

Возникающий при этом тензор  $\bar{\nabla} \rho \bar{V}$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\rho\bar{V} &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_j \bar{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_j \bar{e}_k \bar{e}_j = \\ &= \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x_k} V_j + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right] \bar{e}_k \bar{e}_j = \bar{\nabla}\rho \otimes \bar{V} + \rho \bar{\nabla}\bar{V},\end{aligned}\quad (2.3.11)$$

Таким образом, уравнение неразрывности можно записать в такой форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + tr[\bar{\nabla}\rho \otimes \bar{V} + \rho \bar{\nabla}\bar{V}] = 0. \quad (2.3.12)$$

В заключение заметим, что конвективную производную плотности и давления (как и любой скалярной величины) можно представить в виде:

$$(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\rho = tr(\bar{V} \otimes \bar{\nabla}\rho), \quad (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})p = tr(\bar{V} \otimes \bar{\nabla}p),$$

т. е. конвективная производная равна следу соответствующего тензора.

Кроме того, для дивергенции произведения скалярной и векторной функций имеет место следующее соотношение:

$$\bar{\nabla} \cdot \rho\bar{V} = (\bar{\nabla}\rho \otimes \bar{V} + \rho \bar{\nabla}\bar{V}) : \underline{E}.$$

## 2.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Уравнение движения жидкости в напряжениях [38; 53; 56] имеет вид:

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \rho \bar{f}, \quad (2.4.1)$$

где  $\bar{f}$  – вектор интенсивности массовых сил,  $\bar{\nabla} \cdot \underline{\sigma}$  – дивергенция тензора напряжений  $\underline{\sigma}$ . Для несжимаемой вязкой жидкости тензор  $\underline{\sigma}$  согласно закону вязкого трения Ньютона записывается в виде:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{E} + 2\mu\underline{S}, \quad (2.4.2)$$

где  $p$  – давление,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $\underline{S}$  – тензор скоростей деформаций, определяемый согласно формуле (1.7.3). Поскольку  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$ , дивергенция тензора напряжений  $\underline{\sigma}$  при  $\mu \neq const$ , записывается как:

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S} + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \underline{S} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S} + \mu \Delta \vec{V}. \quad (2.4.3)$$

Тогда уравнение движения несжимаемой жидкости – уравнение Навье-Стокса – при  $\mu \neq const$  принимает вид:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} + \vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S} + \rho \vec{f}, \quad (2.4.4)$$

Добавочное слагаемое  $\vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S}$  связано с изменением динамической вязкости. В компонентной форме, в декартовой прямоугольной системе координат это уравнение имеет вид:

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta V_i + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i.$$

Для сжимаемой жидкости с переменной вязкостью уравнение будет содержать слагаемое с дивергенцией  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ , которая в этом случае не будет равна нулю. Реологическое соотношение при учете сжимаемости имеет вид [41]:

$$\underline{\sigma} = -p \underline{E} - \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \underline{E} + 2\mu \underline{S}, \quad (2.4.5)$$

или, обозначая скалярную величину при единичном тензоре как:

$$p + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = p', \quad (2.4.6)$$

это соотношение можно записать в виде:

$$\underline{\sigma} = -p' \underline{E} + 2\mu \underline{S}. \quad (2.4.7)$$

Дивергенция этого тензора при  $\mu \neq const$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma} = -\vec{\nabla} p' + \vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S} + \mu \Delta \vec{V} + \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}).$$

и в итоге уравнение движения сжимаемой жидкости с переменной вязкостью принимает вид:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p' + \mu \Delta \vec{V} + \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S} + \rho \vec{f} \quad (2.4.8)$$

или, в компонентном виде:

$$\rho \left[ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \Delta V_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i.$$

Учет переменности вязкости особенно важен при описании турбулентных течений с использованием гипотезы Буссинеска с турбулентной вязкостью  $\mu_t$ .

Применим операцию дивергенции к уравнению Навье-Стокса для сжимаемой жидкости с переменной вязкостью, уравнение движения которой (2.4.8) можно записать в следующем виде, представляя ускорение жидкой частицы как сумму локального и конвективного слагаемых:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p' + \mu \Delta \vec{V} + \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S} + \rho \vec{f}.$$

Будем последовательно применять операцию  $(\vec{\nabla} \cdot)$  к каждому векторному слагаемому этого уравнения, получая тем самым соответствующие скалярные выражения:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \rho \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}; \\ \vec{\nabla} \cdot \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &= \vec{\nabla} \rho \cdot [(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}] + \rho \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}); \\ \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} p') &= -\Delta p'; \\ \vec{\nabla} \cdot \mu \Delta \vec{V} &= \vec{\nabla} \mu \cdot \Delta \vec{V} + \mu \Delta (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}); \\ \vec{\nabla} \cdot \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) &= \vec{\nabla} \mu \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu \Delta (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}); \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \mu \cdot 2\underline{S}) &= \vec{\nabla} \vec{\nabla} \mu : \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \mu \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \mu : \vec{\nabla} \vec{V}^T + \vec{\nabla} \mu \cdot \Delta \vec{V}. \end{aligned}$$

Если массовая сила характеризует поле сил тяжести, то она имеет потенциал  $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$ ,  $U = gz$ , где  $z$  – вертикальная координата. Тогда:

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{f} = \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{f} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} U + \rho \Delta U.$$

Поскольку потенциальная функция  $U$  линейна, то её лапласиан равен нулю, в результате чего:

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{f} = -\vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} U.$$

В итоге результат применения операции дивергенции к уравнению Навье-Стокса при  $\mu \neq const$  дает скалярное уравнение:

$$\rho \frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{\nabla} \rho \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} + \rho \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} = -\Delta p + \vec{\nabla} 2\mu \cdot (\Delta V + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})) + 2\mu \Delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{\nabla} \vec{\nabla} : 2\mu \underline{S} - \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} U \quad (2.4.9)$$

Если жидкость несжимаема, то это выражение дает:

$$\rho \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} = -\Delta p + \vec{\nabla} \cdot 2\mu \Delta \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} : 2\mu \underline{S}, \quad (2.4.10)$$

а если к тому же  $\mu = const$ , то

$$\rho \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} = -\Delta p. \quad (2.4.11)$$

Рассмотрим теперь общий случай движения жидкости с учетом сжимаемости. Для течений несжимаемой жидкости система уравнений состоит из уравнений Навье-Стокса и неразрывности (векторного и скалярного уравнений):

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Эта система из двух уравнений является замкнутой – содержит две неизвестных – вектор скорости  $\vec{V}$  и скалярную величину  $p$  – давление. Система описывает ламинарные течения, в случае турбулентного она, как известно, становится незамкнутой – появляется тензор рейнольдсовых напряжений, который требует своего определения.

Для течений сжимаемых сред, когда  $\rho \neq const$  и тем самым  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \neq 0$ , уравнение Навье-Стокса (2.4.8) для движения жидкости с постоянной вязкостью  $\mu = const$  принимает вид:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p' + \mu \Delta \vec{V} + \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \rho \vec{f}, \quad (2.4.13)$$

где  $p'$  определяется выражением (2.4.6). Уравнение неразрывности для этого общего случая движения записывается в виде (2.3.1). При  $\rho \neq const$  система уравнений (2.4.13) и (2.3.1) является незамкнутой – в ней дополнительно, по сравнению с системой уравнений (2.4.12) появляется еще одна неизвестная скалярная величина  $\rho$  – плотность жидкости. Для замыкания системы используют уравнение энергии, в котором еще одну появляющуюся скалярную величину – температуру  $T$  – выражают через термодинамическое уравнение состояния, в качестве которого обычно в газовой динамике выступает уравнение Менделеева-Клапейрона. Уравнение энергии запишем в виде уравнения переноса для внутренней энергии [71; 72]:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \underline{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{V} + \rho q_s, \quad (2.4.14)$$

где  $u$  – внутренняя энергия, для идеального газа она выражается через его изохорную теплоемкость,  $du = c_v dT$ ; величина  $\vec{q}$  – интенсивность теплового потока, для ламинарного режима течения она отвечает закону теплопроводности Фурье  $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$ , где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $q_s$  – теплота, поступающая от внешних или внутренних источников.

Уравнение Менделеева-Клапейрона, потребное для замыкания системы уравнений, описывающих движение идеального газа, имеет вид:

$$p = \rho RT, \quad (2.4.15)$$

где  $R$  – газовая постоянная рассматриваемого газа. В случае движения реальных газов и жидких сред уравнение состояния становится сложнее [52].

Для капельных жидкостей чаще всего полагают  $\rho = const$ , т. е. считают жидкость несжимаемой. Это условие применимо и при описании движения газов, если скорости в них не превышают  $1/3$  скорости звука.

Уравнения (2.3.1), (2.4.13), (2.4.14) и (2.4.15) справедливы для ламинарного режима движения. В случае турбулентного режима в них появляются корреляции, вызванные не только пульсациями скорости, но и пульсациями плотности и температуры. Тогда для замыкания системы уравнений требуются дополнительные соотношения.

## 2.5. ВИХРЬ СКОРОСТИ И ЕГО АССОЦИИРОВАННЫЙ ТЕНЗОР

Вихрь  $\vec{\omega}$  является векторной величиной, характеризующей поле скоростей:


$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (2.5.1)$$

В компонентном виде:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{kij} \vec{e}_k,$$

или через определитель:


$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

И в том и в другом случае получаем для компонент вектора  $\vec{\omega}$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 = \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \\ \omega_2 = \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \\ \omega_3 = \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  и тензор вращения  $\underline{\Omega}$  связаны между собой через тензор Леви-Чивита  ${}^3\underline{\varepsilon}$ . Эти величины являются взаимно ассоциированными. Говорят, что тензор  $\underline{\Omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{V} - \vec{\nabla}\vec{V}^T)$  является ассоциированным по отношению к вектору  $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{V}$ , поскольку выполняются соотношения:

$$\underline{\Omega} : ({}^3\underline{\varepsilon}) = ({}^3\underline{\varepsilon}) : \underline{\Omega} = -2\vec{\omega} = -\vec{\nabla}\times\vec{V}. \quad (2.5.3)$$

И наоборот, вектор  $\vec{\omega}$  является ассоциированным по отношению к тензору  $\underline{\Omega}$  поскольку справедливо:

$$({}^3\underline{\varepsilon}) \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot ({}^3\underline{\varepsilon}) = \underline{\Omega}. \quad (2.5.4)$$

В формуле (2.5.3) тензор  $\underline{\Omega}$  переводится в вектор  $\vec{\omega}$ , а в формуле (2.5.4) вектору  $\vec{\omega}$  сопоставляется тензор вращения.

Докажем равенства (2.5.3) и (2.5.4):

$$\begin{aligned} \underline{\Omega} : ({}^3\underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{V} - \vec{\nabla}\vec{V}^T) : ({}^3\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_i\vec{e}_j : \varepsilon_{pqk}\vec{e}_p\vec{e}_q\vec{e}_k = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\varepsilon_{jik}\vec{e}_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{jil}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_l + \frac{1}{2}\varepsilon_{ji2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon_{ji3}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3 = \\ &= -2\omega_1\vec{e}_1 - 2\omega_2\vec{e}_2 - 2\omega_3\vec{e}_3 = -2\vec{\omega} = -\vec{\nabla}\times\vec{V} \end{aligned}$$

Тот же результат получаем и для  $({}^3\underline{\varepsilon}) : \underline{\Omega}$ :

$$({}^3\underline{\varepsilon}) \cdot \vec{\omega} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k \cdot \omega_s\vec{e}_s = \omega_k\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\vec{e}_j = \frac{1}{2}\frac{\partial V_s}{\partial x_i}\varepsilon_{kbs}\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\vec{e}_j.$$

Компоненты этого тензора второго ранга следующие:

- при  $i=j$  они равны нулю;
- при  $i=1, j=2$  это:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V_s}{\partial x_i} \varepsilon_{kls} \varepsilon_{12k} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_s}{\partial x_i} \varepsilon_{3is} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right);$$

– аналогичным образом можно получить значения для всех  $i, j=1,2,3$ .

В итоге матрица компонент этого тензора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что она является матрицей компонент антисимметричного тензора  $\underline{\Omega}$ , что означает справедливость соотношения (2.5.4).

Нетрудно также заметить, что

$$\vec{\omega} \cdot \underline{\Omega} = 0. \quad (2.5.5)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \cdot \underline{\Omega} &= \vec{\omega} \cdot \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \vec{V}^T) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} - \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}^T = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \omega_i \vec{e}_i \cdot \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \vec{e}_k \vec{e}_j - \omega_i \vec{e}_i \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \vec{e}_j \vec{e}_k \right] = \frac{1}{2} \left[ \omega_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \omega_k \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right] \vec{e}_j. \end{aligned}$$

При  $j=1$  имеем проекцию на ось  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \omega_k \frac{\partial V_1}{\partial x_k} - \omega_k \frac{\partial V_k}{\partial x_1} \right) &= \frac{1}{2} \left( \omega_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \omega_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \omega_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \omega_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) + \omega_2 \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) + \omega_3 \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [0 - \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_2] = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно заметить, что нулями будут и выражения при  $j=2$  и  $j=3$ .

Кроме того, справедливо равенство:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0. \quad (2.5.6)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{kij} \vec{e}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_s \partial x_i} \varepsilon_{kij} \delta_{sk} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_i} \varepsilon_{kij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_i} \varepsilon_{1ij} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_2 \partial x_i} \varepsilon_{2ij} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_3 \partial x_i} \varepsilon_{3ij} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3 \partial x_2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Впрочем, этот результат сразу следует из того факта, что  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V}$  есть смешанное скалярно-векторное произведение векторов, два из которых являются одинаковыми.

## 2.6. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЗАВИХРЕННОСТИ

Ротор конвективного ускорения жидкой частицы может быть представлен в виде:

$$\vec{\nabla} \times \left[ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = 2(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} - 2(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}. \quad (2.6.1)$$

Доказательство справедливости этого соотношения непосредственно следует после записи конвективного ускорения согласно формуле И.С. Громеки.

Градиент вихря есть псевдотензор второго ранга:

$$\vec{\nabla} \vec{\omega} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} \right) = \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{kij} \vec{e}_k \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_s \partial x_i} \varepsilon_{kij} \vec{e}_s \otimes \vec{e}_k. \quad (2.6.2)$$

След этого тензора  $tr \vec{\nabla} \vec{\omega} = 0$ , в чем легко убедиться после несложных выкладок. Можно также выделить симметричную и антисимметричную части этого тензора:

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_s \partial x_i} \varepsilon_{kij} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_i} \varepsilon_{sij} \right) \vec{e}_s \otimes \vec{e}_k, \quad \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_s \partial x_i} \varepsilon_{kij} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_i} \varepsilon_{sij} \right) \vec{e}_s \otimes \vec{e}_k.$$

Применим операцию ротора ( $rot = \vec{\nabla} \times$ ) к уравнению Навье-Стокса, которое, используя формулу Громеки, для случая движения несжимаемой жидкости и условия потенциальности массовых сил  $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$  можно представить в виде (при  $\mu = const$ ):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = \nu \Delta \vec{V}.$$

После действия оператора ( $\vec{\nabla} \times$ ) на правую и левую части этого уравнения получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) + \vec{\nabla} \times [(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V}] = \nu \Delta (\vec{\nabla} \times \vec{V}).$$

Второе слагаемое в левой части здесь можно представить в виде:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{V}) - [(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{V} + (\vec{\nabla} \times \vec{V})(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot 2\vec{\omega}),$$

или учитывая, что  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$ , а жидкость несжимаема (т. е.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ), это слагаемое окончательно записывается как:

$$2(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}.$$

В итоге получаем уравнение переноса вихрей в несжимаемой вязкой жидкости, которое называют обобщенным уравнением Гельмгольца [27; 33]:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (2.6.3)$$

или в более компактном виде:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (2.6.4)$$

Заметим, что для сжимаемой жидкости и при  $\mu \neq const$  это уравнение усложняется.

Уравнение переноса вихрей можно записать и по-другому, учитывая равенство  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{V})$ . Тогда:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{V}) = \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (2.6.5)$$

Применим операцию дивергенции к уравнению переноса вихрей (2.6.3) для несжимаемой жидкости:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = \vec{\nabla} \cdot \nu \Delta \vec{\omega},$$

Отсюда, вследствие того, что  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$ , имеем

$$\vec{\nabla} \cdot [(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}] - \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}] = 0.$$

Однако, с другой стороны:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}] &= \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{\omega} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}), \\ \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}] &= \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}), \end{aligned}$$

в результате получаем  $0=0$ , т. е. эта операция не дает нового соотношения.

Для квадрата завихренности полезно соотношение

$$\omega^2 = \vec{\nabla} \vec{V}^T : \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}. \quad (2.6.6)$$

Если уравнение переноса вихрей (2.6.3) скалярно умножить на  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = \vec{\omega} \cdot \nu \Delta \vec{\omega},$$

то получается скалярное уравнение переноса  $\omega^2$ :

$$\frac{d\omega^2}{dt} - (\vec{\omega} \otimes \vec{\omega}) : \vec{\nabla} \vec{V} = \nu \Delta \omega^2 - \nu \vec{\nabla} \vec{\omega}^T : \vec{\nabla} \vec{\omega} \quad (2.6.7)$$

Из очевидных равенств:  $\vec{\nabla} \cdot \underline{S} = \frac{1}{2} \Delta \vec{V} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$  и

$\vec{\nabla} \cdot \underline{\Omega} = \frac{1}{2} \Delta \vec{V} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$  сразу следует, что для несжимаемой жидкости

$\vec{\nabla} \cdot \underline{S} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\Omega}$ . А поскольку:

$$\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = -2\vec{V} \cdot \underline{\Omega},$$

то формулу Громеки (2.1.1) можно записать и в таком виде:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} + 2\vec{V} \cdot \underline{\Omega}. \quad (2.6.8)$$

Запись в виде:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}^T + 2\vec{V} \cdot \underline{\Omega}$$

делает эту формулу очевидной.

Запишем еще одно выражение:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] &= -\vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \cdot 2\underline{\Omega}] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}^T - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}] = \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[ V_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] \vec{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ V_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] = \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + V_i \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - V_i \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= \vec{\nabla} \vec{V}^T : \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{V} \cdot \Delta \vec{V} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] = \vec{\nabla} \vec{V}^T : \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{V} \cdot [\Delta \vec{V} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})] \quad (2.6.9)$$

Эту формулу можно записать и по-другому:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] = 2\underline{\Omega} : \vec{\nabla} \vec{V} + 2\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\Omega}),$$

или

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] = 2\underline{\Omega} : \underline{\Omega} + 2\underline{\Omega} : \underline{S} + 2\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\Omega}).$$

Еще одна очевидная формула:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{V} \cdot \underline{\Omega} + \vec{V} \cdot \underline{S},$$

из которой следует, что

$$\vec{V} \cdot \underline{S} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{V} \cdot \underline{\Omega}.$$

Но, как отмечалось выше,  $\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 2\vec{V} \cdot \underline{\Omega}$ , следовательно

$$\vec{v} \cdot \underline{S} = \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - \frac{1}{2} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \quad (2.6.10)$$

Векторное произведение градиентов скалярных функций дает вектор в виде ротора некоторой вектор-функции:

$$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} \varphi = \vec{\nabla} \times (f \vec{\nabla} \varphi). \quad (2.6.11)$$

Действительно, левая часть этого равенства есть вектор:

$$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} \varphi = \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \vec{e}_3,$$

а правая часть дает:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (f \vec{\nabla} \varphi) &= \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \vec{e}_j = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \frac{\partial}{\partial x_i} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \varepsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \vec{e}_k = \\ &= \varepsilon_{1ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \vec{e}_1 + \varepsilon_{2ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \vec{e}_2 + \varepsilon_{3ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \vec{e}_3 = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_2} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial}{\partial x_3} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \vec{e}_2 + \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \vec{e}_3 = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Отсюда видна справедливость равенства (2.6.11).

Для векторного произведения градиентов скалярных функций справедливости также равенства:

$$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi \otimes \vec{\nabla} f - \vec{\nabla} f \otimes \vec{\nabla} \varphi) : ({}^3 \underline{\varepsilon}) = -\vec{\nabla} \cdot \left[ (f \vec{\nabla} \varphi) \cdot ({}^3 \underline{\varepsilon}) \right]. \quad (2.6.12)$$

Здесь выражение для дивергенции в компонентной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla} \cdot \left[ (f \bar{\nabla} \varphi)^{\cdot 3} \underline{\varepsilon} \right] &= \bar{\nabla} \cdot \left[ f \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \bar{e}_s \cdot \varepsilon_{kij} \bar{e}_k \bar{e}_i \bar{e}_j \right] = \bar{\nabla} \cdot \left[ f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \varepsilon_{kij} \bar{e}_i \bar{e}_j \right] = \\
 &= \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \varepsilon_{kij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \varepsilon_{kij} \bar{e}_j = \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \varepsilon_{kii} \bar{e}_1 + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \varepsilon_{kii} \bar{e}_2 + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \varepsilon_{kii} \bar{e}_3 = \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \bar{e}_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \bar{e}_2 + \\
 &+ \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \bar{e}_3.
 \end{aligned}$$

Видно, что для этого выражения знак «минус» дает величину, совпадающую с ранее записанным выражением для  $\bar{\nabla} f \times \bar{\nabla} \varphi$ .

## 2.7. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПОТОКА

Уравнение баланса механической энергии потока можно получить, умножая скалярно каждое слагаемое уравнения движения сплошной среды в напряжениях (2.4.1) на вектор скорости  $\bar{V}$ :

$$\bar{V} \cdot \rho \left[ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} \right] = \bar{V} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \underline{\sigma}) + \bar{V} \cdot \rho \bar{f}. \quad (2.7.1)$$

Преобразования слагаемых левой части этого соотношения приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned}
 \bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} &= V_k \bar{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial t} V_i \bar{e}_i = V_k \frac{\partial V_i}{\partial t} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) = V_k \frac{\partial V_i}{\partial t} \delta_{ki} = V_k \frac{\partial V_k}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} V_k V_k = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial t}; \\
 \bar{V} \cdot [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V}] &= V_k \bar{e}_k \cdot V_j \frac{\partial}{\partial x_j} V_i \bar{e}_i = V_k V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) = \\
 &= V_k V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ki} = V_k V_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} V_k V_k = (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \frac{V^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Видно, что сумма этих слагаемых есть материальная (Эйлера) производная кинетической энергии движущейся частицы жидкости – величина  $\frac{d}{dt} \frac{V^2}{2}$ . Тогда уравнение (2.7.1) принимает вид:

$$\rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{V^2}{2} \right] = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma}) + \vec{V} \cdot \rho \vec{f}. \quad (2.7.2)$$

Мощность напряжений  $\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma})$ , стоящую в правой части (2.7.1), можно представить так:

$$\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \underline{\sigma}) - \underline{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{V}. \quad (2.7.3)$$

Справедливость этого соотношения видна из представления его в компонентном виде в декартовой прямоугольной системе координат. Действительно, выражение в левой части (2.7.3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma}) &= V_k \bar{e}_k \cdot \left( \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sigma_{sj} \bar{e}_s \bar{e}_j \right) = V_k \bar{e}_k \cdot \left[ \frac{\partial \sigma_{sj}}{\partial x_i} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_s) \bar{e}_j \right] = \\ &= V_k \bar{e}_k \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \bar{e}_j = V_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_j) = V_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, при выполнении выкладок учтено, что скалярное произведение базисных векторов дает дельту Кронекера, а для того чтобы она была ненулевой, необходимо равенство ее индексов. Первое слагаемое в правой части (2.7.3) в компонентной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \underline{\sigma}) &= \vec{\nabla} \cdot (V_s \bar{e}_s \cdot \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j) = \vec{\nabla} \cdot [V_s \sigma_{ij} (\bar{e}_s \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_j] = \vec{\nabla} \cdot (V_i \sigma_{ij} \bar{e}_j) = \\ &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot V_i \sigma_{ij} \bar{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_k} V_i \sigma_{ij} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_j) = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} V_i \sigma_{ij} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} V_i \sigma_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \sigma_{ik} + V_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

И, наконец, второе слагаемое правой части (2.7.3) в компонентной форме принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma : \bar{\nabla} \bar{V} &= \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j : \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \bar{e}_k \bar{e}_s = \sigma_{ij} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_s) = \\ &= \sigma_{ij} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \delta_{jk} \delta_{is} = \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \sigma_{ik}. \end{aligned}$$

Тогда, собирая слагаемые в равенстве (2.7.3), имеем:

$$V_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \sigma_{ik} + V_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \sigma_{ik}.$$

В силу симметрии тензора напряжений,  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$  это соотношение является тождеством (т. е. левая часть равна правой). Действительно, второе слагаемое правой части этого соотношения после переобозначения индекса  $i$  на  $k$  и наоборот принимает вид  $V_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}$ , но  $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$ , откуда и следует равенство обеих частей соотношения. Тем самым равенство (2.7.3) справедливо.

Последнее слагаемое в правой части уравнения (2.7.1) можно преобразовать, как и в п. 2.2, вводя в рассмотрение потенциал  $U$  массовых сил в поле сил тяжести, полагая, что ось  $z$  направлена вертикально вверх:  $\vec{f} = -\bar{\nabla} U$ ,  $U = gz = -\vec{r} \cdot \vec{g}$ .

После подстановки полученных выше выражений в соотношение (2.7.1) получаем уравнение для механической энергии потока жидкости:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \cdot \underline{\sigma}) - \underline{\sigma} : \bar{\nabla} \bar{V} - \rho \bar{V} \cdot \bar{\nabla} U. \quad (2.7.4)$$

В литературе [73] два первых слагаемых правой части (2.7.4) записывают в несколько ином виде, представляя тензор напряжений движущейся жидкости в виде суммы  $\underline{\sigma} = -p\underline{E} + \underline{\tau}$ :

$$-\bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \cdot p\underline{E}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \cdot \underline{\tau}) + p\underline{E} : \bar{\nabla} \bar{V} - \underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V}. \quad (2.7.5)$$

Первое слагаемое этого выражения:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot p\vec{E}) &= -\vec{\nabla} \cdot (V_i \vec{e}_i \cdot p \delta_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{V}_i p \delta_{jk} \delta_{ij} \vec{e}_k) = \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (p V_k \vec{e}_k) = -\vec{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot p V_k \vec{e}_k = -\frac{\partial p V_k}{\partial x_s} \delta_{sk} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} p V_k = -V_k \frac{\partial p}{\partial x_k} - p \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = -(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) p - p \vec{\nabla} \cdot \vec{V}. \end{aligned}$$

Третье слагаемое:

$$p\vec{E} : \vec{\nabla} \vec{V} = p \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j : \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \vec{e}_k \vec{e}_s = p \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{is} = p \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = p \vec{\nabla} \cdot \vec{V}.$$

После подстановки этих слагаемых в выражение (2.7.5) и далее в (2.7.4) уравнение механической энергии движущейся жидкости приобретает форму:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) p + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\tau}) - \tau : \vec{\nabla} \vec{V} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} U. \quad (2.7.6)$$

Видно, что скорость изменения механической энергии потока равна сумме мощностей сил давления, вязкого трения и изменения его положения в поле сил тяжести.

Запишем, пользуясь полученными в п. 2.2 соотношениями, уравнение Навье-Стокса для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в дивергентном виде. Исходное уравнение имеет вид:

$$\rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f}. \quad (2.7.7)$$

Представим конвективное слагаемое по формуле Громеки (2.1.1), а лапласиан  $\Delta \vec{V}$  – по формуле (2.1.13), а также учтем, что массовая сила в поле сил тяжести может быть записана через потенциал  $U$ , где  $U = gz$ , если ось  $z$  направлена вертикально вверх. Тогда вместо уравнения (2.7.7) имеем:

$$\vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{\nabla} U. \quad (2.7.8)$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho = const$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  и это уравнение примет вид:

$$\vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \underbrace{\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \nu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}}_{(\vec{V} - \nu \vec{\nabla}) \times \vec{\nabla} \times \vec{V}}. \quad (2.7.9)$$

Видно, что градиент полной энергии жидкой частицы  $E = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$  зависит от вихревой структуры потока. Если  $rot \vec{V} = 0$ , то правая часть уравнения (2.7.9) обращается в ноль, и в результате  $E = const$  для всей области течения.

Дивергентный же вид уравнения (2.7.7) для несжимаемой жидкости можно получить, учитывая, что  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  и используя тождество (2.1.13), а также принимая во внимание соотношение:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) = \vec{V} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}. \quad (2.7.10)$$

Тогда уравнение (2.7.7) примет форму:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \rho U - \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (2.7.11)$$

Для этого уравнения, используя понятия единичного тензора  $\underline{E}$  и тензора Леви-Чивита  ${}^3 \underline{\varepsilon} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k$ , можно записать слагаемые правой части в дивергентной форме, в результате чего все уравнение Навье-Стокса в целом для установившегося течения несжимаемой жидкости принимает следующий дивергентный вид:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \underline{E} - \rho U \underline{E} + \rho \nu ({}^3 \underline{\varepsilon}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \right] = 0. \quad (2.7.12)$$

Последнее слагаемое в скобках можно представить в более простом виде, учитывая, что для несжимаемой жидкости  $\Delta \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \underline{S}$ . Тогда окончательно имеем искомую дивергентную форму уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \rho (\vec{V} \otimes \vec{V}) + (p + \rho gz) \underline{E} - \mu \underline{S} \right] = 0. \quad (2.7.13)$$

Тензор, стоящий под знаком дивергенции в квадратных скобках уравнения (2.7.13), имеет структуру тензора Лайтхилла, используемого в акустике [59].

Из соотношения (2.1.13) следует еще одна формула, полезная для описания течения жидкости:

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{S} = \Delta \vec{V} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 2\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}.$$

## 2.8. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ И ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ

Первое начало термодинамики связывает между собой внутреннюю энергию, теплоту и работу. Применительно к движущейся жидкости его можно записать следующим образом:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \underline{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{V} + q_v, \quad (2.8.1)$$

где  $u$  – удельная внутренняя энергия;  $\vec{q}$  – вектор плотности теплового потока за счет теплопроводности;  $\underline{\sigma}$  – тензор напряжений;  $q_v$  – количество теплоты, поступающей в объем частицы от действия внешних или внутренних источников за единицу времени.

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что скорость изменения внутренней энергии в единице объема равна скорости подвода энергии за счет теплопроводности, за счет диссипации механической энергии потока, и за счет поступления тепла от внешних или внутренних источников. Поскольку тензор напряжений  $\underline{\sigma}$  можно представить в виде  $\underline{\sigma} = -p\underline{E} + \underline{\tau}$ , в котором  $\underline{\tau}$  – тензор вязких ньютоновских напряжений, то уравнение (2.8.1) можно переписать следующим образом:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - p\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V} + q_v. \quad (2.8.2)$$

Это уравнение является уравнением энергии в форме переноса для внутренней энергии  $u$ . Его можно записать в более развернутом виде, учитывая выражение (1.8.6) для оператора материальной производной:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) u \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V} + q_v,$$

Вектор  $\vec{q}$  в уравнении энергии определяется законом теплопроводности Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T, \quad (2.8.3)$$

где  $T$  – температура;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Закон теплопроводности Фурье можно также записать в терминах энтальпии, которая для идеального газа связана с температурой  $T$  формулой  $h = c_p T$ , где  $c_p$  – изобарная теплоемкость. Тогда, учитывая, что  $\lambda = \rho c_p a$ , где  $a$  – коэффициент температуропроводности, выражения для компонент плотности теплового потока можно записать в виде:

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\rho c_p a \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\rho \frac{v}{a} \frac{\partial c_p T}{\partial x_j} = -\rho \frac{v}{Pr} \frac{\partial h}{\partial x_j} = -\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial x_j},$$

где  $Pr = \frac{a}{\nu}$  – число Прандтля. Тогда:

$$\vec{q} = -\frac{\mu}{Pr} \vec{\nabla} h. \quad (2.8.4)$$

В декартовой прямоугольной системе координат, используя индексную форму записи, уравнение (2.8.2) можно записать следующим образом:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + V_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} - p \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + q_v. \quad (2.8.5)$$

Присутствие членов  $p \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  и  $\underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V}$  в уравнении энергии (2.8.2) говорит о том, что в движущейся жидкости может происходить внутреннее нагревание (охлаждение). Член  $p \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  может вызвать значительное изменение температуры, когда газ быстро расширяется (сжимается). Член  $\underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V}$  всегда положительный,

он характеризует диссипацию, деградацию механической энергии и переход ее в тепловую. Эту скалярную величину называют диссипативной функцией Рэлея [73] и обозначают  $\underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V} = \Phi$ . Запишем эту функцию в декартовой прямоугольной системе координат для ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости, когда реологическое соотношение имеет вид:

$$\underline{\tau} = -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} + 2\mu \underline{S}. \quad (2.8.6)$$

Конкретизация  $\underline{\tau}$  дает возможность записать в компонентной форме диссипативное слагаемое  $\underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V}$  в уравнении (2.8.2), выполняя простейшие выкладки:

$$\begin{aligned} \Phi = \underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V} &= \left( -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} + 2\mu \underline{S} \right) : \bar{\nabla} \bar{V} = \\ &= -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} : \bar{\nabla} \bar{V} + 2\mu \cdot \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T) : \bar{\nabla} \bar{V} = \\ &= -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \delta_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j : \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \bar{e}_k \bar{e}_s + \mu \left[ \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T : \bar{\nabla} \bar{V} \right] = \\ &= -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{is} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} + \mu \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \bar{e}_i \bar{e}_j : \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \bar{e}_k \bar{e}_s + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i \bar{e}_j : \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \bar{e}_k \bar{e}_s \right] = \\ &= -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \mu \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \delta_{jk} \delta_{is} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \delta_{jk} \delta_{is} \right] = \\ &= -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})^2 + \mu \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] = \\ &= -\frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, в компонентной форме, в индексной записи диссипативная функция Рэлея  $\Phi$  имеет вид:

$$\Phi = \underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V} = -\frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right], \quad (2.8.7)$$

или, переходя к обычным обозначениям, после суммирования по повторяющимся индексам и группировки слагаемых, получаем окончательно для этой диссипативной функции Рэлея:

$$\Phi = \mu \left\{ -\frac{2}{3} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (2.8.8)$$

Эта функция также может быть записана в бескомпонентной форме:

$$\Phi = \underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V} = -\frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})^2 + \mu [\bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T : \bar{\nabla} \bar{V}^T]. \quad (2.8.9)$$

Для совершенных газов [30; 73] внутренняя энергия связана с температурой соотношением  $du = c_v dT$ , где  $c_v$  – изохорная теплоемкость. Тогда вместо уравнения (2.8.2) с учетом выражения для вектора  $\bar{q}$  можно записать уравнение для переноса температур в виде:

$$\rho c_v \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) T \right] = \bar{\nabla} \cdot (\lambda \bar{\nabla} T) - p (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + \underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V} + q_v. \quad (2.8.10)$$

Уравнение (2.8.2) в форме переноса внутренней энергии может быть записано и через энтальпию  $h = u + \frac{p}{\rho}$ . Для этого в правую и левую части уравнения нужно добавить слагаемое  $\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right)$ . Тогда слева окажется величина

$\rho \frac{dh}{dt}$ , а справа добавится это слагаемое в следующем преобразованном виде:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} + \rho (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \quad (2.8.11)$$

Здесь учтено, что согласно уравнению неразрывности  $\frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0$ . Тогда в правой части слагаемого  $\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  не будет, и, в итоге, будем иметь уравнение энергии в форме переноса энтальпии:

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{dp}{dt} + \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V} + q_v. \quad (2.8.12)$$

Эта вторая форма уравнения энергии для совершенного газа, в котором  $dh = c_p dT$ , где  $c_p$  – изобарная теплоемкость, приводит к следующему уравнению переноса для температуры:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \frac{dp}{dt} + \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V} + q_v, \quad (2.8.13)$$

или в более развернутом виде при  $\lambda = const$ :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = \lambda \Delta T + \frac{dp}{dt} + \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V} + q_v. \quad (2.8.14)$$

Еще один вид уравнения энергии можно записать, если ввести в рассмотрение энтальпию торможения  $h + \frac{V^2}{2}$ . Для этого следует уравнение механической энергии потока (2.7.4) сложить с уравнением (2.8.12):

$$\rho \frac{d}{dt} \left( h + \frac{V^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) + \rho \vec{V} \cdot \vec{f} + q_v. \quad (2.8.15)$$

Здесь учтено, что:

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}) + \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V}, \quad (2.8.16)$$

в чем легко убедиться, выполняя соответствующие выкладки в компонентном виде, принимая во внимание при этом симметрию тензора напряжений  $\underline{\tau}$ . Действительно, запишем в компонентном виде каждое слагаемое этого соотношения. Для слагаемого в левой части имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot (\tau_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot V_s \vec{e}_s) = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot (\tau_{ij} V_s \delta_{js} \vec{e}_i) = \\ &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \tau_{ij} V_j \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ij} V_j) \delta_{ki} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} V_j = V_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Для слагаемых в правой части:

$$\begin{aligned}\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}) &= V_i \bar{e}_i \cdot \left( \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \tau_{js} \bar{e}_j \bar{e}_s \right) = V_i \bar{e}_i \cdot \left( \frac{\partial \tau_{js}}{\partial x_k} \delta_{kj} \bar{e}_s \right) = \\ &= V_i \bar{e}_i \cdot \frac{\partial \tau_{js}}{\partial x_j} \bar{e}_s = V_i \frac{\partial \tau_{js}}{\partial x_j} \delta_{is} = V_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}; \\ \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V} &= \tau_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j : \left( \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} V_s \bar{e}_s \right) = \tau_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j : \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \bar{e}_k \bar{e}_s = \tau_{ij} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \delta_{jk} \delta_{is} = \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Подстановка этих трех выражений в (2.8.16) подтверждает формулу. Таким образом, диссипативный член в уравнении переноса энтальпии торможения может быть представлен в виде:

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) = \Psi + \Phi, \quad (2.8.17)$$

где  $\Phi$  – диссипативная функция Рэлея, а  $\Psi = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\tau})$  – скалярная величина, которую можно назвать добавочной диссипативной функцией. Эта скалярная величина, характеризующая диссипативные процессы, в декартовой прямоугольной системе координат для ньютоновской стоксовой жидкости записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi &= \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}) = \vec{V} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[ -\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \underline{E} + 2\mu \underline{S} \right] \right\} = \\ &= \vec{V} \cdot \left\{ \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left[ -\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \delta_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + 2\mu S_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \right] \right\} = \\ &= \vec{V} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left[ -\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \delta_{kj} \bar{e}_j + 2\mu S_{kj} \bar{e}_j \right] \right\} = \\ &= \vec{V} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left[ -\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \bar{e}_k + 2\mu S_{kj} \bar{e}_j \right] \right\} = \\ &= V_s \bar{e}_s \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left[ -\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \bar{e}_k + 2\mu S_{kj} \bar{e}_j \right] \right\} = \\ &= (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \left( -\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) + V_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu S_{kj}).\end{aligned}$$

При переходе к обычной форме записи в осях  $(xyz)$  первое слагаемое этого выражения в координатном виде записывается как:

$$\left( V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( -\frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right),$$

а второе слагаемое:

$$\begin{aligned} V_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu S_{kj}) &= V_1 \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu S_{k1}) + V_2 \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu S_{k2}) + V_3 \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu S_{k3}) = \\ &= V_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (2\mu S_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (2\mu S_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (2\mu S_{31}) \right] + \\ &+ V_2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (2\mu S_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (2\mu S_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (2\mu S_{32}) \right] + \\ &+ V_3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (2\mu S_{13}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (2\mu S_{23}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (2\mu S_{33}) \right]. \end{aligned}$$

Так как компоненты тензора скоростей деформаций  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$ , получаем окончательное выражение для функции  $\psi$  в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{2}{3} \left[ V_x \frac{\partial}{\partial x} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + V_y \frac{\partial}{\partial y} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + V_z \frac{\partial}{\partial z} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] + \\ &+ V_x \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \right] + \\ &+ V_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right] + \\ &+ V_z \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \tag{2.8.18}$$

Еще один, четвертый, вид уравнения энергии записывается в терминах переноса энтропии  $s$ . Действительно, согласно основному уравнению термодинамики, которое вытекает из сочетания ее первого и второго законов, следует, что:

$$Tds = dh - \frac{1}{\rho} dp. \quad (2.8.19)$$

Отсюда имеем:

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt},$$

и тогда подстановка величины  $\frac{dh}{dt}$  из этого выражения в уравнение (2.8.12)

дает уравнение:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \underline{\tau} : \vec{\nabla} \vec{V} + q_v. \quad (2.8.20)$$

Все четыре формы записи уравнения энергии – через внутреннюю энергию, через энтальпию, через полную энтальпию и через энтропию – эквивалентны.

Для произвольных газов и жидкостей, уравнение переноса температуры  $T$  можно получить из уравнения (2.8.2) или (2.8.12). В этих случаях величины  $\frac{du}{dt}$  и  $\frac{dh}{dt}$  необходимо конкретизировать, используя известные из термодинамики формулы, следующие из соотношений Максвелла [52; 71]:

$$du = c_v dT - \frac{1}{\rho^2} \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho - p \right] d\rho, \quad (2.8.21)$$

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho^2} \left[ \rho + T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dp. \quad (2.8.22)$$

Нижние индексы при производных здесь фиксируют параметры, при постоянстве которых вычисляются производные. Из этих формул следуют выражения для производных:

$$\frac{du}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho^2} \left[ T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p - p \right] \frac{d\rho}{dt} \quad (2.8.23)$$

$$\frac{dh}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho^2} \left[ \rho + T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] \frac{d\rho}{dt} \quad (2.8.24)$$

Подстановка их в уравнения (2.8.2) и (2.8.12) дает две формы записи уравнения энергии в виде переноса температуры. Заметим, что вычисление частных производных, фигурирующих в выражениях (2.8.23) и (2.8.24), требует знания термического уравнения состояния рассматриваемых жидкостей и газов. Особенно просто эти формы записываются для совершенного газа, т. е. идеального газа, подчиняющегося уравнению Менделеева-Клапейрона  $p = \rho RT$  и имеющего постоянные теплоемкости  $c_v$  и  $c_p$ , значения которых вычисляются по молекулярно-кинетической теории газов. Для совершенного выражение для внутренней энергии имеет вид:  $du = c_v dT$ . В этом случае в правых частях выражений (2.8.23) и (2.8.24) остаются только первые слагаемые. Тогда формула (2.8.2) дает уравнение переноса температуры в виде:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q} - p \bar{\nabla} \cdot \bar{V} + \Phi + q_v, \quad (2.8.25)$$

а уравнение (2.8.12) в виде:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q} + \frac{dp}{dt} + \Phi + q_v. \quad (2.8.26)$$

Тождественность этих уравнений видна, если вычесть из (2.8.26) уравнение (2.8.25). Тогда:

$$\rho (c_p - c_v) \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + p \bar{\nabla} \cdot \bar{V},$$

или, принимая во внимание выражение (2.8.11) и используя формулу Майера:

$$c_p - c_v = R, \quad (2.8.27)$$

где  $R$  – газовая постоянная, имеем:

$$\frac{d}{dt}(RT) = \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

Видно, что здесь выполняется формула Менделеева-Клапейрона, что и следовало ожидать.

При решении задач теплообмена граничные условия задаются в трех различных вариантах – первого, второго и третьего рода:

- 1) граничные условия первого рода состоят в задании температуры на поверхности тела;
- 2) граничные условия второго рода заключаются в задании распределения плотности теплового потока  $q$  на поверхности тела;
- 3) граничные условия третьего рода состоят в задании температуры сред, омывающих поверхность тела и условий теплообмена на его поверхности.

При использовании граничных условий третьего рода условия теплообмена на поверхности тела с температурой  $T_w$ , омываемого жидкостью с температурой  $T_f$ , задаются в виде закона Ньютона-Рихмана [73]:

$$q = \alpha (T_f - T_w).$$

Здесь  $\alpha, \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  – коэффициент теплоотдачи, вычисляемый после нахождения числа Нуссельта исходя из формулы  $Nu = \frac{\alpha L}{\lambda}$ , где  $L$  – характерный размер;  $\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  – коэффициент теплопроводности материала поверхности тела.

## 2.9. ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ КАК УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В уравнении энергии (2.8.2) и его модификациях для газовой динамики под знаком дивергенции находится интенсивность теплового потока, подчиняющаяся закону теплопроводности Фурье  $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$ , где  $T$  – температура,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, который в литературе по теплофизике обычно представляют в виде [73]:

$$\lambda = \rho c_p a . \quad (2.9.1)$$

В этом выражении  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $m/c^2$ ,  $c_p$  – изобарная теплоемкость. Отсюда видно, что в уравнении переноса внутренней энергии (2.8.2) под знаком дивергенции будет присутствовать не градиент внутренней энергии  $u$ , а градиент температуры  $T$ . Однако, как это следует из механики сплошных сред [54; 56; 64], в уравнениях переноса любой физической величины  $A$  (скалярной, векторной, тензорной) в правой части уравнения под знаком дивергенции должен находиться член, содержащий градиент этой величины:

$$\rho \frac{dA}{dt} = \bar{\nabla} \cdot (\rho \chi \bar{\nabla} A) + \text{источниковые члены} . \quad (2.9.2)$$

Здесь  $\chi$  – коэффициент, характеризующий диффузию величины  $A$  (для поля концентрации – это коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$ , для поля скоростей – это кинематическая вязкость  $\nu$  и так далее),  $m^2/c$ . Однако в уравнении (2.8.2) члена  $\bar{\nabla} u$  под знаком дивергенции нет, поскольку закон теплопроводности Фурье не предполагает его наличия. Положение несколько исправляется, если уравнение энергии записать в виде уравнения для переноса энтальпии  $h$ , когда закон теплопроводности Фурье записывается в виде:

$$\bar{q} = -\rho c_p a \bar{\nabla} T = -\rho a \bar{\nabla} c_p T = -\rho a \bar{\nabla} h ,$$

и уравнение энергии приобретает вид:

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot (-\rho a \bar{\nabla} h) + \frac{dp}{dt} + \underline{\tau} : \bar{\nabla} \bar{V} + q_v . \quad (2.9.3)$$

Можно получить уравнение энергии и в другой, альтернативной общепринятой форме, непосредственно используя первый закон термодинамики, согласно которому изменение удельной теплоты  $q$ , Дж/кг, связано с изменением внутренней энергии  $du$  и совершением работы  $dl$ :

$$dq = du + dl .$$

Для простых термодинамических систем этой работой является работа расширения  $dl = pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$ , в случае сложных – добавляется, например, работа сил поверхностного напряжения, или же, если система является необратимой, сюда может входить и работа сил трения. Поэтому запишем это равенство в виде:

$$dq = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + dl',$$

где  $l'$  – работа, дополнительная к работе расширения.

Для уравнения переноса возьмем в качестве исходной величину удельной теплоты  $q$ . Запишем уравнение переноса для этой скалярной величины, сопоставив ей векторную  $\vec{q}$  – интенсивность, плотность потока теплоты  $q$ ,  $Вт/м^2$ :

$$\vec{q} = -\rho a \vec{\nabla} q \quad (2.9.4)$$

где  $\rho$  – плотность,  $a$  – температуропроводность, знак минус означает, что вектор теплового потока направлен в сторону областей с меньшей теплотой.

Уравнение (2.9.4) является определяющим для теплового потока, его можно рассматривать как альтернативную запись для уравнения теплопроводности Фурье (2.8.3). С учетом сказанного можно записать уравнение теплового баланса для потока идеального газа в виде:

$$\rho \frac{dq}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q},$$

которое означает, что изменение теплоты  $q$  равно притоку (оттоку) тепла вследствие теплопроводности. Если же кроме теплопроводности имеются и другие механизмы изменения теплоты, например диссипативные (по Рэлею), то их надо учесть. В итоге, с учетом формулы (2.9.4) можно записать:

$$\rho \frac{dq}{dt} = \bar{\nabla} \cdot (\rho a \bar{\nabla} q) + \underline{\sigma} : \bar{\nabla} \bar{V} + q_v, \quad (2.9.5)$$

где  $q_v$  – другие источники теплоты.

Обычно в современной теории теплопередачи чаще всего используют вариант с пренебрежением диссипативного слагаемого, а также во многих случаях и величины  $q_v$ . Тогда уравнение (2.9.5) можно представить в виде:

$$\rho \left( \frac{\partial q}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) q \right) = \bar{\nabla} \cdot \rho a \bar{\nabla} q. \quad (2.9.6)$$

Рассмотрим приложение этого уравнения к течениям совершенного газа (идеального с постоянными значениями  $c_p$  и  $c_v$  по молекулярно-кинетической теории газов). Такие течения наиболее интересны с позиций газовой динамики. Для каждого типа термодинамического процесса определяющее соотношение (2.9.4) – аналог закона теплопроводности Фурье – будет свое, разными будут и конкретизации уравнения энергии.

Как известно [30], для изохорного процесса (при  $\rho = \text{const}$ ), согласно первому закону термодинамики, вся подводимая теплота расходуется на изменение внутренней энергии, то есть  $dq = du$ . Но так как для совершенного газа  $du = c_v dT$ , плотность теплового потока

$$\bar{q}_q = -\rho a \cdot c_v \bar{\nabla} T, \quad (2.9.7)$$

а уравнение (2.9.6) принимает вид:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q}_q,$$

или, после подстановки  $du$  и  $\bar{q}$  и сокращения на  $\rho c_v$  для жидкости с постоянными физическими свойствами:

$$\frac{dT}{dt} = a \Delta T. \quad (2.9.8)$$

Это выражение совпадает с известным в теплопередаче уравнением для переноса температуры.

Для изобарного процесса ( $p=const$ ) вся теплота расходуется на изменение энтальпии, то есть  $dq = dh$ , и, учитывая, что  $dh = c_p dT$ , имеем для плотности потока тепла:

$$\bar{q} = -\rho a c_p \bar{\nabla} T,$$

а уравнение энергии для жидкости с постоянными физическими свойствами приобретает вид (после сокращения на  $\rho c_p$ ):

$$\frac{dT}{dt} = a \Delta T. \quad (2.9.9)$$

Видно, что уравнения (2.9.8) и (2.9.9) совпадают.

Для изотермического процесса подводимая теплота расходуется на совершение работы расширения:

$$dq = pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Тогда, в соответствии с выражением (2.9.4) тепловой поток:

$$\bar{q} = a \frac{p}{\rho} \bar{\nabla} \rho,$$

и уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \left[ a \frac{p}{\rho} \bar{\nabla} \rho \right].$$

Отсюда, после несложных преобразований, полагая  $a=const$ , получаем уравнение, связывающее величины  $p$  и  $\rho$  в изотермическом процессе:

$$\frac{d\rho}{dt} = a \left[ \frac{1}{p} \bar{\nabla} p \cdot \bar{\nabla} \rho + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} \rho \cdot \bar{\nabla} \rho + \Delta \rho \right]. \quad (2.9.10)$$

Для адиабатного процесса  $dq = 0$ , перемещения теплоты в пространстве не происходит,  $\bar{q} = 0$ , и уравнение превращается в тождество  $0 = 0$ .

А теперь рассмотрим случай произвольного термодинамического процесса – политропного – с показателем политропы  $n$ . Теплоемкость его

$c = \frac{n - c_p}{n - c_v} c_v$ , уравнение процесса  $p/\rho^n = const$ . Подводимая теплота в этом

процессе расходуется как на изменение внутренней энергии, так и на совершение работы расширения, поэтому первое начало термодинамики, в терминах энтальпии записывается в виде:

$$dq = dh - \frac{1}{\rho} dp = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp.$$

Тогда:

$$\vec{\nabla} q = c_p \vec{\nabla} T - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p, \quad (2.9.11)$$

и формула (2.9.4) приобретает вид:

$$\vec{\bar{q}} = -\rho a c_p \vec{\nabla} T + a \vec{\nabla} p.$$

В результате уравнение (2.9.6) при постоянных физических свойствах принимает вид:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \frac{dp}{dt} = \rho a c_p \Delta T + a \Delta p. \quad (2.9.12)$$

Если эффекты, связанные с изменением давления, малы и ими можно пренебречь, то получаем:

$$\frac{dT}{dt} = a \Delta T, \quad (2.9.13)$$

что опять совпадает с уравнениями (2.9.8) и (2.9.9).

Если для политропного процесса записать изменение теплоты через его теплоемкость  $dq = c dT$ , то  $\vec{\nabla} q = c \vec{\nabla} T$  и плотность теплового потока будет  $\vec{\bar{q}} = -\rho a \vec{\nabla} q = -\rho a c \vec{\nabla} T$ , тогда уравнение энергии:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \rho a c \vec{\nabla} T.$$

При постоянных физических свойствах это уравнение совпадает с (2.9.13).

Сравнение выражений для  $dq$  в формах  $dq = c_v dT + \frac{1}{\rho} dp$  и  $dq = cdT$  дает связь

$c$  и  $c_v$ :

$$c = c_v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dT}.$$

Вычислим производную  $\frac{dp}{dT}$  для этого политропного процесса. Для совершенного газа одновременно выполняется система уравнений, состоящая из уравнения Менделеева-Клапейрона и уравнения политропы:

$$\begin{cases} p = \rho RT \\ \frac{p}{\rho^n} = const \end{cases}.$$

Отсюда можно выразить величину  $p$  через  $T$  и найти нужную производную  $\frac{dp}{dT}$ . Так как из первого уравнения этой системы  $\rho = \frac{p}{RT}$ , то подстановка во второе дает:

$$p^{1-n} R^n T^n = const = p_0^{1-n} R^n T_0^n,$$

где  $p_0$  и  $\rho_0$  – давление и плотность в некоторой фиксированной точке. Отсюда:

$$p = p_0 \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{n}{1-n}}.$$

Тогда:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{p_0}{T_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{1-n}} = \frac{p_0}{T_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

В итоге имеем для теплоемкости в политропном процессе:

$$c = c_v + \frac{1}{\rho} \frac{p_0}{T_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{1-n}} = c_v + R \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

В начальной точке процесса, где  $\rho = \rho_0$ ,  $T = T_0$ , имеем, учитывая формулу Майера (2.8.27):

$$c = c_v + R = c_p,$$

а далее в ходе процесса теплоемкость изменяется в зависимости от его вида.

В случае, если теплота переносится не только теплопроводностью, но имеются и другие источники ее, необходимо опираться на уравнение (2.9.5). Можно видеть, что и закон теплопроводности, и уравнение энергии зависят от характера процесса.

## 2.10. ДИВЕРГЕНТНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

Умноженную на плотность  $\rho$  материальную (эйлерову) производную любой физической величины  $\mathfrak{M}$  (скалярной, векторной, тензорной) всегда можно представить в так называемом «дивергентном» виде:

$$\rho \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathfrak{M} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \mathfrak{M}). \quad (2.10.1)$$

Это прямо следует из уравнения неразрывности, что можно увидеть, рассмотрев подробно следующие три случая для физической величины  $\mathfrak{M}$ .

### 1) Величина $\mathfrak{M}$ является скалярной, например, температурой $T$ .

Тогда

$$\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \rho T + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} T). \quad (2.10.2)$$

Докажем это равенство, записывая в компонентном виде левую и правую части. Для левой части имеем:

$$\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Для правой части:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho T + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} T) &= T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_j T = \\
 &= T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial T}{\partial t} + T V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho T \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \rho V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \\
 &= T \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0} + \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \\
 &= \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial T}{\partial x_j}.
 \end{aligned}$$

Поскольку выражение в скобках равно нулю (оно представляет собой запись уравнения неразрывности), то равенство левой и правой частей очевидно.

**2) Величина  $\mathfrak{M}$  является векторной, например, скоростью  $\vec{V}$ .**

Тогда ее материальную производную (ускорение жидкой частицы, содержащее локальную и конвективную компоненты) можно представить в виде:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}). \tag{2.10.3}$$

Здесь под знаком дивергенции находится тензор  $\rho \vec{V} \otimes \vec{V}$  – тензор потока импульса, знак тензорного умножения  $\otimes$  опущен для простоты записи. Докажем это тождество, используя на заключительном этапе выкладок уравнение неразрывности. Для этого распишем обе части тождества в компонентном виде. Левая часть:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \rho \frac{dV_i}{dt} \vec{e}_i + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i.$$

Правая часть, второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V} \bar{V}) &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \rho V_j V_i \bar{e}_j \bar{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_j V (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_j) \bar{e}_i = \\ &= \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_j V_i \bar{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \rho V_j V_i \bar{e}_i = \\ &= \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} V_i \bar{e}_i + V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} V_i \bar{e}_i + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i.\end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{V} = \frac{\partial}{\partial t} \rho V_i \bar{e}_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} V_i \bar{e}_i + \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} \bar{e}_i.$$

В целом, правая часть после группировки:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} \bar{e}_i + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i + V_i \bar{e}_i \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0}.$$

Поскольку выражение в скобках равно нулю согласно уравнению неразрывности, то тождество верно и для случая, если  $\Theta$  является векторной величиной.

### 3) Величина $\mathfrak{M}$ является тензорной, например, тензором напряжений $\underline{\sigma}$ .

Тензор напряжений  $\underline{\sigma}$  является симметричным тензором второго ранга, и в декартовой прямоугольной системе координат может быть записан в виде:  $\underline{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j$ . Докажем равенство:

$$\rho \frac{d\underline{\sigma}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \rho \underline{\sigma} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V} \underline{\sigma}). \quad (2.10.4)$$

Запишем левую и правую части в компонентном виде. Левая часть, являющаяся, как и правая, тензором второго ранга, может быть записана так:

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\underline{\sigma}}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \rho \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \\ &= \rho \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho V_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \bar{e}_i \bar{e}_j.\end{aligned}$$

Правая часть:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho \underline{\sigma} + \nabla \cdot (\rho \underline{V} \underline{\sigma}) &= \frac{\partial}{\partial t} \rho \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \rho V_s \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \bar{e}_i \bar{e}_j + (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_s) \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_s \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \bar{e}_i \bar{e}_j + \delta_{ks} \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_s \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \bar{e}_i \bar{e}_j + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_k \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j = \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \bar{e}_i \bar{e}_j + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} V_k \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho V_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \bar{e}_i \bar{e}_j = \\
&= \rho \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \bar{e}_i \bar{e}_j + \rho V_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \bar{e}_i \bar{e}_j + \sigma_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0}
\end{aligned}$$

И здесь, для тензорной величины, видна справедливость дивергентной формы записи.

Однако тут следует заметить, что величина  $\frac{d}{dt} \underline{\sigma}$  – эйлерова производная для тензора второго ранга и не является инвариантной величиной [5; 53; 72].

Поэтому вместо производной  $\frac{d}{dt}$  в качестве материальной производной для

тензора второго ранга выступает субстанциональная производная  $\frac{D}{Dt}$ , содер-

жащая, кроме локальной и конвективной, еще и вращательную часть (например, в форме Яуманна, приведенной в выражении (1.8.16)), обеспечивающая нейтральность тензора относительно поворотов. Вращательную же часть привести к дивергентному виду невозможно.

## 2.11. О ДИВЕРГЕНТНОМ ВИДЕ СЛАГАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При проведении вычислительных процедур часто требуется придать тому или иному слагаемому соответствующего уравнения дивергентный вид.

Дивергентная форма позволяет пользоваться консервативными разностными схемами при программировании численных процедур интегрирования уравнений.

Для градиента скалярной функции можно записать:

$$\vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot f \underline{E}, \quad (2.11.1)$$

для градиента вектор-функции:

$$\vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\underline{E} \otimes \vec{V}), \quad (2.11.2)$$

для ротора вектор функции:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \overset{3}{\underline{\varepsilon}}) = -\vec{\nabla} \cdot (\overset{3}{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{V}), \quad (2.11.3)$$

где  $\overset{3}{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k$  – тензор Леви-Чивита,

для лапласиана функций:

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f; \quad \Delta \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}. \quad (2.11.4)$$

Докажем эти соотношения.

Для градиента скалярной функции рассмотрим дивергенцию тензора  $f \underline{E}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot f \underline{E} &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot f \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) \frac{\partial f}{\partial x_k} \delta_{ij} \vec{e}_j = \\ &= \delta_{ki} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_k} \vec{e}_j = \delta_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k} \vec{e}_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \vec{e}_j = \vec{\nabla} f, \end{aligned}$$

тем самым мы получили вектор, который и является градиентом скалярной функции.

Для соотношения (2.11.2) дивергенция тензора третьего ранга дает:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\underline{E} \otimes \vec{V}) &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j V_s \vec{e}_s = (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) \delta_{ij} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \vec{e}_j \vec{e}_s = \\ &= \delta_{ki} \delta_{ij} \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \vec{e}_j \vec{e}_s = \frac{\partial V_s}{\partial x_k} \vec{e}_k \vec{e}_s = \vec{\nabla} \vec{V}. \end{aligned}$$

в результате мы получили тензорную величину второго ранга – градиент вектора.

Отметим, что совсем другой результат дает выражение  $\bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \otimes \underline{E})$ .

Действительно:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \otimes \underline{E}) &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot V_i \bar{e}_i \delta_{js} \bar{e}_j \bar{e}_s = \\ &= \delta_{ki} \delta_{js} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \bar{e}_j \bar{e}_s = \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{js} \bar{e}_j \bar{e}_s = (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E}. \end{aligned}$$

в итоге получается шаровой тензор, матрица компонент которого:

$$\begin{pmatrix} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\nabla} \cdot \bar{V} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \end{pmatrix}.$$

Справедливость соотношения (2.11.3) видна из рассмотрения дивергенции тензора второго ранга  $\bar{V} \cdot \cdot \cdot \underline{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \cdot \cdot \cdot \underline{\varepsilon}) &= \bar{\nabla} \cdot [V_p \bar{e}_p \cdot \varepsilon_{ijk} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k] = \bar{\nabla} \cdot [\delta_{pi} V_p \varepsilon_{ijk} \bar{e}_j \bar{e}_k] = \\ &= \bar{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot V_i \varepsilon_{ijk} \bar{e}_j \bar{e}_k = \delta_{sj} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_i}{\partial x_s} \bar{e}_k = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \varepsilon_{ijk} \bar{e}_k = \\ &= \bar{e}_1 \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \varepsilon_{ij1} \right) + \bar{e}_2 \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \varepsilon_{ij2} \right) + \bar{e}_3 \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \varepsilon_{ij3} \right) = \\ &= \bar{e}_1 \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \varepsilon_{231} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \varepsilon_{321} \right) + \bar{e}_2 \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \varepsilon_{312} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \varepsilon_{132} \right) + \bar{e}_3 \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \varepsilon_{123} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \varepsilon_{213} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) \bar{e}_1 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \bar{e}_2 + \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) \bar{e}_3 \\ &= -\bar{\nabla} \times \bar{V}. \end{aligned}$$

Следует заметить, что тот же результат дает  $\bar{\nabla} \cdot (\cdot \cdot \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \bar{V})$ .

Выражения (2.11.4) не требуют громоздких доказательств:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} f &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \bar{e}_j = \delta_{kj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = \Delta f; \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_j} = \delta_{ks} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_k \partial x_s} = \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_k \partial x_k} = \Delta \bar{V}. \end{aligned}$$

После использования полученных соотношений многие формулы могут быть записаны в дивергентном виде. Например, известная [27; 33] формула для  $rot\ rot\vec{V} = grad\ div\vec{V} - \Delta\vec{V}$ , т. е.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V},$$

в дивергентной форме записывается следующим образом:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \underline{E}] - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \underline{E} - \vec{\nabla} \vec{V}]. \quad (2.11.5)$$

Скалярной функции  $f$  может быть сопоставлен вектор  $\vec{\nabla} f$ , что очевидно из определения вектора Гамильтона  $\vec{\nabla}$ . Этой функции могут быть сопоставлены и тензоры второго ранга:

- симметричные  $\vec{\nabla} f \otimes \vec{\nabla} f$  и  $\vec{\nabla} \vec{\nabla} f$ ;
- антисимметричный  $\vec{\nabla} \cdot [f \cdot ({}^3 \underline{E})]$ .

Их матрицы компонент соответственно:

$$\left( \begin{array}{ccc} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \end{array} \right); \quad \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{array} \right);$$

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_3} & -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & -\frac{\partial f}{\partial x_1} & 0 \end{array} \right).$$

Также антисимметричным тензором второго ранга является и другая форма записи  $\vec{\nabla} \cdot [f ({}^3 \underline{E})]$  в виде  $\vec{\nabla} f \cdot ({}^3 \underline{E})$ :

$$\bar{\nabla} f \cdot ({}^3 \underline{\varepsilon}) = \bar{\nabla} \cdot [f ({}^3 \underline{\varepsilon})]. \quad (2.11.6)$$

Во многих случаях, в частности при выводе уравнения Бернулли, в уравнении Эйлера для идеальной жидкости требуется представить член  $\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p$  в виде некоторого градиента. Если жидкость несжимаемая (т. е.  $\rho = \text{const}$ ), то это очевидно:

$$\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p = \bar{\nabla} \frac{p}{\rho}. \quad (2.11.7)$$

Если же имеет место течение газа, который будем считать совершенным (т. е. подчиняющимся закону Менделеева-Клапейрона, причем показатель адиабаты  $k = \text{const}$ ), то обычно, если движение баротропное (плотность зависит только от давления), вводят в рассмотрение баротропную функцию (функцию давления):

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}, \quad (2.11.8)$$

и правую часть в выражении (2.11.7) записывают в виде  $\bar{\nabla} P$ .

Однако слагаемое  $\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p$  можно представить в градиентном виде и по-другому, используя очевидное равенство:

$$\bar{\nabla} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p - \frac{p}{\rho^2} \bar{\nabla} \rho,$$

откуда сразу следует:

$$\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p = \bar{\nabla} \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} \bar{\nabla} \rho. \quad (2.11.9)$$

Видно, что свойство сжимаемости приводит по сравнению с выражением (2.11.7) к добавочному слагаемому  $\frac{p}{\rho^2} \bar{\nabla} \rho$ , которое также можно привести к градиентному виду.

Рассмотрим этот вопрос подробно, выполняя соответствующие выкладки для каждого вида термодинамического процесса при течении совершенного газа.

1. При изотермическом течении из уравнения Менделеева-Клайперона:

$$\frac{p}{\rho} = const, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad p = \frac{\rho}{\rho_0} p_0.$$

где  $p_0, \rho_0$  – параметры газа в некотором фиксированном состоянии. Тогда добавочное слагаемое:

$$\frac{p}{\rho^2} \bar{V} \rho = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{\rho} \bar{V} \rho = \frac{p_0}{\rho_0} \bar{V} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \bar{V} \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0},$$

и формула (2.11.9) приобретает вид:

$$\frac{1}{\rho} \bar{V} p = \bar{V} \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right].$$

А поскольку первое слагаемое в скобках является константой, то окончательно имеем:

$$\frac{1}{\rho} \bar{V} p = \bar{V} \left[ \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right], \quad (2.11.10)$$

или, что то же самое:

$$\frac{1}{\rho} \bar{V} p = \bar{V} \left[ \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} \right]. \quad (2.11.11)$$

В итоге уравнение Бернулли для изотермического течения идеального газа принимает вид:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = const,$$

или, учитывая, что в фиксированной точке с параметрами  $p_0, \rho_0$  на рассматриваемой линии тока скорость частицы газа равна  $V_0$ :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \frac{V_0^2}{2}.$$

2. Для адиабатического течения, когда:

$$\frac{p}{\rho_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \quad p = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k p_0.$$

где  $k$  – показатель адиабаты, добавочное слагаемое в формуле (2.11.9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho^2} \bar{\nabla} \rho &= \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-2} \bar{\nabla} \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{(k-1)} \frac{p_0}{\rho_0} \bar{\nabla} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} = \\ &= \bar{\nabla} \left[ \frac{1}{(k-1)} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.11.12)$$

Тогда формула (2.11.9) для этого случая течения приобретает вид:

$$\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p = \bar{\nabla} \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{(k-1)} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(k-1)} \right]. \quad (2.11.13)$$

Поскольку первое слагаемое в скобках можно представить в виде:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(k-1)},$$

то формула (2.11.13) запишется как:

$$\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p = \bar{\nabla} \left[ \frac{k}{(k-1)} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(k-1)} \right],$$

или, через изменения давления:

$$\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p = \bar{\nabla} \left[ \frac{k}{(k-1)} \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{(k-1)}{k}} \right].$$

В итоге уравнение Бернулли для струйки совершенного газа при его адиабатическом движении имеет вид:



$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{k}{(k-1)} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{(k-1)}{k}} = const. \quad (2.11.14)$$

Учитывая, что в фиксированной точке на данной линии тока с параметрами  $p_0$ ,  $\rho_0$ , скорость равна  $V_0$ , уравнение (2.11.14) будет иметь вид:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{k}{(k-1)} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{(k-1)}{k}} = \frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{k}{(k-1)},$$

или, в несколько другом виде:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{k}{(k-1)} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{(k-1)}{k}} - 1 \right] = \frac{V_0^2}{2}. \quad (2.11.15)$$

Для задачи истечения газа из бесконечно большого объема когда  $V_0 \approx 0$ , отсюда получаем известную формулу Сен-Венана и Ванцеля [33]:

$$V^2 = \frac{2k}{(k-1)} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{(k-1)}{k}} \right]. \quad (2.11.16)$$

3. Для политропного процесса с показателем политропы  $n$ ,  $0 < n < \infty$ ,  $n \neq 1$  и уравнением  $\frac{p}{\rho^n} = const$  имеют место формулы для адиабатного течения (2.11.12) – (2.11.16), в которых показатель адиабаты  $k$  заменен на показатель политропы  $n$ .

## 2.12. О ВЯЗКОСТЯХ $\mu$ И $\lambda$

Тензор напряжений Коши  $\underline{\sigma}$ , который всегда симметричен по определению, для течения вязкой жидкости обычно представляют в виде:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{E} + \underline{\tau}, \quad (2.12.1)$$

где  $p$  – давление,  $\underline{\tau}$  – тензор вязких напряжений. Тензор  $\underline{\tau}$  равен нулю для идеальной жидкости, в отличие от жидкости, обладающей вязкостью. При этом в ламинарном режиме,  $\underline{\tau}$  является тензором чисто вязких напряжений, а

при турбулентном течении он включает в себя, помимо вязких, еще и турбулентные напряжения.

В общем случае течения вязкой жидкости тензор напряжений  $\underline{\tau}$  линейно связан с тензором скоростей деформаций  $\underline{S}$ :

$$\underline{\tau} = \underline{S} : ({}^4\underline{C}), \quad (2.12.2)$$

где  ${}^4\underline{C}$  – тензор материальных констант. В компонентной форме эту формулу можно представить в виде:

$$\tau_{ks} = S_{ij} C_{jiks} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_s.$$

Тензор четвертого ранга  ${}^4\underline{C}$ , имеющий 81 компоненту, переводит тензор  $\underline{S}$  в тензор  $\underline{\tau}$ . Однако, вследствие симметрии тензоров  $\underline{S}$  и  $\underline{\tau}$  остается лишь 36 различных между собою компонент тензора  ${}^4\underline{C}$ . При записи выражения (2.12.2) через эти 36 коэффициентов, двойные индексы у компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций, следуя Ламе [53; 64], удобно заменить на одинарные, которые меняются от 1 до 6:

$$\begin{aligned} \tau_{11} = \tau_1; \quad \tau_{22} = \tau_2; \quad \tau_{33} = \tau_3; \quad S_{11} = S_1; \quad S_{22} = S_2; \quad S_{33} = S_3; \\ \tau_{23} = \tau_4; \quad \tau_{13} = \tau_5; \quad \tau_{12} = \tau_6; \quad S_{23} = S_4; \quad S_{13} = S_5; \quad S_{12} = S_6. \end{aligned}$$

После перехода таким способом к шестимерному пространству, соотношение (2.12.2) в компонентном виде запишется следующим образом:

$$\tau_K = S_M C_{MK}; \quad K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Теперь 36 компонент тензора материальных констант обозначены как  $C_{MK}$ , а заглавные латинские буквы использованы как индексы, пробегаящие значения от 1 до 6. Матрица материальных констант приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что эта матрица симметрична, т. е.  $C_{МК} = C_{КМ}$ , и различными константами оказываются лишь 21 из 36. Дальнейшее уточнение матрицы  $C_{МК}$  возможно после разделения сред на анизотропные (свойства которых зависят от направления) и изотропные. В общем случае для анизотропных сред количество констант – 21, однако часто даже анизотропные материалы имеют плоскости или оси симметрии. Это приводит к дальнейшему уменьшению числа независимых констант материалов. Так, если в некоторой точке существует плоскость симметрии свойств материала (т. е. константы  $C_{МК}$  имеют одинаковые значения для любой пары систем координат, которые получены одна из другой отражением относительно указанной плоскости), то число независимых констант сокращается до 13. Если среда обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, то она называется ортотропной, а матрица такого материала в системе координат, плоскости которой совпадают с плоскостями симметрии, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что здесь независимых констант девять.

Говорят, что в некоторой точке существует ось симметрии свойств порядка  $N$ , если существует набор направлений, эквивалентных свойствам материала, которые совпадают при повороте относительно оси на угол  $\frac{2\pi}{N}$ . Некоторые случаи осевой и плоской симметрии эквивалентны.

Для изотропных сред любая плоскость и любая ось являются плоскостью и осью симметрии. В этом случае число независимых материальных констант сводится к двум [53; 64], а матрица  $C_{МК}$  принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Здесь эти независимые константы обозначены как  $\lambda$  и  $\mu$ .

Постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  называются постоянными Ламе и имеют смысл вязко-стей, их размерность – Па·с, причем  $\mu$  носит наименование динамической вязкости. Тогда соотношение (2.12.2) принимает вид:

$$\underline{\tau} = \lambda(\text{tr}\underline{S})\underline{E} + 2\mu\underline{S}, \quad (2.12.3)$$

где  $\text{tr}\underline{S}$  – след тензора (сумма его диагональных компонент в матрице компонент), который, как известно, определяется формулой:

$$\text{tr}\underline{S} = \underline{S} : \underline{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}, \quad (2.12.4)$$

т. е. имеет смысл дивергенции поля скоростей жидкости.

Целесообразно заметить, что большинство сред, интересных с точки зрения практических приложений, можно считать изотропными. Это и различные конструкционные материалы (стали, пластмассы), и жидкости (как капельные, так и газы). Однако встречаются также материалы с ярко выраженными анизотропными свойствами. Среди конструкционных материалов такими свойствами обладают древесина, древесно-слоистые пластики, композитные материалы. Среди жидкостей можно указать, например, жидкие кристаллы. Кроме того, в турбулентном режиме течения все жидкости становятся анизотропными.

С учетом выражений (2.12.3) и (2.12.4) тензор напряжений  $\underline{\sigma}$  в движущейся вязкой жидкости записывается в виде:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{E} + \lambda(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})\underline{E} + 2\mu\underline{S}. \quad (2.12.5)$$

Величина  $\operatorname{div} \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V}$  характеризует скорость объемного расширения (сжатия) жидкости, ее физический смысл виден из формулы:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t}, \quad 1/c$$

где  $V, M^3$  – рассматриваемый объем жидкости.

Возьмем след тензорного равенства (2.12.5). Для левой части:

$$\operatorname{tr} \underline{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \theta.$$

Величина  $\theta$ , равная сумме диагональных компонент тензора  $\underline{\sigma}$ , равна следу правой части выражения (2.12.5), т. е. можно записать:

$$\theta = -3p + 3\lambda(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + 2\mu(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \quad (2.12.6)$$

Отсюда скорость объемного расширения (сжатия):

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{3p + \theta}{3\lambda + 2\mu}. \quad (2.12.7)$$

Когда жидкость находится в равновесии, т. е.  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$ , а также при достижении покоя, величина  $\theta = -3p$ . Если же этого нет, то  $\theta \neq -3p$ .

Пусть в рассматриваемой точке внезапно возникнет давление  $p'$ , не равное давлению  $p$  окружающей среды, т. е.  $p' \neq p$ . Тогда величина  $\theta$  будет равна  $\theta = -3p'$ , и возникнет движение жидкости, причем скорость ее объемного расширения будет:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{3p - 3p'}{3\lambda + 2\mu} = \frac{p - p'}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}.$$

Величину в знаменателе правой части называют объемной (второй) вязкостью и обозначают  $\zeta$ :

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (2.12.8)$$

Тогда предыдущая формула переписывается в виде:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{p - p'}{\zeta}.$$

Отсюда видно, что если  $p' < p$ , то величина  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} > 0$  и наоборот. После истечения некоторого времени возмущение рассасывается, исчезает, давление  $p' \rightarrow p$ , жидкость возвращается в исходное состояние:  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} \rightarrow 0$ .

Объемная вязкость – это свойство жидкости, характеризующее необратимое превращение механической энергии в теплоту при объемных деформациях, которое проявляется особенно сильно при распространении звуковых колебаний. Значение  $\zeta$  определяется по измерениям коэффициента поглощения звука в среде. Величина  $\zeta$  обычно уменьшается при повышении температуры и увеличивается с повышением давления. Вязкости  $\zeta$  и  $\mu$  являются величинами одного порядка только в некоторых жидкостях, в большинстве же случаев величина  $\zeta$  намного превосходит величину  $\mu$  (Таблица 2.1).

Таблица 2.1. Значения  $\mu$  и  $\zeta/\mu$  для некоторых жидкостей

Жидкость	Температура, °C	$\mu$ , $10^{-3}$ Па·с	$\zeta/\mu$
Вода	15	1.1	2.81
Глицерин	-14	61600	1.03
Бензол	20	0.65	130
Сероуглерод	20	0.36	1600

В гидродинамике жидкость называют стоксовой ньютоновской, если объемная вязкость  $\zeta=0$ . В этом случае  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} \rightarrow \infty$ , т. е. скорость изменения объема является бесконечно большой, возмущение распространяется бесконечно быстро. Модель стоксовой ньютоновской жидкости является наиболее используемой в современной гидродинамике вязкой жидкости [33; 72], для нее, согласно (2.12.8), имеем:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (2.12.9)$$

При этом выражение (2.12.6) дает  $\theta = -3p$ . Тогда согласно формуле (2.12.5) реологическим соотношением будет следующее выражение:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{E} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{V})\underline{E} + 2\mu\underline{S}, \quad (2.12.10)$$

или, в терминах компонент:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}.$$

После подстановки соотношения (2.12.10) в уравнение движения сплошной среды в напряжениях (2.4.1) получаем векторное уравнение Навье-Стокса:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V}\right) + \nabla \cdot (2\mu\underline{S}) + \rho\vec{f}. \quad (2.12.11)$$

В более развернутой форме, после подстановки выражения для тензора скоростей деформаций имеем:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p - \frac{2}{3}\nabla(\mu\nabla \cdot \vec{V}) + \nabla \cdot (\mu\nabla \vec{V}) + \nabla \cdot (\mu\nabla \vec{V}^T) + \rho\vec{f}. \quad (2.12.12)$$

Это уравнение справедливо для общего случая движения жидкости – и когда жидкость сжимаема, и когда вязкость является переменной,  $\mu = \mu(\vec{r})$ . При этом второе, третье и четвертое слагаемые правой части этого уравнения – градиент скалярной функции и дивергенции тензорных величин могут быть развернуты и дальше, если воспользоваться очевидными равенствами:

$$\nabla(\mu\nabla \cdot \vec{V}) = (\nabla \cdot \vec{V})\nabla\mu + \mu\nabla(\nabla \cdot \vec{V}),$$

$$\nabla \cdot (\mu\nabla \vec{V}) = \nabla\mu \cdot \nabla \vec{V} + \mu\Delta \vec{V},$$

$$\nabla \cdot (\mu\nabla \vec{V}^T) = \nabla\mu \cdot \nabla \vec{V}^T + \mu\nabla(\nabla \cdot \vec{V}).$$

Если вязкость постоянна  $\mu = const$ , то уравнение (2.12.12) дает:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \frac{1}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) + \mu\Delta\vec{V} + \rho\vec{f}, \quad (2.12.13)$$

а если к тому же жидкость и несжимаема, то имеем:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{V} + \rho\vec{f}. \quad (2.12.14)$$

Уравнение Навье-Стокса (2.12.11) для общего случая движения жидкости может быть записано в дивергентном виде, если раскрыть оператор материальной производной, а также представить массовую силу  $\vec{f}$  в поле сил тяжести согласно (2.7.4) через ее потенциал  $U(\vec{r})$ ,  $\vec{f} = -\vec{\nabla}U$ ,  $U = gz$  (считая, что ось  $z$  направлена вертикально вверх):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\left[-\left(p + \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)\underline{E} - \rho\vec{V}\otimes\vec{V} + \mu\vec{\nabla}\vec{V} + \mu\vec{\nabla}\vec{V}^T\right] - \rho\vec{\nabla}U \quad (2.12.15)$$

Для несжимаемой жидкости это уравнение упрощается ( $\rho = const$ ,  $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$ ):

$$\rho \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\left[(p + \rho U)\underline{E} - \rho\vec{V}\otimes\vec{V} - \mu\vec{\nabla}\vec{V}\right]. \quad (2.12.16)$$

В случае стационарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью это уравнение принимает простой дивергентный вид:

$$\vec{\nabla}\cdot\left[(p + \rho gz)\underline{E} - \rho\vec{V}\otimes\vec{V} - \mu\vec{\nabla}\vec{V}\right] = 0 \quad (2.12.17)$$

Если же объемная вязкость  $\zeta \neq 0$ , т. е. ньютоновская жидкость не является стоксовой, то  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu + \zeta$ , и вместо формулы (2.12.10) реологическим соотношением будет:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{E} - \left(\frac{2}{3}\mu - \zeta\right)(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\underline{E} + 2\underline{\mu S}, \quad (2.12.18)$$

или, обозначая шаровую часть тензора напряжений через  $p'$ :

$$p' = p + \left(\frac{2}{3}\mu - \zeta\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{V}. \quad (2.12.19)$$

В итоге можно записать:

$$\underline{\sigma} = -p'\underline{E} + 2\mu\underline{S}, \quad (2.12.20)$$

или:

$$\underline{\sigma} = -p'\underline{E} + \mu(\bar{\nabla}\bar{V} + \bar{\nabla}\bar{V}^T).$$

Взяв операцию получения следа для правой и левой частей этого выражения, получаем, как и в случае формулы (2.12.6):

$$\theta = -3p' + 2\mu(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}), \quad (2.12.21)$$

или, учитывая (2.12.19):

$$\theta = -3p - (2\mu - 3\zeta)\bar{\nabla} \cdot \bar{V} + 2\mu\bar{\nabla} \cdot \bar{V},$$

т. е. имеем:

$$\theta = -3p + 3\zeta\bar{\nabla} \cdot \bar{V},$$

откуда скорость объемного расширения:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{3p + \theta}{3\lambda + 2\mu},$$

что совпадает с формулой (2.12.7), как и следовало ожидать.

Уравнение движения такой ньютоновской жидкости с объемной вязкостью  $\zeta$  будет выглядеть так:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\bar{\nabla} p' + \bar{\nabla} \cdot 2\mu\underline{S} + \rho \bar{f}, \quad (2.12.22)$$

где  $p'$  определено выражением (2.12.19).

В компонентном виде:

$$\rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{2}{3}\mu - \zeta \right) \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i.$$

### 2.13. ДИФФУЗИЯ И ОСНОВЫ МАССОПЕРЕНОСА

Рассмотрим среду из  $n$  компонент. Каждая компонента рассматривается как сплошная среда с полем массы переменной плотности. Следовательно, моделью  $n$ -компонентной смеси является суперпозиция таких сплошных сред (концепция вложенных сред). Согласно этой концепции в любой точке пространства, занятого смесью, сосуществуют материальные частицы различного сорта, различные компоненты смеси. Каждому компоненту присваивается свой индекс, например,  $\rho^\alpha$ ,  $\vec{V}^\alpha$  – плотность и скорость компонента  $\alpha$  соответственно. Эти величины связаны с плотностью среды в целом следующими соотношениями:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha, \quad \rho \vec{V} = \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \vec{V}^\alpha. \quad (2.13.1)$$

Далее для каждого компонента  $\alpha$  следует записывать свои уравнения баланса.

Рассмотрим случай, когда при течении смеси в ней к тому же происходят химические реакции. Тогда уравнение неразрывности для компонента  $\alpha$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho^\alpha \vec{V}^\alpha) = (\dot{\rho}^\alpha)_{хим}, \quad (2.13.2)$$

где  $(\dot{\rho}^\alpha)_{хим}$  – скорость изменения плотности компонента  $\alpha$  в результате химических реакций. Эта скорость определяется согласно законам химической кинетики [53].

Если теперь просуммировать уравнения (2.13.2) по всем  $\alpha$ , то, учитывая (2.13.1), то получится обычное уравнение неразрывности (2.3.1), описывающее поведение всей смеси в целом. После такого суммирования в правой части будет стоять ноль, так как увеличение массы одного компонента смеси уравновешивается уменьшением массы другого.

Уравнение (2.13.2) полезно переписать в несколько ином виде, вводя в рассмотрение безразмерную величину  $C^\alpha$  – массовую концентрацию компонента  $\alpha$ :

$$C^\alpha = \frac{\rho^\alpha}{\rho}; \quad \sum_{\alpha} C^\alpha = 1, \quad (2.13.3)$$

и величину диффузионного потока компонента  $\alpha$  относительно центра масс движущегося со скоростью  $\vec{V}$  элементарного объема смеси:

$$\vec{j}^\alpha = \rho^\alpha (\vec{V}^\alpha - \vec{V}) = \rho^\alpha \vec{u}^\alpha, \quad (2.13.4)$$

где  $\vec{u}^\alpha$  – скорость диффузии компонента  $\alpha$ .

Теперь, используя уравнения неразрывности для всей смеси в целом и формулу для дивергенции скалярной и векторной функций, левую часть (2.13.2) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho^\alpha \vec{V}^\alpha) - \frac{\rho^\alpha}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right) = \\ & = \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} - \frac{\rho^\alpha}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho^\alpha \vec{V}^\alpha) - \rho^\alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{V} - \frac{\rho^\alpha}{\rho} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho = \\ & = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho^\alpha}{\rho} \right) - \rho^\alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho^\alpha + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho^\alpha - \frac{\rho^\alpha}{\rho} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho = \\ & = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho^\alpha}{\rho} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho^\alpha \vec{V}^\alpha) + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{\rho^\alpha}{\rho} \right) - \vec{\nabla} \cdot (\rho^\alpha \vec{V}) = \\ & = \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \right) \left( \frac{\rho^\alpha}{\rho} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho^\alpha \vec{V}^\alpha - \rho^\alpha \vec{V}) \end{aligned}$$

Используя обозначения (2.13.3) и (2.13.4), можно вместо уравнения неразрывности для компонента  $\alpha$  (2.13.2) записать уравнение диффузии в виде:

$$\rho \frac{dC^\alpha}{dt} + \bar{\nabla} \cdot \bar{j}^\alpha = (\dot{\rho}^\alpha)_{\text{хим}}. \quad (2.13.5)$$

Величина  $\bar{j}^\alpha$  – вектор плотности диффузионного потока, он характеризует поток массы компонента  $\alpha$  через единичную поверхность в единицу времени и имеет размерность  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

Правую часть уравнения (2.13.5) удобно представить в виде:

$$(\dot{\rho}^\alpha)_{\text{хим}} = \rho \dot{w}^\alpha, \quad (2.13.6)$$

где  $\dot{w}^\alpha$  – скорость изменения концентрации компонента  $\alpha$  в результате всех химических реакций, которая рассчитывается по законам химической кинетики. Тогда уравнение баланса массовой концентрации компонента  $\alpha$  принимает вид:

$$\rho \frac{dC^\alpha}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{j}^\alpha + \rho \dot{w}^\alpha, \quad (2.13.7)$$

который широко используется в современной литературе [53; 71].

Уравнение (2.13.7) может быть записано в дивергентном виде. Для этого необходимо преобразовать его конвективную часть следующим образом, учитывая уравнение неразрывности для всей смеси в целом:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{V} \cdot \bar{\nabla})C^\alpha &= \rho \bar{V} \cdot \bar{\nabla} C^\alpha + C^\alpha \left( \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{V} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \\ &= C^\alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho C^\alpha \bar{V}). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (2.13.7) принимает дивергентный вид:

$$\frac{\partial \rho C^\alpha}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho C^\alpha \bar{V} + \bar{j}^\alpha) = \rho \dot{w}^\alpha. \quad (2.13.8)$$

Массовая скорость образования компонент определяется следующим выражением:

$$\rho \dot{w}^\alpha = m^\alpha \sum_{s=1}^l (v_s^{\prime\alpha} - v_s^\alpha) \left[ k_s^+ \prod_{\beta=1}^n \left( \frac{\rho}{m^\beta} C^\beta \right)^{v_s^{\prime\alpha}} - k_s^- \prod_{\beta=1}^n \left( \frac{\rho}{m^\beta} C^\beta \right)^{v_s^\alpha} \right], \quad (2.13.9)$$

где  $\nu_s^{\prime\alpha}$  и  $\nu_s^{\alpha}$  – стехиометрические коэффициенты реагентов и продуктов реакций,  $k_s^+$  и  $k_s^-$  – коэффициенты скоростей прямой и обратной реакций, знаки  $\Sigma$  и  $\Pi$  обозначают суммирование и произведение величин соответственно. Суммирование производится по всем  $s=1,2,\dots,l$  реакциям, в которых участвует компонента  $\alpha$ .

Если в смеси химических реакций не происходит, то  $\dot{w}^\alpha = 0$ , и уравнение баланса массовой концентрации компонента  $\alpha$  принимает вид:

$$\frac{\partial \rho C^\alpha}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho C^\alpha \bar{v} + \bar{j}^\alpha) = 0. \quad (2.13.10)$$

В простейших моделях диффузионных процессов интенсивность (плотность) диффузионного потока компонента  $\alpha$  связывается, по аналогии с законом теплопроводности Фурье (2.8.3), с градиентом концентрации  $\bar{\nabla} C^\alpha$  с помощью закона Фика:

$$\bar{j}^\alpha = -\rho D^\alpha \bar{\nabla} C^\alpha. \quad (2.13.11)$$

Знак минус показывает, что этот поток направлен из областей с большей концентрацией компонента  $\alpha$  в сторону области с меньшей концентрацией. В этой формуле  $D^\alpha$  – эффективный коэффициент диффузии,  $m^2/c$ , который считается:

- либо одинаковым для всех компонент (бинарная модель);
- либо вычисляется по формуле Уилки [71; 72]:

$$D^\alpha = \left( \frac{1}{m} - \frac{C^\alpha}{m^\alpha} \right) / \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^n \frac{C^\beta}{m^\beta D^{\alpha\beta}},$$

где  $D^{\alpha\beta}$  – бинарные диффузионные коэффициенты,  $m^\alpha$  – молярная масса компонента  $\alpha$ ,  $m$  – молярная масса всей смеси. При равенстве коэффициентов диффузии отдельных компонент  $D^{\alpha\beta} = D$  получаем, что эффективный коэффициент диффузии равен  $D^\alpha = D$  и закон Фика (2.13.11) принимает упрощенный вид:

$$\vec{j}^{\alpha} = -\rho D \vec{\nabla} C^{\alpha}. \quad (2.13.12)$$

Учет многокомпонентности смеси приводит к появлению критерия подобия Шмидта:

$$Sc^{\alpha} = \frac{\mu}{\rho D^{\alpha}},$$

которое характеризует соотношение между молекулярным переносом импульса и переносом массы компонента  $\alpha$ . Здесь  $\mu$  и  $\rho$  – динамическая вязкость и плотность всей смеси соответственно. Тогда закон Фика (2.13.11) можно представить в форме, аналогичной форме (2.8.4) для закона теплопроводности Фурье:

$$\vec{j}^{\alpha} = -\frac{\mu}{Sc^{\alpha}} \vec{\nabla} C^{\alpha}. \quad (2.13.13)$$

В случае равенства коэффициентов диффузии отдельных компонент выражение (2.13.13) может быть записано в виде:

$$\vec{j}^{\alpha} = -\frac{\mu}{Sc} \vec{\nabla} C^{\alpha}, \quad (2.13.14)$$

где число Шмидта имеет вид:  $Sc = \frac{\nu}{D}$ .

Если принять допущение о подобии тепловых и диффузионных полей, то число Шмидта можно приравнять числу Прандтля  $Pr = \frac{\nu}{a}$ , где  $a$  – коэффициент температуропроводности. Тогда выражение (2.13.14) приобретает следующий вид:

$$\vec{j}^{\alpha} = -\frac{\mu}{Pr} \vec{\nabla} C^{\alpha}.$$

Перенос вещества происходит не только под действием градиентов концентраций, но и под действием градиентов температур (эффект Соре). Этот эффект «термодиффузии» в бинарной смеси учитывается добавочным слагаемым в законе Фика:

$$\bar{j}^{\alpha} = -\rho D \bar{\nabla} C^{\alpha} - \rho \frac{D_T}{T} \bar{\nabla} T, \quad (2.13.15)$$

где  $D_T$  – коэффициент термодиффузии,  $m^2/c$ .

Явление, обратное эффекту термодиффузии, называется эффектом Дюфура. Разность концентраций вещества вызывает разность температур в смеси. Этот эффект учитывается поправкой в законе теплопроводности Фурье:

$$\bar{q} = -\lambda \bar{\nabla} T - \rho D \sum_{\alpha=1}^n h^{\alpha} \bar{\nabla} C^{\alpha},$$

где  $h^{\alpha}$  – энтальпия компонента  $\alpha$ , Дж/кг;  $D$  – коэффициент диффузии. Эту формулу с учетом закона Фика можно представить в виде:

$$\bar{q} = -\lambda \bar{\nabla} T - \sum_{\alpha=1}^n h^{\alpha} \bar{j}^{\alpha}. \quad (2.13.16)$$

Здесь эффект термодиффузии в выражении для  $\bar{j}^{\alpha}$  не учитывается, поскольку вклад его в перенос энергии как правило незначителен.

При решении задач массообмена (по аналогии с процессом теплообмена) вводится коэффициент массообмена  $\beta$ , м/с (аналогичный коэффициенту теплоотдачи  $\alpha$ ). Тогда, по аналогии с законом Ньютона-Рихмана в теории теплопередачи, для массообмена между стенкой и жидкостью можно записать следующее выражение для величины плотности потока компонента  $\alpha$ :

$$\bar{j}^{\alpha} = \rho \beta (C_w^{\alpha} - C_f^{\alpha}), \quad (2.13.17)$$

где  $C_w^{\alpha}$  и  $C_f^{\alpha}$  – массовые концентрации компонента  $\alpha$  на стенке и в жидкости, ее омывающей, соответственно. В этом случае возникает диффузионное число Нуссельта

$$Nu_D = \frac{\beta l}{D}. \quad (2.13.18)$$

где  $l$  – характерный размер,  $D$  – коэффициент диффузии.

Молярная масса  $m$  смеси определяется соотношением, связывающим концентрации компонент  $C^{\alpha}$  и их молярные массы  $m^{\alpha}$ :

$$m = \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^n \frac{C^{\alpha}}{m^{\alpha}}}, \text{ кг/кмоль.} \quad (2.13.19)$$

Энтальпия смеси  $h$  вычисляется через молярные энтальпии компонент  $h^{\alpha}$ , их молярные массы  $m^{\alpha}$  и концентрации:

$$h = \sum_{\alpha=1}^n \frac{C^{\alpha} h^{\alpha}}{m^{\alpha}}. \quad (2.13.20)$$

Кроме массовой концентрации вещества  $C^{\alpha} = \rho^{\alpha} / \rho$  используют также мольную, равную отношению числа молей  $N^{\alpha}$  компонент  $\alpha$  данной смеси к общему числу молей:

$$y^{\alpha} = N^{\alpha} / N, \quad N = \sum_{\alpha=1}^n N^{\alpha}. \quad (2.13.21)$$

Учитывая, что число молей в единице объема равно плотности, отнесенной к молярной массе, можно получить такое соотношение:

$$y^{\alpha} = \frac{\rho^{\alpha}}{m^{\alpha}} \bigg/ \sum_{\beta=1}^n \frac{\rho^{\beta}}{m^{\beta}}, \text{ или } y^{\alpha} = \frac{C^{\alpha}}{m^{\alpha}} \bigg/ \sum_{\beta=1}^n \frac{C^{\beta}}{m^{\beta}}, \quad (2.13.22)$$

которое связывает мольную концентрацию с массовой.

Обратное соотношение выглядит следующим образом:

$$C^{\alpha} = \frac{m^{\alpha} y^{\alpha}}{m} = \frac{m^{\alpha} y^{\alpha}}{\sum_{\beta=1}^n m^{\beta} y^{\beta}}. \quad (2.13.23)$$

Коэффициенты вязкости  $\mu$ ,  $\text{Па} \cdot \text{с}$ , и теплопроводности  $\lambda$ ,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , смеси определяются через коэффициенты вязкости и теплопроводности компонент из аппроксимационных формул Уилки и Масона-Саксенy соответственно [71; 72]:



$$\mu = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \mu^\alpha}{\sum_{\beta=1}^n C_T^{\alpha\beta} \frac{C^\beta m^\alpha}{C^\alpha m^\beta}}, \quad (2.13.24)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \lambda^\alpha}{1.065 \cdot \sum_{\beta=1}^n C_T^{\alpha\beta} \frac{C^\beta m^\alpha}{C^\alpha m^\beta} - 0.065}, \quad (2.13.25)$$

где  $C_T^{\alpha\beta} = \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu^\alpha}{\mu^\beta} \sqrt{\frac{m^\beta}{m^\alpha}}} \right)^2 / \sqrt{8 \left( 1 + \frac{m^\alpha}{m^\beta} \right)}$ .

## 2.14. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

Течение многокомпонентной реагирующей смеси описывается системой уравнений, включающей в себя уравнения неразрывности, диффузии, движения, энергии, и термическое уравнение состояния.

Уравнение неразрывности в бескомпонентной форме записи имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.14.1)$$

где  $\rho$  и  $\vec{V}$  – плотность и скорость жидких частиц для всей смеси в целом.

Уравнения диффузии для каждой компоненты смеси:

$$\frac{\partial \rho C^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C^\alpha \vec{V}) = -\nabla \cdot \vec{j}^\alpha + \rho \dot{w}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14.2)$$

Уравнение движения сплошной среды в напряжениях для компоненты  $\alpha$  имеет структуру уравнения (2.5.1) и содержит дополнительные члены, учитывающие обмен количества движения между диффузионными потоками различных компонент, а также изменение количества движения самих диффузионных потоков по мере протекания химических реакций при наличии последних. В результате, уравнение движения для компоненты  $\alpha$  принимает вид:

$$\rho^\alpha \frac{d\vec{V}^\alpha}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha \vec{f}^\alpha + \rho^\alpha \sum_{\beta=1}^n \tau^{\alpha\beta} \vec{j}^\alpha - \vec{j}^\alpha \cdot \dot{w}^\alpha, \quad (2.14.3)$$

где  $\tau^{\alpha\beta}$  – постоянный коэффициент передачи импульса от компоненты  $\beta$  к компоненте  $\alpha$ .

Для смеси в целом уравнение движения имеет обычный вид (2.4.1), так как добавочные члены компенсируют друг друга. Представляя тензор напряжений в виде  $\underline{\sigma} = -p\underline{E} + \underline{\tau}$ , где  $\underline{\tau}$  – тензор вязких напряжений, уравнение движения смеси можно представить в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \underline{\tau} + \rho \vec{f}. \quad (2.14.4)$$

Уравнение энергии для отдельной компоненты  $\alpha$  также имеет в правой части добавочные члены, подобные таковым в уравнении диффузии (в том числе и энергию, вследствие химических реакций). В результате уравнение полной энергии в форме переноса энтальпии торможения можно записать в виде:

$$\rho^\alpha \frac{d}{dt} \left( h^\alpha + \frac{V^{\alpha 2}}{2} \right) = \frac{\partial p^\alpha}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{q}^\alpha + h^\alpha \vec{j}^\alpha) + \vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau}^\alpha \cdot \vec{V}^\alpha) + \rho^\alpha h_0^\alpha \dot{w}^\alpha,$$

где  $h^\alpha$  – удельное теплосодержание компоненты  $\alpha$ ,  $h_0^\alpha$  – энтальпия образования, представляющая собой количество энергии, выделяющееся (поглощаемое) в результате образования единицы массы компоненты  $\alpha$  из свободных элементов в стандартных условиях в химической реакции. Значения  $h_0^\alpha$  содержатся в справочниках в виде таблиц. Так, для кислорода  $O_2$   $h_0^\alpha = 0$ , для окиси углерода  $CO$   $h_0^\alpha = 279$  кДж/моль. Перевод мольной энтальпии в массовую несложен – он осуществляется делением на молярную массу компонента.

Для всей смеси в целом, после суммирования по всем  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{\partial \rho h_*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho h_* \vec{V})^\alpha = \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{q} + \sum_{\alpha} h^\alpha \vec{j}^\alpha \right) + \vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) + \sum_{\alpha} \rho h_0^\alpha \dot{w}^\alpha, \quad (2.14.5)$$

где  $h_* = h + \frac{V^2}{2}$  – энтальпия торможения. Энтальпия смеси – величина  $h$  – выражается через мольные энтальпии компонент согласно соотношениям (2.13.20):

$$h = \sum_{\alpha=1}^n \frac{C^\alpha h^\alpha}{m^\alpha}, \text{ Дж/кг}$$

в которых мольная энтальпия компонента  $\alpha$  смеси может быть записана через мольные энтальпии компонент в виде:

$$h^\alpha = h_0^\alpha + \tilde{C}_p^\alpha T, \text{ Дж/моль} \quad (2.14.6)$$

где  $\tilde{C}_p^\alpha$  – удельная мольная теплоемкость компонента  $\alpha$ . Для всего газа

$$\tilde{C}_p = \sum_{\alpha} \tilde{C}_p^\alpha C^\alpha, \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}, \text{ удельная массовая теплоемкость} - c_p = \frac{\tilde{C}_p}{m}, \text{ где}$$

$m$  – молярная масса смеси.

Следует отметить, что в формуле (2.14.6) энтальпия представлена как линейная функция температуры. Однако иногда приходится использовать более сложные зависимости  $h^\alpha = f(T)$ , например

$$h^\alpha = a_0^\alpha + a_1^\alpha T + a_2^\alpha T^2 + \dots,$$

где  $a_i^\alpha$  – некоторые константы.

Формула (2.14.6) позволяет выразить температуру через энтальпию смеси. Действительно, если умножить левую и правую части на отношение  $C^\alpha / m^\alpha$  и просуммировать по всем компонентам  $\alpha$ , то получится следующее выражение:



$$h = c_p T + \sum_{\alpha=1}^n \frac{C^{\alpha} h_0^{\alpha}}{m^{\alpha}}, \quad (2.14.7)$$

где  $c_p$  – изобарная массовая теплоемкость, Дж/(кг·К). Отсюда можно выразить температуру смеси через энтальпии компонент.

Заметим, что введение в рассмотрение температуры имеет смысл лишь для термодинамически равновесных процессов. Систему же, выведенную из состояния равновесия, нельзя характеризовать температурой как единым параметром, одинаковым для всех составляющих системы. В подобных случаях необходимо вводить несколько температур, соответствующим разным энергетическим состояниям.

Последнее уравнение системы уравнений движения – уравнение термического состояния смеси идеальных газов, которое записывается в следующем виде:

$$p = \rho RT / m, \quad (2.14.8)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная, Дж/моль;  $m$  – молярная масса смеси, определяемая уравнением (2.13.19).

Для выполнения расчетов течений реагирующих смесей необходимо вычислять скорость образования компонент в процессе химических реакций  $\dot{w}^{\alpha}$ . Это можно сделать на основе соотношения (2.13.9). В нереагирующих потоках многофазных средах  $\dot{w}^{\alpha} = 0$ , и, кроме того, в уравнениях исчезают члены, содержащие энтальпию образования компонент.

Окончательно система уравнений, описывающая движение многофазной среды, содержит  $n$  уравнений баланса массовой концентрации для каждого компонента (2.14.2), три скалярных уравнения – неразрывности (2.14.1), энергии (2.14.5) и состояния (2.14.8), и одно векторное уравнение движения (2.14.4). Эти уравнения используются для нахождения трех скалярных величин  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  (или  $h$ ) и одной векторной – скорости  $\vec{V}$ .

Для замыкания этой системы необходимо записать определяющие уравнения для величин  $\underline{z}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{q}$ . Такими уравнениями будут (2.12.3), (2.13.14) и (2.8.4).

Таким образом, система уравнений движения многокомпонентной смеси в индексной форме имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.14.9)$$

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad (2.14.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho h + \frac{1}{2} \rho V_k V_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho h V_j + \frac{1}{2} \rho V_k V_k V_j \right) = \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (q_j + \tau_{ij} V_i), \quad (2.14.11)$$

$$\frac{\partial \rho C^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C^\alpha V_j) = -\frac{\partial \bar{j}_j^\alpha}{\partial x_j} + \rho \dot{w}_n, \quad (2.14.12)$$

$$p = \frac{\rho RT}{m},$$

здесь

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (2.14.13)$$

$$\bar{j}_j^\alpha = -\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial C^\alpha}{\partial x_j}, \quad (2.14.14)$$

$$q_j = -\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial x_j}, \quad (2.14.15)$$

$$m = \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^n \frac{C^\alpha}{m^\alpha}}.$$

Уравнение состояния (2.14.8) справедливо лишь для идеального газа. Для реального газа или капельной жидкости его надо заменять на другое, соответствующее фазовому состоянию вещества [37].

Следует отметить также, что данная система справедлива лишь для ламинарного режима движения смеси. Турбулентное движение многокомпонентных смесей будет рассмотрено ниже.

## 2.15. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Рассматривая уравнения движения и энергии, можно заметить, что их структуры близки: в левой их части стоит оператор  $\frac{d}{dt}$ , а в правой – оператор дивергенции, примененный к линейной функции от градиента рассматриваемой величины. Для уравнения движения этой величиной является вектор скорости  $\vec{V}$ , а для уравнения энергии – энтальпия  $h$ . Для несжимаемой жидкости их можно записать следующим образом:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \nabla \cdot \rho \nu \nabla \vec{V} - \nabla p + \dots, \quad (2.15.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) h \right) = \nabla \cdot \rho a \nabla h + q_v + \dots \quad (2.15.2)$$

Остальные слагаемые опущены для краткости записи. Под знаками дивергенции здесь стоят также коэффициенты переноса – кинематическая вязкость  $\nu$  и коэффициент температуропроводности  $a$ , связанные с коэффициентами динамической вязкости  $\mu$  и теплопроводности  $\lambda$  следующими зависимостями:  $\nu = \mu / \rho$ ,  $a = \lambda / \rho c_p$ . Эти коэффициенты переноса имеют одинаковую размерность  $m^2/c$ . Уравнения (2.15.1) и (2.15.2) в литературе именуют также уравнениями переноса импульса и энтальпии соответственно.

Для описания диффузионных процессов используется дополнительно уравнение диффузии, переноса концентрации  $C$ , которое имеет аналогичную структуру, аналогичную уравнениям (2.5.1) и (2.5.2):

$$\rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) C \right) = \vec{\nabla} \cdot \rho D \vec{\nabla} C + \dots, \quad (2.15.3)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии, имеющий ту же размерность, что и величины  $v$  и  $a$ .

Записанные уравнения можно переписать в дивергентном виде:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \rho \nu \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} p + \dots,$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho h \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \rho a \vec{\nabla} h + q_v + \dots,$$

$$\rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (C \vec{V}) \right) = \vec{\nabla} \cdot \rho D \vec{\nabla} C + \dots$$

Таким образом, можно полагать, что если поток жидкости характеризуется полем некоторой величины  $\Phi$  (которая может быть тензором любого ранга), то уравнение переноса для нее имеет следующий вид:

$$\frac{\partial (\rho \Phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \Phi \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma_\Phi \vec{\nabla} \Phi) + S_\Phi, \quad (2.15.4)$$

где  $\Gamma_\Phi$  – коэффициент диффузии, имеющий размерность  $m^2/c$ ,  $S_\Phi$  – источник-ковый член, характеризующий скорость порождения величины  $\Phi$  на единицу объема жидкости (например, для уравнения переноса количества движения, это  $-\vec{\nabla} p$ ).

Стремление к единообразию в определении зависимых переменных, вызванное с одной стороны требованием консервативности при записи уравнения, а с другой – удобством программной реализации, и обусловило введение обобщенной дивергентной формы (2.15.4) в пакетах прикладных программ.

Универсальность уравнений переноса (уравнений сохранения) выражается в полной аналогии структуры этих уравнений. Эта структура не зависит от вида переносимой субстанции, будь то масса, энергия, импульс, энергия (температура), концентрация вещества и др. Аналогичная универсальность

имеет место для определяющих уравнений. Достаточно вспомнить реологическое соотношение Ньютона, закон теплопроводности Фурье, закон Фика для пассивной смеси. Они предполагают линейную связь тензора напряжений в жидкости с градиентом скоростей, интенсивности теплового потока с градиентом температур, и т. д.

## 2.16. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Ввиду трудности решения уравнений гидромеханики как аналитическими, так и численными методами, для большинства практически важных задач большое значение приобретает эксперимент. Однако результаты отдельных экспериментов, проведенных при фиксированных значениях исходных физических параметров, трудно распространить на случаи, когда эти значения изменились. В этом случае приходит на помощь теория подобия – учение о подобии физических явлений. В применении к физическим явлениям теорию подобия применяют по двум направлениям:

- 1) как средство обобщения результатов математического и физического эксперимента;
- 2) как теоретическую основу моделирования технических устройств.

Теория подобия позволяет на основании анализа отдельных опытов или численных расчетов получить обобщенные зависимости, связывающие физические величины того или иного процесса или явления. Она также дает возможность изучать рабочие процессы технических устройств с помощью испытания их моделей.

Теория подобия устанавливает условия подобия физических явлений или процессов. Сам термин «подобие» заимствован из геометрии. На Рис. 2.1 показаны две подобные фигуры – натурный объект и его модель.

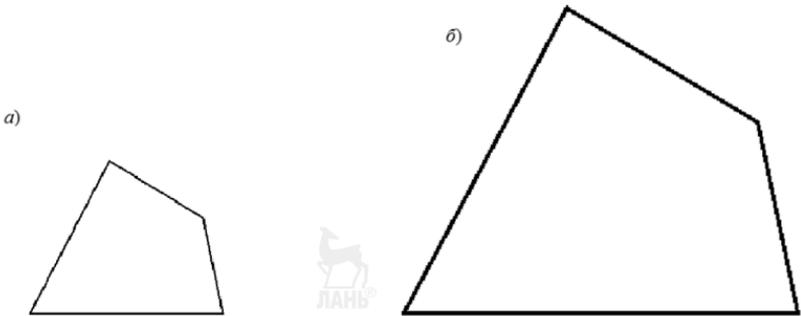


Рис. 2.1. Геометрическое подобие: а) – модель, б) – натуральный объект

Для геометрического подобия фигур требуется пропорциональность соответствующих сторон модели и природы. Так, если длина какой-либо стороны модели  $L_m$ , а длина сходственной стороны природы  $L_n$ , то их отношение называется масштабом и обозначается:

$$M_L = \frac{L_m}{L_n}.$$

Для реализации подобия физических явлений и процессов необходимо иметь не только пропорциональность геометрических параметров, но и пропорциональность физических характеристик (скоростей, давлений, сил и моментов, и т. д.). Такая пропорциональность обеспечивается критериями (числами) подобия.

Чтобы определить эти критерии для течения вязкой жидкости запишем уравнения Навье-Стокса и запишем размерности входящих в него величин. Пусть масштаб длины обозначается  $L$ , масштаб скорости –  $V$ , масштаб времени –  $\tau$ , давления –  $P$ , плотности –  $\rho$ , вязкости –  $\mu$ , и т. д. Очевидно, что размерность оператора Гамильтона –  $1/L$ , оператора Лапласа –  $1/L^2$ . После указания размерностей членов разделим их на размерность конвективного слагаемого, в результате получим следующее:

$$\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}} + \underbrace{\rho(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}} = \underbrace{-\nabla p} + \underbrace{\mu \Delta \vec{V}} + \underbrace{\rho \vec{f}} \quad (2.16.1)$$

$$\frac{\rho V}{\frac{\tau}{L}} \quad \frac{\rho V^2}{L} \quad \frac{P}{\frac{P}{RV^2}} \quad \frac{\mu V}{\frac{L^2}{RVL}} \quad \frac{\rho g}{\frac{V^2}{gL}}$$

Получившиеся безразмерные комплексы представляют собою критерии подобия, и имеют следующие обозначения:

- $Sh = \frac{V\tau}{L}$  – число Струхала представляет собой отношение сил инерции (обусловленных нестационарностью явления) к конвективным силам инерции движущейся жидкости, оно характеризует подобие нестационарных процессов;
- $Eu = \frac{P}{\rho V^2}$  – число Эйлера представляет собой отношение сил давления к конвективным силам инерции;
- $Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$  – число Рейнольдса представляет собой отношение конвективных сил инерции к силам вязкости, оно характеризует подобие сил, обусловленных свойством трения среды;
- $Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$  – число Фруда представляет собой отношение конвективных сил инерции к силе тяжести, оно характеризует подобие процессов волнообразования на свободной поверхности.

Критерии подобия содержат характерные величины длины, скорости, времени. Выбор этих величин, вообще говоря, произволен, и для каждого течения специально оговаривается. Так, для течения жидкости в трубах и каналах в качестве характерной скорости обычно берут среднюю по сечению  $f$ -скорость:

$$V_{cp} = \frac{1}{f} \int_f V df .$$

Для прямой круглой трубы радиуса  $r_0$  площадь сечения  $f = \pi r_0^2$ , величина  $df = 2\pi r dr$ , где  $r$  – радиальная координата, отсчитываемая от оси трубы.

В этом случае для средней скорости имеем:

$$V_{cp} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r V dr .$$

Вычисление по этой формуле требует знания профиля скоростей  $V(r)$  по сечению трубы. Но если задан объемный расход  $Q, м^3/с$ , то средняя скорость будет  $V_{cp} = Q/f$ . Для круглой трубы радиусом  $r_0$  эта формула дает выражение

$$V_{cp} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{4Q}{\pi d^2}, \text{ где } d = 2r_0 \text{ – диаметр трубы.}$$

В качестве характерной длины  $L$  для течения в круглой трубе берут ее диаметр  $d$ . Для каналов некругового сечения вводят понятие эквивалентного диаметра:

$$d_s = \frac{4f}{\chi},$$

где  $f$  – площадь сечения,  $\chi$  – смоченный периметр. Для круглой трубы эта формула дает  $d_s = d$ , что и следовало ожидать.

Таким образом, для течения жидкости в круглой трубе число Рейнольдса определяется так:

$$Re = \frac{V_{cp} d}{\nu} .$$

При обтекании плоской пластины длиной  $L$  потоком, набегающим со скоростью  $V_\infty$ , число Рейнольдса определяется формулой:

$$Re = \frac{V_\infty L}{\nu} .$$

Для других типов течений используются иные записи этой величины.

Для подобия физических процессов при течениях жидкостей помимо геометрического подобия областей течения необходимо также физическое (кинематическое и динамическое) подобие, для выполнения которого необходимо обеспечить равенство критериев подобия:

$$Sh = idem, Eu = idem, Re = idem, Fr = idem.$$

Здесь «idem» означает «то же самое», «одно и то же» значение.

Заметим, что критерий Эйлера  $Eu$  не является определяющим. Он выполняется всегда, если выполняются остальные. В частных случаях стационарных течений при отсутствии свободной поверхности единственным определяющим критерием является число Рейнольдса. Для каждого типа течений существует свое значение критического числа Рейнольдса  $Re_{кр}$ , такое, что при  $Re < Re_{кр}$  реализуется ламинарный режим течения, а при превышении этого значения – турбулентный режим.

При моделировании конвективного теплообмена вместо критерия Фруда используется критерий Грасгофа, который характеризует взаимодействие сил вязкости и подъемной силы, обусловленной различием плотностей соседних частиц жидкости, вызванной разностью их температур  $\Delta T$ . В этом случае массовой силой будет не  $\rho \vec{g}$ , а  $\rho \vec{g} \beta \Delta T$ , где  $\beta$  – коэффициент объемного расширения жидкости,  $1/K$ . Тогда вместо числа Фруда возникает безразмерный комплекс, из которого выделяют квадрат числа Рейнольдса:

$$\frac{gL\beta\Delta T}{V^2} = \frac{gL\beta\Delta TL^2}{V^2} \frac{v^2}{V^2 L^2} = \frac{Gr}{Re^2},$$

где число Грасгофа:

$$Gr = \frac{gL^3\beta\Delta T}{v^2}. \quad (2.16.2)$$

Если в моделируемом процессе существенно влияние сил поверхностного натяжения (например, вследствие процесса брызгообразования при движении объекта по поверхности жидкости), то необходимо выполнять критерий

подобия Вебера, который представляет собой отношение конвективных сил инерции к силам поверхностного натяжения:

$$We = \frac{\rho L V^2}{\sigma}, \quad (2.16.3)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Второе уравнение системы (2.4.12) (уравнение неразрывности) новых критериев подобия не дает.

Определим критерии подобия тепловых потоков, для чего подобным же образом запишем размерности членов уравнения переноса температуры (2.8.13) в поле силы тяжести с учетом (2.8.16) при отсутствии источников тепла через выбранные масштабы физических величин аналогично тому, как это было сделано для уравнения Навье-Стокса. Введем в рассмотрение характерную температуру  $T$ , далее разделим обе части этого уравнения на размерность конвективного члена, в результате получаем безразмерные комплексы:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial T}{\partial t}} + \underbrace{\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T}_{\vec{\nabla}^2 T} = \underbrace{\vec{\nabla}^2 T} + \underbrace{\frac{dp}{dt}} + \underbrace{\rho \vec{V} \cdot \vec{f}} + \underbrace{\mu \vec{\nabla} \cdot \Phi}, \quad (2.16.4)$$

$$\underbrace{\frac{\rho c T}{\tau}} \quad \underbrace{\frac{\rho c V T}{L}} \quad \underbrace{\frac{\lambda T}{L^2}} \quad \underbrace{\frac{P}{\tau}} \quad \underbrace{\frac{\rho V g}{c T}} \quad \underbrace{\frac{\mu V^2}{L^2}} \quad \underbrace{\frac{\mu V^2}{L \rho c T}}$$

где  $\Phi = \left( -\frac{2}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 + [\vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V}^T] \right) \cdot \vec{V}$  – диссипативная функция Релея,  $\vec{\nabla}^2$  – оператор Лапласа. Появившиеся безразмерные комплексы являются критериями подобия. Нетрудно заметить, что в левой части появляется число Струхала  $1/Sh$ .

Первое слагаемое правой части приводит к критерию Пекле:

$$Pe = \frac{\rho c V L}{\lambda}, \quad (2.16.5)$$

который характеризует соотношение между конвективным и диффузионным переносом тепла в потоке жидкости. Принимая во внимание, что согласно (2.9.1)  $\lambda = \rho c a$ , получаем связь числа Пекле с числом Рейнольдса:

$$Pe = \frac{L \rho c V}{\rho c a} = \frac{V L v}{v a} = Re \cdot Pr,$$

где появляется новый критерий подобия  $Pr = \frac{V}{a}$  – число Прандтля, равное отношению коэффициентов кинематической вязкости и температуропроводности. Этот критерий характеризует подобие гидродинамических и тепловых полей.

Второй члену уравнения (2.16.4) дает безразмерный комплекс:

$$\frac{\rho L}{\tau c V T} = \frac{L}{\tau V} \frac{p}{\rho V^2} \frac{V^2}{c T} = \frac{Eu}{Sh} \frac{V^2}{c T}.$$

Здесь появился новый безразмерный комплекс  $\frac{V^2}{c T}$ , состоящий из отношения квадрата характерной скорости к произведению теплоемкости среды на ее температуру. Для газообразных сред в качестве характерного масштаба теплоемкости можно использовать газовую постоянную  $R$ , Дж/(кг·К), тогда произведение  $RT$  характеризует квадрат скорости звука:  $a_c^2 = \gamma RT$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты. Тогда получившийся безразмерный комплекс представляет собой квадрат числа Маха:

$$\frac{V^2}{RT} = \frac{V^2}{a_c^2} = Ma^2.$$

Число Маха:

$$Ma = \frac{V}{a_c} \quad (2.16.6)$$

есть отношение характерной скорости потока к скорости звука. Таким образом, безразмерный комплекс при втором члене уравнения (2.16.4) представляет собой комбинацию критериев подобия:

$$\frac{\rho L}{\tau \rho c V T} = \frac{Eu \cdot Ma^2}{Sh}.$$

Безразмерный комплекс при третьем члене уравнения (2.16.4) представляет собой следующую комбинацию критериев подобия:

$$\frac{gL}{cT} = \frac{gL}{V^2} \frac{V^2}{cT} = \frac{Ma^2}{Fr^2}.$$

Безразмерный комплекс при четвертом члене уравнения (2.16.4) можно переписать так:

$$\frac{\mu V}{L \rho c T} = \frac{\nu}{VL} \frac{V^2}{cT} = \frac{Ma^2}{Re}.$$

При необходимости учета величины  $q_v$  – поступления тепла от внешних источников – возникает новый критерий подобия – число Больцмана. Величину  $q_v$  при наличии лучистого теплообмена необходимо конкретизировать с помощью закона Стефана-Больцмана. Для этого, по аналогии с законом теплопроводности Фурье, можно ввести в рассмотрение вектор плотности теплового радиационного потока:

$$\bar{q}_R = -\lambda_R \bar{\nabla} T \quad (2.16.7)$$

где  $\lambda_R$  – аналог коэффициента теплопроводности для случая лучистого (радиационного) теплообмена,  $Bm/(M \cdot K)$ . Опираясь на закон Стефана-Больцмана его можно представить в следующем виде:

$$\lambda_R = \frac{16\sigma_0 T^3}{300k},$$

где  $\sigma_0 = 5.67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $k, l/m$  – коэффициент ослабления среды, в которой происходят процессы лучистого теплообмена. В итоге, скалярная величина  $q_v$  может быть представлена в следующем дивергентном в виде:

$$q_R = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda_R \vec{\nabla} T),$$

или, более подробно:

$$q_R = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{16\sigma_0 T^3}{300k} \vec{\nabla} T \right).$$

Выражая размерность этого слагаемого уравнения энергии через размерности входящих в него членов, получаем:  $\frac{\sigma_0 T^4}{L}$ . Деля эту размерность на размерность конвективного члена получаем следующий безразмерный комплекс:

$$\frac{\sigma_0 T^4}{L} \frac{L}{\rho c V T} = \frac{\sigma_0 T^3}{\rho c V},$$

Обратная величина этого комплекса носит название числа Больцмана:

$$Bo = \frac{\rho c V}{\sigma_0 T^3}. \tag{2.16.8}$$

Число Больцмана характеризует радиационно-конвективный теплообмен.

При решении задач конвективного теплообмена в качестве граничного условия III рода используется закон Ньютона-Рихмана, выражающий интенсивность теплового потока на стенке через разность температур стенки  $T_w$  и омывающей ее жидкости  $T_f$ :

$$q = \alpha (T_w - T_f),$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи на стенке. С другой стороны, так как вблизи стенки имеется слой медленно движущейся жидкости, тепловой поток на стенке подчиняется закону теплопроводности Фурье (2.8.3):

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n},$$

где  $n$  – направление нормали к стенке. После приравнивания правых частей двух последних выражений, записи их размерностей через соответствующие характерные величины и деления их на размерность правой части получаем:

$$\underbrace{\alpha(T_w - T_f)}_{\frac{\alpha L}{\lambda}} = - \underbrace{\frac{\lambda}{L} \frac{\partial T}{\partial n}}_{\frac{\lambda \Gamma}{L}}.$$

Появившийся новый безразмерный критерий – число Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} \tag{2.16.9}$$

характеризует отношение между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем жидкости.

Если движения жидкости нет, то для твердого тела уравнение энергии сводится к уравнению нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T.$$

которое приводит к появлению критерия нестационарности процесса – критерия Фурье:

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{L^2}. \tag{2.16.10}$$

Этот критерий характеризует соотношение между скоростью изменения тепловых условий окружающей среды и скоростью изменения поля температуры тела. В этом случае сравнение законов Ньютона-Рихмана и Фурье приводит к аналогу числа Нуссельта – числу Био, в котором коэффициент теплопроводности  $\lambda$  уже относится не к жидкости, а к твердому телу – материалу стенки, омываемому жидкостью:

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda_w}. \quad (2.16.11)$$

Уравнение диффузии многокомпонентной смеси (2.13.10) с учетом закона Фика (2.13.12) после записи размерностей слагаемых через характерные масштабы физических величин и последующего их деления на размерность конвективного члена дает следующие безразмерные комплексы:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho C^\alpha}{\partial t}}_{\frac{RC}{\frac{\tau}{L}}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho C^\alpha \vec{v})}_{\frac{RCV}{L}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} C^\alpha)}_{\frac{RDC}{\frac{L^2}{D}}}, \quad (2.16.12)$$

где  $C$  – масштаб массовой концентрации,  $D_0$  – характерный коэффициент диффузии.

Безразмерный комплекс в левой части представляет собой  $1/Sh$ , а в правой части появился диффузионный аналог числа Пекле (2.16.5), который можно записать в виде:

$$\frac{D}{VL} = \frac{v}{VL} \frac{D}{v} = \frac{1}{Re} \frac{1}{Sc}.$$

В этом выражении фигурирует диффузионный аналог числа Прандтля – число Шмидта:

$$Sc = \frac{v}{D}, \quad (2.16.13)$$

которое характеризует отношение между силами вязкости и диффузии в процессе массообмена.

При решении задач массообмена для стенки, омываемой многокомпонентной смесью, можно сопоставить аналог закона Ньютона-Рихмана (2.13.17) с одной стороны, и закон Фика (2.13.12) – с другой. После записи размерностей через соответствующие характерные величины и последующего деления на размерность правой части, получаем:

$$\underbrace{\beta \rho (C_w^\alpha - C_f^\alpha)}_{\frac{\beta \rho C}{\frac{\beta}{D}}} = - \underbrace{\rho D \frac{dC^\alpha}{dn}}_{\frac{\rho DC}{\frac{L}{1}}},$$

что приводит к появлению диффузионного аналога числа Нуссельта  $Nu$  – числа Шервуда  $Nu_D$  (2.13.18):

$$Nu_D = \frac{\beta L}{D},$$

которое характеризует интенсивность массообмена на стенке.

Из комбинации критериев подобия в различных областях техники строят свои критерии подобия. Так, отношение  $Re^2/Fr^2$  дает критерий Галилея

$$Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}, \quad (2.16.14)$$

который характеризует отношение сил вязкости к силам тяжести.

Произведение  $Gr \cdot Pr$  называют числом Рэлея:

$$Ra = \frac{gL^3 \beta \Delta T}{\nu \alpha}. \quad (2.16.15)$$

Отношение  $Nu/Pe$  приводит к числу Стентона:

$$St = \frac{\alpha}{c \rho V}, \quad (2.16.16)$$

которое является безразмерной формой коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  и характеризует интенсивность диссипации энергии в потоке жидкости, и т. д.

Все рассмотренные выше критерии подобия гидродинамики и тепло-массообмена приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Критерии подобия

Критерий	Обозначение	Наименование	Основной физический смысл
$\frac{VL}{\nu}$	Re	Критерий Рейнольдса	Отношение конвективных сил инерции и сил молекулярного трения, характеризует режим течения
$\frac{V}{\sqrt{gL}}$	Fr	Критерий Фруда	Отношение конвективных сил инерции к силе тяжести в однородном потоке, характеризует подобие процессов волнообразования на свободной поверхности
$\frac{P}{\rho V^2}$	Eu	Критерий Эйлера	Мера отношения сил давления и инерции в потоке
$\frac{PL^2}{\mu VL} = Eu \cdot Re$	La	Критерий Лагранжа	Характеризует подобие безразмерных полей давления и скорости
$\frac{V\tau}{L}$	Sh	Критерий Струхала	Отношение сил инерции (обусловленных нестационарностью явления) к конвективным силам инерции, характеризует подобие нестационарных процессов
$\frac{gL^3 \beta \Delta T}{\nu^2}$	Gr	Критерий Грасгофа	Характеризует взаимодействие молекулярного трения и подъемной силы, обусловленной различием плотностей в различных точках неизотермического потока
$\frac{V^2}{c_p \Delta T}$	Ec	Критерий Эккерта	Отношение кинетической энергии потока к энтальпии
$\frac{\mu V}{\sigma}$	Cr	Число капиллярности	Соотношение между вязким трением и поверхностным натяжением
$\frac{\rho L V^2}{\sigma} = Cr \cdot Re$	We	Критерий Вебера	Отношение конвективных сил инерции к силам поверхностного натяжения
$\frac{gL(\rho_T - \rho)}{\rho_T V^2}$	Ri	Критерий Ричардсона	Отношение потенциальной энергии тела, погруженного в жидкость к его кинетической энергии

$\frac{V}{a_c}$	Ma	Критерий Маха	Мера отношения между скоростью среды и скоростью распространения в ней упругих колебаний (для газа – средней скорости теплового движения молекул)
$\frac{\nu}{a}$	Pr	Критерий Прандтля	Подобие гидродинамических и тепловых полей (при $Pr=1$ и $\bar{\nabla}p=0$ поля температур и скоростей точно подобны друг другу)
$\frac{\rho c V L}{\lambda} = Re \cdot Pr$	Pe	Критерий Пекле	Соотношение между конвективным и диффузионным переносом тепла в потоке жидкости
$\frac{\rho c V}{\sigma_0 T^3}$	Bo	Критерий Больцмана	Характеризует радиационно-конвективный теплообмен
$\frac{gL^3 \beta \Delta T}{\nu a} = Gr \cdot Pr$	Ra	Критерий Рэлея	Характеризует свободную конвекцию
$\frac{\alpha L}{\lambda}$	Nu	Критерий Нуссельта	Соотношение между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое
$\frac{Ma}{Re} \sqrt{\frac{\gamma \pi}{2}}$	Kn	Число Кнудсена	Характеризует степень разреженности газового потока
$\frac{\alpha}{c \rho V} = \frac{Nu}{Pe}$	St	Критерий Стентона	Характеризует интенсивность диссипации тепловой энергии в потоке жидкости
$\frac{\alpha \tau}{L^2}$	Fo	Критерий Фурье	Связь между скоростью изменения поля температуры, физическими характеристиками среды и размерами тела
$\frac{\alpha L}{\lambda_w}$	Bi	Критерий Био	Связь между полем температуры твердого тела и условиями теплоотдачи его поверхности
$\frac{\nu}{D}$	Sc	Критерий Шмидта (диффузионный критерий Прандтля)	Характеризует отношение между силами вязкости и диффузии в процессе массообмена

$\frac{\beta L}{D}$	Nud	Критерий Шервуда (диффузионный критерий Нуссельта)	Характеризует интенсивность массоотдачи
$\frac{VL}{D}$	Ред	Диффузионный критерий Пекле	Отношение распределений концентраций за счет конвекции в потоке к распределению концентраций за счет молекулярной диффузии
$d \sqrt[3]{\frac{4g}{3\nu^2} \left( \frac{\gamma_p}{\gamma_f} - 1 \right)}$	Fe	Критерий Федорова	Характеризует движение взвешенных частиц в потоке жидкости или газа

В таблице 2.2 приняты следующие обозначения:  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\mu$  – молекулярная вязкость,  $\rho_T$  – плотность тела,  $a_c$  – скорость звука,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $\beta$  – коэффициент массообмена,  $c$  – теплоемкость,  $\Delta T$  – разность температур в жидкости,  $C$  – массовая концентрация,  $\gamma = c_p / c_v$  – показатель адиабаты,  $D$  – коэффициент диффузии,  $d$  – диаметр частиц,  $\gamma_p$  – удельный вес частиц,  $\gamma_f$  – удельный вес жидкости,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана.



## ГЛАВА 3 . ПОНЯТИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

### 3.1. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. ОСРЕДНЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Течения жидкости разделяют на два вида: ламинарные (от слова *laminar*, т. е. слоистый) и турбулентные (от слова *turbulent* – хаотичный). Оба эти вида можно визуализировать по примеру О. Рейнольдса, введя в поток подкрашенную струйку жидкости. При увеличении скорости потока в прозрачной трубе (например, меняя степень открытия клапана) можно увидеть, как изначально прямая струйка подкрашенной жидкости начинает испытывать колебания, а при дальнейшем увеличении скорости разрушается и окрашивает поток по всему диаметру трубы. Это означает, что на движение жидкости в продольном направлении накладывается ее движение в поперечном направлении – хаотическое перемешивание. Хаотичность, неупорядоченность – это первое, что привлекает внимание при наблюдении за турбулентными течениями.

Различие между ламинарным и турбулентным режимами течения можно увидеть и проанализировать, если измерять скорость движения жидкости в некоторой точке потока (например, с помощью термоанемометра). При малых скоростях установившегося (стационарного) потока изменение продольной скорости  $V$  во времени будет представлять собою прямую линию (Рис. 3.1а). С увеличением скорости потока величина мгновенной скорости в данной точке будет колебаться относительно своего среднего значения  $\bar{V}$  (Рис. 3.1б). Таким образом, в ламинарном режиме течения скорость в данной точке от времени не зависит, а в турбулентном она пульсирует с течением времени.



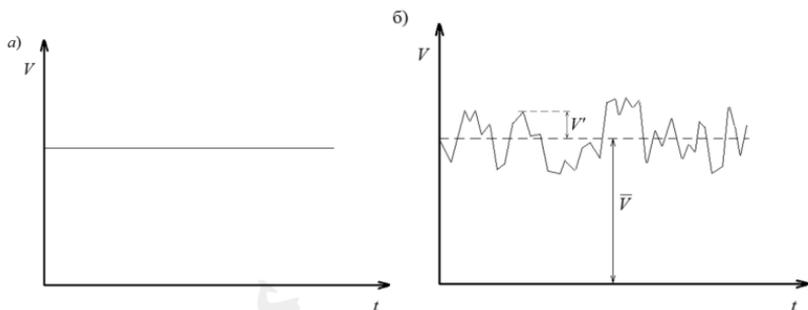


Рис. 3.1. Запись величины скорости во времени:

а) ламинарный режим, б) турбулентный режим

В каждый момент времени мгновенная скорость  $V$  может быть представлена в виде суммы осредненной (по времени)  $\bar{V}$  и пульсационной  $V'$  скоростей:

$$V = \bar{V} + V'.$$

Величина осредненной скорости в данной точке потока определяется выражением:

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V dt,$$

где  $T$  – достаточно большой промежуток времени. Очевидно, что осреднение пульсационной величины дает ноль:  $\bar{V}' = 0$ . Это означает, что сумма всех отклонений от среднего значения равна нулю. Однако, если осреднить квадрат пульсационной составляющей, то эта величина уже не будет равна нулю:  $\overline{V'^2} \neq 0$ . Величина  $\overline{V'^2}$  характеризует величину пульсаций, их интенсивность.

Безразмерная величина  $\varepsilon = \frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\bar{V}}$ , измеряемая в процентах, называется степенью турбулентности. Например, для ветра вблизи поверхности земли  $\varepsilon \approx 5..7\%$ , в камерах сгорания газотурбинных установок эта величина может достигать 80% для лучшего перемешивания горючего и окислителя.

Заметим, что в потоке на пульсации продольной скорости всегда накладываются пульсации в поперечном и трансверсальном направлениях.

Появление пульсационной скорости приводит к усилению обмена количеством движения между соседними слоями жидкости. При этом вязкость жидкости как бы возрастает, потому ее характеризуют не обычной молекулярной вязкостью  $\mu$ , а турбулентной, молярной вязкостью  $\mu_t$ ,  $\mu_t \gg \mu$ . Такую жидкость иногда называют жидкостью Рейнольдса. Величина  $\mu_t$  не является постоянной для всего потока, а зависит от характеристик движения – скоростей, их производных, и других, что осложняет задачу формулирования закона вязкостного турбулентного трения. Эта задача до конца пока не решена.

Турбулентное движение можно рассматривать и как вихревое, содержащее вихри различных масштабов – от соответствующих характерному размеру области течения  $L$  до самых мелких, сопоставимых с длиной свободного пробега молекул. Этот наименьший масштаб  $l_\varepsilon$  – диссипативный или колмогоровский масштаб – может быть оценен следующей зависимостью [15; 40; 70]:


$$l_\varepsilon = \frac{L}{\text{Re}^{3/4}}.$$

Энергия от вихрей больших масштабов передается вихрям меньших масштабов, последовательно проходя по всему спектру этих масштабов – этот процесс называется энергетическим каскадом, или каскадом Ричардсона.

Турбулентные вихри постоянно и непрерывно взаимодействуют между собой, более крупные вихри содержат в себе более мелкие. В конечном итоге, самые мелкие вихри рассеивают энергию в тепло. Интенсивность и масштаб мелкомасштабного течения саморегулируются таким образом, чтобы диссипировать всю энергию, передаваемую от крупных масштабов, и чем меньше вязкость, тем меньше масштаб движений, который может существовать.

В настоящее время общепринятым является понимание турбулентности как иерархии вихрей разных размеров, когда присутствуют пульсации скоро-

сти потока от самых больших до самых маленьких значений. Крупномасштабная турбулентность определяется формой обтекаемого тела (размером трубы, конфигурацией сопла, и т. д.), режимом течения, состоянием внешней среды. Силы вязкости в формировании потока здесь практически не играют роли, и их можно не учитывать. Мелкомасштабная турбулентность ответственна за диссипацию энергии, здесь силы вязкости играют первостепенную роль. Существует и некоторый промежуточный режим турбулентности – инерционный, возникающий на масштабах, малых по сравнению с характерным размером течения в целом, но больших, чем микромасштаб, на котором уже существенны вязкостные взаимодействия. Таким образом, на этом интервале вязкость среды также можно не учитывать.

Ввиду хаотического характера изменений параметров потока во времени и пространстве возможно лишь статистическое описание турбулентности. Для многих приложений достаточно знания лишь первых и вторых одноточечных и двухточечных моментов случайных полей (скоростей, температуры, и др.). Одноточечные моменты – это средние значения полей или их среднеквадратичные значения, двухточечные моменты – это корреляционные или структурные функции, т. е. средние произведения значений полевой величины в двух точках пространства (времени) или средние произведения разностей этих значений. Описание турбулентных потоков часто затруднено неоднородностью в пространстве и нестационарностью во времени их средних характеристик. Однако достаточно мелкомасштабная структура турбулентных потоков обладает рядом универсальных закономерностей, установленных в 1941 году А.Н. Колмогоровым и А.М. Обуховым [24; 25; 40]. Если средняя скорость  $V$  существенно меняется на масштабе  $L$ , то для масштабов  $r \ll L$  согласно первой гипотезе подобия Колмогорова, статистические характеристики разностей полей в двух точках, разделенных расстоянием  $r$ , будут однородны и изотропны, а структура потока определяется только кинематической вязкостью  $\nu$  и скоростью диссипации кинетической энергии на единицу массы  $\varepsilon$  (величину  $\varepsilon$

можно оценить как  $V^3/L$ ). Основная диссипация турбулентной энергии происходит на масштабе  $l_\varepsilon \sim \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ . Для инерционного интервала масштабов  $l_\varepsilon \ll r \ll L$ , в котором вязкость еще не действует, а инерционные силы дробят случайные вихри, структура потока определяется лишь значением  $\varepsilon$  (вторая гипотеза подобия Колмогорова).

Таким образом, турбулентность представляет собой сложное физическое явление, которое заключается в том, что поля физических величин приобретают случайный характер, и эти величины совершают беспорядочные изменения по времени и пространству. Вследствие такой неупорядоченности не представляется возможным описать поведение рассматриваемой величины (например, скорости, давления и др.) во всех деталях как функцию времени и координат. Однако турбулентность – не полный хаос. Наблюдения показывают, что одновременно с хаотичностью имеет место некоторая регулярность повторения картины течения во времени и пространстве. Это свидетельствует о том, что теоретическое описание турбулентных потоков возможно. При рассмотрении турбулентности могут быть выделены статистически точные осредненные значения рассматриваемых величин и их корреляций (осредненных по времени и пространству). Это позволяет изучать физические закономерности, характеризующие ее.

По своей природе турбулентное движение нестационарно – в каждой точке турбулентного потока скорость, температура и другие характеристики непрерывно меняются во времени. Эти изменения носят характер пульсаций, т. е. нерегулярных колебаний относительно некоторых средних по времени значений. По предложению О. Рейнольдса любая величина в турбулентном потоке может быть представлена в виде суммы осредненной по времени величины (обозначаемой длинной чертой сверху) и пульсационной (обозначаемой штрихом) Так, для произвольной величины  $\varphi$  такое представление имеет вид:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \quad (3.1.1)$$

где  $\varphi$  – мгновенное значение величины,  $\varphi'$  – пульсация величины  $\varphi$ ,  $\bar{\varphi}$  – ее статистическое среднее, осредненное по времени значение этой величины, которое определяется по Рейнольдсу следующим образом:

$$\bar{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi dt, \quad (3.1.2)$$

где  $t_0$  – начальный момент времени,  $T$  – интервал осреднения. На приведенном выше Рис. 3.1б показано такое разделение мгновенного значения скорости на среднюю и пульсационную:  $V = \bar{V} + V'$ .

Представление (3.1.2) можно использовать только в том случае, если среднее не зависит от момента времени  $t_0$ , в котором начат процесс осреднения. Это положение верно, например, для установившегося движения жидкости в трубе, но неверно, скажем, для затухающего движения в закрытом контейнере. В последнем случае следует использовать среднее по ансамблю:

$$\bar{\varphi}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_n(t),$$

здесь суммирование ведется по набору измерений, сделанных в момент  $t$  после начала одного из  $N$  экспериментов (Рис. 3.2). Для стационарного процесса средние по времени и по ансамблю идентичны.

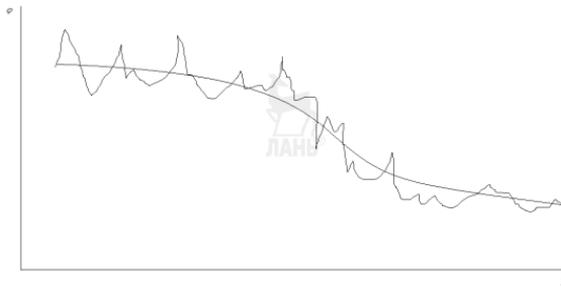


Рис. 3.2. Флуктуации по времени и величина, усредненная по времени, для статистически нестационарного процесса

Следуя О. Рейнольдсу можно ввести следующие правила осреднения:

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi}, \quad \overline{\varphi'} = 0, \quad \overline{\varphi} = \overline{\overline{\varphi} + \varphi'} = \overline{\overline{\varphi}}.$$

Эти соотношения легко проверяются прямой подстановкой.

Если теперь рассматривать три физические величины  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которые могут быть представлены в виде суммы осредненных и пульсационных составляющих, то можно получить следующие соотношения:

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{A'B'} = \overline{A'B'} = 0, \quad \overline{AB} = \overline{A(\overline{B} + B')} = \overline{AB},$$

$$\overline{AB} = \overline{(A + A')(\overline{B} + B')} = \overline{AB} + \overline{A'B'},$$

где  $\overline{A'B'} \neq 0$  – корреляция величин  $A$  и  $B$ .

Кроме того:

$$\begin{aligned} \overline{ABC} &= \overline{(A + A')(\overline{B} + B')(\overline{C} + C')} = \\ &= \overline{ABC} + \overline{AB'C'} + \overline{BA'C'} + \overline{CA'B'} + \overline{A'B'C'}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial S} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial S}, \quad \int \overline{AdS} = \int \overline{AdS}.$$

Эти соотношения справедливы как для скалярных, так и для векторных и тензорных величин.

При записи соотношений и уравнений для турбулентного режима течения черта осреднения для собственно осредненных величин обычно отбрасывается, а для пульсационных сохраняется. Тогда предыдущее выражение для произведения двух функций записывается так:

$$\overline{AB} = AB + \overline{A'B'}.$$

Смысл введения разложения мгновенной величины на осредненную и пульсационную составляющие с последующим использованием правил осреднения состоит в том, что после этого отпадают трудности, связанные со сложностью и нерегулярностью турбулентных гидродинамических полей, и их теперь можно охарактеризовать плавно меняющимися осредненными величинами (например  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ , и их корреляциями  $\overline{A'B'}, \overline{A'B'C'}$  и т. д.).

Тем самым, при изучении турбулентных течений жидкостей подробностями поведения рассматриваемых величин можно не интересоваться, и рассматривать лишь сравнительно простые статистически средние величины. В настоящее время статистические характеристики потока сравнительно легко поддаются измерениям с помощью мощного арсенала экспериментальных средств.

Простейшими статистическими характеристиками турбулентных потоков являются компоненты осредненной скорости  $\bar{V}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ , средние квадраты и средние произведения второго порядка компонент пульсаций скорости в фиксированной точке  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{v'w'}$  (вторые корреляционные моменты). Эти моменты, умноженные на плотность  $\rho$ , представляют собой компоненты тензора напряжений Рейнольдса. В настоящее время измеряют и более сложные многоточечные корреляции, а также пространственно-временные корреляции. Однако в большинстве случаев при исследовании структуры турбулентных потоков ограничиваются измерением поля осредненных скоростей и односточечными корреляциями второго порядка.

Рассмотрим уравнения установившегося движения несжимаемой жидкости, причем для простоты массовыми силами пренебрежем. Тогда уравнение движения сплошной среды в напряжениях с учетом уравнения неразрывности можно представить в виде:

$$\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V} \otimes \bar{V}) = -\bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot \underline{\tau}, \quad (3.1.3)$$

где  $\underline{\tau}$  – тензор вязких напряжений,  $\underline{\tau} = 2\mu \underline{S}$ .

В этом уравнении под знаком дивергенции стоит тензор потока импульса  $\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V} \otimes \bar{V})$ . Подстановка разложения мгновенных величин на осредненные и пульсационные составляющие в (3.1.3) и последующее осреднение по правилам Рейнольдса приводят к следующему уравнению:

$$\bar{\nabla} \cdot \left( \rho \left( \bar{V} \otimes \bar{V} + \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right) \right) = -\bar{\nabla} \bar{p} + \bar{\nabla} \cdot \underline{\tau},$$

или в несколько ином виде:

$$\rho(\bar{\vec{V}} \cdot \bar{\nabla})\bar{\vec{V}} = -\bar{\nabla}\bar{p} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\underline{\tau}} - \rho\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}). \quad (3.1.4)$$

Уравнение (3.1.4) есть уравнение Рейнольдса. В компонентной форме в декартовой системе координат это уравнение может быть представлено в виде:

$$\rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij} - \rho \overline{V_i' V_j'}]. \quad (3.1.5)$$

Здесь, как уже отмечалось, черта осреднения сохранена лишь для записи корреляций пульсационных величин.

Член  $-\rho\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}$  с компонентами  $-\rho\overline{V_i' V_j'}$ , имеющий размерность напряжения, называется тензором напряжений Рейнольдса. Этот тензор является симметричным, что видно из его структуры. Обозначим его  $\underline{R} = -\rho\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}$ , в компонентной форме:

$$\underline{R} = R_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = -\rho\overline{V_i' V_j'} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j. \quad (3.1.6)$$

Компоненты  $R_{ij}$  образуют симметричную матрицу:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} -\rho\overline{V_1'^2} & -\rho\overline{V_1' V_2'^2} & -\rho\overline{V_1' V_3'^2} \\ -\rho\overline{V_2'^2 V_1'^2} & -\rho\overline{V_2'^2} & -\rho\overline{V_2' V_3'^2} \\ -\rho\overline{V_3'^2 V_1'^2} & -\rho\overline{V_3'^2 V_2'^2} & -\rho\overline{V_3'^2} \end{pmatrix}.$$

## 3.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Согласно подходу О. Рейнольдса, все величины в уравнениях переноса (2.4.8) следует представить в виде сумм осредненных и пульсационных составляющих, после чего эти уравнения осредняются на конечном интервале времени.

Для сжимаемой жидкости уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \bar{\nabla} \cdot [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{\vec{V}} + \vec{V}')] = 0$$

после применения правил осреднения, запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} + \overline{\rho \vec{V}'}) = 0.$$

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности приобретает простой вид  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , откуда, после разбиения мгновенной скорости на осредненную и пульсационную составляющие с последующим осреднением, имеем:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} + \vec{V}') = 0,$$

А это означает, что для осредненной и пульсационной скоростей  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  и  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}'$  или, в компонентном виде:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial V'_j}{\partial x_j} = 0.$$

Еще раз подчеркнем, что здесь величина  $V_j$  трактуется как осредненная скорость.

Выполним эту же операцию осреднения для уравнений Навье-Стокса в форме (2.4.4) предполагая, что жидкость несжимаемая:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f}.$$

Рассмотрим последовательно каждый из членов этого уравнения:

$$\begin{aligned} \overline{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}} &= \overline{\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}_k + V'_k) + (\vec{V}_j + V'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{V}_k + V'_k) \right]} = \\ &= \overline{\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial t} + \frac{\partial V'_k}{\partial t} + (\vec{V}_j + V'_j) \left( \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} \right) \right]} = \\ &= \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial t} + \vec{V}_j \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial x_j} + V'_j \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} \right] = \rho \vec{V}_x + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \overline{\rho (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}'}, \\ &\quad -\vec{\nabla} p = -\vec{\nabla} \overline{p}, \quad \overline{\mu \Delta \vec{V}} = \mu \Delta \vec{V}, \quad \overline{\rho \vec{f}} = \rho \vec{f}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем следующее уравнение, называемое уравнением Рейнольдса (отбрасывая для простоты записи длинную черту сверху для осредненных величин):

$$\rho \left[ \vec{V}_i + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) \right] = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \left[ \mu \vec{\nabla} \vec{V} - \rho \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} \right], \quad (3.2.1)$$

или, в компонентном виде

$$\rho \left[ \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \rho \overline{V'_k V'_j} \right], \quad (3.2.2)$$

где последний член  $\frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{V'_j V'_k})$  представляет собой дивергенцию некоторых добавочных, турбулентных напряжений  $\underline{\tau}^T$  в жидкости, порожденных осредненными корреляциями скоростей. Обозначим суммарные напряжения как  $\tau_{jk}^\Sigma$ , тогда:



$$\tau_{jk}^\Sigma = \tau_{jk} + \tau_{jk}^T,$$

где  $\tau_{jk} = \mu \left( \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_k} \right)$  – ньютоновские молекулярные напряжения;

$\tau_{jk}^T = -\rho \overline{V'_j V'_k} = -\rho \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}$  – турбулентные напряжения, которые называют также напряжениями Рейнольдса и которые можно обозначить как тензор  $\underline{R}$ . Напряжения Рейнольдса выражают собой реакцию течения на конвективный перенос количества движения через площадки в жидкости вследствие пульсаций скорости. Их можно называть «кажущимися» напряжениями, так же как и вязкие напряжения можно трактовать как кажущийся результат движения молекул с точки зрения наблюдателя, который не может различать молекулы.

Полный тензор напряжений в жидкости в случае турбулентного движения несжимаемой жидкости записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= -\bar{p} \underline{E} + 2\mu \underline{S} + \underline{R}, \\ \tau_{ij} &= -\bar{p} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} + R_{ij}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

где  $\underline{S}$  – тензор осредненных скоростей деформаций,  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \right)$ .

В декартовой системе координат, используя матричную форму записи, имеем:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \overline{V_1'^2} & \overline{V_2'V_1'} & \overline{V_3'V_1'} \\ \overline{V_1'V_2'} & \overline{V_2'^2} & \overline{V_3'V_2'} \\ \overline{V_1'V_3'} & \overline{V_2'V_3'} & \overline{V_3'^2} \end{pmatrix}.$$

Несмотря на имеющийся в выражении минус, напряжения  $R_{ij}$  являются положительными при  $i \neq j$ , и их знаки совпадают со знаками  $\tau_{ij}$ . Можно видеть, что уравнение (3.2.1) отличается от исходного (2.4.4) двумя вещами: все величины в нем понимаются как осредненные на конечном интервале времени, а величины напряжений понимаются в смысле выражений (3.2.3). Последний факт позволяет рассматривать уравнения (2.4.12) и (3.2.1) как уравнения движения различных видов жидкостей – ньютоновской и рейнгольдсовой соответственно. Реология этих жидкостей задается уравнением (2.4.2) для системы (2.4.12) и выражением (3.2.3) для уравнения (3.2.1).

Появление в правой части уравнения (3.2.1) симметричного тензора турбулентных напряжений приводит к тому, что система уравнений движения жидкости становится незамкнутой – в ней появляется шесть новых неизвестных – компонент тензора турбулентных напряжений. Следовательно, данную систему необходимо дополнить новыми соотношениями, связывающими турбулентные напряжения с параметрами осредненного потока. Такие соотношения называются моделями турбулентности. В этом смысле модели турбулентности являются реологическими соотношениями, так как связывают напряжения в жидкости с деформационными характеристиками течения.

В случае сжимаемой стоксовой ньютоновской жидкости уравнение (2.4.8) осредняется следующим образом:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} \left( p + \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) + \vec{\nabla} \cdot (2\mu \underline{S}) + \rho \vec{f}$$

Рассмотрим последовательно каждый из членов этого уравнения:

$$\begin{aligned} \overline{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}} &= \overline{(\bar{\rho} + \rho') \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V} + \vec{V}') + \left( (\vec{V} + \vec{V}') \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{V} + \vec{V}') \right]} = \\ &= \bar{\rho} \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \overline{(\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}'} \right] + \\ &\quad + \overline{\rho' \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t}} + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}'} + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}} + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}'}; \\ -\vec{\nabla} \left[ \bar{p} + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] &= -\vec{\nabla} \left[ \bar{p} + p' + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} + \vec{V}')) \right] = \\ &= -\vec{\nabla} \left[ \bar{p} + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right]; \\ \vec{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{S}}) &= \vec{\nabla} \cdot \left( \mu (\nabla (\vec{V} + \vec{V}') + \nabla (\vec{V}'^T + \vec{V}^T)) \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( \mu (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}'^T) \right), \\ \overline{\rho \vec{f}} &= \bar{\rho} \vec{f}. \end{aligned}$$

Отсюда уравнение турбулентного движения сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] &= -\vec{\nabla} \left[ \bar{p} + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left( \mu (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}'^T) \right) + \bar{\rho} \vec{f} - \\ &\quad - \left[ \overline{\rho (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}'} + \overline{\rho' \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t}} + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}'} + \right. \\ &\quad \left. + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}} + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}'} \right] \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

В компонентной форме:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left[ \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_j} \right] &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \bar{p} + \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{V}_k \right) \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_k} \right) + \bar{\rho} f_k - \\ &\quad - \left[ \overline{\rho V'_j \frac{\partial V'_k}{\partial x_j}} + \overline{\rho' \frac{\partial V'_k}{\partial t}} + \overline{\rho V'_j \frac{\partial V'_k}{\partial x_j}} + \overline{\rho V'_j \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_j}} + \overline{\rho' V'_j \frac{\partial V'_k}{\partial x_j}} \right] \end{aligned}$$

Таким образом, для сжимаемой среды появляется дивергенция турбулентных напряжений, которая записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \tau_{jk}^T}{\partial x_j} = - \left[ \overline{\rho V_j' \frac{\partial V_k'}{\partial x_j}} + \overline{\rho' \frac{\partial V_k'}{\partial t}} + \overline{\rho V_j' \frac{\partial V_k'}{\partial x_j}} + \overline{\rho V_j' \frac{\partial V_k}{\partial x_j}} + \overline{\rho V_j' \frac{\partial V_k'}{\partial x_j}} \right],$$

или, принимая во внимание уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \tau_{jk}^T}{\partial x_j} = - \left[ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho V_k'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\rho V_j' V_k'} + \overline{\rho V_k' V_j} + \overline{\rho V_j' V_k} + \overline{\rho V_j' V_k'} \right) \right].$$

Очевидно, что влияние турбулентности определяется следующими корреляциями:  $\overline{\rho V'}$ ,  $\overline{V' \otimes V'}$  и  $\overline{\rho V' \otimes V'}$ .

Уравнение (3.2.4) можно записать в следующем виде, сохраняя длинную черту сверху только для пульсационных величин:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\bar{\nabla} \left[ p + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left( \mu (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) \right) + \rho \vec{f} - \left[ \begin{array}{l} \overline{\rho (\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}'} + \overline{\rho' \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t}} + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}'} + \\ + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}} + \overline{\rho' (\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}'} \end{array} \right] \quad (3.2.5)$$

### 3.3. ГИПОТЕЗА БУССИНЕСКА

В турбулентном режиме течения несжимаемой жидкости помимо вязких напряжений  $\underline{\tau}$ , определяемых формулой (2.12.3), присутствуют также дополнительные турбулентные напряжения, которые характеризуются тензором напряжений  $\underline{R} = -\overline{\rho \vec{V}' \otimes \vec{V}'}$ , где штрихи обозначают пульсационные составляющие скоростей, длинная черта сверху – символ осреднения по Рейнольдсу. Этот тензор должен быть конкретизирован путем нахождения связи его с кинематическими характеристиками течения. Один из вариантов такой связи был предложен Ж. Буссинеском [82] по аналогии с реологическим соотношением Ньютона для линейно-вязкой жидкости. Согласно модели Буссинеска для несжимаемой жидкости:

$$\underline{R} = 2\mu_t \underline{S} - \frac{2}{3} \rho k \underline{E}, \quad (3.3.1)$$

где  $k = \frac{1}{2} \overline{\vec{V}' \cdot \vec{V}'} = \frac{1}{2} \overline{V_i' V_i'}$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций;  $\mu_t$  – турбулентная вязкость (Ж. Буссинеск называл ее коэффициентом турбулентного обмена), которая зависит от характеристик поля скоростей;  $\underline{S}$  – тензор (осредненный) скоростей деформаций,  $\underline{S} = \frac{1}{2} (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}} + \overline{\vec{\nabla} \vec{V}^T})$ , где скорости понимаются осредненными по Рейнольдсу. Операция взятия следа выражения (3.3.1) приводит к соотношению  $-2\rho k = 2\mu_t \overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}} - 2\rho k$ , которое является тождеством, так как в несжимаемой жидкости  $\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}} = 0$ .

В современных пакетах прикладных программ (ANSYS FLUENT®, NUMECA® и др.) тензор напряжений Рейнольдса записывают в более общем виде, справедливом как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости:

$$-\rho \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} = 2\mu_t \underline{S} - \frac{2}{3} \rho k \underline{E} - \frac{2}{3} \mu_t (\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}) \underline{E} \quad (3.3.2)$$

След этого тензорного выражения является нулевым, что показывает справедливость представления (3.3.2):

$$-2\rho k = -2\rho k - 2\mu_t \overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}} + 2\mu_t \overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}.$$

Полный тензор напряжений  $\underline{\sigma}$  в случае турбулентного режима течения включает в себя член с давлением  $p$ , вязкостное слагаемое и турбулентные напряжения Рейнольдса, т. е. этот тензор, в отличие от представления (2.12.1), имеет структуру:

$$\underline{\sigma} = -p \underline{E} + \underline{\tau} + \underline{R}. \quad (3.3.3)$$

С учетом соотношений (2.12.13) и (3.3.2) реологическим соотношениям для этого тензора будет в случае стоксовой жидкости, когда  $\zeta=0$ :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{E} - \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) (\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}) \underline{E} - \frac{2}{3} \rho k \underline{E} + 2(\mu + \mu_t) \underline{S}. \quad (3.3.4)$$

Если ввести понятие эффективной вязкости

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t, \quad (3.3.5)$$

то выражение (3.3.4) можно записать в виде:

$$\underline{\sigma} = \mu_{eff} (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) - p' \underline{E} \quad (3.3.6)$$

где:

$$p' = p + \frac{2}{3} \mu_{eff} (\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{2}{3} \rho k \quad (3.3.7)$$

Операция взятия следа от правой и левой частей (3.3.6) дает по аналогии с выражением (2.12.6):

$$\theta + 2\rho k = -3p - 2\mu_{eff} \nabla \cdot \vec{V} + 2\rho k + 2\mu_{eff} \nabla \cdot \vec{V},$$

где учтено, что  $\underline{\sigma}$  содержит реинльдсовы напряжения, для которых  $tr \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} = \overline{\vec{V}'^2} = \overline{V'_i V'_i} = 2k$ . Отсюда следует, что  $\theta = -3p$ , что и следовало ожидать для стоксовой жидкости.

Уравнение движения стоксовой ньютоновской жидкости в дивергентной форме будет:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} = -\nabla \cdot [p' \underline{E} + \rho \vec{V} \otimes \vec{V} - \mu_{eff} (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T)] + \rho \vec{f}. \quad (3.3.8)$$

Если же ньютоновская жидкость не является стоксовой, то  $\lambda = -\frac{2}{3} \mu + \zeta$  и выражение  $\underline{\sigma}$  сохраняет вид (3.3.6), но величина  $p'$  будет другой:

$$p' = p + \left( \frac{2}{3} \mu_{eff} - \zeta \right) (\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{2}{3} \rho k. \quad (3.3.9)$$

Уравнение движения такой жидкости с объемной вязкостью  $\zeta$  сохраняет вид (3.3.8), однако величина  $p'$  определяется уже согласно соотношению (3.3.9).

Операция взятия следа от правой и левой частей тензорного выражения (3.3.6) с величиной  $p'$  согласно (3.3.9) уже дает:

$$\theta + 2\rho k = -3p - 2\mu_{eff} \nabla \cdot \vec{V} + 3\zeta \nabla \cdot \vec{V} + 2\rho k + 2\mu_{eff} \nabla \cdot \vec{V},$$

что приводит к соотношению:

$$\theta + 3p = \zeta \bar{\nabla} \cdot \bar{v},$$

откуда скорость объемного расширения

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = \frac{3p + \theta}{3\zeta}, \quad (3.3.10)$$

что совпадает с выражением (2.12.7).

Турбулентную вязкость  $\mu_t$ , а, следовательно, и величину  $\mu_{eff}$ , а также кинетическую энергию пульсаций  $k$ , конкретизируют по-разному, пользуясь различными реологическими соотношениями, называемыми моделями турбулентности.

#### 3.4. МОДЕЛЬ ПУТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ Л. ПРАНДТЛЯ. ЗАКОН СТЕНКИ

Еще О. Рейнольдс, говоря о пульсационном движении жидкости, назвал его молярным, имея в виду, что оно в некотором роде подобно молекулярному (тепловому) движению в газах. Позднее Л. Прандтль предположил, что в турбулентных течениях частицы жидкости имеют тенденцию объединяться в совместно движущиеся ансамбли, которые он назвал «молями» [168]. Моли – это не постоянно существующие в потоке объекты: они возникают и быстро распадаются, внутри молей течение завихрено и нестабильно. Проводя аналогию с кинетической теорией газов, Прандтль предположил, что за период от возникновения до распада и смешения с окружающей жидкостью моль продвигается (перпендикулярно осредненной скорости) на некоторое расстояние  $l_m$ , названное им путем перемешивания (смешения, mixing length) аналогично длине свободного пробега молекул газа. В результате дальнейшего анализа на основе теории размерности им было найдено выражение для турбулентной кинематической вязкости простого сдвигового течения (для него имеется лишь одна – продольная – компонента скорости, зависящая от одной – поперечной – координаты):



$$v_r = \frac{\mu_r}{\rho} = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right|. \quad (3.4.1)$$

В этом выражении  $\bar{V}_x$  – осредненная продольная скорость турбулентного течения, а  $y$  – перпендикулярная его направлению координата. Отметим, что в выражение (3.4.1) не входит величина молекулярной вязкости  $\mu$ , что автоматически означает, что законы перемешивания молей от нее не зависят, т. е. инерционные силы значительно превышают силы вязкостной природы. Однако опыты показывают, что турбулентные течения (хоть в меньшей мере, чем ламинарные) зависят от числа Рейнольдса, а значит от молекулярной вязкости, что противоречит данному предположению. Это обстоятельство было, однако, учтено Прандтлем, предположившим, что вблизи стенки в потоке существует тонкая прослойка жидкости, в которой течение ламинарно (вязкий подслои), т. е. по Прандтлю влияние вязкости на осредненные параметры турбулентного течения происходит исключительно через сопряжение скоростей между вязким подслоем и турбулентным ядром течения (на их общей границе).

Рассмотрим случай, когда поток движется вдоль плоской бесконечной стенки под действием постоянного касательного напряжения  $R_{12} = \tau_0 = const$ , в направлении оси  $x$ , направленной вдоль стенки,  $y$  – координата, перпендикулярная ей. Согласно формуле (3.4.1) для течения в турбулентном ядре можно записать:

$$R_{12} = -\rho \overline{V_x' V_y'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right|. \quad (3.4.2)$$

Тогда уравнение движения жидкости принимает вид:

$$l_m^2 \left| \frac{\partial V_x}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial V_x}{\partial y} \right| = \frac{\tau_0}{\rho} = Const.$$

Видно, что осредненная скорость  $V_x$  зависит только от  $y$ , причем величины  $y$  и  $l_m$  имеют размерности длины. Тогда теория размерности однозначно приводит к следующему соотношению:

$$l_m = \kappa y,$$

в котором  $\kappa$  – некоторая постоянная, определяемая экспериментально.

Из двух последних соотношений имеем дифференциальное уравнение:

$$\kappa y \frac{dV_x}{dy} = \frac{\tau_0}{\rho},$$

общим решением которого является выражение [33; 72]:

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{\kappa} [\ln(y^+) + C_1], \quad (3.4.3)$$

где  $V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  – динамическая скорость,  $y^+ = \frac{yV_*}{\nu}$  – безразмерная координата стенки,  $C_1$  – безразмерная константа.

Нетрудно заметить, что полученное решение не позволяет выполнить граничное условие прилипания  $V_x|_{y=0} = 0$ , так как при  $y \rightarrow 0$  величина осредненной скорости  $\overline{V_x} \rightarrow \infty$ . Эту проблему можно решить с помощью введения в рассмотрение гипотезы о существовании вязкого ламинарного подслоя, течение в котором описывается следующим уравнением [33]:

$$\nu \frac{dV_x}{dy} = V_*^2,$$

или, в безразмерном виде:

$$\frac{d}{dy^+} \left( \frac{V_x}{V_*} \right) = 1.$$

Решением этого уравнения при условии  $V_x|_{y=0} = 0$  является выражение:

$$\frac{V_x}{V_*} = y^+. \quad (3.4.4)$$

Сравняя (3.4.3) и (3.4.4) путем приравнивания осредненных скоростей  $V_x$  на общей границе  $y^+ = h^+ = \frac{hV_*}{\nu}$ , где  $h$  – толщина вязкого подслоя, приходим

к выражению:

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{y^+}{h} \right) + \kappa h^+ \right],$$

в которое входят две безразмерных эмпирических константы  $\kappa$  и  $h^+$ . В результате проведения многочисленных экспериментов было получено, что  $\kappa \approx 0.4$ , а  $h^+ \approx 11.5$ , откуда окончательно получаем

$$\frac{V_x}{V_*} = 2.5 \left[ \ln(y^+) + 5.5 \right]. \quad (3.4.5)$$

При выводе данного выражения использовалось грубое предположение о том, что касательное напряжение Рейнольдса постоянно по сечению турбулентного потока. Однако, несмотря на это, формула (3.4.5) широко используется как пристеночная асимптотика для любых стационарных турбулентных течений, понимая при этом под напряжением  $\tau_0$  модуль касательного напряжения на стенке  $\tau_w$ , что приводит к следующему выражению для динамической скорости:

$$V_* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}. \quad (3.4.6)$$

Пристеночной асимптотикой (3.4.5) можно смело пользоваться в тех случаях, когда выполняется приближенное равенство  $R_{12} \approx \tau_w$ , однако для различных турбулентных течений соответствующие диапазоны  $y^+$  не одинаковы. Например, для течений в трубах формулой (3.4.5) успешно пользуются даже  $y^+ \approx 10^3 \div 10^4$ , что приближенно соответствует расстоянию до стенки  $y < 0.33r_0$ . Однако для пограничных слоев с положительными градиентами давлений и для криволинейных течений возможность использования зависимости (3.4.5) гораздо уже, и пользоваться ей можно примерно до  $y^+ \approx 100 \div 150$ .

### 3.5. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ: ПРОЦЕДУРА ОСРЕДНЕНИЯ ПО ФАВРУ

Правила осреднения Рейнольдса удобны для описания турбулентных течений несжимаемой жидкости, так как при этом возникает сравнительно небольшое количество корреляционных моментов, которые требуют для себя записи соответствующих аппроксимаций, согласующихся с имеющимися экспериментальными данными. Однако в случае сжимаемых сред появляются пульсации плотности, что приводит к лавинообразному возрастанию корреляционных моментов в осредненных уравнениях. Система дифференциальных уравнений после разбиения физических величин на осредненные и пульсационные компоненты, и последующее применение правил осреднения Рейнольдса становится практически неподдающейся какому-либо анализу, а проблема замыкания уравнений многократно усложняется по сравнению со случаем движения несжимаемой жидкости.

Это можно увидеть на примере уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости, которое является простейшим в системе уравнений движения. При записи уравнения неразрывности (2.3.3) для осредненного движения, слагаемые этого уравнения надо осреднить:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \overline{\rho \vec{V}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \overline{\rho \vec{V}} = 0. \quad (3.5.1)$$

После разбиения фигурирующих здесь физических величин согласно предложению Рейнольдса на осредненные и пульсационные

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad \vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}'$$

уравнение (3.5.1) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(\bar{\rho} + \rho')} + \bar{\nabla} \cdot \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{V} + V')} = 0.$$

В результате приходим к следующей записи уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\rho} \bar{V} + \bar{\nabla} \cdot \overline{\rho' V'} = 0.$$

Видно, что в уравнении неразрывности появилась новая корреляция  $\overline{\rho' V'}$ , которая требует решения своей проблемы замыкания. В уравнении движения таких неизвестных корреляций, содержащих величины  $\rho'$ , возникает несколько (причем не только второго порядка, но и третьего), в то время как для несжимаемой жидкости существует лишь одна корреляция  $-\overline{V' \otimes V'}$ . Корреляции такого рода, содержащие  $\rho'$ , существенно осложняют задачу моделирования турбулентного движения сжимаемых сред, так как величины  $\rho'$  присутствуют также и в уравнениях энергии и диффузии.

С целью исключения появления в уравнениях турбулентного движения корреляций, содержащих  $\rho'$ , используется комбинированный метод осреднения, предложенный А. Favre [106], в соответствии с которым для плотности и давления разбиение мгновенных величин на осредненные и пульсационные выполняется по правилам Рейнольдса, а для остальных физических величин – с использованием средневзвешенных значений. Для последних мгновенные значения представляются как суммы средневзвешенных и пульсационных величин (обозначаемых волнистой чертой и двумя штрихами соответственно):

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'', \quad (3.5.2)$$

где осредненная по Фавру величина определяется как:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\overline{\rho \varphi}}{\bar{\rho}}, \quad (3.5.3)$$

длинная черта сверху обозначает осреднение по Рейнольдсу.

Средневзвешенная скорость таким образом записывается в виде:

$$\tilde{\bar{V}} = \frac{\overline{\rho \bar{V}}}{\bar{\rho}}, \quad (3.5.4)$$

т. е. она является результатом деления осредненного по Рейнольдсу произведения  $\rho \bar{V}$  на осредненное значение плотности. Тогда мгновенную скорость можно представить в следующем виде:  $\bar{V} = \tilde{\bar{V}} + \bar{V}''$ , а для ее компонент записать  $V_i = \tilde{\bar{V}}_i + V_i''$ . Аналогичным образом разбиваются на осредненные и пульсационные составляющие и другие физические величины, кроме плотности и давления, которые записываются обычным образом с осреднением по Рейнольдсу:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (3.5.5)$$

Так, например, для температуры, энтальпии и других величин в уравнении энергии имеем:

$$T = \tilde{T} + T'', \quad h = \tilde{h} + h', \quad (3.5.6)$$

$$\text{где } \tilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{h} = \frac{\overline{\rho h}}{\bar{\rho}}. \quad (3.5.7)$$

С использованием способа разбиения мгновенных величин по Фавру осреднение уравнения неразрывности согласно (3.5.1) с учетом (3.5.4) приводит к следующему виду этого уравнения для турбулентного режима течения сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\rho} \tilde{\bar{V}} = 0. \quad (3.5.8)$$

Видно, что это уравнение сохранило свой первоначальный вид, и уже не содержит никаких дополнительных слагаемых. Это связано с особенностью записи осредненных величин в соответствии с формулой (3.5.3). В результате, осреднение величины  $\rho \bar{V}$  приводит не к сумме  $\bar{\rho} \bar{V} + \overline{\rho' \bar{V}'}$ , как при осреднении по Рейнольдсу, а к величине  $\bar{\rho} \tilde{\bar{V}}$  и корреляций, содержащих пульсацию плотности, уже не появляется.

При осреднении по Фавру плотность в осредненных уравнениях будет иметь только лишь осредненную составляющую – пульсационной составляющей в них не будет. Это означает, что такая процедура осреднения внешне аналогична процедуре для несжимаемой жидкости, когда  $\rho = const$ ,  $\rho' = 0$ . Это приводит к появлению в уравнении движения, как и в случае несжимаемой жидкости, лишь одной корреляции, которая уже будет не  $\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}$ , а  $\overline{\vec{V}'' \otimes \vec{V}''}$  (иногда ее записывают как  $\overline{\vec{V}'' \otimes \vec{V}''}$  – с волнистой чертой сверху, чтобы подчеркнуть, что тут имеет место осреднение по Фавру).

При разбиении мгновенных значений величин по Фавру правила осреднения Рейнольдса продолжают действовать, например,  $\overline{\rho' \vec{V}} = 0$ ,  $\overline{\rho \vec{V}} = \overline{\rho} \vec{V}$ . При этом надо иметь в виду, что

$$\overline{\rho \vec{V}''} = 0, \quad \overline{\rho \vec{V}''} = \overline{\rho T''} = \overline{\rho h''} = 0, \quad (3.5.9)$$

в то время как осреднение самих пульсационных величин дает ненулевой результат, например

$$\overline{\vec{V}''} \neq 0, \quad \overline{T''} \neq 0, \quad \overline{h''} \neq 0. \quad (3.5.10)$$

Справедливость равенств (3.5.9) видна, например, из представления процедуры осреднения произведения  $\rho \vec{V}$ , записанного в виде произведения осредненных и пульсационных значений:

$$\overline{\rho \vec{V}} = \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\vec{V} + \vec{V}'')} = \overline{\bar{\rho} \vec{V}} + \overline{\bar{\rho} \vec{V}''} + \overline{\rho' \vec{V}} + \overline{\rho' \vec{V}''}.$$

Но согласно (3.5.4)  $\overline{\rho \vec{V}} = \overline{\bar{\rho} \vec{V}}$ , следовательно, все слагаемые этого уравнения равны нулю кроме первого, т. е.  $\overline{\bar{\rho} \vec{V}''} = \overline{\rho' \vec{V}} = \overline{\rho' \vec{V}''}$ . Тем самым, справедливость выражений (3.5.9) вытекает из способа представления осредненных величин по Фавру как средневзвешенных.

Разница между осреднениями по Рейнольдсу и по Фавру можно увидеть на примере применения этих операций к произведению плотности на две другие произвольные переменные величины  $U$  и  $V$ . Для величины  $\rho UV$  осреднение по Рейнольдсу дает:

$$\begin{aligned}\overline{\rho UV} &= (\overline{\rho + \rho'}) (\overline{U + U'}) (\overline{V + V'}) = \\ &= \overline{\rho} \overline{U} \overline{V} + \overline{\rho U' V'} + \overline{U \rho' V'} + \overline{V \rho' U'} + \overline{\rho' U' V'},\end{aligned}$$

в то время как осреднение по Фавру приводит к следующему выражению:

$$\overline{\rho UV} = \overline{\rho(\tilde{U} + U'')(\tilde{V} + V'')} = \overline{\rho \tilde{U} \tilde{V}} + \overline{\rho U'' V''}.$$

Видно, что в последнем случае получаются более компактные выражения с меньшим числом неизвестных корреляций, число которых совпадает с таковым для несжимаемых жидкостей, где пульсация  $\rho' = 0$ .

Для записи уравнения движения, осредненного по Фавру, используем следующую его дивергентную форму, пренебрегая массовыми силами:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \underline{\tau} \quad (3.5.11)$$

где  $\underline{\tau} = 2\mu \underline{S} - \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \underline{E}$ .

Выполним осреднение всех слагаемых уравнения (3.5.11), используя разбиение мгновенных величин по Фавру. Операция осреднения дает:

$$\frac{\partial \overline{\rho \vec{V}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\overline{\rho \vec{V} \otimes \vec{V}}) = -\vec{\nabla} \overline{p} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\underline{\tau}}.$$

Согласно определению величины  $\vec{V}$  по формуле (3.5.4) для первого слагаемого левой части имеем:

$$\overline{\rho \vec{V}} = \overline{\rho \tilde{V}}.$$

Для второго осредненного слагаемого левой части:

$$\begin{aligned}\overline{\rho \vec{V} \otimes \vec{V}} &= \overline{\rho (\tilde{V} + V'') (\tilde{V} + V'')} = \\ &= \overline{\rho \tilde{V} \otimes \tilde{V}} + \overline{\rho \tilde{V} \otimes V''} + \overline{\rho V'' \otimes \tilde{V}} + \overline{\rho V'' \otimes V''}.\end{aligned}$$

Однако, согласно правилам осреднения второе и третье слагаемые правой части являются нулями, тогда после осреднения:

$$\overline{\rho \vec{V} \otimes \vec{V}} = \overline{\rho} \tilde{\vec{V}} \otimes \tilde{\vec{V}} + \overline{\rho \tilde{\vec{V}}'' \otimes \tilde{\vec{V}}''}.$$

Правая часть уравнения движения принимает вид:

$$-\tilde{\nabla} \bar{p} + \tilde{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}}.$$

В итоге уравнение движения сжимаемой жидкости при использовании процедуры осреднения по Фавру записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho \tilde{\vec{V}}} + \tilde{\nabla} \cdot (\overline{\rho \tilde{\vec{V}} \otimes \tilde{\vec{V}}}) = -\tilde{\nabla} \bar{p} + \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\tau}} - \overline{\rho \tilde{\vec{V}}'' \otimes \tilde{\vec{V}}''}). \quad (3.5.12)$$

Видно, что это уравнение аналогично таковому для несжимаемой жидкости, и оно также содержит только один корреляционный член – тензор напряжений Рейнольдса.

В системе уравнений, описывающей движение сжимаемой жидкости, содержится также уравнение энергии, которое может быть записано в виде уравнения переноса полной энтальпии (энтальпии торможения) – величины  $h_* = h + \frac{1}{2} V_j V_j$ :

$$\frac{\partial \rho h_*}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot (\rho h_* \tilde{\vec{V}}) = \frac{\partial p}{\partial t} - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\vec{q}} + \tilde{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \tilde{\vec{V}}). \quad (3.5.13)$$

Это уравнение записано относительно мгновенных значений величин, следовательно, необходимо выполнить процедуру его осреднения. Для этого запишем соотношение для полной энтальпии:

$$\begin{aligned} \rho h_* &= \rho (\tilde{h} + h'') + \frac{1}{2} \rho (\tilde{V}_j + V_j'') (\tilde{V}_j + V_j'') = \\ &= \rho \tilde{h} + \rho h'' + \frac{1}{2} \rho \tilde{V}_j \tilde{V}_j + \rho V_j'' \tilde{V}_j + \frac{1}{2} \rho V_j'' V_j'' \end{aligned}$$

Осреднение этого равенства с учетом (3.5.7) и (3.5.9) дает:

$$\overline{\rho \tilde{h}_*} = \overline{\rho} \tilde{h} + \frac{1}{2} \overline{\rho \tilde{V}_j \tilde{V}_j} + \frac{1}{2} \overline{\rho V_j'' V_j''}. \quad (3.5.14)$$

Для слагаемого в левой части под знаком дивергенции имеем:

$$\begin{aligned} \rho h V_i &= \rho \left( h + \frac{1}{2} V_j V_j \right) V_i = \rho \left( \tilde{h} + h'' + \frac{1}{2} \tilde{V}_j \tilde{V}_j + V_j'' V_j'' + \frac{1}{2} V_j'' V_j'' \right) (\tilde{V}_i + V_i'') = \\ &= \rho \tilde{h} \tilde{V}_i + \rho \tilde{h} V_j'' + \frac{1}{2} \rho \tilde{V}_j \tilde{V}_j \tilde{V}_i + \frac{1}{2} \rho \tilde{V}_j \tilde{V}_j V_i'' + \rho h'' \tilde{V}_i + \rho h'' V_i'' + \\ &+ \rho V_j'' \tilde{V}_j \tilde{V}_i + \rho V_j'' \tilde{V}_j V_i'' + \frac{1}{2} \rho V_j'' V_j'' \tilde{V}_i + \frac{1}{2} \rho V_j'' V_j'' V_i''. \end{aligned}$$

Отсюда после осреднения получаем:

$$\overline{\rho h V_i} = \rho \tilde{h} \tilde{V}_i + \frac{1}{2} \rho \tilde{V}_j \tilde{V}_j \tilde{V}_i + \rho \overline{h'' V_i''} + \rho \overline{\tilde{V}_j V_j'' V_i''} + \frac{1}{2} \rho \overline{\tilde{V}_j V_j'' V_j''} + \frac{1}{2} \rho \overline{V_j'' V_j'' V_j''}.$$

В данном выражении возникла корреляция третьего порядка, которую, однако, можно отбросить [72]. Тогда, используя (3.5.14), для  $\overline{\rho h \tilde{V}}$  можно записать:

$$\overline{\rho h \tilde{V}} = \rho \tilde{h} \tilde{V} + \rho \overline{h'' \tilde{V}''} + \frac{1}{2} \rho \tilde{V} \cdot \overline{\tilde{V}'' \otimes \tilde{V}''}, \quad (3.5.15)$$

или, в компонентном виде:

$$\overline{\rho h V_i} = \rho \tilde{h} \tilde{V}_i + \rho \overline{h'' V_i''} + \frac{1}{2} \rho \tilde{V}_j \overline{V_j'' V_i''}.$$

Осреднение правой части уравнения (3.5.12), которая не содержит плотности  $\rho$ , происходит обычным образом с использованием правил осреднения Рейнольдса.

Окончательно уравнение переноса полной энтальпии для турбулентного режима течения с учетом выражений (3.5.14) и (3.5.15) в терминах осреднения по Фавру принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{h}_*}) + \tilde{\nabla} \cdot (\overline{\rho \tilde{h}_* \tilde{V}}) = \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot (\overline{\underline{\tau} \cdot \tilde{V}} - \rho \tilde{V} \cdot \overline{\tilde{V}'' \otimes \tilde{V}''} - \tilde{q} - \rho \overline{h'' \tilde{V}''}), \quad (3.5.16)$$

или, в компонентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{h}_*} - \overline{p}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \tilde{h}_* \tilde{V}_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{jk} V_k} - \rho \overline{\tilde{V}_k V_k'' \cdot \tilde{V}_j''} - q_j - \rho \overline{h'' V_j''}).$$

Здесь величина  $\overline{\rho \tilde{h}_*}$  определена выражением (3.5.14).

Применим процедуру осреднения по Фавру к уравнению диффузии:

$$\frac{\partial \rho C^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C^\alpha V_j) = -\frac{\partial j_j^\alpha}{\partial x_j} + \rho \dot{w}_n.$$

Представим массовую концентрацию  $C^\alpha$  и скорость  $V_j$  в виде разложений по Фавру:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho(\tilde{C}^\alpha + C^{\alpha n})} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho(\tilde{V}_j + V_j^n)(\tilde{C}^\alpha + C^{\alpha n})}) = \overline{\rho \dot{w}_n} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{j_j^\alpha}.$$

Используя правила осреднения получаем уравнение диффузии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho \tilde{C}^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho \tilde{V}_j \tilde{C}^\alpha} = \overline{\rho \dot{w}_n} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{j_j^\alpha} + \overline{\rho V_j^n C^{\alpha n}}). \quad (3.5.17)$$

Система уравнений движения сжимаемой жидкости включает в себя также термодинамическое уравнение состояния, в качестве которого в случае идеального газа выступает уравнение Менделеева-Клапейрона, которое в осредненном виде выглядит так:

$$p = \rho RT.$$

После подстановки разбиения величин на осредненные и пульсационные по Фавру, и последующего осреднения имеем:

$$p = R \overline{\rho T}. \quad (3.5.18)$$

Система уравнений неразрывности, движения, энергии, диффузии и состояния содержат корреляции  $\overline{V_i'' V_j''}$ ,  $\overline{h'' V_j''}$  и  $\overline{C^{\alpha n} V_j''}$ , которые необходимо конкретизировать. Для решения этой задачи на полуэмпирическом уровне используют модели турбулентности, хорошо зарекомендовавшие себя при моделировании течений несжимаемой жидкости, в которых кинетическая энергия турбулентности понимается как  $k = 0.5 \overline{V_j'' \cdot V_j''}$ , а истинная диссипация как  $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu (\overline{\nabla V_j'' : \nabla V_j''} + \overline{\nabla V_j'' : \nabla V_j''^T})$ .

Записанная система уравнений движения сжимаемой жидкости с осреднением по Фавру внешне не отличается от этой же системы уравнений для несжимаемой среды с осреднением по Рейнольдсу. Тем самым, по существу, осреднение по Фавру является чисто техническим приемом, позволяющим «спрятать» пульсацию плотности  $\rho'$  в осредненные характеристики физических величин. Оно не несет в себе четкого физического смысла. На деле же пульсации плотности проявляют себя при турбулентном течении жидкости, и изучать корреляции с их присутствием (такие как  $\overline{\rho'V'}$ ,  $\overline{\rho'h'}$  и др.) все равно придется, поскольку они характеризуют прохождение физических процессов, связанных с этими пульсациями плотности. Но как технический прием, сводящий уравнения движения сжимаемой среды к таковым для несжимаемой среды, он достаточно эффективен.

### 3.6. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Система уравнений движения многокомпонентной сжимаемой среды будет содержать следующие осредненные по Фавру уравнения: неразрывности (3.5.8), движения (3.5.12) и энергии (3.5.16). Кроме того, как отмечалось в параграфе 2.14, сюда необходимо также добавить уравнения диффузии и состояния.

Применение осреднения по Фавру к уравнению диффузии компоненты  $\alpha$  многокомпонентной смеси (2.14.2) дает уравнение (3.5.17), откуда

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{C}^\alpha) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{C}^\alpha\tilde{V}) = -\nabla \cdot \left( \tilde{j}^\alpha + \bar{\rho}\widetilde{C^{\alpha m}V^m} \right) + \bar{\rho}\tilde{w}_\alpha. \quad (3.6.1)$$

Уравнение состояния (после осреднения по Фавру):

$$p = R\bar{\rho}\tilde{T} / m, \quad (3.6.2)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $m$  – молярная масса смеси.

В получившейся системе тензор вязких напряжений  $\underline{\tau}$ , величины интенсивности диффузионного и теплового потока определяются выражениями (2.14.15) – (2.14.17), в которых все составляющие понимаются в смысле осредненных по Фавру. К этим величинам в уравнениях движения, энергии и диффузии присоединяются турбулентные члены, которые представляют собою корреляции соответствующих пульсационных величин:

$$\underline{\tau}^T = -\bar{\rho} \overline{\vec{v}'' \otimes \vec{v}''}, \quad \bar{j}^{\alpha T} = -\bar{\rho} \overline{C^{\alpha \prime \prime} \vec{v}''}, \quad \bar{q}^T = -\bar{\rho} \overline{h'' \vec{v}''}. \quad (3.6.3)$$

Кроме того, в уравнении энергии (3.5.16) появилась дополнительная корреляционная величина  $\bar{Q}$ , состоящая из двух корреляций:

$$\bar{Q} = \overline{\underline{\tau} \cdot \vec{v}} - \bar{\rho} \overline{\vec{v}'' \cdot \vec{v}'' \otimes \vec{v}''}. \quad (3.6.4)$$

Эти величины могут быть аппроксимированы на базе гипотезы Буссинеска о турбулентной вязкости следующим образом [71; 72]:

$$\underline{\tau}^T = 2\mu_t \left( \underline{S} - \frac{1}{3} (tr \underline{S}) \underline{E} \right) - \frac{2}{3} \rho k \underline{E}, \quad (3.6.5)$$

$$\bar{j}^{\alpha T} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \bar{\nabla} C^\alpha, \quad (3.6.6)$$

$$\bar{q}^T = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \bar{\nabla} h, \quad (3.6.7)$$

$$\bar{Q} = \mu_t \bar{\nabla} k. \quad (3.6.8)$$

В этих выражениях  $k = \frac{1}{2} \overline{\vec{v}'' \cdot \vec{v}''}$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, а турбулентное число Прандтля  $Pr_t$  представляет собой отношение турбулентной кинематической вязкости  $\nu_t = \mu_t / \rho$  к турбулентной температуропроводности  $a_t = \lambda_t / (\rho C_p)$ :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t}. \quad (3.6.9)$$

Записанные выше аппроксимации в литературе часто подвергаются модификациям.

В итоге, для суммарных величин турбулентных напряжений, интенсивности диффузионных и тепловых потоков в компонентной форме записи имеем:

$$\tau_{ij}^{\Sigma} = \tau_{ij} + \tau_{ij}^T = \mu \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (3.6.10)$$

$$j_k^{\alpha\Sigma} = j_k^{\alpha} + j_k^{\alpha T} = - \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial C^{\alpha}}{\partial x_k}, \quad (3.6.11)$$

$$q_k^{\Sigma} = q_k + q_k^T = - \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial h}{\partial x_k}. \quad (3.6.12)$$

Тогда уравнения движения, энергии, диффузии и состояния с учетом соотношения (3.6.8) принимают вид:

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j - \tau_{ij}^{\Sigma}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (3.6.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h_* - p) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho h_* V_j - \overline{\tau_{jk} V_k} + q_j^{\Sigma} - Q_j) = 0, \quad (3.6.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C^{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C^{\alpha} V_j - j_j^{\alpha\Sigma}) = \rho \dot{w}_n, \quad (3.6.15)$$

$$p = R \bar{\rho} \bar{T} / m, \quad (3.6.16)$$

в которых все величины понимаются в смысле осредненных по времени.

Полная энтальпия в уравнении (3.6.14) представляет собой следующее:

$$h_* = h + 0.5 V_i V_i + k. \quad (3.6.17)$$

Уравнения (3.5.8), (3.6.13) – (3.6.16) описывают поведение газовой смеси, движущейся в турбулентном режиме течения.

### 3.7. УЧЕТ КРИВИЗНЫ ПРИ РАСЧЕТЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Еще в 1929 году Л. Прандтль обратил внимание на то, что искривленность турбулентных потоков должна оказывать на них влияние, аналогичное стратификации плотности. Им была предложена следующая зависимость:

$$v_r' : v_r = F(\theta), \quad (3.7.1)$$

в которой  $V_r'$  – турбулентная вязкость в криволинейном (стратифицированном) потоке,  $v_r$  – турбулентная вязкость без учета эффекта криволинейности (стратификации),  $\theta$  – безразмерный параметр, выражения для которого имеют следующий вид для криволинейных и стратифицированных (для них происходит изменение плотности по высоте) течений соответственно:

$$\theta = \begin{cases} V / \left[ r \left( \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right) \right] = \omega / \left[ r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \\ \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy} : \left( \frac{dV}{dy} \right)^2 \end{cases} \quad (3.7.2)$$

Здесь  $V$  – составляющая средней скорости, параллельная касательной к стенке,  $y$  – нормальная к стенке координата,  $r$  – полярный радиус ( $r=r_0$  – радиус кривизны стенки),  $\rho=\rho(y)$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\omega=V/r$  – угловая скорость вращения жидкой частицы.

Эта аналогия Прандтля позднее была переоткрыта П. Брэдшоу [83], показавшим, что между параметром  $\theta$  для криволинейных течений и числом Ричардсона (используемом при моделировании стратифицированных течений и являющимся мерой их устойчивости) существует следующая связь:

$$Ri = \frac{2\theta(1+2\theta)}{(1+\theta)^2}. \quad (3.7.3)$$

Это дает возможность записать формулу (3.7.1) в виде:

$$v_r' : v_r = F(Ri). \quad (3.7.4)$$

Многочисленные расчеты течения Куэтта между вращающимися цилиндрами с последующим сравнением результатов с опытами Вендта и Тейлора привели к следующей эмпирической формуле В.В. Новожилова [47]:

$$f(Ri) = 1 - 1.1 Ri^{3/19} \quad (3.7.5)$$

Здесь поправочный коэффициент  $f(Ri)$  определялся на основании анализа пятидесяти серий опытов, отличавшимися друг от друга шириной зазоров между цилиндрами и отношениями угловых скоростей их вращения. Подробная информация об этом исследовании приведена в работе [47].

Заметим, что пристенная логарифмическая асимптотика может использоваться и при расчете криволинейных течений, однако только при сравнительно малых расстояниях от стенок,  $y^+ < 100 \dots 150$  [19; 63].

Из формулы (3.7.5) следует, что инерционные силы вблизи выпуклых стенок увеличивают турбулентную вязкость, а вблизи вогнутых – снижают ее [18; 49]. Следует предостеречь от применения эмпирического поправочного множителя для течений со стратификацией. Влияние стратификации и кривизны на турбулентную вязкость аналогичны, но не идентичны [190; 191]. Это видно из того, что в задачах с криволинейными границами число Ричардсона ограничивается пределами [47]:

$$-0.293 \leq Ri \leq 0.547, \quad (3.7.6)$$

охватывающими все возможные варианты задачи о течении между вращающимися цилиндрами, а в метеорологии число Ричардсона рассматривается в пределах

$$-2 \leq Ri \leq 0.21. \quad (3.7.7)$$

В работе W. Rodi [173] учет влияния кривизны линий тока на турбулентную вязкость давался формулой

$$v_t = \frac{V_{t0}}{1 + C_c Ri}, \quad (3.7.8)$$

где  $V_{t0}$  – турбулентная вязкость без учета кривизны, константа  $C_c = 0.02 \div 0.10$ .

Несколько иным образом учитывается влияние кривизны в двухпараметрических моделях турбулентности, например для RNG  $k$ - $\varepsilon$  модели может использоваться следующая коррекция [76]:

$$\mu_t = \mu_{t0} f(\alpha_s, \Omega, k / \varepsilon),$$

в которой  $\Omega$  – характерное число закручивания потока,  $\alpha_s$  – постоянная закручивания, значение которой зависит от интенсивности закручивания (для умеренно закрученных потоков  $\alpha_s = 0.07$ ).

Если при этом система вращается с постоянной угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ , то инерционными силами являются силы Кориолиса и центробежная сила:

$$\rho \vec{f} = -\rho \left( 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right).$$



## ГЛАВА 4 . ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗ КОМБИНАЦИЙ УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ И ЭНЕРГИИ

### 4.1. СХЕМА КОМБИНАЦИЙ УРАВНЕНИЙ

Комбинации из уравнений неразрывности и движения позволяют получить новые соотношения, полезные при исследовании разного рода процессов переноса в области механики жидкости и газа. Так, если применить к уравнению неразрывности оператор производной по времени, а к уравнению движения – оператор дивергенции, то размерности обоих уравнений выравниваются, что позволяет их сложить и получить важное для акустики уравнение Лайтхилла. Другие комбинации этих уравнений оказываются полезными при поиске различных аппроксимаций для корреляций пульсационных величин в полуэмпирической теории турбулентности. Использование в качестве объекта для комбинаций уравнения энергии позволяет расширить круг такого рода соотношений, что оказывается важным при исследовании неизотермических течений жидкости [22; 71; 73]. Возникающие при этом уравнения переноса различных физических величин помогают проведению анализа поведения пульсаций этих величин в потоках жидкости и газа.

Для дальнейшего полезно обозначить уравнение неразрывности (скалярное уравнение) символом "H", уравнение движения (векторное уравнение) – символом " $\vec{D}$ ", уравнение энергии (скалярное уравнение) символом "Э". Запишем эти уравнения и укажем размерности их членов:

- уравнение "H" – неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0, \quad \frac{H}{M^3} / \left( \frac{M}{c} \right) = \frac{Vm}{M^3} / \left( \frac{M}{c} \right)^2, \quad (4.1.1)$$

- уравнение " $\vec{D}$ " – движения:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p' + \mu \Delta \vec{V} + \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \rho \vec{f}, \quad \frac{H}{M^3} = \frac{Bm}{M^3} \left/ \left( \frac{M}{c} \right) \right., \quad (4.1.2)$$

где  $p' = p + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ .

- уравнение "Э" – энергии:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \underline{\sigma} : \vec{\nabla} V + \rho q_s, \quad \frac{H}{M^3} \cdot \left( \frac{M}{c} \right) = \frac{Bm}{M^3}, \quad (4.1.3)$$

где  $u$  – внутренняя энергия движущейся жидкости,  $\vec{q}$  – интенсивность теплового потока, величина  $q_s$  характеризует теплоту, поступающую от внешних или внутренних источников.

Здесь возможны следующие варианты комбинаций, приводящие к скалярным, векторным и тензорным уравнениям переноса:

1) скалярное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} "H" + \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad \frac{H}{M^4} = \frac{Bm}{M^4} \left/ \left( \frac{M}{c} \right) \right.; \quad (4.1.4)$$

2) скалярным уравнением также является

$$V \left[ \frac{\partial}{\partial t} "H" + \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \right] \pm "Э" = 0, \quad \frac{H}{M^3} \left( \frac{M}{c} \right) = \frac{Bm}{M^3}; \quad (4.1.5)$$

3) векторное уравнение дает комбинация

$$\frac{d}{dt} \vec{D} + \vec{\nabla} "Э" = 0, \quad \frac{H}{M^3 c} = \frac{H}{M^4} \left( \frac{M}{c} \right) = \frac{Bm}{M^4}; \quad (4.1.6)$$

4) к тензорному уравнению приводит

$$\vec{V} \otimes \vec{D} = 0, \quad \frac{H}{M^3} \left( \frac{M}{c} \right) = \frac{Bm}{M^3}; \quad (4.1.7)$$

5) к векторному уравнению ведет

$$\vec{V} "Э" + \frac{p}{\rho} \vec{D} = 0, \quad \frac{H}{M^3} \left( \frac{M}{c} \right)^2 = \frac{Bm}{M^3} \left( \frac{M}{c} \right); \quad (4.1.8)$$

6) векторным уравнением также является

$$\frac{d}{dt} \vec{D} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \otimes \vec{D} = 0, \quad \frac{H}{M^3} \left( \frac{M}{c} \right) = \frac{Bm}{M^2}; \quad (4.1.9)$$

7) тензорным уравнением является

$$\vec{D} \otimes \vec{V} + \vec{V} \otimes \vec{D} = 0, \quad \frac{Bm}{M^3}; \quad (4.1.10)$$

8) скалярным уравнением будет также

$$V^2 H + \vec{V} \cdot \vec{D} + \varepsilon = 0, \quad \frac{Bm}{M^3}, \quad (4.1.11)$$

а также другие возможные комбинации. При этом может повыситься порядок полученных дифференциальных уравнений по сравнению с исходными, что может привести к изменению как типа дифференциального уравнения, так и краевых условий среди которых возможно появление дополнительных. Однако эта проблема решаема, о чем свидетельствует опыт применения комбинации уравнений неразрывности и движения, приводящего к уже упомянутому уравнению Лайтхилла [59]. Кроме того, зачастую необходимость в постановке краевых задач для полученных комбинаций уравнений и не возникает. Это касается процедур получения связей между различными корреляциями пульсационных величин в теории турбулентности, что является важным при совершенствовании полуэмпирических моделей турбулентности, используемых в пакетах прикладных программ.

## 4.2. ТРАНСФОРМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Применяя оператор  $\frac{\partial}{\partial t}$  к уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0$$

получим:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \rho V) = 0.$$

Преобразуем второе слагаемое с учетом того, что согласно уравнению неразрывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) &= \frac{\partial}{\partial t} [\bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{V}] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \\ &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \cdot \bar{\nabla} \rho + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} + \rho \bar{\nabla} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \\ &= \bar{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} - \bar{V} \cdot \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) - (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Отсюда получаем еще один вариант уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \bar{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} - \bar{V} \cdot \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) - (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = 0,$$

или, в более компактном виде:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \bar{\nabla} \cdot [\bar{V} (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V})] - \bar{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}. \quad (4.2.2)$$

На основе уравнения (4.2.1) запишем уравнение переноса величины  $\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) = -(\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + \bar{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}.$$

Последнее слагаемое выразим из уравнения Навье-Стокса, пренебрегая массовыми силами:

$$\bar{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot \rho (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} - \Delta p + \bar{\nabla} \cdot \mu \Delta \bar{V} + \bar{\nabla} \cdot \frac{1}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}),$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} = -(\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \Delta p - \bar{\nabla} \rho \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \frac{4}{3} \mu \Delta (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \quad (4.2.3)$$

В итоге получено скалярное уравнение переноса величины  $\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}$ . Для несжимаемой жидкости оно дает полученное ранее соотношение (2.4.11):

$$\Delta p + \rho \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} = 0.$$

Если же просто применить оператор дивергенции к уравнению Навье-Стокса, то получаем:

$$\bar{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} = -\Delta p + \frac{4}{3} \mu \Delta (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}).$$

Левую часть этого соотношения можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} &= \bar{\nabla} \rho \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \rho \bar{\nabla} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\nabla} \rho \cdot [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V}] + \rho \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \\ + \rho (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) &= \bar{\nabla} \rho \cdot \left[ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} \right] + \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \right] (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + \rho \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} \end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\rho \frac{d}{dt} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = -\frac{d\bar{V}}{dt} \cdot \bar{\nabla} \rho - \rho \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} - \Delta p + \frac{4}{3} \mu \Delta (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \quad (4.2.4)$$

Уравнения (4.2.3) и (4.2.4) эквивалентны.

### 4.3. УРАВНЕНИЕ ЛАЙТХИЛЛА И СВЯЗАННЫЕ С НИМ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим следующую комбинацию уравнения неразрывности и движения:

$$\frac{\partial}{\partial t} "H" + \bar{\nabla} \cdot "D" = 0,$$

которая заключается в применении к уравнению неразрывности производной по времени, а к уравнению движения – операции дивергенции и последующего сложения результатов этих операций. При этом размерности слагаемых выравниваются и полученное скалярное уравнение является уравнением Лайтхилла, широко используемым в акустике [59].

Применим к уравнению неразрывности оператор  $\frac{\partial}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} = 0. \quad (4.3.1)$$

Уравнение Навье-Стокса для общего случая сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} \otimes \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left[ \mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T) - \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \underline{E} \right] \quad (4.3.2)$$

запишем в виде

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \cdot \underline{T}, \quad (4.3.3)$$

где  $\underline{T}$  – тензор напряжений Лайтхилла:

$$\underline{T} = -\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T) + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \underline{E} + \rho \vec{V} \otimes \vec{V} \quad (4.3.4)$$

Возьмем дивергенцию правой и левой частей уравнения (4.3.3) и запишем результат в виде:

$$-\Delta p - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{T}) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0. \quad (4.3.5)$$

После сложения левых частей уравнений (4.3.1) и (4.3.5) получаем:

$$\Delta p - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \underline{T}). \quad (4.3.6)$$

Преобразуем слагаемое  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$  учитывая, что по определению скорость звука

$$C_o = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Отсюда  $d\rho = \frac{1}{C_o^2} dp$  и производные по времени от плотности  $\rho$  можно заменить на производные от давления  $p$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial p}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

откуда следует, что уравнение (4.3.5) можно записать в виде:

$$\Delta p - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{T}) \quad (4.3.7)$$

Это волновое уравнение для поля давления и есть уравнение Лайтхилла, оно имеет гиперболический тип.

Место уравнений Лайтхилла в акустике можно оценить после краткого рассмотрения основ этой науки, которые заключаются в следующем. Теоретическая акустика изучает процессы распространения и затухания звуковых волн в жидкости [59]. И если для описания процессов распространения можно не учитывать вязкость жидкости и опираться на уравнение движения идеальной жидкости – уравнение Эйлера – то для процессов затухания вязкость играет ключевую роль. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Уравнения Эйлера для движения идеальной жидкости записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p.$$

В качестве основных величин обычно выбирают звуковое давление и колебательную скорость, хотя на практике при измерении вибраций и сейсмоколебаний довольно часто оперируют с колебательным ускорением (которое измеряется с помощью так называемых акселерометров или сейсмографов) или смещением частиц среды. Поскольку жидкие среды, рассматриваемые в гидроакустике, считаются сплошными, то физически это означает, что длина волны, распространяющейся в такой среде, намного превышает размер молекул, а период колебаний – время их свободного пробега между столкновениями. В силу малости колебательной скорости  $\vec{V}$  в звуковой волне зачастую конвективным ускорением можно пренебречь по сравнению с локальным. Тогда уравнение Эйлера примет следующий простой вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p,$$

откуда



$$\vec{V} = -\frac{1}{\rho_0} \int \vec{\nabla} p dt.$$

Это означает, что колебательная скорость в волне однозначно связана с градиентом звукового давления.

Применяя в этом простейшем случае к уравнению Эйлера операцию дивергенции, и дифференцируя уравнение неразрывности по времени, а затем, вычитая один результат из другого, получаем волновое уравнение для поля давления:

$$\Delta p = \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (4.3.8)$$

Волновое уравнение для колебательной скорости частиц в этом случае можно получить, применив операцию градиента к уравнению неразрывности, и продифференцировав уравнение Эйлера по времени с учетом формулы Громеки:

$$\Delta \vec{V} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2}.$$

Таким образом, в основе исходного описания волнового движения в жидкой и газообразной среде (как частного случая гидродинамики) лежит пространственно-временное распределение вектора колебательной скорости  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$  и скалярного звукового давления  $p = p(\vec{r}, t)$ .

Классический метод теоретической трактовки свойств акустического поля базируется на введении потенциала скоростей  $\Phi(\vec{r}, t)$ , через который определяется пространственно-временное распределение вектора колебательной скорости  $\vec{V}$  частиц среды в волне:

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi. \tag{4.3.9}$$

С учетом векторного тождества  $\text{rot grad } f = 0$  волновое уравнение (4.3.8) для колебательной скорости частиц  $\vec{V}$  становится в определенном смысле эквивалентным уравнению для звукового давления и принимает вид:

$$\Delta\vec{V} = \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2}.$$

Тогда оба волновые уравнения можно заменить одним:

$$\frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 0 \tag{4.3.10}$$

Решив уравнение (4.3.10), можно определить потенциал  $\Phi$ . При этом обычно полагают, что траектории движения частиц среды в волне, по крайней мере в дальнем поле излучателя, соответствуют локально-плоской волне:

$$\Phi = A(r) \cos[\omega(t - \tau(r))].$$

Следуя Г. Бирхгофу [40; 59], такие волны называют простыми.

Скалярную характеристику акустического поля – давление – определяют с учетом уравнения Эйлера:

$$P(\vec{r}, t) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{4.3.11}$$

а проекции колебательной скорости – исходя из уравнения (4.3.7).

Отсюда следует, что пространственно-временные распределения величин  $\Phi(\vec{r}, t)$  и  $P(\vec{r}, t)$  однозначно связаны друг с другом с точностью до комплексного множителя. В частности, для гармонического процесса  $P(\vec{r}, t) = j\rho\omega\Phi$  (здесь, как обычно,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, рассматриваемая в теории функций комплексных переменных). Поэтому, измеряя  $P(\vec{r}, t)$ , легко восстановить потенциал  $\Phi(\vec{r}, t)$  и затем рассчитать любые параметры сигнала.

Частотный спектр сигнала восстанавливают с помощью Фурье-преобразования зависимости  $\Phi(r, t)$  или  $P(r, t)$ , пространственное распределение – выполняя Фурье-преобразование  $\Phi(r, t)$  или  $P(r, t)$  в пространственной области определение пространственного спектра волнового вектора  $k(\omega, r)$ .

Итак, в рамках классического подхода при выводе волнового уравнения делается ряд упрощающих предположений:

- 1) вязкость среды отсутствует;
- 2) среднее давление и плотность среды принимаются не зависящими от времени;
- 3) в уравнении движения постоянные во времени объемные силы не учитываются; переменные объемные силы, действующие извне, отсутствуют; внешние силы действуют на среду только через ее границы;
- 4) постоянные скорости и их градиенты принимаются малыми;
- 5) переменные скорости и их градиенты также полагаются малыми;
- 6) предполагается, что движение является безвихревым (потенциальным);
- 7) возникающие деформации среды полагаются малыми, поэтому деформации и напряжения считаются пропорциональными друг другу (закон Гука);
- 8) среда, в которой распространяются волны, однородна; перехода вещества из одной фазы в другую не происходит.

Несмотря на большое количество сделанных допущений, волновое уравнение в простейшей его форме (4.3.10) достаточно хорошо описывает основные свойства звуковых волн, что указывает на обоснованность вышеперечисленных допущений в довольно широких границах.

Однако затухание звуковых волн, турбулентность движения жидкости и другие важные характеристики уравнения акустики, основанные на использовании уравнений Эйлера, классическая акустика не учитывает. Этот недостаток восполняет уравнение Лайтхилла, базирующееся на уравнениях Навье-Стокса.

Уравнение Лайтхилла (4.3.7) описывает волновые процессы для поля давления. По сравнению с классической акустикой здесь имеется добавочное слагаемое, содержащее двойную дивергенцию тензора напряжений Лайтхилла. Волновое уравнение для скорости частиц жидкости при колебательных движениях этих частиц можно получить, базируясь на уравнениях Навье-Стокса. Для этого применим операцию градиента к уравнению неразрывности (4.3.1), и вычтем из полученного векторного уравнения производную по времени  $\frac{\partial}{\partial t}$ , примененную к уравнению движения (4.3.2), деленного, для выравнивания размерностей, на квадрат скорости звука:

$$\bar{\nabla} \cdot H'' - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \cdot \bar{D}'' = 0.$$

В этой разности первое слагаемое – результат применения  $\bar{\nabla}$  к уравнению неразрывности – имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \rho + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \rho + \rho \Delta \bar{V} + \rho \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V} = 0,$$

а второе

$$\frac{1}{C_0^2} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \bar{V} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} \right) = - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} p - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \cdot \underline{T}.$$

Вычитая из первого уравнения второе и учитывая связь между плотностью и давлением  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \rho = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} p$  после деления на  $\rho$  получаем:

$$\Delta \bar{V} - \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \rho + \frac{1}{\rho} (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \rho - \frac{1}{C_0^2 \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \bar{V} - \frac{2}{C_0^2 \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{C_0^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \cdot \underline{T} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2}.$$

Это и есть волновое уравнение для скорости частиц вязкой жидкости. По сравнению с классическим уравнением здесь в левой части появилось пять дополнительных слагаемых, часть из которых можно отбросить.

Тензор напряжений Лайтхилла, определяемый выражением (4.3.5), является симметричным, поскольку он состоит из суммы симметричных тензоров второго ранга. В уравнении движения (4.3.2) находится дивергенция этого тензора, для которой

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{T} = -\mu \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} - \mu \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T + \frac{2}{3} \mu \bar{\nabla} \cdot [(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E}] + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \otimes \bar{V}. \quad (4.3.12)$$

Слагаемые этого соотношения можно преобразовать следующим образом:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \bar{e}_i \bar{e}_j = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_k} \bar{e}_j = \Delta \bar{V},$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i \bar{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) \bar{e}_j = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}),$$

$$\bar{\nabla} \cdot [(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E}] = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \delta_{is} \bar{e}_i \bar{e}_s = \delta_{is} \delta_{ki} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_j} \bar{e}_s = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_s \partial x_j} \bar{e}_s = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}).$$

Два последних выражения свидетельствуют о том, что второе и третье слагаемые формулы (4.3.12) можно объединить, и тогда:

$$-\mu \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^T + \frac{2}{3} \mu \bar{\nabla} \cdot [(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E}] = -\frac{1}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \quad (4.3.13)$$

Полученный вектор можно записать в дивергентной форме:

$$-\frac{1}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = -\bar{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} \right]. \quad (4.3.14)$$

Тем самым формула (4.3.12) переписывается как:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \underline{T} &= -\mu \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} - \bar{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} \right] + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \bar{V} \\ &= \bar{\nabla} \cdot \left[ -\mu \bar{\nabla} \bar{V} - \frac{1}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} + \rho \bar{V} \otimes \bar{V} \right]. \end{aligned}$$

Это означает, что тензор Лайтхилла может быть представлен как в виде симметричного тензора второго ранга согласно формуле (4.3.4), так и в виде тензора общего вида, не являющегося симметричным:

$$\underline{T}^V = -\mu \bar{\nabla} \bar{V} - \frac{1}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} + \rho \bar{V} \otimes \bar{V}. \quad (4.3.15)$$

Обе формы записи тензора  $\underline{T}$  - и в виде (4.3.3) и в виде (4.3.15) приводят к одному и тому же результату для дивергенции этого тензора, результатом которой является сумма

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{T} = \bar{\nabla} \cdot \underline{T}^V = -\mu \Delta \bar{V} - \frac{1}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V} \otimes \bar{V}). \quad (4.3.16)$$

Заметим, что реологическое соотношение

$$\underline{\sigma} = -p \underline{E} + 2\mu \underline{S} - \frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E}$$

эквивалентно по результату применения операции дивергенции следующему выражению:

$$\underline{\sigma}^V = -p \underline{E} + \mu \bar{\nabla} \bar{V} + \frac{1}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E},$$

или, в несколько другом виде:

$$\underline{\sigma}^V = -p^V \underline{E} + \mu \bar{\nabla} \bar{V},$$

где

$$p^V = -p + \frac{1}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}).$$

Тензор  $\underline{\sigma}^V$ , в отличие от тензора  $\underline{\sigma}$ , не является симметричным, но:

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{\sigma} = \bar{\nabla} \cdot \underline{\sigma}^V = -\bar{\nabla} p + \mu \Delta \bar{V} + \frac{1}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}).$$

След симметричного тензора

$$tr \underline{\sigma} = \underline{\sigma} : \underline{E} = -3p,$$

так же как и след несимметричного тензора

$$tr \underline{\sigma}^V = \underline{\sigma}^V : \underline{E} = -3p,$$

равны между собой, что и следовало ожидать.

Для несжимаемой жидкости ( $\rho = const$ ,  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$ ) уравнение Лайтхилла принимает вид:

$$\Delta p = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \underline{T}),$$

где  $\underline{T} = \rho \bar{V} \otimes \bar{V} - \mu \bar{\nabla} \bar{V}$ .

Тем самым,

$$\Delta p = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \bar{V}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \mu \bar{\nabla} \bar{V}).$$

Но для несжимаемой жидкости, при  $\mu = const$ :

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \mu \bar{\nabla} \bar{V}) = \mu \bar{\nabla} \cdot \Delta \bar{V} = \mu \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \Delta V_i \bar{e}_i = \mu \Delta \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \delta_{ki} = \mu \Delta \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0.$$

Следовательно, уравнение Лайтхилла в этом случае принимает вид:

$$\Delta p = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \otimes \bar{V}). \quad (4.3.17)$$

В случае турбулентного режима разбиение вектора мгновенной скорости на осредненную и пульсационную составляющие и последующее осреднение по Рейнольдсу дает вместо формулы (4.3.17) соотношение:

$$-\Delta p = \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \otimes \bar{V} + \bar{\nabla} \cdot \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right]. \quad (4.3.18)$$

Здесь величины  $p$  и  $\bar{V}$  трактуются как осредненные. Эта формула дает связь между тензором напряжений Рейнольдса с давлением и тензором потока импульса  $\rho \bar{V} \otimes \bar{V}$  для осредненного движения. Формулу (4.3.18) можно переписать и в другом виде:

$$\Delta p = -\rho \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{\nabla} : \left( -\rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right).$$

Действительно, при  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \bar{V}) &= \rho \bar{\nabla} \cdot [\bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}] = \rho \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i = \rho \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial x_i} V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \rho V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) = \rho \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}, \end{aligned}$$

а величина



$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot (-\rho \bar{V}' \otimes \bar{V}')) &= \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot (-\rho V'_j \bar{e}_i \bar{e}_j) \right] = \bar{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (-\rho V'_j) \bar{e}_j = \\ &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (-\rho V'_j) \bar{e}_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (-\rho V'_j) = \bar{\nabla} \bar{\nabla} : (-\rho \bar{V}' \otimes \bar{V}').\end{aligned}$$

После операции осреднения имеем:

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot (-\rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'}) ) = \bar{\nabla} \bar{\nabla} : (-\rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'}).$$

Тем самым двойное скалярное произведение оператора  $\bar{\nabla} \bar{\nabla}$  на тензор напряжений Рейнольдса связано с осредненным давлением и тензором градиентов осредненных скоростей соотношением (4.3.18), которое справедливо лишь в случае несжимаемой жидкости. В случае сжимаемой жидкости эта связь существенно усложняется, причем здесь вместо осреднения по Рейнольдсу следует выполнять осреднение по Фавру.

Формулу (4.3.17) можно записать и по-другому

$$-\bar{\nabla} \bar{\nabla} : p \underline{E} = \bar{\nabla} \bar{\nabla} : (\rho \bar{V} \otimes \bar{V} + \rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'}),$$

или

$$\bar{\nabla} \bar{\nabla} : [p \underline{E} - \rho \bar{V} \otimes \bar{V} + (-\rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'})] = 0 \quad (4.3.19)$$

или, что то же самое:

$$\bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\nabla} \cdot (p \underline{E} - \rho \bar{V} \otimes \bar{V} + (-\rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'})) \right] = 0 \quad (4.3.20)$$

т. е. в результате получена дважды дивергентная форма записи.

Выражение  $\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \underline{T})$  можно записать еще в одной форме. Вычислим величину:

$$\begin{aligned}
 & \bar{\nabla} \cdot \left\{ \bar{\nabla} \cdot \left[ \mu (\bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T) - \frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \underline{E} \right] \right\} = \\
 & = \mu \bar{\nabla} \cdot \left\{ \Delta \bar{V} + \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \frac{2}{3} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \right\} = \\
 & = \mu \bar{\nabla} \cdot \left[ \Delta \bar{V} + \frac{1}{3} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \right] = \mu \left[ \Delta (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + \frac{1}{3} \Delta (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \right] = \\
 & = \mu \frac{4}{3} \Delta (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) = \bar{\nabla} \cdot \left( \frac{4}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \right).
 \end{aligned}$$

Тем самым можно записать

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \cdot \underline{T} = -\bar{\nabla} \cdot \left( \frac{4}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \right) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \otimes \bar{V}),$$

и уравнение Лайтхилла представить в виде:

$$\Delta p - \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \bar{\nabla} \cdot \left( \frac{4}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \right) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V} \otimes \bar{V}),$$

или, что эквивалентно:

$$\Delta p - \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \bar{\nabla} \cdot \left( \frac{4}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) \right) + \bar{\nabla} \bar{\nabla} : \rho \bar{V} \otimes \bar{V}, \quad (4.3.21)$$

то есть

$$\Delta p - \frac{1}{C_o^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{4}{3} \mu \Delta (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) + \bar{\nabla} \bar{\nabla} : \rho \bar{V} \otimes \bar{V} \quad (4.3.22)$$

Все формы записи волнового уравнения относительно давления эквивалентны – и (4.3.7), и (4.3.15), и (4.3.19) – (4.3.22). В турбулентном режиме наряду с тензором  $\rho \bar{V} \otimes \bar{V}$ , составленным из осредненных скоростей, будет фигурировать и тензор  $\overline{\rho \bar{V}' \otimes \bar{V}'}$ .

#### 4.4. ТРАНСФОРМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

Применим оператор  $\frac{d}{dt}$  к уравнению Навье-Стокса, которое для течения вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами пренебрегая массовыми силами можно записать в виде:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{V}.$$

Применение этого оператора к левой части уравнения дает:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left[ \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] \vec{e}_i = \\ &= \left( \rho \frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial t} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \rho V_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial t \partial x_j} + \rho V_k \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \rho V_k V_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) \vec{e}_i = \\ &= \rho \frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2} \vec{e}_i + \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i + 2\rho V_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial t \partial x_j} \vec{e}_i + \rho V_k V_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_j} \vec{e}_i = \\ &= \rho \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \nabla \vec{V} + 2\rho \vec{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{V} + \rho \vec{V} \otimes \vec{V} : \nabla \nabla \vec{V}. \end{aligned}$$

В случае учета сжимаемости появится еще добавка  $\frac{d\rho}{dt} \frac{d\vec{V}}{dt}$ .

Применение этого же оператора к правой части уравнения дает:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \vec{e}_i &= \\ = \left( -\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_i} + \mu \frac{\partial^3 V_i}{\partial t \partial x_j \partial x_j} - V_k \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i} + \mu V_k \frac{\partial^3 V_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j} \right) \vec{e}_i &= \\ = -\frac{d}{dt} \nabla p + \mu \frac{d}{dt} \Delta \vec{V}. \end{aligned}$$

В итоге получаем следующее векторное уравнение:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} + \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + 2\rho \vec{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{V} + \rho \vec{V} \otimes \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{V} = -\frac{d}{dt} \vec{\nabla} p + \mu \frac{d}{dt} \Delta \vec{V} \quad (4.4.1)$$

Из этого соотношения можно получить уравнения переноса градиента давления:

$$\frac{d}{dt} \vec{\nabla} p = \mu \frac{d}{dt} \Delta \vec{V} - \rho \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} - \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} - 2\rho \vec{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{V} - \rho \vec{V} \otimes \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{V}. \quad (4.4.2)$$

Применение операции дивергенции к уравнению Навье-Стокса для несжимаемой жидкости дает:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = -\Delta p + \mu \Delta \vec{\nabla} \cdot \vec{V}.$$

Второе слагаемое левой части можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i = \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + V_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_i} = \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \end{aligned}$$

В итоге получаем скалярное уравнение:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] = -\Delta p + \mu \Delta (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (4.4.3)$$

Но для несжимаемой жидкости  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ , поэтому данное уравнение приводит к соотношению:

$$\rho \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} = -\Delta p \quad (4.4.4)$$

или, в компонентной форме:

$$\rho \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k}.$$

В случае турбулентного режима течения величины  $\vec{V}$  и  $p$  будут иметь пульсационные составляющие, тогда правила осреднения Рейнольдса вместо соотношения (4.4.4) дают:

$$\rho \bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V} + \Delta p = -\overline{\bar{\nabla} \vec{V}' : \bar{\nabla} \vec{V}'} \quad (4.4.5)$$

Здесь слева находятся характеристики осредненного движения, справа – пульсационного.

В общем случае сжимаемой жидкости уравнение Навье-Стокса без учета массовых сил имеет вид:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \bar{\nabla}) \vec{V} \right) = -\bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot 2\mu \underline{S} - \bar{\nabla} \cdot \frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (4.4.6)$$

Учитывая, что  $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \vec{V}^T = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{V})$  применение операции дивергенции дает:

$$\bar{\nabla} \rho \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} + \rho \left[ \frac{d}{dt} \bar{\nabla} \cdot \vec{V} + \bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V} \right] = -\Delta p + \frac{4}{3} \mu \Delta (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (4.4.7)$$

Последнее слагаемое здесь результат применения оператора *div* к сумме:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot 2\mu \underline{S} - \bar{\nabla} \cdot \frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}) &= \bar{\nabla} \cdot \mu (\bar{\nabla} \vec{V} + \bar{\nabla} \vec{V}^T) - \bar{\nabla} \cdot \frac{2}{3} \mu (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}) = \\ &= \mu \Delta \vec{V} + \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}) - \frac{2}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}) = \mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}). \end{aligned}$$

Тогда:

$$\bar{\nabla} \cdot \left[ \mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] = \mu \left[ \Delta (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}) + \frac{1}{3} \Delta (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}) \right] = \frac{4}{3} \mu \Delta (\bar{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (4.4.8)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение (4.4.7) переходит в уравнение (4.4.4).

Применение операции градиента к уравнению Навье-Стокса дает тензорное уравнение. Для жидкости с постоянными физическими свойствами имеем:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \vec{V} + \bar{\nabla} \vec{V} \cdot \bar{\nabla} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \vec{V} \right] = -\bar{\nabla} \bar{\nabla} p + \mu \Delta \bar{\nabla} \vec{V}. \quad (4.4.9)$$

Взятие следа этого уравнения приводит к уравнению (2.4.11):

$$\rho \bar{\nabla} \vec{V} : \bar{\nabla} \vec{V} = -\Delta p.$$

Для турбулентного режима, после разбиения физических величин на осредненные и пульсационные и последующего осреднения по Рейнольдсу, из уравнения (4.4.9) имеем:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \bar{V} + \overline{\bar{\nabla} \bar{V}' \cdot \bar{\nabla} \bar{V}'} + \overline{(\bar{V}' \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \bar{V}'} \right] = \\ = -\bar{\nabla} \bar{\nabla} p + \mu \Delta \bar{\nabla} \bar{V}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Возьмем след этого уравнения. Учитывая что  $tr \bar{\nabla} \bar{V} = \bar{\nabla} \bar{V} : \underline{E} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V}$ , а для несжимаемой жидкости  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$ , получаем:

$$\rho \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + \overline{\bar{\nabla} \bar{V}' : \bar{\nabla} \bar{V}'} = -\Delta p. \quad (4.4.11)$$

Рассмотрим теперь дивергенцию конвективного ускорения и другие сопутствующие ей формулы. Эта величина:

$$\bar{\nabla} \cdot [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V}] \quad (4.4.12)$$

согласно формуле Громеки эквивалентно выражению:

$$\bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\nabla} \frac{V^2}{2} - \bar{V} \times (\bar{\nabla} \times \bar{V}) \right]. \quad (4.4.13)$$

Раскроем скобки в выражении (4.4.12):

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V}] &= \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i = \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( V_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) = \\ &= \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\bar{\nabla} \cdot [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V}] = \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}). \quad (4.4.14)$$



Тот же самый результат можно получить и используя формулу Громеки для конвективного ускорения, но при этом при проведении выкладок возникают некоторые другие полезные формулы. Для первого слагаемого в формуле

Громеки имеем, учитывая что  $\vec{\nabla} \frac{V^2}{2} = \vec{\nabla} \vec{V} \cdot \vec{V}$  :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} \right) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{V} \cdot \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} V_j \vec{e}_i \right) = \\ &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial x_i} V_j \vec{e}_i = \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + V_j \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_i} = \vec{\nabla} \vec{V}^T : \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{V} \cdot \Delta \vec{V}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \vec{V}^T : \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{V} \cdot \Delta \vec{V}. \quad (4.4.15)$$

Применяя оператор дивергенции ко второму слагаемому формулы (4.4.13) получаем:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})) = (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})]. \quad (4.4.16)$$

Заметим, что при доказательстве формулы Громеки использовалось равенство:

$$\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = (\vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \vec{V}^T) \cdot \vec{V} = \left( V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i.$$

Обозначим для краткости записи выражение в скобках как компоненту некоторого вектора  $\vec{a}$ , то есть  $\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{a} = a_i \vec{e}_i$ ,

$$a_i = V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Выполним выкладки для каждого слагаемого этой суммы, учитывая, что

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 2\vec{\omega}:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_1} - V_j \frac{\partial V_1}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \right. \\ &- V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \left. \right) = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_3 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \\ &- V_2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - V_3 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) + \\ &+ V_2 \left( \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + V_3 \left( \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} 2\omega_3 - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} 2\omega_2 + V_2 \frac{\partial 2\omega_3}{\partial x_1} - \\ &- V_3 \frac{\partial 2\omega_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляем  $\frac{\partial a_2}{\partial x_2}$  и  $\frac{\partial a_3}{\partial x_3}$ , в итоге получаем:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \frac{\partial V_2}{\partial x_1} 2\omega_3 - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} 2\omega_2 + V_2 \frac{\partial 2\omega_3}{\partial x_1} - V_3 \frac{\partial 2\omega_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} 2\omega_1 - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} 2\omega_3 + \\ &+ V_3 \frac{\partial 2\omega_1}{\partial x_2} - V_1 \frac{\partial 2\omega_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} 2\omega_2 - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} 2\omega_1 + V_1 \frac{\partial 2\omega_2}{\partial x_3} - V_2 \frac{\partial 2\omega_1}{\partial x_3} = \\ &= 2\omega_1 \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) + 2\omega_2 \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) + 2\omega_3 \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) + 2V_1 \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right) + \\ &+ 2V_2 \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \right) + 2V_3 \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) = 4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - 2\vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) = \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})]. \end{aligned}$$

Таким образом можно заключить, что формула (4.4.16) справедлива.



Можно показать, что формулу для  $\bar{\nabla} \cdot [\bar{V} \times (\bar{\nabla} \times \bar{V})]$  возможно представить и в несколько другом виде, используя понятие вихря  $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \bar{V}$ . Тогда

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \times (\bar{\nabla} \times \bar{V})) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \times 2\bar{\omega}) = 4\bar{\omega}^2 - 2\bar{V} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{\omega}) \quad (4.4.17)$$

Скалярную величину, представленную выражением (4.4.16), можно представить и в другом виде, записывая подробнее каждое слагаемое и учитывая, что

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \epsilon_{kij} \bar{e}_k, \quad (4.4.18)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{V} = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \Delta \bar{V} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) \bar{e}_i - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_k} \bar{e}_j \quad (4.4.19)$$

Тогда, используя выражение (4.4.18), выполним следующее преобразование первого слагаемого правой части соотношения (4.4.16):

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla} \times \bar{V}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{V}) &= \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \epsilon_{kij} \bar{e}_k \cdot \frac{\partial V_s}{\partial x_l} \epsilon_{pils} \bar{e}_p = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_s}{\partial x_l} \epsilon_{kij} \epsilon_{kls} = \\ &= \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_s}{\partial x_l} \epsilon_{1ij} \epsilon_{1ls} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_s}{\partial x_l} \epsilon_{2ij} \epsilon_{2ls} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_s}{\partial x_l} \epsilon_{3ij} \epsilon_{3ls} = \\ &= \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \epsilon_{1ij} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \epsilon_{1ij} \right) + \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \epsilon_{2ij} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \epsilon_{2ij} \right) + \\ &+ \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \epsilon_{3ij} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \epsilon_{3ij} \right) = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \\ &+ \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \\ &- \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}^T - \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Принимая во внимание соотношение (4.4.19) имеем:

$$\begin{aligned}
 \vec{V} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}] &= \vec{V}_k \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i - \vec{V}_k \vec{e}_k \cdot \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_k} \vec{e}_j = \\
 &= V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) - V_j \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_k \partial x_k} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \cdot \Delta \vec{V}.
 \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

Теперь, используя выражения (4.4.20) и (4.4.21) для формулы (4.4.16) получаем:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})) = \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V}^T - \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \cdot \Delta \vec{V} \tag{4.4.22}$$

Подстановка выражений (4.4.15) и (4.4.22) в формулу (4.4.14) (с учетом того, что  $\vec{\nabla} \vec{V}^T : \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V}^T$ ) дает:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{\nabla} \frac{V^2}{2} - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \right] = \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}), \tag{4.4.23}$$

Это выражение совпадает с выражением (4.4.14), что и следовало ожидать.

В уравнении для механической энергии потока есть слагаемое  $\frac{d V^2}{dt}$ , характеризующее кинетическую энергию движущейся жидкости. В компонентной форме это:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{V^2}{2} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} V_k V_k + \frac{1}{2} V_i \frac{\partial}{\partial x_i} V_k V_k = V_k \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_i V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i}.$$

Можно этот результат записывать в бескомпонентном виде как

$$\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \otimes \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V}^T.$$

Применим теперь оператор  $\frac{d}{dt}$  к величине  $\frac{d V^2}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dV^2}{dt} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{dV^2}{dt} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( V_k \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_i V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( V_k \frac{\partial V_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( V_i V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( V_k \frac{\partial V_k}{\partial t} \right) + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( V_i V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Теперь распишем последовательно каждое слагаемое из этих четырех:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( V_k \frac{\partial V_k}{\partial t} \right) = \frac{\partial V_k}{\partial t} \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \frac{\partial^2 V_k}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( V_i V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial V_i}{\partial t} V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial t} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + V_i V_k \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial t} = \\ &= \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \otimes \vec{v} : \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{v}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( V_k \frac{\partial V_k}{\partial t} \right) &= V_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_j V_k \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_j \partial t} = \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \cdot \vec{v}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_j \frac{\partial}{\partial x_j} V_i V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} &= V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + V_j V_i \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + V_j V_i V_k \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_j \partial x_i} = \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) + (\vec{v} \otimes \vec{v}) : (\vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) + \vec{v} \otimes \vec{v} \otimes \vec{v} : \vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{v}. \end{aligned}$$

В последнем выражении три точки обозначают тройное скалярное произведение тензоров, позволяющее из двух тензоров третьего ранга получить скалярную величину. Подстановка полученных выражений в исходное дает окончательно формулу:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dV^2}{dt} \right) &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \nabla \vec{V} \right) \cdot \vec{V} + \\ &+ (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \otimes \vec{V} : \frac{\partial \nabla \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V} \cdot \nabla \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \cdot \vec{V} + \\ &+ (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \cdot (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) + (\vec{V} \otimes \vec{V}) : (\nabla \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) + \vec{V} \otimes \vec{V} : \nabla \nabla \vec{V}. \end{aligned}$$

#### 4.5. ПУЛЬСАЦИИ СКОРОСТИ И ВИДЫ ДИССИПАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим тензор скоростей деформаций, его пульсационную часть и далее запишем уравнение переноса для тензора скоростей деформаций, который является симметричной частью тензора градиентов скоростей  $\underline{S} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T)$ . Уравнение переноса для тензора  $\underline{S}$  можно получить после применения операции градиента к уравнению Навье-Стокса и сложения полученного результата с его транспонированным уравнением:

$$\nabla \cdot \underline{D} + (\nabla \cdot \underline{D})^T = 0.$$

Операция градиента, примененная к уравнению Навье-Стокса для жидкости с постоянными физическими свойствами, приводит к уравнению:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{V} + \nabla \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \nabla \vec{V} \right] = -\nabla \nabla p + \mu \Delta \nabla \vec{V}. \quad (4.5.1)$$

Транспонирование этого тензорного уравнения дает:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{V}^T + (\nabla \vec{V} \cdot \nabla \vec{V})^T + (\vec{V} \cdot \nabla) \nabla \vec{V}^T \right] = -\nabla \nabla p + \mu \Delta \nabla \vec{V}^T.$$

Полусумма двух последних выражений дает уравнение переноса для тензора скоростей деформаций  $\underline{S}$ :

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \underline{S} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{S} \right] = -\rho (\vec{\nabla} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}) - \vec{\nabla} \vec{\nabla} p + \mu \Delta \underline{S} \quad (4.5.2)$$

Заметим, что операция взятия следа для этого уравнения, учитывая, что  $tr \underline{S} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ , а при  $\rho = const$  имеем  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ , приводит к выражению:

$$\rho \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} = -\Delta p,$$

что совпадает с результатом применения операции дивергенции к уравнению Навье-Стокса.

В уравнении (4.5.2) тензор  $\underline{S}$  понимается как тензор для мгновенных скоростей. В случае турбулентного режима течения появляется пульсационная добавка:

$$\underline{S}' = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{V}' + \vec{\nabla} \vec{V}'^T), \quad (4.5.3)$$

и после операции осреднения по Рейнольдсу это уравнение для тензора  $\underline{S}$ , который здесь уже понимается как осредненный (для осредненных скоростей), принимает вид:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \underline{S} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \underline{S} + \overline{(\vec{V}' \cdot \vec{\nabla}) \underline{S}'} \right] = \mu \Delta \underline{S} - \vec{\nabla} \vec{\nabla} p - \rho \left[ \vec{\nabla} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + \overline{\vec{\nabla} \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'} \right]. \quad (4.5.4)$$

Учитывая, что для несжимаемой жидкости  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}' = 0$  операция взятия следа дает:

$$\frac{1}{\rho} \Delta p + \vec{\nabla} \vec{V} : \vec{\nabla} \vec{V} + \overline{\vec{\nabla} \vec{V}' : \vec{\nabla} \vec{V}'} = 0 \quad (4.5.5)$$

Осреднение выражения (4.5.3) по правилам Рейнольдса дает нулевое значение  $\overline{S'} = 0$ , но квадрат пульсационной добавки нулю не равен  $\overline{S'^2} \neq 0$ :

$$\overline{S'^2} = \overline{S' \cdot S'} = \frac{1}{4} \left[ \overline{\vec{\nabla} \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'} + \overline{(\vec{\nabla} \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} \vec{V}')^T} + \overline{\vec{\nabla} \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'^T} + \overline{\vec{\nabla} \vec{V}'^T \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'} \right] \quad (4.5.6)$$

След этого симметричного тензора второго ранга равен:

$$tr \overline{S'^2} = \overline{S'^2} : \underline{E} = \frac{1}{2} \left[ \overline{\vec{\nabla} \vec{V}' : \vec{\nabla} \vec{V}'} + \overline{\vec{\nabla} \vec{V}'^T : \vec{\nabla} \vec{V}'} \right].$$

Через этот след дается определение истинной диссипации:

$$\varepsilon = 2\nu \overline{\text{tr} \underline{S}'^2}, \frac{M^2}{c^3}, \quad (4.5.7)$$

или, в терминах пульсационных компонент:

$$\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ji}} = \nu \left[ \overline{\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i}} \right].$$

Изотропной диссипацией в теории турбулентности называется скалярная величина, которая определяется формулой:

$$\varepsilon_s = \nu \overline{\nabla \vec{V}'^T : \nabla \vec{V}'}, \text{ или } \varepsilon_s = \nu \overline{\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j}}. \quad (4.5.8)$$

Вообще диссипацию механической энергии (переход ее в тепловую) характеризует мощность (диссипация по Рэлею):

$$\underline{\tau} : \underline{S},$$

т. е. двойное скалярное произведение тензора вязких напряжений на тензор скоростей деформаций. Размерность этой величины  $\frac{Bm}{M^3}$ , она характеризует

выделение тепла за 1 с в 1  $M^3$  объема движущейся жидкости. Если отнести эту мощность к плотности  $\rho$ , то получим удельную истинную диссипацию, раз-

мерность которой  $\frac{Bm}{\kappa \rho} = \frac{M^2}{c^3}$ . Поскольку для пульсационного движения несжи-

маемой вязкой жидкости тензор вязких пульсационных напряжений:

$$\underline{\tau}' = 2\mu \underline{S}',$$

в котором тензор градиентов пульсационных скоростей  $\underline{S}'$  определяется согласно (4.5.3), то удельная внутренняя истинная диссипация выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\rho} \overline{\tau'} : \overline{S'} = \frac{1}{2} \nu \overline{S'_{ij} S'_{ji}} = \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right)} = \\ &= \nu \overline{\left( \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right)} = \nu \left( \overline{\nabla \overline{V'}} : \overline{\nabla \overline{V'}} + \overline{\nabla \overline{V'^T} : \nabla \overline{V'}} \right) = \varepsilon_s + \nu \overline{\nabla \overline{V'}} : \overline{\nabla \overline{V'}}. \end{aligned}$$

Отсюда связь между изотропной и истинной диссипацией имеет вид:

$$\varepsilon_s = \varepsilon - \nu \overline{\nabla \overline{V'}} : \overline{\nabla \overline{V'}}. \quad (4.5.9)$$

Слагаемое  $\rho \varepsilon_s$  содержится в уравнении переноса кинетической энергии пульсаций, которая по определению равна:

$$k = \frac{1}{2} \overline{V'_i V'_i} = \frac{1}{2} \overline{tr \overline{V'} \otimes \overline{V'}}.$$

Уравнение ее переноса имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + (\overline{V'} \cdot \nabla) k = \nabla \cdot \left[ -\frac{1}{2} \overline{\overline{V'} \overline{V'} \overline{V'}} : \underline{E} - \frac{\overline{p' \overline{V'}}}{\rho} + \nu \nabla k \right] - \\ - \overline{\overline{V'} \overline{V'}} : \nabla \overline{V} - \nu \overline{(\nabla \overline{V'})^T : \nabla \overline{V'}} \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

в котором последний член как раз совпадает с определением (4.5.8). В терминах компонент это уравнение записывается как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} \overline{V'_j V'_i V'_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\overline{p' V'_j}}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \\ - \overline{V'_i V'_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

В литературе по турбулентности в уравнении переноса кинетической энергии пульсаций часто вместо изотропной диссипации  $\varepsilon_s$  фигурирует величина истинной диссипации  $\varepsilon$ , которую часто называют скоростью диссипации энергии турбулентных пульсаций.

Из соотношения (4.5.5) можно получить связь между истинной и изотропной диссипациями через осредненные параметры течения:



$$\varepsilon = \varepsilon_s - \frac{\nu}{\rho} \Delta p - \nu \bar{\nabla} \bar{V} : \bar{\nabla} \bar{V}. \quad (4.5.12)$$

Получим уравнение переноса изотропной диссипации  $\varepsilon_s$ . Для этого запишем уравнение переноса тензора  $\bar{\nabla} \bar{V}$  и умножим его слева дважды скалярно на транспонированный градиент пульсаций:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : [\bar{\nabla} \bar{V} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}] + \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \bar{V}] = \\ = \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \bar{\nabla} \bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \nu \Delta (\bar{\nabla} \bar{V}). \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

После представления физических величин через сумму осредненных и пульсационных и дальнейшего применения правил осреднения Рейнольдса, получаем в терминах компонент:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} : \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial V'_s}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial V'_s}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial V'_s}{\partial x_j} + \\ + \frac{\partial V'_s V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 V'_s}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial V'_s V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 V'_s}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial V'_s V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 V'_s}{\partial x_j \partial x_i} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_j} \left( \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \right), \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

или в бескомпонентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} + (\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime}) : \bar{\nabla} \bar{V} + (\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime}) : \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} + \\ + (\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime}) : \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} + \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : [(\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \bar{V}] + \frac{1}{2} (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) [\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime}] + \\ + \frac{1}{2} \bar{\nabla} \cdot [\bar{V}^{\prime\prime} (\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime})] = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \bar{\nabla} \bar{\nabla} p' + \nu \left[ \frac{1}{2} \Delta (\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime} : \bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime}) \right] - \\ - \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime}) : \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \bar{V}^{\prime\prime}). \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

При получении выражений (4.5.14) и (4.5.15) были использованы соотношения:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\bar{V}'^r : [\bar{\nabla}\bar{V}' \cdot \bar{\nabla}\bar{V}'] &= \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} \bar{e}_s \bar{e}_i : \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} \bar{e}_i \bar{e}_k = \\ &= \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} \delta_{ij} \delta_{sk} = \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \frac{\partial V'_s}{\partial x_j},\end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}\bar{V}'^r : [(\bar{V}' \cdot \bar{\nabla})\bar{\nabla}\bar{V}'] = \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} \bar{e}_s \bar{e}_i : V'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V'_k}{\partial x_i} \bar{e}_i \bar{e}_k = \frac{\partial V'_s}{\partial x_i} V'_j \frac{\partial^2 V'_s}{\partial x_j \partial x_i},$$

Кроме того, для лапласиана произведения производных справедливо полезное соотношение:

$$\begin{aligned}\Delta \left( \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2 \frac{\partial^2 V'_k}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \right] = \\ &= 2 \left[ \frac{\partial^3 V'_k}{\partial x_j \partial x_j \partial x_s} \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 V'_k}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial^2 V'_k}{\partial x_j \partial x_s} \right];\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V'_k}{\partial x_s} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial V'_k}{\partial x_s} = \bar{\nabla}\bar{V}'^r : \Delta(\bar{\nabla}\bar{V}') = \frac{1}{2} \Delta \left( \frac{\partial V'_i}{\partial x_s} \right) \left( \frac{\partial V'_i}{\partial x_s} \right) - \frac{\partial^2 V'_k}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial^2 V'_k}{\partial x_s \partial x_j}.$$

Можно использовать понятие тройного скалярного произведения тензоров (оно понижает суммарный ранг тензоров на 6). Используя это понятие, второе слагаемое правой части последнего выражения можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{V}')^T : \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{V}')^T &= \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} \bar{e}_j \bar{e}_k : \bar{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial V'_p}{\partial x_i} \bar{e}_p \bar{e}_i = \\ &= \frac{\partial^2 V'_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 V'_p}{\partial x_s \partial x_i} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_p) (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) = \\ &= \frac{\partial^2 V'_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 V'_p}{\partial x_s \partial x_i} \delta_{ks} \delta_{jp} \delta_{ii} = \frac{\partial^2 V'_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 V'_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 V'_k}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial^2 V'_k}{\partial x_s \partial x_j}.\end{aligned}$$

С учетом этих соотношений уравнение (4.5.15) после умножения на  $2\nu$  дает уравнение переноса изотропной диссипации  $\epsilon_s$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \varepsilon_s &= -\vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{V}' \varepsilon'_s} - 2 \frac{v}{\rho} \overline{\vec{\nabla} \vec{V}'^T : \vec{\nabla} \vec{\nabla} p'} + v \Delta \varepsilon_s - \\
 - 2v^2 \vec{\nabla} (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}'})^T : \vec{\nabla} (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}'}) &- 2v \vec{V}' (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}'})^T : \vec{\nabla} (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}'})^T - \\
 - 2v \text{tr} (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}'^T} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} \vec{V}') &- 2v (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}'^T} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}') : \vec{\nabla} \vec{V}' - \\
 - 2v (\overline{\vec{\nabla} \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'^T}) : \vec{\nabla} \vec{V}'^T, &
 \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

или, в компонентной форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + V_j \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j} &= -V'_j \frac{\partial \varepsilon'_s}{\partial x_j} - 2 \frac{v}{\rho} \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_k} + v \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial x_j \partial x_j} - \\
 - 2v^2 \frac{\partial^2 V'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 V'_i}{\partial x_k \partial x_j} &- 2v V'_j \frac{\partial V'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_j} - 2v \frac{\partial V'_i}{\partial x_k} \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} - \\
 - 2v \frac{\partial V'_i}{\partial x_k} \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} &- 2v \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} \frac{\partial V'_i}{\partial x_k} \frac{\partial V_j}{\partial x_k}.
 \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

#### 4.6. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Уравнение переноса тензора напряжений Рейнольдса для несжимаемой жидкости можно получить из уравнения Навье-Стокса для мгновенной скорости, которую обозначим как  $\vec{U}$ , путем умножения этого векторного уравнения тензорно на вектор пульсационной скорости  $\vec{V}'$  слева и справа, последующего сложения полученных уравнений.

Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости при пренебрежении массовыми силами имеет вид:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{U}, \tag{4.6.1}$$

где  $\vec{U}$  – вектор мгновенной скорости, состоящий из суммы осредненной и пульсационной составляющих. Умножим это уравнение тензорно на пульсационную компоненту  $\vec{V}'$  сначала слева, а затем справа:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \vec{v}' \otimes \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{v}' \otimes (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] &= -\vec{v}' \otimes \vec{\nabla} p + \mu \vec{v}' \otimes \Delta \vec{U}; \\ \rho \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \otimes \vec{v}' + ((\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}) \otimes \vec{v}' \right] &= -\vec{\nabla} p \otimes \vec{v}' + \mu (\Delta \vec{U}) \otimes \vec{v}'. \end{aligned}$$

Такое умножение слева и справа позволяет получить после сложения полученных выражений тензорное уравнение, в котором фигурируют только симметричные тензоры:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \vec{v}' \otimes \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \otimes \vec{v}' + \vec{v}' \otimes (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + ((\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}) \otimes \vec{v}' \right] &= \\ = -[\vec{v}' \otimes \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} p \otimes \vec{v}'] + \mu [\vec{v}' \otimes \Delta \vec{U} + (\Delta \vec{U}) \otimes \vec{v}']. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Далее подставим выражение для мгновенной скорости как сумму осредненной  $\vec{V}$  и пульсационной  $\vec{V}'$ :

$$\vec{U} = \vec{V} + \vec{V}', \quad (4.6.3)$$

и выполним операцию осреднения по правилам осреднения Рейнольдса.

Для слагаемых левой части уравнения (4.6.2), содержащих локальное ускорение, подстановка представления (4.6.3) дает:

$$\vec{v}' \otimes \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V} + \vec{V}') + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V} + \vec{V}') \otimes \vec{v}' = \vec{v}' \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \otimes \vec{v}' + \vec{v}' \otimes \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} \otimes \vec{v}'.$$

После операции осреднения по правилам осреднения Рейнольдса слагаемые, содержащие произведения осредненных и пульсационных величин, пропадают, и в итоге остаются диады:

$$\vec{v}' \otimes \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} \otimes \vec{v}'.$$

Заметим, что здесь у произведений неявно присутствует знак тензорного умножения  $\otimes$ , который отброшен, для краткости записи. Эта сумма может быть записана в компактном виде:

$$\vec{v}' \otimes \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} \otimes \vec{v}' = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}' \vec{v}' = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}' \otimes \vec{V}'.$$

В итоге, после операции осреднения слагаемые левой части уравнения (4.6.2), содержащие локальное ускорение, дают выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}$$

Для членов, содержащих конвективное ускорение в левой части уравнения после подстановки разбienia (4.6.3) в уравнение (4.6.2) имеем:

$$\begin{aligned} & \vec{v}' \left[ (\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{v} + \vec{v}') + \left[ ((\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{\nabla}) (\vec{v} + \vec{v}') \right] \vec{v}' = \\ & = \vec{v}' (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v}' (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' + \vec{v}' (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v}' (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' + \\ & + [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] \vec{v}' + [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}'] \vec{v}' + [(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] \vec{v}' + [(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}'] \vec{v}' = \\ & = [\vec{v}' \otimes (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \otimes \vec{v}'] + [\vec{v}' \otimes (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \otimes \vec{v}'] + \\ & + [\vec{v}' \otimes (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \otimes \vec{v}'] + [\vec{v}' \otimes (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \otimes \vec{v}']. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое после осреднения дает ноль, а остальные перед осреднением можно преобразовать:

$$\begin{aligned} & \vec{v}' \otimes (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' + [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}'] \otimes \vec{v}' = V_i \bar{e}_i V_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \bar{e}_k + \\ & + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i V_k \bar{e}_k = \left[ V_i V_j \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} + V_j \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} V'_k \right] \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \otimes \vec{v}'. \end{aligned}$$

Тем самым после осреднения второе слагаемое принимает вид:

$$(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'},$$

т. е. возникла конвективная производная тензора пульсаций.

Третье слагаемое:

$$\begin{aligned} & \vec{v}' \otimes (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + [(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] \otimes \vec{v}' = V_i \bar{e}_i V'_j \frac{\partial}{\partial x_j} V_k \bar{e}_k + V'_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \bar{e}_i V'_k \bar{e}_k = \\ & = V_i V'_j \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \bar{e}_i \bar{e}_k + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V'_j V'_k \bar{e}_i \bar{e}_j = \vec{v}' \otimes \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^T \cdot \vec{v}' \otimes \vec{v}'. \end{aligned}$$

После осреднения имеем:

$$\overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^T \cdot \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'},$$

т. е. в результате получается вращательная производная тензора пульсаций (аналог вращательной части для материальной производной Ривлина).

Последнее слагаемое:

$$\begin{aligned} \vec{v}'(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla})\vec{v}' + [(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla})\vec{v}']\vec{v}' &= \left( V_j V'_j \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} + V'_j \frac{\partial V'_i V'_k}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i \vec{e}_k = \\ &= \left( + \frac{\partial V'_j}{\partial x_j} V'_i V'_k \right) \vec{e}_i \vec{e}_k = \left( V'_j \frac{\partial}{\partial x_j} V'_i V'_k \right) \vec{e}_i \vec{e}_k = \left( V'_i V'_j \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} V'_j V'_k \right) \vec{e}_i \vec{e}_k = \\ &= (\vec{v}' \otimes \vec{v}') \cdot \vec{\nabla} \vec{v}' + \vec{\nabla} \vec{v}'^T \cdot (\vec{v}' \otimes \vec{v}') = \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}' \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}'). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что для несжимаемой жидкости  $\left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_j} \right) = 0$ . В итоге, четвертое

слагаемое дает дивергенцию для тензора третьего ранга пульсаций скорости. Следует отметить, что в скалярном виде, в терминах компонент это слагаемое

записывается как  $\frac{\partial}{\partial x_j} V'_j V'_i V'_k$ , а не  $\frac{\partial}{\partial x_j} V'_i V'_j V'_k$ , как это имеет место во многих

публикациях [8; 9]. После операции осреднения для четвертого слагаемого получаем следующий тензор второго ранга

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}' \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}'),$$

т. е. дивергенцию осредненного тензора третьего ранга для пульсаций скорости, которая является тензором второго ранга. Простейшие преобразования дают:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' \vec{v}' \vec{v}' &= \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} V'_i V'_j V'_s \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_s = (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) \frac{\partial}{\partial x_k} V'_i V'_j V'_s \vec{e}_j \otimes \vec{e}_s = \\ &= \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} V'_i V'_j V'_s \vec{e}_j \otimes \vec{e}_s = \frac{\partial}{\partial x_k} V'_k V'_j V'_s \vec{e}_j \otimes \vec{e}_s = \\ &= \left( \frac{\partial V'_k}{\partial x_k} V'_j V'_s + V'_k \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} V'_s + V'_k V'_j \frac{\partial V'_s}{\partial x_k} \right) \vec{e}_j \otimes \vec{e}_s. \end{aligned}$$

Первое слагаемое, согласно формуле (2.4.4), для несжимаемой жидкости равно нулю, а два других дают:

$$\begin{aligned}
 & V'_k V'_s \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} \bar{e}_j \otimes \bar{e}_s + V'_k V'_j \frac{\partial V'_s}{\partial x_k} \bar{e}_j \otimes \bar{e}_s = \\
 & = (\bar{v}' \otimes \bar{v}') \cdot (\bar{\nabla} \bar{v}')^T + (\bar{v}' \otimes \bar{v}') \cdot \bar{\nabla} \bar{v}' = (\bar{v}' \otimes \bar{v}') \cdot 2\underline{S}',
 \end{aligned}$$

где  $\underline{S}'$  – тензор пульсационных скоростей деформаций:

$$\underline{S}' = \frac{1}{2} \left[ \bar{\nabla} \bar{v}' + (\bar{\nabla} \bar{v}')^T \right]. \quad (4.6.4)$$

Выполняя теперь операцию осреднения по Рейнольдсу, получаем для несжимаемой жидкости соотношение:

$$\overline{(\bar{v}' \otimes \bar{v}')} \cdot 2\underline{S}' = \bar{\nabla} \cdot \overline{(\bar{v}' \otimes \bar{v}' \otimes \bar{v}')}. \quad (4.6.5)$$

Для правой части уравнения (4.6.2) (учитывая, что давление также содержит осредненную часть и пульсационную, в результате чего мгновенное давление будем представлять в виде  $p + p'$ , где  $p$  трактуется как осредненное давление, а  $p'$  – как пульсационное) первое слагаемое можно записать следующим образом:

$$\bar{v}' \otimes \bar{\nabla} p + \bar{v}' \otimes \bar{\nabla} p' + \bar{\nabla} p \otimes \bar{v}' + \bar{\nabla} p' \otimes \bar{v}'.$$

Очевидно, после операции осреднения первое и третье слагаемое приводят к нулям, поэтому преобразованию подвергнем только оставшиеся, образующие в сумме симметричный тензор второго ранга (поскольку сумма диады с ее транспонированной всегда является симметричной). Эти слагаемые можно представить в виде:

$$\bar{v}' \otimes \bar{\nabla} p' + \bar{\nabla} p' \otimes \bar{v}' = \bar{\nabla} (p' \bar{v}') + \left[ \bar{\nabla} (p' \bar{v}') \right]^T - p' 2\underline{S}'.$$

Операция осреднения приводит к следующему выражению для рассматриваемого первого слагаемого правой части (4.6.2):

$$\bar{\nabla} \overline{(p' \bar{v}')} + \left[ \bar{\nabla} \overline{(p' \bar{v}')} \right]^T - 2\overline{p' \underline{S}'}.$$

Это же слагаемое можно записать и в виде:

$$\overline{\bar{v}' \otimes \bar{\nabla} p' + \bar{\nabla} p' \otimes \bar{v}'}.$$

Второе слагаемое правой части (4.6.2) можно преобразовать, используя для лапласиана диады соотношение:

$$\Delta \vec{V} \otimes \vec{V} = \vec{V} \otimes \Delta \vec{V} + (\Delta \vec{V}) \otimes \vec{V} + 2 \vec{\nabla} \vec{V}^T \cdot \vec{\nabla} \vec{V}.$$

Доказательство этого соотношения не составляет трудностей, как и аналогичного соотношения для лапласиана произведения двух скалярных функций:

$$\Delta f \varphi = \varphi \Delta f + f \Delta \varphi + 2 \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} f.$$

Тогда второе слагаемое правой части уравнения (4.6.2) после осреднения дает выражение:

$$\mu \overline{\Delta \vec{V}' \otimes \vec{V}'} - 2 \mu \overline{(\vec{\nabla} \vec{V}')^T \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'},$$

или, несколько иначе, записывая лапласиан тензора второго ранга через дивергенцию тензора третьего ранга:

$$\mu \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{V}' \otimes \vec{V}') - 2 \mu \overline{(\vec{\nabla} \vec{V}')^T \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'}$$

После подстановки итогов преобразований в формулу (4.6.2) получаем уравнение переноса тензора пульсаций  $\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}$  для несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} \right] = & \mu \overline{\Delta \vec{V}' \otimes \vec{V}'} - 2 \mu \overline{(\vec{\nabla} \vec{V}')^T \cdot \vec{\nabla} \vec{V}'} - \\ & - \overline{(\vec{V}' \otimes \vec{\nabla} p' + \vec{\nabla} p' \otimes \vec{V}')} - \\ & - \rho \left[ \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \vec{V}^T \cdot \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} \right] - \\ & - \rho \vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}' \otimes \vec{V}'}. \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Если тензор пульсаций представить в виде тензора напряжений Рейнольдса  $\underline{R} = -\rho \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}$ , то в рассматриваемом случае несжимаемой жидкости уравнение (4.6.6) приводит к следующему уравнению переноса:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = & -i\bar{V} \cdot \left[ \bar{\nabla} \underline{R} + \rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right] + \left[ \overline{\bar{V}' \otimes \bar{\nabla} p'} + \overline{\bar{\nabla} p' \otimes \bar{V}'} \right] - \\ & + \left( \underline{R} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} - \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \underline{R} \right) + 2\mu \overline{(\bar{\nabla} \bar{V}')^T} \cdot \bar{\nabla} \bar{V}'. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Заметим, что слагаемое  $\overline{\bar{V}' \otimes \bar{\nabla} p'} + \overline{\bar{\nabla} p' \otimes \bar{V}'}$  может быть записано и в виде:

$$\bar{\nabla} (p' \bar{V}') + \left[ \overline{\bar{\nabla} (p' \bar{V}')} \right]^T - 2p' \underline{S}'.$$

В компонентном виде уравнение (4.6.6) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \overline{V'_i V'_k} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{V'_i V'_k} - \rho \overline{V'_j V'_i V'_k} \right] - \rho \left[ \overline{V'_i V'_j} \frac{\partial V'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \overline{V'_j V'_k} \right] - \\ & - \left[ \overline{V'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k}} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \overline{V'_k} \right] - 2\mu \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_k}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

Если к тензорному уравнению (4.6.6) применить операцию взятия следа, то можно получить скалярное уравнение. Для этого учтем, что для произвольного тензора  $\underline{A}$  его след:  $tr \underline{A} = \underline{A} : \underline{E} = A_{ii}$ , а для скалярного произведения тензоров второго ранга след записывается в виде:  $tr(\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\underline{A} \cdot \underline{B}) : \underline{E} = A_{ik} B_{ki}$ .

Вычислим следы тензоров, входящих в уравнение (4.6.6):

$$\begin{aligned} tr \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} &= \overline{V'_i V'_i}, \\ \left( \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} \right) : \underline{E} &= \overline{V'_i V'_j} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j}, \\ \left( \bar{\nabla} \bar{V}^T \cdot \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right) : \underline{E} &= \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \overline{V'_j V'_i}, \end{aligned}$$

Заметим, что два последних выражения одинаковы в силу симметрии тензора  $\overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'}$ . Далее:

$$\begin{aligned} \left( \bar{\nabla} \cdot \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right) : \underline{E} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{V'_j V'_i V'_i}, \\ \left( \overline{\bar{V}' \otimes \bar{\nabla} p'} + \overline{\bar{\nabla} p' \otimes \bar{V}'} \right) : \underline{E} &= 2V'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

$$\mu \overline{\Delta \vec{V}' \otimes \vec{V}'} : \underline{E} = \mu \overline{\Delta V'_i V'_i},$$

$$\mu \left[ (\overline{\nabla \vec{V}'} \cdot \nabla \vec{V}') \right] : \underline{E} = \mu \frac{\overline{\partial V'_i \partial V'_i}}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Тогда из уравнения (4.6.6) получается уравнение переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций  $k$  в виде:

$$\rho \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \overline{V'_i V'_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{V'_j V'_i V'_i} \right] = \mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \mu \frac{\overline{\partial V'_i \partial V'_i}}{\partial x_j \partial x_j} + \overline{V'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}}. \quad (4.6.9)$$

Видно, что это выражение совпадает с (4.5.11), поскольку  $\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p' V'_j} = \overline{V'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}}$ .

Эти результаты для тензора пульсаций и, следовательно, для тензора напряжений Рейнольдса можно получить и по-другому. Для этого надо записать уравнение Навье-Стокса для мгновенных и для осредненных скоростей:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{U}) \quad (4.6.10)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{V} - \rho \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}) \quad (4.6.11)$$

Сначала умножаем уравнение (4.6.10) тензорно на мгновенную скорость  $\vec{U}$  слева и справа (для транспонирования) и складываем результаты этих умножений. После этого мгновенную скорость представляем в виде суммы осредненной и пульсационной  $\vec{U} = \vec{V} + \vec{V}'$  и выполняем операцию осреднения по Рейнольдсу. В результате получаем уравнение:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V} \otimes \vec{V} + \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}) + \rho \nabla \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V} \otimes \vec{V} + \vec{V} \otimes \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} + \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}} \otimes \vec{V}' + \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}' \otimes \vec{V}'} + \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}' \otimes \vec{V}}) = -(\vec{V} \otimes \nabla p + \nabla p \otimes \vec{V} + \overline{\vec{V}' \otimes \nabla p'} + \overline{\nabla p' \otimes \vec{V}'}) + \mu (\vec{V} \otimes \nabla \cdot \nabla \vec{V} + \overline{\vec{V}' \otimes \nabla \cdot \nabla \vec{V}'} + \nabla \cdot \overline{\nabla \vec{V}' \otimes \vec{V}'}).$$

Затем уравнение (4.6.11) умножаем на осредненную скорость  $\vec{V}$  тензорно слева и справа и складываем. В результате получаем уравнение:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} \otimes \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V} \otimes \vec{V}) \right] = - \left[ \vec{V} \otimes \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} p \otimes \vec{V} \right] - \quad (4.6.13)$$

$$- \rho \left[ \vec{V} \otimes \vec{\nabla} \cdot \vec{V}' \otimes \vec{V}' + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}' \otimes \vec{V}' \otimes \vec{V} \right] + \mu \left[ \vec{V} \otimes \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \otimes \vec{V} \right].$$

Вычитая это уравнение из уравнения (4.6.12), т. е. убирая чисто средние величины, получаем искомое уравнение (4.6.6).

Возникающий в сжимаемой жидкости тензор  $\vec{\nabla} \rho \vec{V}$  можно представить в следующем виде:

$$\vec{\nabla} \rho \vec{V} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_j \vec{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_j \vec{e}_k \vec{e}_j = \quad (4.6.14)$$

$$= \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x_k} V_j + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right] \vec{e}_k \vec{e}_j = \vec{\nabla} \rho \otimes \vec{V} + \rho \vec{\nabla} \vec{V}$$



## ГЛАВА 5 . МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В РАМКАХ ПОДХОДА О. РЕЙНОЛЬДСА

### 5.1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И ЕЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Как уже указывалось в Главе 2, система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости может быть записана следующим образом [53]:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) \right] = \rho \vec{f} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}, \quad (5.1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

В качестве начальных условий для системы (5.1.1) может быть выбрано состояние покоя рассматриваемой динамической системы, когда скорость жидкости равна нулю, а давление равно некоторому начальному давлению  $p_0$ , тогда:

$$V_j(x_i, 0) = 0, \quad p(x_i, 0) = p_0, \quad (5.1.2)$$

или же, при обтекании системы потоком жидкости со скоростью  $\vec{V}^0$ , скорость везде в набегающем потоке равна  $\vec{V}^0$ , а давление равно некоторому начальному давлению  $p_0$ :

$$V_j(x_i, 0) = V_j^0, \quad p(x_i, 0) = p_0. \quad (5.1.3)$$

На твердых поверхностях  $W$  должно выполняться условие прилипания (равенство нулю всех компонент скорости):

$$V_j(x_i, t)|_W = 0. \quad (5.1.4)$$

Следует отметить, что условие (5.1.4) является допущением, подтвержденным многочисленными измерениями скорости потока вблизи стенок, согласно которым скорость действительно стремится к нулю при приближении к поверхности. Косвенным подтверждением справедливости условия (5.1.4) является то, что полученные на его основе результаты моделирования течений хорошо

соответствуют экспериментальным исследованиям. Выполнение условия прилипания не зависит ни от материала, ни от состояния поверхности, ни от характеристик сплошной среды. Исключения могут составлять лишь сильно разреженные газы. Очевидно, что в случае движения тела в покоящейся жидкости это условие будет записываться следующим образом:

$$V_i(x_j, t) \Big|_W = V_i^0 + \varepsilon_{ij} \omega_k x_j. \quad (5.1.5)$$

Это означает, что скорость жидкости во всех точках поверхности тела равна скорости точек этой поверхности, которая складывается из скорости полюса  $\vec{V}^0$  и скорости вращения относительно полюса  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ .

На большом удалении от обтекаемой системы должно выполняться условие убывания возмущений:

$$V_j(x_i, t) = 0, \quad p(x_i, t) = p_0 \quad (5.1.6)$$

для условия (5.1.2), или

$$V_j(x_i, t) = V_j^0, \quad p(x_i, t) = p_0 \quad (5.1.7)$$

для условия (5.1.3).

Непосредственное интегрирование системы уравнений Навье–Стокса наталкивается на ряд трудностей, среди которых следует упомянуть следующие:

- первое уравнение системы (5.1.1) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, то есть не имеет общего решения;
- это уравнение содержит производные как по времени, так и по пространству;
- его невозможно однозначно отнести ни к одной из классификационных групп дифференциальных уравнений (параболическим, эллиптическим или гиперболическим) – их тип может меняться прямо в процессе расчетов;

- при решении конкретных инженерных задач могут возникать очень сложные граничные условия (и геометрические и динамические).

В силу указанных трудностей точное решение уравнений Навье–Стокса возможно лишь в небольшом количестве частных случаев [201], и исключительно для ламинарных течений. В то же время, подавляющее большинство течений, встречающихся на практике, являются турбулентными. При этом теоремы существования и единственности глобального решения системы (5.1.1) также получены для ограниченного количества случаев [31; 32; 74; 107; 201]. Поставленная в монографии О.А. Ладыженской [31] проблема о единственности слабого решения Хопфа (существующего на бесконечно большом промежутке времени) до настоящего времени остается нерешенной. То есть остается неясным, насколько адекватно уравнения Навье–Стокса описывают реальные течения жидкости. Известны попытки получить приближенные асимптотические решения уравнений Навье–Стокса, однако к настоящему времени они не увенчались успехом (например, [36; 156; 183]). Поэтому основным путем решения сформулированной краевой задачи на сегодняшний день является использование численного моделирования.

Помимо системы (5.1.1) для исследования движения жидкости вполне возможно использовать и более общий подход, основанный на анализе исходных уравнений Больцмана [15; 66]. В начале XX века S. Chapman и D. Enskog предложили асимптотический метод их решения, который в линейном приближении приводит к системе (5.1.1) [90]. Однако подходы такого рода в настоящее время недостаточно апробированы, а опубликованные результаты (например, [20; 21; 68]) относятся исключительно к движению газообразных сред. Применение же данных подходов к анализу движения капельных жидкостей в настоящее время требует непомерных машинных ресурсов, и нуждается в специальных исследованиях особенно с точки зрения моделирования нестационарных течений.

## 5.2. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В настоящее время можно выделить три основных подхода к решению задач динамики вязкой жидкости: прямое численное моделирование, решение осредненных по времени уравнений Навье–Стокса (уравнений Рейнольдса), и метод крупных вихрей. Помимо них существуют и различные гибридные подходы, содержащие в себе отдельные их черты.

Первый подход связан с непосредственным решением системы (5.1.1), два других используют преобразование уравнений Навье–Стокса, в результате которого отбрасываются мелкомасштабные турбулентные пульсации.

В последнее время рядом исследователей предпринимаются попытки проведения расчетов турбулентных течений без привлечения каких-либо моделей турбулентности (no-model simulations – «расчеты без модели» или «не-полное» прямое численное моделирование). Подобные численные исследования в отдельных случаях (как для фундаментальных, так и ряда прикладных задач) позволяют получить приемлемые результаты при умеренных временных затратах. Однако применимость подобного метода моделирования в общем случае нуждается в дополнительных исследованиях [16].

Ниже излагаются основные особенности указанных подходов.

Метод прямого численного моделирования турбулентности (Direct Numerical Simulation, DNS) представляется наиболее логичным подходом, предоставляющим возможность всестороннего изучения турбулентных явлений в случаях, когда экспериментальные исследования затруднены или вообще невозможны [120; 157].

Этот подход базируется на единственном предположении о том, что уравнения Навье–Стокса пригодны для описания любых движений сплошной

среды. В приложении к рассматриваемым видам течений метод DNS предполагает решение дискретного аналога уравнений (5.1.1) без привлечения каких-либо дополнительных уравнений.

Для получения решения в рамках такого подхода все значимые временные и пространственные масштабы течения должны разрешаться полностью. Отношение наибольших и наименьших пространственных масштабов течения определяет число степеней свободы, необходимое для численного представления поля течения в любом из трех измерений. Наибольший масштаб турбулентных образований в ограниченной области имеет порядок характерного размера этой области ( $L$ ). В качестве наименьшего масштаба длины обычно выбирается диссипативный масштаб, введенный А.Н. Колмогоровым [24]:

$$l_\varepsilon = \left( \frac{V^3}{\varepsilon} \right)^{1/4},$$

где  $\varepsilon$  – скорость диссипации энергии турбулентных пульсаций, оцениваемая как  $\varepsilon = \frac{V^3}{L}$ , где  $V$  – характерная скорость. Тогда для отношения наибольшего масштаба к наименьшему, определяющего число степеней свободы потока, можно получить следующую оценку [70]:

$$N = \frac{L}{l_\varepsilon} = \text{Re}^{3/4},$$

следовательно,  $N^3 \geq \text{Re}^{9/4}$ .

Заметим, что в работе Ю.Л. Климонтовича [105] приводится более скромная оценка числа степеней свободы:

$$N = \left( \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\text{кр}}} \right)^{9/4},$$

где  $\text{Re}_{\text{кр}}$  – критическое число Рейнольдса.

Кроме того, чтобы результаты были пригодны для определения средних величин, расчеты должны продолжаться в течение времени  $\tau = L/V$  секунд, где

$V$  – характерная скорость, а шаг по времени не должен превышать величину  $l_0/V$ . Следовательно, для одного расчетного случая необходимо выполнить  $Re^n$  шагов по времени. Тогда суммарное число шагов по времени должно иметь порядок  $Re^{4n} \geq Re^3$ . Принимая во внимание эти соотношения и учитывая порядок числа Рейнольдса натуральных морских объектов, а также мощность современных вычислительных машин, можно утверждать, что для решения задачи динамики морских подвижных объектов метод DNS в ближайшие годы вряд ли получит распространение.

Тем не менее, результаты прямого численного моделирования турбулентности даже при сравнительно невысоких значениях числа Рейнольдса являются весьма востребованными. Детальный анализ результатов таких расчетов может способствовать прояснению физических механизмов, определяющих специфику тех или иных течений, послужить надежной опорой при разработке и тестировании подходов, позволяющих моделировать течения при реальных числах Рейнольдса.

Прямое численное моделирование впервые, по-видимому, было использовано в работе S.A. Orszag и G.S. Patterson [160]. В работе У. Шуманна и др. [70] произведено прямое численное моделирование вторичных течений в канале. В нашей стране этот подход был развит Б.Л. Рождественским и сотрудниками в МИФИ применительно к моделированию перехода от ламинарного режима к турбулентному в трубах [55], а Н.В. Никитиным был осуществлен расчет турбулентного течения и ламинарно-турбулентного перехода в круглой трубе [43; 44]. Обзор результатов, полученных на базе прямого численного моделирования турбулентности можно найти в работах [11; 12; 70; 157]. В целом можно сказать, что полученные результаты вполне соответствуют экспериментальным исследованиям по качеству и сильно превосходят его по количеству получаемой информации. Однако следует учитывать, что существующие в настоящее время вычислительные мощности ограничивают применение

прямого численного моделирования даже для простых геометрических конфигураций.

Динамика роста производительности вычислительных машин хорошо продемонстрирована в работе J. Jimenez [130]. По оценкам автора этой работы, расчет развитой турбулентности вблизи реальных объектов требует  $10^{12} \div 10^{15}$  расчетных точек. Такое число точек, по мнению J. Jimenez, может быть рассчитано лишь в отдаленном будущем. Действительно, в 1987 году было рассчитано турбулентное течение с  $Re^* = 180$ , в 1997 году с  $Re^* = 590$ , в 2003 году с  $Re^* = 950$ , где  $Re^* = V^* \delta / \nu$  (здесь  $V^*$  – динамическая скорость,  $\delta$  – толщина вязкого подслоя).

Однако, как упоминалось ранее, до настоящего момента отсутствует доказательство существования сильного решения уравнений Навье–Стокса в трехмерном пространстве при больших числах Рейнольдса и на больших промежутках времени, что уже обсуждалось в п. 5.1. Это делает спорными любые выводы, сделанные на основе решения данных уравнений.

Модель крупных вихревых структур (Large Eddy Simulation, LES) использует альтернативный подход, в котором большие вихри решены в нестационарной постановке с использованием системы так называемых «фильтрующих» уравнений [10]. Набор «фильтрующих» уравнений по существу служит для исключения из расчета подсеточных (SubGrid Scale, SGS) вихрей, т. е. вихрей, размер которых меньше ячеек расчетной сетки. При этом как правило предполагается, что линейный масштаб расчетной сетки не превосходит интегральный масштаб турбулентности в данной области потока. Процесс фильтрации требует добавления специальных уравнений для замыкания всей системы [147].

В случае развитой турбулентности закономерности мелкомасштабного движения близки к универсальным (т. е. слабо зависят от типа течения и граничных условий), следовательно можно ожидать, что для описания неразре-

шаемого движения в рамках модели LES могут быть использованы относительно простые, не требующие детальной настройки модели (см., например, [11; 161]). Данный подход был использован J.W. Deardorf [101] для исследования течения в круглой трубе. Позднее А. Leonard [145] показал, что если внутри ячейки осредненная скорость изменяется, то при фильтрации могут возникать дополнительные напряжения (напряжения Леонарда). Хороший анализ проблем метода крупных вихрей выполнен в обзоре U. Piomelli и E. Balaras [162].

В методе крупных вихрей расчетная область разделяется на внешнюю область и внутреннюю, примыкающую к стенке. В случае простых геометрических характеристик потока течение во внутренней области описывается пристеночными функциями (например, логарифмическим профилем Л. Прандтля и Т. Кармана) либо упрощенными уравнениями гидродинамики. Течение во внешней области рассчитывается с использованием параметризации J. Smagorinsky [187], M. Germano [115] или подобной, или же с помощью иных соображений о связи подсеточных напряжений с тензором градиента осредненной скорости (например, [126]). Иногда для параметризации подсеточных эффектов используют соображения подобия, ренормализационной группы или условного осреднения [151]. По-видимому, наиболее перспективным в этом подходе является поиск аналитической структуры для мелкомасштабной составляющей турбулентности. Наибольший интерес в этом смысле вызывают подходы, предложенные в работах H. Mouři [159], J. Burgers [86] и T. Lundgren [148]. Одна из трудностей данного подхода состоит в аналитическом описании вихря для произвольного вида тензора градиента скорости [156; 176; 183].

На сегодняшний день успешное применение модели LES для решения инженерных задач было осуществлено только в достаточно простых геометрических областях [108; 112; 171; 176], что в основном связано с высокими

требованиями данной модели к вычислительным ресурсам. Модель LES использует пространственную дискретизацию высокого порядка, что позволяет разрешить большой диапазон масштабов турбулентности, однако при этом имеет место ухудшенная точность решения осредненных параметров потока в LES модели, что не всегда указывается авторами.

Таким образом, использование LES для практических расчетов в настоящее время затруднительно в связи с большими требованиями к вычислительным ресурсам. Тем не менее, данный подход представляется весьма перспективным, и в дальнейшем постепенно выйдет на ведущие позиции в области моделирования турбулентных течений.

Метод решения осредненных по времени уравнений Навье–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes Equations, RANS) является одним из вариантов обхода указанных выше трудностей. Этот подход был предложен в 1894 году О. Рейнольдсом [170]. Как уже обсуждалось в п. 3.1, суть подхода заключается в разделении всех входящих в уравнения движения мгновенных величин на осредненные и пульсационные составляющие. В результате последующего осреднения по времени (используя разработанные Рейнольдсом правила осреднения) в правой части уравнений движения появляется дополнительный по сравнению с исходным уравнение член – это дивергент некоторых напряжений, являющихся результатом взаимодействий между флуктуациями в поле течения и носящих название турбулентных напряжений или напряжений Рейнольдса. Напряжения Рейнольдса появляются вследствие реакции потока на конвективный перенос количества движения через жидкие площадки вследствие пульсаций скорости. Очевидно, что система уравнений О. Рейнольдса (3.2.4) является незамкнутой, так как содержит заранее неизвестные компоненты тензора турбулентных напряжений. В теории турбулентных течений решение возникшей проблемы замыкания было бы возможно, если бы была создана общая теория турбулентности, которая содержала бы не только качественное описание основных процессов, но и количественные соотношения,

позволяющие определять характеристики течения. Построение строгой в математическом смысле теории затруднено во многом тем, что по большому счету едва ли возможно дать исчерпывающее определение самой турбулентности – слишком уж сложна природа этого явления.

С другой стороны, разнообразные технические приложения теории требовали оперативных ответов, пусть приближенных, но научно обоснованных. Пытаясь установить связь между пульсационными и осредненными параметрами потока Ж. Буссинеск высказал идею о возможности описания турбулентных течений путем введения в рассмотрение понятия турбулентной (вихревой) вязкости [82]. Эта гипотеза послужила отправной точкой при разработке методов RANS, на ее основе стала развиваться так называемая полуэмпирическая теория турбулентности, в которой наряду с теоретическими закономерностями и результатами расчетов широко используются экспериментальные данные.

Начало этой теории положили Л. Прандтль и Т. Карман, которые построили свои теории, опираясь на результаты опытов А. Никурадзе по течению жидкости в трубах при различных числах Рейнольдса, что привело к созданию алгебраических моделей турбулентности. В дальнейшем теория турбулентности Прандтля–Кармана развивалась и модифицировалась [27; 33; 39; 50; 69; 72], на ее основе решались многие практические задачи [67]. Важным достоинством этой теории является возможность получить решение в квадратурах, что облегчает анализ полученных результатов. С другой стороны, крупным ее недостатком является то обстоятельство, что проблема турбулентности в ней рассматривается упрощенно, поскольку изучаются не все статистические характеристики, а только самые важные для практики – в первую очередь осредненные скорости и осредненные значения квадратов и произведений пульсационных скоростей (так называемые моменты первого и второго порядков). Недостаток такого подхода также в том, что некоторые данные надо получать из экспериментов для каждой группы конкретных течений. Кроме того, эта

теория позволяет рассчитывать только стационарные течения, что сужает ее возможности.

Этих недостатков во многом лишены современные дифференциальные модели турбулентности, применение которых стало возможно с развитием вычислительной техники и вычислительных алгоритмов. Начало развитию таких моделей положил А.Н. Колмогоров [25], на базе идей которого сформировался удобный для вычислительных процедур метод решений уравнений Рейнольдса, содержащий различные модификации дифференциальных моделей переноса характеристик турбулентности и позволяющий эффективно моделировать разнообразные важные для практики турбулентные течения. Такой подход также предъявляет умеренные требования к вычислительным ресурсам по сравнению с рассмотренными ранее. В том случае, если осредненный поток является стационарным, основные уравнения не содержат производных по времени, и установившееся решение получается более экономичным с точки зрения затрат машинного времени. Все сказанное сделало данный подход в настоящее время основным для решения инженерных задач. Недостатком его, как и других методов, нацеленных на применение компьютерных технологий, является невозможность получения аналитических решений даже для простейших задач, например, течений в трубах и каналах.

Существуют также гибридные подходы, сочетающие в себе черты описанных ранее подходов, например, метод отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation, DES) [93; 193], RANS/LES подходы [100; 122; 163], и другие.

В качестве заключения можно упомянуть, что по существующим экспертным оценкам большого числа исследователей метод RANS будет преобладающим примерно до 30-х годов XXI века, далее примерно до 80-х годов наиболее популярным станет метод LES, а после 80-х годов численное моделирование турбулентных течений будет выполняться на базе метода DNS [58; 175; 188; 214].

В настоящей главе будет рассматриваться только метод RANS, его основы и особенности использования.

### 5.3. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА. ТЕНЗОР АНИЗОТРОПИИ

Наиболее очевидный подход к замыканию уравнений Рейнольдса базируется на использовании уравнений, выводимых непосредственно для компонент тензора турбулентных напряжений [198]. Данные уравнения для жидкости с постоянными свойствами автоматически получаются из системы (5.1.1), если разбить входящие в него величины на осредненные и пульсационные, затем умножить это уравнение тензорно как слева, так и справа на пульсационную составляющую скорости, произвести осреднение полученных уравнений, и далее сложить их. В результате выполнения этих операций было получено уравнение (4.6.6), которое можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}'}) + (\overline{\vec{v}} \cdot \nabla) (\overline{\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}'}) = & -\rho \overline{\vec{v}} \cdot (\overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}'}) - \\ & - [\overline{\vec{v}' \otimes \nabla p'} + \overline{\nabla p' \otimes \vec{v}'}] - \\ & - [(\overline{\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}'}) \cdot \overline{\nabla \vec{v}} + \overline{\nabla \vec{v}} \cdot (\overline{\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}'})] + \\ & + \overline{\nabla \cdot (\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}')} - \\ & - 2\rho \nu (\overline{\nabla \vec{v}'})^T \cdot \nabla \overline{\vec{v}'}. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Слева в данном уравнении учитывается перенос напряжений Рейнольдса осредненным потоком, первый член правой части – диффузию напряжений Рейнольдса, второй – корреляцию между пульсациями скорости и давления (по смыслу это тоже диффузия), третий – генерацию напряжений Рейнольдса за счет градиента осредненной скорости, четвертый – молекулярную диффузию, и пятый – диссипацию энергии турбулентности.

При этом корреляцию между пульсациями скорости и давления можно записать в таком виде:

$$\overline{\vec{v}' \otimes \vec{\nabla} p' + \vec{\nabla} p' \otimes \vec{v}'} = \left( \vec{\nabla} (\overline{p' \vec{v}'}) + \left[ \vec{\nabla} (\overline{p' \vec{v}'}) \right]^T \right) - \overline{p' (\vec{\nabla} \vec{v}' + (\vec{\nabla} \vec{v}')^T)},$$

где первое слагаемое правой части равенства представляет собою диффузию турбулентности за счет взаимодействия пульсаций давления и скорости, а второе – величину  $\underline{\Phi} = \overline{p' (\vec{\nabla} \vec{v}' + (\vec{\nabla} \vec{v}')^T)}$  – называют членом пераспределения, который учитывает обмен энергией между отдельными составляющими напряжений О. Рейнольдса вследствие взаимодействия пульсаций давления и касательных напряжений. Тогда уравнение переноса турбулентных напряжений запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}) + (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla}) (\rho \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \nu \vec{\nabla} (\overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}) - \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}'} - \\ & - \frac{1}{\rho} (\underline{E} \otimes \overline{\vec{v}' p'} + \overline{\vec{v}' p'} \otimes \underline{E}) \end{aligned} \right\} + \\ & + \overline{p' (\vec{\nabla} \vec{v}' + (\vec{\nabla} \vec{v}')^T)} - \\ & - \left[ (\rho \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}' + \vec{\nabla} \vec{v}' \cdot (\rho \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}) \right] - \\ & - 2\rho \nu (\vec{\nabla} \vec{v}')^T \cdot \vec{\nabla} \vec{v}' \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

или, деля обе части на плотность и вводя общепринятые обозначения [8], для несжимаемой жидкости можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}) + (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla}) (\overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}) = \vec{\nabla} \cdot {}^3 \underline{D} + \underline{\Phi} + \underline{P} - \underline{\varepsilon}, \quad (5.3.3)$$

где

$${}^3 \underline{D} = \nu \vec{\nabla} (\overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}) - \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}'} - \frac{1}{\rho} (\underline{E} \otimes \overline{\vec{v}' p'} + \overline{\vec{v}' p'} \otimes \underline{E}) \quad (5.3.4)$$

– диффузионный член, представляющий собой тензор третьего ранга и учитывающий пространственное распространение турбулентных напряжений за

счет вязкости, конвекции и взаимодействия пульсаций давления и скорости соответственно;

$$\underline{\Phi} = \frac{p'}{\rho} \overline{\left( \bar{\nabla} \bar{V}' + (\bar{\nabla} \bar{V}')^T \right)} \quad (5.3.5)$$

– член перераспределения, а так как это единственная неизвестная корреляция, которая содержит информацию о градиентах пульсаций, то очевидно, что этот член будет играть первостепенную роль в определении структуры тензора напряжений Рейнольдса для заданного поля градиентов осредненных скоростей;

$$\underline{P} = - \left[ \overline{(\bar{V}' \otimes \bar{V}') \cdot \bar{\nabla} \bar{V}} + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \overline{(\bar{V}' \otimes \bar{V}')} \right] = \frac{1}{\rho} \left( \underline{R} \cdot \bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V} \cdot \underline{R} \right) \quad (5.3.6)$$

– генеративный член, учитывающий генерацию турбулентности за счет переноса турбулентных напряжений градиентами осредненных скоростей;

$$\underline{\varepsilon} = 2\nu \overline{(\bar{\nabla} \bar{V}')^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V}'} \quad (5.3.7)$$

– диссипативный член, учитывающий диссипацию турбулентных напряжений на малых масштабах – тензор скорости диссипации.

Кроме того, в уравнение (5.3.3) возможно также добавить составляющие, учитывающие вращение потока, эффекты плавучести, массовые силы и другие.

Появление в уравнении переноса напряжений Рейнольдса тензора третьего ранга  $\overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}' \otimes \bar{V}'}$  опять делает систему уравнений турбулентного движения жидкости незамкнутой. Далее можно записать уравнение переноса для этого тензора третьего ранга – тогда появится под знаком дивергенции тензор четвертого ранга, и так далее – возникает цепочка Фридмана–Келлера [53]. Для решения конкретной задачи, связанной с расчетом турбулентного течения, эту цепочку необходимо разорвать в каком-либо месте, при этом вновь

возникает проблема выражения тензора  $N$ -го ранга  $\overline{\overline{\vec{V}^n \otimes \dots \otimes \vec{V}^n}}$  через тензор более низкого ранга  $(N-1)$ , который надо связать с тензором осредненных скоростей деформаций  $\underline{S}$ .

В настоящее время цепочка уравнений Фрийдмана–Келлера в различных моделях турбулентности обрывается по-разному на основе более–менее правдоподобных физических предположений. В зависимости от этого и происходит классификация этих теорий в литературе. Если замыкание уравнений происходит сразу же после появления в уравнении движения тензора напряжений Рейнольдса, то такие теории называют теориями первого порядка. В этих теориях на основе гипотезы Буссинеска [82] формулируется алгебраическая связь между тензором напряжений Рейнольдса и тензором осредненных скоростей деформаций. Как правило, такая связь учитывает только нелинейность турбулентных потоков, и описание турбулентности происходит в рамках теории изотропных сред (отсюда могут появляться такие эффекты как «отрицательная вязкость»). Теории второго порядка основаны на замыкании цепочки уравнений на уровне уравнений переноса для вторых корреляционных моментов (уравнение (5.3.3)). Входящие в это уравнение неизвестные члены (диффузионный, перераспределения, генерации и диссипации) аппроксимируются каким-либо образом. Отсюда ясно, что модели второго порядка имеют дело с дифференциальным определяющим соотношением. Теории третьего порядка основаны на замыкании на уровне уравнений переноса для третьих моментов.

Все указанные теории являются полуэмпирическими, поскольку они требуют введения констант, определяемых на основе обработки опытных данных. Здесь следует отметить, что все модели механики сплошных сред являются по сути полуэмпирическими. Поэтому точнее называть указанные теории турбулентности феноменологическими, что соответствует общим принципам построения моделей в механике сплошных сред [53].

В уравнениях энергии и диффузии для турбулентного режима течения появляются свои корреляции пульсационных величин, связанные с пульсациями температуры и концентрации, что усложняет проблему замыкания. В случае течений сжимаемой жидкости возникают пульсации плотности, количество корреляций резко возрастает, что приводит к необходимости использования правил осреднения по Фавру.

Из уравнения (5.3.2) можно получить уравнение переноса кинетической энергии турбулентности путем двойного скалярного умножения его на единичный тензор  $\underline{E} = \delta_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ , т. е. взятия следа левой и правой частей уравнения переноса (5.3.2). Тогда для движения несжимаемой жидкости в декартовой прямоугольной системе координат можно записать [40]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})k = \bar{\nabla} \cdot \left\{ \nu \bar{\nabla} k - \frac{1}{2} \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}' \otimes \bar{V}'} : \underline{E} - \frac{1}{\rho} \overline{\bar{V}' p'} \right\} - \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} : \bar{\nabla} \bar{V} - \nu \overline{(\bar{\nabla} \bar{V}')^T \cdot \bar{\nabla} \bar{V}'} : \underline{E},$$

где  $k = \frac{1}{2} \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} : \underline{E} = \frac{1}{2} tr(\overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'}) = \frac{1}{2} \overline{V'_i V'_i} = \frac{1}{2} (\overline{V_1'^2} + \overline{V_2'^2} + \overline{V_3'^2})$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Очевидно, что она связана с тензором напряжений Рейнольдса:  $tr(\underline{R}) = -2\rho k$ .

По аналогии с уравнением (5.3.3) и для этого, уже скалярного, уравнения можно записать:

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})k \right) = \bar{\nabla} \cdot \bar{D}_k + \rho P_k - \rho \varepsilon, \tag{5.3.8}$$

где:  $\bar{D}_k = \mu \nabla k - \frac{1}{2} \rho \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}' \otimes \bar{V}'} : \underline{E} - \overline{\bar{V}' p'}$  – диффузия кинетической энергии турбулентности, ее дивергенция является скалярной величиной, которая в компонентной форме записывается как:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D}_k = \mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\rho}{2} \overline{V'_i \frac{\partial}{\partial x_i} V'_j V'_j} - \overline{V'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}};$$

$P_k = -\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} : \nabla \vec{V} = -\overline{V'_i V'_j} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_j}$  – производство кинетической энергии турбулентности за счет переноса турбулентной энергии градиентами осредненных скоростей;

$\varepsilon = \rho \nu (\overline{\nabla \vec{V}'}^T \cdot \overline{\nabla \vec{V}'}) : \underline{E} = \rho \nu (\overline{\nabla \vec{V}'}^T : \overline{\nabla \vec{V}} = \mu \frac{\partial \overline{V'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{V'_i}}{\partial x_j}$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности.

Помимо тензора турбулентных напряжений  $\underline{R} = -\rho \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}$  при описании турбулентности часто используется тензор анизотропии [50]:

$$\underline{a} = \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} - \frac{2}{3} \underline{E},$$

Иногда его умножают на 1/2, получая [50; 77]:

$$\underline{b} = \frac{1}{2} \underline{a} = \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{2k} - \frac{1}{3} \underline{E}.$$

Тензор анизотропии  $\underline{a}$  представляет собою безразмерную девиаторную (так как  $a_{ii} = 0$ ) форму тензора напряжений Рейнольдса. Значения диагональных компонент этого тензора находятся в пределах  $[-2/3..4/3]$ , а недиагональных – в пределах  $[-1..1]$ . Инварианты тензора анизотропии согласно (1.5.3) равны:

$$I_a = a_{ii} = \frac{\overline{V'_i V'_i}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ii} = \frac{2k}{k} - 2 = 0,$$

$$II_a = \frac{1}{2} (a_{ii}^2 - a_{ij} a_{ji}) = -\frac{1}{2} a_{ij} a_{ji},$$

$$III_a = \frac{1}{3} tra^3 - \frac{1}{2} tra \cdot tra^2 + \frac{1}{6} tra = \frac{1}{3} a_{ij} a_{jm} a_{mi} - \frac{1}{2} a_{ii} a_{km} a_{mk} + \frac{1}{6} a_{ii} = \frac{1}{3} a_{ij} a_{jm} a_{mi}.$$

Часто их записывают в виде:  $II_a = a_{ij} a_{ji}$ ,  $III_a = a_{ij} a_{jm} a_{mi}$ .

Несложно убедиться, что материальную производную тензора анизотропии можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\underline{a}}{dt} = \frac{1}{k} \frac{d\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{dt} - \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k^2} \frac{dk}{dt}.$$

Используя это соотношение, уравнение переноса для турбулентных напряжений (5.3.3) можно переписать в терминах тензора анизотропии:

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + (\overline{\vec{V}} \cdot \nabla) \underline{a} - \nabla \cdot {}^3 \underline{D}^a = \frac{1}{k} \left( P - \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} P_k \right) + \frac{1}{k} \underline{\Phi} - \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{1}{\varepsilon} \underline{\varepsilon} - \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} + \underline{C} \right), \quad (5.3.9)$$

где появившийся новый тензор третьего ранга  ${}^3 \underline{D}^a$  связан с тензором  ${}^3 \underline{D}$  и вектором  $\underline{\bar{D}}_k$  следующим образом:  ${}^3 \underline{D}^a = \frac{1}{k} {}^3 \underline{D} - \frac{1}{k^2} \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}' \otimes \bar{D}}_k$ , а член  $\underline{C}$  добавляется для учета силы Кориолиса, возникающей при вращении рассматриваемого объема жидкости. Если вращение происходит с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , имеющей компоненты  $\omega_k$ , то вместо осредненного тензора завихренности  $\underline{\Omega}$  следует использовать следующую величину:

$$\underline{\Omega}^* = \underline{\Omega} + \underline{\Omega}^S, \quad (5.3.10)$$

где  $\underline{\Omega}^S = \underline{E} \times \vec{\omega}$ , или в компонентной форме  $\Omega_{ij}^S = \varepsilon_{jik} \omega_k \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ . Тогда член  $\underline{C}$ , учитывающий силы Кориолиса, записывается следующим образом [204]:

$$\underline{C} = \underline{a} \cdot \underline{\Omega}^S - \underline{\Omega}^S \cdot \underline{a} \quad (5.3.11)$$

Величину производства кинетической энергии турбулентности для течения несжимаемой жидкости можно также записать через тензор анизотропии в следующем виде:

$$P_k = -k \underline{a} : \underline{S}. \quad (5.3.12)$$

В этом несложно убедиться в результате прямой подстановки:

$$\begin{aligned} -k \underline{a} : \underline{S} &= - \left( \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} - \frac{2}{3} k \underline{E} \right) : \frac{1}{2} (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) = \\ &= - \frac{1}{2} \left( V_i' V_j' \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + V_i' V_j' \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= - V_i' V_j' \frac{\partial V_i}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

что совпадает с определением величины  $P_k$ .

## 5.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Замыкание уравнений Рейнольдса с помощью уравнений переноса компонент тензора турбулентных напряжений часто называют дифференциальными моделями напряжений Рейнольдса (Differential Reynolds Stress Models, DRSM, DSM). Можно видеть, что в правой части уравнения (5.3.3) содержится четыре члена, каждый из которых должен быть замкнут. Рассмотрим эти члены по отдельности.

### 5.4.1. Диффузия турбулентных напряжений

Как уже отмечалось выше, при замыкании уравнений Рейнольдса (3.2.1) с помощью уравнения переноса компонент тензора турбулентных напряжений (5.3.3) в силу появления третьего момента  $\overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}'}$  задача моделирования турбулентного течения вновь становится неопределенной. Поэтому диффузионный член (5.3.4), как и все остальные в данном уравнении, исключая генеративный (5.3.6) и член  $\nu \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}$ , учитывающий вязкую диффузию, нуждается в моделировании. Для его определения используются различные соображения (см. например [99] или [139]).

В диффузионном члене  ${}^3D$  уравнения (5.3.3) составляющая  $\nu \overline{\vec{v}' \otimes \vec{v}'}$  не нуждается в моделировании. Две других составляющих диффузии чаще всего моделируются в виде одного комбинированного диффузионного члена  ${}^3T$  [99]. Тогда



$${}^3D = \nu \bar{\nabla} \left( \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right) + {}^3T \quad (5.4.1)$$

где  ${}^3T = C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'}$ ,  $\bar{\nabla} \left( \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \right)$ , в компонентной форме это выражение запи-

сывается как  $T_{mij} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_i} \frac{\partial \overline{V'_i V'_j}}{\partial x_l}$ , в котором, как правило, принимается зна-

чение  $C_s=0.22$  или  $C_s=0.25$ .

Однако такой подход для записи диффузионного члена не сохраняет симметрию относительно циклической перестановки индексов, которой обладают третьи моменты, входящие в состав этого члена и вносящие основной вклад в турбулентную диффузию. Поэтому в работе [123] предложена такая форма записи диффузионного члена, содержащего только третьи моменты:

$$D_{mij} = -\overline{V'_m V'_i V'_j} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{V'_i V'_l} \frac{\partial \overline{V'_j V'_m}}{\partial x_l} + \overline{V'_j V'_l} \frac{\partial \overline{V'_m V'_i}}{\partial x_l} + \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \overline{V'_i V'_j}}{\partial x_l} \right), \quad (5.4.2)$$

где  $C_s=0.11$ , а два члена, учитывающие диффузию за счет молекулярной вязкости и пульсаций давления, отброшены, что вполне обосновано для течений с большими турбулентными числами Рейнольдса, которые определяются согласно выражению:

$$Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}.$$

Для таких течений роль отброшенных членов в диффузии турбулентных напряжений пренебрежимо мала. Более того, в большинстве случаев в пределах погрешности эксперимента баланс энергии турбулентности выполняется, даже если этими членами вовсе пренебречь [3]. Уравнение (5.4.2) представляет собою упрощение для точного уравнения переноса третьих моментов в предположении о тонком сдвиговом слое (когда продольная компонента скорости много больше поперечной,  $\bar{V}_1 \gg \bar{V}_2$ ), что позволяет диффузионный перенос  $V'_2$  и  $V'_3$  моделировать следующими выражениями:

$$-\overline{V_2'^2 V_2'} = 3C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{V_2'^2} \frac{\partial \overline{V_2'^2}}{\partial x_2}, \quad -\overline{V_3'^2 V_2'} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{V_2'^2} \frac{\partial \overline{V_3'^2}}{\partial x_2}.$$

Эта аппроксимация предполагает диффузию турбулентных напряжений за счет их градиентов, причем коэффициент диффузии для  $\overline{V_2'^2}$  втрое превышает таковой для  $\overline{V_3'^2}$ .

Используя такое же допущение, С. Shig предложил модель для третьих моментов, обладающую свойством симметрии по всем направлениям [185]:

$$D_{mij} = -\overline{V_m' V_i' V_j'} = 0.04 \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{V_i' V_j'}}{\partial x_m}. \quad (5.4.3)$$

Существуют и более сложные модели диффузионного переноса, например, предложенная Т. J. Craft [94], однако их апробация пока не позволяет сделать вывод об их возможностях.

В работе [3] произведено сравнение моделей (5.4.1)–(5.4.3) с моделью на основе уравнения переноса для третьих моментов  $\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}' \otimes \vec{V}'}$  (такие модели обсуждаются ниже) на примере моделирования течения за обращенной ступенькой. В результате систематических вычислений авторами было показано, что все эти модели качественно хорошо согласуются с экспериментом, однако при этом дают заниженные оценки уровней третьих моментов, так как ни одна из них не может учесть конвективные и порождающие эффекты третьих моментов для присоединяющихся сдвиговых течений. При этом наиболее адекватной выглядела модель (5.4.3), так как она позволяет получать примерно одинаковые уровни для всех третьих моментов. Однако в случае более простых, не присоединяющихся течений, все эти модели позволяют получать вполне адекватные результаты.

### 5.4.2. Диссипация турбулентности

При высоких числах Рейнольдса диссипация турбулентных напряжений в силу малости масштабов часто принимается как изотропная [141], тогда тензор диссипации можно представить в виде:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{E}, \quad (5.4.4)$$

где  $\varepsilon = \rho \nu \overline{(\nabla \vec{V}^i)^T : \nabla \vec{V}} = \mu \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_i}{\partial x_j}$  – скалярная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности. Такая аппроксимация неприменима вблизи стенок или свободной поверхности, т. е. когда тензор диссипации становится существенно анизотропным. В частности, в работе P.R. Spallart [192] было проведено моделирование течения вблизи плоской пластины с помощью DNS, и показано, что в непосредственной близости стенки  $\varepsilon_{11} \approx 2\varepsilon_{33} \approx 4\varepsilon_{22}$ , а при  $y^+ > 10^3$  анизотропия диссипации уже слаба. Однако на сегодняшний день эта аппроксимация представляется наиболее простой и логичной.

Диссипация кинетической энергии связана с наименьшими масштабами поля пульсаций, в то время как сама кинетическая энергия в основном содержится в наибольших масштабах пульсаций. Точное уравнение для скорости диссипации – уравнение (4.5.17) – содержит в себе большое количество членов, и все они относятся к процессам диссипативного масштаба:

Диссипация кинетической энергии связана с наименьшими масштабами поля пульсаций, в то время как сама кинетическая энергия в основном содержится в наибольших масштабах пульсаций. Точное уравнение для скорости диссипации – уравнение (4.5.17) – содержит в себе большое количество членов, и все они относятся к процессам диссипативного масштаба:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & -\frac{\partial}{\partial x_m} \left( \nu V'_m \frac{\partial V'_i}{\partial x_i} \frac{\partial V'_i}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial V'_m}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) - 2\nu \frac{\partial V'_i}{\partial x_m} \frac{\partial V'_i}{\partial x_i} \frac{\partial V'_m}{\partial x_i} \\ & - 2\nu^2 \frac{\partial^2 V'_i}{\partial x_m \partial x_i} \frac{\partial^2 V'_i}{\partial x_m \partial x_i} - 2\nu V'_m \frac{\partial V'_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_m \partial x_i} - 2\nu \left( \frac{\partial V'_i}{\partial x_i} \frac{\partial V'_i}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_i} \frac{\partial V'_i}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_m}. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Здесь первый член представляет собою комбинацию диффузионных процессов, второй и третий – генерацию и уничтожение величины  $\varepsilon$ , два оставшихся члена при достаточно высоких числах Рейнольдса имеют меньший порядок по сравнению с тремя первыми.

Все члены уравнения (5.4.5) (кроме источниковых) нуждаются в моделировании [99]. По этой причине общепринятым является эмпирический подход, основанный на трактовке диссипации как переноса энергии по спектру: кинетическая энергия больших энергонесущих вихрей переносится деформациями вихрей в присутствии градиентов осредненных скоростей к меньшим вихрям и так далее ко все меньшим масштабам, пока кинетическая энергия окончательно не преобразуется в тепло в результате вязких (молекулярных) воздействий. Если молекулярная вязкость изменится, то в результате поменяется и диссипативный масштаб, чтобы поглотить всю подведенную энергию. Поэтому, хотя механизм диссипации управляется процессами, возникающими на наименьших масштабах, она может быть наблюдаема как скорость переноса энергии, которая самоупорядочивается в соответствии с количеством поступающей энергии. В этом случае величина диссипации будет фактически определяться энергией на больших масштабах [196].

Основываясь на допущении о спектральном равновесии турбулентности, согласно которому скорость переноса энергии по спектру турбулентных масштабов постоянна и определяется количеством подводимой энергии, уравнение переноса для скорости диссипации при высоких числах Рейнольдса обычно принимают в следующей форме [140]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \bar{D}_\varepsilon + C_{e1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{e2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (5.4.6)$$

в котором двумя последними членами исходного уравнения (5.4.5) пренебрегают.

Здесь первый член – диффузионный перенос скорости диссипации, причем для вектора  $\bar{D}_\varepsilon$  в работе [123] предложена такая аппроксимация:

$$\bar{D}_\varepsilon = C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{\bar{V}' \otimes \bar{V}'} \cdot \bar{\nabla} \varepsilon = -C_\varepsilon \frac{k}{\rho \varepsilon} \bar{R} \cdot \bar{\nabla} \varepsilon.$$

Второй член в уравнении (5.4.6) характеризует генерацию скорости диссипации вследствие вихревого растяжения турбулентных вихрей. Здесь использовано допущение о прямой связи между скоростью переноса энергии через спектр и производством энергии на больших масштабах. Это предположение – очевидная слабость модели: когда турбулентность неравновесная (например, когда временной масштаб имеет тот же порядок или меньший, чем характерный временной масштаб турбулентности) мелкомасштабная турбулентность может не иметь достаточного времени, чтобы прийти в соответствие к изменению больших масштабов, и предполагаемая мгновенная связь между генерацией энергии и скорости диссипации оказывается под вопросом.

Третий член уравнения (5.4.6) характеризует уменьшение скорости диссипации вследствие влияния вязкости. Его форма обусловлена предположением о затухании однородной изотропной турбулентности в отсутствии генерации кинетической энергии [166]. В таком потоке ожидается, что турбулентность будет затухать в самоподобной форме, причем скорости затухания  $k$  и  $\varepsilon$  пропорциональны, то есть для отношения времен затухания  $k$  и  $\varepsilon$  можно записать:

$$\frac{k}{dk/dt} / \frac{\varepsilon}{d\varepsilon/dt} = C = -\frac{k}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon/dt}{\varepsilon},$$

здесь учтено, что при данных условиях уравнение (5.3.8) преобразуется к виду  $\frac{dk}{dt} = -\varepsilon$ . Обозначая коэффициент пропорциональности  $C$  как  $C_{\varepsilon 2}$  окончательно имеем:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}.$$

Следует отметить, что величины  $C_{\varepsilon 1}$  и  $C_{\varepsilon 2}$  могут быть как константами, так и функциями II и III инвариантов тензора анизотропии  $\underline{a}$  [198]. Однако, как правило, большинство авторов принимают эти величины константами.

Для получения константы  $C_{\varepsilon 2}$  используют теорию затухающей однородной изотропной турбулентности, в которой турбулентность затухает в условиях отсутствия производства кинетической энергии турбулентности. Из того, что  $\frac{dk}{dt} = -\varepsilon$ , следует, что турбулентная кинетическая энергия затухает согласно степенному закону [84]:  $k = A(t - t_0)^{-m}$ , где  $A$  – коэффициент затухания,  $t_0$  – начальный момент времени,  $m$  – степень затухания. Эти три параметра обычно принимаются константами. В настоящее время считается [166], что величина  $m$  находится в пределах  $1.15 \leq m \leq 1.45$ . На основе анализа экспериментальных данных в работе [123] предлагалось принимать  $C_{\varepsilon 2} = 2.0$ , однако более поздние исследования показали, что затухание турбулентности происходит несколько быстрее, потому в работе [140] было предложено значение  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ , что соответствует степени затухания  $m = 1.1$ . В модели С.Г. Speziale и др. [198] предлагается еще меньшее значение  $C_{\varepsilon 2} = 1.83$ , что соответствует показателю степени  $m = 1.2$ . По мнению авторов модели это значение несколько лучше согласуется с рядом экспериментальных исследований однородной турбулентности. Следует отметить, что если полагать значение  $k$  достаточно большим и воспользоваться «законом 5/3» А.Н. Колмогорова и А.М. Обухова [51] о том, что энергетический спектр турбулентности подчиняется закону  $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ , то можно показать [84], что  $m = 6/5 = 1.2$ , так что предложение авторов вполне логично.

Константа  $C_{\varepsilon 1}$  при генеративном члене обычно принимается равной  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ , и получается путем анализа систематических численных экспериментов. Для ее определения также пользуются условием совместности, которое для равновесной турбулентности записывается следующим образом [140]:

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\text{Pr}_\varepsilon \sqrt{C_\mu}},$$

откуда, принимая  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ ,  $Pr_{\varepsilon} = 1.3$ ,  $C_{\mu} = 0.09$  при  $\kappa = 0.41$  можно прийти к обычно используемому значению  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ .

Значение константы  $C_{\varepsilon}$  при векторе диффузионного переноса  $\vec{D}_{\varepsilon}$  определяется в результате исследования предельной формы уравнения переноса для величины  $\varepsilon$  полагая, что для простого сдвигового течения конвективный перенос скорости диссипации незначителен, а затухание ее равно генерации [140]. Тогда, если принять значение постоянной Кармана как  $\kappa = 0.41$ , полученное уравнение приводит к величине  $C_{\varepsilon 1} = 0.15$ .

Как уже отмечалось, при высоких числах Рейнольдса тензор скорости диссипации принимается в виде:  $\underline{\varepsilon} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{E}$ . Однако это перестает быть верным вблизи стенки, где турбулентность сильно анизотропна. Для корректного разрешения течения вблизи стенки необходимо использовать иные модели для скорости диссипации, о которых речь пойдет ниже.

Первый подход к моделированию тензора скорости диссипации  $\underline{\varepsilon}$  вблизи стенки был предложен J.C. Rotta [177], который предположил, что анизотропия тензора скорости диссипации аналогична анизотропии тензора напряжений, т. е.

$$\underline{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{k} \frac{R}{\rho} \quad \text{или, иначе,} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon \frac{\overline{V'_i V'_j}}{k}. \quad (5.4.7)$$

Подобная же модель рассматривалась в работе [123], где тензор скорости диссипации сопоставлялся тензору анизотропии, при этом для построения низкорейнольдсовых моделей используется понятие турбулентного числа Рейнольдса  $Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$ . Тогда:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \left( f_s \underline{a} + \frac{2}{3} \underline{E} \right) \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon \left( f_s a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right);$$

где  $f_s$  – функция турбулентного числа Рейнольдса  $Re_s$ ,  $f_s \xrightarrow{Re_s \rightarrow \infty} 0$  и  $f_s \xrightarrow{Re_s \rightarrow 0} 1$ . Отсюда видно, что, как и предполагалось выше, в случае высоких чисел Рейнольдса  $\underline{\varepsilon} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{E}$ , а при низких приходим к предположению J.C. Rotta. В обоих случаях имеет место равенство  $tr(\underline{\varepsilon}) = 2\varepsilon$ .

Однако позднее В.Е. Launder и W.C. Reynolds показали, что такое представление не дает правильную асимптотику компонент тензора  $\underline{\varepsilon}$  у стенки, где ожидается, что  $\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} = \frac{V_i'V_j'}{k}$  при  $i \neq 2, j \neq 2$ ;  $\frac{\varepsilon_{i2}}{\varepsilon} = 2 \frac{V_i'V_2'}{k}$  при  $i \neq 2$ ;  $\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon} = 4 \frac{V_2'V_2'}{k}$  [142]. Одна из возможных форм записи тензора скорости диссипации, которая удовлетворяет этим ограничениям приводится в работе [166]:

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon \left( \overline{V_i'V_j'} + V_j' \overline{V_m' n_m n_i} + \overline{V_m' V_i' n_m n_j} \delta_{ij} \right)}{k \left( 1 + \frac{5}{2} n_p n_q \overline{V_q' V_p'} / k \right)}. \quad (5.4.8)$$

где  $n_i$  – компонента вектора единичной нормали обтекаемой стенки.

Вблизи стенки рассмотренное ранее уравнение (5.4.6) для переноса скалярной скорости диссипации  $\varepsilon$  также перестает быть верным. Это связано с тем, что отбрасываемые в этом уравнении члены исходного уравнения (5.4.5) теперь имеют тот же порядок, что и оставляемые, и ими уже нельзя пренебрегать. Четвертый член уравнения (5.4.5) часто моделируется следующим образом:

$$-2V_m' \frac{\partial V_i'}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \overline{V_i'}}{\partial x_m \partial x_i} = C_{\varepsilon 3} \frac{k}{\varepsilon} \overline{V_m' V_j'} \frac{\partial^2 \overline{V_i'}}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial^2 \overline{V_i'}}{\partial x_m \partial x_i}. \quad (5.4.9)$$

Пятый член уравнения (5.4.5) может быть аппроксимирован, если коэффициенты  $C_{\varepsilon 1}$  и  $C_{\varepsilon 2}$  считать функциями  $Re_s$ , аналогично тому, как учитывается влияние вязкости на диффузию  $\varepsilon$ , если считать  $C_\varepsilon$  функцией  $Re_s$ . Заметим, что проведенные исследования показали, что добавления одного лишь члена

(5.4.9) в уравнение (5.4.6) вполне достаточно для того, чтобы получать хорошее совпадение расчетных профилей энергии с имеющимися экспериментальными данными. Потому чаще всего зависимостью коэффициентов  $C_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  и  $C_{\varepsilon 2}$  от  $Re_t$  пренебрегают, а член вязкой диффузии используется в точной форме, в результате чего окончательно уравнение переноса скорости диссипации кинетической энергии может быть записано в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left( C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - \\ - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_j} \frac{\partial^2 \overline{V}_i}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial^2 \overline{V}_i}{\partial x_m \partial x_l}. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

При расчетах турбулентных течений можно также использовать «одно-родную» скорость диссипации [146], определяемую следующим выражением:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i}. \quad (5.4.11)$$

Тогда уравнение ее переноса может быть записано, например, в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left( C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_m} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \\ - C_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})\bar{\varepsilon}}{k} + C_{\varepsilon 3} \nu \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_i V'_j} \frac{\partial^2 \overline{V}_m}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 \overline{V}_m}{\partial x_j \partial x_l} + Y_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

### 5.4.3. Перераспределение турбулентности

Корреляция давления и скорости пульсаций в настоящее время определяется на основе подхода, предложенного в работе Р.У. Чоу [91], в котором для пульсационной составляющей давления записывается уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{\rho} \Delta p' = -2\nabla \vec{v}' : \nabla \vec{v}' - \nabla \vec{v}' : \nabla \vec{v}' + \overline{\nabla \vec{v}' : \nabla \vec{v}'}. \quad (5.4.13)$$

Это уравнение можно получить следующим образом: взять дивергенцию от уравнения Рейнольдса, затем дивергенцию от уравнения Навье–Стокса, и

вычесть одно из другого. В компонентной форме результат такого вычитания имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_n \partial x_n} = -2 \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i}.$$

Используя уравнение неразрывности можно также переписать это соотношение в следующей форме:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_n \partial x_n} = -2 \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (V'_i V'_j - \overline{V'_i V'_j}).$$

Для построения решения данного уравнения Р.У. Chou использовал метод функций Грина. Поскольку для лапласиана функция Грина имеет вид  $G(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$ , где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  – координаты пары точек в области течения,  $\bar{r}$  и  $\bar{r}'$  – радиус-векторы этих точек, общее решение для пульсации давления можно представить следующим образом:

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( 2 \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \right)' \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right)' + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (V'_i V'_j - \overline{V'_i V'_j}) \right)' \right) \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|} + S.$$

Следуя S.B. Pope [166], подынтегральные составляющие этого выражения можно трактовать следующим образом:

- член, содержащий градиенты осредненных скоростей, иногда называют «быстрым давлением»;
- второй член представляет собой взаимодействие турбулентных пульсаций, он не может быть напрямую сопоставлен градиентам осредненных скоростей, его можно выразить только через каскадный процесс передачи энергии; этот член называют «медленным» или «возвратным» давлением;
- слагаемое  $S$  является решением уравнения Лапласа  $\Delta p' = 0$  при граничных

условиях на границе  $W$  в виде  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \Big|_W = \nu \frac{\partial^2 V'}{\partial y \partial y}$ , где  $y$  – координата, нормальная к стенке. Оно играет существенную роль только вблизи твердых

границ или свободной поверхности и исчезает по мере удаления от границ. Влияние стенок далее будет рассмотрено отдельно.

При отсутствии границ общее решение уравнения Пуассона для давления [198]:

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( 2 \left( \frac{\partial \bar{V}'_i}{\partial x_j} \right)' \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right)' + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (V'_i V'_j - \bar{V}'_i \bar{V}'_j) \right) \right) \frac{dV''}{|\bar{x} - \bar{x}''|}.$$

Тогда для члена перераспределения уравнения (5.3.3) можно записать:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( 2 \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial \bar{V}'_i}{\partial x_j} \right)' \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right)' + \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial^2 V'_i V'_j}{\partial x_i \partial x_j} \right)' \right) \frac{dV''}{|\bar{x} - \bar{x}''|}.$$

Для однородных турбулентных потоков, в которых градиенты осредненных скоростей пространственно однородны, корреляции «давление–деформации» могут быть записаны в следующей форме:

$$\Phi_{ij} = A_{ij} + M_{ijml} \frac{\partial \bar{V}'_m}{\partial x_l} \quad \text{или} \quad \underline{\Phi} = \underline{A} + {}^4 \underline{M} : \nabla \bar{V}',$$

где 
$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial^2 V'_m V'_l}{\partial x_m \partial x_l} \right)' \right) \frac{dV''}{|\bar{x} - \bar{x}''|},$$

$$M_{ijml} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial V'_l}{\partial x_m} \right)' \frac{dV''}{|\bar{x} - \bar{x}''|}.$$

В бескомпонентной форме записи

$$\underline{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \underline{S}'(\nabla \bar{V}') : (\nabla \bar{V}') \right) \frac{dV''}{|\bar{x} - \bar{x}''|}, \quad {}^4 \underline{M} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}' \otimes (\nabla \bar{V}') \frac{dV''}{|\bar{x} - \bar{x}''|}.$$

При одноточечном замыкании эти зависимости предполагают использование идеализированных моделей для  $\underline{A}$  и  ${}^4 \underline{M}$ , которые будут зависеть от предыстории течения и скорости диссипации. Простейшей подобной моделью является алгебраическая:

$$\underline{A} = \epsilon \underline{A}(\underline{a}) \quad \text{и} \quad {}^4 \underline{M} = k {}^4 \underline{M}(\underline{a}),$$

где тензоры  $\underline{A}(\underline{a})$  и  ${}^4\underline{M}(\underline{a})$  зависят только от турбулентных напряжений, характеризующихся тензором анизотропии. Они являются безразмерными тензорами, которые исчезают в случае изотропной турбулентности. Все современные модели замыкания второго порядка используют именно такую форму моделирования корреляции давления и деформаций. Использование такого подхода в общем случае неоднородных турбулентных течений верно лишь приблизительно, поэтому говорят, что в данном случае используется допущение о локально-однородной структуре турбулентности.

Для тензора  $\underline{A}(\underline{a})$  в работе J. Rotta [177] предлагается такая аппроксимация:

$$\underline{A}(\underline{a}) = -C_1 \varepsilon \underline{a},$$

которая базируется на представлении о затухании турбулентности в отсутствии градиентов осредненных скоростей. Известно, что в таких случаях турбулентность имеет тенденцию к изотропному состоянию, чем и объясняется знак «минус» в правой части. Однако здесь следует заметить, что экспериментальные данные свидетельствуют о нелинейности процесса перехода к изотропному состоянию, потому тензор  $\underline{A}(\underline{a})$  нелинейно связан с тензором  $\underline{a}$  [92]. Также было установлено, что скорость возврата к этому состоянию сильно зависит от числа Рейнольдса. Потому вполне возможно, что в ближайшем будущем исследователи перейдут к нелинейным моделям для тензора  $\underline{A}(\underline{a})$ .

Что касается тензора  ${}^4\underline{M}(\underline{a})$ , то J. Rotta показал, что этот тензор должен удовлетворять следующим кинематическим соотношениям:

$$\begin{aligned} M_{ijml} &= M_{mjil} = M_{mlij}, \\ M_{ijmm} &= 0, \quad M_{jii} = 2\overline{V_j'V_i'}. \end{aligned}$$

Последнее соотношение привело В.Е. Launder и др. [140] к мысли, что тензор  ${}^4\mathbf{M}(\underline{a})$  может быть представлен в виде линейной комбинации турбулентных напряжений. В общем случае можно записать, что

$$M_{ijml} = \alpha \delta_{im} \overline{V_j V_l'} + \beta (\delta_{ji} \overline{V_l' V_m'} + \delta_{jm} \overline{V_l' V_i'} + \delta_{il} \overline{V_j' V_m'} + \delta_{lm} \overline{V_j' V_i'}) + C_2 \delta_{jl} \overline{V_i' V_m'} + k (\eta \delta_{jl} \delta_{ik} + \nu (\delta_{ji} \delta_{lk} + \delta_{jk} \delta_{li})),$$

где  $\alpha, \beta, C_2, \eta, \nu$  – константы. Из формулировки условий Rotta для компонент тензора  ${}^4\mathbf{M}(\underline{a})$  следует, что эти константы не являются независимыми, а могут быть выражены друг через друга:

$$\alpha = \frac{1}{11}(2C_2 + 10), \quad \beta = -\frac{1}{11}(3C_2 + 2), \quad \eta = -\frac{1}{55}(50C_2 + 4), \quad \nu = \frac{1}{55}(20C_2 + 6).$$

Окончательно для члена перераспределения можно записать следующее выражение:

$$\Phi_{ij} = -C_1 \varepsilon a_{ij} - \frac{C_2 + 8}{11} \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - \frac{8C_2 - 2}{11} \left( D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - \frac{30C_2 - 2}{55} k \left( \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $D_{ij} = - \left( \overline{V_i' V_m'} \frac{\partial \overline{V}_m}{\partial x_j} + \overline{V_j' V_m'} \frac{\partial \overline{V}_m}{\partial x_i} \right)$ ,  $P_{ij}$  – генеративный член в уравнении

(5.3.2),  $P_k$  – производство кинетической энергии турбулентности  $k$ ,  $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности,  $C_1 = 1.5$ ,  $C_2 = 0.4$ . Несложно убедиться, что  $D_{ii} = P_{ii} = 2P_k$ , откуда следует, что  $\Phi_{ii} = 0$ .

Вполне возможна также упрощенная форма данного уравнения [140]:

$$\Phi_{ij} = -C_1' \varepsilon a_{ij} - C_2' \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right),$$

где  $C_2' = 0.6$ . Иное значение константы  $C_2'$  принято для компенсации отброшенных членов, при этом меняется и константа при «медленном» члене:  $C_1' = 1.8$ .

В работе С.С. Speziale и др. [198] для построения тензоров  $\underline{A}(a)$  и  ${}^4\underline{M}(a)$  использован более общий подход, основанный на свойствах изотропных тензорных функций. Вводя безразмерные тензоры скоростей деформации и завихренности

$$\underline{S}^\vee = \frac{k}{\varepsilon} \underline{S} \quad \text{и} \quad \underline{\Omega}^\vee = \frac{k}{\varepsilon} \underline{\Omega} \quad (5.4.13)$$

выражение для тензора перераспределения можно записать следующим образом:

$$\underline{\Phi} = \varepsilon \underline{f}^{(L)}(a, \underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee),$$

где  $\underline{f}^{(L)}(a, \underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)$  – линейная относительно  $\underline{S}^\vee$  и  $\underline{\Omega}^\vee$  часть изотропной тензорозначной функции  $\underline{f}(a, \underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)$ . В силу инвариантности относительно преобразования координат можно записать

$$\underline{Q} \cdot \underline{f}(a, \underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee) \cdot \underline{Q}^T = \underline{f}(\underline{Q} \cdot a \cdot \underline{Q}^T, \underline{Q} \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{Q}^T, \underline{Q} \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{Q}^T),$$

где  $\underline{Q}$  – тензор вращения, рассмотренный в п. 1.7. Используя теорему о представлении изотропных тензорных функций [60] и свойство  $\Phi_{ii} = 0$  можно записать:

$$\underline{\Phi} = \varepsilon \left( \underline{F}^{(L)} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{F}) \underline{E} \right),$$

$$\begin{aligned} \underline{F}^{(L)} = & \beta_0 \varepsilon \underline{E} + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 \underline{S}^\vee + \beta_4 (a \cdot \underline{S}^\vee + \underline{S}^\vee \cdot a) + \\ \text{где} & + \beta_5 (a^2 \cdot \underline{S}^\vee + \underline{S}^\vee \cdot a^2) + \beta_6 (a \cdot \underline{\Omega}^\vee + \underline{\Omega}^\vee \cdot a) + \beta_7 (a^2 \cdot \underline{\Omega}^\vee + \underline{\Omega}^\vee \cdot a^2). \end{aligned}$$

В итоге в компонентной форме записи окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & \beta_1 \varepsilon \underline{a} + \beta_2 \varepsilon \left( a_{im} a_{mj} - \frac{1}{3} a_{mn} a_{nm} \delta_{ij} \right) + \beta_3 k S_{ij}^\vee + \\ & + \beta_4 k \left( a_{im} S_{mj}^\vee + a_{jm} S_{mi}^\vee - \frac{2}{3} a_{mn} S_{nm}^\vee \delta_{ij} \right) + \\ & + \beta_5 k \left( a_{im} a_{mi} S_{ij}^\vee + a_{jm} a_{ml} S_{li}^\vee - \frac{2}{3} a_{mn} a_{nm} S_{nl}^\vee \delta_{ij} \right) + \\ & + \beta_6 k \left( a_{im} \Omega_{mj}^\vee + a_{jm} \Omega_{mi}^\vee - \frac{2}{3} a_{mn} \Omega_{nm}^\vee \delta_{ij} \right) + \\ & + \beta_7 k \left( a_{im} a_{mi} \Omega_{ij}^\vee + a_{jm} a_{ml} \Omega_{li}^\vee - \frac{2}{3} a_{mn} a_{nm} \Omega_{nl}^\vee \delta_{ij} \right), \end{aligned}$$

где  $\beta_i = \beta_{i0}(II, III) + \beta_{i1}(II, III) \frac{k}{\varepsilon} \text{tr}(\underline{a} \cdot \underline{S}) + \beta_{i2}(II, III)(\underline{a}^2 \cdot \underline{S})$ ,  $i=1,2$ ;

$$\beta_i = \beta_i(II, III), \quad i=3,4,\dots,7; \quad II = a_{ij} a_{ji}; \quad III = a_{ij} a_{jm} a_{mi}.$$

Данное представление является наиболее общей записью для аппроксимации алгебраических моделей для  $\underline{A}(\underline{a})$  и  ${}^4 \underline{M}(\underline{a})$ , которая согласуется с требованием инвариантности относительно преобразования координат.

Если предположить, что  $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6$  – константы, а  $\beta_2 = \beta_5 = \beta_7 = 0$ , то приходим к модели В.Е. Launder и др. [140], рассмотренной выше:

$$\Phi_{ij} = \beta_1 \varepsilon a_{ij} + \beta_3 k S_{ij} - \left( \frac{\beta_4}{2} + \frac{\beta_6}{3} \right) \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - \left( \frac{\beta_4}{2} + \frac{\beta_6}{3} \right) \left( D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right),$$

т. е.  $\beta_1 = -C_2, \beta_3 = -\frac{30C_2 - 2}{55} k, \beta_5 = -\frac{C_2 + 8}{11}, \beta_4 = \beta_6 = -\frac{8C_2 - 2}{11}$ .

Модель С.Г. Speziale и др. [198] использует иную запись данного уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & -\left( C_1 \varepsilon + 0.5 C_1^* P_k \right) a_{ij} + 0.25 C_2 \varepsilon \left( a_{im} a_{mj} - \frac{1}{3} a_{mn} a_{nm} \delta_{ij} \right) + \left( C_3 - C_3^* \sqrt{\Pi} \right) k S_{ij} + \\ & + 0.5 C_4 k \left( a_{im} S_{mj} + a_{jm} S_{mi} - \frac{2}{3} a_{mn} S_{nm} \delta_{ij} \right) + 0.5 C_5 k \left( a_{im} W_{mj} + a_{jm} W_{mi} \right), \end{aligned}$$

где  $C_1 = 3.4, C_1^* = 1.8, C_2 = 4.2, C_3 = 0.8, C_3^* = 1.3, C_4 = 1.25, C_5 = 0.4$ .

Попытка обобщить различные подходы к моделированию члена перераспределения в одном выражении была предпринята Н. Burchard [85], однако, по сути, оно мало отличается от выражения, предложенного С.Г. Speziale и др. [198] и рассмотренного выше. Условия применимости ряда моделей рассмот-

рены в работах С.Р. Богданова [13; 14], в которых показано, что рассмотренные выше варианты записи члена перераспределения не могут быть рекомендованы для моделирования течений с сильной анизотропией, так как «турбулентность является в большей степени нелокальной, чем предполагается в рамках этих моделей». Однако это не умаляет их возможностей для моделирования различных течений, встречающихся в инженерной практике.

### Влияние стенок на тензор перераспределения

Известно, что вблизи стенок вязкостные и турбулентные напряжения имеют одинаковый порядок [140; 198]. Влияние стенки приводит к появлению двух противоположных эффектов: с одной стороны отражение пульсаций давления от стенки приводит к увеличению перераспределения энергии между компонентами турбулентных напряжений, что способствует стремлению турбулентности к изотропии, с другой стороны, демпфирование нормальных к стенке компонент пульсаций скорости увеличивает анизотропию. Последний эффект является доминирующим, потому анизотропия турбулентности в пристеночном сдвиговом течении выше, чем в свободном при сопоставимых скоростях деформаций. В работе В.Е. Launder и др [140] показывается, что в случае пристеночного течения для тензора перераспределения корреляцию давления и скорости можно записать в следующем виде:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ 2 \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right) + \left( \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial^2 V'_i V'_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] \times \left( \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} - \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}^*|} \right) dV,$$

где  $\bar{y}^*$  – образ точки  $\bar{y}$  (с компонентами  $y_1, -y_2, y_3$ ), и интегрирование ведется по области  $x_2 > 0$ . Отсюда автоматически следует, что необходимо вво-

дить поправки к обем составляющим члена перераспределения. В соответствии с этим в работе [140] предложена следующая добавка к  $\Phi_{ij}$  на влияние стенок:

$$\Phi_{ij}^w = \left( 0.125 \varepsilon a_{ij} + 0.015 (P_{ij} - D_{ij}) \right) \frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_2}.$$

Позднее М.М. Gibson и В.Е. Launder предложили более универсальный подход к учету влияния стенки [116]:

$$\Phi_{ij}^w = \left( \tilde{\Phi}_{mi} n_m n_j \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{im} n_m n_j - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jm} n_m n_i \right) f_w, \quad (5.4.14)$$

где  $\tilde{\Phi}_{ij} = C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \overline{V_i V_j} + C_2^w M_{ijml} \frac{\partial \overline{V}_m}{\partial x_l}$ ,  $f_w = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\varkappa \varepsilon x_n}$  – демпфирующая функция,

учитывающая отношение линейного масштаба турбулентности к расстоянию до стенки  $x_n$ ,  $n_m$  – компонента вектора единичной нормали,  $C_1^w = 0.5$ ,  $C_2^w = 0.3$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $\varkappa = 0.41$ .

В работе S. Jakirlić и K. Hanjalic [128] предлагается вводить подобную поправку и для «быстрой», и для «медленной» составляющих перераспределения, причем первое связывается с «однородной» диссипацией в форме  $\varepsilon^h = \varepsilon - \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}$ , для которой авторами предложено уравнение переноса, подобное (5.4.12), а второе аналогично выражению (5.4.14).

Заметим, что использование векторов нормалей в моделях турбулентности нежелательно в силу их неопределенности в случае сложной геометрии потока. Одним из путей, позволяющих избежать таких проблем, является использование величины  $\vec{V} \sqrt{k}$  вблизи стенок, которая является вектором, перпендикулярным к стенке. Тогда для единичного нормального вектора можно записать такое выражение:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\sqrt{k}}{|\vec{\nabla}\sqrt{k}|},$$

или, используя известное выражение для скорости диссипации (5.4.11) на стенке с нормалью  $\vec{n} = \{0, 1, 0\}$ :

$$|\vec{\nabla}\sqrt{k}|_{x_2=0} = \sqrt{\left. \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_2} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\nu}}.$$

Отсюда

$$n_i n_j = \frac{2\nu}{\varepsilon} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_j},$$

и для поправки на влияние стенки можно окончательно записать:

$$\Phi_{ij}^w = \frac{2\nu}{\varepsilon} \left( \tilde{\Phi}_{ml} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{im} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_m} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_j} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jm} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_m} \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i} \right) f_w.$$

#### 5.4.4. Модели переноса напряжений Рейнольдса

Общее описание подхода, основанного на записи уравнений переноса в форме (5.3.3) для всех компонент турбулентных напряжений, приведено в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Моделирование турбулентных напряжений на основе подхода RSM

Член уравнения (5.3.3)	Описание	Способ моделирования
$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}' \otimes \vec{v}')$	Локальное изменение турбулентных напряжений во времени	Точное решение
$(\vec{v}' \cdot \nabla) (\vec{v}' \otimes \vec{v}')$	Конвективный перенос напряжений осредненным потоком	Точное решение

$\underline{^3D}$	Диффузия, т. е. распространение энергии турбулентности в пространстве	Моделирование
$\underline{P}$	Производство энергии турбулентности за счет градиентов осредненных скоростей	Точное решение
$\underline{\Phi}$	Перераспределение энергии турбулентности за счет взаимодействия пульсаций давлений и скоростей	Моделирование
$\underline{\varepsilon}$	Диссипация энергии турбулентности за счет вязкости	Моделирование

При наличии массовых сил интенсивностью  $\bar{f}$  возможен также учет дополнительного производства турбулентности за счет последних:  $F_{ij} = \rho(\overline{f'_i V'_j} + \overline{f'_j V'_i})$ . Такая генерация, в принципе, также моделируется точно [77].

Очевидно, что члены  $\underline{^3D}$ ,  $\underline{\Phi}$  и  $\underline{\varepsilon}$  не могут быть определены напрямую из имеющихся уравнений, и для полного замыкания системы уравнений движения они должны быть смоделированы. Для этих целей используется эмпирическая информация, полученная в результате анализа результатов экспериментов, содержащихся, например в работах [89; 200] и др. Ниже приводится краткое описание некоторых наиболее известных моделей турбулентности такого типа.

### 5.4.4.1. Модель Launder–Reece–Rodi (LRR)

Модель LRR предложена в работе [140], в ней используется высокорейнольдсовая форма записи уравнения переноса для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, причем из диффузионных членов моделируется только третий момент. Структура модели приведена в таблице 5.2.

Таблица 5.2. Модель Launder–Reece–Rodi

Член уравнения (5.3.3)	Способ моделирования
$\underline{D}$	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{V'_i V'_l} \frac{\partial \overline{V'_j V'_m}}{\partial x_l} + \overline{V'_j V'_l} \frac{\partial \overline{V'_m V'_i}}{\partial x_l} + \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \overline{V'_i V'_j}}{\partial x_l} \right)$
$\underline{\Phi}$	$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^1 + \Phi_{ij}^2 + \Phi_{ij}^w$ $\Phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon a_{ij}$ $\Phi_{ij}^2 = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - C_3 \left( D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - 2C_4 k S_{ij},$ $\Phi_{ij}^w = \left( \tilde{\Phi}_{ml} n_m n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{im} n_m n_j - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jm} n_m n_i \right) f_w,$ $\tilde{\Phi}_{ij} = C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \overline{V'_i V'_j} + C_2^w \Phi_{ij}^w, \quad f_w = 0.4 \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon x_n},$ $n_i n_j = \frac{2\nu}{\varepsilon} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j}$
$\underline{\varepsilon}$	$\underline{\varepsilon} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{E}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$
Константы	$C_1 = 0.15, C_2 = 0.764, C_3 = 0.182, C_4 = 0.109, C_s = 0.11,$ $C_1^w = 0.5, C_2^w = 0.3, C_\varepsilon = 0.15, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92$

### 5.4.4.2. Модель Shima

Данная модель предложена N. Shima [143] и представляет собой низкорейнольдсовый вариант модели LRR, в которой коэффициенты  $C_1 \div C_4$  более не

константы, а функции инвариантов  $II_a$  и  $III_a$  тензора анизотропии  $\underline{a}$ . В уравнении переноса скорости диссипации используется «однородная» скорость диссипации, определяемая выражением  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i}$ . Параметры модели приводятся в таблице 5.3.



Таблица 5.3. Модель N. Shima

Член уравнения (5.3.3)	Способ моделирования
${}^3D$	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{\overline{V'_m V'_l}} \frac{\partial \overline{\overline{V'_i V'_j}}}{\partial x_i}$
$\underline{\Phi}$	$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^1 + \Phi_{ij}^2 + \Phi_{ij}^w$ $\Phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon a_{ij}$ $\Phi_{ij}^2 = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - C_3 \left( D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - 2C_4 k S_{ij},$ $\Phi_{ij}^w = \left( \tilde{\Phi}_{mi} n_m n_l \delta_{lj} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{im} n_m n_j - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jm} n_m n_i \right) f_w,$ $\tilde{\Phi}_{ij} = C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \overline{\overline{V'_i V'_j}} + C_2^w \Phi_{ij}^2, \quad f_w = 0.4 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_n},$ $n_i n_j = \frac{2\nu}{\varepsilon} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j}$ $C_1 = 1 + 2.45 II_a^{0.25} A^{0.75} \left[ 1 - \exp(-49 A^2) \right] \times \left[ 1 - \exp(-(\text{Re}_i / 60)^2) \right]$ $C_2 = 0.7 A, \quad C_3 = 0.3 \sqrt{A}$ $C_4 = 0.65 A (0.23 C_1 + C_2 - 1) + 1.3 A_2^{0.25} C_3,$ $A = 1 - \frac{9}{8} (II_a - III_a), \quad II_a = a_{ij} a_{ji}, \quad III_a = a_{ij} a_{jm} a_{mi}$

$\underline{\varepsilon}$	$\underline{\varepsilon} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{E}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{k} \tilde{\varepsilon}$
Константы	$C_s = 0.22, \quad C_1^w = 0.5, C_2^w = 0.3, C_\varepsilon = 0.15, C_{\varepsilon_2} = 1.92,$ $C_{\varepsilon_1} = 1.44 + \beta_1 + \beta_2,$ $\beta_1 = 0.25 A \min(\lambda / 2.5 - 1; 0) - 1.4 A \min(P_k / \varepsilon - 1; 0)$ $\beta_2 = 1.0 A \lambda^2 \min(\lambda / 2.5 - 1; 0),$ $\lambda = \min \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{k^{1.5}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{k^{1.5}}{\varepsilon} \right), 4 \right)$

#### 5.4.4.3. Модель Speziale–Sarkar–Gatski (SSG)

Основой данной модели, предложенной в работе [198], является иная запись члена перераспределения по сравнению с моделью LRR. Из остальных особенностей отметим упрощенную запись диффузионного члена, а также иное значение константы  $C_{\varepsilon_2}$  по сравнению с моделью LRR. Уравнения модели приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4. Модель Speziale–Sarkar–Gatski

Член уравнения (5.3.3)	Способ моделирования
${}^3 \underline{D}$	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \overline{V'_l V'_j}}{\partial x_l}$
$\underline{\Phi}$	$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^1 + \Phi_{ij}^2$ $\Phi_{ij}^1 = -(C_1 \varepsilon + 0.5 C_1^* P_k) a_{ij}$ $\Phi_{ij}^2 = 0.25 C_2 \varepsilon (a_{im} a_{mj} - \frac{1}{3} a_{mn} a_{nm} \delta_{ij}) + (C_3 - 0.5 C_3^* \sqrt{\Pi_a}) k S_{ij} +$ $+ 0.5 C_4 k (a_{im} S_{mj} + a_{jm} S_{mi} - \frac{2}{3} a_{mn} S_{nm} \delta_{ij}) + 0.5 C_5 k (a_{im} W_{mj} + a_{jm} W_{mi})$ $\Pi_a = a_{ij} a_{ji}$

$\underline{\varepsilon}$	$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k}$
Кон- станты	$C_1 = 3.4, C_1^* = 1.8, C_2 = 4.2, C_3 = 0.8, C_3^* = 1.3, C_4 = 1.25, C_5 = 0.4,$ $C_s = 0.11, C_\varepsilon = 0.15, C_{\varepsilon_1} = 1.44, C_{\varepsilon_2} = 1.83$

#### 5.4.4.4. Модель Two-Component-Limit (TCL)

Данная модель разработана группой специалистов University of Manchester под руководством В.Е. Launder [96; 97; 110]. Модель TCL основана на модели LRR, но использует члены разложения третьего порядка в члене перераспределения [96]. Итоговые соотношения TCL модели приводятся в таблице 5.5.

Таблица 5.5. Модель TCL

Член уравнения (3.9)	Способ моделирования
$\underline{^3D}$	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{V'_i V'_l} \frac{\partial \overline{V'_j V'_m}}{\partial x_l} + \overline{V'_j V'_l} \frac{\partial \overline{V'_m V'_i}}{\partial x_l} + \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \overline{V'_i V'_j}}{\partial x_l} \right)$
$\underline{\Phi}$	$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^1 + \Phi_{ij}^2 + \Phi_{ij}^w$ $\Phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon \left[ a_{ij} + C_1' \left( a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} II_a \delta_{ij} \right) \right] - f_A' \varepsilon a_{ij}$ $\Phi_{ij}^2 = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) + 0.6 a_{ij} P_k -$ $- \frac{0.2}{k} \left\{ 2 \overline{V'_m V'_j V'_i V'_l} S_{ml} - \overline{V'_m V'_l} \left( \overline{V'_i V'_m} \frac{\partial \overline{V'_j}}{\partial x_l} + \overline{V'_j V'_m} \frac{\partial \overline{V'_i}}{\partial x_l} \right) \right\} -$ $- C_2 \left\{ II_a (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{ml} a_{ij} (P_{ml} - D_{ml}) \right\}$ $+ C_2' \left\{ \left( \frac{7}{15} - 0.25 II_a \right) \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \right.$ $+ 0.2 \left[ a_{ij} - 0.5 \left( a_{im} a_{mj} - \frac{1}{3} II_a \delta_{ij} \right) \right] P_k - 0.05 a_{ij} a_{im} P_{ml} +$ $+ \frac{0.1}{k} \left( \overline{V'_i V'_m} P_{mj} + \overline{V'_j V'_m} P_{mi} - \frac{2}{3} \overline{V'_m V'_l} P_{lm} \delta_{ij} \right) +$ $+ \frac{0.1}{k^2} \left( \overline{V'_i V'_l V'_m V'_j} - \frac{1}{3} \overline{V'_l V'_n V'_n V'_m} \delta_{ij} \right) (6 D_{lm} + 26 k S_{lm})$ $\left. + 0.2 \frac{\overline{V'_i V'_l V'_m V'_j}}{k^2} (D_{lm} - P_{lm}) \right\}$

	$\Phi_{ij}^w = \left( \tilde{\Phi}_{m_i n_m n_j} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{im} n_m n_j - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jm} n_m n_i \right) f_w$ $\tilde{\Phi}_{ij} = C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \overline{V_i' V_j'} + C_2^w \Phi_{ij}^2, \quad f_w = 0.4 \frac{k^{\lambda/2}}{\varepsilon x_n}, \quad II_a = a_{ij} a_{ji},$ $n_i n_j = \frac{2\nu}{\varepsilon} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j}, \quad f_A' = \sqrt{A}, \quad A = 1 - \frac{9}{8} (II_a - III_a)$
$\underline{\varepsilon}$	$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{k}{\varepsilon} \overline{V_m' V_l'} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$
Константы	$C_1 = 3.1 \sqrt{A II_a}, \quad C_1' = 1.1, \quad C_2 = 0.55, \quad C_2' = 0.6, \quad C_s = 0.11,$ $C_1^w = 0.5, \quad C_2^w = 0.3, \quad C_\varepsilon = 0.15, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92$

Помимо изложенного высокорейнольдсового варианта модели TCL существует также ее низкорейнольдсовый вариант (low-Re), разработанный T.J. Craft [95]. Он представляет собой довольно сильное усложнение исходной модели: в ней используется несколько иная запись члена перераспределения, в котором коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  становятся функциями числа  $Re_\tau$ , а  $C_2'$  является функцией тензоров скоростей деформаций и завихренности. Также вводится более сложная форма тензора диссипации, а вместо скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, как и в модели N. Shima, вводится «однородная» скорость диссипации  $\bar{\varepsilon}$ . Кроме того, в этом низкорейнольдсовом варианте используются дополнительные функции и константы.

#### 5.4.4.5. Модель, использованная в ISIS-CFD

В качестве примера реализации дифференциальной модели турбулентности в коммерческих расчетных пакетах, рассмотрим модель, реализованную в решателе ISIS-CFD, входящего в состав расчетного комплекса NUMECA FINE/Marine [77]. Она представляет собою модель LRR с некоторыми упрощениями, однако скорость диссипации  $\varepsilon$  определяется из уравнения переноса

вводимой в рассмотрение величины интенсивности турбулентности  $\omega$ . А так как вдали от стенки уравнение переноса  $\omega$  не связано с другими уравнениями системы, то, следовательно, такой подход является более гибким, по сравнению с прямой записью уравнения переноса для  $\varepsilon$ . Уравнения модели приводятся в таблице 5.6.

Таблица 5.6. Модель ISIS-CFD

Член уравнения (3.9)	Способ моделирования
$\underline{D}$	$C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \overline{V'_i V'_j}}{\partial x_l}$
$\underline{\Phi}$	$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^1 + \Phi_{ij}^2 + \Phi_{ij}^w$ $\Phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon a_{ij}$ $\Phi_{ij}^2 = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right)$ $\Phi_{ij}^w = \left( \tilde{\Phi}_{m_l n_m n_l} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{im} n_m n_j - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jm} n_m n_i \right) f_w,$ $\tilde{\Phi}_{ij} = C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \overline{V'_i V'_j} + C_2^w \Phi_{ij}^2, \quad f_w = 0.4 \frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_n},$ $n_i n_j = \frac{2\nu}{\varepsilon} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j},$ $C_1 = 1 + \left( C_1^{HRF} - 1 \right) \tanh \left( \frac{0.0018 \rho k^2}{\mu \varepsilon} \right),$ $A = 1 - \frac{9}{8} (II_a - III_a), \quad II_a = a_{ij} a_{ji}, \quad III_a = a_{ij} a_{jm} a_{mi}$
$\underline{\varepsilon}$	$\underline{\varepsilon} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{E}, \quad \varepsilon = C_\mu k \omega$

	$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \bar{V}_j \omega - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 +$ $+ \frac{\partial}{\partial x_m} \left( C_w \frac{\rho k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \frac{\partial \omega}{\partial x_l} \right) +$ $+ f_\omega^2 \frac{2}{k} \left( \mu \delta_{kl} + C_\omega \frac{\rho k}{\varepsilon} \overline{V'_m V'_l} \right) \frac{\partial k}{\partial x_l} \frac{\partial \omega}{\partial x_m}$ $\alpha = (C_{\varepsilon 1} - 1) f_\omega + C_{\alpha w} (1 - f_\omega), \quad \beta = C_\mu (C_{\varepsilon 2} - 1)$ $f_w = \tanh \left[ \left( \frac{0.002 \rho d \sqrt{k}}{\mu} \right)^2 \right]$
<p align="center">Константы</p>	$C_s = 0.22, \quad C_2 = 0.6, \quad C_3 = 0.182, \quad C_4 = 0.109, \quad C_1^w = 0.4,$ $C_{w2} = \min\{0.3, A\}, \quad C_\varepsilon = 0.15, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.53, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92$ $C_1^{HRF} = 1.8, \quad C_w = 0.18, \quad C_{\alpha w} = 0.60, \quad C_\mu = 0.09$

Вдали от стенки уравнение переноса  $\omega$  приводит к классическому уравнению переноса  $\varepsilon$  из модели LRR. Однако, в противоположность пристеночной модели для  $\varepsilon$ , где часто используются демпфирующие функции для изменения порядка диссипативного члена, демпфирующая функция  $f_w$  используется для изменения величины коэффициента  $\alpha$ , равно как и для исключения члена встречной диффузии (см. описание SST  $k-\omega$  модели в п. 5.5.4.3) вблизи стенки. Потому такая модель более универсальна.

Что же касается начальных условий, то во избежание тривиального решения в свободном потоке по умолчанию величина  $\overline{V'_i V'_j}$  чаще всего задается в виде  $10^{-5} V_\infty \delta_{ij}$ , а корреляции второго порядка для скоростей  $\overline{V'_i V'_j}$ ,  $i \neq j$  везде принимаются равными нулю.

### 5.4.5. Модели третьего порядка

Уравнение переноса третьих моментов получается путем умножения уравнения переноса пульсационных скоростей (получаемого из уравнения (5.1.1)) на диаду, составленную из пульсационных скоростей, с последующим осреднением. В результате можно записать в компонентной форме следующее уравнение переноса третьих моментов [28]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{V_i' V_j' V_k'}) + \overline{V_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} (\overline{V_i' V_j' V_k'}) = P_{ijk}^{(1)} + P_{ijk}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x_n} D_{ijkn} + \Phi_{ijk} - \varepsilon_{ijk}, \quad (5.4.15)$$

где  $P_{ijk}^{(1)} = \overline{V_i' V_j'} \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{V_k' V_n'} + \overline{V_j' V_k'} \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{V_i' V_n'} + \overline{V_k' V_i'} \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{V_j' V_n'}$  – порождение турбулентности за счет напряжений Рейнольдса и их градиентов;

$$P_{ijk}^{(2)} = - \left[ \overline{V_i' V_j' V_n'} \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{V_k} + \overline{V_j' V_k' V_n'} \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{V_i} + \overline{V_k' V_i' V_n'} \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{V_j} \right] \quad \text{– порождение}$$

турбулентности за счет средних сдвиговых деформаций;

$$D_{ijkn} = - \left[ \overline{V_i' V_j' V_k' V_n'} - \nu \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{V_i' V_j' V_k'} + \frac{p}{\rho} (\overline{V_i' V_j'} \delta_{kn} + \overline{V_j' V_k'} \delta_{im} + \overline{V_k' V_i'} \delta_{jn}) \right] \quad \text{–}$$

диффузия за счет турбулентных пульсаций и молекулярных сил;

$$\Phi_{ijk} = \frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{V_i' V_j'} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{V_j' V_k'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{V_k' V_i'} \right) \quad \text{– диффузия за счет взаимодей-$$

ствия пульсаций давлений и турбулентных напряжений;

$$\varepsilon_{ijk} = 2\nu \left[ V_i' \frac{\partial V_j'}{\partial x_n} \frac{\partial V_k'}{\partial x_n} + V_j' \frac{\partial V_k'}{\partial x_n} \frac{\partial V_i'}{\partial x_n} + V_k' \frac{\partial V_i'}{\partial x_n} \frac{\partial V_j'}{\partial x_n} \right] \quad \text{– диссипация.}$$

Преобладающую роль в диффузионном члене играют четвертые моменты  $\overline{V_i' V_j' V_k' V_n'}$ , в то время как вклад двух других составляющих незначителен, поэтому их часто либо отбрасывают вовсе, либо оставляют только вязкий

член  $-v \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{V_i' V_j' V_k'}$ . Для самих четвертых моментов чаще всего используют гипотезу квазинормальности [39; 40]:

$$\overline{V_i' V_j' V_k' V_l'} = \overline{V_i' V_j'} \cdot \overline{V_k' V_l'} + \overline{V_i' V_k'} \cdot \overline{V_j' V_l'} + \overline{V_i' V_l'} \cdot \overline{V_j' V_k'}.$$

Для члена перераспределения  $\Phi_{ijk}$  можно использовать простые аппроксимации, например, приведенную в работе R.S. Amano и P. Goel [3]:

$$\Phi_{ijk} = -C_\gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{V_i' V_j' V_k'}.$$

В этом случае не учитывается вклад средних деформаций, соответствующий «быстрому» члену в моделях второго порядка. На изменения третьих моментов этот член существенно не влияет, что подтверждается тем обстоятельством, что для большинства сдвиговых течений  $P_{ijk}^{(1)}$  намного больше, чем  $P_{ijk}^{(2)}$ . Для моделирования течения вблизи обращенной ступеньки авторы [3] использовали значение константы  $C_\gamma = 5.8$ , отмечая при этом, что «было бы, вероятно, преждевременно останавливаться на фиксированном значении  $C_\gamma$ : для этого необходимы дополнительные экспериментальные данные для разнообразных условий экспериментов». В работе [29] при моделировании течения во вращающейся круглой трубе использовалось значение  $C_\gamma = 7.7$ .

Возможен также такой подход к моделированию  $\Phi_{ijk}$  [28; 102]:

$$\Phi_{ijk} = -\frac{1}{C_{f1}} \frac{\varepsilon}{k} \overline{V_i' V_j' V_k'} - C_{f2} P_{ijk}^{(1)} - C_{f3} P_{ijk}^{(2)},$$

где  $C_{f1} = 0.13$ ,  $C_{f2} = 1.0$ ,  $C_{f3} = 0.9$ . Здесь два последних члена аналогичны по смыслу «быстрым» членам моделей второго порядка.

В работе [28] предложена более полная аппроксимация члена  $\Phi_{ijk}$ :

$$\Phi_{ijk} = -\frac{1}{C_{f1}} \frac{\varepsilon}{k} \overline{V_i' V_j' V_k'} + b_{ijkr} \frac{\partial}{\partial x_t} \overline{V_i' V_r'} + a_{ijknm} \frac{\partial \overline{V}_n}{\partial x_m},$$

$$\begin{aligned}
a_{ijkm} &= C_3 \left( \overline{V_i V_k V_n'} \delta_{jm} + \overline{V_k V_j V_n'} \delta_{im} + \overline{V_i V_j V_n'} \delta_{km} \right) + \\
&+ C_4 \left( \overline{V_i V_k V_m'} \delta_{jn} + \overline{V_k V_j V_m'} \delta_{in} + \overline{V_i V_j V_m'} \delta_{kn} \right), \\
b_{ijk} &= C_6 \left( \overline{V_j V_k'} \delta_{ir} + \overline{V_i V_k'} \delta_{jr} + \overline{V_i V_j'} \delta_{kr} \right) + \\
&+ C_7 \left( \overline{V_k V_r'} \delta_{ij} + \overline{V_i V_r'} \delta_{jk} + \overline{V_j V_r'} \delta_{ik} \right) + \\
&+ C_8 k \left( \delta_{ij} \delta_{kr} + \delta_{ik} \delta_{jr} + \delta_{jk} \delta_{ir} \right),
\end{aligned}$$

здесь значения констант  $C_{j1} = 0.12$ ,  $C_3 = 0.1$ ,  $C_4 = 0.8$ ,  $C_6 = -1.2$ ,  $C_7 = -0.5$ ,  $C_8 = 0.6$  получены в результате моделирования течения в круглой трубе.

Для диссипативного члена уравнения (5.4.15) на основании гипотезы градиентного переноса можно записать такую аппроксимацию [102]:

$$\varepsilon_{ijk} = -C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \left( \overline{V_i V_n'} \delta_{jk} + \overline{V_j V_n'} \delta_{ik} + \overline{V_k V_n'} \delta_{ij} \right),$$

где  $C_\varepsilon = 0.2$ . Часто предполагается [3; 28], что характерный линейный масштаб корреляций скорости намного меньше характерного линейного масштаба осредненного течения, в этом случае компоненты тензора  $\varepsilon_{ijk}$  равны нулю.

В целом можно заключить, что использование уравнения (5.4.15) при моделировании турбулентности позволяет учитывать и конвективные, и порождающие эффекты средних деформаций, что дает возможность более точно учесть процесс переноса энергии. Более подробно с моделями такого типа можно ознакомиться в работах [3; 28; 29; 87; 102; 109; 129; 136; 167] и др.

#### 5.4.6. Общие выводы по моделям переноса напряжений Рейнольдса

При использовании моделей замыкания второго порядка в процессе решения задачи помимо трех скалярных уравнений движения и уравнения неразрывности решаются семь (в двумерном случае пять) дополнительных уравнений модели турбулентности, причем своих для каждой модели турбулентности. Для получения замкнутой системы ряд членов, входящих в уравнения

переноса напряжений Рейнольдса, приходится моделировать, причем эта процедура весьма осложнена в связи с недостаточностью необходимой для настройки информации (данных экспериментальных исследований или прямого численного моделирования). В результате требования к вычислительным ресурсам, необходимым для решения задачи, становятся достаточно высокими [198]. Кроме того, следует отметить, что такие модели имеют склонность к численной неустойчивости [111].

Среди преимуществ таких моделей следует отметить, что они позволяют учитывать анизотропию турбулентности, эффекты плавучести, вращения, и др. Это позволяет им обеспечивать хорошее совпадение с экспериментальными исследованиями как по интегральным, так и по распределенным характеристикам (см., например, [3; 61; 88; 93; 103; 104; 135; 137; 167] и др.).

## 5.5. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

### 5.5.1. *Общая структура моделей турбулентной вязкости*

Как уже отмечалось, для замыкания уравнений Рейнольдса необходимо ввести соотношения, устанавливающие связь турбулентных напряжений с параметрами осредненного течения.

Физически турбулентность можно трактовать как результат взаимодействий движущихся вихрей различных размеров (масштабов). Предположим, что  $l$  – размер вихря, а  $V_l$  – его скорость, тогда соответствующее число Рейнольдса  $Re_l = \frac{\rho V_l l}{\mu}$ . Большим числам Рейнольдса соответствуют малая вязкость и большой масштаб, следовательно, движение таких вихрей в пределе описывается уравнениями Эйлера для невязкой жидкости. Малым числам Рейнольдса соответствуют малые размеры вихрей, т. е. в пределе их движение описывается уравнениями Стокса для медленно движущейся среды. Здесь определяющую роль играет вязкая диссипация.

Как уже отмечалось, в случае турбулентного движения тензор напряжений может быть записан следующим образом:

$$\underline{\tau} = -\bar{p}\underline{E} + 2\mu\underline{S} + \underline{R}.$$

Одним из самых эффективных подходов к конкретизации таких соотношений был предложен Ж. Буссинеском [82] и заключается в том, что выражение для турбулентных напряжений в несжимаемой жидкости строится аналогично реологическому соотношению И. Ньютона для вязкой жидкости, т. е. записывается в виде:

$$\underline{R} = 2\mu_t\underline{S} - \frac{2}{3}\rho k\underline{E}, \quad (5.5.1)$$

где  $\mu_t$  – турбулентная вязкость.

Данное выражение не вводит никакой модели турбулентности, но лишь определяет ее структуру. Второй член необходим с целью выполнения условия равенства следов тензорных величин левой и правой частей:

$$\text{tr}\underline{R} = 2\mu_t \text{tr}\underline{S} - \frac{2}{3}\rho k \text{tr}\underline{E},$$

$$-2\rho k = 2\mu_t \nabla \cdot \vec{V} - \frac{2}{3}\rho k \cdot 3.$$

Отсюда следует тождество  $0=0$ , так как в несжимаемой жидкости  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ .

Вообще говоря, турбулентная вязкость  $\mu_t$  может представлять собою либо

тензор четвертого ранга (тогда  $R_{ij} = 2\mu_t s_{ijkl} S_{lk} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$ ), который в силу симметрии

содержит 36 компонент, либо же скаляр (тогда  $R_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$ ).

Чаще всего турбулентную вязкость представляют именно как скалярную величину, что автоматически приводит к необходимости использования гипотезы об изотропности турбулентности. Попытки найти универсальное выражение для этой величины, связывающее ее значение с параметрами осредненного течения предпринимаются уже более ста лет.

Величина турбулентной вязкости  $\mu_t$  самим Буссинеском принималась постоянной для всей области течения, но такой подход себя не оправдал. Дальнейшее развитие концепции вихревой вязкости было связано с введением Л. Прандтлем понятия длины перемешивания (смешения) [168]. Такой подход позволил получить в замкнутой форме решение для установившегося турбулентного течения в прямой круглой трубе и продемонстрировал хорошее согласование между теорией и экспериментом [69]. Более поздние исследования Т. Кармана привели к созданию расчетных методов определения величины пути смешения, что позволило получить распределение важнейших характеристик турбулентности для ряда течений в аналитическом виде, в частности, для плоского течения Куэтта между двумя плоскими стенками, одна из которых перемещается с постоянной скоростью [134]. Однако общим недостатком алгебраических моделей оказалась практическая невозможность распространить их на течения со сложной геометрией [199], в результате появилась потребность создания более совершенных моделей.

Дальнейшие успехи в исследовании турбулентности связаны с именами О.М. Белоцерковского, В.Е. Захарова, Б.И. Давыдова, Л.Ф. Козлова, С.С. Кутателадзе, Ю.В. Лапина, Л.Г. Лойцянского, М.Д. Миллионщикова, А.С. Мони́на, В.В. Новожилова, А.М. Обухова, Б.Л. Рождественского, А.Н. Секундова, Е.М. Смирнова, М.Х. Стрельца, А.М. Яглома, В.С. Baldwin, G.K. Batchelor, P. Bradshaw, J.O. Hinze, E. Hopf, R.H. Kraichnan, В.Е. Launder, F.R. Menter, H.K. Moffatt, S.A. Orszag, P.G. Saffman, T.H. Shih, P.R. Spalart, D.B. Spalding, C.G. Speziale, D.C. Wilcox, V. Yakhot, и многих других. Настоящий прорыв в исследовании турбулентности связан с именем А.Н. Колмогорова, которому удалось получить несколько основополагающих результатов [24; 25]. Эти результаты определили развитие теории турбулентности на многие годы.

В результате развития вычислительной техники и возрастающей потребности решения инженерных задач появились дифференциальные модели вихревой вязкости, основными из которых стали так называемая «стандартная»

$k$ - $\varepsilon$  модель В.Е. Launder и W.P. Jones [131],  $k$ - $\omega$  модель D.C. Wilcox [207] и гибридная SST  $k$ - $\omega$  модель F. Menter [153; 154]. Положенная в основу этих моделей гипотеза скалярной турбулентной вязкости в целом вызывает серьезные сомнения из-за имеющегося в турбулентных потоках несовпадения в общем случае главных осей тензора напряжений Рейнольдса и тензора скоростей деформаций [54; 182]. Однако, для многих течений эта гипотеза позволяет получать вполне достоверные результаты.

Уравнение (5.5.1) можно записать следующим образом:

$$-\rho \overline{V' \otimes V'} + \frac{2}{3} \rho k \underline{E} = 2\mu_t \underline{S},$$

или, используя понятие тензора анизотропии и учитывая, что  $\frac{\mu_t}{\rho} = \nu_t$ :

$$\underline{a} = -2 \frac{\nu_t}{k} \underline{S}.$$

Согласно гипотезе А.Н. Колмогорова, скорость диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$  связана с кинетической энергией турбулентности  $k$  следующим соотношением:  $\varepsilon \sim k^{3/2} / l$ , где  $l$  – линейный масштаб турбулентности. Но как уже отмечалось выше,  $l \sim \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ , откуда получаем  $\varepsilon \sim \frac{k^{3/2} \varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}}$ , следовательно  $\nu \sim \frac{k^2}{\varepsilon}$ . Отсюда величину турбулентной вязкости можно записать в виде [131]:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

где  $C_\mu$  – константа. Тогда тензор анизотропии принимает вид:

$$\underline{a} = -2C_\mu \frac{k}{\varepsilon} \underline{S}.$$

Соотношение  $k/\varepsilon$  часто называют характерным временем или временным масштабом турбулентности. Введем в рассмотрение величину  $\underline{S}^{\text{cv}} = \frac{k}{\varepsilon} \underline{S}$ , которая

является безразмерной, и называется безразмерной скоростью деформаций. Заметим, что аналогичным образом можно ввести в рассмотрение и безразмерный тензор завихренности:  $\underline{\Omega}^\vee = \frac{k}{\varepsilon} \underline{\Omega}$ . Тогда тензор анизотропии пропорционален безразмерному тензору скоростей деформаций:

$$\underline{a} = -2C_\mu \underline{S}^\vee. \quad (5.5.2)$$

Модели турбулентности такого рода называются линейными моделями вихревой вязкости.

Отметим, что для несжимаемой жидкости с учетом (5.3.12) можно записать следующие соотношения:

$$v_i = \frac{P_k}{S^2}, \quad tr(\underline{a} \cdot \underline{S}^\vee) = -\frac{P_k}{\varepsilon},$$

где  $S^2 = 2S_{ij}S_{ji}$ . Отсюда имеем известное представление:  $P_k = 2v_i S_{ij} S_{ji}$ .

В нелинейных моделях предпринимаются попытки обобщить данное соотношение, сопоставив тензору анизотропии некие нелинейные комбинации тензоров скоростей деформаций и завихренности:

$$\underline{a} = -2C_\mu \underline{S}^\vee + NL(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee), \quad (5.5.3)$$

где дополнительный нелинейный член (обозначенный символом  $NL$ ) должен быть симметричным и отвечать следующему условию:  $tr(NL(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)) = 0$ .

Кроме величины скорости диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$  в качестве характеристики турбулентности могут также использоваться линейный масштаб турбулентности  $l$ , удельная скорость диссипации  $\omega \sim \varepsilon/k$ , и некоторые другие. Принимая, что  $\varepsilon = C_\mu k \omega$  турбулентную кинематическую вязкость можно записать следующим образом:  $v_i = \frac{k}{\omega}$ .

Все модели турбулентности должны отвечать следующим условиям реализуемости:

- неотрицательность нормальных напряжений:  $R_{ii} = -\rho \overline{V_i' V_i'} \geq 0$ ;
- неравенство Коши–Буняковского для касательных напряжений:  $R_{ii} R_{jj} \geq R_{ij}^2$  при  $i \neq j$ , или, иначе:  $\overline{V_i' V_i'} \cdot \overline{V_j' V_j'} \geq (\overline{V_i' V_j'})^2$  (здесь по повторяющемуся индексу суммирования не ведется, т. е., например, при  $i=1$  и  $j=2$ :  $\overline{V_1'^2} \cdot \overline{V_2'^2} \geq (\overline{V_1' V_2'})^2$ );
- неотрицательность третьего инварианта тензора напряжений Рейнольдса:

$$\det(\underline{R}) = -\rho \begin{vmatrix} \overline{V_1' V_1'} & \overline{V_1' V_2'} & \overline{V_1' V_3'} \\ \overline{V_2' V_1'} & \overline{V_2' V_2'} & \overline{V_2' V_3'} \\ \overline{V_3' V_1'} & \overline{V_3' V_2'} & \overline{V_3' V_3'} \end{vmatrix} \geq 0.$$

В настоящее время принята следующая классификация полуэмпирических моделей турбулентной вязкости [207]:

- алгебраические модели (модели «нулевого» порядка);
- модели с одним дифференциальным уравнением переноса характеристики турбулентности (модели «первого» порядка);
- модели с двумя дифференциальными уравнениями переноса (двухпараметрические модели) (модели «второго» порядка);
- модели с большим числом уравнений.

Ниже будут рассмотрены основные аспекты ряда наиболее популярных в настоящее время моделей такого типа.

### 5.5.2. Алгебраические модели

Алгебраические модели устанавливают связь между турбулентной вязкостью и параметрами осредненного потока в форме алгебраических уравнений. Первым опытом подобного рода стала гипотеза пути перемешивания, предложенная Л. Прандтлем в 1925 году [168]. Дальнейшее развитие данные модели получили в работах А. Betz, E. van Driest, R. Deissler, T. von Karman, F. Klausner и др.

Л. Прандтль ввел в рассмотрение масштаб длины  $l_m$ , названный им путем перемешивания (длиной смешения, mixing length), в основе которого лежит аналогия между движением жидкой частицы вблизи стенки и длиной пробега молекулы в кинетической теории газов. В результате дальнейшего анализа на основе теории размерности им было найдено выражение для турбулентной вязкости:

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right|,$$

размерность которой  $\left[ \frac{L^2}{T} \right]$ , где  $L$  – масштаб длины,  $T$  – масштаб времени.

Тогда (как показано в п. 3.4) турбулентное касательное напряжение для простых сдвиговых течений записывается в виде:

$$\tau_{xy}^T = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right|,$$

где  $\bar{V}_x$  – осредненная скорость в продольном направлении,  $y$  – поперечная к потоку координата.

Такой подход позволил получить в замкнутой форме решение для турбулентного течения в прямой трубе и каналах, продемонстрировав хорошее согласование между теорией и экспериментом [69]. Более поздние исследования Т. Кармана привели к созданию расчетных методов определения величины пути смешения, что позволило получить распределение важнейших характеристик турбулентности для ряда течений в аналитическом виде, в частности, для плоского течения Куэтта между двумя плоскими стенками, одна из которых перемещается с постоянной скоростью [134].

Большим преимуществом таких моделей является возможность определения величины пути перемешивания с помощью относительно несложных

эмпирических зависимостей, что гарантирует достаточно высокую вычислительную эффективность. Например, для течения в пограничном слое  $l_m = \kappa y$ , где  $y$  – расстояние от стенки,  $\kappa = 0.41$  – постоянная Кармана.

К недостаткам алгебраических моделей такого рода следует отнести, во-первых, их узкую специализацию, которая связана с их эмпиризмом, то есть привязкой к конкретному течению. Во-вторых, гипотеза пути смещения предполагает, что турбулентность находится в состоянии локального равновесия, то есть в каждой точке расчетной сетки соблюдается баланс между генерацией турбулентной энергии, и ее диссипацией, на который не оказывают влияния ни перенос турбулентности из других точек пространства, ни предыстория процесса. Вместе с тем указанные факторы часто играют существенную роль. В-третьих, в рамках модели Л. Прандтля и ее модификаций граничное условие прилипания невозможно осуществить. Поэтому для придания физического смысла приходится оперировать понятием вязкого подслоя [168]. Наконец, в соответствии с данной теорией, когда скорость достигает своего локального максимума (т. е.  $\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} = 0$ ), турбулентные напряжения исчезают, а это неверно.

Это касается, например, течения в канале, у которого одна стенка гладкая, а другая – шероховатая. Необходимость учета подобных эффектов привела к сильному усложнению алгебраических моделей, что лишило их большей части привлекательности. Поэтому в настоящее время подобные модели применяются редко, и исключительно для расчета пристеночных течений. Например, в работе [1] развита подобная модель для расчета течений в прямоугольных выемках.

### **5.5.3. Модели с одним уравнением переноса**

Попытки расширить возможности гипотезы вихревой вязкости привели к созданию моделей, в которых последняя определяется в результате решения

дифференциального уравнения переноса. Дополнительное уравнение, учитывающее перенос параметра турбулентности, записывается либо для турбулентной (эффективной) вязкости (или ее разновидностей), либо для кинетической энергии турбулентности, выступающей в качестве характерного масштаба скорости турбулентных пульсаций в потоке [16]. В первом случае в качестве искомой характеристики также могут выступать величины, отличающиеся от  $\nu$  демпфирующей функцией, учитывающей влияние молекулярной вязкости. Наиболее популярной в настоящее время моделью такого класса является модель, предложенная P. Spalart и S. Allmaras (S-A). Эта модель содержит уравнение переноса для вспомогательной скалярной величины – «модифицированной» вихревой вязкости  $\tilde{\nu}$ . Модель включает в себя восемь эмпирических коэффициентов замыкания и три замыкающих функции. Она предназначена, прежде всего, для решения задач внешней дозвуковой аэродинамики [194].

Модель S-A содержит одно уравнение переноса для «модифицированной» вихревой вязкости  $\tilde{\nu}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\tilde{\nu}V_j) = P_{\tilde{\nu}} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2\rho} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - Y_{\tilde{\nu}} + S_{\tilde{\nu}},$$

где член  $P_{\tilde{\nu}}$  учитывает производство турбулентной вязкости,  $Y_{\tilde{\nu}}$  – распад турбулентной вязкости, который происходит в пристеночной области из-за блокирования стенками вязкого демпфирования,  $\sigma_{\tilde{\nu}}$  и  $C_{b2\rho}$  – константы,  $S_{\tilde{\nu}}$  – источниковый член. Следует отметить, что турбулентная кинетическая энергия  $k$  в данной модели не рассчитывается.

Модифицированная кинематическая вязкость  $\tilde{\nu}$  идентична турбулентной кинематической вязкости, исключая пристеночные области (подверженные сильному влиянию молекулярной вязкости), где она равна нулю. При этом модифицированная вихревая кинематическая вязкость связана с турбулентной следующим соотношением:

$$V_i = \tilde{\nu} f_{v1},$$

где  $f_{v1}$  – функция вязкого демпфирования, зависящая от соотношения между модифицированной вихревой кинематической вязкости и молекулярной:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{v}}{\nu}.$$

Здесь величина  $C_{v1}$  является константой. Вдали от твердых границ  $\nu_1 = \tilde{\nu}$ , и  $f_{v1} \rightarrow 1$ .

Генеративный и диссипативный члены определяются как функции модифицированной вихревой кинематической вязкости (в первой и второй степенях соответственно) и величины  $\tilde{S} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2}$ , где  $k$  – константа,  $d$  – расстояние до стенки,  $f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$ ,  $\Omega = \sqrt{2\underline{\Omega} : \underline{\Omega}}$  – скалярная мера тензора  $\underline{\Omega} = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{V} - \nabla \tilde{V}^T)$ . Генеративный член представляет собой следующее выражение:

$$P_v = C_{b1}(1 - f_{v1})\rho\tilde{S}\tilde{\nu},$$

а диссипативный член определяется как:

$$Y_v = C_{w1}f_w\rho\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2,$$

где  $f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^3 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}$ ,  $g = r + C_{w2}(r^6 - r)$ ,  $r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}k^2d^2}$ ,  $C_{w1}$ ,  $C_{w2}$ , и  $C_{w3}$  – константы.

Константы модели S–A:

$$C_{b1} = 0.1335, C_{b2} = 0.622, \sigma_{\tilde{\nu}} = \frac{2}{3}, C_{v1} = 7.1,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_v}, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2.0, k = 0.4187.$$

Поскольку значения вихревой вязкости на твердых границах равны нулю, при выполнении моделирования во избежание сложностей с численным

решением в начальный момент времени рекомендуется задавать конечные значения модифицированной турбулентной вязкости в потоке (например,  $\tilde{\nu} = 0.001\nu$ ).

При наличии в течении ламинарно-турбулентного перехода возможно использовать следующую модификацию модели:

1. диссипативный член записывается в виде:

$$Y_\nu = \left( C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{k^2} f_{t2} \right) \rho \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2;$$

2. источниковый член:

$$S_{\tilde{\nu}} = f_{t1} \rho \Delta V^2.$$

Здесь  $f_{t1} = C_{t1} g_t \exp\left(-C_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta V^2} [d^2 + (g_t d)^2]\right)$ ,  $f_{t2} = C_{t3} g_t \exp(-C_{t4} \chi^2)$ ,

$g_t = \min\left\{0.1, \frac{\Delta V^2}{\omega_t \Delta x_t}\right\}$ ,  $C_{t1} = 1$ ,  $C_{t2} = 2$ ,  $C_{t3} = 1.2$ ,  $C_{t4} = 0.5$ ,  $\omega_t$  – завихренность в

точке ламинарно-турбулентного перехода,  $\Delta V$  – модуль вектора разности скоростей в потоке и в точке ламинарно-турбулентного перехода,  $\Delta x_t$  – шаг сетки вдоль твердой границы в точке ламинарно-турбулентного перехода,  $d$  – расстояние до стенки.

Так как оригинальная формулировка модели S-A не содержит учета таких факторов, как вращение и кривизну потока, были разработаны специальные модификации модели для их учета. В частности, P. Spalart и М.Л. Шур [195] предложили иную запись генеративного члена (SARC – Spallart–Allmaras Rotation/Curvature correction), которая в случае декартовой системы координат, вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  с компонентами  $\omega_m$  имеет вид:

$$G_{SARC} = f_{r1} G_\nu,$$

где  $f_{r1}(r^*, \tilde{r}) = (1 + c_{r1}) \frac{2r^*}{1 + r^*} [1 - c_{r3} \tan^{-1}(c_{r2} \tilde{r})] - c_{r1}$ ,

$$\tilde{r} = 2 \frac{\underline{\Omega}_{ik} \cdot S_{jk}}{D^4} \left[ \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + (\varepsilon_{imn} S_{jn} + \varepsilon_{jmn} S_{in}) \omega_m \right],$$

$$r^* = \frac{S}{\underline{\Omega}}, \quad S = \sqrt{2\underline{S} : \underline{S}}, \quad \underline{\Omega} = \sqrt{2\underline{\Omega} : \underline{\Omega}}, \quad D^2 = \frac{1}{2}(S^2 + \underline{\Omega}^2),$$

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{mij} \omega_m \right), \quad c_{r1} = 1.0, \quad c_{r2} = 12.0, \quad c_{r3} = 1.0$$

Для течений с малой кривизной линии тока  $f_{r1} \rightarrow 1$ , а у простых сдвиговых течений  $\tilde{r} = 0$ ,  $r^* = 1$ , т. е.  $f_{r1} = 1$ .

На Рис. 5.1 приведены результаты расчета профиля скорости во вращающейся трубе в сравнении с результатами прямого численного моделирования (DNS). Можно видеть, что использование поправки Р. Spalart и М.Л. Шура позволяет получить корректный профиль продольной скорости в данном случае.

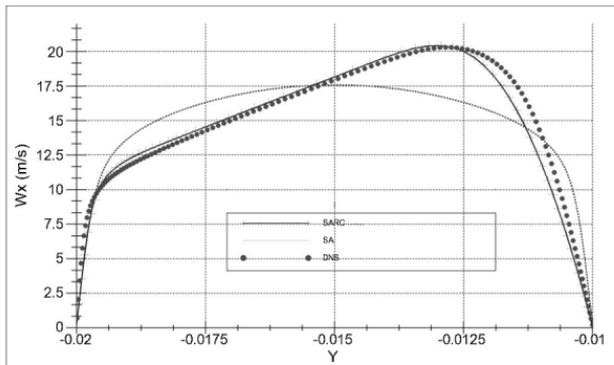


Рис. 5.1. Профиль скорости во вращающейся трубе из работы [125]  
(сплошная линия – SARC, маленькие точки – S-A, большие точки – DNS)

В целом можно заключить, что модель Р. Spalart и S. Allmaras удовлетворительна для ряда инженерных приложений, прежде всего для задач расчета обтекания крыльевых систем. Она довольно экономична, хорошо зарекомендовала себя для моделирования пограничных слоев умеренной сложности,

двумерных и псевдодвумерных течений. В то же время она обеспечивает не вполне удовлетворительную точность решения для трехмерных потоков, струйных и отрывных течений.

Следует отметить, что однопараметрические модели турбулентности продолжают развиваться [57; 78; 152]. Очень интересна в этом контексте работа Ф. Менгера [152], в которой обосновывается соображение об избыточности одного из уравнений в  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности. К сходному мнению пришел путем детального анализа этой модели А.Н. Секундов [57]. В.А. Павловский [50] предложил однопараметрическую модель переноса скалярного параметра турбулентности в заданной точке потока. Важной особенностью этой модели является наличие коэффициента молекулярной вязкости, что позволяет ее использовать во всей области пристеночного турбулентного течения (от вязкого подслоя до перемежаемости турбулентности). Дальнейшее развитие эта идея получила в работах В.В. Павловского и Д.В. Никущенко [45; 54]. А.М. Балонишников [7] предложил однопараметрическую модель турбулентности, характерным моментом которой является наличие отрицательного коэффициента диффузии. Следует отметить, что подобный подход не противоречит современным представлениям о развитии турбулентности [186], однако возможность использования его для моделирования турбулентных течений нуждается в дополнительных исследованиях.

#### **5.5.4. Модели с двумя уравнениями**

Модели турбулентности с двумя уравнениями переноса ведут свою историю от основополагающей работы А.Н. Колмогорова [24], и вплоть до настоящего времени остаются наиболее популярными моделями для решения широкого круга инженерных задач [1; 16; 20]. Данный класс моделей предполагает решение дифференциальных уравнений переноса для двух характеристик турбулентности, которые позволяют затем определить турбулентную вязкость с помощью алгебраических соотношений. В подавляющем большинстве

случаев в качестве первой из характеристик выступает величина кинетической энергии турбулентных пульсаций  $k$ . В выборе же характеристики турбулентности, для которой формулируется второе уравнение, имеется определенная свобода. Наибольшее распространение получили две группы таких моделей, а именно  $k$ - $\varepsilon$  и  $k$ - $\omega$  модели:

- $k$ - $\varepsilon$  модели содержат два уравнения переноса – кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости диссипации  $\varepsilon$ , при этом вихревая вязкость вычисляется как  $\nu_t \sim k^2/\varepsilon$ . Уравнение переноса для  $k$  записывается на основе строгого уравнения переноса кинетической энергии турбулентности [150], а уравнение переноса для  $\varepsilon$  строится согласно общей форме уравнения переноса [4] согласно представлениям авторов моделей о характере процесса диссипации энергии турбулентности. В основе всех моделей данного класса лежит предположение о том, что турбулентное течение является полностью развитым, и влияние на него молекулярной вязкости незначительно. Потому прямой диссипацией часто пренебрегают [9], что заметно ограничивает область приложения данных моделей. Чтобы преодолеть эти ограничения, в настоящее время создан ряд модификаций модели, расширяющих область ее применения;
- $k$ - $\omega$  модели также содержат два уравнения переноса – для кинетической энергии турбулентности  $k$  и удельной скорости диссипации  $\omega$ , а вихревая вязкость определяется как  $\nu_t \sim k/\omega$ . Такие модели показали очень хорошие результаты при расчете широкого класса течений и заслуженно пользуются популярностью у исследователей. Вполне возможно рассматривать в качестве второй характеристики величину  $\omega^2$  [144] вместо  $\omega$ , однако в настоящее время такие модели не распространены.

Двухпараметрическая диссипативная модель (« $k$ - $\varepsilon$  модель») обладает определенными преимуществами перед другими подобными моделями и до

сих пор широко используется в приложениях, хотя обладает и рядом недостатков (например, плохо работает для вращающихся течений типа кругового течения Тэйлора–Куэтта). В работах S.A. Orzag и V. Yakhot [208; 209], а также в работах [189; 210], были предприняты попытки вывести  $k$ – $\varepsilon$  модель непосредственно из уравнений Навье–Стокса методом ренормализационной группы. Эту разновидность называют «RNG  $k$ – $\varepsilon$  моделью», она отличается от исходной в частности тем, что коэффициент пропорциональности между турбулентной вязкостью и выражением  $k^2 / \varepsilon$  определяется аналитически. Однако G.L. Euyink [105] указал, что отброшенные в этой модели члены уравнений имеют тот же порядок что и оставленные. Исследование свойств изотропной турбулентности в рамках метода ренормгруппы содержится в работах [2; 75]. Также для вывода уравнений переноса параметров турбулентности было использовано двухмасштабное разложение [121; 211; 212; 213] (см. также обсуждение [178]), однако и при этом подходе трудно оценить порядок членов уравнений. Еще один подход к обоснованию подобных моделей турбулентности был предложен на основе метода гомогенизации [169], однако он требует дополнительных исследований.

Рассмотрим подробнее модели вихревой вязкости с двумя уравнениями.

#### 5.5.4.1. Класс $k$ – $\varepsilon$ моделей

##### Стандартная $k$ – $\varepsilon$ модель

«Стандартная»  $k$ – $\varepsilon$  модель (SKE) предложена В.Е. Launder и W.P. Jones [131] и построена на основе предположения о том, что турбулентное течение является полностью развитым, т. е. эффекты, вызванные молекулярной вязкостью незначительны ( $\nu_t \gg \nu$ ).

В этой модели турбулентная вязкость определяется следующим образом:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

где  $C_\mu$  – эмпирическая константа.

Скалярные величины  $k$  и  $\varepsilon$  определяются в результате решения следующих уравнений переноса (черта над осредненными скоростями опущена для облегчения чтения):

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho (P_k - \varepsilon),$$

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k},$$

здесь  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$  – полуэмпирические константы турбулентности, определенные экспериментально для течения в пограничном слое для гомогенной изотропной турбулентности, величины  $Pr_k = 1.0$  и  $Pr_\varepsilon = 1.3$  – турбулентные числа Прандтля для  $k$  и  $\varepsilon$  соответственно,  $P_k = -\overline{V_i V_j'} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j}$ , причём для несжимаемой жидкости  $P_k = 2\nu_t S_{ij} S_{ji}$ .

Для учета эффекта сжимаемости газов в  $k$ - $\varepsilon$  моделях S. Sarkar и L. Balakrishnan [181] предложили добавлять в правую часть уравнения переноса кинетической энергии дополнительный член:

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_i^2,$$

в котором  $M_i = k/a^2$  – турбулентное число Маха,  $a = \sqrt{\gamma RT}$  – скорость звука,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – температура.

Если в течении присутствует смешение потоков или теплообмен, то  $k$ - $\varepsilon$  модель может быть модифицирована для учета этих факторов. Наиболее простой способ учета этих эффектов – это введение предположения о пропорциональности турбулентного потока концентрации или температуры их осредненным характеристикам [174]:

$$-\overline{V_j' \phi'} = \frac{\nu_t}{Sc_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j},$$

где  $Sc_i = \nu_i / D_i$  – турбулентное число Шмидта,  $D_i$  – коэффициент турбулентной диффузии;  $\phi$  – осредненное значение величины концентрации или температуры.

Тогда уравнения модели запишутся следующим образом [79]:

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho (P_k + G - \varepsilon),$$

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho (C_{\varepsilon 1} (P_k + G) (1 + C_{\varepsilon 3} R_f) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k},$$

где  $G = \beta g_i \frac{\nu_i}{Sc} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$  характеризует производство/уничтожение турбулентности

за счет плавучести;  $R_f = -\frac{G}{P_k}$  – потоковое число Ричардсона, характеризующее

отношение производства или уничтожения  $k$  за счет плавучести к его производству за счет сдвига;  $\beta$  – коэффициент объемного расширения жидкости;

$C_{\varepsilon 3}$  – эмпирическая константа;  $g_j$  – ускорение в направлении  $x_j$ . Константа

$C_{\varepsilon 3}$  должна быть близка к 0 для вертикальных слоев, и к 1 для горизонтальных [174], отсюда возможна следующая ее аппроксимация [124]:

$$C_{\varepsilon 3} = \tanh \left( \frac{\nu}{\nu'_1} \right).$$

Что касается турбулентного числа Шмидта  $Sc_i$ , то по данным W. Rodi [174] для пристеночных течений  $Sc_i = 0.90$ , для плоской струи и слоев смешения

$Sc_i = 0.50$ , для круглой струи  $Sc_i = 0.70$ . Однако эта величина может прямо

влиять на степень турбулентности, так как входит в составляющую  $G$ . По этой причине ряд авторов производят коррекцию ее в ходе моделирования согласно формуле Мунка–Андерсона [174]:

$$\frac{Sc_i}{Sc_{i0}} = \frac{(1 + 3.33 Ri)^{1.5}}{(1 + 10 Ri)^{0.5}},$$

где  $Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} / \left( \frac{\partial V_1'}{\partial x_3} \right)^2$  – градиентное число Ричардсона.

Все остальные константы этой модели принимаются такими же, как и в «стандартной». В качестве иллюстрации можно рекомендовать работу [79], в которой произведено сравнение четырех вариантов  $k$ - $\varepsilon$  модели на примере смешивающегося течения в плоском канале.

При приближении к твердым стенкам кинетическая энергия убывает, становясь на стенке равной нулю, а для скорости диссипации используется граничное условие непротекания  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$ . Однако в этом случае величина  $\varepsilon / k \rightarrow \infty$ , что приводит к невозможности использования приведенных выше уравнений вблизи стенок. Поэтому для вычисления значений  $k$  и  $\varepsilon$  здесь используются пристеночные асимптотики следующего вида:

$$k_w = \frac{\tau_w}{\rho \sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{1/2}}{l},$$

где  $\tau_w$  – напряжение на стенке,  $l$  – линейный масштаб турбулентности.

На внешней границе расчетной области величины  $k$  и  $\varepsilon$  должны быть заданы. Если информация о них отсутствует, то, как правило, принимается, что  $k = 5 \cdot 10^{-5} \bar{V}_i \bar{V}_i$ , а  $\varepsilon$  находится из соображений локально-изотропной турбулентности, изложенных ранее в п. 5.3.2.

Серьезным недостатком модели SKE является упрощенная запись уравнения переноса скорости диссипации, в результате чего она позволяет удовлетворительно описать процессы переноса энергии турбулентности только в областях со значительной неоднородностью потока (асимметричные турбулентные потоки), а для осесимметричных потоков, характеризующихся небольшой неоднородностью, описание процессов переноса является очень грубым. Попытки усовершенствования SKE привели к созданию более двух десятков ее

вариаций, отличающихся значениями констант и видом членов уравнения переноса скорости диссипации. В качестве примера ниже рассмотрены две популярные ее вариации.

### RNG $k$ - $\varepsilon$ модель

Эта модель построена на основе «стандартной» с использованием теории ренормализованных групп [208; 209]. Модель обходит ряд ограничений «стандартной»  $k$ - $\varepsilon$  модели благодаря более качественному описанию переноса турбулентности в потоках с малыми числами Рейнольдса и в пристеночных областях, а также возможности учета дополнительных эффектов благодаря введению в уравнения «стандартной» модели добавочных функций. При этом уравнения переноса и вихревой вязкости остаются неизменными, однако теперь  $C_\mu = 0.085$ , а коэффициент  $C_{\varepsilon 2}$  определяется следующим образом:

$$C_{\varepsilon 2} = \tilde{C}_{\varepsilon 2} + \frac{C_\mu \lambda^3 (1 - \lambda/\lambda_0)}{1 + \beta \lambda^3},$$

где  $\lambda = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ji}}$ ,  $\tilde{C}_{\varepsilon 2} = 1.68$ ,  $\beta = 0.012$ ,  $\lambda_0 = 4.38$ . Кроме того, в этой модели принимается:  $Pr_k = Pr_\varepsilon = 0.7194$ ,  $C_{el} = 1.42$ .

Благодаря введенным модификациям RNG  $k$ - $\varepsilon$  модель позволяет более точно описывать пристеночные течения, а также течения с сильной кривизной потока. Однако при этом в некоторых случаях модель становится неустойчивой [81], для решения этой проблемы рекомендуется выполнить начальное решение задачи с помощью SKE модели, а затем уточнить решение, подключив модель RNG.

### Realizable $k$ - $\varepsilon$ (KER)

Данная модель разработана под руководством Т. Shih [184] и предназначена для моделирования течений с сильными сдвигами (т. е. когда

$\frac{k}{\varepsilon} S > \frac{1}{3C_\mu} \approx 3.7$ ,  $S = \frac{1}{3}(S_{11} + S_{22} + S_{33})$ ). Стандартная модель дает в таких случаях отрицательные нормальные напряжения, и неравенство Коши–Буняковского для касательных напряжений нарушается (более подробно это будет обсуждаться в п. 5.5.5). KER позволяет решить эту проблему, она основана на динамическом уравнении для среднеквадратичной пульсации завихренности при больших числах Рейнольдса. Для обхода указанной трудности в этой модели коэффициент пропорциональности  $C_\mu$  перестает быть постоянным и определяется как функция  $k$  и  $\varepsilon$ , а также тензоров скоростей деформаций и завихренности:

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s V^{(*)} \frac{k}{\varepsilon}},$$

где  $V^{(*)} = \sqrt{S_{ij}S_{ji} + \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ji}}$ ,  $\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk}\omega_k$  – осредненный тензор вращения в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\tilde{\omega}$  с компонентами  $\omega_k$ ,  $A_0 = 4.0$ ,  $A_s = \sqrt{6} \cos\phi$ ,  $\phi = \frac{1}{3} \arccos(W\sqrt{6})$ ,  $W = \frac{S_{ij}S_{jm}S_{mi}}{\tilde{S}^3}$ ,  $\tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ji}}$ .

Кроме того,  $C_{\varepsilon 1} = \max\left\{0.43, \frac{\eta}{5 + \eta}\right\}$ ,  $\eta = \frac{k}{\varepsilon} S$ ,  $S = \sqrt{2\underline{S} : \underline{S}}$ , остальные константы:

$$C_{\varepsilon 2} = 1.9, \text{Pr}_k = 1.0, \text{Pr}_\varepsilon = 1.2.$$

Подробнее об этой модели можно узнать в оригинальной работе [184].

В целом можно сказать, что класс  $k$ – $\varepsilon$  моделей хорошо подходит для моделирования умеренно сложных течений. Например, в работе W. Rodi [171] произведено прямое сравнение нескольких  $k$ – $\varepsilon$  моделей с RSM и LES моделями на примере обтекания цилиндра квадратного сечения и куба, установленного на плоской стенке. Показано, что модели этого класса ведут себя вполне достойно, позволяя определять интегральные характеристики с достаточной точностью, однако пульсационные характеристики течения определялись с за-

метным завышением. При этом с точки зрения вычислительной эффективности подход LES сильно проигрывает: W. Rodi отмечает, что вычисления методом LES заняли у него 160 часов расчетного времени, двухслойные  $k-\varepsilon$  модели – порядка 6 часов, а  $k-\varepsilon$  модели при использовании пристеночных функций – всего 15 минут. Сравнение всех описанных выше вариантов  $k-\varepsilon$  модели на примере задачи о течении жидкости в асимметричном диффузоре произведено S.S. Kumar и K.A. Prakash [138], которые показали, что в этом случае KER предпочтительнее остальных.

#### 5.5.4.2. Стандартная $k-\omega$ модель

Первая подобная модель была предложена в уже упомянутой работе А.Н. Колмогорова [24], в которой впервые было приведено модельное уравнение переноса удельной скорости диссипации, которую он считал «основной характеристикой турбулентного движения во всех масштабах». Впоследствии эти модели были развиты в работах P.G. Saffman, C.G. Speziale, D.C. Wilcox, M.W. Rubesin, F.R. Menter. Модели этой группы успешно развиваются и поныне. «Стандартная»  $k-\omega$  модель была предложена D.C. Wilcox в 1988 году, и им же впоследствии уточнялась [205; 206; 207].

Турбулентная кинетическая энергия  $k$  и удельная скорость диссипации  $\omega$  в этой модели описываются следующими уравнениями переноса:

$$\rho \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho (P_k - Y_k),$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + V_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \rho (P_\omega - Y_\omega).$$

В этих уравнениях  $G_k$  и  $G_\omega$  учитывают генерацию турбулентной кинетической энергии и удельной скорости диссипации,  $\Gamma_k$  и  $\Gamma_\omega$  – эффективные диффузии  $k$  и  $\omega$  соответственно,  $Y_k$  и  $Y_\omega$  – диссипации  $k$  и  $\omega$  соответственно.

Эффективные диффузии определяются следующими выражениями:

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}, \quad \Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega},$$

где  $Pr_k$  и  $Pr_\omega$  – турбулентные числа Прандтля для  $k$  и  $\omega$ , соответственно.

Турбулентная кинематическая вязкость здесь определяется следующим образом:

$$\nu_t = \alpha^* \frac{k}{\omega},$$

где  $\alpha^* = \alpha_\infty^* \left( \frac{\alpha_0^* + Re_t / R_k}{1 + Re_t / R_k} \right)$  – демпфирующий коэффициент,  $Re_t = \frac{k}{\nu \omega}$ ,  $R_k$ ,

$\alpha_0^*$ ,  $\alpha_\infty^*$  – константы. При высоких числах Рейнольдса принимается, что  $\alpha^* = 1$ .

Производство величины  $\omega$  определяется выражением:

$$P_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} P_k,$$

где  $\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + Re_t / R_\omega}{1 + Re_t / R_\omega} \right)$ ,  $R_\omega$ ,  $\alpha_\infty$  – константы, причем при высоких числах

Рейнольдса принимают величину  $\alpha = 1$ .

Диссипативный член для  $k$  записывается так:

$$Y_k = \beta^* f_{\beta^*} k \omega,$$

где  $f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \chi_k \leq 0 \\ \frac{1+680\chi_k^2}{1+400\chi_k^2} & \chi_k > 0 \end{cases}$ ,  $\chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$ ,  $\beta^* = \beta_t^* (1 + \zeta^* F(M_t))$ ,

$\beta_t^* = \beta_\infty^* \left( \frac{4/15 + (Re_t / R_\beta)^4}{1 + (Re_t / R_\beta)^4} \right)$ ,  $\zeta^*$ ,  $R_\beta$ ,  $\beta_\infty^*$  – константы,  $F$  – функция, учитыва-

ющая эффекты сжимаемости:

$$F(M_t) = \begin{cases} 0, & M_t \leq M_{t0} \\ M_t^2 - M_{t0}^2, & M_t > M_{t0} \end{cases},$$

где  $M_i^2 \equiv \frac{2k}{a^2}$ ,  $M_{i0} = 0.25$ ,  $a = \sqrt{\gamma RT}$  – скорость звука.

Диссипация  $\omega$  определяется выражением:

$$Y_\omega = \beta f_\beta \omega^2,$$

$$\text{где } f_\beta = \frac{1+70\chi_\omega}{1+80\chi_\omega}, \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_\infty^*\omega)^3} \right|, \beta = \beta_i \left[ 1 - \frac{\beta_i^*}{\beta_i} \zeta^* F(M_i) \right].$$

Константы модели:

$$\alpha_\infty^* = 1, \alpha_\infty = 0.52, \alpha_0 = 1/9, \beta_\infty^* = 0.09, \beta_i = 0.072, R_\beta = 8,$$

$$R_k = 6, R_\omega = 2.95, \zeta^* = 1.5, M_{i0} = 0.25, Pr_k = 2.0, Pr_\omega = 2.0.$$

Для вычисления значений  $\omega$  вблизи стенок используется пристеночная асимптотика следующего вида:

$$\omega = 150 \frac{\tau_w}{\mu}.$$

«Стандартная»  $k-\omega$  модель хорошо подходит для моделирования пристеночных течений и течений с малыми числами Рейнольдса, а также может применяться для моделирования сложных течений при неблагоприятных градиентах давления и отрывных течений.

К недостаткам же ее следует отнести следующие: она дает грубое решение для турбулентного ядра течения и при расчетах отрывных течений может приводить к появлению ранних и избыточных отрывов.

#### 5.5.4.3. Shear Stress Tensor $k-\omega$ модель

Перепишем стандартную  $k-\varepsilon$  модель в терминах  $k-\omega$ , для чего в уравнения SKE подставим  $\varepsilon = C_\mu k \omega$ , в результате получаем следующую модель:

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) k \right) = \nabla \cdot [\Gamma_k \nabla k] + \rho P_k - C_\mu k \omega,$$

$$\rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \omega \right) = \nabla \cdot [\Gamma_\varepsilon \nabla \omega] + \frac{2\Gamma_\varepsilon}{V_i \omega} \nabla \omega \cdot \nabla \omega + \frac{C_{\varepsilon 1} - 1}{V_i} P_k - (C_{\varepsilon 2} - 1) C_\mu \omega^2.$$

Можно видеть, что последнее уравнение отличается от уравнения переноса  $\omega$  в SKO наличием члена  $D_\omega = \frac{2\Gamma_\varepsilon}{V_i \omega} \nabla \omega \cdot \nabla k$ , который называют встречной диффузией (или параметром «взаимораспространения»). То есть представляется вполне возможным создание модели, объединяющей в себе  $k$ - $\varepsilon$  и  $k$ - $\omega$  модели. Такая модель была разработана F. Menter [153; 154], и названа им SST  $k$ - $\omega$  моделью (Shear Stress Tensor  $k$ - $\omega$  model). Она эффективно сочетает в себе устойчивость и точность «стандартной»  $k$ - $\omega$  модели в пристеночных областях, и достоинства  $k$ - $\varepsilon$  модели на удалении от стенок. SST  $k$ - $\omega$  модель имеет следующие особенности по сравнению со «стандартной»:

- для переключения между  $k$ - $\omega$  и  $k$ - $\varepsilon$  моделями вводится специальная весовая функция  $F_1$ , которая в пристеночной области равна единице (в таком случае при расчете используется «стандартная»  $k$ - $\omega$  модель), а на удалении от стенки равна нулю (осуществляя переход от  $k$ - $\omega$  модели к  $k$ - $\varepsilon$ );
- выражение для турбулентной вязкости модифицировано так, чтобы обеспечить переход от нее к формуле П. Брэдшоу [15]:  $-\overline{V_i'V_j'} = 0.31k$ ;
- приняты другие значения феноменологических констант.

Эти особенности делают SST  $k$ - $\omega$  модель более точной и надежной для широкого класса течений (течений, подверженных градиентам давления, обтекание профилей крыльев, околосзвуковые ударные волны и т. д.), чем SKO.

Уравнения переноса SST  $k$ - $\omega$  модели:

$$\rho \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - Y_k,$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + V_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + P_\omega + D_\omega - Y_\omega,$$

здесь  $P_k$  и  $P_\omega$  – генеративные члены,  $\Gamma_k$  и  $\Gamma_\omega$  – эффективные диффузии  $k$  и  $\omega$  соответственно,  $Y_k$  и  $Y_\omega$  – диссипативные члены,  $D_\omega$  – параметр встречной диффузии.

Вихревая вязкость в данной модели определяется следующим выражением:

$$V_t = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\max\left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{\alpha_t \omega}\right]},$$

при этом  $\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}$ ,  $\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega}$ ,  $Pr_k = \frac{1}{F_1 / \sigma_{k,1} + (1 - F_1) / \sigma_{k,2}}$ ,

$Pr_\omega = \frac{1}{F_1 / \sigma_{\omega,1} + (1 - F_1) / \sigma_{\omega,2}}$ ,  $\Omega \equiv \sqrt{2\Omega_y \Omega_j}$ , параметр  $\alpha^*$  определяется так же,

как и в «стандартной» модели.

Весовые функции,  $F_1$  и  $F_2$ , определяются так:

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4), \quad \Phi_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}\right), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2}\right],$$

$$D_\omega^+ = \max\left[2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20}\right], \quad F_2 = \tanh(\Phi_2^2),$$

$$\Phi_2 = \max\left[2 \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega}\right],$$

где  $y$  – расстояние до ближайшей твердой поверхности,  $D_\omega^+$  – положительная часть параметра встречной диффузии.

Генеративный член  $P_k$  определяется, так же как и в SKO, а для  $P_\omega$  используется следующее выражение:

$$P_\omega = \frac{\alpha}{V_t} P_k.$$

Также имеется различие между SST и SKO в способе определения параметра  $\alpha_\infty$  (входящего в уравнение для параметра  $\alpha$ ): в стандартной  $k$ - $\omega$  модели,  $\alpha_\infty$  является константой, а в модели SST  $k$ - $\omega$ , он определяется выражением:

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty,1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty,2},$$

где  $\alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,1} \sqrt{\beta_\infty^*}}$ ,  $\alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,2} \sqrt{\beta_\infty^*}}$ ,  $\kappa = 0.41$ ,  $\beta_{i,1}$  и  $\beta_{i,2}$  – константы.

Диссипативные члены  $Y_k$  и  $Y_\omega$  определяются так же, как и в SKO, причем функции  $f_\beta^*$  и  $f_\beta$  становятся константами, и принимаются равными единице, а коэффициент  $\beta_i$ , входящий в выражение для параметра  $\beta$ , определяется следующим образом:

$$\beta_i = F_1 \beta_{i,1} + (1 - F_1) \beta_{i,2}.$$

Член встречной диффузии  $D_\omega$  определяется выражением:

$$D_\omega = 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}.$$

Константы модели имеют следующие значения:

$$\sigma_{k,1} = 1.176, \sigma_{\omega,1} = 2.0, \sigma_{k,2} = 1.0, \sigma_{\omega,2} = 1.168,$$

$$a_1 = 0.31, \beta_{i,1} = 0.075, \beta_{i,2} = 0.0828.$$

SST  $k$ - $\omega$  модель может применяться практически для любых типов течений: с большими и малыми числами Рейнольдса, околосзвуковых течений, отрывных и т.п. Однако при этом она требует расчетных сеток, у которых безразмерная координата стенки  $y^+ < 1$  и имеется не менее 10 ячеек во внутренней зоне пограничного слоя. Кроме того, наличие зависимости весовых функций от расстояния до стенки делает эту модель менее эффективной для моделирования чисто сдвиговых течений по сравнению со «стандартной»  $k$ - $\omega$  моделью.

### 5.5.5. Моделирование пристеночной области в диссипативных моделях турбулентности

Как обсуждалось ранее, двухпараметрические диссипативные модели предназначены для расчета полностью развитых турбулентных течений, т. е. когда  $v_i \gg \nu$ , однако известно, что вблизи стенок вязкие эффекты более существенно влияют на характер течения, чем турбулентные.

В существующих коммерческих расчетных комплексах реализовано как правило два подхода к моделированию течения в непосредственной близости от стенки – или с использованием пристеночных функций, или пристеночное моделирование [76; 77].

На рис. 5.2 приводится структура профиля скорости вблизи гладкой плоской пластины при числе Рейнольдса по толщине потери импульса

$$Re_\theta = \frac{V\delta^{**}}{\nu} = 5000, \text{ где толщина потери импульса } \delta^{**} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v}{V_\infty}\right) dy, \quad V^+ = \frac{V}{V^*},$$

$$V^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2} V^2 C_f} \text{ – динамическая скорость, } C_f \text{ – коэффициент трения, } V \text{ – скорость потока, } y^+ = \frac{V^* y}{\nu}, y \text{ – расстояние до стенки.}$$

Структура потока вблизи стенки, в целом, известна. Пристеночную область можно разделить на две большие зоны: внутреннюю (зону закона стенки) и внешнюю (зону закона следа и зону перемежаемости).

Внутренняя зона на плоской пластине занимает примерно 20% толщины всего пограничного слоя, однако в ней генерируется до 80% турбулентной энергии, причем половина этой энергии приходится на первые 5% толщины [8]. Во внутренней области можно выделить еще три зоны:

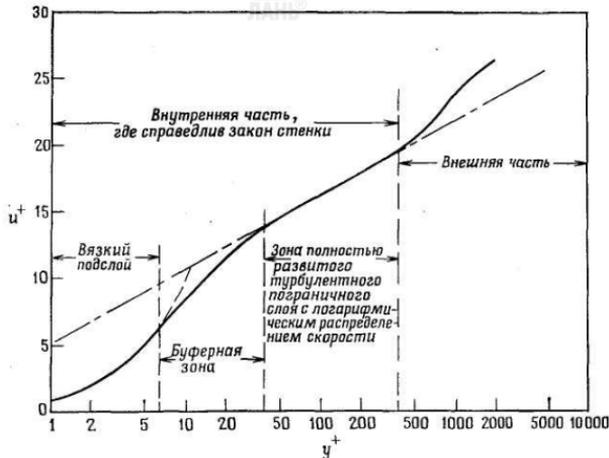


Рис. 5.2. Структура профиля скорости вблизи гладкой плоской пластины при  $Re_{\delta}=5000$  (из работы [4]). Пунктирная линия соответствует закону  $V^+ = y^+$ ,

а штрихпунктирная – логарифмическому закону

- первая зона носит название вязкого подслоя, и продолжается в пределах  $y^+ < 5$ ;
- вторая зона называется буферной, и пролегает обычно в пределах  $5 < y^+ < 30$ ;
- третья зона – зона логарифмического профиля скорости,  $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$ , где  $\kappa \approx 0,41$  – постоянная Кармана,  $C \approx 5,5$ . Эта зона пролегает между  $y^+ > 30$  и  $y^+ \approx 0,1 \delta$ , где  $\delta$  – толщина пограничного слоя, т. е. зависит от числа Рейнольдса.

Как уже упоминалось, «стандартная»  $k$ - $\epsilon$  модель вводит допущение о развитости турбулентности, т. е. она работоспособна начиная с расстояния от стенки, когда  $y^+ > 30$ , а часть профиля скорости, лежащая ближе к стенке, нуждается в специальном моделировании – использования полуэмпирических зависимостей (пристеночных функций). С другой стороны, сравнительно малые

локальные числа Рейнольдса приводят к тому, что область преобладания вязких напряжений еще более увеличивается, в этом случае необходимо сгущать расчетную сетку ближе к стенке, добиваясь того, чтобы несколько ячеек ее оказались внутри зоны вязкого подслоя. На этом требовании к сетке строится альтернативный подход – пристеночное моделирование.

Расчетный комплекс NUMECA FINE/Marine предлагает следующие рекомендации для выбора величины  $y^+$  [77]:

- для высокорейнольдсовых ( $k-\varepsilon$ , расширенные пристеночные функции):  $y^+ = 20-50$ ;
- для низкорейнольдсовых (Spallart–Allmaras, Standard  $k-\omega$ ,  $k-\varepsilon$  (Launder–Sharma), SST  $k-\omega$ , DES, EASM):  $y^+ = 1-10$ .

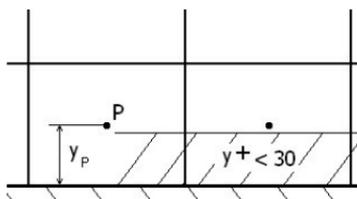


Рис. 5.3. Контрольные объемы вблизи стенки. Ближайшая к стенке расчетная точка P находится в зоне логарифмического закона ( $y^+ > 30$ )

На рис. 5.3 можно видеть пример фрагмента расчетной сетки вблизи стенки. Ближайшая к стенке расчетная точка P смещена в зону логарифмического закона. Параметры течения между ней и стенкой определяются путем введения пристеночных функций, основанных на законе стенки для расчета величин  $k$  и  $\varepsilon$  вблизи твердых границ.

Оценить необходимое расстояние между первым узлом расчетной сетки и твердой границей можно, например, на основе известных зависимостей для сопротивления трения пластины или канала. Например, если известна необходимая величина  $y^+$ , то расстояние от стенки до ближайшего узла P:

$$y_p = \frac{y^+ \nu}{\left(V_\infty \sqrt{C_f} / 2\right)},$$

где  $V_\infty$  – скорость набегающего потока, коэффициент сопротивления трения:  $C_f/2 = 0.037 \text{Re}_L^{-1/5}$  – для пластины длиной  $L$ ,  $C_f/2 = 0.039 \text{Re}_D^{-1/4}$  – для течения в канале. Возможно также использование других формул, например, известной формулы Прандтля–Шлихтинга.

В случае отрыва потока, при наличии зон с сильным положительным градиентом давления, при значении напряжения трения на твердой границе, стремящемся к нулю, закон стенки нарушается. В таком случае можно рекомендовать использование низкорейнольдсовых моделей.

В противоположность методу пристеночных функций пристеночное моделирование не вводит дополнительных соотношений для параметров течения, а производит решение уравнений их переноса во всех расчетных точках. Исходя из этого необходимо, чтобы ближайшие к стенке расчетные точки находились внутри зоны вязкого подслоя. Такой подход необходимо использовать в случае малых чисел Рейнольдса, наличии локальных отрывов, и др. Если пристеночная область хорошо разрешена сеткой, то для определения скорости диссипации турбулентной кинетической энергии  $\epsilon$  и турбулентной вязкости в пристеночных ячейках могут использоваться двухслойные модели. Для реализации такого подхода рекомендуется, чтобы  $y^+ < 1$ , и внутри пограничного слоя было бы не менее десяти ячеек.

### **5.5.6. Некоторые замечания относительно построения двухпараметрических линейных моделей вихревой вязкости**

Как указывалось выше, все модели вихревой вязкости, построенные к настоящему времени, предназначены для моделирования узких классов течений, избранных их авторами в качестве «калибровочных». Модели второго по-

рядка берут за основу строгое уравнение переноса кинетической энергии турбулентности и дополняют его уравнением переноса второй характеристики, для которой строится свое уравнение переноса. Такие модели часто называют «полуэмпирическими», хотя, на самом деле, как уже отмечалось, все без исключения модели механики сплошной среды являются полуэмпирическими, поскольку так или иначе опираются на опытные данные. При этом многие пользователи используют их для решения широких классов задач, не вникая особо в сложности, возникающие при использовании моделей вне областей их применения. Ниже рассмотрены уравнения SKE и SKO моделей с точки зрения соответствия их строгой записи соответствующих уравнений.

В векторной форме уравнения обеих моделей можно представить следующим образом:

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) k \right) = \nabla \cdot [\Gamma_k \nabla k] + P_k - Y_k,$$

$$\rho \left( \frac{\partial a}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) a \right) = \nabla \cdot [\Gamma_a \nabla a] + P_a - Y_a,$$

где  $a$  – или  $\varepsilon$ , или  $\omega$  в зависимости от модели.

Например, для  $k$ - $\varepsilon$  моделей получаем следующую обобщенную форму [165]:

$$\frac{dk}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \left[ \frac{C_\mu k^2}{Pr_k \varepsilon} \bar{\nabla} k \right] - \overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'} : \bar{\nabla} \bar{V} - \varepsilon,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left[ \frac{C_\mu k^2}{Pr_\varepsilon \varepsilon} \bar{\nabla} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon^2}{k} S_\varepsilon (\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee),$$

$$\overline{\rho \vec{V}' \otimes \vec{V}'} = \rho k F (\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee),$$

где  $F(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)$  – симметричный безразмерный тензор,  $S_\varepsilon(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)$  – некоторая безразмерная скалярная функция,  $\underline{S}^\vee = \frac{k}{\varepsilon} \underline{S}$ ,  $\underline{\Omega}^\vee = \frac{k}{\varepsilon} \underline{\Omega}$  – безразмерные тензоры

скоростей деформаций и вращения. Например, для стандартной  $k$ - $\varepsilon$  модели можно записать:

$$\underline{F}(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee) = -2C_\mu \frac{k}{\varepsilon} \underline{S} + \frac{2}{3} \underline{E}, \quad S_\varepsilon(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee) = 2C_\mu C_{\varepsilon 1} \underline{S}^\vee : \underline{S}^\vee - C_{\varepsilon 2},$$

$$C_\mu = 0.09, \quad Pr_k = 1.0, \quad Pr_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92.$$

Результаты сравнения моделей приводятся в Таблица 5.7. Можно видеть, что модели вихревой вязкости оперируют упрощенными зависимостями: задача об определении напряжений Рейнольдса сводится к определению лишь одного числа  $\mu_t$ , из которого получаются только диагональные члены матрицы компонент тензора турбулентных напряжений, в них отсутствует член перераспределения  $\underline{\Phi} = \frac{\overline{p'}}{\rho} \left( \overline{\nabla \vec{V}'} + \left( \overline{\nabla \vec{V}'} \right)^T \right)$ , а диффузионный член моделируется на основе понятия турбулентной вязкости следующим образом:  $(\mu_t / Pr_k) \nabla k = -0.5 \rho \overline{\vec{V}' \vec{V}' \vec{V}'} : \underline{E} - \overline{\vec{V}' p'}$ . По смыслу гипотезы Буссинеска величина  $\mu_t$  должна представлять собой тензор четвертого ранга [50], что позволило бы определить все элементы матрицы турбулентных напряжений. Однако такая формулировка для  $\mu_t$  слишком сложна и громоздка, поэтому в современной практике ради расширения области применения численного моделирования турбулентных течений исследователи пошли по пути замены тензора турбулентной вязкости скалярной функцией, что вполне оправдано для течений, в которых можно пользоваться гипотезой пограничного слоя. Это необходимо учитывать при использовании данных моделей.

Таблица 5.7. Сравнение уравнений моделей SKE и SKO

Составляющая	Строгая запись	Модель турбулентности	
		SKE	SKO
Напряжения Рейнольдса	$\underline{R} = -\rho \overline{V'_i V'_j}$ (тензор 2 ранга)	$\tau_{ij}^T = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$ $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$	$\tau_{ij}^T = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$ $\mu_t = \rho \alpha^* \left(\frac{k}{\omega}\right) \frac{k}{\omega}$
Генерация турбулентности	$\frac{1}{\rho} \left( \underline{R} \cdot \nabla \overline{V} + \nabla \overline{V} \cdot \underline{R} \right)$ (тензор 2 ранга)	$P_k = -\overline{V'_i V'_j} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} =$ $= \underline{P} : \underline{E}$ $P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k$	$P_k = -\overline{V'_i V'_j} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} =$ $= \underline{P} : \underline{E}$ $P_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} P_k$
Диффузия	$\mu \nabla k -$ $-0.5 \rho \overline{V'_i V'_j V'_k} : \underline{E}$ $-\overline{V'_i p'}$ (вектор)	$D_k = \Gamma_k \nabla k$ $D_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \nabla \varepsilon$ $\Gamma_k = \mu + \mu_t$ $\Gamma_\varepsilon = \mu + 0.77 \mu_t$	$D_k = \Gamma_k \nabla k$ $D_\omega = \Gamma_\omega \nabla \omega$ $\Gamma_k = \Gamma_\omega = \mu + 0.5 \mu_t$
Диссипация	$2\nu \nabla \overline{V}' \cdot \nabla \overline{V}'$ (тензор 2 ранга)	$Y_k = \rho \varepsilon$ $Y_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \varepsilon^2 / k$	$Y_k = \rho \beta^* f_\beta k \omega$ $Y_\omega = \rho \beta f_\beta \omega^2$

Упрощение исходного уравнения переноса напряжений Рейнольдса может приводить к ряду нефизичных эффектов. Например, генеративный член во втором уравнении SKE равен  $P_\varepsilon = P_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k$ , однако, в непосредственной близости от стенки кинетическая энергия турбулентности  $k=0$ , и тогда  $P_\varepsilon \rightarrow \infty$ , чего в действительности не должно происходить.

Как видно из таблицы 5.7 подход к определению диссипативного члена у рассматриваемых моделей заметно отличается: если в SKE  $Y_k = \rho \varepsilon$ , то в SKO

вводятся функция  $\beta^* \left( \frac{\rho k}{\mu \omega} \right)$ , учитывающая степень турбулентности и сжима-

емость среды, а также функция  $f_{\beta^*} = \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2}$ , причем  $\chi_k = \frac{1}{\omega^3} \nabla k \cdot \nabla \omega$ . Если

принять теперь, что  $\omega = c \frac{\varepsilon}{k}$  (где  $c$  – константа), то

$Y_k = \rho c \beta^* \left( \frac{v_t}{v} \right) f_{\beta^*} \left( \nabla k \cdot \nabla \left( \frac{\varepsilon}{k} \right) \right) \varepsilon$ . Таким образом, в отличие от модели SKE, в

SKO диссипативный член содержит демпфирующие множители, учитывающие степень турбулизации потока. Например, для несжимаемой жидкости та-

кой множитель имеет вид:  $\beta^* = \frac{9}{100} \left( \frac{4/15 + (v_t / (6c\nu))^4}{1 + (v_t / (6c\nu))^4} \right)$ , причем это выраже-

ние содержит отношение  $\frac{v_t}{v}$ , что позволяет при проведении расчетов умень-

шить влияние диссипации энергии. Здесь уместно упомянуть, что при численном моделировании часто принимается, что в генеративном члене второго

уравнения в пределах контрольного объема величина  $\frac{\omega}{k} = Const$ , что обуслов-

лено принципом построения источникового члена уравнений переноса.

Отдельного замечания заслуживает форма записи коэффициента диффузии в уравнении скорости диссипации кинетической энергии турбулентности. Так, для уравнения (5.4.6) широко используется следующая модель [123]:

$$\bar{D}_\varepsilon = C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'} \cdot \bar{\nabla} \varepsilon = -C_\varepsilon \frac{k}{\rho \varepsilon} \underline{R} \cdot \bar{\nabla} \varepsilon,$$

в то время как в SKE  $\bar{D}_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \bar{\nabla} \varepsilon = (\mu + 0.77 \mu_t) \bar{\nabla} \varepsilon$ , т. е. напряжения Рейнольдса в диффузии величины  $\varepsilon$  явным образом не участвуют (только через эффективную вязкость).

В плоском сдвиговом течении в направлении  $x_1$  турбулентное касательное напряжение записывается следующим образом:

$$-\rho \overline{V_1' V_2'} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{V_2}}{\partial x_1} \right) \approx \mu_t \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2},$$

откуда, принимая  $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ , можно записать:

$$-\overline{V_1' V_2'} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2}.$$

С другой стороны, производство кинетической энергии турбулентности в данном случае будет равно:

$$P_k = -\overline{V_1' V_2'} \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2}.$$

Выражая отсюда величину  $\frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_2}$  и подставляя ее в предыдущее выражение, имеем:

$$-\overline{V_1' V_2'} = k \sqrt{C_\mu} \sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}}.$$

Данное выражение показывает, что при наличии в потоке сильных сдвигов (когда отношения  $P_k/\varepsilon$  велики), модели вихревой вязкости будут предсказывать завышенные значения касательных напряжений в силу жесткой связи между напряжениями и деформациями. Если же предположить, что генерация турбулентности равна ее диссипации (т. е.  $\frac{P_k}{\varepsilon} \approx 1$ ), и воспользоваться формулой П. Брэдшоу [15], согласно которой  $-\overline{V_1' V_2'} \approx 0.31k$ , то получаем  $C_\mu \approx 0.09$ , что и используется в «стандартной»  $k$ - $\varepsilon$  модели.

Рассмотрим условия реализуемости на примере  $k$ - $\varepsilon$  модели. Из уравнения (5.5.1) условие неотрицательности нормальных напряжений приводит к следующему выражению:

$$-\overline{V_i' V_i'} = 2\nu_t S_{ii} - \frac{2}{3} k \delta_{ii} = 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} S_{ii} - \frac{2}{3} k \delta_{ii} \geq 0,$$

т. е.

$$-\overline{V_i'V_i'} = 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} S - 2k \geq 0,$$

где  $S = \frac{1}{3}(S_{11} + S_{22} + S_{33})$ . Тогда, принимая  $C_\mu = 0.09$ , получаем:

$$\frac{k}{\varepsilon} S \leq \frac{1}{3C_\mu} \approx 3.7.$$

В течениях с сильными сдвигами величина  $\frac{k}{\varepsilon} S$  может значительно превысить значение 3.7, что неизбежно приведет к появлению отрицательных нормальных напряжений. Как отмечалось выше, одной из попыток решить эту проблему в рамках  $k$ - $\varepsilon$  модели является Realizable  $k$ - $\varepsilon$  модель, разработанная под руководством Т. Shih [184], в которой  $C_\mu$  принимается функцией комбинаций тензоров скоростей деформаций и вращения.

Некоторые возможности линейных моделей вихревой вязкости и проблемы, связанные с их практическим использованием, подробно рассмотрены в работах [80; 137; 146; 155; 171; 174; 188; 207].

## 5.6. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ВИХРЕВОЙ ВЯЗКОСТИ

Сложности с использованием RSM моделей с одной стороны, и ограниченность возможностей использования линейных моделей турбулентной вязкости с другой привели к развитию нелинейных моделей вихревой вязкости, которые более обоснованы, чем линейные, но при этом проще в реализации и использовании, а с вычислительной точки зрения менее дорогие, чем RSM.

В настоящее время можно выделить два класса таких моделей – собственно нелинейные модели вихревой вязкости (Non-Linear Eddy Viscosity Model, NLEVM) и явные алгебраические модели напряжений Рейнольдса (Explicit Algebraic Reynolds Stress Model, EARSM). Базируясь на разных исходных соображениях, они приводят к похожим соотношениям [132; 146].

### 5.6.1. Нелинейные модели вихревой вязкости (NLEVM)

Как уже упоминалось ранее, нелинейная модель турбулентной вязкости для тензора анизотропии записывается следующим образом:

$$\underline{a} = -2C_\mu \underline{S}^\vee + NL(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee),$$

где дополнительный нелинейный член  $NL(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)$  должен быть симметричным и с нулевым следом  $tr(NL(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)) = 0$ ,  $\underline{S}^\vee = \frac{k}{\varepsilon} \underline{S}$ ,  $\underline{\Omega}^\vee = \frac{k}{\varepsilon} \underline{\Omega}$ .

Используя теорему Гамильтона–Келли можно показать, что наиболее общей формой такого тензора будет следующая [164]:

$$\underline{a} = \sum_{n=1}^{10} C_n \underline{T}_n(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee),$$

где тензорзначные функции тензорных аргументов  $\underline{T}_n(\underline{S}^\vee, \underline{\Omega}^\vee)$  являются базисными тензорами. Они представляют собой независимые симметричные девиаторные тензорные комбинации тензоров  $\underline{S}^\vee$  и  $\underline{\Omega}^\vee$ , причем в двумерном случае таких тензоров будет три, а в трехмерном – десять. Для этого базиса возможны разные записи, однако в настоящее время наиболее употребительным является вариант, предложенный S. Поре [164], который приведен в таблице 5.8.

Таблица 5.8. Базисные тензоры нелинейной модели вихревой вязкости

Порядок членов	Базисные тензоры
Линейный	$\underline{T}_1 = \underline{S}^\vee$
Второй	$\underline{T}_2 = \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \frac{1}{3} \Pi_{\underline{S}^\vee} E$
	$\underline{T}_3 = \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee$
	$\underline{T}_4 = \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \frac{1}{3} \Pi_{\underline{\Omega}^\vee} E$

Третий	$\underline{T}_5 = \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee + \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \Pi_{\underline{\Omega}^\vee} \underline{S}^\vee - \frac{2}{3} tr(\underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee) \underline{E}$ $\underline{T}_6 = \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee$
Четвертый	$\underline{T}_7 = \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee + \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee$ $- \Pi_{\underline{\Omega}^\vee} (\underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \frac{1}{3} \Pi_{\underline{S}^\vee} \underline{E}) - \frac{2}{3} tr(\underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee) \underline{E}$ $\underline{T}_8 = \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \frac{1}{2} \Pi_{\underline{S}^\vee} (\underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee)$ $\underline{T}_9 = \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \frac{1}{2} \Pi_{\underline{\Omega}^\vee} (\underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee)$
Пятый	$\underline{T}_{10} = \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee$

На основании таблицы 5.8 для рассмотренных ранее линейных моделей можно записать следующее выражение:

$$\underline{a} = C_1 \underline{S}^\vee, \text{ т. е. } \underline{a} = -2C_\mu \underline{S}^\vee,$$

что полностью согласуется с записью (5.5.2), полученной ранее.

Моделям второго порядка (квадратичным) соответствует следующая запись для тензора анизотропии:

$$\begin{aligned} \underline{a} = & -2C_\mu \underline{S}^\vee + \beta_1 \left( \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \frac{1}{3} \Pi_{\underline{S}^\vee} \underline{E} \right) + \\ & + \beta_2 \left( \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \right) + \beta_3 \left( \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \frac{1}{3} \Pi_{\underline{\Omega}^\vee} \underline{E} \right) \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – коэффициенты. Например, в модели C.G. Speziale [197] они принимались в форме различных степеней соотношения  $k/\varepsilon$  для сохранения баланса размерностей.

Кубические модели имеют такую форму:

$$\begin{aligned}
 \underline{a} = & -2C_\mu \underline{S}^\vee + \beta_1 \left( \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \frac{1}{2} II_{\underline{S}^\vee} \underline{E} \right) + \\
 & + \beta_2 \left( \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \right) + \beta_3 \left( \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \frac{1}{3} III_{\underline{\Omega}^\vee} \underline{E} \right) - \\
 & - \gamma_1 II_{\underline{S}^\vee} \underline{S}^\vee - \gamma_2 III_{\underline{\Omega}^\vee} \underline{S}^\vee - \\
 & - \gamma_3 \left( \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee + \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - II_{\underline{\Omega}^\vee} \underline{S}^\vee - \frac{2}{3} tr \left( \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \right) \underline{E} \right) - \\
 & - \gamma_4 \left( \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee - \underline{S}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee \right)
 \end{aligned}$$

Подробная компонентная запись квадрата и куба тензора скоростей деформаций приведена в Главе 2. Квадратичные члены (выражения при  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ) этих моделей учитывают анизотропию потока. Экспериментальные и расчетные данные показывают, что чистое вращение не производит турбулентности [132; 146], откуда можно полагать, что  $\beta_3 = 0$ , как минимум, если  $\underline{S}^\vee \rightarrow 0$ . Члены при  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются линейными (как и первый), они играют важную роль в учете влияния кривизны потока. Член при  $\gamma_4$  учитывает вращение. Можно убедиться, что в плоском несжимаемом потоке члены при  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  исчезают.

В качестве примера кубической модели можно привести модель Т. Крафт, В.Е. Launder, К. Suga (CLS) [98], в которой:

$$C_\mu = \frac{0.3 \left[ 1 - \exp(-0.36 \varepsilon^{0.75} \eta) \right]}{1 + 0.35 \eta^{3/2}},$$

$$\beta_1 = -0.4 C_\mu f_\mu, \quad \beta_2 = 0.4 C_\mu f_\mu, \quad \beta_3 = -1.04 C_\mu f_\mu,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 40 C_\mu^3 f_\mu, \quad \gamma_3 = 0, \quad \gamma_4 = -80 C_\mu^3 f_\mu.$$

где  $\eta = \frac{k}{\varepsilon} \max(S, \Omega)$ ,  $S = \sqrt{2 \underline{S} : \underline{S}}$ ,  $\Omega = \sqrt{2 \underline{\Omega} : \underline{\Omega}}$ ,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i}$ ,

$$f_\mu = 1 - \exp \left[ -\sqrt{\frac{Re_t}{90}} - \left( \frac{Re_t}{400} \right)^2 \right], \quad Re_t = k^2 / \nu \tilde{\varepsilon}.$$

### 5.6.2. Явные алгебраические модели напряжений Рейнольдса (EARSМ)

Данный класс моделей основан на использованном W. Rodi допущении о слабом равновесии [172], в соответствии с которым на основании уравнения (5.3.9):

$$\frac{da}{dt} - \bar{\nabla} \cdot {}^3D^a = 0,$$

где  ${}^3D^a = \frac{1}{k} {}^3D - \frac{1}{k^2} \overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'} \otimes \bar{D}_k,$

$${}^3D = \nu \bar{\nabla} \left( \overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'} \right) - \overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}' \otimes \bar{v}'} - \frac{1}{\rho} \left( \underline{E} \otimes \overline{\bar{v}' p'} + \overline{\bar{v}' p'} \otimes \underline{E} \right),$$

$$\bar{D}_k = \mu \bar{\nabla} k - 0.5 \rho \overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}' \otimes \bar{v}'} : \underline{E} - \overline{\bar{v}' p'},$$

кроме того положено, что  $\frac{d(k/\varepsilon)}{dt} = 0.$

Это позволяет для конвективного и диффузионного переносов в уравнении (5.3.3) записать следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'} - \nabla \cdot {}^3D \approx \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} (P_k - \varepsilon), \quad (5.6.2)$$

Действительно, выполняя последовательно цепочку преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'} - \nabla \cdot {}^3D &= \frac{d}{dt} \left( k \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} \right) - \nabla \cdot {}^3D = \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} \frac{dk}{dt} + k \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} \right) - \bar{\nabla} \cdot {}^3D = \\ &= \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} (P_k + \bar{\nabla} \cdot \bar{D}_k - \varepsilon) + k \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} \right) - \bar{\nabla} \cdot {}^3D = \\ &= \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} (P_k - \varepsilon) + k \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} \right) + \underbrace{\left( \frac{\overline{\bar{v}' \otimes \bar{v}'}}{k} \bar{\nabla} \cdot \bar{D}_k - \bar{\nabla} \cdot {}^3D \right)}_{-k \bar{\nabla} \cdot {}^3D^a} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} (P_k - \varepsilon) + k \underbrace{\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} - \frac{2}{3} \underline{E} + \frac{2}{3} \underline{E} \right) - \overline{\vec{V}} \cdot {}^3 D^a \right]}_{=0} = \\
&= \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} (P_k - \varepsilon)
\end{aligned}$$

Выражение (5.6.2) позволяет от любой дифференциальной модели переноса напряжений Рейнольдса перейти к системе алгебраических уравнений, а для определения кинетической энергии и масштаба турбулентности могут использоваться соотношения для двухпараметрических моделей. Например, в предположении о слабом равновесии и наличии изотропной диссипации (5.4.4), уравнение (5.3.9) запишется следующим образом [173]:

$$0 = \left( \underline{P} - \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} P_k \right) + \underline{\Phi} + \varepsilon \underline{a} \quad (5.6.3)$$

Принимая теперь  $\underline{P} = -k(\underline{a} \cdot \underline{S} + \underline{S} \cdot \underline{a}) + k(\underline{a} \cdot \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \cdot \underline{a}) - \frac{4}{3} k \underline{S}$ ,

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi} = & -\frac{1}{2} \left( C_1^0 + C_1^1 \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \varepsilon \underline{a} + C_2 k \underline{S} + \frac{1}{2} C_3 k \left( \underline{a} \cdot \underline{S} + \underline{S} \cdot \underline{a} - \frac{2}{3} \underline{a} : \underline{S} \right) - \\
& - \frac{1}{2} C_4 k (\underline{a} \cdot \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \cdot \underline{a}),
\end{aligned}$$

при  $C_1^0 = 3.4$ ,  $C_1^1 = 1.8$ ,  $C_2 = 0.36$ ,  $C_3 = 1.25$ ,  $C_4 = 0.4$  из (5.6.2) получаем алгебраическую модель, записанную в компонентной форме:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{C_1^0}{2} + \frac{C_1^1}{2} \frac{P_k}{\varepsilon} + \frac{C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 2} - 1} \right) a_{ij} - \left( \frac{4}{3} - C_2 \right) S_{ij} - \\
& - \frac{1}{2} (2 - C_2) \left( a_{im} S_{mj} + S_{im} a_{mj} - \frac{2}{3} a_{nm} S_{mn} \delta_{ij} \right) + \\
& + \frac{1}{2} (2 - C_4) (a_{im} \Omega_{mj} - \Omega_{im} a_{mj}) = 0.
\end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Однако, при этом возникает система трансцендентных алгебраических уравнений, которая, вообще говоря, может вовсе не иметь вещественных решений. Потому более употребительными стали явные алгебраические модели. Первой

работой в этом направлении стала статья S. Pope [164], в которой на основе такой модели было получено решение для двумерного случая течения, однако до начала 90-х годов его работа не привлекала серьезного внимания других исследователей. В дальнейшем данный подход получил развитие в работах [113; 114; 117; 198; 204] и др.

Одно из явных решений последнего уравнения рассмотрено в [179], где на основе модели SSG для тензора анизотропии записано такое выражение:

$$a_{ij} = -2 \frac{V_i}{k} \left[ S_{ij} + a_2 a_4 (S_{im} \Omega_{mj} - \Omega_{im} S_{mj}) - 2 a_3 a_4 \left( S_{im} S_{mj} - \frac{1}{3} S_{nm} S_{mn} \delta_{ij} \right) \right].$$

Сравнивая это выражение с (5.6.1) можно увидеть, что здесь фактически имеет место квадратичная нелинейная модель. Турбулентная кинематическая вязкость определяется для этой модели следующим выражением:

$$v_i = -k \alpha_1,$$

а можно, например, и таким образом [77]:

$$v_i = \max \left\{ -k \alpha_1, 0.0005 k^2 / \varepsilon \right\}.$$

В этих выражениях величина  $\alpha_1$  находится путем решения кубического уравнения:

$$\left( \frac{\alpha_1}{\tau} \right)^3 + p \left( \frac{\alpha_1}{\tau} \right)^2 + q \left( \frac{\alpha_1}{\tau} \right) + r = 0,$$

в котором  $\tau = \frac{k}{\varepsilon}$  – временной масштаб турбулентности,  $p = -\frac{\gamma_1}{\eta^2 \tau^2 \gamma_0}$ ,

$q = \frac{1}{(2\eta^2 \tau^2 \gamma_0)^2} \left( \gamma_1^2 - 2\eta^2 \tau^2 \gamma_0 a_1 - \frac{2}{3} \eta^2 \tau^2 a_3^2 + 2R^2 \eta^2 \tau^2 a_2^2 \right)$ ,  $r = \frac{\gamma_1 a_1}{(2\eta^2 \tau^2 \gamma_0)^2}$ . Коэф-

фициенты в этих выражениях определяются следующим образом:  $\eta^2 = S_{ij} S_{ji}$ ,

$$R^2 = \Omega_{ij} \Omega_{ji} / \eta^2, \quad a_1 = \frac{1}{2} (4 - C_2), \quad a_2 = \frac{1}{2} (2 - C_4), \quad a_3 = \frac{1}{2} (2 - C_3),$$

$$a_4 = \tau \left[ \gamma_1 - 2\gamma_0 (\alpha_1 / \tau) \eta^2 \tau^2 \right]^{-1}, \quad \gamma_0 = C_1^1 / 2, \quad \gamma_1 = C_1^0 / 2 + (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) / (C_{\varepsilon 2} - 1),$$

$C_1^0 = 3.4$ ,  $C_1^1 = 1.8$ ,  $C_2 = 0.36$ ,  $C_3 = 1.25$ ,  $C_4 = 0.4$ ,  $C_{e1} = 1.44$ ,  $C_{e2} = 1.83$ . Искомым корнем этого уравнения является корень с наименьшей вещественной частью [133].

При моделировании пристеночных течений с помощью EARSМ моделей в области стенок используются демпфирующие функции. Например, в работе S. Wallin и A. Johansson [204] предложен низкорейнольдсовый вариант модели EARSМ (WJ), в котором для тензора анизотропии используется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \underline{a} = & f_1(\beta_1 + \Pi_\Omega \beta_6) \underline{S}^\vee + (1 - f_1^2) \frac{(3B_2 - 4)}{\max(\Pi_S, \Pi_S^{eq})} + \\ & + f_1^2 \beta_3 \left( \underline{\Omega}^{\vee 2} - \frac{1}{3} \Pi_\Omega \underline{E} \right) \left( \underline{S}^{\vee 2} - \frac{1}{3} \Pi_S \underline{E} \right) + \\ & + \left[ f_1^2 \beta_4 - (1 - f_1^2) \frac{B_2}{2 \max(\Pi_S, \Pi_S^{eq})} \right] (\underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee - \underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee) + \\ & + f_1 \beta_6 \left( \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^{\vee 2} + \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^{\vee 2} - 2 \Pi_\Omega \underline{S}^\vee - \frac{2}{3} \Pi V \underline{E} \right) + \\ & + f_1^2 \beta_9 (\underline{\Omega}^\vee \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^{\vee 2} - \underline{\Omega}^{\vee 2} \cdot \underline{S}^\vee \cdot \underline{\Omega}^\vee), \end{aligned}$$

где  $f_1$  – демпфирующая функция, которая согласно Van Driest [202] записывается как  $f_1 = 1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}}$ ,  $A^+ = 26$ ;  $\Pi_S^{eq} = \frac{405C_1}{216C_1 - 160}$ , в предположении о локальном

равновесии турбулентности ( $P_k \approx \mathcal{E}$ ) в плоском приближении значение кон-

станты  $C_1 = 1.8$ , отсюда  $\Pi_S^{eq} \approx 5.74$ ;  $B_2 = 1.8$ ;  $\beta_1 = -\frac{N(2N^2 - 7\Pi_\Omega)}{Q}$ ,

$$\beta_3 = -\frac{12IV}{NQ}, \quad \beta_4 = -\frac{2(N^2 - 2\Pi_\Omega)}{Q}, \quad \beta_6 = -\frac{6N}{Q}, \quad \beta_9 = \frac{6}{Q},$$

$$Q = \frac{5}{6}(N^2 - 2\Pi_\Omega)(N^2 - 2\Pi_\Omega), \quad \underline{S}^\vee = \tau \underline{S}, \quad \underline{\Omega}^\vee = \tau \underline{\Omega}, \quad \underline{S}^{\vee 2} = S_{ik}^\vee S_{kj}^\vee$$

$\Pi_S = tr(\underline{S}^{s2}) = S_{ij}^s S_{ji}^s$ ,  $\Pi_\Omega = tr(\underline{\Omega}^{\nu 2}) = \Omega_{ij}^\nu \Omega_{ji}^\nu$ ,  $IV = tr(\underline{S}^\nu \underline{\Omega}^{\nu 2}) = S_{ij}^\nu \Omega_{jk}^\nu \Omega_{ki}^\nu$ ,  $\tau$  – временной масштаб турбулентности, который в этой модели определяется следующим образом:  $\tau = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, 6\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right)$ . Величина  $N$  находится в результате решения следующей системы уравнений:

$$N = \begin{cases} \frac{C_1'}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 + \sqrt{P_2}) |P_1 + \sqrt{P_2}|^{1/3}, & P_2 \geq 0 \\ \frac{C_1'}{3} + 2(P_1^2 - P_2)^{1/6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right), & P_2 < 0 \end{cases}$$

где 
$$P_1 = C_1' \left( \frac{C_1'^2}{27} + \frac{9}{20} \Pi_S - \frac{2}{3} \Pi_\Omega \right), \quad P_2 = P_1^2 - \left( \frac{C_1'^2}{9} + \frac{9}{10} \Pi_S + \frac{2}{3} \Pi_\Omega \right)^3,$$

$C_1' = \frac{9}{4}(C_1 - 1)$ . В двумерном потоке уравнения модели сильно упрощаются, так как  $\beta_3 = \beta_6 = \beta_9 = 0$ .

Модификация подобной модели для моделирования движения существенно сжимаемой среды предложена, например, в работе [119]. В случае необходимости учета вращения жидкости вместо уравнения (5.6.3) следует использовать следующее соотношение:

$$0 = \left( \underline{P} - \frac{\overline{\vec{V}' \otimes \vec{V}'}}{k} P_k \right) + \underline{\Phi} + \varepsilon(\underline{a} - \underline{C}),$$

где тензор  $\underline{C}$  вводится для учета силы Кориолиса в соответствии с (5.3.11), и вместо осредненного тензора завихренности  $\underline{\Omega}$  следует использовать величину  $\underline{\Omega}^*$  согласно (5.3.10).

При использовании явной модели напряжений Рейнольдса необходимо дополнительно решать уравнения переноса для определения кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, например, в модели WJ

для турбулентной вязкости предлагается такое выражение:

$$v_t = f_1(\beta_1 + \Pi_\Omega \beta_6) k \tau.$$

### 5.6.3. Некоторые замечания относительно нелинейных моделей вихревой вязкости

Из приведенных выше соображений ясно, что нелинейные модели вихревой вязкости неизбежно имеют меньшее физическое обоснование, чем RSM модели. Отдельная проблема возникает из того обстоятельства, что фактически отброшенная в этих моделях конвекция турбулентных напряжений может иметь большое значение в случае криволинейных или вращающихся течений. В таком случае конвекция турбулентной энергии является не лучшей заменой при аппроксимации конвекции напряжений. Получается, что адекватность уравнения (5.6.2) зависит как от принятой системы координат, так и от ориентации потока относительно нее. Некоторые соображения на этот счет можно найти в работах [118; 179; 203].

С другой стороны, серьезным преимуществом таких моделей является учет анизотропии. Линейные модели вихревой вязкости в силу выражения (5.5.1) приводят к следующему соотношению для нормальных напряжений:

$$\overline{V_1'V_1'} = \overline{V_2'V_2'} = \overline{V_3'V_3'} = \frac{2}{3}k, \text{ откуда автоматически следует, что } a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0.$$

В то же время, нелинейная кубическая модель приводит для нормальных напряжений в простом сдвиговом потоке [146] к выражениям:

$$a_{11} = \frac{1}{12}(\beta_1 + 6\beta_2 - \beta_3)\sigma^2, \quad a_{22} = \frac{1}{12}(\beta_1 - 6\beta_2 - \beta_3)\sigma^2, \quad a_{33} = -\frac{1}{6}(\beta_1 - \beta_3)\sigma^2,$$

где  $\sigma = \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial V_1}{\partial x_2}$ . Это показывает, что квадратичные члены позволяют учесть ани-

зотропию нормальных напряжений.

Качество учета анизотропии сильно зависит от калибровки коэффициентов модели. Это можно увидеть из Таблица 5.9, где приведены результаты

расчетов по нескольким моделям в сравнении с известными экспериментальными исследованиями S. Tavoularis и S. Corrsin [200].

Таблица 5.9. Результаты моделирования однородного турбулентного течения с помощью нескольких моделей турбулентности из работ [140; 146; 198; 204]

Данные	$a_{11}$	$a_{22}$	$a_{33}$	$a_{12}$	$Sk/\varepsilon$	$P_k/\varepsilon$
Эксперимент	0.406	-0.286	-0.12	-0.312	5.56	1.73
$k-\varepsilon$	0	0	0	-0.434	4.82	2.09
LRR	0.31	-0.242	-0.068	-0.374	5.46	2.04
SSG	0.436	-0.29	-0.146	-0.326	5.56	1.82
CLS	0.53	-0.307	-0.223	-0.273	7.66	
N. Shima	0.31	-0.214	0.004	-0.242		
WJ [204]	0.31	-0.31	0	-0.30		1.8

Следует отметить также, что NLEVM модели подвержены тому же недостатку, что и линейные, – чрезмерной генерации турбулентности при больших скоростях деформаций, что объясняется такой же формой записи линейного члена, что и у линейных моделей, когда коэффициент  $C_\mu$  принимается константой. Это приводит к погрешностям в определении турбулентной вязкости при высоких значениях  $S_{ij}$ . Для этого коэффициента правильнее было бы использовать зависимость такого типа [146]:  $C_\mu \sim \left[ \frac{k}{\varepsilon} S \right]^{-1}$ . EARSМ модели этого недостатка лишены, так как коэффициенты их берутся из RSM моделей.

Таким образом, если дифференциальные RSM модели обеспечивают физичное разрешение сложных турбулентных течений ценой больших вычислительных затрат, то EARSМ модели близки к стандартным двухпараметрическим моделям по вычислительной эффективности, но при этом они базируются на уравнении переноса для тензора анизотропии. Это делает их более приемлемыми для моделирования многих сложных течений, чем стандартные двухпараметрические модели. Однако, отбрасывание конвекции и диффузии

делает EARSМ очень чувствительной к таким эффектам, как кривизна линий тока, диффузия, предыстория течения и т. д.

## 5.7. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Влияние сжимаемости при моделировании проявляется по двум направлениям: во-первых, изменением величины осредненной плотности во всех уравнениях переноса, во-вторых, появлением корреляций пульсаций плотности (в частности,  $\overline{\rho \tilde{v}^i}$  и  $\overline{\rho \tilde{v}^i \otimes \tilde{v}^j}$ , как показано в п. 3.2). Как правило, при моделировании сжимаемых течений используются модели, созданные и калиброванные для описания движения несжимаемых потоков. При этом влияние изменения плотности на коэффициенты модели во внимание не принимается.

Это приводит к появлению некоторых сложностей, в частности:

- каждый вариант модели турбулентности (даже внутри одной группы) показывает разную степень чувствительности к градиенту плотности. Например, в работе [149] показано, что  $k - \omega$  модель менее чувствительна к градиенту плотности, чем  $k - \varepsilon$  модель, как минимум в области действия закона стенки;
- влияние градиентов осредненной плотности на константы модели турбулентности не может быть получено из других взаимодействий, связанных с пульсациями плотности, для которых обычно вводятся явные коррекции на сжимаемость. При этом следует учитывать, что влияние градиентов осредненной плотности возникает при числах Маха, меньших 2÷3.

Учет сжимаемости приводит к появлению членов, обусловленных объемной вязкостью, а также к дополнительным слагаемым в членах перераспределения и диссипации в уравнении переноса напряжений Рейнольдса (5.3.3), которые имеют следующий вид:

$$\Phi_{ij}^d = \frac{2}{3} \overline{p' \frac{\partial V_k'}{\partial x_k} \delta_{ij}}, \quad \epsilon_{ij}^d = \frac{8}{3} \overline{v S_{kk} S_{ij}'}. \quad (5.7.1)$$

Однако, согласно гипотезе Морковина [158], подтвержденной DNS расчетами Z. Huang и др. [127], эти члены могут быть отброшены при числах Маха менее 5. В работе Z. Huang также показано, что в турбулентном пограничном слое при  $M=3$  корреляции  $\overline{\rho' \bar{V}' \otimes \bar{V}'}$  и  $\overline{\rho' \bar{V}'' T'}$  составляют порядка 5% от  $\overline{\bar{\rho} \bar{V}''' \otimes \bar{V}''}$  и  $\overline{\bar{\rho} \bar{V}''' T''}$  соответственно.

Попытки оценить вклад членов (5.7.1) предпринимались различными авторами, однако практический вывод заключается в том, что нет существенных причин включать члены, содержащие явным образом пульсации плотности при расчете пристеночных течений при числах Маха менее 5. Для свободных сдвиговых течений использование членов (5.7.1) эффективно, но, как показано в работе S. Sarkar [180], корректность их использования вызывает сомнения.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Абалакин И.В., Антонов А.Н., Граур И.А., Четверушкин Б.Н. Использование алгебраической модели турбулентности для расчета нестационарных течений в окрестности выемок // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 45-56.
2. Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н. Квантово-полевая ренормализационная группа в теории развитой турбулентности // УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1257-1284.
3. Аmano P.C., Гоел П. Исследование модели замыкания третьего порядка для расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости в канале с обратным уступом // Инженерные основы инженерных расчетов. 1988. № 3. С. 310-317.
4. Андерсон Д., Таннехилл Д., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
5. Астарита Д., Маруччи Д. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
6. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. 376 с.
7. Балонишников А.М. Упрощенное описание мелкомасштабной турбулентности // ЖТФ. 2003. Т. 73. № 11. С. 47-52.
8. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989. 256 с.
9. Белов И.А., Кудрявцев Н.А. Теплопередача и сопротивление пакетов труб. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-е, 1987. 223 с.
10. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике (вычислительный эксперимент). М.: Наука, 1982. 392 с.
11. Белоцерковский О.М., Опарин А.М. Численный эксперимент в турбулентности. От порядка к хаосу. М.: Наука, 2000. 223 с.
12. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2002. 286 с.
13. Богданов С.Р. Оценка адекватности нелинейных моделей для корреляций "давление-скорости деформаций" в турбулентном потоке // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 1. С. 28-35.
14. Богданов С.Р., Йонген Т.Й. Ограничения на "быструю" часть корреляций давление скорости деформаций, выводимые из спектрального представления // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 2. С. 29-39.
15. Брэдшоу П. Турбулентность. М.: Машиностроение, 1980. 344 с.
16. Гарбарук А.В. Современные полуэмпирические модели турбулентности для пристенных течений: тестирование и сравнительный анализ. Дисс. канд. физ.-мат. наук. СПб.: СПбГТУ, 1999. 281 с.
17. Гинзбург И.П. Прикладная гидродинамика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. 338 с.

18. Джорогова Е.В., Новожилов В.В. Расчет установившегося турбулентного течения в криволинейном канале // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 819-824.
19. Дорфман Л.А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М. : Физматгиз, 1960. 260 с.
20. Елизарова Е.В., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Шильников Е.В. Численное моделирование отрывных течений за обратным уступом // Прикладная математика и информатика. 2003. № 14. С. 85-118.
21. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Численное моделирование ударной волны в аргоне, гелии и азоте // Прикладная математика и информатика. 2004. № 18. С. 66-82.
22. Жаукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. М. : Наука, 1982. 472 с.
23. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М. : Мир, 1979. 304 с.
24. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл.АН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299-303.
25. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв.АН СССР.Сер.физ. 1942. Т. 6. № 1-2. С. 56-58.
26. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М. : Наука, 1965. 436 с.
27. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика в 2 томах. М. : Физматлит, 1963.
28. Курбацкий А.Ф., Поросева С.В. Модель для тройных корреляций турбулентного поля скорости развитого течения в круглой трубе // Теплофизика и аэромеханика. 1997. Т. 4. № 3. С. 339-345.
29. Курбацкий А.Ф., Поросева С.В., Яковенко С.Н. Вычисление статистических характеристик турбулентного течения во вращающейся круглой трубе // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33. № 5. С. 738-748.
30. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М. : Атомиздат, 1979. 416 с.
31. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Физматлит, 1961. 203 с.
32. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость // УМН. 2003. Т. 58. № 2. С. 45-78.
33. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1987. 840 с.
34. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. М. : Наука, 1982. 352 с.
35. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1983. 512 с.
36. Маслов В.П., Шафаревич А.И. Локализованные асимптотические решения уравнений Навье-Стокса и ламинарные следы в несжимаемой жидкости // ПММ. 1998. Т. 62. № 3. С. 424-432.

37. Матвеев С.К. Модель газа из твердых частиц с учетом неупругих соударений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 12-16.
38. Мейз Д. Теория и задачи механики сплошных сред. М. : Мир, 1964. 320 с.
39. Миллионщиков М.Д. Основные закономерности турбулентного течения в пристеночных слоях // Атомная энергия. 1970. Т. 28. № 4. С. 317-320.
40. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1 СПб. : Гидрометеиздат, 1992. 694 с.
41. Морозов Н.Ф. Лекции по избранным вопросам механики сплошных сред. — Л.: Издательство ЛГУ, 1975. 126 с.
42. Надаи А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. М. : Иностранная литература, 1954. 647 с.
43. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Изв.РАН.Мех.Ж и Г. 1994. № 6. С. 14-26.
44. Никитин Н.В. Численное исследование ламинарно-турбулентного перехода в круглой трубе под действием периодических входных возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 42-55.
45. Никущенко Д.В., Павловский В.А., Шестов К.В. Расчет течения вязкой несжимаемой жидкости на основе единой ламинарно-турбулентной модели // 4-я международная конференция по морским интеллектуальным технологиям Моринтех – 01. 2001.
46. Новожилов В.В. Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды. М. : ИПМ АН СССР, 1983. 56 с.
47. Новожилов В.В. О расчете турбулентного течения между двумя соосными вращающимися цилиндрами // ДАН СССР. 1981. Т. 258. № 6. С. 1337-1341.
48. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости —Л.-М. : ОГИЗ, 1948. 211 с.
49. Новожилов В.В. Турбулентное течение вокруг кругового цилиндра, вращающегося в неограниченной несжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 4. С. 1322-1326.
50. Новожилов В.В., Павловский В.А. Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости. СПб. : Изд. СПбГМТУ, 1998. 484 с.
51. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32. № 1. С. 22-24.
52. Павловский В.А. Введение в термодинамику реальных газов. СПб. : Изд-во ФГУП КГНЦ, 2013. 230 с.
53. Павловский В.А. Краткий курс механики сплошных сред. С-Пб. : СПбГТУРП, 1993. 212 с.
54. Павловский В.А., Никущенко Д.В. Реологическая модель для расчета течений жидкости при произвольных числах Рейнольдса // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. № 1. С. 104-112.

55. Рождественский Б.Л. О применимости разностных методов решения уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. № 2. С. 308-311.
56. Седов Л.И. Механика сплошной среды в 2 томах. М. : Наука, 1970.
57. Секундов А.Н. Модель турбулентности для описания взаимодействия пограничного слоя с крупномасштабной турбулентностью // Изв. РАН. Мех. Ж и Г. 1997. № 2. С. 59-68.
58. Смирнов Е.М. Использование современных вычислительных технологий для решения задач промышленной аэродинамики // Труды СПбГТУ. 2009. № 511. С. 36-55.
59. Смоляков А.В., Ткаченко В.М. Измерение турбулентных пульсаций. Л.: Энергия, 1980. 264 с.
60. Сокольников И.С. Тензорный анализ. М. : Наука, 1971. 376 с.
61. Трошин А.И. Полуэмпирическая модель турбулентности для описания высокоскоростных слоев смешения и струй, не основанная на гипотезе Буссинеска. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ-мат. наук. Жуковский : ЦАГИ, 2014. 168 с.
62. Уиттекер Э. Аналитическая динамика. Ижевск : Изд. дом "Удмуртский ун-т", 1999. с.
63. Устименко Б.П. Процессы турбулентного переноса во вращающихся течениях. Алма-Ата : Наука, 1977. 128 с.
64. Фомин В.Л. Механика континуума для инженеров. Л. : ЛГУ, 1975. 116 с.
65. Черных К.Ф. О формах связи между симметричными тензорами в механике сплошных сред // Инж. журн. МТТ. 1967. № 3. С. 42-51.
66. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М : МГУ, 1999. 232 с.
67. Шевелев Ю.Д. Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. — М : Наука, 1986. 368 с.
68. Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Тверь : Тверской гос. ун-т, 1997. С. 127-155.
69. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. : Наука, 1969. 742 с.
70. Шуманн У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы моделирования турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений / Под. ред. В. Кольмана. М. : Мир, 1984. С. 103-226.
71. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.-Л. : Госэнергоиздат, 1961. 681 с.
72. Эртель Г.-М. Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике. М.: Ижевск : Регуляр. и хаотич. динамика : Ин-т компьютер. исслед., 2007. 774 с.
73. Юдаев Б.Н. Теплопередача. М.: : Высшая школа, 1973. 360 с.
74. Юдович В.И. О проблемах современной математической гидродинамики // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 1. С. 51-102.
75. FLUENT User's Guide. Lebanon, USA : Fluent Inc., 2006. p.

76. ISIS-CFD v3.1. Theoretical manual. Nantes : ECN, 2013. 69 p.
77. Antonov N.V., Honkonen J. Field theoretic renormalization group for a nonlinear diffusion equation // *Physical Review E*. 2002. Vol. 66. №4. P. 46-105.
78. Axel L.B., Liungman O.A. A one-equation turbulence model for geophysical applications: comparison with data and k-ε model // *Environ.Fluid.Mech.* 2001. Vol. 1. P. 71-106.
79. Bahari A.M., Hejazi K. Investigation of Buoyant Parameters of k-ε Turbulence Model in Gravity Stratified Flows // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2009. Vol. 31. P. 533-540.
80. Bardina J.E., Huang P.G., Coakley T.J. Turbulence modeling validation, testing and development, // *NASA Technical Memorandum* 110446. 1997. P. 1-98.
81. Baumert H.Z. Universal equations and constants of turbulent motion // *Phys. Scr.* 2013. Vol. 155. P. 1-12.
82. Boussinesq J. Theorie de l'ecoulement tourbillant // *Mem.Presentes par Divers Savants Acad.Sci.Inst.Fr.* 1877. Vol. 23. P. 46-50.
83. Bradshaw P. The analogy between streamline curvature and buoyancy in Turbulent shear flow // *J.Fluid Mech.* 1969. Vol. 36. P. 177-191.
84. Burattini P., Lavoie P., Agrawal A., Djenidi L., R. A. Power law of decaying homogeneous isotropic turbulence at low Reynolds number // *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys.* 2006. Vol. 73. № 6 Pt 2. P. 066304-1 - 066304-7.
85. Burchard H. *Applied Turbulence Modelling in Marine Waters*. Berlin : Springer-Verlag, 2002. 218 p.
86. Burgers J.M. Mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Advances in Applied Mechanics*. 1948. Vol. 1. P. 171-199.
87. Canuto V.M., Minotti F., Ronchi P., Ypma R.M., Zeman O. Second- Order Closure PBL Model with New Third-Order Moments: Comparison with LES data. Thesis // *J. Atmos. Sci.* 1994. Vol. 51. P. 1605-1618.
88. Cécora R.-D., Radespiel R., Eisfeld B., Probst A. Differential Reynolds-Stress Modeling for Aeronautics // *AIAA Journal*. 2014. Vol. 53. № 3. P. 739-755.
89. Champagne F.H., Harris V.G., Corrsin S. Experiments on nearly homogenous shear flow // *J.Fluid Mech.* 1970. Vol. 41. № 1. P. 81-139.
90. Chapman S., Cowling T.G. *The mathematical theory of non-uniform gases*. Third edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 423 p.
91. Chou P.Y. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulence fluctuation // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1945. Vol. 3. P. 38-54.
92. Chung M.K., Kim S.K. A non-linear return-to-isotropy model with Reynolds number and anisotropy tendency // *Physics of Fluids*. 1995. Vol. 7. P. 1425-1436.
93. Constantinescu G., Chapelet M., Squires K. Turbulence Modeling Applied to Flow over a Sphere // *AIAA J.* 2003. Vol. 41. № 9. P. 1733-1742.
94. Craft T.J. Developments in a low-Reynolds-number second moment closure and it's application to separating and reattaching flows // *Int.J.Heat and Fluid Flow*. 1998. Vol. 19. P. 541-548.

95. Craft T.J. Developments in low-reynolds-number second moment closure and its application to separating and reattaching flows // *Int.J.Heat and Fluid Flow*. 1998. Vol. 19. P. 541-548.
96. Craft T.J., Launder B.E. Closure modelling near the two-component limit // *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows* Launder B.E., Sandham N.D. : Cambridge University Press, 2002. P. 102-126.
97. Craft T.J., Launder B.E. Principles and Performance of TCL-Based Second-Moment Closures // *Flow, Turbulence and Combustion*. 2001. Vol. 66. № 4. P. 355-372.
98. Craft T.J., Launder B.E., Suga K. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence // *Int.J.Heat and Fluid Flow*. 1996. Vol. 17. P. 108-115.
99. Daly B., Harlow F. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated boundary layers // *Physics of Fluids*. 1970. Vol. 13. P. 2634-2649.
100. Davidson L., Dahlström S. Hybrid LES-RANS: an approach to make LES applicable at high Reynolds number // *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 2005. Vol. 19. № 6. P. 415-427.
101. Deardorf J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // *J.Fluid Mech*. 1970. Vol. 41. P. 453-480.
102. Dekeyser I., Launder B.E. A Comparison of Triple-Moment Temperature-Velocity Correlations in the Asymmetric Heated Jet with Alternative Closure Models // *Turbulent Shear Flows 4* Berlin : Springer-Verlag, 1985. P. 102-117.
103. Eisfeld B. Computation of Complex Compressible Aerodynamic Flows with a Reynolds Stress Turbulence Model // *Proceedings of the International Conference on Boundary and Interior Layers (BAIL)*. 2006. P. 1-8.
104. Eisfeld B. Differential Reynolds Stress Modeling for Separating Flows in Industrial Aerodynamics. : Springer International Publishing, 2015. 101 p.
105. Eyink G.L. The renormalization group and operator-product expansion in turbulence: shell-models // *Phys.Rev.E*. 1993. Vol. 48. P. 1823-1838.
106. Favre A. Turbulence: space-time statistical properties and behavior in supersonic flows // *Physics of Fluids A*. 1983. Vol. 23. № 10. P. 2851-2863.
107. Fefferman P.L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. Preprint // *The Millenium Prize problems* Cambridge : Clay Mathematics Institute, 2006. P. 57-67.
108. Ferziger J.L., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. 423 p.
109. Firl G.J. Development of a third-order closure turbulence model with subgrid-scale condensation. Fort Collins : Colorado State University, 2009. 224 p.
110. Fu S., Launder B.E., Tselepidkis D.P. Accomodating the effect of high strain rates in modelling the pressure-strain correlation. Technical report TFD/87/5. Manchester : UMIST, Dept. of Mech. Eng., 1987. 78 p.

111. Gatski T.B., Rumsey P.L., Manceau R. Current trends in modelling research for turbulent aerodynamic flows // *Phil. Trans Royal Soc.* 2007. Vol. 365. № 1859. P. 2389-2418.
112. Gatski T.B., Rumsey P.L., Manceau R. Current trends in modelling research for turbulent aerodynamic flows // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 2007. Vol. 365. № 1859. P. 2389-2418.
113. Gatski T.B., Speziale P.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // *J.Fluid Mech.* 1993. Vol. 254. P. 59-78.
114. Gatski T.B., Speziale P.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // *J.Fluid Mech.* 1993. Vol. 254. P. 59-78.
115. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // *Physics of Fluids A.* 1991. Vol. 3. № 7. P. 1766-1771.
116. Gibson M.M., Launder B.E. Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer // *J.Fluid Mech.* 1978. Vol. 86. № 3. P. 491-511.
117. Girimaji S.S. Fully explicit and self-consistent algebraic Reynolds stress model // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics.* 1996. Vol. 8. P. 387-402.
118. Girimaji S.S. A Galilean invariant explicit algebraic Reynolds stress model for turbulent curved flows // *Physics of Fluids.* 1997. Vol. 9. № 4. P. 1067-1077.
119. Grigoriev A., Wallin S., Brethouwer G., Johansson A.V. A realizable explicit algebraic Reynolds stress model for compressible turbulent flow with significant mean dilatation // *Physics of Fluids.* 2013. Vol. 25. P. 105112-1 - 105112-26.
120. Grotzbach G., Worner M. Direct numerical and large eddy simulations in nuclear applications // *Int.J.Heat and Fluid Flow.* 1999. Vol. 20. P. 222-240.
121. Hamba F. Statistical investigation of the energy dissipation equation in shear turbulence // *J.Phys.Soc.Jpn.* 1987. Vol. 56. № 11. P. 3771-3774.
122. Hanjalic K., Kenjeres S. Some Developments in Turbulence Modeling of Environmental Flows // *The Fourth International Symposium CWE2006.* 2006. P. 65-95.
123. Hanjalic K., Launder B.E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // *J.Fluid Mech.* 1972. Vol. 52. № 04. P. 609-638.
124. Henkes R.A.W.M., Le QUéré P. Three-dimensional transition of natural-convection flows // *J.Fluid Mech.* 1996. Vol. 319. P. 281-303.
125. Hirsh P. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics.* Oxford : Butterworth-Heinemann, 2007. 680 p.
126. Horiuti K. Roles of non-aligned eigenvectors of strain rates and subgrid-scale tensors in turbulence generation // *J.Fluid Mech.* 2003. Vol. 491. P. 65-100.
127. Huang Z.-y., Cheng H.-r., Zhou L.-d. Calculations of Flows Over Underwater Appended Bodies with High Resolution ENO Schemes // *Twenty-Fourth Symposium on Naval Hydrodynamics.* 2002. P. 588-594.

128. Jakirlić S., Hanjalic K. A new approach to modelling near-wall turbulence energy and stress dissipation // *J.Fluid Mech.* 2002. Vol. 459. P. 139-166.
129. Jeyapaul E., Coleman G., Rumsey P.L. Higher-order moments and their modeling approximations in a turbulent channel flow subjected to mean strain // 42nd NIA CFD Seminar. 2013.
130. Jimenez J. Computing high-Reynolds-number turbulence: will simulations ever replace experiments? // *J. of turbulence.* 2003. Vol. 4. № 22. P. 1-14.
131. Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarisation with a 2-equation model of turbulence // *Int.J.Heat Mass Transfer.* 1972. Vol. 15. P. 310-314.
132. Jones W.P., Lentini D. A realisable non-linear eddy viscosity/diffusivity model for confined swirling flows // *Int.J.Heat and Fluid Flow.* 2008. Vol. 29. № 6. P. 1612–1627.
133. Jongen T., Gatski T.B. A unified analysis of planar homogenous turbulence using single-point closure equations // *J.Fluid Mech.* 1999. Vol. 399. P. 117-150.
134. Karman T. Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz // *Proceedings of the Third International Congress for Applied Mechanics.* 1931. Vol. 1. P. 85-92.
135. Karvinen A., Ahlstedt H. Comparison of turbulence models in case of three-dimensional diffuser // *Open Source CFD International Conference.* 2008.
136. Katul G.G., J.D. A. An investigation of higher-order closure models for a forested canopy // *Boundary-Layer Meteorology.* 1998. Vol. 89. № 1. P. 47-74.
137. Kim S.-E., Rhee S.H. Assessment of Eight Turbulence Models for a Three-Dimensional Boundary Layer Involving Crossflow and Streamwise Vortices // *AIAA paper.* 2002. № 2002-0852. P. 1-25.
138. Author An RNG based k-epsilon turbulence model using the realizable eddy viscosity formulation // 14th European Turbulence Conference, Lyon, France, 2013, p. 456-458
139. Lai Y.G., So R.M.P. Near-wall modelling of turbulent heat fluxes // *Int.J.Heat Mass Transfer.* 1990. Vol. 33. № 7. P. 1429-1440.
140. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // *J.Fluid Mech.* 1975. Vol. 68. № 3. P. 537-566.
141. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // *Journal of Fluid Mechanics.* 1975. Vol. 68. № 3. P. 537-566.
142. Launder B.E., Reynolds W.P. Asymptotic near-wall stress dissipation rates in a turbulent flow // *Physics of Fluids.* 1983. Vol. 26. № 5. P. 1157–1158.
143. Launder B.E., Shima N. Second-moment closure for the near-wall sublayer: development and application // *AIAA J.* 1989. Vol. 27. P. 1319-1325.
144. Launder B.E., Spalding D.B. *Mathematical Models of Turbulence.* New York: Academic Press, 1972. 169 p.
145. Leonard A. Energy cascade in large-eddy simulation of turbulent fluid flows // *Adv.Geophys.* 1974. Vol. 18A. P. 237-248.

146. Leschziner M.A., Drikakis D. Turbulence modelling and turbulent-flow computation in aeronautics // *The Aeronautical Journal*. 2002. Vol. 106. № 1061. P. 349-384.
147. Lilly D.K. On the application of the eddy viscosity concept in the inertial sub-range of turbulence. Research N.P.f.A. Boulder, Colorado : National Center for Atmospheric Research, 1966. 19 p.
148. Lundgren T.S. Strained vortex model for turbulent fine structure // *Physics of Fluids*. 1982. Vol. 25. № 12. P. 2193-2203.
149. Marvin J.G., Huang P.G. Turbulence modelling – progress and future outlook // *Proceedings of the Conference Held in Monterey, CA, USA, 24–28 June 1996*. 1996. P. 35-56.
150. Mathieu J., Scott J. *An Introduction to Turbulent Flow*. Cambridge : Cambridge-Univ. Press, 2000. 374 p.
151. McComb W.D., Watt A.G. Conditional averaging procedure for the elimination of the small-scale modes from incompressible turbulence at high Reynolds numbers // *Phys.Rev.Lett*. 1990. Vol. 65. № 26. P. 3281-3284.
152. Menter F.R. Eddy viscosity transport equations and their relation to the k- $\epsilon$  model // *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*. 1997. Vol. 119. P. 876-884.
153. Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA J*. 1994. Vol. 32. № 8. P. 1598-1605.
154. Menter F.R. Zonal two equation k- $\omega$  turbulence models for aerodynamic flows // *AIAA Paper*. 1993. № 93-2906. P. 1-21.
155. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 4. P. 625 - 632.
156. Moffatt H.K., Kida S., K. O. Stretched vortices – the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics // *J.Fluid.Mech*. 1994. Vol. 259. P. 241-264.
157. Moin P., Mahesh K. Direct Numerical Simulation: a tool in turbulence research // *Annu.Rev.Fluid Mech*. 1998. Vol. 30. P. 539.
158. Morkovin M.V. Effects of compressibility on turbulent flows // *Mecanique de la Turbulence Favre A*. NY : Gordon and Breach, 1962. P. 367-380.
159. Mouri H., Hori A., Kawashima Y. Vortex tubes in velocity fields of laboratory isotropic turbulence: dependence on the Reynolds number // *Phys.Rev.E*. 2003. Vol. 57. № 1.
160. Orszag S.A., Patterson G.S. Numerical simulation of three-dimensional homogenous isotropic turbulence // *Phys.Rev.Lett*. 1972. Vol. 28. № 2. P. 76-79.
161. Piomelli U. Large-eddy simulation of turbulent flows // *Advances in Turbulence Modelling. Lecture Series 1998-05*, 1998. P. 1-54.
162. Piomelli U., Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simulations // *Annu.Rev.Fluid Mech*. 2002. Vol. 34. P. 349-374.

163. Piomelli U., Radhakrishnan S., De Prisco G. Turbulent eddies in the RANS/LES transition region // Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Vol. 97. Berlin: Springer, 2008. P. 21-36
164. Pope S.B. A more general effective-viscosity hypothesis // Journal of Fluid Mechanics. 1975. Vol. 72. № 2. P. 331-340.
165. Pope S.B. A perspective of turbulence modeling // Modeling Complex Turbulent Flows Salas M.D. : Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 53-67.
166. Pope S.B. Turbulent flows. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 802 p.
167. Poroseva S., Kaiser B.E., Sillero J.A., Murman S.M. Validation of a closing procedure for fourth-order RANS turbulence models with DNS data in an incompressible zero-pressure-gradient turbulent boundary layer // Int.J.Heat and Fluid Flow. 2015. Vol. 56. P. 71-79.
168. Prandtl L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // ZAMM. 1925. Vol. 5. P. 136-139.
169. Rebollo T.P., Coronil D.F. Derivation of the "k-epsilon" model for locally homogeneous turbulence by homogenization techniques // P.R.Acad.Sci.Paris. 2003. Vol. 1. № 337. P. 431-436.
170. Reynolds O. On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil.Trans Royal Soc. 1894. Vol. 186. P. 123-161.
171. Rodi W. Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1997. Vol. 69-71. P. 55-75.
172. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. Vol. 56. P. 219-221.
173. Rodi W. The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two equation model of turbulence. PhD thesis. London : University of London, 1972. 310 p.
174. Rodi W. Turbulence Models and Their Application in Hydraulics. A state-of-the-art review. Rotterdam : A.A. Balkem Publishers, 2000. 95 p.
175. Rodi W., Constantinescu G., Stoesser T. Large-Eddy Simulation in Hydraulics. N-Y. : CRC Press, 2013. 266 p.
176. Rodi W., Ferziger J.L., Breuer M., Pourquie M.J.B.M. Status of Large Eddy Simulation: Results of a Workshop // Transactions of ASME. 1997. Vol. 119. P. 248-262.
177. Rotta J.P. Statistische theorie nichthomogener turbulenz // Z.Phys. 1951. Vol. 129. P. 547-572.
178. Rubinstein R., Zhou Y. Analytical theory of the destruction terms in dissipation rate transport equations // Physics of Fluids. 1996. Vol. 8. № 11. P. 3172-3177.
179. Rumsey P.L., Gatski T.B., Morrison J.H. Turbulence model predictions of extra strain rate effects in strongly curved flows // AIAA Paper. 1999. P. 99-157.

180. Sarkar S. The stabilising effect of compressibility in turbulent shear flow // *J.Fluid Mech.* 1995. Vol. 282. P. 163-186.
181. Sarkar S., Balakrishnan L. Application of a Reynolds-Stress Turbulence Model to the Compressible Shear Layer. Hampton : ICASE Report 90-18, NASA CR 182002, 1990 p.
182. Schmitt F.G., Merci B., Dick E., Hirsh P. Direct investigation of the k-transport equation for a complex turbulent flow // *J.of turbulence.* 2003. Vol. 4. № 21. P. 1-21.
183. Shafarevich A.I. Localized asymptotic solutions of the Navier-Stokes equations and topological invariants of vector fields. Prandtl-Maslov equations on reeb graphs and Fomenko invariants // *Rus.J.of mathematical physics.* 2000. Vol. 7. № 4. P. 401-447.
184. Shih T.H., Liou W.W., Shabbir A., Zhu J. A New k-ε Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Development and Validation // *Computers Fluids.* 1995. Vol. 24. № 3. P. 227-238.
185. Shir P.P. A Preliminary Numerical Study of Atmospheric Turbulent Flows in the Idealized Planetary Boundary Layer // *Journal of the Atmospheric Sciences.* 1973. Vol. 30. № 7. P. 1327-1339.
186. Sivashinsky G.I., Frenkel A.L. On negative eddy viscosity under conditions of isotropy // *Physics of Fluids A.* 1992. Vol. 4. № 8. P. 1608-1610.
187. Smagorinsky J. General Circulation Experiments with the Primitive Equations // *Monthly Weather Review.* 1963. Vol. 91. № 3. P. 99-164.
188. Smirnov E.M. Recent Progress in Numerical Simulation of Highly Three-Dimensional Turbulent Flows and Endwall Heat Transfer in Turbine Blade Cascades // 2011. Vol. 42. № 1. P. 25-44.
189. Smith L.M., S.L. W. Renormalization group analyzes of turbulence // *Annu.Rev.Fluid Mech.* 1998. Vol. 11. № 6. P. 275-310.
190. So R.M.P., Mellor O.L. Experiment on convex curvature effects in turbulent boundary layers // *J.Fluid Mech.* 1973. Vol. 60. № 1. P. 43-62.
191. So R.M.P., Mellor O.L. Experiment on turbulent boundary layers in a concave wall // *Aeron. Quart.* 1975. Vol. 26. P. 25-40.
192. Spalart P.R. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to  $R=1410$  // *J.Fluid Mech.* 1988. Vol. 187. P. 61-98.
193. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulations // *Int.J.Heat and Fluid Flow.* 2000. Vol. 21. № 3. P. 252-263.
194. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *La Rech.Aerospaciale.* 1994. Vol. 1. P. 5-21.
195. Spalart P.R., Shur M.L. On the Sensitization of Turbulence Models to Rotation and Curvature // *Aerospace Science and Technology.* 1997. Vol. 1. № 5. P. 297-302.
196. Speziale P.G. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1991. Vol. 23. P. 107-157.

197. Speziale P.G. On nonlinear  $K-\epsilon$  and  $K-\epsilon$  models of turbulence // *J.Fluid Mech.* 1987. Vol. 187. P. 459-475.
198. Speziale P.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modeling the Pressure-Strain Correlation of Turbulence // *J.Fluid Mech.* 1991. Vol. 227. P. 245-272.
199. Stanisic M.M. *The Mathematical Theory of Turbulence.* Berlin : Springer-Verlag, 1988. 501 p.
200. Tavoularis S., Corrsin S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flows with uniform mean temperature gradient. Part 1 // *J.Fluid Mech.* 1981. Vol. 104. P. 311-347.
201. Temam R. *Navier-Stokes Equations.* Oxford : Elsevier Science Publishers B.V., 1984. 526 p.
202. Van Driest E.R. On turbulent flow near a wall // *J.Aeronaut.Sci.* 1956. Vol. 23. № 11. P. 1007-1011.
203. Wallin S. *Engineering turbulence modelling for CFD with focus on explicit algebraic Reynolds stress models.* Stockholm : Royal Institute of Technology, 2000. 254 p.
204. Wallin S., Johansson A.V. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows // *Journal of Fluid Mechanics.* 2000. Vol. 40. № 3. P. 89-132.
205. Wilcox D.P. Comparison of Two-Equation Turbulence Models for Boundary Layers with Pressure Gradient // *AIAA J.* 1993. Vol. 31. № 8. P. 1414-1424.
206. Wilcox D.P. Formulation of the  $k-\omega$  Turbulence Model Revisited // *AIAA J.* 2008. Vol. 46. № 11. P. 2823-2838.
207. Wilcox D.P. *Turbulence Modeling for CFD.* La Canada, California : DCW Industries Inc., 2006. 515 p.
208. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale P.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // *Physics of Fluids.* 1992. Vol. A4. № 7. P. 1510-1520.
209. Yakhot V., Orszag S.A. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // *Journal of scientific Computing.* 1986. Vol. 1. № 1. P. 1-51.
210. Yakhot V., Smith L.M. The renormalization group, the  $\epsilon$ -expansion, and derivation of turbulence models // *Journal of scientific Computing.* 1992. Vol. 7. P. 35-61.
211. Yoshizawa A. Nonequilibrium effect of the turbulent-energy production process on the inertial-range energy spectrum // *Phys.Rev.E.* 1994. Vol. 49. № 3. P. 4065-4071.
212. Yoshizawa A. Statistical modeling of a transport equation for energy dissipation in shear turbulence // *J.Phys.Soc.Jpn.* 1982. Vol. 51. № 6. P. 1983-1991.
213. Yoshizawa A. Statistical modeling of a transport equation for the kinetic energy dissipation rate // *Physics of Fluids.* 1987. Vol. 30. № 3. P. 628-631.
214. Zhiyin Y. Large-eddy simulation: Past, present and the future // *Chinese Journal of Aeronautics.* 2015. Vol. 28. № 1. P. 11-24.

---

*Валерий Алексеевич ПАВЛОВСКИЙ,  
Дмитрий Владимирович НИКУЩЕНКО*  
**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА.  
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ**

*Учебное пособие*



Зав. редакцией  
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*  
Ответственный редактор *С. В. Макаров*  
Корректор *А. Ю. Бабкина*  
Выпускающий *Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028  
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;  
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А.  
Тел.: (812) 412-92-72, 336-25-09.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 16.02.18.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 19,32. Тираж 100 экз.

Заказ № 116-18.

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленного оригинал-макета  
в АО «Т8 Издательские технологии».  
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.

---