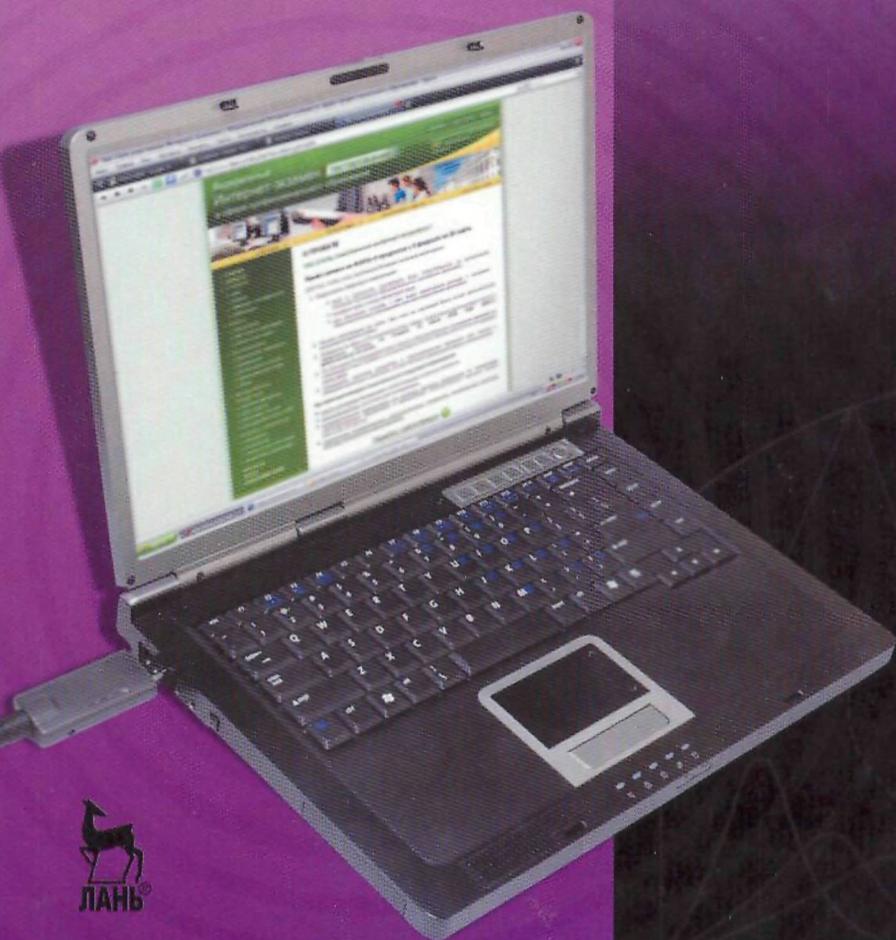


53 (021)  
К 170

# ФИЗИКА

## ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ БАЗОВЫХ ЗНАНИЙ

Н. П. КАЛАШНИКОВ  
Н. М. КОЖЕВНИКОВ



И. П. КАЛАШНИКОВ  
И. М. КОЖЕВНИКОВ

# ФИЗИКА

## ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ БАЗОВЫХ ЗНАНИЙ

ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

*Национально-педагогическая система подготовки  
высшего уровня образования в сфере  
Академии Федерации в различных регионах страны и  
для подготовки специалистов уровня  
и Федеральную систему высшего образования  
по физике*



САИКТ-ПЕТЕРБУРГ МОСКВА - КИЯВЬ  
2009

Калашников Н. П., Косовников Н. М.

**K 17** Физика. Интернет-тестирование базовых знаний: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 160 с., ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература)

ISBN 978 5 8114 0625 9

Учебное пособие содержит теоретические сведения по физике и подробные решения демонстрационных вариантов типовых задач №, представленных на сайте Федерального центра (www.fedorg.ru). Тематическая структура пособия определяется задачами базовых и дополнительных государственных образовательных стандартов, которые, в свою очередь, разбиваются на более узкие подуровни — так называемые аттестационные подуровни в соответствии с требованиями к выпускникам (АТНКО). Такая структура во многом определяет специфику проведения и оценки результатов Федерального экзамена в сфере профессионального образования (ФЭКО) по дисциплинам основной образовательной программы.

Пособие предназначено для подготовки студентов высших учебных заведений и интернет-тестирования по физике, которое проводится в рамках ежегодного мониторинга качества учебного процесса в традиционной форме профессионального образования.

ISBN 28 8473

Издательство  
А. И. ЛАНЬ СПб

Отпечатано в типографии АО «Издательство «Лань»  
Воспроизведение или использование любой части  
запечатанной без специального разрешения обложки  
или любого другого материала книги  
судит представляться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2009  
© Н. П. Калашников,  
Н. М. Косовников, 2009  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Все государственные и негосударственные образовательные учреждения России каждые пять лет проходят комплексную оценку своей деятельности, включающую обязательную процедуру аттестации, аккредитации и лицензирования. На основании такой оценки они получают (или не получают) право продолжать свою деятельность в течение следующих пяти лет. Одним из важных компонентов аттестации является проведение самообследования, а затем официальной министерской проверки базовых знаний по всем аттестуемым основным образовательным программам (ООП) и по всем циклам каждой ООП. Эти проверки обычно проходят в виде тестирования, которое должно охватывать не менее чем три дисциплины циклов ГСЭ (гуманитарные и социально-экономические дисциплины) и ЕН (общие математические и естественнонаучные дисциплины) и не менее чем пять дисциплин циклов ОПД (общепрофессиональные дисциплины) и СД (специальные дисциплины).

До 2005 г. такое тестирование требовало от каждого вуза самостоятельной разработки аттестационных педагогических измерительных материалов (АПИМ), их сертификацию в УМО (учебно-методических объединениях вузов) или в Министерстве образования и науки, обучение персонала, способного корректно провести тестирование, обработать и проанализировать его результаты. С 2005 г. во всех вузах страны проводится Федеральный экзамен в сфере профессионального образования (ФЭПО), который представляет собой централизованное интернет-тестирование базовых знаний студентов. Эту работу организует и координирует единый центр тестирования, который сосредоточен в Росаккредагентстве (Российском национальном аккредитационном агентстве в сфере образования — НААСО), расположенном в г. Йошкар-Ола (Республика Марий-Эл).

В соответствии с Законом «Об образовании» Российской Федерации (ст. 33, п. 20), «условием аттестации образовательного учреждения являются положительные результаты итоговой аттестации не менее чем половины его выпускников в течение трех последовательных лет». Поэтому при проведении

аттестации предполагается не однократное обследование качества усвоения учебного материала, а его мониторинг в течение как минимум трех лет. Если к этому добавить то, что АПИМ по циклам ГСЭ и ЕН, а также по большинству дисциплин цикла ОПД сосредоточены именно в Росаккредагентстве, то понятно, что эта организация фактически стала монополистом в выработке критериев оценки по большинству дисциплин, определяющих общий интеллектуальный и профессиональный уровень выпускников высшей школы.

Отметим важные особенности ФЭПО в вузах России. Во-первых, интернет-тестирование является не индивидуальным, а групповым, то есть во внимание принимаются не успехи или неудачи отдельных студентов, а интегральные результаты академической группы, курса или всех студентов вуза. Во-вторых, контролируются именно базовые знания, поэтому тестирование проводится после изучения дисциплины или цикла дисциплин (иногда этот временной интервал составляет год и более). В-третьих, в результате тестирования оцениваются все компоненты содержания дисциплины по ГОС (так называемые дидактические единицы (ДЕ) ГОС, о которых речь пойдет ниже). В-четвертых, применяется бинарная (а не четырех- или пятибалльная) система оценивания («усвоил» – «не усвоил»). Наконец, в-пятых, тестирование обычно проводится в массовом порядке в ограниченные сроки (обычно во время зимней и весенней сессии).

Существуют разные режимы проведения интернет-экзамена (on-line, off-line и др.), однако во всех случаях студенты выполняют задания на компьютерах, а результаты тестирования направляются в Росаккредагентство и там обрабатываются. Образовательное учреждение получает только информационно-аналитическую карту, где отражены не только итоги экзамена в данном вузе, но и данные по стране в целом.

Какие же достоинства и недостатки можно отметить в этой достаточно новой форме контроля качества учебного процесса?

Несомненным плюсом регулярного (ежегодного) проведения ФЭПО следует считать повышение дисциплины лекторов, которые часто, в том числе и по согласованию с заказчиками (выпускающими кафедрами), не выполняют требования к содержанию и уровню преподавания дисциплины, зафиксированные в ГОС. Нередко целые разделы курса, которые заказчик считает неактуальными для себя, изымаются из программы или изучаются в сокращенном, урезанном объеме. В качестве второго положительного момента можно отметить унификацию контрольных вопросов, формирование единых требований к уровню усвоения учебного материала (в рамках того или иного направления подготовки бакалавров). Ведь не секрет, что проверка знаний студентов преподавателями часто очень субъективна. Третьим достоинством тестирования можно считать возможность проверки сразу всех ДЕ курса. Наконец, ФЭПО, являясь внешним контролем, косвенно способствует повышению авторитета тестируемых дисциплин.

В то же время, как любое тестирование, ФЭПО имеет ряд недостатков. Во-первых, тесты не позволяют оценить качество мышления. Нынешние студенты практически разучились разговаривать на языке физики, объяснять, мотивировать свои выводы. В то же время нельзя придавать этому экзамену

функции итогового контроля знаний по той или иной дисциплине. Это делается иначе и сразу после окончания изучения курса. Во-вторых, подготовка к тестированию, часто сводящаяся, в отсутствие разработанных учебных пособий, к элементарному натаскиванию, может оторвать значительное время в ущерб качественному изучению материала. Наконец, в-третьих, ежегодное интернет-тестирование весьма дорого обходится вузу в материальном выражении.

Следует отметить, что вначале интернет-тестирование было встречено, мягко говоря, прохладно, особенно по дисциплинам ЕН цикла. Прежде всего это было связано с весьма низкими результатами ФЭПО, которые преподавателями-предметниками связывались с некорректностью, низким качеством и сложностью АПИМ. Однако в дальнейшем стало ясно, что причинами низких результатов являются, прежде всего, недостатки в подготовке и проведении ФЭПО. В частности, студентам, завершившим изучение какой-либо дисциплины, через год без всякой подготовки предлагается сесть за компьютер и вспомнить весь материал курса. Вряд ли с этим легко справятся даже отлично успевающие студенты.

Базовые остаточные знания предполагают не мгновенное воспроизведение по памяти формул и определений, а способность достаточно быстро, за один-два дня, восстановить в памяти логику, основные понятия, связи и ключевые моменты курса. К сожалению, до сих пор отсутствуют методические пособия, предназначенные для подготовки к интернет-тестированию остаточных знаний. Имеющиеся на сайте ФЭПО ([www.fepo.ru](http://www.fepo.ru)) материалы для подготовки к экзамену не могут восполнить этот пробел, так как содержат только требования к ГОС по различным направлениям, специальностям и дисциплинам, тематическую структуру АПИМ и демонстрационные тестовые задания (без ответов). Настоящее пособие предназначено для того, чтобы восполнить этот пробел.

В начале пособия рассматриваются принципы формирования структуры АПИМ по физике и их связь с требованиями ГОС по различным специальностям. Знание этих принципов позволит студентам целенаправленно узнавать в том или ином задании соответствующий раздел и вопрос курса. Здесь же приведены критерии оценки результата тестирования.

Раздел пособия, посвященный методическим рекомендациям, должен оказать непосредственную помощь студенту в том, как готовиться к тестированию и как вести себя непосредственно на экзамене.

Основной материал пособия включает в себя теоретические сведения по всем темам АПИМ, которые, собственно, и представляют собой базовые знания по курсу общей физики, а также анализ решений конкретных заданий, которые встречались среди АПИМ 2006–2007 гг. и в демонстрационных материалах на сайте ФЭПО.

# ТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АТТЕСТАЦИОННЫХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ (АПИМ)

*При составлении тестовых заданий за основу принимаются требования ГОС к обязательному минимуму содержания той или иной дисциплины (в дальнейшем мы будем говорить об общей физике, входящей в федеральный компонент ЕН-цикла). Эти требования могут сильно различаться по объему, содержанию и трудоемкости (т. е. времени, выделяемому в учебных планах на изучение физики) для различных направлений и специальностей.*

Содержание учебной дисциплины «Физика» разделяется на несколько разделов, которые называются дидактическими единицами (ДЕ). Обычно таких разделов 6–7, однако встречаются тесты с меньшим числом ДЕ (см. ниже). Каждая ДЕ, в свою очередь, состоит из 4–6 тем, число которых и определяет количество вопросов тестовых заданий при проведении экзамена. Названия этих тем также различаются для разных специальностей, однако в целом различия невелики.

Для примера в таблицах 1–3 приведены требования ГОС и тематическая структура АПИМ для трех специальностей, по которым проходят обучение студенты. Информацию о структуре АПИМ для других специальностей, а их существует несколько сотен, можно найти на сайте [www.fepo.ru](http://www.fepo.ru).

Как же оцениваются результаты тестирования? Важнейшим критерием оценки является процент усвоения ДЕ. Она считается усвоенной, если студент правильно ответил на 50% и более вопросов по темам, относящимся к этой ДЕ. Например, при проведении тестирования по физике для студентов специальности 010700.62 «Физика» (таблица 1) ДЕ «Механика» считается усвоенной, если будут получены правильные ответы на три и более заданий. В противном случае ДЕ не считается усвоенной.

Как было сказано в Предисловии, при тестировании базовых знаний учитываются не отдельные достижения каждого студента, а интегральный результат академической группы, курса, всего контингента студентов. При этом результат экзамена считается положительным, если не менее 50% студентов продемонстрировали усвоение всех (!) ДЕ. Таким образом, можно, например, ответить на 29 вопросов из 32, но если неправильные три ответа относятся к одной ДЕ, где всего четыре вопроса, то данный студент вносит отрицательный вклад в итоговый результат тестирования группы.

В дальнейшем при отборе материала для кратких теоретических сведений и анализа решений конкретных заданий будет использоваться тематическая структура АПИМ для специальности «Физика» (таблица 1). При использовании пособия для подготовки к тестированию по другим структурам следует ориентироваться на сходные по названию и по содержанию темы.

Таблица 1

Специальность: 010700.62 — Физика  
 Время выполнения теста: 80 минут

Дисциплина: Общая физика  
 Количество заданий: 32

**Требования ГОС к обязательному минимуму  
 содержания основной образовательной программы**

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф	<b>Федеральный компонент</b>	<b>3140</b>
ЕН.Ф.01	<p><b>Общая физика:</b>            Механика. Пространство и время. Кинематика материальной точки. Преобразования Галилея. Динамика материальной точки. Законы сохранения. Основы специальной теории относительности. Неинерциальные системы отсчета. Кинематика абсолютно твердого тела. Динамика абсолютно твердого тела. Колебательное движение. Деформации и напряжения в твердых телах. Механика жидкостей и газов. Волны в сплошной среде и элементы акустики. Молекулярная физика. Идеальный газ. Понятие температуры. Распределение молекул газа по скоростям. Идеальный газ во внешнем потенциальном поле. Броуновское движение. Термодинамический подход к описанию молекулярных явлений. Первое начало термодинамики. Циклические процессы. Второе начало термодинамики. Понятие энтропии термодинамической системы. Реальные газы и жидкости. Поверхностные явления в жидкостях. Твердые тела. Фазовые переходы первого и второго рода. Явления переноса. Электричество и магнетизм. Электростатика. Проводники в электростатическом поле. Диэлектрики в электростатическом поле. Постоянный электрический ток. Механизмы электропроводности. Контактные явления. Магнетики. Объяснение диамагнетизма. Объяснение парамагнетизма по Ланжевэну. Ферромагнетика и их основные свойства. Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля. Электромагнитные колебания. Переменный ток. Технические применения переменного тока. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Излучение электромагнитных волн. Оптика. Основы электромагнитной теории света. Модулированные волны. Явление интерференции. Когерентность волн. Многолучевая интерференция. Явление дифракции. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Дифракция и спектральный анализ. Дифракция волновых пучков. Дифракция на многомерных структурах. Поляризация света. Отражение и преломление света на границе раздела изотропных диэлектриков. Световые волны в анизотропных средах. Интерференция поляризованных волн. Индуцированная анизотропия оптических свойств. Дисперсия света. Основы оптики металлов. Рассеяние света в мелкодисперсных и мутных средах. Нелинейные оптические явления. Классические модели излучения разреженных сред. Тепловое излучение конденсированных сред. Основные представления о квантовой теории излучения света атомами и молекулами. Усиление и генерация света. Физика атомов и атомных явлений. Микромир. Волны и кванты. Частицы и волны. Основные экспериментальные данные о строении атома. Основы квантово-механических представлений о строении атома. Одноэлектронный атом. Многоэлектронные атомы. Электромагнитные переходы в атомах. Рентгеновские спектры. Атом в поле внешних сил. Молекула. Макроскопические квантовые явления. Статистические распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Энергия Ферми. Сверхпроводимость и сверхтекучесть и их квантовая природа. Физика атомного ядра и частиц. Свойства атомных ядер. Радиоактивность. Нуклон-нуклонное взаимодействие и свойства ядерных сил. Модели атомных ядер. Ядерные реакции. Взаимодействие ядерного излучения с веществом. Частицы и взаимодействия. Эксперименты в физике высоких энергий. Электромагнитные взаимодействия. Сильные взаимодействия. Слабые взаимодействия. Дискретные симметрии. Объединение взаимодействий. Современные астрофизические представления.</p>	1000

## Тематическая структура АИИМ

№ ДЕ	Наименование дидактической единицы ГОС	№ задания	Тема задания
	Механика	1	Кинематика поступательного и вращательного движения
		2	Динамика точки и поступательного движения твердого тела
		3	Динамика вращательного движения твердого тела
		4	Работа и энергия
		5	Законы сохранения момента импульса и энергии
		6	Элементы специальной теории относительности
2	Молекулярная (статистическая) физика и термодинамика	7	Распределения Максвелла и Больцмана
		8	Внутренняя энергия и теплоемкость газов
		9	Второе начало термодинамики. Энтропия. Циклы
		10	Первое начало термодинамики. Работа при изопроцессах
3	Электричество и магнетизм	11	Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме
		12	Законы постоянного тока
		13	Магнитостатика
		14	Электрическое и магнитное поле в веществе
		15	Свойства электрических и магнитных полей
		16	Уравнения Максвелла
4	Колебания и волны	17	Свободные и вынужденные колебания
		18	Сложение гармонических колебаний
		19	Волны. Уравнение волны
		20	Энергия волны. Перенос энергии волной
5	Волновая и квантовая оптика	21	Интерференция и дифракция света
		22	Поляризация и дисперсия света
		23	Тепловое излучение. Фотоэффект
		24	Эффект Комптона. Световое давление
6	Квантовая физика и физика атома	25	Спектр атома водорода. Теория Бора для водородоподобных систем
		26	Волны де Бройля
		27	Волновая функция для микрочастицы в потенциальном ящике
		28	Уравнения Шредингера (общие свойства)
7	Элементы ядерной физики и физики элементарных частиц	29	Ядро. Элементарные частицы
		30	Ядерные реакции
		31	Законы сохранения в ядерных реакциях
		32	Фундаментальные взаимодействия

Специальность: 010900.62 — Механика

Дисциплина: Физика

Время выполнения теста: 80 минут

Количество заданий: 26

## Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф	Федеральный компонент	1130
ЕН.Ф.03	<b>Физика:</b> Физические основы механики: кинематика, динамика, статика, законы сохранения, основы релятивистской механики; элементы гидродинамики; электричество и магнетизм; физика колебаний и волн: гармонический и ангармонический осцилляторы, физический смысл спектрального разложения, волновые процессы, основные акустические и оптические явления; квантовая физика: корпускулярно-волновой дуализм, принцип неопределенности, квантовые состояния; молекулярная физика и термодинамика: три начала термодинамики, фазовые равновесия и фазовые превращения, элементы неравновесной термодинамики, классическая и квантовые статистики; физический практикум.	200

## Тематическая структура АПИМ

№ ДЕ	Наименование дидактической единицы ГОС	№ задания	Тема задания
1	Механика	1	Кинематика точки и поступательного движения твердого тела. Динамика поступательного движения
		2	Кинематика вращательного движения
		3	Динамика вращательного движения
		4	Закон сохранения механической энергии
2	Молекулярная (статистическая) физика и термодинамика	5	Внутренняя энергия идеального газа
		6	Первое начало термодинамики
		7	Средняя энергия молекул
		8	Цикл Карно
3	Электричество и магнетизм	9	Электростатическое поле. Поле точечного заряда. Принцип суперпозиции
		10	Работа по перемещению заряда в электростатическом поле
		11	Законы постоянного тока
		12	Магнитное поле системы проводников с токами. Принцип суперпозиции полей
		13	Действие магнитного поля на заряды. Сила Лоренца
4	Механические и электромагнитные колебания и волны	14	Явление электромагнитной индукции
		15	Уравнение гармонических колебаний
		16	Волны
		17	Волны. Уравнение волны
5	Волновая и квантовая оптика	18	Уравнение волны
		19	Волновая природа света
		20	Интерференция света
		21	Фотоэффект
6	Квантовая физика, физика атома	22	Тепловое излучение
		23	Корпускулярно-волновой дуализм свойств частиц вещества. Волны де Бройля
		24	Явление радиоактивности
		25	Природа радиоактивных излучений
		26	Состав атомного ядра

Специальность: 010501.65 — Прикладная математика и информатика

Дисциплина: Физика

Время выполнения теста: 45 минут

Количество заданий: 16

**Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы**

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф	Федеральный компонент	1173
ЕН.Ф.03	Физика: Классическая механика; электродинамика; молекулярная и статистическая физика; физические основы построения ЭВМ.	306

**Тематическая структура АПИМ**

№ ДЕ	Наименование дидактической единицы ГОС	№ задания	Тема задания
1	Механика	1	Кинематика поступательного и вращательного движения точки
		2	Динамика поступательного движения
		3	Динамика вращательного движения
		4	Работа и энергия
		5	Законы сохранения в механике
		6	Элементы специальной теории относительности
2	Молекулярная (статистическая) физика и термодинамика	7	Распределения Максвелла и Больцмана
		8	Средняя энергия молекул
		9	Второе начало термодинамики. Энтропия. Циклы
		10	Первое начало термодинамики. Работа при изопроцессах
3	Электричество и магнетизм	11	Электростатическое поле в вакууме
		12	Законы постоянного тока
		13	Магнитостатика
		14	Явление электромагнитной индукции
		15	Электрические и магнитные свойства вещества
		16	Уравнения Максвелла

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Интернет-тестирование остаточных знаний проходит в компьютерных классах сразу для целой группы студентов. Каждый студент выполняет индивидуальное задание, но результат тестирования относится ко всей группе. Если более половины студентов не усвоили материал всех ДЕ (а это значит, что они дали неправильные ответы на более чем половину вопросов, относящихся к той или иной ДЕ), то результат тестирования группы в целом признается отрицательным.

На ответы по тесту студенту отводится вполне определенное время. В зависимости от количества вопросов это время может составить от 45 минут до 1,5 часов. Порядок ответов на вопросы произвольный, можно пропустить какой-то вопрос и вернуться к нему позже. При этом скорость выполнения заданий теста не имеет значения и никак не учитывается.

Задания делятся на три типа, отличающиеся значками, которые стоят перед вариантами ответов. Знак  $\bigcirc$  предполагает выбор одного варианта ответа из предложенных, например:

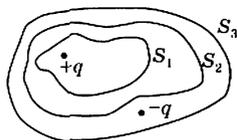
Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса  $R = 1$  м с постоянным угловым ускорением  $\epsilon = 2c^{-2}$ . Отношение нормального ускорения к тангенциальному через одну секунду равно...

- 1
- 2
- 4
- 3

Знак  $\square$  (малый квадрат) указывает на то, что надо выбрать несколько (как правило, два) правильных ответа из предложенных вариантов, например:

Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Поток вектора напряженности электростатического поля *отличен от нуля* через...

- $S_3$
- $S_1$
- $S_2$



Следует отметить, что в заданиях по физике этот тип вопросов встречается крайне редко.

Знак  $\square$  (большой квадрат) встречается в заданиях, где надо указать правильную последовательность или соответствие. Первое нажатие левой кнопки мыши приводит к появлению цифры 1 в соответствующем квадрате. Второе нажатие — к появлению цифры 2 и т. д. Для изменения ответа необходимо повторно нажать на квадрат с цифрой 1, например:

Расположите представления о материи в порядке их возникновения:

- |   |  |
|---|--|
| 3 | существует несколько качественно различных форм материи, но резкой грани между ними нет  |
| 2 | материя — мельчайшие, неделимые, бесструктурные атомы, движущиеся в пустоте  |
| 1 | материя — совокупность мельчайших корпускул — неделимых, непроницаемых атомов, которые движутся по законам классической механики |

Базовые (или остаточные) знания — это не та информация, которая всегда наготове и может быть мгновенно извлечена из памяти и использована для ответа на любой вопрос. Базовые знания — это способность быстро, за короткое время восстановить в памяти определенный набор основных фактов и логических связей, относящихся к той или иной дисциплине. Поэтому для успешного тестирования базовых знаний требуется определенная подготовка. Это должно быть не скрупулезное изучение материала дисциплины по учебникам, учебным пособиям или конспектам лекций, а краткое освежение в памяти ключевых вопросов курса и ознакомление с вариантами тестовых заданий. Именно для этого и было подготовлено настоящее учебное пособие.

*Желаем вам успехов!*

# I. МЕХАНИКА

## 1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Положение материальной точки в пространстве в момент времени  $t$  определяется радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 1-1).

• Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

• Средняя скорость

$$\langle \dot{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

• Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.3)$$

• При криволинейном движении полное ускорение можно представить как сумму нормальной  $\vec{a}_n$  и тангенциальной  $\vec{a}_\tau$  составляющих (рис. 1-1):  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ . Абсолютные значения этих ускорений

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.4)$$

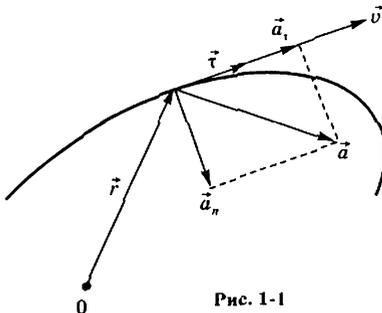


Рис. 1-1

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad (1.5)$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \quad (1.6)$$

где  $R$  — радиус кривизны траектории.

- При движении с постоянным ускорением  $\vec{a} = \text{const}$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, \quad (1.7)$$

где  $\vec{r}_0$  и  $\vec{v}_0$  — начальное положение и начальная скорость материальной точки. Аналогичные выражения имеют место для проекций радиус-вектора. Например, проекция  $\vec{r}$  на ось  $x$  имеет вид

$$r_x(t) = x(t) = x_0 + v_{0,x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.8)$$

- Скорость точки при равнопеременном движении ( $\vec{a} = \text{const}$ )

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t. \quad (1.9)$$

• Вращательное движение — это движение по круговой траектории. Это движение является частным случаем криволинейного движения, однако для его описания используются угловые характеристики: угол поворота  $\Delta\varphi$ , угловая скорость  $\dot{\omega}$ , угловое ускорение  $\ddot{\epsilon}$ .

• Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен перпендикулярно плоскости вращения таким образом, что вращение происходит по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора  $\vec{\omega}$  (*правило буравчика*) (рис. 1-2).

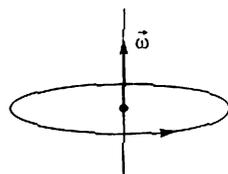


Рис. 1-2

- Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.10)$$

- Угловое ускорение

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (1.11)$$

- Равнопеременное вращение тела вокруг неподвижной оси

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}. \quad (1.12)$$

Здесь знак вектора для угловой скорости и углового ускорения опущен, так как эти векторы предполагаются коллинеарными. Но следует помнить, что  $\omega$  и  $\epsilon$  здесь понимаются в алгебраическом смысле (с учетом их знаков).

• Связь угловых величин с линейными:

путь, пройденный точкой по дуге окружности радиусом  $R$ , равен

$$\Delta s = R\Delta\varphi, \quad (1.13)$$

линейная скорость этой точки

$$v = \omega R, \quad (1.14)$$

тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad (1.15)$$

нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 R, \quad (1.16)$$

полное ускорение

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (1.17)$$

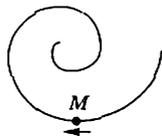
• Частота вращения  $\nu$  связана с угловой скоростью соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ ;

период вращения (время одного оборота)  $T = \frac{1}{\nu}$ .

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ<sup>1</sup>

#### Задание 1-1.

Точка  $M$  движется по спирали с постоянной по величине скоростью в направлении, указанном стрелкой. При этом величина полного ускорения...



- не изменяется
- увеличивается
- уменьшается

Решение.

Так как движение происходит с постоянной по величине скоростью, то  $\frac{dv}{dt} = 0$ , а значит тангенциальной составляющей ускорения нет,  $a_\tau = 0$ . Нормальная составляющая ускорения прямо пропорциональна квадрату скорости и обратно пропорциональна радиусу кривизны траектории  $R$  (см. формулу 1.4). При равномерном движении точки  $M$  по спирали радиус кривизны уменьшается, значит, нормальная составляющая ускорения увеличивается. В отсутствие тангенциальной составляющей так же ведет себя и полное ускорение.

Правильным является ответ: **увеличивается**.

<sup>1</sup>Задания приводятся в форме, похожей на ту, которую студенты видят на экране компьютера во время проведения тестирования. Слева от вертикальной черты находятся условия заданий, справа — варианты ответа. Правильный вариант (или варианты) в пособии отмечен точкой или галочками.

## Задание 1-2.

Материальная точка  $M$  движется по окружности со скоростью  $\vec{V}$ . На рис. 1 показан график зависимости скорости  $V_\tau$  от времени. На рис. 2 укажите направление полного ускорения в точке  $M$  в момент времени  $t_3$ .

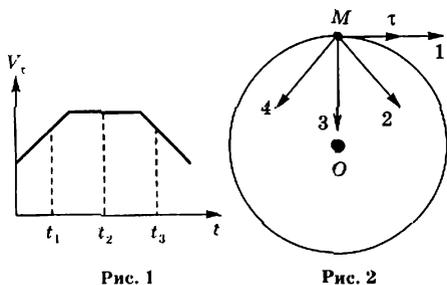


Рис. 1

Рис. 2

- 1
- 2
- 3
- 4

## Решение.

В момент времени  $t_3$  происходит уменьшение модуля скорости, значит,  $\frac{dV_\tau}{dt} < 0$ . Поэтому тангенциальный компонент ускорения  $\vec{a}_\tau$  направлен в сторону, противоположную единичному вектору касательной  $\vec{\tau}$ . Нормальный компонент ускорения  $\vec{a}_n$  всегда направлен к центру круговой траектории. Поэтому вектор полного ускорения  $\vec{a}$  отклонен от вертикали влево.

Правильным является ответ: 4.

## Задание 1-3.

Материальная точка  $M$  движется по окружности со скоростью  $\vec{V}$ . На рис. 1 показан график зависимости проекции скорости  $V_\tau$  от времени ( $\vec{\tau}$  — единичный вектор положительного направления,  $V_\tau$  — проекция  $\vec{V}$  на это направление). При этом вектор полного ускорения на рис. 2 имеет направление...

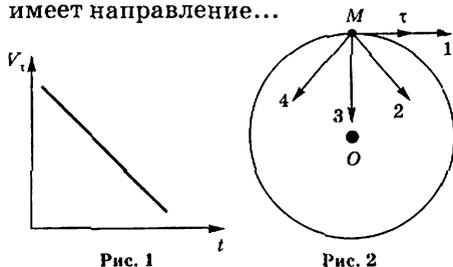


Рис. 1

Рис. 2

- 1
- 2
- 3
- 4

## Решение.

Решение этой задачи полностью аналогично предыдущей.

Правильным является ответ: 4.

**Задача 1-4**

Для тела брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту и дальности полета  $L$  и  $V_{\text{ср}}$ . Если сопропортionalно увеличить скорость  $V_0$  в  $n$  раз, то дальность полета  $L$  и  $V_{\text{ср}}$  изменятся в  $n^2$  раз.

- 1
- 2
- 3
- 4



**Решение**

Дальность полета  $L$  определяется временем  $t$  полета. Если скорость  $V_0$  увеличить в  $n$  раз, то дальность  $L$  изменится в  $n^2$  раз. Средняя скорость  $V_{\text{ср}}$  определяется как  $V_{\text{ср}} = \frac{L}{t}$ . Если  $L$  изменится в  $n^2$  раз, а  $t$  в  $n$  раз, то  $V_{\text{ср}}$  изменится в  $n$  раз.

**Задача 1-5**

Тело брошено под углом  $\alpha$  к горизонту со скоростью  $V_0$ . Его траектория — парабола. Если  $V_0$  увеличить в  $n$  раз, то дальность  $L$  изменится в  $n^2$  раз.

- увеличивается
- уменьшается
- не изменяется



**Решение**

Поскольку ускорение  $a$  в любой момент времени одно и то же и равно  $g$ , то траектория тела — парабола. Если  $V_0$  увеличить в  $n$  раз, то дальность  $L$  изменится в  $n^2$  раз.

**Задание 1-6.**

Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса  $R = 1$  м с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 2\text{с}^{-2}$ . Отношение нормального ускорения к тангенциальному через одну секунду равно...

- 1
- 2
- 4
- 3
- 8

**Решение.**

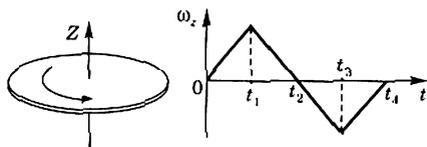
Модуль тангенциального ускорения  $a_t = \varepsilon R = 2$  м/с<sup>2</sup>. Модуль скорости частицы изменяется со временем линейно  $V = \varepsilon R t$ , значит, через одну секунду скорость равна 2 м/с.

Модуль нормального ускорения, соответствующий этой скорости и данному радиусу окружности, равен  $a_n = V^2/R = 4$  м/с<sup>2</sup>. Таким образом, искомое отношение равно двум.

Правильным является ответ: 2.

**Задание 1-7.**

Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию своей угловой скорости  $\omega_z(t)$  так, как показано



на рисунке. Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен по оси  $z$  в интервалы времени...

- от  $t_2$  до  $t_3$  и от  $t_3$  до  $t_4$
- от 0 до  $t_1$  и от  $t_1$  до  $t_2$
- от  $t_1$  до  $t_2$  и от  $t_3$  до  $t_4$
- от  $t_1$  до  $t_2$  и от  $t_2$  до  $t_3$

**Решение.**

По определению, положительным направлением вектора угловой скорости является такое, когда диск вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора  $\vec{\omega}$ . Значит, этот вектор направлен вдоль оси  $Z$  в течение всего промежутка времени от 0 до  $t_2$ .

Таким образом, правильным является ответ: от 0 до  $t_1$  и от  $t_1$  до  $t_2$ .

**Задание 1-8.**

Частица движется вдоль окружности радиусом 1 м в соответствии с уравнением  $\varphi(t) = 2\pi(t^2 - 6t + 12)$ , где  $\varphi$  — в радианах,  $t$  — в секундах. Частица остановится в момент времени (в с), равный...

- 1
- 2
- 3
- 4

Решение.

Частица остановится, когда ее мгновенная угловая скорость  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  станет равной нулю. Произведя дифференцирование выражения, приведенного в условии задания, и приравняв его нулю, получим  $\omega = 2\pi(2t - 6) = 0$ . Откуда  $t = 3$  с.

Правильным является ответ: 3.

## 2. ДИНАМИКА ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, в которых свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно или покоится. Эти системы отсчета называются *инерциальными системами отсчета* (ИСО).

• Второй закон Ньютона: изменение импульса  $\dot{p} = m\ddot{v}$  материальной точки равно равнодействующей всех сил, действующих на нее,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.1)$$

• Если масса постоянна, то второй закон Ньютона может быть выражен формулой

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.2)$$

• Интегрируя (2.1) от  $t_1$  до  $t_2$ , получаем

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt, \quad (2.3)$$

где  $\vec{F}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(t)$ , а интеграл в правой части (2.3) называется *импульсом силы*.

Соотношение (2.3) означает, что изменение импульса материальной точки равно импульсу действующей на нее силы.

• Если  $\vec{F}(t) = 0$ , то  $\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p} = 0$ . Значит, если равнодействующая всех сил равна нулю, то импульс материальной точки сохраняется.

• Сила, действующая на материальную точку, движущуюся по кривой, может быть разложена на две составляющие — тангенциальную и нормальную. Тангенциальная (или касательная) сила

$$\ddot{F}_\tau = m\ddot{a}_\tau = m \frac{dv}{dt} \bar{\tau}, \quad (2.4)$$

где  $\bar{\tau}$  — единичный вектор, направленный по касательной к траектории. Нормальная, или центростремительная, сила

$$\ddot{F}_n = m\ddot{a}_n = m \frac{v^2}{R} \bar{n}, \quad (2.5)$$

где  $\bar{n}$  — единичный вектор, направленный по нормали к траектории, а  $R$  — радиус кривизны траектории.

- Сила трения скольжения

$$\ddot{F}_{\text{тр}} = -\mu N \bar{e}_v, \quad (2.6)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения,  $N$  — абсолютная величина силы нормального давления,  $\bar{e}_v$  — единичный вектор в направлении скорости тела.

- Сила упругости

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta l = -k(x - x_0), \quad (2.7)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости,  $x$  — координата незакрепленного конца пружины, а  $x_0$  — она же для нерастянутой пружины. Знак минус показывает, что сила направлена в обратную деформации сторону.

- Сила гравитационного взаимодействия

$$\ddot{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\bar{r}_{12}}{r}, \quad (2.8)$$

где  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н · м/кг<sup>2</sup> гравитационная постоянная.

Здесь  $r = |\bar{r}_{12}|$ ;  $\bar{r}_{12}$  — радиус-вектор тела 2 относительно тела 1. Знак минус в формуле (2.8) указывает на притяжение тел.

- Полный импульс  $\ddot{P}$  системы материальных точек равен сумме импульсов всех этих материальных точек

$$\ddot{P} = \sum_{i=1}^n \ddot{p}_i. \quad (2.9)$$

• Полный импульс изолированной системы материальных точек остается постоянным, как бы ни двигались эти материальные точки, взаимодействуя друг с другом (закон сохранения импульса),

$$\ddot{P} = \text{const}. \quad (2.10)$$

- Для двух взаимодействующих между собой материальных точек  $\ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 = \text{const}$ , следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\ddot{p}_1 + \ddot{p}_2) = \frac{d\ddot{p}_1}{dt} + \frac{d\ddot{p}_2}{dt} = \ddot{F}_{12} + \ddot{F}_{21} = 0,$$

откуда следует третий закон Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.11)$$

- Применение закона сохранения импульса к соударению двух тел

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (2.12)$$

где  $\vec{v}_i, \vec{u}_i (i = 1, 2)$  — скорости тел 1 и 2 до и после соударений соответственно.

- При неупругом ударе, когда тела слипаются после соударения, их общая скорость  $\vec{u}$  становится равной

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.13)$$

- Если имеется механическая система, состоящая из  $n$  материальных точек с массами  $m_i$  и скоростями  $\vec{v}_i$ , то центром масс этой системы называется точка пространства с радиус-вектором

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.14)$$

Следует понимать, что в этом месте пространства может не быть ни одной материальной точки, это просто удобная характеристика системы материальных точек.

- Центр масс  $\vec{R}_c$  перемещается в пространстве со скоростью  $\vec{V}_c$  (скорость центра масс), которая определяется формулой

$$\vec{V}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.15)$$

- В ИСО, связанной с центром масс изолированной системы материальных точек, полный импульс равен нулю, хотя все точки находятся в движении. В этом случае говорят, что в этой ИСО материальные точки покоятся как целое.

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

### Задание 2-1.

Материальная точка  $M$  движется по окружности со скоростью  $\vec{V}$ . На рис. 1 показан график зависимости тангенциальной составляющей скорости  $V_t$  от времени ( $\bar{\tau}$  — единичный

вектор положительного направления,  $V_t$  — проекция  $\vec{V}$  на это направление). На рис. 2 укажите направление силы, действующей на точку  $M$  в момент времени  $t_1$ .

- 1
- 2
- 3
- 4

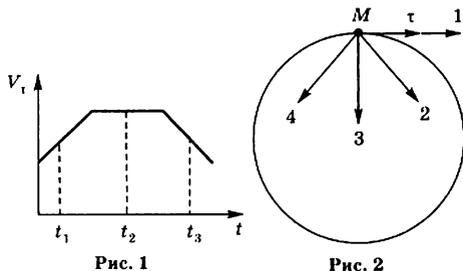


Рис. 1

Рис. 2

**Решение.**

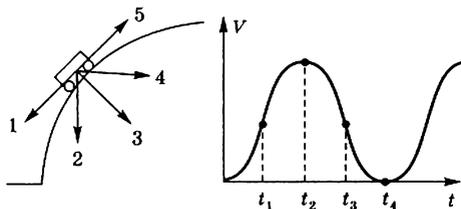
Решение этого задания полностью аналогично решению задания 1-2 (см. выше), так как по второму закону Ньютона направление вектора силы определяется вектором полного ускорения  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Направление этого ускорения для  $t_3$  определено в задании 1-2.

В этом задании для  $t_1$  правильным является ответ: 2.

**Задание 2-2.**

Скорость автомобиля изменялась со временем, как показано на графике зависимости  $V(t)$ . В момент времени  $t_1$  автомобиль поднимался по

- 1
- 2
- 5
- 3
- 4



участку дуги. Направление результирующей всех сил, действующих на автомобиль в этот момент времени правильно отображает вектор...

**Решение.**

Судя по графику зависимости модуля скорости автомобиля от времени, ускорение автомобиля равно нулю в моменты времени  $t = 0, t_2, t_4$ . В момент времени  $t_1$  автомобиль двигался с максимальным тангенциальным ускорением (касательная к графику  $V(t)$  в этот момент имеет максимальный угол к оси абсцисс), направленным вдоль вектора 5. Кроме того, при движении по дуге имеет место нормальное ускорение вдоль вектора 3, чтобы автомобиль

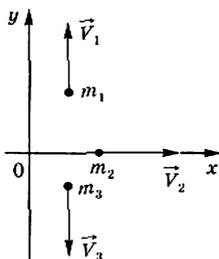
оставался «прижатым» к горке. Результирующее ускорение, очевидно, направлено вдоль вектора 4. Так же направлена и результирующая сила.

Правильным является ответ: 4.

### Задание 2-3.

Система состоит из трех шаров с массами  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = 3$  кг, которые движутся так, как показано на рисунке. Если скорости

- 2/3
- 4
- 5/3
- 10



шаров равны  $v_1 = 3$  м/с,  $v_2 = 2$  м/с,  $v_3 = 1$  м/с, то величина скорости центра масс этой системы в м/с равна...

Решение.

По формуле (2.18) найдем проекции скорости центра масс на оси  $X$  и  $Y$ . Легко убедиться в том, что  $V_{cy} = 0$ . Действительно, в числителе формулы для  $y$ -проекции скорости центра масс имеем  $m_1 v_1 + m_3 v_3 = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$ . Значит, скорость центра масс имеет только  $x$ -проекцию, равную  $\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2 + m_3}$ . Модуль скорости центра масс  $2/3$  м/с.

Правильным является ответ:  $2/3$ .

## 3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ<sup>2</sup>

• Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (3.1)$$

где  $\vec{M}$  — момент силы,  $\vec{L}$  — момент импульса.

<sup>2</sup> В пособии используется рубрикатор тестовых заданий, соответствующий приведенному на сайте [www.fero.ru](http://www.fero.ru). Следует отметить, что ряд разделов этого тематического рубрикатора настолько сильно тематически связан между собой, что фактически можно было бы дать для них объединенные краткие теоретические сведения. Таковыми являются, например, темы № 4 (Работа и энергия) и № 5 (Законы сохранения импульса и энергии), или № 3 (Динамика вращательного движения твердого тела) и № 5 (Законы сохранения импульса и энергии). Примеры такого же рода можно привести и для других ДЕ. Это нужно иметь в виду и при решении некоторых тестовых заданий какого-либо раздела полезно заглянуть в краткие теоретические сведения других, соседних, разделов.

- Момент силы  $F$  относительно оси вращения

$$M = F_{\perp} l, \quad (3.2)$$

где  $F_{\perp}$  — проекция силы  $F$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения,  $l$  — плечо силы  $F$  (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

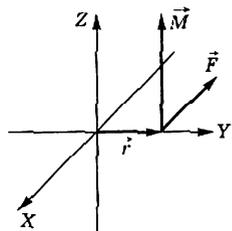


Рис. 3-1

- Момент силы относительно начала координат

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad (3.3)$$

где  $\vec{r}$  — радиус вектор точки приложения силы (рис. 3-1).

- Момент импульса тела, вращающегося относительно неподвижной оси

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad (3.4)$$

где  $J$  — момент инерции.

- Момент инерции некоторых тел:

а) материальной точки:  $J = mr^2$ , где  $r$  — расстояние от точки до оси вращения;

б) шара относительно оси, проходящей через его центр:  $J = \frac{2}{5}mr^2$ , где  $r$  — радиус шара;

в) однородного цилиндра (диска) относительно его оси:  $J = \frac{1}{2}mr^2$ , где  $r$  — радиус основания цилиндра (диска);

г) тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня и перпендикулярной ему:  $J = \frac{ml^2}{12}$ , где  $l$  — длина стержня.

- Теорема Штейнера:

$$J = J_0 + ma^2, \quad (3.5)$$

где  $J$  — момент инерции тела относительно заданной оси,  $J_0$  — момент инерции тела относительно воображаемой оси, параллельной заданной, но проходящей через центр инерции тела,  $a$  — расстояние между этими осями.

- Момент импульса материальной точки с импульсом  $p$  относительно начала координат

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad (3.6)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор материальной точки.

- Закон сохранения момента импульса:

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \text{const}, \quad (3.7)$$

где  $\vec{L}_i$  — момент импульса тела с номером  $i$ , входящего в состав системы.

• Закон сохранения момента импульса для тела, вращающегося около неподвижной оси, когда момент инерции тела меняется:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \quad (3.8)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — начальный и конечный моменты инерции,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — начальная и конечная угловые скорости тела.

• Элементарная работа, совершаемая силой,

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\phi}, \quad (3.9)$$

где  $d\vec{\phi}$  — вектор элементарного угла поворота тела.

• Кинетическая энергия:

а) тела, вращающегося относительно неподвижной оси,

$$T = \frac{J\omega^2}{2}; \quad (3.10)$$

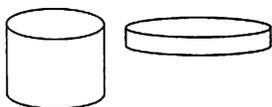
б) тела, катящегося по плоскости,

$$T = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (3.11)$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 3-1.

Диск и цилиндр имеют одинаковые массы и радиусы (см. рисунок). Для их моментов инерции<sup>3</sup> справедливо соотношение...



- $I_{ц} > I_{д}$
- $I_{ц} < I_{д}$
- $I_{ц} = I_{д}$

Решение.

Моменты инерции осесимметричных тел относительно оси симметрии определяются только массой и радиусом и не зависят от размеров вдоль оси симметрии.

Правильным является ответ:  $I_{ц} = I_{д}$ .

#### Задание 3-2.

Четыре маленьких шарика одинаковой массы, жестко закрепленные невесомыми стержнями, образуют квадрат. Отношение моментов инерции системы  $I_1/I_2$ , если ось вращения совпадает со стороной квадрата  $I_1$  или с его диагональю  $I_2$ , равно...

- 1/4
- 2
- 4
- 1
- 1/2

<sup>3</sup> Предполагается, что речь идет о моментах инерции относительно осей симметрии диска и цилиндра.

Решение.

Момент инерции определяется суммой произведений масс шариков на квадраты их расстояний от оси вращения. Для оси вращения, совпадающей со стороной квадрата, момент инерции равен  $I_1 = ma^2 + ma^2 = 2ma^2$ . Если же ось вращения совпадает с диагональю квадрата, то момент инерции равен

$$I_2 = 2m(a/\sqrt{2})^2 = ma^2. \text{ Таким образом, } \frac{I_1}{I_2} = 2.$$

Правильным является ответ: 2.

Задание 3-3.

Две материальные точки одинаковой массы движутся с одинаковой угловой скоростью по окружностям радиусами  $R_1 = 2R_2$ . При этом отношение моментов импульса точек  $L_1/L_2$  равно...

- 2
- 4
- 1/4
- 1/2

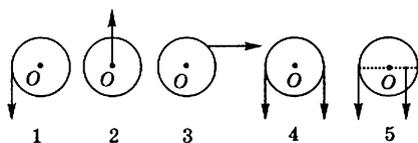
Решение.

Момент импульса  $L$  материальной точки с массой  $M$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $R$ , равен  $MR^2\omega$ :  $L = MR^2\omega$ . Так как  $R_1 = 2R_2$ , то  $L_1 = 4L_2$ .

Правильным является ответ: 4.

Задание 3-4.

На рисунке к диску, который может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через точку  $O^4$ , при-



- 4
- 5
- 1
- 2
- 3

кладывают одинаковые по величине силы. Момент сил будет максимальным в положении...

Решение.

Модуль момента силы определяется произведением силы на плечо (расстояние от точки приложения силы до оси вращения по перпендикуляру). При этом моменты сил, вызывающих вращение в противоположные стороны, имеют разные знаки (разные направления вдоль оси вращения). Момент силы в положении 1 равен  $MR^2/2$ , где  $M$  — масса диска,  $R$  — его радиус. Момент силы в положении 2 равен нулю, так как плечо этой силы равно

<sup>4</sup> Ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка.

нулю. Момент силы в положении 3 равен  $Mr^2/2 < MR^2/2$ , где  $r$  — расстояние до точки приложения силы,  $r < R$ . Момент сил в положении 4 равен нулю, так как он складывается из двух одинаковых по модулю, но противоположных по знаку моментов  $MR^2/2$ . Наконец, момент сил в положении 5 равен  $MR^2/2 - Mr^2/2 < MR^2/2$ .

Таким образом, правильным является ответ: 1.

### Задание 3-5.

Однородный диск радиусом  $R = 0,2$  м и массой  $m = 5$  кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Если зависимость угловой скорости от времени определяется выражением  $\omega = A + Bt$ , где  $A = 4$  рад/с;  $B = 8$  рад/с<sup>2</sup>, то касательная сила, примененная к ободу диска равна...

- 1 Н
- 2 Н
- 4 Н
- 5 Н
- 8 Н

Решение.

В соответствии с (3.1),  $J \frac{d\omega}{dt} = FR$ ,  $J = \frac{mR^2}{2}$ , поэтому  $F = \frac{mR}{2} \frac{d\omega}{dt}$ . Дифференцируем угловую скорость  $\frac{d\omega}{dt} = B$  и подставляем в формулу для силы

$$F = \frac{mRB}{2} = \frac{5 \cdot 0,2 \cdot 8}{2} = 4 \text{ Н.}$$

Правильным является ответ: 4 Н.

## 4.

### РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

#### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Работа, совершаемая постоянной силой,

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \alpha, \quad (4.1)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением векторов силы  $\vec{F}$  и перемещения  $\Delta \vec{r}$ .

- Работа переменной силы  $\vec{F}$  на пути  $s$

$$A = \int_s \vec{F} \cdot \cos \alpha \cdot ds. \quad (4.2)$$

- Мощность:

а) средняя мощность за интервал времени  $\Delta t$

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t} = F \langle v \rangle \cos \alpha; \quad (4.3)$$

б) мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = Fv \cos \alpha. \quad (4.4)$$

• Работа консервативной силы  $\vec{F}$  на участке траектории от  $\vec{r}_1$  до  $\vec{r}_2$  не зависит от формы траектории и определяется разностью потенциальной энергии  $U(\vec{r})$  в начальной и конечной точках

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2). \quad (4.5)$$

• Потенциальная энергия  $U(\vec{r})$  определена с точностью до произвольной постоянной, так как физический смысл имеет только разность потенциальных энергий (работа). Однако если зафиксировать значение потенциальной энергии в какой-то точке пространства (например, считать ее нулевой на какой-либо высоте в однородном поле силы тяжести ( $\vec{F} = m\vec{g}$ ) или на бесконечности в случае гравитационной силы (2.8)), то во всех остальных точках потенциальная энергия будет определена однозначно.

• Если потенциальная энергия  $U(\vec{r})$  известна, то сила  $\vec{F}$  определяется формулой

$$\vec{F} = -\text{grad}U(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right), \quad (4.6)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы (орты) вдоль координатных осей  $X, Y, Z$  соответственно. Если потенциальная энергия зависит только от одной переменной, например от  $x$ , то формула (4.6) упрощается

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{i}. \quad (4.7)$$

• Энергия:

а) кинетическая энергия тела, движущегося поступательно

$$T = \frac{mv^2}{2}; \quad (4.8)$$

б) потенциальная энергия тела, поднятого на высоту  $h$ ,

$$U = mgh; \quad (4.9)$$

в) потенциальная энергия упругой деформации тела

$$U = \frac{k\Delta l^2}{2}, \quad (4.10)$$

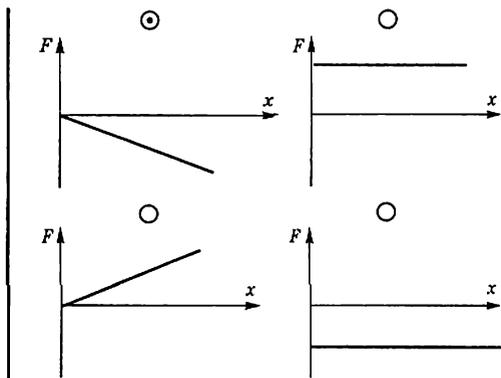
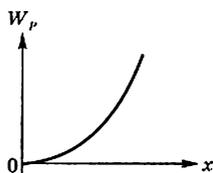
где  $k$  — жесткость тела,  $\Delta l$  — абсолютная деформация.

#### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

##### Задание 4-1.

В потенциальном поле сила  $\vec{F}$  пропорциональна градиенту потенциальной энергии  $W_p$ . Если график зависимости потенциальной энергии  $W_p$  от координаты  $x$  имеет вид,

показанный на рисунке, то зависимость проекции  $F_x$  на ось  $x$  будет...



Решение.

Сила  $\vec{F}$  в потенциальном поле связана с потенциальной энергией  $W_p$  соотношением

$$\vec{F} = -\text{grad } W_p,$$

т. е. в одномерном случае мы имеем

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}.$$

По условию задачи потенциальная энергия изображается квадратичной зависимостью от  $x$ :

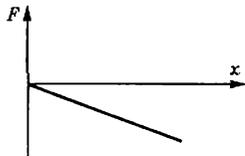
$$W_p = \text{const } x^2.$$

Следовательно,

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -2\text{const} \cdot x.$$

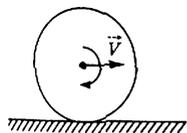
Таким образом, проекция  $F_x$  будет пропорциональна  $x$ , но с отрицательным знаком.

Правильным является ответ:



Задание 4-2.

Обруч массой  $m = 0,3$  кг и радиусом  $R = 0,5$  м привели во вращение, сообщив ему энергию вращательного движения 1200 Дж, и опустили



на пол так, что его ось вращения оказалась параллельной плоскости пола. Если обруч начал двигаться без

проскальзывания, имея кинетическую энергию поступательного движения 200 Дж, то сила трения совершила работу, равную...

- ⊙ 800 Дж
- 1400 Дж
- 600 Дж
- 1000 Дж

Решение.

Изменение кинетической энергии системы равно работе всех сил, действующих на рассматриваемую систему:

$$\Delta A = T_2 - T_1,$$

где  $T_2$  и  $T_1$  — конечная и начальная кинетические энергии системы.

В начальном состоянии кинетическая энергия  $T_1$  определяется энергией вращательного движения

$$T_1 = T_{\text{вр}} = \frac{I\omega_1^2}{2} = 1200 \text{ Дж.}$$

В конечном состоянии кинетическая энергия обруча равна энергии поступательного движения плюс энергия вращательного движения:

$$T_2 = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $V$  — скорость вращательного движения обруча (т. к. обруч движется без скольжения, то точка соприкосновения обруча с полом является мгновенным центром вращения и  $\omega$  связана с  $V$  соотношением:  $\omega = V/R$ ).

Таким образом,

$$T_2 = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mR^2 \left(\frac{V}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = 2T_{\text{пост}},$$

то есть в конечном состоянии кинетическая энергия обруча равна удвоенной энергии поступательного движения:

$$T_2 = 2T_{\text{пост}} = 400 \text{ Дж.}$$

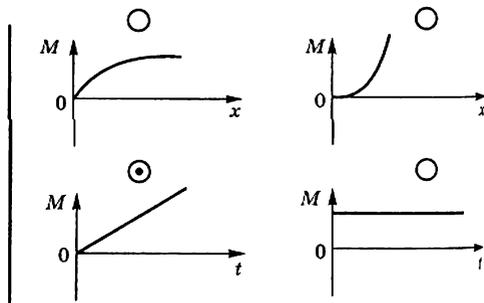
Следовательно, работа силы трения составляет

$$\Delta A = T_1 - T_2 = 800 \text{ Дж.}$$

Правильным является ответ: 800 Дж.

### Задание 4-3.

Момент импульса тела относительно неподвижной оси изменяется по закону  $L = at^2$ . Укажите график, правильно отражающий зависимость от времени величины момента сил, действующих на тело.



Решение.

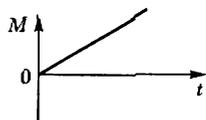
Уравнение движения для вращательного движения имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\frac{dL}{dt} = 2at = M,$$

т. е. момент сил, действующих на тело, линейно зависит от времени. Правильным является ответ:



#### Задание 4-4.

Сплошной и полый (трубка) цилиндры, имеющие одинаковые массы и радиусы, вкатываются без проскальзывания на горку. Если начальные скорости тел одинаковы, то...

- выше поднимется полый цилиндр
- выше поднимется сплошной цилиндр
- оба тела поднимутся на одну и ту же высоту

#### Решение.

Согласно закону сохранения энергии в механике, полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная

$$E = T_{\text{кин}} + \Pi_{\text{пот}} = \text{const.}$$

В начальном состоянии полная энергия каждого тела определяется кинетической энергией (которая равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения):

$$T_{\text{нач}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

В конечном состоянии полная энергия каждого тела равна потенциальной энергии  $mgh$ , т. е. характеризуется высотой, на которую поднимается тело.

В начальном состоянии тела имеют одинаковые массы и скорости.

Учитывая, что тела движутся без проскальзывания, связь между угловой и линейной скоростью дается формулой  $\omega = V/R$ . Записывая явные выражения для моментов инерции сплошного и полого цилиндров, получаем

$$T_{\text{сплош. ц}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{(mR^2)\left(\frac{V}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{4} = \frac{3}{2}\left(\frac{mV^2}{2}\right);$$

$$T_{\text{пол. ц}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = 2\left(\frac{mV^2}{2}\right).$$

Следовательно, в начальном состоянии полый цилиндр обладает большей кинетической энергией, поэтому в конечном состоянии он должен обладать большей потенциальной энергией, т. е. он поднимется на большую высоту.

Правильным является ответ: выше поднимется полый цилиндр.

**Задание 4-5.**

Сила трения колес поезда меняется по закону  $F(S) = 1/5 S$ . Работа сил трения на пути 1 км равна...

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| <input checked="" type="radio"/> 100 кДж | <input type="radio"/> 200 Дж  |
| <input type="radio"/> 10 кДж             | <input type="radio"/> 200 кДж |
| <input type="radio"/> 1 МДж              |                               |

**Решение.**

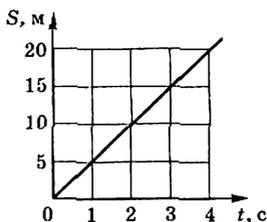
Работа сил трения определяется по формуле (4.2) с учетом того, что  $\cos \alpha = 0$ :

$$A = \int_0^{1 \text{ км}} \frac{1}{5} s ds = \frac{s^2}{10} \Big|_0^{1 \text{ км}} = 10^5 \text{ Дж.}$$

**Правильным является ответ: 100 кДж.**

**Задание 4-6.**

Зависимость перемещения тела массой 4 кг от времени представлена на рисунке.



Кинетическая энергия тела в момент времени  $t = 3$  с равна...

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| <input type="radio"/> 15 Дж            | <input type="radio"/> 20 Дж |
| <input type="radio"/> 40 Дж            | <input type="radio"/> 25 Дж |
| <input checked="" type="radio"/> 50 Дж |                             |

**Решение.**

Из рисунка видно, что тело массой 4 кг перемещается равномерно со скоростью 5 м/с. Значит кинетическая энергия тела в любой момент времени равна  $mv^2/2 = 50$  Дж.

**Правильным является ответ: 50 Дж.**

**Задание 4-7.<sup>5</sup>**

Тело массой 2 кг поднято над землей. Его потенциальная энергия 400 Дж. Если на поверхности земли потенциальная энергия тела равна нулю и силами сопротивления воздуха можно пренебречь, скорость, с которой оно упадет на землю, составит...

- |   |
|---|
| <input type="radio"/> 40 м/с            |
| <input checked="" type="radio"/> 20 м/с |
| <input type="radio"/> 14 м/с            |
| <input type="radio"/> 10 м/с            |

<sup>5</sup> Это задание больше подходит для следующей темы № 5, однако в демонстрационных вариантах тестовых заданий оно приводится именно в теме № 4.

Решение.

Приравняв потенциальную энергию в поле силы тяжести кинетической энергии падающего тела  $U = \frac{mv^2}{2}$ , сразу получаем  $v = \sqrt{\frac{2U}{m}}$ . Подставив сюда значения  $U = 400$  Дж и  $m = 2$  кг, получаем  $v = 20$  м/с.

Правильным является ответ: 20 м/с.

Задание 4-8.

Сила, необходимая для сжатия пружины на величину  $x$ , записывается в виде  $F(x) = 5x + 10x^3$ , где  $x$  выражается в метрах, а  $F$  — в ньютонах. Если пружина была сжата на 2 м, то она сообщит (после того, как ее отпустить) помещенному перед ней шарiku массой  $m = 4$  кг скорость...

- 1 м/с
- 2 м/с
- 3 м/с
- 4 м/с
- 5 м/с

Решение.

Работа, необходимая для сжатия пружины на величину  $x$ , равна

$$A = \int_0^x F(x) dx = \frac{5x^2}{2} + \frac{10x^4}{4}.$$

Подставив  $x = 2$ , получим  $A = 50$  Дж. Приравняв эту работу кинетической энергии шарика, определим скорость  $V = \sqrt{\frac{2A}{m}} = 5$  м/с.

Правильным является ответ: 5 м/с.

## 5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Полная механическая энергия равна сумме потенциальной  $U$  и кинетической  $T$  энергии.

- Закон сохранения энергии в механике: *полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная*

$$T + U = \text{const.}$$

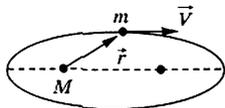
- Закон сохранения момента импульса: *момент импульса системы, на которую не действуют внешние моменты сил, сохраняется.*

• Особенно большое значение закон сохранения момента импульса имеет в случае движения в центральном поле сил. В этом случае момент сил равен нулю, так как  $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ . С другой стороны,  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ . Значит, в центральном поле сил, например в поле сил тяготения, момент импульса всегда сохраняется. Закону сохранения момента импульса подчиняются движения планет и многих других космических объектов.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 5-1.

Планета массой  $m$  движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится звезда массой  $M$ .



Если  $\vec{r}$  — радиус-вектор планеты, то справедливо утверждение:

- для момента импульса планеты относительно центра звезды справедливо выражение:  $L = mVr$
- момент силы тяготения, действующий на планету, относительно центра звезды, не равен нулю
- ⊙ момент импульса планеты относительно центра звезды при движении по орбите не изменяется

#### Решение.

Уравнение для момента импульса частицы имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

где  $\vec{M}$  — момент силы относительно центра;  $\vec{M} = [\dot{\vec{r}} \times \vec{F}]$  — векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  на силу ( $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  — сила тяготения);  $\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = [\vec{r} \times \vec{p}]$  — момент импульса, равный векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$  частицы на ее импульс  $\vec{p}$  (поэтому ответ № 1 не является корректным).

Для центральных сил  $\vec{F} = -\frac{r}{r} F(r)$  (сила тяготения является центральной).

гравитационная сила притяжения направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие тела) и момент силы относительно силового центра равен нулю (т. к. векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю):

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = \frac{F(r)}{r} [\vec{r} \times \vec{r}] \equiv 0.$$

Таким образом, из уравнения движения следует, что для центральных сил

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

т. е.

$$\vec{L} = \text{const.}$$

Другими словами, в поле центральных сил момент импульса тела сохраняется.

Правильным является ответ: момент импульса планеты относительно центра звезды при движении по орбите не изменяется.

### Задание 5-2.

Тело массой  $m_1$  вертикально падает на свободный конец рычага с плечом  $l_1$  ( $l_1 = 2l_2$ ) и теряет скорость. Какую скорость приобретет масса  $m_2$  ( $m_2 = 4m_1$ ) после удара?



- $V_2 = V_1$
- $V_2 = 8V_1$
- $V_2 = \frac{1}{2}V_1$
- $V_2 = \frac{1}{4}V_1$

### Решение.

Для замкнутой системы суммарный момент импульса системы сохраняется. Начальный момент импульса рассматриваемой системы относительно точки «0» равен

$$L_1 = m_1 V_1 l_1.$$

После соударения масса  $m_1$  теряет скорость и конечный момент импульса определяется

$$L_2 = m_2 V_2 l_2.$$

Следовательно, из закона сохранения момента импульса имеем

$$m_2 V_2 l_2 = m_1 V_1 l_1$$

или

$$V_2 = V_1 \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2} V_1.$$

Правильным является ответ:  $V_2 = \frac{1}{2} V_1$ .

### Задание 5-3.

Человек сидит в центре вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси карусели и держит в руках длинный шест за его середину. Если он повернет шест из вертикального положения в горизонтальное, то частота вращения в конечном состоянии...

- не изменится
- уменьшится
- увеличится

### Решение.

Человек с шестом на карусели представляет собой систему, на которую не действуют моменты внешних сил. В этом случае момент импульса этой системы должен сохраняться независимо от того, что происходит внутри

системы. Момент импульса при вращении около неподвижной оси равен произведению момента инерции на угловую скорость вращения. Поэтому можем записать  $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ , где  $J_1$  — момент инерции человека с шестом в вертикальном положении,  $J_2$  — момент инерции человека с шестом в горизонтальном положении,  $\omega_{1,2}$  — соответствующие угловые скорости. Момент инерции шеста относительно оси, проходящей через его середину и перпендикулярной ему, равен  $J_2 = ml^2/12$ . Что касается  $J_1$ , то если шест тонкий, то его момент инерции  $J_1 = mr^2/2$ , где  $r$  — радиус шеста, много меньше, чем  $J_2$ . Так как

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1,$$

то угловая скорость  $\omega_2$  должна уменьшиться.

Правильным является ответ: уменьшится.

## 6.

### ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• В основе специальной теории относительности (СТО), созданной А. Эйнштейном в 1905 г., лежат два постулата:

1) не существует абсолютно неподвижных инерциальных систем отсчета (ИСО);

2) скорость света  $c$  в вакууме во всех инерциальных системах отсчета одна и та же и равна  $299\,792\,458\text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8\text{ м/с}$ .

• Непосредственным следствием второго постулата являются *преобразования Лоренца*, связывающие координаты и время в двух ИСО, движущихся равномерно и прямолинейно друг относительно друга. Пусть одна ИСО ( $K'$ ) движется относительно другой ( $K$ ) вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью  $V$

(рис. 6-1). Тогда координаты  $x, y, z$  и время  $t$  какого-то события в  $K$  связаны с координатами  $x', y', z'$  и временем  $t'$  этого же события в  $K'$  формулами

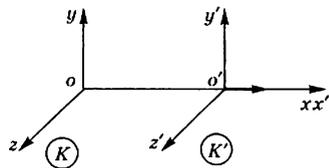


Рис. 6-1

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.1)$$

Это и есть преобразования Лоренца для случая, изображенного на рис. 6-1.

• Следствием преобразований Лоренца является релятивистское<sup>6</sup> *сокращение продольных размеров движущихся объектов*. Если, например, непо-

<sup>6</sup> Прилагательное «релятивистский» (от английского *relative* — относительный) применяют в тех случаях, когда требуется учитывать эффекты СТО. Обычно это имеет место при больших скоростях движения объектов, сравнимых со скоростью света  $c$ . При малых скоростях можно скорость света считать бесконечной и пользоваться обычными преобразованиями Галилея.

движный в  $K'$  и ориентированный вдоль оси  $X'$  стержень имеет в этой ИСО длину  $l_0$  (так называемая *собственная длина* стержня), то длина того же стержня в  $K$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (6.2)$$

Отметим, что поперечные размеры движущихся объектов не изменяются.

• Другим следствием преобразований Лоренца является *замедление хода движущихся часов* относительно неподвижных. В частности, если  $\Delta t_0$  — промежуток времени между двумя событиями, происходящими в какой-то точке ИСО  $K'$  и измеренный по часам, неподвижным в этой ИСО (*собственный промежуток времени*), то промежуток времени  $\Delta t$  между этими же событиями, измеренный по таким же часам, неподвижным в  $K$ , определяется формулой

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.3)$$

Тот факт, что  $\Delta t > \Delta t_0$ , интерпретируется как более медленный ход движущихся часов.

• Преобразования Лоренца приводят к иному, по сравнению с галилеевским ( $v = v' + V$ ), *закону сложения скоростей*. Пусть в  $K'$  объект движется со скоростью  $v'$  вдоль оси  $X'$ , а  $K'$ , в свою очередь, движется относительно  $K$  вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью  $V$ . Тогда скорость объекта в  $K$  определяется формулой

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}. \quad (6.4)$$

Из (6.4) видно, что если  $v' = c$ , то и  $v = c$ , т. е. скорость света действительно одна и та же в разных ИСО.

• *Релятивистский импульс* частицы, движущейся со скоростью  $\vec{v}$ ,

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6.5)$$

где  $m_0$  — так называемая *масса покоя* частицы.

• *Полная энергия* релятивистской частицы

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.6)$$

• Величина

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (6.7)$$

называется энергией покоя.

• *Кинетическая энергия* релятивистской частицы

$$T = E - m_0 c^2. \quad (6.8)$$

- Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы

$$\sqrt{E^2 - p^2 c^2} = m_0 c^2. \quad (6.9)$$

- Для частиц с нулевой массой покоя (фотоны)

$$E = pc. \quad (6.10)$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 6-1.

Космический корабль летит со скоростью  $V = 0,8c$  ( $c$  — скорость света в вакууме). Один из космонавтов медленно поворачивает метровый стержень из положения 1, перпендикулярного направлению движения корабля, в положение 2, параллельное этому направлению. Тогда длина этого стержня, с точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле...

- ⊙ изменится от 1,0 м в положении 1 до 0,6 м в положении 2
- изменится от 1,0 м в положении 1 до 1,67 м в положении 2
- изменится от 0,6 м в положении 1 до 1,0 м в положении 2
- равна 1,0 м при любой его ориентации

#### Решение.

Когда стержень был расположен перпендикулярно направлению движения ракеты, его длина была равна 1 м и для космонавта на ракете (стержень неподвижен), и для наблюдателя на Земле (поперечные размеры движущихся и неподвижных объектов одни и те же). Когда же стержень повернули так, что он оказался расположенным по направлению движения ракеты, его длина для наблюдателя на Земле изменилась в соответствии с (6.2). Подставив в эту формулу  $V = 0,8c$ , получаем  $l = 0,6 l_0$ . Таким образом,  $l = 0,6$  м.

Правильным является ответ: **изменится от 1,0 м в положении 1 до 0,6 м в положении 2.**

#### Задание 6-2.

Мимо вас пролетела ракета со скоростью  $0,8c$ . Вам показалось, что ее длина 60 м. Реальная длина ракеты равна...

- 36 м
- ⊙ 100 м
- 48 м
- 75 м

#### Решение.

Эта задача решается аналогично предыдущей. Только в этом случае надо найти  $l_0$ , если известна длина  $l = 60$  м и скорость  $V = 0,8c$ . Подставив эти значения в (6.2), получаем

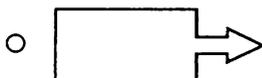
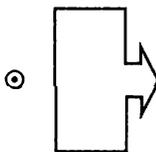
$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{60}{0,6} = 100 \text{ м.}$$

Правильным является ответ: **100 м.**

**Задание 6-3.**

На борту космического корабля нанесена эмблема в виде геометрической фигуры (см. рисунок). Из-за релятивистского сокращения дли-

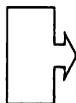
ны эта фигура изменяет свою форму. Если корабль движется в направлении, указанном на рисунке стрелкой, со скоростью, сравнимой со скоростью света, то в неподвижной системе отсчета эмблема примет форму, указанную на рисунке...



**Решение.**

Релятивистское сокращение касается только продольных размеров объекта, а поперечные размеры не изменяются.

Правильным является ответ:

**Задание 6-4.**

Ракета движется относительно земного наблюдателя со скоростью  $v = 0,6$  с. Если по часам в ракете прошло 8 месяцев, то по часам земного наблюдателя прошло...

- 8 месяцев
- 9 месяцев
- 10 месяцев
- 11 месяцев
- 1 год

**Решение.**

По часам земного наблюдателя должно пройти больше времени, чем по часам на ракете. Связь между этими временными промежутками дается формулой (6.3). Подставив в нее значения  $\Delta t_0 = 8$  месяцев,  $v = 0,6$  с, получим  $\Delta t = 10$  месяцев.

Правильным является ответ: **10 месяцев.**

## II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ (СТАТИСТИЧЕСКАЯ) ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

### 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

#### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Распределение Максвелла для проекций скорости показывает, какое относительное число хаотически движущихся молекул идеального газа имеет  $x$ -проекцию (аналогично  $y$ -проекцию,  $z$ -проекцию) скорости в пределах от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$

$$\frac{dN(v_x)}{N} = \rho(v_x)dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x, \quad (7.1)$$

где  $N$  — общее число молекул,  $m$  — масса одной молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\rho(v_x)$  — функция распределения (или плотность вероятности распределения) молекул по проекциям скорости. График функции  $\rho(v_x)$  приведен на рис. 7-1.

• Распределение Максвелла для модулей скорости показывает, какое относительное число хаотически движущихся молекул идеального газа имеет модуль скорости в пределах от  $v$  до  $v + dv$

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad (7.2)$$

где входящие в формулу величины  $N$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $T$  имеют то же значение, что и в (7.1). Функция  $f(v)$  называется функцией распределения (или плотностью вероятности распределения) молекул по модулю скорости. График этой функции приведен на рис. 7-2.

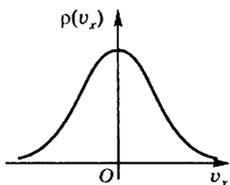


Рис. 7-1

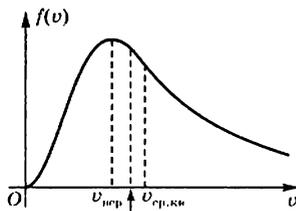


Рис. 7-2

- Площадь под кривой  $f(v)$  равна единице, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dN(v) = \frac{N}{N} = 1.$$

Поэтому при изменении температуры газа график  $f(v)$  видоизменяется таким образом, чтобы площадь под ним всегда была равна единице.

- С функцией распределения  $f(v)$  связаны три значения скорости:

а) наиболее вероятная  $v_{\text{вер}}$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (7.3)$$

соответствующая максимуму функции  $f(v)$ ,

б) средняя

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}, \quad (7.4)$$

в) среднеквадратичная

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (7.5)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — молярная масса газа. Относительное расположение этих скоростей показано на рис. 7-2.

- В некоторых задачах удобно использовать распределение Максвелла не по модулю скорости, как (7.2), а по модулю относительной скорости  $u = v/v_{\text{вер}}$

$$dN(u) = N\phi(u)du = \frac{4}{\sqrt{u}} Ne^{-u^2} u^2 du, \quad (7.6)$$

по модулю импульса  $p = mv$

$$dN(p) = N\phi(p)dp = 4\pi N \left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp \quad (7.7)$$

или по энергиям  $\varepsilon = mv^2/2$

$$dN(\varepsilon) = N\psi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (7.8)$$

- Распределение Больцмана показывает, как зависит концентрация молекул идеального газа  $n$ , находящегося в потенциальном силовом поле, от значения потенциальной энергии  $U$

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}, \quad (7.9)$$

где  $n_0$  — концентрация частиц с нулевой потенциальной энергией ( $U = 0$ ).

- В частности, в однородном поле силы тяжести  $U = mgh$

$$n = n_0 e^{-mgh/h_B T} = n_0 e^{-\mu gh/RT}, \quad (7.10)$$

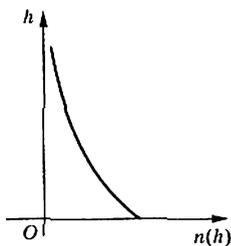


Рис. 7-3

где  $m$  — масса молекулы,  $\mu$  — молярная масса,  $h$  — высота. График функции  $n(h)$  приведен на рис. 7-3. Распределение Больцмана в данном случае отражает конкуренцию двух физических механизмов. С одной стороны, поле силы тяжести старается «прижать» все молекулы к поверхности Земли. С другой стороны, хаотическое тепловое движение стремится распределить эти молекулы равномерно по высоте.

• Барометрическая формула

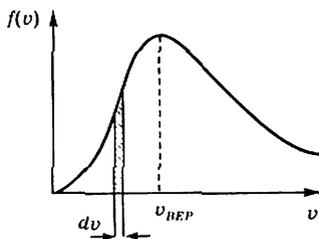
$$p(h) = p_0 e^{-\mu gh / RT} \quad (7.11)$$

показывает, как меняется с высотой давление газа  $p = nkT$  при постоянной температуре  $T$ .

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 7-1.

На рисунке представлен график функции распределения молекул



идеального газа по скоростям (распределение Максвелла), где

$$f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$$

— доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от  $v$  до  $v+dv$  в расчете на единицу этого интервала. Выберите верные утверждения:

- площадь заштрихованной полоски равна доле молекул со скоростями в интервале от  $v$  до  $v + dv$
- с ростом температуры максимум кривой смещается вправо
- с ростом температуры площадь под кривой растет

#### Решение.

Как было сказано в теоретическом введении, площадь под кривой  $f(v)$  всегда равна единице. Поэтому третий вариант ответа неверен.

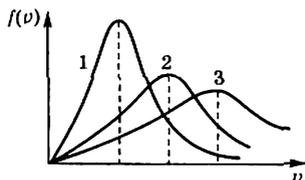
Максимум функции  $f(v)$  соответствует наиболее вероятной скорости, значение которой пропорционально квадратному корню из температуры (см. формулу (7.3)). Поэтому второй вариант ответа верен: максимум функции  $f(v)$  действительно смещается вправо при увеличении температуры.

Первый вариант ответа также верен, причем не только для малых интервалов  $dv$ . Но если ширина полоски мала, то ее площадь равна произведению  $f(v)$  на  $dv$ , а это по определению и есть относительное число молекул, имеющих модуль скорости в интервале от  $v$  до  $v + dv$ .

Правильными являются ответы : площадь заштрихованной полоски равна доле молекул со скоростями в интервале от  $v$  до  $v + dv$  и с ростом температуры максимум кривой смещается вправо.

**Задание 7-2.**

На рисунке представлены графики функций распределения молекул



- H<sub>2</sub> — 1; He — 2; N<sub>2</sub> — 3
- H<sub>2</sub> — 2; He — 1; N<sub>2</sub> — 3
- ⊙ H<sub>2</sub> — 3; He — 2; N<sub>2</sub> — 1
- H<sub>2</sub> — 3; He — 1; N<sub>2</sub> — 2
- H<sub>2</sub> — 1; He — 3; N<sub>2</sub> — 2
- H<sub>2</sub> — 2; He — 3; N<sub>2</sub> — 2

идеального газа по скоростям (распределения Максвелла) для различных газов H<sub>2</sub>, He, N<sub>2</sub> при данной температуре. Какому газу какой график соответствует?

**Решение.**

Выражение для функции распределения Максвелла  $f(v)$  имеет вид:

$$f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right).$$

Скорость  $v_{\text{вер}}$ , отвечающая максимальному значению функции распределения, называется наиболее вероятной:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

В этой точке  $f(v)$  принимает максимальное значение:

$$f(v_{\text{вер}}) = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}.$$

Следовательно, наиболее вероятная скорость для разных газов (H<sub>2</sub>, He, N<sub>2</sub>) обратно пропорциональна квадратному корню из молярной массы:

$$v_{\text{вер}}(N_2) : v_{\text{вер}}(\text{He}) : v_{\text{вер}}(H_2) = \frac{1}{\sqrt{\mu_{N_2}}} : \frac{1}{\sqrt{\mu_{\text{He}}}} : \frac{1}{\sqrt{\mu_{H_2}}} \approx 0,27 : 0,5 : 0,7.$$

Правильным является ответ: H<sub>2</sub> — 3; He — 2; N<sub>2</sub> — 1.

**Задание 7-3.**

На какой высоте над уровнем моря давление воздуха уменьшается в 2,718 раза? Температуру считать постоянной и равной 300 К. Молярная масса воздуха  $\mu = 29$  г/моль, универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/моль К.

- 100 м
- 800 м
- 8300 м
- 18 000 м

**Решение.**

Для решения этого задания надо вспомнить барометрическую формулу (7.11) и прологарифмировать ее

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{\mu gh}{RT}.$$

Значение 2,718 задано не случайно: это значение является основанием натуральных логарифмов, поэтому в левой части имеем просто единицу. Таким образом,  $h = RT/\mu g = 8,3$  км.

Правильным является ответ: **8300 м.**

**8.****ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ  
И ТЕПЛОЕМКОСТЬ ГАЗОВ****КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} pV = \frac{pV}{\gamma - 1}, \quad (8.1)$$

где  $i$  — эффективное число степеней свободы,  $\mu$  — молярная масса газа,  $\gamma = (i + 2)/i$  — показатель адиабаты.

- Теплоемкость — это величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (8.2)$$

- Теплоемкость  $C$  тела зависит от: 1) свойств тела; 2) количества вещества в нем; 3) совершаемого процесса.

- Молярная теплоемкость  $c$  — теплоемкость одного моля, удельная теплоемкость  $c_m$  — теплоемкость единицы массы. Связь между ними дается соотношением

$$\mu c = m c_m, \quad (8.3)$$

где  $m$  — масса,  $\mu$  — молярная масса.

• Молярные теплоемкости:

а) при постоянном объеме

$$c_V = \frac{i}{2}R; \quad (8.4)$$

б) при постоянном давлении

$$c_P = \frac{i+2}{2}R. \quad (8.5)$$

• Уравнение Майера:

$$c_P - c_V = R. \quad (8.6)$$

• Показатель адиабаты:

$$\frac{c_P}{c_V} = \gamma. \quad (8.7)$$

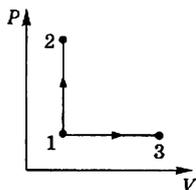
• Внутренняя энергия одного моля идеального газа:

$$U = \int c_V dT = c_V T + \text{const}. \quad (8.8)$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 8-1.

Молярные теплоемкости гелия (He) в процессах 1-2 и 1-3 равны  $c_1$  и  $c_2$  соответственно. Тогда  $\frac{c_1}{c_2}$  составляет...



- |                       |               |                                  |               |
|-----------------------|---------------|----------------------------------|---------------|
| <input type="radio"/> | $\frac{7}{5}$ | <input checked="" type="radio"/> | $\frac{3}{5}$ |
| <input type="radio"/> | $\frac{5}{7}$ | <input type="radio"/>            | $\frac{5}{3}$ |

Решение.

На графике изображены изохорический процесс 1 → 2 и изобарический процесс 1 → 3. Следовательно,  $c_1 = c_V$  и  $c_2 = c_P$ .

Для гелия (одноатомного газа с  $i = 3$ ) молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_V = \frac{i}{2}R = \frac{3}{2}R,$$

$$c_P = c_V + R = \frac{5}{2}R.$$

Таким образом, искомое отношение

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_V}{c_P} = \frac{3}{5}.$$

Правильным является ответ:  $3/5$ .

## Задание 8-2.

Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре  $T$  зависит от их структуры, что связано с возможностью различных видов движения атомов в молекуле. Средняя кинетическая энергия молекул гелия (He) равна...

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| <input type="radio"/> $\frac{5}{2}kT$            | <input type="radio"/> $\frac{7}{2}kT$ |
| <input checked="" type="radio"/> $\frac{3}{2}kT$ | <input type="radio"/> $\frac{1}{2}kT$ |

## Решение.

Внутренняя энергия идеального газа  $U$  складывается из:

- 1) энергии поступательного движения;
- 2) энергии вращательного движения;
- 3) энергии колебательного движения;

$$U = \frac{i}{2}RT,$$

где  $i$  — эффективное число степеней свободы

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}.$$

Согласно закону Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы, средняя энергия одной молекулы будет равна

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2}kT.$$

Так как гелий (He) одноатомный газ, то  $i = 3$ .

Правильным является ответ:  $\frac{3}{2}kT$ .

## 9. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ. ЦИКЛЫ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Второе начало термодинамики имеет несколько эквивалентных формулировок:

а) тепло не может самопроизвольно перетекать от холодного тела к горячему;

б) нельзя реализовать циклическую тепловую машину, работающую только за счет охлаждения теплового резервуара (т. е. без холодильника). Такая машина называется вечным двигателем второго рода;

в) нельзя достичь температуры абсолютного нуля (теорема Нернста);

г) энтропия замкнутой системы либо возрастает, либо остается постоянной:  $\Delta S \geq 0$ .

• Определение энтропии (по Клаузиусу): энтропия  $S$  является функцией состояния термодинамической системы, изменение которой при переходе системы из одного состояния в другое равно приведенному количеству теплоты, полученному (или отданному) системой:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}. \quad (9.1)$$

• Определение энтропии (по Больцману):

$$S = k \ln W, \quad (9.2)$$

где  $S$  — энтропия системы,  $W$  — термодинамическая вероятность ее состояния,  $k$  — постоянная Больцмана.

• Циклическая тепловая машина (тепловой двигатель) совершает механическую работу  $A$  за счет тепловой энергии  $\Delta Q = Q_H - Q_X$ , где  $Q_H$  — тепло, полученное от нагревателя,  $Q_X$  — тепло, переданное холодильнику.

• Коэффициент полезного действия теплового двигателя

$$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = \frac{A}{Q_H}. \quad (9.3)$$

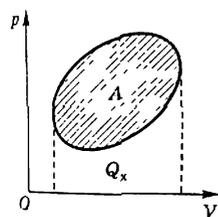


Рис. 9-1

• На диаграмме ( $p, V$ ) один цикл работы тепловой машины изображается замкнутой фигурой (рис. 9-1). При этом площадь фигуры равна работе  $A$ , а площадь под фигурой — теплу, отданному холодильнику  $Q_X$ .

• Обратимый цикл Карно (рис. 9-2) состоит из двух изотермических процессов, происходящих при температурах  $T_H$  и  $T_X$  соответственно, и двух адиабатических процессов, во время которых происходит нагревание или охлаждение рабочего тела в пределах  $T_H \leftrightarrow T_X$ .

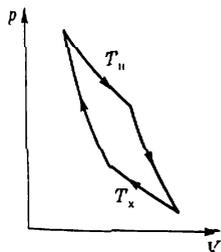


Рис. 9-2

• Цикл Карно имеет максимально возможный коэффициент полезного действия, который может быть достигнут при тех же температурах нагревателя и холодильника,

$$\eta_C = \frac{T_H - T_X}{T_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}. \quad (9.4)$$

• Обратимый цикл Карно является идеализацией. В начале и конце этого цикла энтропия одна и та же, т. е. изменения энтропии за цикл Карно не происходит. Реальные циклические машины имеют меньший коэффициент полезного действия за счет необратимости термодинамических процессов. Энтропия реальной тепловой машины за цикл увеличивается.

• Холодильные установки — это те же циклические машины, но работающие в обратной последовательности процессов.

Холодильный коэффициент

$$\eta' = \frac{Q_X}{A} = \frac{Q_X}{Q_H - Q_X}, \quad (9.5)$$

где  $Q_{\text{н}}$  — количество теплоты, переданное нагревателю,  $Q_{\text{х}}$  — количество теплоты, забранное у холодильника.

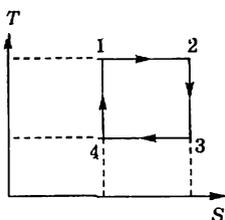
• КПД холодильной установки:

$$\eta_{\text{хол}} = \frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{х}} + A} = \frac{\eta'}{1 + \eta'}. \quad (9.6)$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 9-1.

На рисунке изображен цикл Карно в координатах  $(T, S)$ , где  $S$  — энтропия. Изотермическое расширение происходит на этапе...



- 3 → 4
- 2 → 3
- 1 → 2
- 4 → 1

#### Решение.

В условии задачи цикл Карно изображен в координатах  $(T, S)$ :

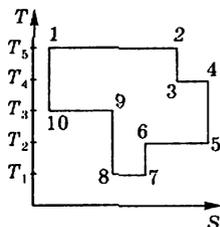
- (1 → 2) — изотермическое расширение;
- (2 → 3) — изоэнтропическое (адиабатическое) расширение;
- (3 → 4) — изотермическое сжатие при температуре холодильника;
- (4 → 1) — изоэнтропическое (адиабатическое) сжатие.

Таким образом, изотермическое расширение происходит на этапе (1 → 2).

Правильным является ответ: 1 → 2.

#### Задание 9-2.

На рисунке представлен цикл тепловой машины в координатах  $T, S$ , где  $T$  — термодинамическая температура,  $S$  — энтропия<sup>7</sup>. Укажите нагреватели и холодильники с соответствующими температурами:



- нагреватели —  $T_3, T_5$ ; холодильники —  $T_1, T_2, T_4$
- нагреватели —  $T_4, T_5$ ; холодильники —  $T_1, T_2, T_3$
- нагреватели —  $T_2, T_4, T_5$ ; холодильники —  $T_1, T_3$
- нагреватели —  $T_3, T_4, T_5$ ; холодильники —  $T_1, T_2$

<sup>7</sup> Предполагается, что имеет место прямой цикл (по часовой стрелке).

Решение.

Диаграмма цикла тепловой машины в координатах температура и энтропия ( $T, S$ ) характеризуется следующими процессами:

**Изотерма 1 → 2.** В контакте с нагревателем (при температуре  $T_5$ ) происходит изотермическое расширение.

**Адиабата 2 → 3.** Система отсоединяется от нагревателя и не обменивается теплом с внешней средой  $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$ . Процесс 2 → 3 является изоэнтропическим.

**Изотерма 3 → 4.** Система в контакте с нагревателем при температуре  $T_4$  изотермически расширяется.

**Адиабата 4 → 5.** Система не обменивается теплом с внешней средой  $Q_{4 \rightarrow 5} = 0$  ( $S_4 = S_5$ ). Процесс 4 → 5 является изоэнтропическим, температура системы падает до значения  $T_2$  (холодильник).

**Изотерма 5 → 6.** На этом участке система находится в контакте с холодильником  $T_2$  и происходит изотермическое сжатие.

**Адиабата 6 → 7.** Система теплоизолирована, не обменивается теплом с внешней средой  $Q_{6 \rightarrow 7} = 0$ . Процесс 6 → 7 является изоэнтропическим ( $S_6 = S_7$ ), температура системы падает до значения  $T_1$  (холодильник).

**Изотерма 7 → 8.** Система подключается к холодильнику с температурой  $T_1$  и изотермически сжимается.

**Адиабата 8 → 9.** Здесь система отсоединяется от холодильника  $T_1$ , не обменивается теплом с внешней средой  $Q_{8 \rightarrow 9} = 0$ . Процесс 8 → 9 является изоэнтропическим сжатием до состояния температуры  $T_3$ .

**Изотерма 9 → 10.** На этом участке система находится в контакте с холодильником  $T_3$  и происходит изотермическое сжатие.

**Адиабата 10 → 1.** Система отключается от внешней среды и продолжает сжиматься изоэнтропически, что приводит к повышению ее температуры до  $T_5$ . Точки 10 и 1 лежат на адиабате. В конечном итоге система возвращается в первоначальное состояние.

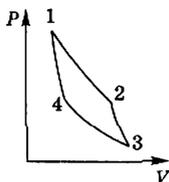
Следовательно, рассматриваемый в задаче цикл тепловой машины характеризуется нагревателями с температурами  $T_5, T_4$  и холодильниками с температурами  $T_2, T_3, T_1$ .

Правильным является ответ: **нагреватели —  $T_4, T_5$ ; холодильники —  $T_1, T_2, T_3$ .**

Задание 9-3.

Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно (две изотермы 1-2 и 3-4 и две адиабаты 2-3 и 4-1). За один цикл работы тепловой машины энтропия рабочего тела...

- не изменится
- возрастет
- уменьшится



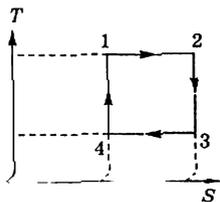
**Решение.**

За один цикл работы идеальной тепловой машины энтропия не изменяется (см. краткие теоретические сведения выше).

Правильным является ответ: **не изменится.**

**Задание 9-4.**

На рисунке изображен цикл Карно в координатах  $(T, S)$ , где  $S$  — энтропия. Теплота подводится к системе на участке...



- 4-1
- ⊙ 1-2
- 2-3
- 3-4

**Решение.**

Теплота подводится на изотермическом участке с максимальной температурой, т. е. на участке 1-2.

Правильным является ответ: **1-2.**

## 10.

### ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. РАБОТА ПРИ ИЗОПРОЦЕССАХ

#### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Первое начало термодинамики связывает механическую работу  $A$ , совершенную термодинамической системой (например, идеальным газом), изменение внутренней энергии  $\Delta U$  (фактически изменение температуры) и сообщенное системе тепло  $\Delta Q$ :

$$\Delta Q = \Delta U + A. \quad (10.1)$$

Этот закон отражает сохранение энергии в термодинамических процессах.

• Изменение внутренней энергии полностью определяется изменением температуры (см. выше тему № 8)

$$\Delta U = \nu c_V (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}, \quad (10.2)$$

где  $\nu = \frac{m}{\mu}$  — число молей,  $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$  — постоянная адиабаты,  $c_p$ ,  $c_V$  — молярные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

• Механическая работа во время квазистатического процесса

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (10.3)$$

- Сообщенное системе тепло связано с теплоемкостью соотношением

$$\Delta Q = \nu c(T_2 - T_1), \quad (10.4)$$

где  $c$  — молярная теплоемкость, зависящая от того, как протекает процесс.

- Для анализа изопроцессов необходимо, помимо первого начала термодинамики, знать уравнение состояния. Для идеального газа таким уравнением является уравнение Клапейрона–Менделеева

$$pV = \nu RT. \quad (10.5)$$

- Изохорический процесс: объем  $V = \text{const}$ .

$$A = 0;$$

$$\Delta Q = \Delta U = \frac{V(p_2 - p_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}. \quad (10.6)$$

- Изобарический процесс: давление  $p = \text{const}$ .

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{\gamma R(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}. \quad (10.7)$$

$$\Delta U = \frac{p(V_2 - V_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}. \quad (10.8)$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p(V_2 - V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (10.9)$$

- Изотермический процесс  $T = \text{const}$ . Работа, совершаемая газом

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (10.10)$$

Изменение внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Количество теплоты, переданное газу  $\Delta Q = A$ .

- Адиабатический (изоэнтропический) процесс  $\Delta Q = 0$ . Уравнение Пуассона для адиабатического процесса:

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \text{или} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (10.11)$$

Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (10.12)$$

Изменение внутренней энергии

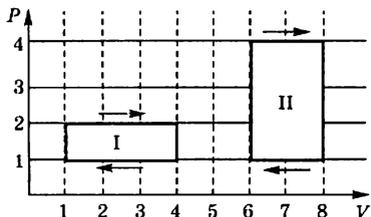
$$U_{12} = -A_{1 \rightarrow 2}. \quad (10.13)$$

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

## Задание 10-1.

На  $(P, V)$ -диаграмме изображены два циклических процесса. Отношение работ  $A_I/A_{II}$ , совершенных в этих циклах, равно...

- 1/2  
 2  
 -2  
 1/2



## Решение.

Работа при циклическом процессе на диаграмме  $(P, V)$  равна площади, ограниченной отдельными процессами цикла. Этого достаточно, чтобы определить отношение работ приведенных в задании циклов:  $A_I/A_{II} = 1/2$ .

Правильным является ответ: 1/2.

## Задание 10-2.

Два грамма гелия, расширяясь адиабатически, совершили работу  $\Delta A = 249,3$  Дж. В этом процессе изменение температуры составило...

- 10 К  
 20 К  
 30 К  
 40 К  
 50 К

## Решение.

В адиабатическом процессе работа равна изменению внутренней энергии со знаком минус (10.13). С другой стороны, изменение внутренней энергии всегда связано с изменением температуры  $\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{iR}{2} \Delta T$ . Таким образом,

$$\Delta T = \frac{249,3 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 8,31} = 40 \text{ (К)}.$$

Правильным является ответ: 40 К.

### III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

#### 11. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

##### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Закон Кулона:

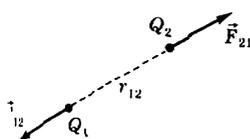


Рис. 11-1

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (11.1)$$

где  $\vec{F}_{21}$  — сила, которая действует на второй точечный электрический заряд  $Q_2$  со стороны первого заряда  $Q_1$ ;  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ,  $\vec{r}_{12}$  — вектор, соединяющий заряды и направленный от  $Q_1$  к  $Q_2$ ,  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  — расстояние между зарядами,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная (рис. 11-1).

• Электрический заряд любого тела кратен элементарному заряду  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл (квантование электрического заряда)

$$Q = \pm Ne, \quad (11.2)$$

где  $N$  — целое число.

• Алгебраическая сумма зарядов изолированной системы постоянна (закон сохранения электрического заряда)

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \text{const.} \quad (11.3)$$

• Напряженность электрического поля является его силовой характеристикой, которая определяет величину и направление силы, действующей на единичный положительный точечный заряд  $Q_{пр}$ , помещенный в данную точку пространства:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_{пр}}, \quad (11.4)$$

• Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ , равна

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}, \quad (11.5)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд  $Q$ , в точку наблюдения.

• Принцип суперпозиции: напряженность электрического поля системы зарядов  $\vec{E}$  равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым отдельным зарядом системы  $\vec{E}_i$ :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (11.6)$$

• Теорема Остроградского–Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через замкнутую поверхность  $S$  произвольной формы численно равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i. \quad (11.7)$$

• Вектор электрического смещения (электрическая индукция)  $\vec{D}$  в бесконечном однородном диэлектрике определяется соотношением  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ .

• Напряженность электрического поля, создаваемого заряженной металлической сферой радиуса  $R$  на расстоянии  $r$  от ее центра:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r \geq R, \end{cases} \quad (11.8)$$

где  $Q$  — заряд сферы.

• Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным шаром радиуса  $R$  на расстоянии  $r$  от его центра:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, & 0 \leq r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r \geq R, \end{cases} \quad (11.9)$$

где  $\rho = 3Q/4\pi R^3$  — объемная плотность заряда внутри шара,  $Q$  — заряд шара.

• Напряженность электрического поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью на расстоянии  $r$  от ее оси:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\tau}{r}, \quad (11.10)$$

где  $\tau$  — линейная плотность заряда (заряд единицы длины нити).

- Напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}, \quad (11.11)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда (заряд единицы поверхности).

- Напряженность электрического поля между параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными пластинами с одинаковой по абсолютной величине поверхностной плотностью  $\sigma$  заряда:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (11.12)$$

В частности, эта формула справедлива для электрического поля в средней части плоского конденсатора при условии, что расстояние между пластинами много меньше линейных размеров самих пластин.

- Потенциалом электрического поля в данной точке пространства называется физическая величина, равная отношению потенциальной энергии, которую приобретает положительный заряд  $Q_{\text{пр}}$ , если его перенести из этой точки в бесконечность, к величине заряда:

$$\varphi = \frac{W}{Q_{\text{пр}}}. \quad (11.13)$$

- Потенциал электрического поля на расстоянии  $r$  от точечного заряда  $Q$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \quad (11.14)$$

- Потенциал равномерно заряженной сферы радиусом  $R$ , несущей полный заряд  $Q$ :

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}, & 0 \leq r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (11.15)$$

- Потенциал шара, равномерно заряженного по объему:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & 0 \leq r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (11.16)$$

- Принцип суперпозиции: потенциал  $\varphi$  поля, создаваемого системой зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , равен сумме потенциалов  $\varphi_i$  полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности,

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i. \quad (11.17)$$

- Энергия системы точечных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_i$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i, \quad (11.18)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал поля в точке нахождения заряда  $Q_i$ , создаваемый всеми остальными  $N - 1$  зарядами (кроме самого  $Q_i$ ).

- Связь потенциала с напряженностью поля

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (11.19)$$

Эти три соотношения для компонентов  $\vec{E}$  можно записать в векторной форме

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi. \quad (11.20)$$

Для сферически симметричного поля, когда  $\varphi$  зависит только от модуля  $r$  радиус-вектора  $\vec{r}$ , эта формула упрощается

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{r}. \quad (11.21)$$

Для однородного поля, вектор напряженности которого имеет в любой точке одну и ту же величину и направление, формула для напряженности еще более упрощается

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}, \quad (11.22)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — потенциалы двух точек, а  $d$  — расстояние между эквипотенциальными плоскостями, проходящими через эти точки.

- Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда  $Q$  из точки с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$ , не зависит от формы пути и определяется лишь начальным и конечным положением заряда

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{или} \quad A = \int_1^2 Q \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (11.23)$$

- Условие потенциальности электрического поля: циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю

$$\oint (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0. \quad (11.24)$$

- Система двух одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку зарядов  $Q$  и  $-Q$  называется диполем. Диполь характеризуется электрическим дипольным моментом  $\vec{p} = |Q| \vec{l}$ , где  $\vec{l}$  — вектор, проведенный от отрицательного к положительному заряду (рис. 11-2). Дипольный момент является важной характеристикой электрического поля диполя на больших расстояниях от него.

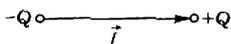


Рис. 11-2

- Электрический дипольный момент можно ввести не только для двух зарядов, но и для системы  $N$  зарядов

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N Q_i \vec{r}_i, \quad (11.25)$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор заряда  $Q_i$ .

- Механический момент, действующий на диполь в электрическом поле:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (11.26)$$

- Потенциальная энергия диполя в электрическом поле

$$W = -(\vec{p} \vec{E}) = -pE \cos \alpha, \quad (11.27)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ .

- Электрическая емкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}, \quad (11.28)$$

где  $Q$  — заряд, сообщенный проводнику, а  $\varphi$  — обусловленный этим зарядом потенциал проводника.

- Емкость уединенной проводящей сферы радиусом  $R$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (11.29)$$

- Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}, \quad (11.30)$$

где  $S$  — площадь пластин (обкладок),  $d$  — расстояние между обкладками.

- Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (11.31)$$

где  $R_2, R_1$  — радиусы внешней и внутренней сфер соответственно.

- Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon \frac{l}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (11.32)$$

где  $l$  — длина внешнего и внутреннего цилиндров,  $R_2, R_1$  — их радиусы. Предполагается, что  $l \gg R_2$ .

- Емкость конденсаторов, соединенных а) последовательно

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad (11.33)$$

- б) параллельно

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (11.34)$$

- Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \quad (11.35)$$

где  $U$  — разность потенциалов (напряжение) на его обкладках.

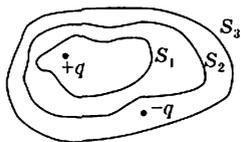
- Энергия электрического поля, приходящаяся на единицу объема (плотность энергии):

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (11.36)$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 11-1.

Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Поток вектора напряженности электростатического поля отличен от нуля через...



- $S_3$
- $S_1$
- $S_2$

#### Решение.

В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса (11.7), поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через замкнутую поверхность  $S$  произвольной формы численно равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ ,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i.$$

Таким образом, потоки вектора напряженности электростатического поля через поверхности  $S_1$  и  $S_2$  отличны от нуля и пропорциональны величине заряда  $+q$ . Поток вектора напряженности электростатического поля через поверхность  $S_3$  равен нулю.

Правильными являются ответы:  $S_1$  и  $S_2$ .

**Задание 11-2.**

Точечный заряд  $+q$  находится в центре сферической поверхности. Если увеличить радиус сферической поверхности, то поток вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  через поверхность сферы...

- уменьшится  
 увеличится  
 не изменится

**Решение.**

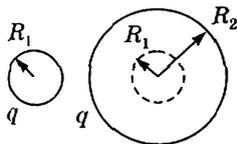
Поток вектора напряженности электростатического поля не зависит от размеров и формы замкнутой поверхности, а определяется только величиной электрического заряда, находящегося внутри этой поверхности.

Правильным является ответ: **не изменится.**

**Задание 11-3.**

Электрический заряд  $q$  распределен равномерно внутри сферы радиуса  $R_1$ . Радиус сферы увеличили до  $R_2 = 2R_1$ , и заряд равномерно распределился по новому объему. Поток

- уменьшится в 4 раза  
 не изменится  
 уменьшится в 8 раз  
 уменьшится в 2 раза



вектора напряженности электрического поля сквозь сферическую поверхность радиуса  $R_1$ ...

**Решение.**

Допустим, что первоначально заряд внутри поверхности радиуса  $R_1$  был равен  $Q$ . Этот же заряд  $Q$  в дальнейшем равномерно распределился внутри сферы большего радиуса  $R_2$ . Значит, внутри сферы радиуса  $R_1$ , составляющей теперь только часть сферы радиуса  $R_2$ , находится меньший заряд  $Q_1 < Q$ , причем так как объем сферы радиуса  $R_2$  увеличился в четыре раза, а полный заряд  $Q$  остался прежним, то заряд  $Q_1$  внутри сферы радиуса  $R_1$  уменьшился в четыре раза.

Но поток вектора напряженности электростатического поля не зависит от размеров и формы замкнутой поверхности, а определяется только величиной электрического заряда, находящегося внутри этой поверхности. Значит, поток через сферическую поверхность радиуса  $R_1$  стал меньше в четыре раза, чем был в начале.

Правильным является ответ: **уменьшится в 4 раза.**

## Задание 11-4.

Точечный заряд  $+q$  находится в центре сферической поверхности. Если добавить заряд  $+q$  за пределами сферы, то поток вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  через поверхность сферы...

- не изменится
- уменьшится
- увеличится

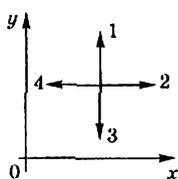
Решение.

Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность определяется алгебраической суммой электрических зарядов, находящихся **внутри** поверхности. Заряды, находящиеся вне этой поверхности, не дают никакого вклада в поток.

Правильным является ответ: **не изменится**.

## Задание 11-5.

В некоторой области пространства создано электростатическое поле, потенциал которого описывается функцией  $\varphi = 3x^2$ . Вектор напряженности электрического поля в точке пространства, показанной на рисунке, будет иметь направление...



... направление...

- 2
- 4
- 1
- 3

Решение.

Так как потенциал электростатического поля зависит только от координаты  $x$ , то для вычисления напряженности поля можно воспользоваться первой из трех формул (11.19)

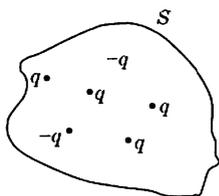
$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -6x.$$

В векторной форме  $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{i}$ , где  $\vec{i}$  — единичный вектор вдоль оси  $x$ . Значит, вектор напряженности поля направлен против оси  $x$ .

Правильным является ответ: **4**.

## Задание 11-6.

Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность  $S$  равен...



- $\frac{4q}{\epsilon_0}$
- $\frac{6q}{\epsilon_0}$
- 0
- $\frac{2q}{\epsilon_0}$

Решение.

В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса (11.7), поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через замкнутую поверхность  $S$  произвольной формы численно равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ ,

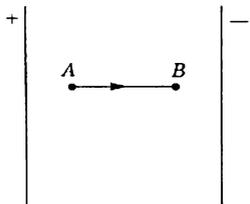
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i.$$

В данном случае суммарный электрический заряд внутри замкнутой поверхности равен  $2q$ .

Правильным является ответ:  $2q/\epsilon_0$ .

### Задание 11-7.

В электрическом поле плоского конденсатора перемещается заряд  $+q$  в направлении, указанном стрелкой. Тогда работа сил поля на участке  $AB$ ...



- отрицательна  
 равна нулю  
 положительна

Решение.

В соответствии с формулой (11.23), работа сил поля определяется выражением  $A = \int_1^2 q\vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Напряженность поля направлена от «плюса» к «минусу», поэтому положительный заряд  $+q$  перемещается вдоль поля. При этом совершается положительная работа.

Правильным является ответ: **положительна**.

### Задание 11-8.

На рисунке показаны эквипотенциальные линии системы зарядов и значения потенциала на них. Вектор напряженности электрического поля в точке  $A$  ориентирован в направлении...



- 3  
 2  
 1  
 4

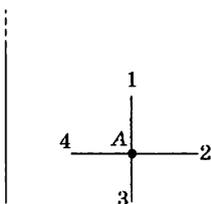
Решение.

Напряженность электрического поля равна взятому с обратным знаком градиенту потенциала поля (11.20)  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi$ . Знак «минус» в выражении для напряженности указывает на то, что вектор напряженности поля  $\vec{E}$  всегда направлен в сторону **убывания** потенциала. Вдоль эквипотенциальной линии потенциал вообще не изменяется (по определению), поэтому во всех точках этой линии напряженность может быть направлена только перпендикулярно этой линии. Значит, варианты 2 и 4 не подходят в качестве ответа. Во всех точках пространства слева от нулевой эквипотенциальной линии потенциал меньше, чем справа. Поэтому напряженность электростатического поля должна быть направлена справа налево, т. е. по линии 1.

Правильным является ответ: 1.

### Задание 11-9.

Поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$ . Укажите направление вектора градиента потенциала в точке  $A$ .



- А-3
- А-4
- А-2
- А-1

Решение.

Бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$  создает в пространстве однородное электрическое поле с напряженностью

$$E_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

направленной от плоскости (см. рис.).

Напряженность электрического поля равна взятому с обратным знаком градиенту потенциала поля. Следовательно, вектор градиента потенциала в точке  $A$  направлен к плоскости по направлению «4».

Правильным является ответ: А-4.



### Задание 11-10.

Точечный заряд  $Q = 531$  нКл помещен в центре куба с длиной ребра 10 см.

Поток вектора напряженности электрического поля через одну грань куба равен...

- 1 Нм<sup>2</sup>/Кл
- 10 кВ м
- 5,31 В м
- 8,85 Нм<sup>2</sup>/Кл
- 11,3 Нм<sup>2</sup>/Кл

Решение.

Поток вектора напряженности электростатического поля не зависит от формы замкнутой поверхности и определяется только зарядом, находящимся внутри этой поверхности (деленным на  $\epsilon_0$ ). Из соображений симметрии ясно, что поток через одну грань куба в шесть раз меньше, чем поток через всю поверхность куба. Поэтому искомый поток равен

$$\frac{Q}{6\epsilon_0} = \frac{531 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 10\,000 \text{ (В} \cdot \text{м)}.$$

Правильным является ответ: **10 кВ · м**.

## 12. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Электрический ток — это упорядоченное движение электрических зарядов.

• Сила тока  $I$  определяется зарядом, протекающим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (12.1)$$

• Плотность тока — вектор, численно равный заряду, проходящему через элементарную площадку поперечного сечения проводника в единицу времени, и направленный в сторону протекания тока:

$$\vec{j} = \frac{dq}{dt dS} \vec{n}. \quad (12.2)$$

• Связи силы и плотности тока

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (12.3)$$

• Закон Ома для участка однородной (т. е. не содержащей электродвижущих сил) цепи

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}, \quad (12.4)$$

где  $\Phi_1 - \Phi_2$  — разность потенциалов на концах участка,  $R$  — его сопротивление.

• Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (12.5)$$

где  $\sigma$  — удельная электропроводность,  $\sigma = 1/\rho$ ,  $\rho$  — удельное сопротивление.

• Закон Ома для участка неоднородной (т. е. содержащей электродвижущие силы) цепи:

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \Sigma E}{\Sigma R}, \quad (12.6)$$

где  $\Sigma E$  — сумма всех ЭДС,  $\Sigma R$  — сумма всех сопротивлений участка.

- Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\Sigma E}{R_{\text{внеш}} + R_{\text{внутр}}}. \quad (12.7)$$

- Правила Кирхгофа для разветвленных цепей:

1) алгебраическая сумма всех токов, сходящихся в любом узле, равна нулю

$$\Sigma I = 0; \quad (12.8)$$

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления соответствующих участков равна алгебраической сумме всех ЭДС, действующих в контуре:

$$\Sigma IR = \Sigma E. \quad (12.9)$$

- Последовательное соединение проводников

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (12.10)$$

- Параллельное соединение проводников

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (12.11)$$

- Закон Джоуля–Ленца:

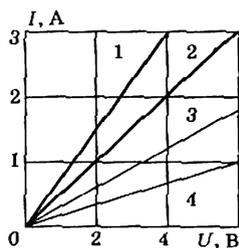
$$Q = I^2 R t, \quad (12.12)$$

где  $Q$  — количество теплоты, выделенное на участке цепи сопротивлением  $R$  в течение времени  $t$ .

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 12-1.

Через лампу, подключенную к источнику тока с ЭДС 8 В и внутренним сопротивлением 0,5 Ом протекает ток 2 А. Зависимость тока от приложенного к лампе напряжения показана на графике...



- 4
- 3
- 1
- 2

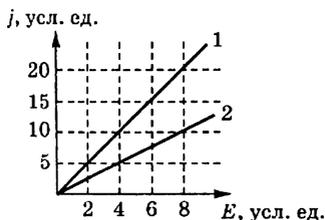
Решение.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, воспользуемся законом Ома для замкнутой цепи (12.7)  $I = \frac{U}{R_{\text{внеш}} + R_{\text{внутр}}}$ . Подставив данные из условия задания, получим  $R_{\text{внеш}} = \frac{8}{2} - 0,5 = 3,5$  (Ом). Значит, зависимость тока  $I$  через лампу от приложенного к ней напряжения  $U$  определяется формулой  $U = 3,5I$ , которой соответствует прямая 3 на приведенном графике.

Правильным является ответ: 3.

### Задание 12-2.

На рисунке представлена зависимость плотности тока  $j$ , протекающего в проводниках 1 и 2, от напряженности электрического поля  $E$ . Отношение удельных проводимостей  $\sigma_1/\sigma_2$  этих элементов равно...



- 1/2
- 2
- 1/4
- 4

Решение.

В соответствии с законом Ома в дифференциальной форме (12.5)  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , угол наклона зависимости  $j(E)$  тем больше, чем больше удельная электропроводность  $\sigma$ . Исходя из зависимостей, приведенных на графике,  $\sigma_1$  в два раза больше, чем  $\sigma_2$ .

Правильным является ответ: 2.

### Задание 12-3.

Сила тока за 10 с равномерно возрастает от 1 А до 3 А. За это время через поперечное сечение проводника переносится заряд, равный...

- 40 Кл
- 20 Кл
- 10 Кл
- 30 Кл

Решение.

Сила тока равна скорости переноса заряда через поперечное сечение проводника (12.1). Зависимость силы тока от времени описывается выражением  $I = I_0 + kt$ , где  $I_0 = 1$  А,  $k = 0,2$  А/с. Поэтому

$$Q = \int_0^{10} (I_0 + kt) dt = \left( I_0 t + \frac{kt^2}{2} \right) \Big|_0^{10} = 10 + 10 = 20 \text{ (Кл)}.$$

Правильным является ответ: 20 Кл.

**Задание 12-4.**

ЭДС батареи  $E = 12$  В. Наибольшая сила тока, которую может выделять батарея,  $I_{\text{макс}} = 5$  А. Какая наибольшая мощность  $P_{\text{макс}}$  может выделиться на подключенном к батарее резисторе с переменным сопротивлением?

- 10 Вт
- ◎ 15 Вт
- 30 Вт
- 60 Вт

**Решение.**

Наибольшая сила тока в цепи с такой батареей выделяется, когда клеммы батареи замкнуты накоротко, т. е.  $R_{\text{внеш}} = 0$ , а закон Ома для полной цепи (12.7) имеет вид  $I = U/R_{\text{внутр}}$ . Таким образом, мы легко определяем внутреннее сопротивление батареи  $R_{\text{внутр}} = E/I_{\text{макс}} = 2,4$  Ома. Вернемся снова к формуле (12.7) и определим мощность, которая выделится на сопротивлении  $R_{\text{внеш}}$

$$P = I^2 R_{\text{внеш}} = \frac{E^2 R_{\text{внеш}}}{(R_{\text{внеш}} + R_{\text{внутр}})^2}.$$

Остается выяснить, при каком сопротивлении  $R_{\text{внеш}}$  эта мощность максимальна. Для этого продифференцируем мощность  $P$  по сопротивлению  $R_{\text{внеш}}$  и приравняем полученную производную к нулю:

$$\frac{dP}{dR_{\text{внеш}}} = E^2 \left( \frac{1}{(R_{\text{внеш}} + R_{\text{внутр}})^2} - \frac{2R_{\text{внеш}}}{(R_{\text{внеш}} + R_{\text{внутр}})^3} \right) = 0.$$

Легко видеть, что это равенство удовлетворяется при  $R_{\text{внеш}} = R_{\text{внутр}}$ . Значит, максимальная мощность, которая может выделиться на переменном резисторе, равна  $E I_{\text{макс}}/4 = 15$  Вт.

Правильным является ответ: 15 Вт.

## 13. МАГНИТОСТАТИКА

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Заряд  $Q$ , движущийся в вакууме со скоростью  $\vec{v}$ , создает магнитное поле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q [\vec{v} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (13.1)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная,  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от заряда в точку наблюдения (рис. 13-1). Здесь и далее квадратные скобки означают векторное произведение, так что направление  $\vec{B}$  определяется правилом буравчика: вектор  $\vec{B}$  ортогонален плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , и если вращать буравчик так, что его ручка поворачивается от первого вектора ко второму, то направление движения буравчика покажет направление  $\vec{B}$ . Заметим, что формула (13.1) верна для медленно движущихся зарядов, когда  $v \ll c$ .

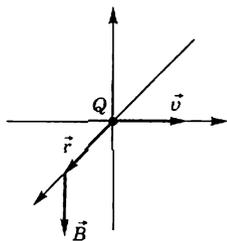


Рис. 13-1

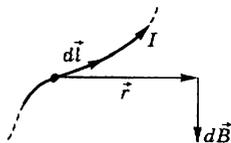


Рис. 13-2

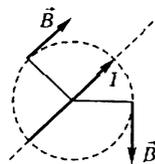


Рис. 13-3

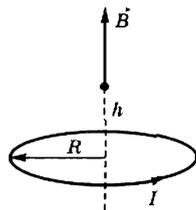


Рис. 13-4

• Закон Био–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (13.2)$$

Этот закон определяет магнитную индукцию  $d\vec{B}$  поля, создаваемого постоянным электрическим током  $I$ , текущим по элементу  $d\vec{l}$  проводника (рис. 13-2). Здесь  $\mu$  — магнитная проницаемость среды (в вакууме  $\mu = 1$ ),  $d\vec{l}$  — вектор, равный по модулю длине данного элемента проводника и совпадающий по направлению с током в нем,  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке наблюдения.

В соответствии с принципом суперпозиции, интегрирование вклада от всех элементов проводника позволяет найти магнитную индукцию, создаваемую током в проводнике любой формы.

• Магнитное поле прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (13.3)$$

где  $r$  — расстояние от оси проводника. Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  направлен по касательной к окружностям, проведенным в плоскости, ортогональной прямолинейному проводнику, так что направления силовых линий образуют с направлением тока правовинтовую систему (рис. 13-3).

• Магнитное поле на оси кругового тока радиусом  $R$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{(1 + h^2/R^2)^{3/2}}, \quad (13.4)$$

где  $h$  — расстояние от точки наблюдения до центра витка с током (рис. 13-4). В частности, для поля в центре витка ( $h = 0$ )

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (13.5)$$

• Соленоидом называется длинная цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа витков провода, образующих винтовую линию. Магнитная индукция поля, создаваемого соленоидом в средней его части:

$$B = \mu_0 \mu_n n I, \quad (13.6)$$

где  $n$  — число витков на единицу длины соленоида,  $I$  — сила тока в его обмотке,  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества внутри соленоида.

• Принцип суперпозиции магнитных полей

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (13.7)$$

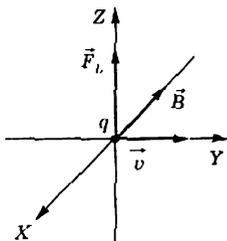


Рис. 13-5

• Сила  $\vec{F}_L$ , с которой магнитное поле  $\vec{B}$  действует на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  заряд  $q$  (сила Лоренца), равна

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (13.8)$$

Направление силы Лоренца определяется по правилу буравчика (рис. 13-5).

• Закон Ампера: сила  $d\vec{F}_A$ , действующая на элемент  $d\vec{l}$  проводника с током  $I$  в магнитном поле  $\vec{B}$ , равна

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (13.9)$$

Направление силы Ампера определяется правилом буравчика.

• Сила взаимодействия двух прямых бесконечно длинных параллельных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга, рассчитанная на единицу длины проводников, определяется выражением

$$F_{12} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l. \quad (13.10)$$

Если токи текут в одну сторону, то проводники притягиваются, если направления токов противоположны, то проводники отталкиваются.

• Магнитный момент контура с током

$$\vec{p}_m = \vec{n}IS, \quad (13.11)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор, ортогональный плоскости контура и направленный по правилу буравчика,  $S$  — площадь контура,  $I$  — сила тока в нем.

• Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]. \quad (13.12)$$

• Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле

$$W = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = -p_m B \cos \alpha, \quad (13.13)$$

где  $\alpha$  — угол между  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ . В устойчивом состоянии виток с током ориентирован так, чтобы его магнитный момент был параллелен магнитному полю.

• Поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  (магнитный поток) через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен нулю

$$\Phi_B = \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0. \quad (13.14)$$

Это связано с отсутствием в природе магнитных зарядов (магнитных монополей).

• Закон полного тока (теорема о циркуляции): циркуляция вектора  $\vec{B}$  вдоль произвольного замкнутого контура, охватывающего токи  $I_i (i = 1, \dots, n)$ , определяется соотношением

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu \sum_{i=1}^n I_i. \quad (13.15)$$

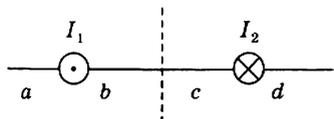
Сумма токов в правой части понимается алгебраически: токи, входящие в плоскость контура с разных сторон, имеют разные знаки.

Данное соотношение является математической формулировкой того факта, что магнитное поле имеет вихревой характер: оно создается токами (движущимися электрическими зарядами), так что силовые линии охватывают эти токи.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 13-1.

На рисунке изображены сечения двух параллельных прямоугольных длинных проводников с противоположно направленными токами, причем  $I_1 = 2I_2$ . Индукция  $\vec{B}$  результирующего магнитного поля равна нулю в некоторой точке интервала...



- c
- d
- b
- a

Решение.

Индукция магнитного поля, создаваемого током, текущим по тонкому прямолинейному проводу бесконечной длины, согласно закону Био-Савара-Лапласа, равна

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

где  $r$  — расстояние от провода, а направление индукции  $\vec{B}$  определяется правилом правого винта. Линии индукции магнитного поля прямого тока представляют собой систему концентрических окружностей, охватывающих провод.

Индукция результирующего магнитного поля определяется векторной суммой (принцип суперпозиции) магнитных полей, создаваемых отдельными проводниками.

В точках интервалов  $b$  и  $c$  магнитные поля, создаваемые токами  $I_1$  и  $I_2$ , направлены вверх и не могут дать нулевую индукцию результирующего магнитного поля. В точках интервалов  $a$  и  $d$  магнитные поля, создаваемые токами  $I_1$  и  $I_2$ , направлены в противоположные стороны.

В интервале  $a$  индукция результирующего поля:

$$B_{\text{рез}} = -B_1(r_1) + B_2(r_2) = -\mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} + \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2} = -\mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} \left(1 - \frac{r_1}{2r_2}\right),$$

где  $r_1$  — расстояние от какой-то точки интервала  $a$  до первого проводника,  $r_2$  — расстояние от этой же точки до второго проводника.

Так как  $r_1 < r_2$ , то фигурная скобка в нуль не обращается. Поэтому в любой точке интервала  $a$  (левее первого проводника) результирующая индукция магнитного поля нигде не равна нулю.

В точках интервала  $d$  индукция результирующего магнитного поля может быть записана в виде

$$B_{\text{рез}} = B_1(r_1) - B_2(r_2) = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} - \frac{I_2}{2\pi r_2} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} \left(1 - \frac{r_1}{2r_2}\right),$$

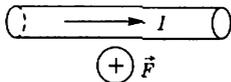
где  $r_1$  — расстояние от какой-то точки интервала  $d$  до первого проводника,  $r_2$  — расстояние от этой же точки до второго проводника.

Выбирая  $r_1 = 2r_2$ , мы получаем нулевую результирующую индукцию магнитного поля.

Правильным является ответ:  $d$ .

### Задание 13-2.

В однородном магнитном поле на горизонтальный проводник с током, направленным вправо, действует сила Ампера, направленная перпендикулярно плоскости рисунка от наблюдателя. При этом линии магнитной индукции поля направлены...



- вправо
- вверх
- влево
- вниз

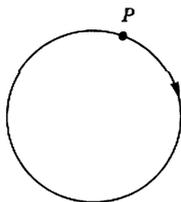
Решение.

Направление силы Ампера  $\vec{F}_A$ , в соответствии с формулой (13.9), определяется правилом буравчика: если вектор, определяющий направление тока в проводнике, поворачивается к вектору магнитной индукции по часовой стрелке, то сила направлена от наблюдателя. Таким образом, вектор магнитной индукции направлен вниз.

Правильным является ответ: **вниз**.

**Задание 13-3.**

Траектория движения протона в однородном магнитном поле представляет собой окружность, расположенную в плоскости рисунка. Если



протон вращается по часовой стрелке, то линии магнитной индукции поля направлены...

- $\bigcirc \rightarrow \vec{B}$
- $\odot \odot \vec{B}$
- $\bigcirc \leftarrow \vec{B}$
- $\bigcirc \oplus \vec{B}$

**Решение.**

Протон вращается по окружности потому, что на него со стороны магнитного поля действует центростремительная сила, которой в данном случае является сила Лоренца. Направление этой силы определяется векторным произведением скорости  $\vec{v}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  (13.8): если смотреть вдоль вектора силы, то поворот вектора скорости к вектору магнитной индукции будет происходить по часовой стрелке. Возвращаясь к рисунку в условии задания, видим, что вектор силы Лоренца лежит в плоскости рисунка и направлен к центру окружности в том случае, если вектор магнитной индукции «смотрит на нас».

Правильным является ответ:  $\odot \vec{B}$ .

## 14. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Поведение диэлектриков в электрическом поле определяется тем, как реагируют на это поле молекулы вещества. неполярные диэлектрики состоят из молекул, не имеющих собственного электрического дипольного момента. Такие молекулы во внешнем электрическом поле деформируются, их положительные и отрицательные заряды раздвигаются, и молекула приобретает дипольный момент, пропорциональный напряженности электрического поля.

В полярных диэлектриках молекулы сами по себе имеют электрический дипольный момент, который во внешнем поле старается ориентироваться вдоль поля. Оба эти механизма — деформационный и ориентационный — приводят к электрической поляризации диэлектрика, в результате которой в каждом элементарном объеме  $\Delta V$  диэлектрика сумма дипольных моментов  $\sum_{\Delta V} \vec{p}$  становится отличной от нуля.

- Отношение  $\sum_{\Delta V} \vec{p}$  к  $\Delta V$  называется вектором поляризованности<sup>8</sup>

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}. \quad (14.2)$$

- В небольших электрических полях связь поляризованности с напряженностью  $E$  электрического поля в диэлектрике линейная

$$P = \kappa \epsilon_0 E, \quad (14.3)$$

где  $\kappa$  — диэлектрическая восприимчивость,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

- Для анализа и расчета электрического поля в диэлектриках широко используется вспомогательный вектор  $\vec{D}$ , который называется вектором электрического смещения (или вектором электрической индукции):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (14.4)$$

где

$$\epsilon = (1 + \kappa) \quad (14.5)$$

— диэлектрическая проницаемость.

- Деформационная поляризация диэлектрика является малоинерционной и (в небольших полях) пропорциональной напряженности электрического поля. Ориентационная поляризация гораздо инерционнее, и для нее характерен эффект насыщения, когда при некоторых полях все электрические диполи молекул ориентируются (выстраиваются) по полю. В дальнейшем поляризованность слабо увеличивается только за счет незначительной деформации молекул (см. задание 14-1).

- Аналогичные эффекты имеют место при помещении магнетиков в магнитное поле. Молекулы магнетиков могут иметь, а могут не иметь собственного магнитного дипольного момента. В первом случае магнетики называются парамагнетиками, во втором — диамагнетиками. Процесс намагничивания магнетиков заключается в том, что в каждом элементарном объеме  $\Delta V$  магнетика сумма магнитных дипольных моментов молекул  $\sum_{\Delta V} \vec{p}_m$  становится отличной от нуля.

- Отношение  $\sum_{\Delta V} \vec{p}_m$  к  $\Delta V$  называется вектором намагниченности:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m.$$

- В небольших полях намагниченность  $\vec{J}$  пропорциональна напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (14.6)$$

где  $\chi$  — магнитная восприимчивость.

<sup>8</sup> Иногда его называют вектором поляризуемости.

- Связь магнитной проницаемости  $\mu$  с магнитной восприимчивостью  $\chi$ :

$$\mu = 1 + \chi, \quad (14.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (14.8)$$

• У диамагнетиков  $\chi < 0$ , т. е. во внешнем поле они намагничиваются против поля. У парамагнетиков  $\chi > 0$ , т. е. они намагничиваются по полю. И хотя восприимчивость парамагнетиков больше, чем восприимчивость диамагнетиков, по абсолютной величине восприимчивость и тех и других очень мала. В то же время существуют вещества — ферромагнетики, у которых значения восприимчивости достигают десятков и сотен тысяч<sup>9</sup>. Кроме того, эти вещества характеризуются нелинейной, неоднозначной зависимостью  $\vec{B}$  от  $\vec{H}$  (петля гистерезиса на рис. 14-1). Почти горизонтальные участки петли слева и справа называются участками насыщения. Петля пересекает ось  $B$  в точках, которые называются остаточной индукцией. А точки пересечения петли с осью  $H$  называются коэрцитивными силами.

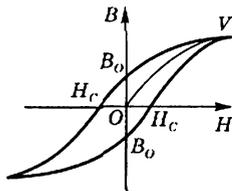


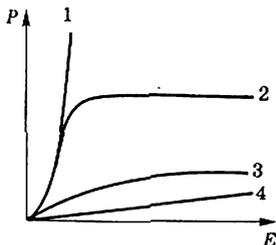
Рис. 14-1

• Эти свойства обусловлены сильной магнитной связью между молекулами, которая приводит к тому, что весь объем магнетика разбивается на небольшие, но макроскопические области (домены), самопроизвольно намагниченные в отсутствие внешнего магнитного поля.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ<sup>10</sup>

#### Задание 14-1.

На рисунке представлены графики, отражающие характер зависимости поляризованности  $P$  диэлектрика от напряженности поля  $E$ . Укажите зависимость, соответствующую неполярным диэлектрикам.



- 2
- 1
- 3
- 4

<sup>9</sup> Похожими свойствами обладают некоторые диэлектрики, которые называются сегнетоэлектриками (ферроэлектриками).

<sup>10</sup> Тестовые задания, приведенные в демонстрационных вариантах на сайте ФЭПО и относящиеся к этой и следующей темам, в значительной степени перепутаны. В связи с этим все задания на закон электромагнитной индукции в настоящем пособии отнесены к теме 15, хотя в тестовых заданиях они встречаются под номером 14.

Решение.

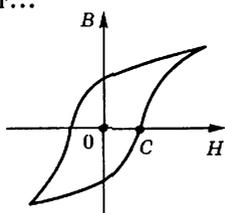
Проанализируем представленные варианты ответов. Кривая (1) на рисунке явно соответствует нелинейной (квадратичной) зависимости поляризованности от напряженности электрического поля, что реализуется только в очень сильных полях. Вряд ли авторы условия имели в виду эту ситуацию.

Кривая (2) и кривая (3) имеют участки насыщения, характерные для полярных диэлектриков и невозможные у неполярных диэлектриков. И только кривая (4) отражает характерную для неполярных диэлектриков линейную зависимость поляризованности от напряженности поля.

Правильным является ответ: 4.

### Задание 14-2.

На рисунке показана зависимость проекции вектора индукции магнитного поля  $B$  в ферромагнетике от напряженности  $H$  внешнего магнитного поля. Участок  $OC$  соответствует...



- магнитной индукции насыщения ферромагнетика
- остаточной намагниченности ферромагнетика
- остаточной магнитной индукции ферромагнетика
- коэрцитивной силе ферромагнетика

Решение.

Участок  $OC$  по определению (см. рис. 14-1) соответствует коэрцитивной силе ферромагнетика.

Правильным является ответ: коэрцитивной силе ферромагнетика.

### Задание 14-3.

Диполь с электрическим моментом  $p = 100$  пКл·м свободно установлен в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 150$  кВ/м. Чтобы повернуть диполь на угол  $\alpha = 180^\circ$ , необходимо совершить работу, равную...

- 0
- 15 мкДж
- 30 мкДж
- 75 мкДж
- 0,667 мДж

Решение.

Работа равна разности потенциальных энергий в начале и конце процесса. Потенциальная энергия диполя во внешнем поле дается формулой (11.27)  $W = -pE \cos \alpha$ . В начальном состоянии угол  $\alpha = 0$ , в конечном  $\alpha = 180^\circ$ , поэтому  $\Delta W = -2pE = -2 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 150 \cdot 10^3 = -30$  мкДж. Знак минус означает, что работа совершается против сил поля.

Правильным является ответ: 30 мкДж.

## 15. СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi, \quad (15.1)$$

где  $\Delta\Phi$  — изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром,  $I$  — сила тока в контуре.

- Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (15.2)$$

где  $\varepsilon_i$  — электродвижущая сила индукции,  $\psi$  — потокосцепление или полный магнитный поток

$$\psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i = N\Phi_1,$$

где  $N$  — полное число витков в контуре,  $\Phi_1$  — магнитный поток через одиночный контур.

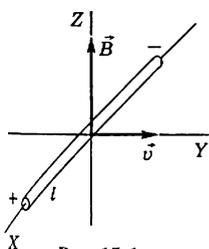


Рис. 15-1

- Разность потенциалов  $\Delta\phi$  на концах проводника длиной  $l$ , движущегося со скоростью  $v$  в однородном магнитном поле  $B$  (рис. 15-1):

$$\Delta\phi = Blv\sin\alpha, \quad (15.3)$$

где  $\alpha$  — угол между  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$ .

- Электродвижущая сила индукции  $E_i$ , возникающая в рамке, содержащей  $N$  витков, площадью  $S$ , при вращении рамки с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ :

$$E_i = BNS\omega\sin\omega t, \quad (15.4)$$

где  $\omega t$  — мгновенное значение угла между вектором  $\vec{B}$  и вектором нормали  $\vec{n}$  к плоскости рамки.

- Заряд, протекающий в контуре при изменении магнитного потока:

$$\Delta Q = \frac{|\Delta\psi|}{R}, \quad (15.5)$$

где  $R$  — сопротивление контура.

- *Правило Ленца*: индукционный ток имеет такое направление, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего контур.

- Потокосцепление контура

$$\psi = LI, \quad (15.6)$$

где  $L$  — индуктивность контура.

- ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}. \quad (15.7)$$

Эта формула справедлива, если контур не меняет свою геометрическую конфигурацию и индуктивность не зависит от тока.

- Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (15.8)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника,  $n$  — число витков на единицу длины,  $V = Sl$  — объем соленоида.

- Ток замыкания в цепи, обладающей активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  (рис. 15-2):

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (15.9)$$

где  $\varepsilon$  — электродвижущая сила источника тока.

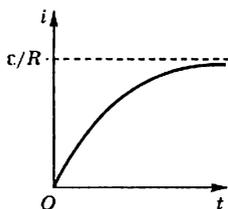


Рис. 15-2

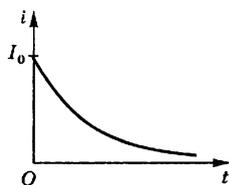


Рис. 15-3

- Ток после размыкания цепи (рис. 15-3)

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (15.10)$$

где  $I_0 = \varepsilon/R$  — значение тока в цепи при  $t = 0$ .

- Энергия  $W$  магнитного поля, создаваемого током  $I$  в замкнутом контуре с индуктивностью  $L$ :

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \quad (15.11)$$

- Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (15.12)$$

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

## Задание 15-1.

Относительно статических электрических полей справедливы утверждения:

- электрическое поле совершает работу над электрическим зарядом
- электростатическое поле является вихревым
- силовые линии поля разомкнуты

Решение.

Электростатическое поле является потенциальным, так как работа по перемещению заряда не зависит от пути и формы траектории, по которой происходит перемещение, и зависит только от величины заряда и значений потенциала поля в начальной и конечной точках пути  $A_{12} = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Поэтому первый вариант ответа является правильным, а второй неправильным.

Силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных. Эти линии разомкнуты.

Правильными являются ответы: электрическое поле совершает работу над электрическим зарядом и силовые линии поля разомкнуты.

## Задание 15-2.

Относительно магнитных полей справедливы утверждения:

- магнитное поле совершает работу над электрическим зарядом
- силовые линии магнитного поля являются разомкнутыми
- магнитное поле является вихревым

Решение.

В природе отсутствуют магнитные заряды (монополи), поэтому магнитные силовые линии всегда замкнуты. На движущийся электрический заряд  $Q$  со стороны магнитного поля действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_л = Q[\vec{v} \times \vec{B}],$$

которая перпендикулярна скорости  $\vec{v}$ . Таким образом, магнитное поле не совершает работы над электрическим зарядом

$$\Delta A = \vec{F}_л \cdot \Delta \vec{l} = (\vec{F}_л \cdot \vec{v}) \Delta t = 0 (!)$$

Магнитное поле в соответствии с уравнением Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

является вихревым.

Правильным является ответ: магнитное поле является вихревым.

## Задание 15-3.

Индуктивность рамки  $L = 40$  мГн. Если за время  $\Delta t = 0,01$  с сила тока в рамке увеличилась на  $\Delta I = 0,2$  А, то ЭДС самоиндукции, наведенная в рамке, равна...

- 0,8 В
- 8 мВ
- 80 В
- 8 В

Решение.

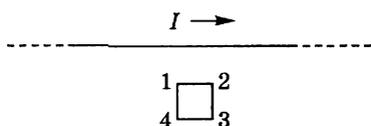
В соответствии с формулой (15.7), ЭДС самоиндукции определяется произведением индуктивности  $L$  на скорость изменения тока в рамке (контуре)  $\Delta I/\Delta t$ . Подставив значения, приведенные в условии, получим

$$\varepsilon = 40 \cdot 10^{-3}(0,2/0,01) = 0,8 \text{ В.}$$

Правильным является ответ: **0,8 В.**

#### Задание 15-4.

На рисунке показан длинный проводник с током, в одной плоскости с



которым находится небольшая проводящая рамка. При **выключении** в проводнике тока заданного направления, в рамке...

- индукционного тока не возникнет
- возникнет индукционный ток в направлении 1-2-3-4
- возникнет индукционный ток в направлении 4-3-2-1

Решение.

Когда по проводнику идет ток заданного направления, в пространстве около проводника возникает магнитное поле с замкнутыми силовыми линиями в виде окружностей, охватывающих проводник. В том месте, где находится рамка, магнитная индукция перпендикулярна плоскости рамки и направлена «от нас».

При выключении тока магнитное поле уменьшается, но не сразу, а постепенно, из-за того что явление самоиндукции мешает магнитному полю изменяться. Направление индукционного тока в рамке легко найти с помощью правила Ленца: этот ток должен иметь такое направление, чтобы обусловленное им магнитное поле препятствовало уменьшению тока провода. А это значит, что индукционное поле должно быть направлено так же, как и уменьшающееся поле тока в проводе. Для этого индукционный ток в рамке должен протекать в направлении 1-2-3-4.

Правильным является ответ: **возникает индукционный ток в направлении 1-2-3-4.**

#### Задание 15-5.

В магнитное поле, изменяющееся по закону  $B = 0,1 \cos 4\pi t$ , помещена квадратная рамка со стороной  $a = 10$  см. Нормаль к рамке совпадает с направлением изменения поля. ЭДС индукции, возникающая в рамке, изменяется по закону...

- $E_i = 10^{-3} \sin 4\pi t$
- $E_i = -10^{-3} \sin 4\pi t$
- $E_i = 4\pi \cdot 10^{-3} \sin 4\pi t$
- $E_i = -4\pi \cdot 10^{-3} \sin 4\pi t$

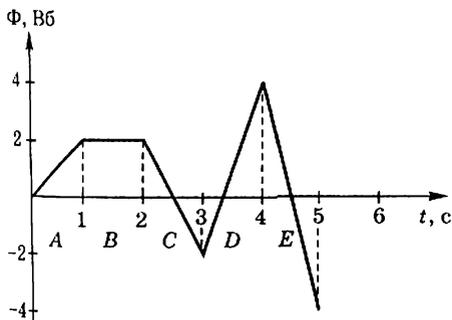
Решение.

Магнитный поток через квадратную рамку изменяется в соответствии с формулой  $\Phi = 0,1a^2 \cos 4\pi t$ . По закону электромагнитной индукции электродвижущая сила, возникающая при изменении магнитного потока, равна скорости изменения этого потока со знаком «минус»:  $\varepsilon = -d\Phi/dt = -0,1a^2 4\pi \sin 4\pi t = -4\pi 10^{-3} \sin 4\pi t$ .

Правильным является ответ:  $E_i = -4\pi \cdot 10^{-3} \sin 4\pi t$ .

### Задание 15-6.

На рисунке представлена зависимость магнитного потока, пронизывающего некоторый замкнутый контур, от времени. ЭДС индукции в контуре не возникает на интервале...



- D
- A
- E
- C
- B

Решение.

По закону электромагнитной индукции электродвижущая сила, возникающая при изменении магнитного потока, равна скорости изменения этого потока со знаком «минус»:  $\varepsilon = -d\Phi/dt$ . Если магнитный поток остается постоянным, то ЭДС равна нулю. По условию задачи это имеет место только на интервале B.

Правильным является ответ: B.

## 16. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Уравнения Максвелла в интегральной форме имеют вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (16.1)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (16.2)$$

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho dV, \quad (16.3)$$

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0. \quad (16.4)$$

• Эти же уравнения в дифференциальной форме записываются в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = -\frac{\partial \dot{\bar{B}}}{\partial t}, \quad (16.5)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}} = \dot{j} + \frac{\partial \dot{\bar{D}}}{\partial t}, \quad (16.6)$$

$$\operatorname{div} \dot{\bar{D}} = \rho, \quad (16.7)$$

$$\operatorname{div} \dot{\bar{B}} = 0. \quad (16.8)$$

• Уравнения (16.1) и (16.5) отражают закон электромагнитной индукции Фарадея. В этих уравнениях  $L$  — замкнутый контур,  $S$  — поверхность, «натянутая» на этот контур (т. е. контур является границей поверхности  $S$ ),  $\bar{E}$  — напряженность электрического поля,  $\bar{B}$  — магнитная индукция,

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \dots$$

• Уравнения (16.2) и (16.6) представляют собой математическую формулировку закона полного тока (теоремы о циркуляции магнитного поля), который для постоянных полей вытекает из закона Био–Савара–Лапласа. В этих уравнениях  $\dot{\bar{H}}$  — напряженность магнитного поля,  $\dot{\bar{D}}$  — вектор электрического смещения,  $\dot{j}$  — плотность тока проводимости. Слагаемое  $\frac{\partial \dot{\bar{D}}}{\partial t}$  в правой части этих уравнений представляет собой плотность тока смещения.

• Уравнения (16.3) и (16.7) — это не что иное, как теорема Гаусса, которая является следствием закона Кулона. Здесь  $S$  — замкнутая поверхность, а  $V$  — ограниченный этой поверхностью объем,  $\bar{D}$  — вектор электрического смещения,  $\rho$  — объемная плотность заряда,

$$\operatorname{div} \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

• Уравнения (16.4) и (16.8) отражают вихревой характер магнитного поля и свидетельствуют о том, что в природе нет магнитных зарядов (магнитных монополей).

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

## Задание 16-1.

Следующая система уравнений

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0,$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

справедлива для переменного электромагнитного поля...

- в отсутствии токов проводимости
- в отсутствии заряженных тел и токов проводимости
- при наличии заряженных тел и токов проводимости
- в отсутствии заряженных тел

Решение.

Рассматриваемая система уравнений отличается от полной системы уравнений Максвелла (16.1)–(16.4) тем, что 1) во втором уравнении справа отсутствуют токи проводимости и 2) в третьем уравнении справа отсутствует плотность электрических зарядов.

Правильным является ответ: в отсутствии заряженных тел и токов проводимости.

## Задание 16-2.

Следующая система уравнений Максвелла:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dv,$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

справедлива для переменного электромагнитного поля...

- в отсутствии заряженных тел
- при наличии заряженных тел и токов проводимости
- в отсутствии токов проводимости
- в отсутствии заряженности тел и токов проводимости

Решение.

Решение аналогично предыдущему заданию.

Правильным является ответ: в отсутствии токов проводимости.

## Задание 16-3.

Утверждение: «В любой точке пространства изменяющееся магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле» раскрывает физический смысл уравнений...

$$\checkmark \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\checkmark \varepsilon_{in} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\square \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_i$$

$$\checkmark \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Решение.

Приведенное в условии задания утверждение представляет собой формулировку закона электромагнитной индукции Фарадея, которое лежит в основе уравнений (16.1) и (16.5). Первое из этих уравнений (при условии неизменности  $S$ ) может быть переписано в виде

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток. Наконец, интеграл  $\oint_S \vec{E} d\vec{l}$  есть не что иное, как электродвижущая сила индукции  $\varepsilon_{in}$ .

Правильными являются ответы:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \varepsilon_{in} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{и} \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

## Задание 16-4.

Напряженность электрического поля между пластинами воздушного конденсатора изменяется со скоростью  $2,8 \cdot 10^9$  В/м с. Если пластина конденсатора представляет собой квадрат со стороной 1 см, то величина тока смещения  $I_{см}$  составляет...

- 2,8 мкА
- 2,5 мкА
- 8,85 мА
- 7,85 мА
- 3,14 мкА

Решение.

Плотность тока смещения связана со скоростью изменения напряженности электрического поля соотношением

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial t}.$$

По условию задачи

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 2,8 \cdot 10^9 \text{ В/м} \cdot \text{с}.$$

Значение диэлектрической постоянной  $\varepsilon_0$  равно  $8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Полный ток смещения через рамку  $I_{см} = j_{см} S = 2,5 \cdot 10^{-6}$  А.

Правильным является ответ: 2,5 мкА.

**Задание 16-5.**

Плоская электромагнитная волна с частотой  $\nu = 10$  МГц распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью  $\sigma = 10^{-2}$  См/м и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 9$ . Отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения равно...

- 0,5
- 1
- 2
- 5

**Решение.**

Амплитуда плотности тока проводимости равна  $j_{\text{пр}} = \sigma E$ , а амплитуда плотности тока смещения  $j_{\text{см}} = \varepsilon \varepsilon_0 dE/dt = 2\pi\nu \varepsilon \varepsilon_0 E$ . Таким образом, искомое отношение равно  $\sigma / 2\pi\nu \varepsilon \varepsilon_0$ .

Подставив заданные значения, получим

$$\frac{10^{-2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^7 \cdot 9 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 2.$$

Правильным является ответ: **2**.

# IV. КОЛЕБАНИЯ ВОЛНЫ

## 17. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• *Колебание* — это такой процесс, который характеризуется той или иной степенью повторяемости. Для описания колебаний различной физической (механические, акустические, электрические, оптические и т. д.) и нефизической (химические, биологические, социальные) природы используется один и тот же математический аппарат.

• *Гармоническим колебанием* называется процесс, который описывается тригонометрическими функциями, например:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (17.1)$$

где  $x$  — смещение колеблющейся величины из положения равновесия,  $t$  — время,  $A$  — амплитуда колебания,  $\omega$  — круговая (циклическая) частота,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебания;  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  — мгновенная фаза колебания (в момент  $t$ ). Круговая частота связана с частотой  $\nu$  и периодом  $T = 1/\nu$  формулой

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T, \quad (17.2)$$

• Уравнение идеальных гармонических колебаний (без потерь):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (17.3)$$

где  $\omega_0$  — собственная круговая частота колебаний, определяемая природой параметров колеблющейся системы:

- $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — для материальной точки массой  $m$ , колеблющейся под действием квазиупругой силы, характеризующейся коэффициентом жесткости  $k$ ;
- $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — для математического маятника, имеющего длину  $l$ ;
- $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$  — для электромагнитных колебаний в контуре с емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ .

• Скорость при гармоническом колебании:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (17.4)$$

- Ускорение при гармоническом колебании:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (17.5)$$

- Полная энергия гармонического колебания:

$$W = \frac{1}{2}mA^2\omega^2. \quad (17.6)$$

В частности, для электромагнитных колебаний в контуре:

$$W = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{Q_{\max}^2}{2C}, \quad (17.7)$$

где  $I_{\max}$  — амплитуда тока через индуктивность,  $Q_{\max}$  — амплитуда заряда на конденсаторе.

- Уравнение затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (17.8)$$

где  $\beta$  — коэффициент затухания,  $\omega_0$  — собственная круговая частота колебаний (без потерь). Для пружинного маятника, помещенного в вязкую среду,

где сила сопротивления пропорциональна скорости ( $F_{\text{сопр}} = -r \frac{dx}{dt}$ ), коэффициент затухания  $\beta = \frac{r}{2m}$ . Для электромагнитного контура  $\beta = \frac{R}{2L}$ , где  $R$  —

активное сопротивление.

- Решение уравнения затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (17.9)$$

При  $\beta \ll \omega_0$  движение системы можно считать почти гармоническим (квазигармоническим) колебанием с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $A(t)$ , убывающей со временем по закону  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  ( $A_0$  — амплитуда колебаний в момент  $t = 0$ ). График зависимости  $x(t)$  приведен на рис. 17-1.

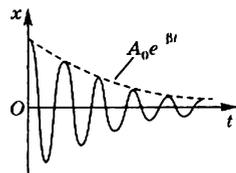


Рис. 17-1

- Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (17.10)$$

- Постоянная времени (или время релаксации):

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad (17.11)$$

— это время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e = 2,7182$  раз.

- *Логарифмический декремент* колебания<sup>11</sup>:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \quad (17.12)$$

где  $A(t)$  и  $A(t+T)$  — амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период  $T$ .

Обратная величина  $N_e = 1/\lambda$  есть число колебаний, совершаемых за время  $t$ .

- *Добротность*:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e. \quad (17.13)$$

При слабом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) добротность равна

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (17.14)$$

В частности, для электромагнитного контура при  $\beta \ll \omega_0$  добротность выражается в виде

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (17.15)$$

• Убыль энергии колеблющейся системы за один период составляет  $\Delta E = -(2\beta T)E$ , так что при слабом затухании добротность пропорциональна отношению полной энергии, запасенной в колебательной системе в данный момент времени, к убыли энергии за один период колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}. \quad (17.16)$$

- Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \Omega t, \quad (17.17)$$

где  $a_0$ ,  $\Omega$  — амплитуда и круговая частота внешнего периодического воздействия.

• Установившиеся вынужденные колебания (после окончания переходного процесса) представляют собой гармоническое колебание с частотой вынуждающей силы:

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi). \quad (17.18)$$

- Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты  $\Omega$ :

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (17.19)$$

<sup>11</sup> В учебниках часто используется термин «логарифмический декремент затухания», который нельзя признать удачным, так как слово «декремент» само по себе означает «уменьшение», «затухание». Кстати, в теории колебаний применяют и противоположный по смыслу термин «инкремент», который означает «увеличение», «усиление».

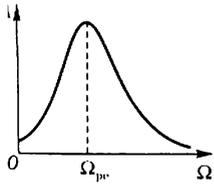


Рис. 17-2

График зависимости  $A(\Omega)$ , который называется резонансной кривой, приведен на рис. 17-2.

• Фаза вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (17.20)$$

• Резонансная частота и резонансная амплитуда:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}; \quad A_{\text{рез}} = \frac{a}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (17.21)$$

• Отношение резонансной амплитуды к статической амплитуде (при  $\Omega = 0$ ) при слабом затухании равно добротности колебательной системы:

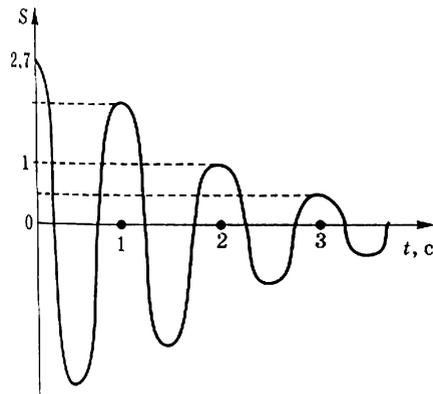
$$\frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\pi}{\beta T} = Q, \quad (17.22)$$

т. е. добротность  $Q$  характеризует резонансные свойства системы.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 17-1.

На рисунке изображен график затухающих колебаний, где  $S$  — колеблющаяся величина, описываемая уравнением  $x(t) = A_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \varphi)$ . Определите время релаксации  $\tau$  (в секундах).



- 2
- 3
- 0,5
- 1

Решение.

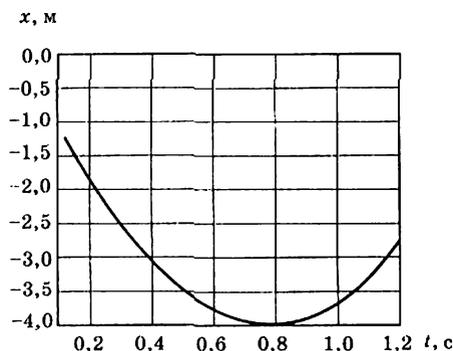
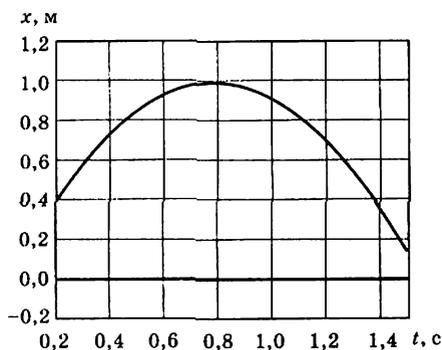
В соответствии с (17.11), постоянная времени — это время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e = 2,7182$  раза. Непосредственно из приведенного в задании рисунка видно, что это время равно 2 с.

Правильным является ответ: 2.

## Задание 17-2.

На рисунках изображены зависимости от времени координаты и ускорения материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону. Циклическая частота колебаний точки равна...

- $3 \text{ с}^{-1}$   
  $1 \text{ с}^{-1}$   
  $2 \text{ с}^{-1}$



Решение.

Уравнение гармонических колебаний материальной точки записывается в виде:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Продифференцировав это уравнение по времени, можно получить зависимость от времени скорости и ускорения материальной точки:

$$v(t) = \dot{x} = -A_0 \omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$a(t) = \ddot{x} = -A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

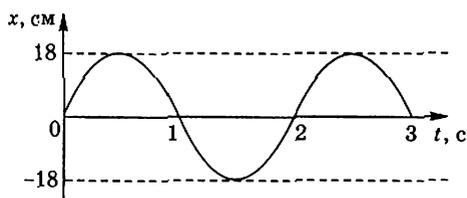
Из анализа графиков  $x(t)$  и  $a(t)$  следует, что в момент времени  $t_1 = 0,8 \text{ с}$   $\cos(\omega t_1 + \alpha)$  равен единице. Следовательно, отношение  $x(t_1)/a(t_1) = -1/4 = -1/\omega^2$ .

Таким образом, циклическая частота равна  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ .

Правильным является ответ:  $2 \text{ с}^{-1}$ .

**Задание 17-3.**

Из графика колебаний материальной точки следует, что модуль скорости в момент времени  $t = 1/3$  с равен...



- 9 см/с
- $9\pi\sqrt{3}$  см/с
- 9π см/с
- 0

**Решение.**

Период гармонического колебания, изображенного на рисунке, равен 2 секундам. Амплитуда этого колебания 18 см. Поэтому зависимость  $x(t)$  можно записать в виде  $x(t) = 18\sin\pi t$ . Скорость равна производной функции  $x(t)$  по времени  $v(t) = 18\pi\cos\pi t$ . Подставив  $t = (1/3)$  с, получим  $v(1/3) = 9\pi$  (см/с).

Правильным является ответ: 9π см/с.

## 18. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Амплитуда  $A$  результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами и амплитудами  $A_1$  и  $A_2$ , происходящих по одной прямой, определяется по формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}), \quad (18.1)$$

где  $\varphi_{0,1}$ ,  $\varphi_{0,2}$  — начальные фазы.

• Начальная фаза  $\varphi_0$  результирующего колебания может быть найдена по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{0,1} + A_2 \sin \varphi_{0,2}}{A_1 \cos \varphi_{0,1} + A_2 \cos \varphi_{0,2}}. \quad (18.2)$$

• Биения, возникающие при сложении двух колебаний  $x_1 = A\cos 2\pi\nu_1 t$  и  $x_2 = A\cos 2\pi\nu_2 t$ , происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , описываются формулой

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\pi(\nu_1 - \nu_2)t \cos\pi(\nu_1 + \nu_2)t. \quad (18.3)$$

График биений приведен на рис. 18-1.

• Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$  и начальными фазами  $\varphi_{0,1}$  и  $\varphi_{0,2}$ :

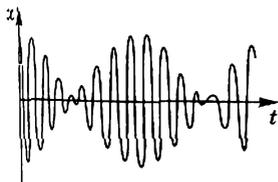


Рис. 18-1

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}) = \sin^2(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}). \quad (18.4)$$

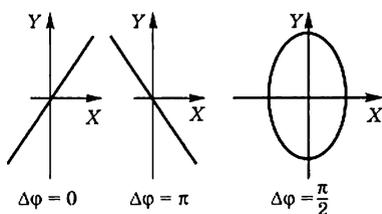


Рис. 18-2

Если начальные фазы  $\varphi_{0,1}$  и  $\varphi_{0,2}$  составляющих колебаний одинаковы, то уравнение траектории принимает вид (рис. 18-2)

$$y = \frac{A_2}{A_1} x;$$

если же начальные фазы отличаются на  $\pi$ , то уравнение траектории имеет вид

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x.$$

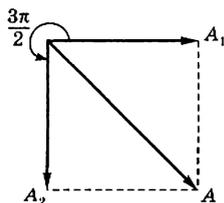
Иными словами, в этих случаях точка движется по прямой. В остальных случаях движение происходит по эллипсу. При разности фаз  $\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1} = \pm\pi/2$  оси этого эллипса расположены по осям  $Ox$  и  $Oy$  и уравнение траектории принимает вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 18-1.

Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами  $A_0$ . При разности  $\Delta\varphi = 3\pi/2$  амплитуда результирующего колебания равна...



- $A_0\sqrt{2}$
- 0
- $\frac{5}{2}A_0$
- $2A_0$

#### Решение.

Применение формул (18.1) и (18.2) существенно упрощается, если использовать векторный метод определения амплитуды и фазы результирующего колебания. Для этого одно из складываемых колебаний представим в виде горизонтального вектора с амплитудой  $A_1$ . Из конца этого вектора построим второй вектор с амплитудой  $A_2$  так, чтобы он образовал угол  $\Delta\varphi$  с первым вектором. Тогда длина вектора, проведенного из начала первого вектора в конец последнего, будет равна амплитуде результирующего колебания, а угол, образуемый результирующим вектором с первым вектором, будет определять их разность фаз. Векторная диаграмма, соответствующая условию задания, приведена на рисунке. Отсюда сразу видно, что амплитуда

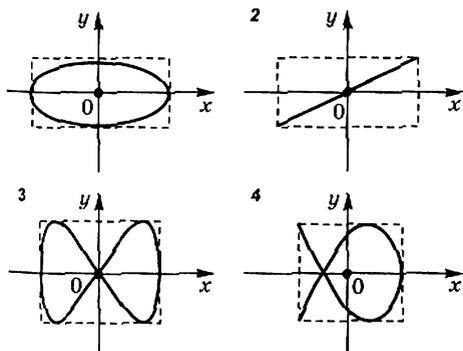
результатирующего колебания в  $\sqrt{2}$  раз больше амплитуды каждого из складываемых колебаний.

Правильным является ответ:  $A_0\sqrt{2}$

### Задание 18-2.

Точка  $M$  одновременно колеблется по гармоническому закону вдоль осей координат  $OX$  и  $OY$  с различными амплитудами, но одинаковыми частотами. При разности фаз  $\pi/2$  траектория точки  $M$  имеет вид:

- 3
- 4
- 1
- 2



Решение.

При заданной в условии разности фаз уравнением траектории является уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний (см. краткие теоретические сведения).

Правильным является ответ: 1.

### Задание 18-3.

Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами  $A_1 = 10$  см и  $A_2 = 6$  см складываются в одно колебание с амплитудой  $A_{\text{рез}} = 14$  см. Разность фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  складываемых колебаний равна...

- 0
- $\pi/6$
- $\pi/4$
- $\pi/3$
- $\pi/2$

Решение.

В этом случае удобно воспользоваться непосредственно формулой (18.1). Подставив в нее данные из условия задания, получим

$$\cos\Delta\varphi = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = \frac{196 - 100 - 36}{2 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

Этому значению косинуса соответствует  $\Delta\varphi = \pi/3$ .

Правильным является ответ:  $\pi/3$ .

## 19. ВОЛНЫ. УРАВНЕНИЕ ВОЛНЫ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Волной называется распространение колебаний в системе связанных осцилляторов (среде). Волновые процессы могут возникать в средах, имеющих разную физическую (механические, акустические, электромагнитные и т. п. волны) и нефизическую (биологические, демографические, социальные волны) природу. Математический аппарат, описывающий волны различной природы, один и тот же.

• Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (19.1)$$

где  $u$  — смещение в точке среды с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ ,  $v$  — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

• Уравнение плоской и сферической волн в среде без поглощения:

$$u(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (19.2)$$

$$u(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (19.3)$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$  — волновое число, а  $\lambda$  — длина волны.

• Для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении  $\vec{n}$ :

$$u(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad (19.4)$$

где  $\vec{k}$  — волновой вектор.

• Длина волны связана со скоростью  $v$ , периодом  $T$  и частотой  $\nu$  соотношениями

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}. \quad (19.5)$$

• Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равно  $\Delta x$ :

$$\Delta\varphi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x. \quad (19.6)$$

• Уравнение стоячей волны (колебания струны, закрепленной в точке  $x = 0$ ):

$$u(x, t) = u_{\max} \sin \omega t \sin kx, \quad (19.7)$$

где  $u_{\max}$  — наибольшее смещение в стоячей волне.

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

## Задание 19-1.

Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси  $OX$ , имеет вид

$$\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x).$$

Тогда скорость распространения волны (в м/с) равна...

- 500
- 1000
- 2

## Решение.

Уравнение плоской волны в среде без поглощения имеет вид (19.2)

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где  $A$  — амплитуда,  $\omega$  — круговая частота,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны,  $v$  — скорость распространения волны.

Сопоставляя общий вид уравнения плоской волны и уравнение волны в условии задачи:

$$\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x),$$

получаем

$$A = 10^{-2} \text{ м}, \quad \omega = 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad k = 2 \text{ м}^{-1}, \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{10^3}{2} = 500 \text{ м/с}.$$

Правильным является ответ: 500 м/с.

## Задание 19-2.

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $OX$ , имеет вид  $\xi = 0,01 e^{i(10^3 t - 2x)}$ . Тогда скорость распространения волны (в м/с) равна...

- 1000
- 0,01
- 2
- 500

## Решение.

Фактически это то же самое задание, что и 19-1, однако в условии используется комплексная форма записи волны. С помощью формулы Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$  легко видеть тождественность следующих математических выражений:

$$\operatorname{Re}(0,01 e^{i(10^3 t - 2x)}) = 0,01 \cos(10^3 t - 2x).$$

Сопоставляя общий вид уравнения плоской волны и уравнения волны, заданной в условии задачи, получаем

$$A = 10^{-2} \text{ м}, \quad \omega = 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{10^3}{2} = 500 \text{ м/с}.$$

Правильным является ответ: 500 м/с.

## 20. ЭНЕРГИЯ ВОЛНЫ. ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ВОЛНОЙ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Плотность потока энергии — вектор Умова<sup>12</sup>:

$$\vec{j} = \langle w \rangle \vec{v}, \quad \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2, \quad (20.1)$$

где  $\langle w \rangle$  — средняя объемная плотность энергии,  $\omega$  — круговая частота волн,  $A$  — их амплитуда,  $\rho$  — плотность среды.

- *Интенсивностью  $I$  волны* называется среднее значение плотности потока энергии в ней:

$$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v A^2. \quad (20.2)$$

- Уровень громкости звука (в децибелах):

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (20.3)$$

где  $I_0$  — условная интенсивность волны, соответствующая нулевому уровню громкости  $L$  звука ( $I_0 = 1$  пВт/м<sup>2</sup>).

- Волновые уравнения для электромагнитных волн:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (20.4)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (20.5)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  — где скорость света в вакууме,  $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$  — фазовая скорость электромагнитной волны в среде с показателем преломления  $n$ ,  $\vec{E}(\vec{H})$  — напряженности электрического (магнитного) поля в электромагнитной волне.

- Основные свойства плоской электромагнитной волны:

а) связь амплитуд электрического и магнитного полей

$$E \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H \sqrt{\mu \mu_0}, \quad (20.6)$$

где  $\epsilon(\mu)$  — диэлектрическая (магнитная) проницаемость среды;

б) поперечность электромагнитной волны

$$\vec{E} \perp \vec{H}; \quad \vec{E} \perp \vec{v}; \quad \vec{H} \perp \vec{v}, \quad (20.7)$$

где  $\vec{v}$  — вектор скорости в направлении распространения волны.

- Объемная плотность энергии электромагнитного поля:

$$\langle w \rangle = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon} + \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (20.8)$$

<sup>12</sup> В зарубежной литературе чаще используется другой термин — вектор Пойнтинга.

- Плотность потока электромагнитной энергии — вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] = v \langle w \rangle. \quad (20.9)$$

- Связь длины электромагнитной волны с периодом  $T$  и частотой колебаний  $\nu$

$$\lambda = \nu T = \frac{v}{\nu}, \quad (20.10)$$

где  $v = c/n$  — скорость электромагнитных волн в среде с показателем преломления  $n$ ,  $c$  — скорость света в вакууме.

- Эффект Доплера для электромагнитных волн: если источник, испускающий волну частотой  $\nu_0$  движется со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к направлению на наблюдателя, то воспринимаемая частота волны равна

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}. \quad (20.11)$$

- Эффект Доплера в нерелятивистском случае  $v \ll c$ :

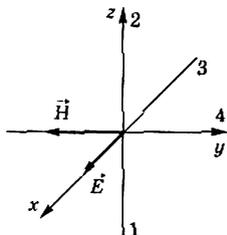
$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \alpha, \quad (20.12)$$

где  $\Delta \nu = \nu - \nu_0$  — сдвиг наблюдаемой частоты  $\nu$  по сравнению с частотой  $\nu_0$  испускаемого света.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 20-1.

На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического ( $\vec{E}$ ) и магнитного ( $\vec{H}$ ) полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении...



- 1
- 4
- 2
- 3

Решение.

Плотность потока энергии численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению,

в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии определяется вектором Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

Согласно определению векторного произведения, вектор  $\vec{S}$  направлен перпендикулярно  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в такую сторону, чтобы три вектора  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{S}$  образовали правую тройку (т. е. чтобы кратчайший поворот от  $\vec{E}$  к  $\vec{H}$  казался наблюдателю, смотрящему с конца вектора  $\vec{S}$ , идущим против часовой стрелки).

Таким образом, вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении 1.

Правильным является ответ: 1.

### Задание 20-2.

Во сколько раз изменится вектор плотности потока энергии, если при неизменной скорости движения волны увеличить в два раза объемную плотность энергии?

- не изменится
- 2
- 1/2
- 4
- 1/4

Решение.

Объемная плотность энергии  $w$

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Учитывая связь векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , получим, что плотности энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинаковы, т. е.  $w_{\text{эл}} = w_{\text{м}}$ .

Следовательно,  $w$  можно представить в виде

$$w = 2w_{\text{эл}} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu} EH = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c} EH = \frac{1}{v_{\text{ср}}} EH.$$

Если умножить плотность энергии  $w$  на скорость электромагнитной волны в среде  $v_{\text{ср}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ , то получим модуль плотности потока энергии

$$S = v_{\text{ср}} w = EH.$$

Таким образом, при неизменной скорости волны в среде плотность потока энергии пропорциональна объемной плотности энергии.

Правильным является ответ: 2.

### Задание 20-3.

Если Солнечная постоянная  $C = 1,4 \text{ кВт/м}^2$  (Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной

- 1,4 кВт
- 17,6 гВт
- 1,99  $10^{30}$  Вт
- 4  $10^{26}$  Вт
- 5,98  $\cdot 10^{24}$  Вт

атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Среднее расстояние от Земли до Солнца  $1 \text{ а.е.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$ , то средняя мощность излучения Солнца составляет...

Решение.

Полная мощность излучения Солнца равна плотности потока  $S$  на площадь сферы с центром в Солнце и радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли, поэтому

$$P = 1,4 \cdot 10^3 \cdot 4\pi(1,5 \cdot 10^{11})^2 \text{ Вт} \approx 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

Правильным является ответ:  $4 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$ .

# V. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

## 21. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Интерференция возникает при наложении в пространстве двух и более волн. Результатом интерференции является *увеличение амплитуды колебаний в одних точках пространства и уменьшение — в других*. Амплитуда колебаний в той или иной точке пространства определяется разностью фаз

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta, \quad (21.1)$$

где  $\Delta$  — оптическая разность хода интерферирующих волн от источника до рассматриваемой точки пространства.

• Оптическая разность хода

$$\Delta = L_1 - L_2, \quad (21.2)$$

где  $L_1, L_2$  — оптические длины световых волн в однородной среде с показателем преломления  $n$ ,

$$L = nl, \quad (21.3)$$

где  $l$  — геометрическая длина пути световой волны.

• Условием возникновения интерференции является *когерентность* световых волн. Когерентность определяется тем, как быстро меняется разность фаз интерферирующих волн за время регистрации интерференционной картины. Если разность фаз практически не изменяется, то волны называются (полностью) когерентными, при их наложении возникает четкая, контрастная интерференционная картина (чередование максимумов и минимумов интенсивности света). Если же разность фаз за время регистрации быстро меняется случайным, хаотическим образом в интервале  $[0, 2\pi]$ , то интерференционная картина «замазывается», перестает быть видимой. Волны в этом случае называются некогерентными. Промежуточные случаи соответствуют частично когерентным волнам. Они могут образовывать интерференционную картину, которая, однако, получается слабо контрастной. В зависимости от физической природы изменения разности фаз различают временную и пространственную когерентность.

• *Временная (или продольная) когерентность* обусловлена конечным временем  $t_{\text{ког}}$  испускания света каждым атомом. В результате световая волна имеет определенную протяженность в пространстве  $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$  (*длина когерентности*), где  $c$  — скорость света. Каждая такая ограниченная в пространстве волна (так называемый *цуг*) имеет случайную начальную фазу, поэтому интерференция разных цугов невозможна. Чтобы получить интерференцию, надо тем или иным способом разделить световую волну на две волны и заставить их встретиться вновь. Если оптическая разность хода этих волн меньше, чем  $l_{\text{ког}}$ , то возникнет интерференционная картина.

• *Время когерентности*  $t_{\text{ког}}$  связано с шириной спектра  $\Delta\nu$  волны соотношением

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (21.4)$$

а так как  $\Delta\nu \sim \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ , то

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (21.5)$$

• *Пространственная (или поперечная) когерентность* обусловлена тем, что атомы источника испускают свет совершенно хаотично по фазе<sup>13</sup>. В результате отдельные участки волнового фронта являются некогерентными. Однако и в этом случае можно получить интерференционную картину, если воспользоваться экраном с двумя маленькими отверстиями (опыт Юнга). Интерференционная картина возникает, если расстояние между этими отверстиями будет меньше радиуса пространственной когерентности

$$\rho_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\Delta\phi}, \quad (21.6)$$

где  $\Delta\phi$  — угловой размер источника.

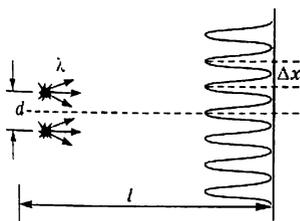


Рис. 21-1

• Расстояние между интерференционными полосами на экране, полученными в опыте Юнга (рис. 21-1):

$$\Delta x = \lambda \frac{l}{d}, \quad (21.7)$$

где  $\lambda$  — длина волны света,  $l$  — расстояние от экрана до источников света,  $d$  — расстояние между источниками,  $d \ll l$ .

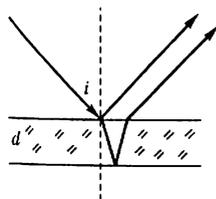


Рис. 21-2

• Условие максимального отражения света с длиной волны  $\lambda$  от тонкой пластинки толщиной  $d$  (рис. 21-2):

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad (21.8)$$

где  $i$  — угол падения света,  $m$  — целое число.

<sup>13</sup> Это не относится к лазерным источникам света.

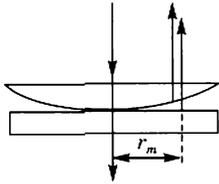


Рис. 21-3

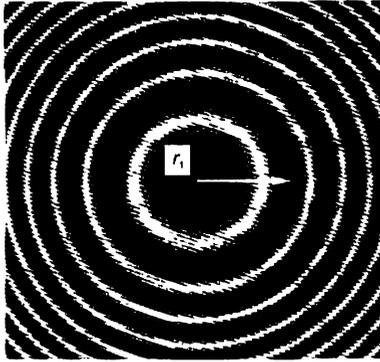


Рис. 21-4

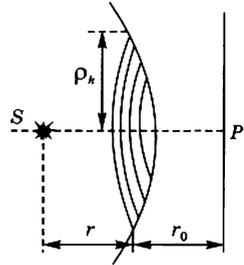


Рис. 21-5

- Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете:

$$r_m = \sqrt{R\lambda \left(m - \frac{1}{2}\right)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (21.9)$$

где  $m$  — номер кольца.

- Радиусы темных колец

$$r_m = \sqrt{R\lambda m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (21.10)$$

где  $m$  — номер кольца (рис. 21-3, 21-4).

Значению  $m = 0$  соответствует центральное темное пятно.

• *Дифракция* — это огибание препятствия световыми волнами. Дифракция обусловлена интерференцией волн от вторичных источников за преградой (*принцип Гюйгенса-Френеля*).

• *Дифракция света на круглом отверстии*. Пусть  $r$  — расстояние от точечного источника света до диафрагмы,  $r_0$  — расстояние от диафрагмы до экрана, где наблюдается дифракционная картина (рис. 21-5). Тогда радиус  $k$ -ой зоны Френеля в отверстии диафрагмы равен

$$\rho_k = \sqrt{\frac{rr_0}{r+r_0} k\lambda}. \quad (21.11)$$

- Для плоской волны ( $r \rightarrow \infty$ )

$$\rho_k = \sqrt{r_0 k\lambda}. \quad (21.12)$$

• Разбиение на кольцевые зоны Френеля, имеющие одинаковые площади, значительно облегчает расчет интенсивности света в центре дифракционной картины от преград круговой формы.

• Если открыть небольшое четное число зон Френеля, то интенсивность в центре дифракционной картины от круглого отверстия уменьшается почти

до нуля. Если же открыть небольшое нечетное число зон Френеля, то интенсивность увеличивается почти в четыре раза по сравнению с интенсивностью при полностью открытом волновом фронте (в отсутствие преграды).

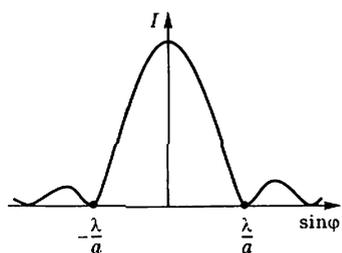


Рис. 21-6

• Дифракция Фраунгофера от щели при нормальном падении света (рис. 21-6).

Условие минимумов интенсивности света:

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (21.13)$$

где  $a$  — ширина щели,  $\varphi$  — угол дифракции,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\lambda$  — длина волны.

• Характер дифракции зависит от значения безразмерного параметра  $\eta = a^2/l\lambda$ , где  $l$  — расстояние от щели до экрана,  $a$  — ширина щели,  $\lambda$  — длина волны ( $a \gg \lambda$ ):

$\eta \ll 1$  — дифракция Фраунгофера,

$\eta \sim 1$  — дифракция Френеля,

$\eta \gg 1$  — геометрическая оптика.

• Дифракция света на *дифракционной решетке* при нормальном падении света (рис. 21-7):

*главные максимумы интенсивности*

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \quad (21.14)$$

где  $d$  — постоянная решетки (ее период),  $k$  — номер главного максимума,  $\varphi$  — угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн;

*главные минимумы*

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (21.15)$$

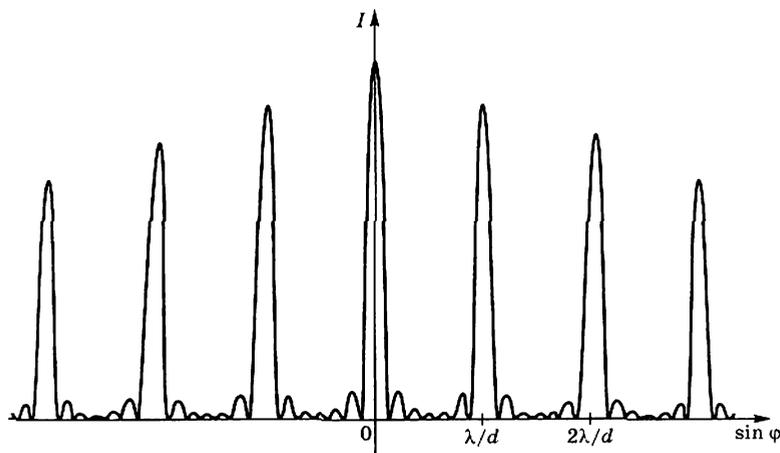


Рис. 21-7

*дополнительные (побочные) минимумы*

$$d \sin \varphi = \pm(k/N)\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{ кроме } k = N, 2N, 3N, \quad (21.16)$$

где  $N$  — число щелей в решетке.

• *Критерий Рэлея*: две длины волны являются разрешенными, если середина дифракционного максимума для одной длины волны совпадает с первым дифракционным минимумом для другой длины волны.

• *Разрешающая способность* дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \quad (21.17)$$

где  $\Delta\lambda$  — наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий ( $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ ), при которой эти линии могут быть видны отдельно в спектре, полученном посредством данной решетки,  $N$  — число штрихов решетки,  $k$  — порядковый номер наблюдаемого дифракционного максимума (порядок дифракции).

• Угловой размер центрального максимума для дифракционной решетки равен

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{a}. \quad (21.18)$$

Аналогичные формулы справедливы для любого оптического прибора: меняется лишь численный коэффициент и физический смысл параметра  $a$  (это может быть, например, ширина щели, диаметр объектива телескопа и т. п.). Отсюда, в частности, следует, что две точки разрешены, т. е. видны отдельно, если угловое расстояние между ними не слишком мало

$$\Delta\varphi > \frac{\lambda}{a}. \quad (21.19)$$

Например, наименьшее угловое расстояние для двух точечных источников света, отдельно видимых в телескоп, равно

$$\Delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (21.20)$$

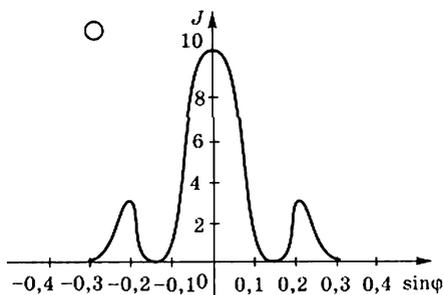
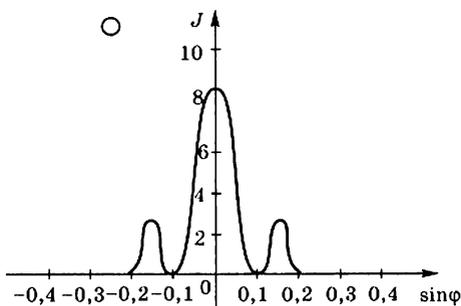
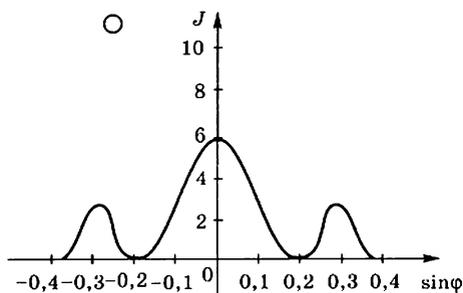
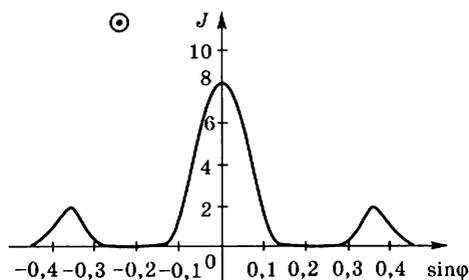
где  $D$  — диаметр объектива.

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

### Задание 21-1.

Имеются 4 решетки с различными постоянными  $d$ , освещаемые одним и тем же монохроматическим излучением различной интенсивности. Какой рисунок иллюстрирует положение главных максимумов,

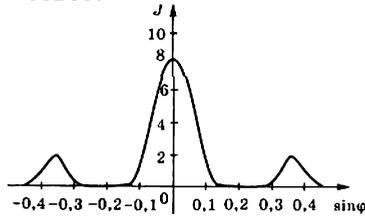
создаваемых дифракционной решеткой с наименьшей постоянной решетки (I — интенсивность света,  $\varphi$  — угол дифракции)?



Решение.

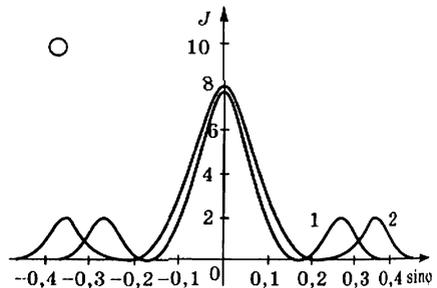
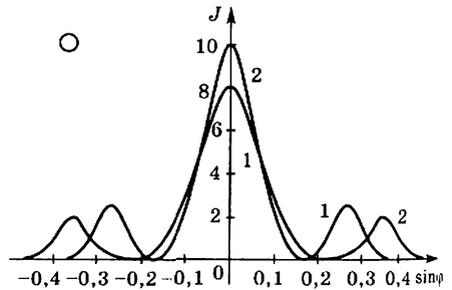
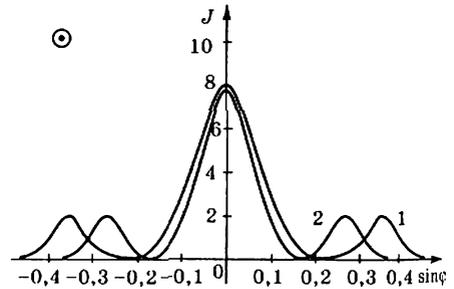
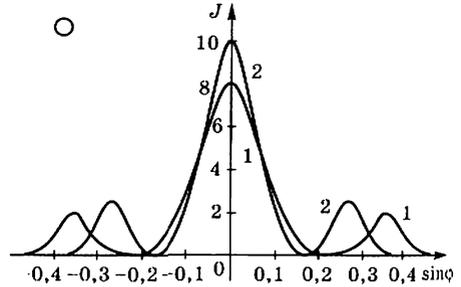
Чем меньше постоянная решетки (т. е. расстояние между соседними щелями), тем дальше от центрального максимума находятся максимумы более высоких порядков дифракции (21.15). На приведенных рисунках максимумы первого порядка находятся на разном угловом расстоянии от центрального, причем самое большое расстояние имеет место на первом рисунке.

Правильным является ответ:



### Задание 21-2.

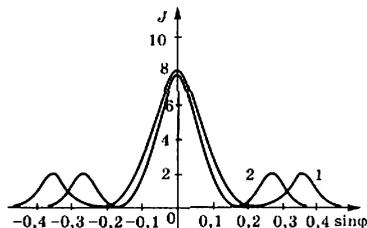
На дифракционную решетку падает излучение одинаковой интенсивности с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Укажите рисунок, иллюстрирующий положение главных максимумов, создаваемых дифракционной решеткой, если  $\lambda_1 > \lambda_2$  ( $I$  — интенсивность,  $\varphi$  — угол дифракции):



Решение.

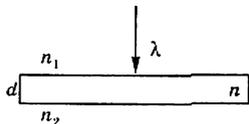
В соответствии с (21.15), главные максимумы одного порядка дифракции (одно и то же значение  $k$ ) отстоят от центрального тем больше, чем больше длина волны. Так как  $\lambda_1 > \lambda_2$ , то этому условию удовлетворяют первый и второй варианты ответов. Кроме того, сказано, что излучение с каждой из двух длин волн имеет одинаковую интенсивность.

Правильным является ответ:



### Задание 21-3.

Тонкая стеклянная пластинка с показателем преломления  $n$  и толщиной  $d$  помещена между двумя средами с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , причем  $n_1 > n > n_2$ . На пластинку нормально падает свет с длиной волны  $\lambda$ . Оптическая разность хода интерферирующих отраженных лучей равна...



- $2dn_1$
- $2dn_2$
- $2dn + \lambda/2$
- $2dn$

Решение.

Интерферирующими лучами в данной задаче являются лучи, отраженные от передней (верхней) и задней (нижней) поверхности пластинки. Оптическая разность хода возникает из-за того, что луч, отраженный от задней поверхности, дважды проходит толщину пластинки с показателем преломления  $n$ . Следует отметить, что в отличие от случая, изображенного на рис. 21-1, ни на одной из поверхностей не происходит скачкообразного сдвига фазы на  $\pi$ , который приводил к появлению слагаемого  $(-\lambda/2)$  в левой части выражения (21-8).

Правильным является ответ:  $2dn$ .

### Задание 21-4.

Волновой фронт точечного источника, разбитый на зоны одинаковой площади, представляет собой...

- кольца Ньютона
- дифракцию от двух щелей
- дифракцию Фраунгофера
- зоны Френеля

**Решение.**

Волновой фронт точечного источника разбивается на кольцевые зоны одинаковой площади при геометрическом расчете интенсивности света в центре дифракционной картины от круглых преград. Эти зоны называются зонами Френеля.

Правильным является ответ: **зоны Френеля.**

**Задание 21-5.**

Если закрыть  $n$  открытых зон Френеля, а открыть только первую, то амплитудное значение вектора напряженности электрического поля...

- уменьшится в 2 раза
- увеличится в 2 раза
- увеличится в  $n$  раз
- не изменится

**Решение.**

Амплитуда колебаний от вторичных источников волнового фронта, находящихся в первой зоне Френеля, в два раза больше, чем амплитуда от всех вторичных источников открытого волнового фронта.

Считая, что число  $n$  в условии задачи достаточно велико, выбираем ответ: **увеличится в два раза.**

## 22. ПОЛЯРИЗАЦИЯ И ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Свет, в котором направления колебаний электрического вектора  $\vec{E}$  упорядочены каким-либо образом, называется *полностью поляризованным*. В противном случае свет называется *неполяризованным*, или *естественным*. Между этими крайними случаями имеется множество промежуточных, которые соответствуют *частично поляризованному* свету.

• Если колебания светового вектора  $\vec{E}$  происходят только в одной проходящей через луч плоскости, то свет называется *линейно поляризованным*.

• Естественный свет представляет собой смесь волн, в которой равновероятно представлены все направления поляризации.

Частично линейно поляризованный свет — это смесь естественного света с полностью линейно поляризованным.

• *Степень поляризации* света:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (22.1)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Для естественного света интенсивность пропускаемого света не зависит от положения анализатора,

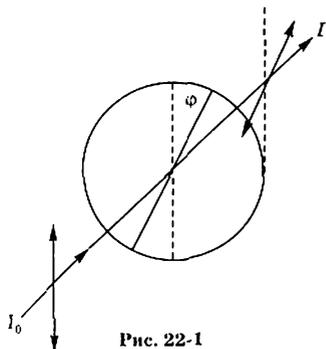


Рис. 22-1

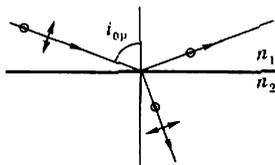


Рис. 22-2

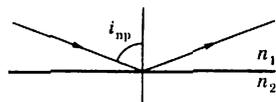


Рис. 22-3

так что  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ . Для линейно поляризованного света есть положение, когда свет через анализатор не проходит, так что  $I_{\min} = 0$  и  $P = 1$ .

• **Закон Малюса:**

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (22.2)$$

где  $I$  — интенсивность линейно поляризованного света, прошедшего через анализатор,  $I_0$  — интенсивность линейно поляризованного света, падающего на анализатор,  $\varphi$  — угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора (рис. 22-1).

• **Закон Брюстера:**

$$\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (22.3)$$

где  $i_{\text{Бр}}$  — угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (угол Брюстера),  $n_1$  — показатель преломления среды, откуда падает свет,  $n_2$  — показатель преломления среды, на которую падает свет,  $n_{21}$  — относительный показатель преломления второй среды относительно первой (рис. 22-2).

• **Предельный угол полного отражения** при переходе света из среды более оптически плотной ( $n_1$ ) в среду менее оптически плотную ( $n_2$ ) (рис. 22-3) определяется из соотношения

$$\sin i_{\text{нр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad n_2 < n_1. \quad (22.4)$$

• **Дисперсия света обусловлена** зависимостью диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и, следовательно, показателя преломления  $n$  от частоты.

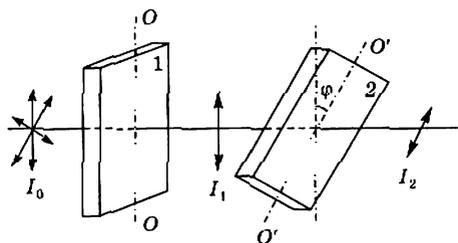
• **Фазовая  $v$  и групповая  $u$  скорости:**

$$v = \omega/k, \quad u = d\omega/dk. \quad (22.5)$$

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

## Задание 22-1.

На пути естественного света интенсивности  $I_0$  помещены две пластинки турмалина. После прохождения пластинки 1 свет полностью поляризован. Если угол  $\varphi$  между направлениями  $OO$  и  $O'O'$  равен  $60^\circ$ , то интенсивность  $I_2$  света, прошедшего через обе пластинки, связана с  $I_0$  соотношением...



$I_2 = \frac{I_0}{2}$

$I_2 = \frac{I_0}{8}$

$I_2 = \frac{3I_0}{8}$

$I_2 = \frac{I_0}{4}$

## Решение.

Пусть на первую пластину турмалина (поляризатор) падает естественный свет с интенсивностью  $I_0$ . После нее выйдет полностью линейно поляризованный свет, интенсивность которого  $I_1$  составит половину интенсивности естественного света  $I_0$ . Согласно закону Малюса, после второй пластины турмалина интенсивность света  $I_2 = I_1 \cos^2 \varphi$ . Таким образом, интенсивность света, прошедшего через обе пластинки, связана с  $I_0$  соотношением

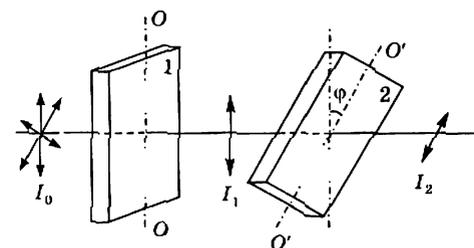
$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi.$$

Подставляя значение  $\cos \varphi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , получаем  $I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{I_0}{8}$ .

Правильным является ответ:  $I_2 = \frac{I_0}{8}$ .

## Задание 22-2.

На пути естественного света помещены две пластинки турмалина.



$60^\circ$

$30^\circ$

$45^\circ$

$90^\circ$

После прохождения пластинки 1 свет полностью поляризован. Если  $I_1$  и  $I_2$  — интенсивности света, прошедшего пластинки 1 и 2 соответственно, и  $I_2 = \frac{I_1}{4}$ , тогда угол между направлениями  $OO$  и  $O'O'$  равен...

**Решение.**

Из первой пластинки турмалина (поляризатора) выходит полностью линейно поляризованный свет с интенсивностью  $I_1$ , которая составляет половину интенсивности естественного света  $I_0$ . Согласно закону Малюса, из второй пластинки турмалина выйдет свет, интенсивность которого равна

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi.$$

По условию задачи  $I_2 = \frac{1}{4} I_1$ , следовательно,  $\cos \varphi = \frac{1}{2}$  и  $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ .

Правильным является ответ:  $60^\circ$ .

### Задание 22-3.

На идеальный поляризатор падает свет интенсивности  $I_{\text{ест}}$  от обычного источника. При вращении поляризатора вокруг направления распространения луча интенсивность света за поляризатором...

- меняется от  $I_{\text{ест}}$  до  $I_{\text{max}}$
- меняется от  $I_{\text{min}}$  до  $I_{\text{max}}$
- не меняется и равна  $I_{\text{ест}}$
- не меняется и равна  $(1/2)I_{\text{ест}}$

**Решение.**

При любой ориентации оси пропускания поляризатора через него проходит половина интенсивности естественного света.

Правильным является ответ: **не меняется и равна  $(1/2)I_{\text{ест}}$ .**

### Задание 22-4.

На стеклянное зеркало под углом Брюстера падает луч естественного света. На пути отраженного луча расположена призма Николя (николь). Интенсивность отраженного луча равна  $I_1$ . Если плоскость пропускания николя параллельна плоскости, в которой лежат падающий и отраженный лучи, то интенсивность луча, прошедшего николя,  $I_2$  определяется как...

- $I_2 = I_1$
- $I_2 = 0$
- $I_2 = I_1/2$
- $I_2 = I_1/\sqrt{2}$

Решение.

При падении естественного света под углом Брюстера отраженный свет полностью поляризован таким образом, что электрический вектор лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Поэтому если отраженный свет пропустить через поляризатор с осью пропускания, параллельной плоскости падения, то свет через поляризатор проходить не будет.

Правильным является ответ:  $I_2 = 0$ .

## 23.

### ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОТОЭФФЕКТ

#### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Энергетическая светимость тела  $R(T)$  — энергия, испускаемая в единицу времени единицей площади поверхности нагретого до температуры  $T$  тела (размерность Вт/м<sup>2</sup>).

- Испускательная способность тела  $r_\omega(\omega, T)$  — количество энергии, испускаемое в единицу времени единицей площади поверхности нагретого до температуры  $T$  тела, приходящееся на единичный интервал частот (размерность Дж/м<sup>2</sup>).

- Связь энергетической светимости и испускательной способности дается выражением

$$R(T) = \int_0^\infty r_\omega(\omega, T) d\omega. \quad (23.1)$$

- Поглощательная способность тела  $a_\omega$  — это отношение потока энергии, поглощенного телом в единичном интервале частот, к падающему потоку энергии;  $a_\omega$  — безразмерная величина, не превышающая единицы. Тело, для которого  $a_\omega = 1$  на всех частотах, называется *абсолютно черным телом*. Другие тела, для которых  $a_\omega < 1$ , называются *серыми*.

- Закон Кирхгофа: отношение испускательной и поглощательной способности любого тела есть универсальная функция частоты и температуры

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = f(\omega, T). \quad (23.2)$$

Следовательно,  $f(\omega, T)$  есть испускательная способность абсолютно черного тела. Из (23.2) следует, что серое тело испускает меньше энергии, чем абсолютно черное тело при той же температуре.

- В оптике обычно предпочитают иметь дело с функциями, зависящими не от частоты  $\omega$ , а от длины волны  $\lambda$ . Связь между универсальной функцией  $f(\omega, T)$  и соответствующей ей функцией  $\varphi(\lambda, T)$  описывается соотношением

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{\omega^2}{2\pi c} f(\omega, T). \quad (23.3)$$

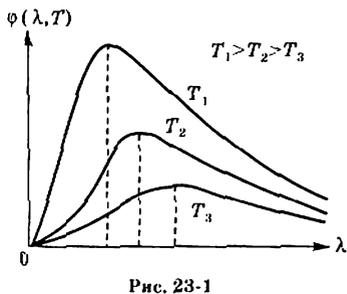


График функции  $\varphi(\lambda, T)$  приведен на рис. 23-1.

- Плотность энергии равновесного теплового излучения  $u(T)$  — количество энергии излучения в единице объема (размерность Дж/м<sup>3</sup>).

- Спектральная плотность равновесного теплового излучения  $u_\omega(\omega, T)$  — энергия излучения в единичном объеме, приходящаяся на единичный интервал частоты (размерность Дж·с/м<sup>3</sup>):

$$u(T) = \int_0^{\infty} u_\omega(\omega, T) d\omega. \quad (23.4)$$

- Испускательная способность абсолютно черного тела  $f(\omega, T)$  связана со спектральной плотностью энергии равновесного теплового излучения  $u_\omega(\omega, T)$  соотношением

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u_\omega(\omega, T), \quad (23.5)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

- Энергетическая светимость абсолютно черного тела

$$R^*(T) = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \frac{c}{4} u(T). \quad (23.6)$$

- *Закон Стефана–Больцмана*: энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры:

$$R^*(T) = \sigma T^4; \quad \sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (23.7)$$

- Закон смещения Вина:

$$T\lambda_{\max} = b; \quad b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}, \quad (23.8)$$

где  $\lambda_{\max}$  — длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности черного тела  $\varphi(\lambda, T)$ .

- Формула Планка для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (23.9)$$

где  $h, k$  — постоянные Планка и Больцмана.

- Постоянные Планка:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; \quad (23.10)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}. \quad (23.11)$$

В дальнейшем в данном пособии чаще будет использоваться величина  $\hbar$ .

• Энергия фотона:

$$\varepsilon = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (23.12)$$

• Импульс фотона

$$p = \frac{\varepsilon_\gamma}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad (23.13)$$

• Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{\max}, \quad (23.14)$$

где  $\varepsilon$  — энергия фотона, падающего на поверхность металла;  $A$  — работа выхода электрона из металла;  $T_{\max}$  — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

При небольших энергиях фотоэлектронов  $T_{\max} = \frac{m_e v_{\max}^2}{2}$ , в релятивистском случае  $T_{\max} = m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right)$ , где  $m_e$  — масса покоя электрона,  $c$  — скорость света в вакууме,  $v_{\max}$  — максимальная скорость фотоэлектрона.

• Красная граница фотоэффекта соответствует условию  $T_{\max} = 0$ :

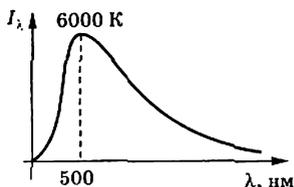
$$\omega_{\text{кр}} = \frac{A}{\hbar} \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi\hbar c}{A}, \quad (23.15)$$

где  $\lambda_{\text{кр}}$ ,  $\omega_{\text{кр}}$  — максимальная длина волны и минимальная круговая частота излучения соответственно, при которых еще возможен фотоэффект.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 23-1.

На рисунке показана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от длины волны при  $T = 6000$  К. Если температуру тела уменьшить в 4 раза, то длина волны, соответствующая максимуму излучения абсолютно черного тела...



- уменьшится в 2 раза
- уменьшится в 4 раза
- увеличится в 2 раза
- увеличится в 4 раза

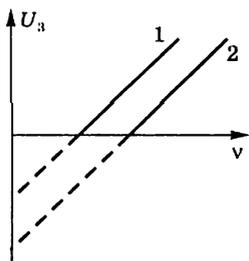
Решение.

Согласно закону смещения Вина (23.8)  $\lambda_{\max} = b/T$ . При уменьшении температуры тела в 4 раза длина волны, соответствующая максимуму излучения абсолютно черного тела, увеличится в 4 раза.

Правильным является ответ: увеличится в 4 раза.

### Задание 23-2.

На рисунке представлены две зависимости задерживающего напряжения  $U_3$  от частоты  $\nu$  падающего



света для внешнего фотоэффекта. Укажите верные утверждения:

- зависимости получены для двух различных металлов
- с помощью этих зависимостей можно определить значение постоянной Планка
- $A_2 < A_1$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — значения работы выхода электронов из соответствующего металла

Решение.

Воспользуемся формулой Эйнштейна (23.14) и формулой для красной границы фотоэффекта (23.15).

Формула Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид:

$$\varepsilon = A_{\text{вых}} + T_{\text{max}},$$

где  $\varepsilon = h\nu = h\nu$  — энергия фотона, падающего на поверхность металла,  $A_{\text{вых}}$  — работа выхода электрона из металла,  $T_{\text{max}}$  — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона, которая при небольших скоростях фотоэлектронов

( $V \ll c$ ) равна  $T_{\text{max}} = \frac{m_e V_{\text{max}}^2}{2}$  ( $m_e$  — масса покоя электрона).

Красная граница фотоэффекта:

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{A_{\text{вых}}}{h} \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{кр}} = \frac{hc}{A_{\text{вых}}},$$

где  $\nu_{\text{кр}}$ , ( $\lambda_{\text{кр}}$ ) — минимальная частота (максимальная длина волны) излучения, при которых еще возможен фотоэффект.

Подставляя выражения  $h\nu_{\text{кр}} = A_{\text{вых}}$  и  $eU_3 = T_{\text{max}}$ , получаем уравнение зависимости задерживающего напряжения от частоты излучения:

$$h\nu = h\nu_{\text{кр}} + eU_3 \quad \text{или} \quad U_3 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_{\text{кр}}).$$

Таким образом, на рисунке представлены две зависимости задерживающего напряжения  $U_3$  от частоты  $\nu$  падающего света для двух различных металлов, причем

$$\nu_{\text{кр}}(2) = \frac{A_{\text{вых}}(2)}{h} > \nu_{\text{кр}}(1) = \frac{A_{\text{вых}}(1)}{h},$$

т. е. работа  $A_2$  выхода электронов из второго металла больше работы  $A_1$  выхода электронов из первого металла. Значит, третий вариант ответа не является правильным.

Тангенс угла наклона прямых  $U_3 = U_3(\nu)$  зависимостей задерживающего напряжения  $U_3$  от частоты  $\nu$  падающего света зависит от отношения  $h/e$ . Следовательно, с помощью этих зависимостей можно определить значение постоянной Планка.

Правильными являются ответы: зависимости получены для двух различных металлов и с помощью этих зависимостей можно определить значение постоянной Планка.

### Задание 23-3.

Явление испускания электронов веществом под действием электромагнитного излучения называется...

- фотосинтезом
- электризацией
- фотоэффектом
- ударной ионизацией

Решение.

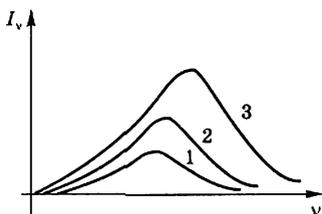
Это явление называется фотоэффектом.

Правильным является ответ: **фотоэффектом**.

### Задание 23-4.

На рисунке представлены графики зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от частоты при различных температурах. Наибольшей температуре соответствует график...

- 3
- 1
- 2



Решение.

При нагревании светимость абсолютно черного тела увеличивается пропорционально четвертой степени температуры (закон Стефана–Больцмана), поэтому площадь под графиком должна увеличиваться с температурой. Кроме

того, максимум кривой при увеличении температуры сдвигается в сторону высоких частот (закон смещения Вина).

Правильным является ответ: 3.

### Задание 23-5.

Абсолютно черное тело и серое тело имеют одинаковую температуру. При этом интенсивность излучения...

- больше у серого тела
- определяется площадью поверхности тела
- больше у абсолютно черного тела
- одинаковая у обоих тел

Решение.

В соответствии с (23.2), испускательная способность нагретого тела  $r_{\omega} = a_{\omega} r_{\omega \text{ ачт}}$ , где  $a_{\omega}$  — поглощательная способность нагретого тела (которая меньше единицы),  $r_{\omega \text{ ачт}}$  — испускательная способность абсолютно черного тела. Таким образом, серое тело испускает меньше, чем абсолютно черное тело.

Правильным является ответ: больше у абсолютно черного тела.

## 24.

### ЭФФЕКТ КОМПТОНА. СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ

#### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Эффект Комптона: при рассеянии рентгеновских лучей наряду с излучением исходной длины волны  $\lambda$  появляются лучи с большей длиной волны  $\lambda'$  (рис. 24-1). Разность  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$  не зависит ни от длины волны  $\lambda$ , ни от природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния  $\theta$ . Эффект Комптона является одним из ярких подтверждений корпускулярных свойств света.

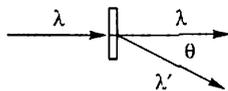


Рис. 24-1

• Изменение длины волны при комптоновском рассеянии рентгеновских лучей:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \quad (24.1)$$

где  $m$  — масса покоя электрона.

• Комптоновская длина волны:

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} \quad (\lambda_C = 0,0242 \text{ \AA}). \quad (24.2)$$

• Давление, производимое светом при нормальном падении:

$$p = \frac{E}{c}(1 + \rho) \quad (24.3)$$

или

$$p = u(1 + \rho), \quad (24.4)$$

где  $E$  — облученность поверхности (энергия, падающая в единицу времени на единицу поверхности);  $c$  — скорость электромагнитного излучения в вакууме;  $u$  — объемная плотность энергии излучения;  $\rho$  — коэффициент отражения.

• Энергия фотона:

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda \quad \text{или} \quad \varepsilon = \hbar\omega, \quad (24.4)$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $\hbar = h/(2\pi)$ ,  $\nu$  — частота света,  $\omega$  — круговая частота,  $\lambda$  — длина волны.

• Масса и импульс фотона выражаются соответственно формулами

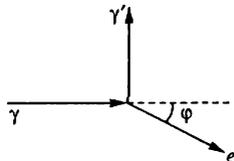
$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}; \quad (24.5)$$

$$p = mc = \frac{h}{\lambda}. \quad (24.6)$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 24-1.

На рисунке показаны направления падающего фотона ( $\gamma$ ), рассеянного фотона ( $\gamma'$ ) и электрона отдачи ( $e$ ). Угол рассеяния  $90^\circ$ , направление движения электрона отдачи составляет с направлением падающего фотона угол  $\varphi = 30^\circ$ . Если импульс падающего фотона  $3$  (МэВ·с)/м, то импульс рассеянного фотона (в тех же единицах) равен...



- 1,5
- $\sqrt{3}$
- $2\sqrt{3}$
- $1,5\sqrt{3}$

Решение.

Рассматриваемый в задаче эффект Комптона характеризует корпускулярные свойства света. Следовательно, в процессе рассеяния фотона на электроном должен выполняться закон сохранения импульса. В начальном состоянии у падающего фотона  $\gamma$  импульс имеет только горизонтальную составляющую. Поэтому в конечном состоянии горизонтальная составляющая импульса электрона  $p_e \cos\varphi$  равна импульсу падающего фотона  $p_\gamma$  ( $p_\gamma = p_e \cos\varphi$ ), а вертикальная составляющая суммарного импульса электрона и рассеянного фотона равна нулю, или  $p'_\gamma = p_e \sin\varphi$ .

Таким образом,

$$p'_\gamma = p_e \sin \varphi = p_\gamma \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = p_\gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Подставляя значение  $p_\gamma = 3 \text{ (МэВ}\cdot\text{с)}/\text{м}$  и  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , получаем  $p'_\gamma = \sqrt{3}$ .  
Правильным является ответ:  $\sqrt{3}$ .

### Задание 24-2.

Параллельный пучок света падает по нормали на зачерненную плоскую поверхность, производя давление  $P$ . При замене поверхности на зеркальную давление света не изменится, если угол падения (отсчитываемый от нормали к поверхности) будет равен...

- 60°
- 45°
- 30°
- 0°

Решение.

Давление, производимое световой волной, падающей под углом  $\varphi$  (угол падения — угол между перпендикуляром к поверхности в точке падения и световым лучом):

$$P = \frac{E_\phi}{c}(1 + \rho)\cos^2 \varphi,$$

где  $E_\phi$  — плотность потока световой энергии (энергия, падающая в единицу времени на единицу площади поверхности);  $c$  — скорость света в вакууме;  $\rho$  — коэффициент отражения поверхности.

В первом случае  $\varphi = 0$  и  $\rho = 0$ , поэтому  $P_1 = \frac{E_\phi}{c}$ .

Во втором случае  $\rho = 1$  и  $P_2 = \frac{E_\phi}{c} \cdot 2 \cdot \cos^2 \varphi$ ,  $P_1 = P_2$ , если  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Таким образом, при замене поверхности на зеркальную давление света не изменится, если угол падения будет равен  $\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ .

Правильным является ответ: 45°.

### Задание 24-3.

Давление света зависит от...

- степени поляризованности света
- показателя преломления вещества, на которое падает свет
- энергии фотона
- скорости света в среде

Решение.

Давление света зависит от объемной плотности энергии излучения и от коэффициента отражения света (см. формулу (24.4)). Последний зависит от показателя преломления вещества, на которое падает свет. Остальные варианты ответа не подходят.

Правильным является ответ: показателя преломления вещества, на которое падает свет.

# VI. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

## 25. СПЕКТР АТОМА ВОДОРОДА. ТЕОРИЯ БОРА ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• В основе теории Бора (полуклассической теории атома) лежат два постулата:

1) состояния электронов в атоме дискретны, они характеризуются определенным значением энергии  $E_i$  и определенным размером орбиты;

2) при переходах между этими состояниями электроны поглощают или теряют энергию, равную  $h\omega = E_i - E_j$ .

• Момент импульса электрона на стационарных орбитах:

$$L = mvr = nh, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (25.1)$$

где  $m$  — масса электрона,  $r$  — радиус орбиты,  $v$  — скорость электрона на орбите,  $n$  — главное квантовое число,  $h$  — постоянная Планка.

• Энергия электрона, находящегося на  $n$ -й орбите:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2}, \quad (25.2)$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

• Формула, определяющая длину волны  $\lambda$  или частоту  $\nu$  света, излучаемого или поглощаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое (см. ниже рисунок к заданию 25-1):

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right); \quad (25.3)$$

$$\nu = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (25.4)$$

где  $R'$  и  $R$  — постоянная Ридберга ( $R' = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ ;  $R = cR' = 3,290 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ );  $n_1$  и  $n_2$  — целые числа;  $n_1$  — номер серии спектральных линий ( $n_1 = 1$  — серия Лаймана,  $n_1 = 2$  — серия Бальмера,  $n_1 = 3$  — серия Пашена и т. д.). Для каждой серии  $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3$  и т. д.

• Энергия фотона, испускаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое:

$$\varepsilon = E_i \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (25.5)$$

где  $E_i$  — энергия ионизации атома водорода:  $E_i = 2\pi hR = 13,6$  эВ.

• Состояния электронов в атоме характеризуются тремя целочисленными параметрами  $n$ ,  $l$  и  $m$ . Параметр  $n$ , называемый *главным квантовым числом*, совпадает с номером уровня энергии. Параметры  $l$  и  $m$ , характеризующие азимутальное и магнитное квантовые числа, определяют модуль момента импульса и проекцию момента на выделенное направление.

В атомной физике применяются заимствованные из спектроскопии условные обозначения состояний электрона с различными значениями момента импульса. Электрон, находящийся в состоянии с  $l = 0$ , называют  $s$ -электроном (соответствующее состояние —  $s$ -состоянием), с  $l = 1$  —  $p$ -электроном, с  $l = 2$  —  $d$ -электроном, с  $l = 3$  —  $f$ -электроном, затем идут  $g$ ,  $h$  и т. д. уже по алфавиту. Значение главного квантового числа  $n$  указывается перед условным обозначением квантового числа  $l$ .

Поскольку  $l$  всегда меньше  $n$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ ), возможны следующие состояния электрона:

$$\begin{aligned} &1s \\ &2s, 2p \\ &3s, 3p, 3d \\ &4s, 4p, 4d, 4f \end{aligned}$$

и т. д.

При испускании и поглощении света (фотона) происходят переходы электрона с одного уровня энергии на другой. Фотон обладает собственным моментом импульса (спином), равным  $\hbar$ . При испускании фотон уносит из атома момент импульса, а при поглощении привносит его, поэтому возможны только такие переходы, при которых квантовое число  $l$  изменяется на единицу

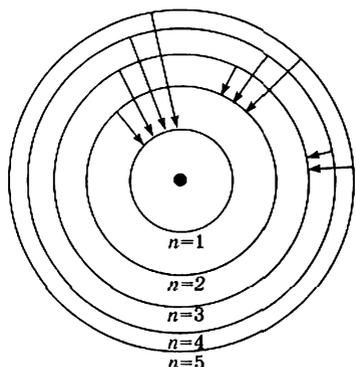
$$\Delta l = \pm 1. \quad (25.6)$$

Это условие называется *правилом отбора*, которое является следствием закона сохранения момента импульса.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 25-1.

На рисунке изображены стационарные орбиты атома водорода согласно модели Бора, а также условно изображены переходы электрона с одной стационарной орбиты на другую, сопровождающиеся излучением кванта энергии. В ультрафиолетовой области спектра эти переходы



дают серию Лаймана, в видимой — серию Бальмера, в инфракрасной — серию Пашена. Наибольшей частоте кванта в серии Лаймана соответствует переход...

- $n = 3 \rightarrow n = 2$
- $n = 5 \rightarrow n = 1$
- $n = 5 \rightarrow n = 3$
- $n = 2 \rightarrow n = 1$

**Решение.**

Частота света, излучаемого или поглощенного атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое, для серии Лаймана определяется формулой (25.4) с  $n_1 = 1$ :

$$\nu = R \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

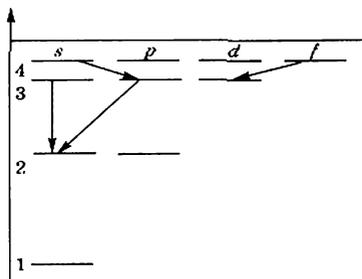
где  $n$  — номер стационарной орбиты, с которой происходит переход на первую боровскую орбиту. Следовательно, чем больше  $n$ , тем большей частоте кванта соответствует переход.

Правильным является ответ:  $n = 5 \rightarrow n = 1$ .

### Задание 25-2.

При переходе электрона в атоме с одного уровня на другой закон сохранения момента импульса накладывает определенные ограничения (правило отбора). В энергетическом спектре атома водорода (см. рисунок) запрещенным переходом является...

- $4f-3d$
- $3p-2s$
- $3s-2s$
- $4s-3p$



**Решение.**

В соответствии с правилом отбора (25.6), при поглощении или испускании фотона в атоме возможны переходы с  $\Delta l = \pm 1$ . Из приведенных вариантов ответа этому условию не удовлетворяет только переход  $3s \rightarrow 2s$ , так как и начальное и конечное состояния являются состояниями с  $l = 0$ .

Правильным является ответ: **3s–2s**.

**Задание 25-3.**

Установить соответствие квантовых чисел, определяющих волновую функцию электрона в атоме водорода, их физическому смыслу:

1.  $n$

2.  $l$

3.  $m$

А. Определяет ориентации электронного облака в пространстве

Б. Определяет форму электронного облака

В. Определяет размеры электронного облака

Г. Собственный механический момент

○ 1–Г, 2–Б, 3–А

○ 1–А, 2–Б, 3–В

◎ 1–В, 2–Б, 3–А

○ 1–В, 2–А, 3–Г

**Решение.**

Главное квантовое число  $n$  определяет энергию соответствующего состояния в атоме. Чем больше энергия, тем больше размер электронного облака. Поэтому число  $n$  связано с размером этого облака. Азимутальное квантовое число  $l$  определяет форму электронного облака. Например, при  $l = 0$  это облако сферически симметрично, при  $l = 1$  оно представляет собой тор и т. д. Квантовое число  $m$  определяет проекцию магнитного момента атома на выделенное направление в пространстве.

Правильным является ответ: **1–В, 2–Б, 3–А**.

**Задание 25-4.**

Фотон с энергией 16,5 эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Выбитый электрон вдали от ядра атома будет иметь скорость  $v$ ...

○ 3  $10^8$  м/с

○ 1  $10^8$  м/с

○ 1  $10^7$  м/с

◎ 1  $10^6$  м/с

○ 1  $10^5$  м/с

**Решение.**

Чтобы выбить электрон из невозбужденного атома водорода, необходимо сообщить ему энергию 13,6 эВ. В данном случае фотон передал электрону несколько большую энергию. Разность энергий 16,5 эВ и 13,6 эВ пошла на кинетическую энергию электрона  $m v^2 / 2$ .

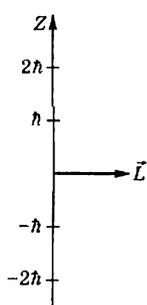
Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta\varphi}{m}},$$

где  $e$  — заряд электрона,  $m$  — его масса,  $\Delta\varphi$  — разность энергий (в эВ). Подставив соответствующие значения, получим  $v = 10^6$  м/с.

Правильным является ответ:  $10^6$  м/с.

### Задание 25-5.



На рисунке приведена одна из возможных ориентаций момента импульса электрона в  $p$ -состоянии. Какие еще значения может принимать проекция момента импульса на направление  $Z$  внешнего магнитного поля?

- $2\hbar$
- $-\hbar$
- $-2\hbar$
- $\hbar$

### Решение.

В атомной физике применяются заимствованные из спектроскопии условные обозначения состояний электрона с различными значениями момента импульса:  $s, p, d, f, g, h$  и т. д.

В  $p$ -состоянии  $l = 1$ .

При данном значении  $l$  квантовое число  $m$  ( $m$  — магнитное квантовое число, определяющее проекцию момента на некоторое направление  $Z$  (направление внешнего магнитного поля)) может принимать  $2l + 1$  различных значений:

$$m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, +1, l - 1, l.$$

Следовательно, проекция момента импульса электрона в  $p$ -состоянии может принимать значения:

$$+\hbar, 0, -\hbar.$$

Правильными являются ответы:  $-\hbar, \hbar$ .

## 26. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Дебройлевская длина волны частицы с импульсом  $p$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (26.1)$$

В нерелятивистском случае ( $v \ll c$ )

$$p = mv = \sqrt{2mE_k}, \quad (26.2)$$

где  $m, v, E_k$  — масса, скорость и кинетическая энергия частицы.

В релятивистском случае ( $v \sim c$ )

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}. \quad (26.3)$$

• Из приведенных формул следует связь длины волны де Бройля с кинетической энергией частицы:

а) в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}}, \quad (26.4)$$

б) в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}}. \quad (26.5)$$

• Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

а) для координат и проекций импульсов частицы

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar; \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar; \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar, \quad (26.6)$$

где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — неопределенности координат частицы и  $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$  — неопределенности проекций импульса частицы на соответствующую координатную ось;

б) для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar, \quad (26.7)$$

где  $\Delta E$  — неопределенности энергии данного энергетического состояния,  $\Delta t$  — неопределенность времени пребывания системы в этом состоянии.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 26-1.

Если протон и нейтрон двигаются с одинаковыми скоростями, то отношения их длин волн де Бройля  $\lambda_p/\lambda_n$  равно...

- |   |     |
|---|-----|
| ○ | 1/2 |
| ○ | 2   |
| ⊙ | 1   |
| ○ | 4   |

**Решение.**

Согласно гипотезе Луи де Бройля о том, что корпускулярно-волновой дуализм присущ всем микрочастицам, можно записать связь длины  $\lambda$  с импульсом  $p$  движущейся частицы

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $v$  — скорость и  $m_0$  — масса покоя частицы.

Если предположить, что  $m_p \approx m_n$  и протон и нейтрон движутся с одинаковыми скоростями, то длины волн де Бройля для протона и нейтрона одинаковы.

Правильным является ответ: 1.

**Задание 26-2.**

Высокая монохроматичность лазерного излучения обусловлена относительно большим временем жизни электронов в метастабильном состоянии  $\sim 10^{-3}$  с.

Учитывая, что постоянная Планка  $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16}$  эВ·с, ширина метастабильного уровня (в эВ) будет не менее...

- 6,6  $10^{-13}$
- 1,5  $10^{-13}$
- 1,5  $10^{-19}$
- 6,6  $10^{-19}$

**Решение.**

В соответствии с соотношением (26.7), ширина метастабильного уровня определяется временем жизни электрона на нем

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6,6 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}}{10^{-3} \text{ с}} = 6,6 \cdot 10^{-13} \text{ эВ.}$$

Правильным является ответ:  $6,6 \cdot 10^{-13}$ .

**Задание 26-3.**

Де Бройль распространил соотношение  $p = h/\lambda$  для фотона на любые волновые процессы, связанные с частицами, импульс которых равен  $p$ . Тогда, если скорость частиц одинакова, наименьшей длиной волны обладают...

- протоны
- нейтроны
- электроны
- $\alpha$ -частицы

**Решение.**

В нерелятивистском случае  $p = mv$ , поэтому  $\lambda = h/mv$ . Отсюда следует, что наименьшей длиной волны будут обладать наиболее массивные частицы. Из приведенных в вариантах ответа частиц таковыми являются  $\alpha$ -частицы, состоящие из двух протонов и двух нейтронов.

Правильным является ответ:  $\alpha$ -частицы.

**Задание 26-4.**

Если частицы имеют одинаковую длину волны де Бройля, то наименьшей скоростью обладает...

- позитрон
- протон
- $\alpha$ -частицы
- нейтрон

**Решение.**

Эта задача похожа на предыдущую. При одинаковой длине волны де Бройля наименьшую скорость будет иметь наиболее массивная частица. Поэтому правильным является ответ:  $\alpha$ -частицы.

## 27. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ МИКРОЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЯЩИКЕ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• В одномерном случае потенциальная энергия и волновая функция зависят лишь от одной из координат (пусть это будет координата  $x$ ). Стационарное уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (27.1)$$

где  $m$  — масса микрочастицы,  $U(x)$  — ее потенциальная энергия,  $E$  — полная энергия.

• Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (27.2)$$

• Вероятность  $dW$  обнаружить частицу в интервале от  $x$  до  $x + dx$  выражается соотношением

$$dW = |\psi(x)|^2 dx, \quad (27.3)$$

где квадрат модуля  $|\psi(x)|^2$  волновой функции определяет плотность вероятности найти частицу в точке  $x$ .

• Вероятность  $W$  обнаружить частицу в интервале от  $x_1$  до  $x_2$ :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx. \quad (27.4)$$

• Собственное значение энергии  $E_n$  микрочастицы, находящейся на энергетическом уровне с номером  $n$  в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме (рис. 27-1), определяется выражением

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (27.5)$$

Рис. 27-1

где  $m$  — масса частицы, а  $l$  — ширина потенциальной ямы.

• Соответствующая уровню  $n$  собственная волновая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0 \quad \text{для } x \leq 0 \text{ и } x \geq l, \\ \psi(x) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad \text{для } 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (27.6)$$

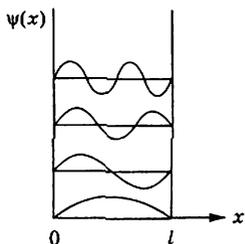


Рис. 27-2

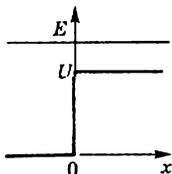


Рис. 27-3

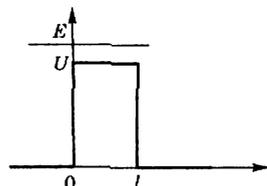


Рис. 27-4

• Собственные функции стационарных состояний имеют узлы — точки, в которых они обращаются в нуль. Число узлов на единицу меньше номера соответствующего собственного значения энергии (рис. 27-2).

• Коэффициенты отражения  $R$  и прохождения  $D$  частиц (волн де Бройля) через низкий ( $U < E$ ) потенциальный барьер бесконечной ширины (рис. 27-3):

$$R = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad (27.7)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — волновые числа волн де Бройля в областях  $U(x) \approx 0$  и  $U(x) = U$ :

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}; \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)}. \quad (27.8)$$

Как и для фотонов, волновой вектор частицы связан с ее импульсом  $\hbar k = p$ . Сумма коэффициентов отражения и прохождения равна единице:  $R + D = 1$ .

• Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера с постоянной высотой  $U < E$  (рис. 27-4):

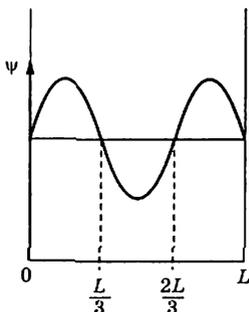
$$D \approx \exp \left[ -\frac{l}{\hbar} \sqrt{8m(U-E)} \right], \quad (27.9)$$

где  $l$  — ширина барьера.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 27-1.

Вероятность обнаружить электрон на участке  $(a, b)$  одномерного потенциального ящика с бесконечно



- $\frac{1}{3}$   
 ○  $\frac{1}{2}$   
 ○  $\frac{5}{6}$   
 ⊙  $\frac{2}{3}$

высокими стенками вычисляется по формуле,  $W = \int_a^b \omega dx$ , где  $\omega$  — плотность вероятности, определяемая  $\psi$ -функцией. Если  $\psi$ -функция имеет вид, указанный на рисунке, то вероятность обнаружить электрон на участке  $L/6 < x < 5L/6$  равна...

Решение.

На рисунке изображена волновая функция электрона в одномерном потенциальном ящике с бесконечно высокими стенами шириной  $L$ , которая имеет вид (27.6)

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

где  $x \in [0, L]$  и  $n$  — квантовое число, характеризующее состояние (для рассматриваемого в задаче рисунка  $n = 3$ ). Вероятность обнаружить электрон на участке  $L/6 \leq x \leq 5L/6$  определяется интегралом

$$W = \int_{L/6}^{5L/6} (\psi_n)^2 dx = \int_{L/6}^{5L/6} \frac{2}{L} \sin^2 \frac{3\pi}{L} x dx.$$

Используя тригонометрическое равенство

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2y),$$

перепишем искомый интеграл в виде

$$W = \frac{2}{L} \int_{L/6}^{5L/6} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{6\pi}{L} x\right) dx = \frac{1}{L} \left\{ x \Big|_{L/6}^{5L/6} - \frac{L}{6\pi} \sin \frac{6\pi}{L} x \Big|_{L/6}^{5L/6} \right\} = \frac{2}{3}.$$

Правильным является ответ:  $2/3$ .

### Задание 27-2.

Волновая функция частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной  $L$  имеет вид

$$\psi = A \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Величина импульса этой частицы в основном состоянии равна...

- $\frac{2\pi\hbar}{3L}$
- $\frac{\pi\hbar}{2L}$
- $\frac{\pi\hbar}{L}$
- $\frac{3\pi\hbar}{2L}$

Решение.

В квантовой механике среднее значение динамической переменной, представляемой оператором  $\hat{A}$  в состоянии, характеризуемом волновой функцией  $\psi$ , задается формулой

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dv.$$

Оператор координаты:  $\hat{x} = x$ .

Оператор импульса:  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ .

Оператор квадрата импульса:  $\hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

Для определения среднего значения проекции импульса частицы  $\langle p_x \rangle$  в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной  $L$  необходимо вычислить интеграл:

$$\langle \hat{p}_x \rangle = \int_0^L A \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} A \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = 0.$$

Для определения среднего значения квадрата проекции импульса частицы  $\langle \hat{p}_x^2 \rangle$  в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной  $L$  имеем:

$$\langle \hat{p}_x^2 \rangle = \int_0^L A \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) (-\hbar^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} A \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx,$$

где  $A$  — нормировочная постоянная

$$A^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi n x}{L} dx = 1, \left( A = \sqrt{\frac{2}{L}} \right), n = 1.$$

Дважды дифференцируем синус и получаем

$$\langle \hat{p}_x^2 \rangle = \frac{2}{L} \hbar^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2}.$$

Таким образом, абсолютная величина импульса частицы в основном состоянии в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной  $L$  равна:

$$\sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = \frac{\pi \hbar}{L}.$$

Правильным является ответ:  $\frac{\pi \hbar}{L}$ .

*Примечание.* Этот ответ можно было получить из принципа соответствия Бора, который утверждает, что классическая механика является предельным случаем квантовой. Действительно, из квантовой механики для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $L$  энергия квантуется:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2.$$

Следовательно, в основном состоянии

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Согласно классической механике кинетическая энергия может быть записана в виде:

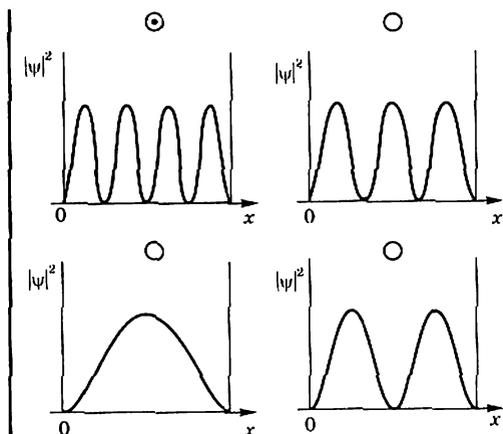
$$E = \frac{mV_x^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m}.$$

Сравнивая классический и квантовый результаты, находим

$$\langle p_x^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = \frac{\pi \hbar}{L}.$$

**Задание 27-3.**

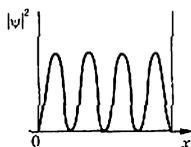
На рисунках приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Состоянию с квантовым числом  $n = 4$  соответствует...



**Решение.**

Количество нулей квадрата модуля волновой функции на единицу меньше номера  $n$  квантового состояния (см. рис. 27-2).

Поэтому правильным является ответ:

**28.****УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА  
(ОБЩИЕ СВОЙСТВА)****КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

• Общее уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \vec{r}) + U(\vec{r}) \Psi(t, \vec{r}), \quad (28.1)$$

где  $\Psi(t, \vec{r})$  — полная волновая функция,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $U(\vec{r})$  — потенциальная энергия частицы.

• Оператор Лапласа в декартовых координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} + \frac{\partial^2}{dz^2}. \quad (28.2)$$

• Для решения уравнения Шредингера должны удовлетворяться стандартные условия: конечность во всем пространстве, однозначность, непрерывность

самой  $\psi$ -функции и ее первой производной. Должно быть выполнено также условие нормировки

$$\int_V |\psi(\vec{r})|^2 dV = 1, \quad (28.3)$$

где интеграл берется по всему пространству.

• Общее решение уравнения Шредингера:

$$\Psi(t, \vec{r}) = e^{iEt/\hbar} \psi(\vec{r}), \quad (28.4)$$

где  $E$  — полная энергия частицы,  $\psi(\vec{r})$  — координатная часть полной волновой функции, удовлетворяющая стационарному уравнению Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (28.5)$$

• Энергетические уровни одномерного осциллятора с потенциальной энергией  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$  даются выражением

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28.6)$$

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 28-1.

Стационарным уравнением Шредингера для линейного гармонического осциллятора является уравнение...

$$\left. \begin{array}{l} \odot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0 \\ \odot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \\ \odot \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \\ \odot \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0 \end{array} \right\}$$

Решение.

Общее стационарное уравнение Шредингера имеет вид:

$$\Delta\psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(r))\psi(r) = 0,$$

где  $U$  — потенциальная энергия взаимодействия.

Для линейного гармонического осциллятора:

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2.$$

Таким образом, стационарное уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Правильным является ответ:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

### Задание 28-2.

Установите соответствие уравнений Шредингера их физическому смыслу:

- 1) нестационарное;
- 2) стационарное для микрочастицы в потенциальной одномерной яме;
- 3) стационарное для электрона в атоме водорода;
- 4) стационарное для гармонического осциллятора;

○ 1-В, 2-Б, 3-А, 4-Д

○ 1-Г, 2-Б, 3-А, 4-В

○ 1-А, 2-Б, 3-Г, 4-В

○ 1-Г, 2-В, 3-А, 4-Б

А.  $\nabla\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$

Б.  $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$

В.  $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$

Г.  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + U\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}$

Д.  $\nabla\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$

Решение.

Нестационарное уравнение Шредингера содержит производную по времени от волновой функции. Поэтому выбираем 1-Г. Стационарное уравнение Шредингера для частицы в бесконечной одномерной потенциальной яме не должно содержать выражения для энергии  $U$ , так как внутри ямы  $U = 0$ . Для этого случая подходят варианты В и Д, но выбираем именно В, так как уравнение Д относится не к одномерному, а к трехмерному случаю. Стационарное уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода должно содержать выражение для потенциальной энергии в кулоновском поле (зависимость, содержащую  $r$  в знаменателе). Это вариант А. И, наконец, в стационарном уравнении Шредингера для гармонического осциллятора должно присутствовать выражение для потенциальной энергии осциллятора (типа энергии сжатой пружинки). Этот вариант обозначен буквой Б.

Правильным является ответ: 1-Г, 2-В, 3-А, 4-Б.

# VII. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

## 29. ЯДРО. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ<sup>14</sup>

• *Существование атомного ядра было установлено в экспериментах Э. Резерфорда в 1911 г.*

• *Основную массу ядра составляют нуклоны: протоны и нейтроны. Количество протонов в ядре определяет его зарядовое число  $Z$ , а также заряд ядра, равный  $+Ze$ , где  $e$  — величина заряда электрона. Число нуклонов обозначается буквой  $A$  и называется массовым числом ядра. Ядро обозначается символом*

$${}^A_Z X, \quad (29.1)$$

где  $X$  — символ химического элемента. Число  $N$  нейтронов в ядре равно  $N = A - Z$ .

• *Ядра с одинаковым  $Z$ , но разными  $A$  называются изотопами. Ядра с одинаковым массовым числом  $A$  называются изобарами. Известны около 1500 ядер, отличающихся либо  $Z$ , либо  $A$ . В природе встречаются элементы с  $Z$  от 1 до 92, исключая технеций ( $Z = 42$ ) и прометий ( $Z = 61$ ). Трансурановые элементы ( $Z > 92$ ) были получены искусственным путем.*

• *Размеры ядер оцениваются числами  $\sim 10^{-15}$  м.*

• *Масса покоя  $M$  устойчивой системы  $n$  взаимодействующих частиц меньше суммы масс покоя  $m_i$  этих же частиц в свободном состоянии. Разность*

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_i - M \quad (29.2)$$

называется *дефектом масс системы частиц*.

• *Энергия связи ядра  ${}^A_Z X$ :*

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2 [Zm_p + (A - Z)m_n - M_X], \quad (29.3)$$

где  $m_p$ ,  $m_n$  и  $M_X$  — массы протона, нейтрона и ядра соответственно.

<sup>14</sup> В тестовых заданиях этой темы вопросы, связанные с элементарными частицами, не встречаются. Поэтому краткие теоретические сведения по данному вопросу будут приведены ниже в теме № 31.

Коэффициент пропорциональности  $c^2$  (квадрат скорости света) можно выразить в разных единицах и пользоваться наиболее удобной формой в соответствии с единицами измерения массы и энергии  $c^2 = 8,988 \cdot 10^{16}$  Дж/кг = 931,49 МэВ/а.е.м.

• Для расчетов энергии связи (дефекта масс) удобнее пользоваться выражением, куда входят не массы ядер, а массы нейтральных атомов:

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2 [Zm_{1H} + (A-Z)m_{1n} - M_{a,X}], \quad (29.4)$$

где  $m_{1H}$  и  $M_{a,X}$  — массы атома водорода и нейтрального атома с ядром  ${}^A_ZX$  соответственно.

• Удельная энергия связи (энергия связи на нуклон):

$$E_{\text{уд}} = E_{\text{св}}/A. \quad (29.5)$$

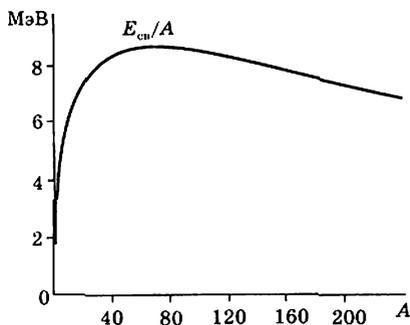


Рис. 29-1

График зависимости удельной энергии связи от массового числа  $A$  приведен на рис. 29-1. Из этого графика, в частности, следует, что с выделением энергии могут происходить реакции деления тяжелых ядер и синтез легких ядер.

• Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождающееся испусканием элементарных частиц.

• Альфа-распад — это испускание ядер гелия  ${}^4_2\text{He}$ . Схема протекания этой реакции



• Бета-распад — ядерные процессы с участием электронов или позитронов. Электрон или позитрон может испускаться ядром, либо один из электронов ближайших к ядру оболочек может захватываться ядром ( $e^-$ -захват). Схема электронного распада ( $\beta^-$ -распад):



• Основной закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (29.8)$$

где  $N = N(t)$  — число нераспавшихся атомов в момент времени  $t$ ;  $N_0 = N(0)$  — число нераспавшихся атомов в момент, принятый за начальный ( $t = 0$ );  $e$  — основание натуральных логарифмов;  $\lambda$  — постоянная радиоактивного распада.

• Период полураспада  $T_{1/2}$  — промежуток времени, за который число распавшихся атомов уменьшится в два раза. Период полураспада связан с постоянной распада  $\lambda$  соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (29.9)$$

• Величина  $\tau = 1/\lambda$ , обратная постоянной распада, называется средним временем жизни радиоактивного атома (промежуток времени, за которое число распавшихся ядер уменьшается в  $e$  раз). Связь  $\tau$  с периодом полураспада:

$$T_{1/2} = 0,69315\tau, \quad \tau = 1,4427T_{1/2}.$$

• Число  $\Delta N$  ядер, распавшихся в интервале времени  $t, t + \Delta t$ :

$$\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t) = N(t)(1 - e^{-\lambda\Delta t}). \quad (29.10)$$

При бесконечно малом интервале времени  $dt$  число  $-dN$  распавшихся атомов равно

$$dN = N\lambda dt. \quad (29.11)$$

• Активность  $A$  радиоактивного образца есть величина, равная отношению числа  $dN$  ядер, распавшихся в изотопе, к промежутку времени  $dt$ , за которое произошел распад. Активность определяется соотношением

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (29.12)$$

Как видно, активность образца со временем уменьшается по экспоненциальному закону:  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ .

• *Поглощенной дозой* излучения называется энергия, поглощенная единицей массы облучаемого объекта. В СИ эта единица получила название грей (Гй). Часто используется также внесистемная единица — рад: 1 рад = 0,01 Дж/кг, т. е. 1 Гй = 100 рад.

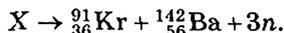
• Для отражения опасности облучения для живого организма вводят понятие *эквивалентной дозы*. Чтобы получить значение эквивалентной дозы, надо величину поглощенной дозы умножить на т. н. коэффициент качества излучения  $Q$ . Единицей измерения эквивалентной дозы в СИ служит зиверт (Зв): 1 Зв = 1 Гй ·  $Q$ . Используют также внесистемную единицу — бэр (биологический эквивалент рентгена): 1 бэр = 1 рад ·  $Q$ , т. е. 1 Зв = 100 бэр.

• Для характеристики радиационной обстановки на местности и в помещениях используют понятие *экспозиционной дозы*: количество рентгеновского или  $\gamma$ -излучения, выраженное в единицах заряда одного знака, порожденного им в единице массы сухого воздуха в данной точке пространства. Единицей измерения в СИ является Кл/кг. На практике часто используют внесистемную единицу — рентген (Р): 1 Р =  $2,58 \cdot 10^{-4}$  Кл/кг.

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

## Задание 29-1.

Неизвестный радиоактивный химический элемент самопроизвольно распадается по схеме:



Ядро этого элемента содержит...

- 94 протона и 144 нейтрона
- 94 протона и 142 нейтрона
- 92 протона и 144 нейтрона
- 92 протона и 142 нейтрона

## Решение.

Решение этой задачи связано с элементарным подсчетом числа протонов и нейтронов в продуктах реакции.

Число протонов, определяющих заряд ядер:  $36 + 56 = 92$ .

Число нейтронов:  $(91 - 36) + (142 - 56) + 3 = 144$ .

Правильным является ответ: **92 протона и 144 нейтрона.**

## Задание 29-2.

При  $\alpha$ -распаде значение зарядового числа  $Z$  меняется...

- не меняется
- на два
- на четыре
- на три

## Решение.

$\alpha$ -частица содержит два протона и два нейтрона, поэтому при  $\alpha$ -распаде заряд ядра уменьшается на два.

Правильным является ответ: **на два.**

## Задание 29-3.

$\alpha$ -излучение представляет собой поток...

- квантов электромагнитного излучения, испускаемых атомными ядрами при переходе из возбужденного состояния в основное
- электронов
- ядер атомов гелия
- протонов

## Решение.

$\alpha$ -частица содержит два протона и два нейтрона и представляет собой ядро атома гелия (другими словами,  $\alpha$ -частица является дважды ионизованным атомом гелия).

Правильным является ответ: **ядер атомов гелия.**

## 30. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• Ядерной реакцией называется процесс взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра (или ядер).

• Энергетическая схема ядерной реакции, когда сталкиваются две частицы 1 и 2 и в результате рождаются две новые частицы 1' и 2':

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + \Delta Q, \quad (30.1)$$

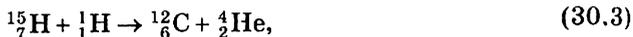
где  $\Delta Q$  — энерговыделение реакции

$$\Delta Q = c^2[m_1 + m_2 - (m_{1'} + m_{2'})], \quad (30.2)$$

где  $m_i$  и  $m_{i'}$  ( $i = 1, 2$ ) — массы покоя частиц до и после реакции соответственно. Это выражение очевидным образом обобщается на любое число участвующих в реакции частиц (которое в результате взаимодействия в принципе может измениться).

Если  $\Delta Q > 0$ , то реакция идет с выделением энергии, если  $\Delta Q < 0$ , то реакция происходит с поглощением энергии.

• Символическая запись ядерной реакции может быть дана в развернутом виде



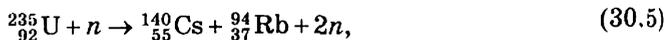
или в сокращенном



При записи в развернутом виде равны слева и справа суммы индексов — верхних (сохранение числа нуклонов) и нижних (сохранение электрического заряда).

При записи в сокращенном виде сначала записывают символ ядра мишени, в скобках на первом месте — обозначение бомбардирующей частицы, на втором, после запятой, — обозначение более легкой частицы, рождающейся в реакции, а за скобками — химический символ продукта ядерной реакции. Обычно используют следующие символические обозначения:  $p$  — протон;  $n$  — нейтрон,  $d$  — дейтрон (ядро изотопа водорода  ${}^2_1\text{H}$ ),  $t$  — тритон (ядро изотопа водорода  ${}^3_1\text{H}$ ),  $\alpha$  — альфа-частица (ядро изотопа гелия  ${}^4_2\text{He}$ ),  $e^-$  — электрон,  $e^+$  — позитрон (античастица электрона с той же массой и противоположным электрическим зарядом),  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  — нейтрино и антинейтрино,  $\gamma$  — гамма-квант.

• При делении некоторых ядер, например,



количество нейтронов на выходе реакции больше, чем на входе, в результате чего возможно возникновение цепной реакции деления.

ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ<sup>15</sup>

## Задание 30-1.

На рисунке показана область существования  $\beta$ -активных ядер. Прямая линия соответствует равновесным значениям  $Z_\beta$ , соответствующим  $\beta$ -стабильным ядрам. Здесь  $Z$  — порядковый номер элемента, а  $N$  — число нейтронов в ядре. В области  $Z < Z_\beta$ ...



- ядра обладают избытком протонов и  $\beta^-$ -активны
- ⊙ ядра обладают избытком нейтронов и  $\beta^-$ -активны
- ядра обладают избытком протонов и  $\beta^+$ -активны
- ядра обладают избытком нейтронов и  $\beta^+$ -активны

## Решение.

Схематическая диаграмма известных в настоящее время ядер приведена на рисунке. При рассмотрении этой диаграммы можно видеть ряд интересных особенностей систематики различных ядер.

1. Устойчивые ядра с порядковыми номерами  $Z \leq 20$  имеют приблизительно одинаковое число протонов и нейтронов ( $Z \approx N$ ).

2. При  $Z \geq 20$  в устойчивых ядрах начинает возрастать отношение числа нейтронов к числу протонов  $N/Z$ . Устойчивые ядра располагаются вдоль узкой полосы значений  $N - Z$ , называемой долиной устойчивости. Линия, соответствующая  $\beta$ -стабильным ядрам, может быть аппроксимирована соотношением:

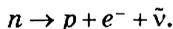
$$Z_\beta = \varepsilon N,$$

(где  $\varepsilon \approx 0,7$ ). Это означает, что стабильные ядра содержат больше нейтронов, чем протонов. Причину этого эффекта легко понять, если вспомнить, что ядерные силы — **близкодействующие**, а кулоновские — **дальнодействующие**. С ростом атомного номера увеличивается кулоновское отталкивание протонов, и поэтому для поддержания стабильности ядер требуется большее число нейтронов, у которых имеется лишь ядерное притяжение. Следовательно, с ростом  $Z$  возрастает отношение  $N/Z$ .

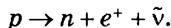
3. Ядра, расположенные по склонам долины устойчивости (выше или ниже линии  $Z_\beta = \varepsilon N$ ) могут переходить в устойчивое состояние путем радиоактивности распада, испуская  $\beta^+$  или  $\beta^-$ -частицы. (Конечно, для более массивных ядер возможен  $\alpha$ -распад, а некоторые ядра, стремясь к стабильности, самопроизвольно делятся.)

<sup>15</sup> Не следует удивляться, что в заданиях этой темы преобладают вопросы, связанные с радиоактивностью, которые рассматривались в предыдущей теме.

4. Ядра, расположенные ниже долины устойчивости  $Z < Z_{\beta} = \varepsilon N$ , имеют избыток нейтронов (нейтроноизбыточные). В нейтроноизбыточных ядрах возможен  $\beta^{-}$ -распад, сопровождающийся превращением нейтрона в протон и вылетом электрона и антинейтрино:



5. Ядра, расположенные выше долины устойчивости  $Z > Z_{\beta} = \varepsilon N$  содержат избыток протонов и распадаются путем  $\beta^{+}$ -распада:



Следовательно, в области  $Z < \varepsilon N$  ядра обладают избытком нейтронов и  $\beta^{-}$ -активны.

Правильным является ответ: ядра обладают избытком нейтронов и  $\beta^{-}$ -активны.

### Задание 30-2.

Сколько  $\alpha$ - и  $\beta^{-}$ -распадов должно произойти, чтобы  ${}_{92}^{238}\text{U}$  превратился в стабильный изотоп свинца  ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ ?

- 9  $\alpha$ -распадов и 5  $\beta^{-}$ -распадов
- 6  $\alpha$ -распадов и 8  $\beta^{-}$ -распадов
- 10  $\alpha$ -распадов и 4  $\beta^{-}$ -распадов
- 8  $\alpha$ -распадов и 6  $\beta^{-}$ -распадов

### Решение.

При  $\alpha$ -распаде заряд ядра уменьшается на две, а массовое число — на четыре единицы. При  $\beta^{-}$ -распаде заряд ядра увеличивается на одну единицу (за счет испускания электрона). Поэтому при превращении урана в свинец должно произойти  $(238 - 206)/4 = 8$   $\alpha$ -распадов, во время которых заряд ядра уменьшается на 16 единиц, и 6  $\beta^{-}$ -распадов, чтобы общее уменьшение заряда ядра стало равно  $(92 - 82) = 10$ .

Правильным является ответ: 8  $\alpha$ -распадов и 6  $\beta^{-}$ -распадов.

### Задание 30-3.

Какая доля радиоактивных атомов распадётся через интервал времени, равный двум периодам полураспада?

- 50%
- 90%
- Все атомы распадутся
- 25%
- 75%

### Решение.

За интервал времени, равный одному периоду полураспада, распадается половина всех ядер. За второй такой же интервал распадет половина от оставшейся после первого интервала половины ядер. Значит, всего распадется

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  часть всех ядер.

Правильным является ответ: 75%.

## 31. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ<sup>16</sup>

• Элементарными частицами называются мельчайшие известные в настоящее время частицы материи. Этот термин в значительной мере условен. Характерной особенностью элементарных частиц является их способность к взаимным превращениям.

• Классификация элементарных частиц основана на иерархии фундаментальных взаимодействий в природе. Таких взаимодействий известно четыре: *сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное*<sup>17</sup>. Элементарные частицы, участвующие во всех видах взаимодействия, называются *адронами*. Они, в свою очередь, подразделяются на *мезоны* (не несущие барионного заряда) и *барионы* (нуклоны и гипероны).

Число адронов достигает 350. Элементарные частицы, не участвующие в сильных взаимодействиях, называются лептонами. Всего их шесть, но для каждой имеется своя античастица. К лептонам относятся электроны, мюоны, таоны и три типа нейтрино.

• Элементарным частицам приписываются следующие квантовые числа, некоторые из них называются зарядами:

$Q$  — электрический заряд;

$L$  — лептонный заряд;

$B$  — барионный заряд;

$T$  — изотопический спин;

$T_z$  — проекция изотопического спина на ось  $z$ ;

$S$  — странность;

$Y$  — гиперзаряд.

• Связи между квантовыми числами:

$$S = 2Q - B, \quad (31.1)$$

$$Y = B + S, \quad (31.2)$$

$$Q = T_z + Y/2 = T_z + (B + S)/2. \quad (31.3)$$

• При взаимодействии частиц выполняются законы сохранения  $Q$ ,  $L$  и  $B$  зарядов (т. е. значения этих зарядов слева и справа в выражении какой-либо реакции должны быть равны). В сильных взаимодействиях выполняются также законы сохранения  $S$  (или  $Y$ ),  $T$  и его проекции  $T_z$ .

<sup>16</sup> Судя по примерам тестовых заданий, приведенным в демонстрационных вариантах на сайте [www.fero.ru](http://www.fero.ru), основное внимание в этом разделе уделено не столько ядерным реакциям, сколько процессам с участием элементарных частиц. Поэтому краткое теоретическое введение посвящено классификации и поведению элементарных частиц.

<sup>17</sup> Более подробно об этом будет идти речь в следующем разделе.

• В 1964 г. была выдвинута гипотеза о том, что все адроны являются композицией сравнительно небольшого числа «истинно» элементарных частиц — кварков, имеющих дробный электрический заряд и не существующих отдельно друг от друга. Предполагается, что всего существует шесть различных типов (ароматов) кварков ( $d$ ,  $u$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $t$ ), каждый из которых может находиться в трех различных состояниях (цветах). Кроме того, каждому кварку соответствует антикварк. Итого получается 36 кварковых состояний адронной формы материи.

• Некоторые квантовые числа кварков и лептонов приведены в таблице 31-1

Таблица 31-1

Частица	$Q$	$B$	$L$
$e^-$	-1	0	1
$\mu^-$	-1	0	1
$\tau^-$	-1	0	1
$\nu_e$	0	0	1
$\nu_\tau$	0	0	1
$\nu_\mu$	0	0	1
$d$	-1/3	1/3	0
$u$	2/3	1/3	0
$s$	-1/3	1/3	0
$c$	2/3	1/3	0
$b$	-1/3	1/3	0
$t$	2/3	1/3	0

- Квантовые числа античастиц имеют противоположные знаки.
- В таблице 31-2 приведен кварковый состав некоторых адронов.

Таблица 31-2

Частица	Кварковый состав	Масса (МэВ)
Барионы		
$p$	$(u, u, d)$	938,28
$n$	$(u, d, d)$	939,57
$\Lambda^0$	$(u, d, s)$	1115,60
$\Sigma^-$	$(d, d, s)$	1197,34
$\Sigma^0$	$(u, d, s)$	1192,46
$\Sigma^+$	$(u, u, s)$	1189,36
Мезоны		
$\pi^-$	$(d, \bar{u})$	139,6
$\pi^0$	$(u, \bar{u}), (d, \bar{d})...$	135,0
$\pi^+$	$(u, \bar{d})$	139,6
$K^-$	$(s, \bar{u})$	493,7
$K^0$	$(d, \bar{s})$	497,7
$K^+$	$(u, \bar{s})$	433,7

## ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

## Задание 31-1.

Реакция  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \nu_\mu$  не может идти из-за нарушения закона сохранения...

- лептонного заряда
- электрического заряда
- спинового момента импульса
- барионного заряда

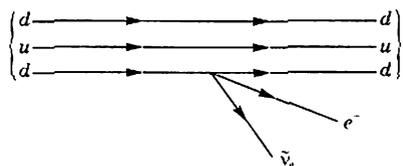
## Решение.

Эта реакция не может идти из-за нарушения закона сохранения лептонного заряда. Действительно, суммарный лептонный заряд слева равен 1, а справа — 3 (все лептоны имеют лептонный заряд, равный 1).

Правильным является ответ: лептонного заряда.

## Задание 31-2.

На рисунке показана кварковая диаграмма  $\beta^-$ -распада нуклона. Эта диаграмма соответствует реакции...



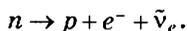
- $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$
- $p \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$
- $p \rightarrow n + e^- + \tilde{\nu}_e$
- $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$

## Решение.

В настоящее время принято считать, что вся материя (в том числе и более сотни микрочастиц — протоны, нейтроны и др.) состоит из двух типов первичных частиц, которые и будем называть элементарными, — лептонов и кварков.

Кварковый состав некоторых барионов и мезонов указан в таблице 31-2.

В начальном состоянии нуклон состоит из двух  $d$ -кварков и одного  $u$ -кварка. Это нейтрон. В конечном состоянии нуклон состоит из двух  $u$ -кварков и одного  $d$ -кварка. Это протон. Таким образом, рассматриваемая диаграмма соответствует реакции



Правильным является ответ:  $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ .

## 32.

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящее время известны четыре *фундаментальных* (т. е. не сводящихся друг к другу) *взаимодействия*.

*Сильное взаимодействие* имеет характер притяжения между большинством элементарных частиц, в частности, оно обеспечивает связь нуклонов (протонов и нейтронов) в атомных ядрах. Это взаимодействие проявляется только на очень малых расстояниях, сравнимых с размерами ядер ( $\sim 10^{-13}$  см),

т. е. является короткодействующим и на этих расстояниях существенно (более чем в сто раз) превосходит электромагнитное взаимодействие. Количественно сильное взаимодействие характеризуется параметром

$$\alpha_s = \frac{g^2}{\hbar c} \approx 14,6, \quad (32.1)$$

где  $g$  — константа сильного взаимодействия (не путать с ускорением свободного падения),  $\hbar$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света.

*Электромагнитное взаимодействие* обуславливает связь электрически заряженных частиц в атомах и молекулах, распространяется на значительные расстояния и описывается известными законами электричества и магнетизма. Это взаимодействие на два порядка слабее сильного и характеризуется параметром

$$\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (32.2)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

*Слабое взаимодействие* проявляется при распаде некоторых элементарных частиц (например, при  $\beta$ -распаде нейтрона:  $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ , где  $p^+$  — протон,  $e^-$  — электрон,  $\bar{\nu}_e$  — электронное антинейтрино). Оно осуществляется на очень малых расстояниях ( $\sim 10^{-16}$  м) и играет важную роль в термоядерных реакциях, поэтому активно участвует в эволюции звезд и других космических объектов. Параметр, характеризующий слабое взаимодействие,

$$\alpha_w = \frac{G_F(m_p c^2)^2}{(\hbar c)^3} \approx 10^{-10}, \quad (32.3)$$

где  $G_F \cong 1,166 \cdot 10^{-5} (\hbar c)^3 \text{ ГэВ}^2 \cong 1,4 \cdot 10^{-62} \text{ Дж}\cdot\text{м}^3$  — константа Ферми,  $m_p$  — масса протона.

Наконец, *гравитационное взаимодействие* является самым универсальным, так как осуществляется между всеми материальными объектами. Оно распространяется на очень большие расстояния (как и электромагнитное), однако, в силу своей малости, играет несущественную роль в микромире вплоть до расстояний порядка  $10^{-33}$  см (так называемая «планковская длина»). Ожидается, что на столь малых расстояниях гравитационное взаимодействие становится «равноправным» участником событий. С другой стороны, гравитация является основным фактором, определяющим поведение объектов мегамира. Параметр, характеризующий «интенсивность» гравитационного взаимодействия,

$$\alpha_g \left[ \frac{\sqrt{(Gm_p)^2}}{\hbar c} \right] \cong 5,3 \cdot 10^{-18}, \quad (32.4)$$

где  $G \cong 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2\text{кг}^{-1}\text{с}^{-2}$  — гравитационная постоянная. Величину  $\sqrt{Gm_p}$  иногда называют гравитационным зарядом протона.

Все эти взаимодействия в масштабах микромира имеют по своей природе квантовый характер и могут интерпретироваться как обмен квантами соответствующего поля. Более того, фактически теряется разница между части-

цами вещества и частицами (квантами) поля, поэтому, в соответствии с общепринятой в настоящее время *стандартной моделью*, все известные на сегодняшний день элементарные частицы делятся на два больших класса: частицы — источники взаимодействий и частицы — переносчики взаимодействий. Частицы первого класса<sup>18</sup>, в свою очередь, подразделяются на две группы, отличающиеся тем, что частицы первой группы — *адроны*<sup>19</sup> — участвуют во всех четырех фундаментальных взаимодействиях, включая сильные, а частицы второй группы — *лептоны* — не участвуют в сильных взаимодействиях. К адронам относится очень много различных элементарных частиц, большинство из которых имеет своего «двойника» — *античастицу*. Как правило, это довольно массивные частицы, с малым временем жизни. Исключение составляют нуклоны, причем считается, что время жизни протона превышает возраст Вселенной. Лептонами являются шесть элементарных частиц: электрон  $e$ , *мюон*  $\mu$  и *таон*  $\tau$ , а также связанные с ними три *нейтрино*  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$ . Кроме того, каждая из этих частиц также имеет своего «двойника» — соответствующую античастицу. Все лептоны настолько похожи друг на друга по некоторым, специфическим в масштабах микромира свойствам, что мюон и таон можно было бы назвать тяжелыми электронами, а нейтрино — электронами, «потерявшими» заряд и массу. В то же время, в отличие от электронов, мюоны и таоны являются радиоактивными, а все нейтрино чрезвычайно слабо взаимодействуют с веществом и поэтому настолько неуловимы, что, например, их поток проходит через Солнце, практически не ослабляясь.

Стандартная модель предполагает, что все адроны являются суперпозицией нескольких *кварков* и *антикварков* (см. таблицу 31-2 в предыдущем разделе).

Генеральным направлением в физике микромира является установление единой первопричины всех четырех фундаментальных взаимодействий, т. е. создание такой теории, в которой все известные сейчас взаимодействия были бы частными случаями одного фундаментального взаимодействия. Первый серьезный успех на пути к единому описанию всех взаимодействий был достигнут в конце 1960-х гг., когда удалось найти согласующийся с опытом вариант теории, объединяющий электромагнитное и слабое взаимодействия. Авторам этой *теории электрослабого взаимодействия* А. Саламу, С. Вайнбергу и Ш. Глэшоу в 1979 г. была присуждена Нобелевская премия.

Следующим шагом стала попытка физиков-теоретиков объединить электрослабое и сильное взаимодействия. Речь идет о так называемом *Великом объединении* (Grand Unification), в котором оба названных взаимодействия выступали бы как разные аспекты одного явления. И здесь достигнуты впечатляющие результаты, которые, однако, нуждаются в экспериментальном подтверждении.

Что касается *суперобъединения* всех четырех фундаментальных взаимодействий, то на этом пути делаются только первые шаги. В рамках обычной

<sup>18</sup> О них шла речь в предыдущем разделе.

<sup>19</sup> Названия «адрон» и «лептон» происходят от греческих слов «тяжелый» и «легкий».

теории поля, где частицы рассматриваются как точечные, не удается построить ни одной удовлетворительной квантовой теории гравитации. В настоящее время большие надежды возлагаются на *теорию суперструн*, которая развивается с удивительной скоростью, так как все больше и больше физиков-теоретиков участвуют в ее разработке.

### ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

#### Задание 32-1.

В процессе электромагнитного взаимодействия принимают участие...

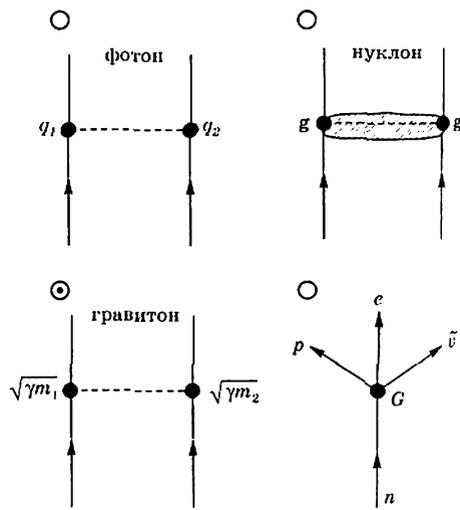
- ⊙ фотоны
- нейтрино
- нейтроны

Решение.

Правильным является ответ: **фотоны** (см. краткое теоретическое введение).

#### Задание 32-2.

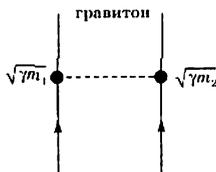
Укажите квантовую схему, соответствующую гравитационному взаимодействию.



Решение.

На приведенных в задании вариантах ответов показаны так называемые диаграммы Фейнмана для разных типов фундаментальных взаимодействий. Первая диаграмма относится к электромагнитному взаимодействию, вторая — к сильному, третья — к гравитационному, четвертая — к слабому.

Правильным является ответ:



**Задание 32-3.**

Установите соответствие групп элементарных частиц характерным типам фундаментальных взаимодействий:

1. фотоны
  2. лептоны
  3. адроны
- А. сильное  
Б. электромагнитное  
В. слабое

- 1–Б, 2–В, 3–А  
 1–А, 2–В, 3–Б  
 1–В, 2–А, 3–Б

**Решение.**

Как было сказано в теоретическом введении, в сильном взаимодействии участвуют только адроны, характерным для лептонов является участие в слабых взаимодействиях (хотя они участвуют также и в электромагнитных, и в гравитационных взаимодействиях), а фотоны являются переносчиками электромагнитных взаимодействий.

Правильным является ответ: 1–Б, 2–В, 3–А.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ, КОТОРЫЕ МОГУТ ПОНАДОБИТЬСЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Наименование	Обозначение	Величина
Ускорение свободного падения	$g$	9,81 м/с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная	$G$	6,67 · 10 <sup>-11</sup> м <sup>3</sup> /кг·с <sup>2</sup>
Постоянная Авогадро	$N$	6,02 · 10 <sup>23</sup> моль <sup>-1</sup>
Универсальная газовая постоянная	$R$	8,31 Дж/моль·К
Постоянная Больцмана	$k$	1,38 · 10 <sup>-23</sup> Дж/К
Элементарный заряд	$e$	1,60 · 10 <sup>-19</sup> Кл
Масса электрона	$m_e$	9,11 · 10 <sup>-31</sup> кг
Масса протона	$m_p$	1,673 · 10 <sup>-27</sup> кг
Масса нейтрона	$m_n$	1,675 · 10 <sup>-27</sup> кг
Атомная единица массы	<i>а.е.м.</i>	1,66 · 10 <sup>-27</sup> кг
Скорость света в вакууме	$c$	3,00 · 10 <sup>8</sup> м/с
Постоянная Планка	$h$	6,63 · 10 <sup>-34</sup> Дж·с
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	8,85 · 10 <sup>-12</sup> Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0$	4π · 10 <sup>-7</sup> Гн/м
Постоянная Ридберга	$R$	1,097 · 10 <sup>7</sup> м <sup>-1</sup>

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Савельев И. В.* Курс физики. В 3 тт. СПб.: Издательство «Лань», 2008.
2. *Яворский Б. М., Пинский А. А.* Основы физики. В 2 тт. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
3. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. В 5 тт. М.: Высшая школа, 1983–1990.
4. *Иродов И. Е.* Механика. Основные законы. М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.
5. *Иродов И. Е.* Электромагнетизм. Основные законы. М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.
6. *Трофимова Т. И.* Краткий курс физики. М.: Высшая школа, 2000.
7. *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике. СПб.: Издательство «Лань», 2007.
8. *Фирганг Е. В.* Руководство к решению задач по курсу физики. СПб.: Издательство «Лань», 2008.

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Тематическая структура аттестационных педагогических измерительных материалов (АПИМ)	6
Методические рекомендации	11
<b>I. Механика .</b>	<b>13</b>
1. Кинематика поступательного и вращательного движения	13
2. Динамика точки и поступательного движения твердого тела .	19
3. Динамика вращательного движения твердого тела	23
4. Работа и энергия .	27
5. Законы сохранения момента импульса и энергии	33
6. Элементы специальной теории относительности .	36
<b>II. Молекулярная (статистическая) физика и термодинамика .</b>	<b>40</b>
7. Распределения Максвелла и Больцмана	40
8. Внутренняя энергия и теплоемкость газов	44
9. Второе начало термодинамики. Энтропия. Циклы .	46
10. Первое начало термодинамики. Работа при изопроцессах	50
<b>III. Электричество и магнетизм</b>	<b>53</b>
11. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме	53
12. Законы постоянного тока .	63
13. Магнитостатика	66
14. Электрическое и магнитное поле в веществе	71
15. Свойства электрических и магнитных полей .	75
16. Уравнения Максвелла	79
<b>IV. Колебания волны</b>	<b>84</b>
17. Свободные и вынужденные колебания	84
18. Сложение гармонических колебаний .	89
19. Волны. Уравнение волны .	92
20. Энергия волны. Перенос энергии волной . . . . .	94

<b>V. Волновая и квантовая оптика</b>	98
21. Интерференция и дифракция света	98
22. Поляризация и дисперсия света .	106
23. Тепловое излучение. Фотоэффект	110
24. Эффект Комптона. Световое давление	115
<b>VI. Квантовая физика и физика атома .</b>	118
25. Спектр атома водорода. Теория Бора для водородоподобных систем.	118
26. Волны де Бройля	122
27. Волновая функция для микрочастицы в потенциальном ящике .	125
28. Уравнение Шредингера (общие свойства)	129
<b>VII. Элементы ядерной физики и физики элементарных частиц .</b>	132
29. Ядро. Элементарные частицы	132
30. Ядерные реакции .	136
31. Законы сохранения в ядерных реакциях	139
32. Фундаментальные взаимодействия .	141
<b>Приложение</b>	146
Справочные данные, которые могут понадобиться при выполнении тестовых заданий .	146
<b>Литература</b> . . . . .	147

*Николай Павлович КАЛАШНИКОВ,  
Николай Михайлович КОЖЕВНИКОВ*

**ФИЗИКА**  
**ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ**  
**БАЗОВЫХ ЗНАНИЙ**

*Учебное пособие*

Генеральный директор *А. Л. Киоп*  
Директор издательства *О. В. Смирнова*  
Художественный редактор *С. Ю. Малахов*  
Корректоры *В. О. Логунова, А. М. Плетнева*  
Подготовка иллюстраций *Н. А. Платонова*  
Выпускающие *Е. А. Антипова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07  
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

lan@lpbl.spb.ru

www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72.

Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 27.02.09.

Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100<sup>1/16</sup>.

Печать офсетная. Усл. п. л. 13. Тираж 3000 экз.

Заказ № 686

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Издательско-  
полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, 32.

Тел./факс (8182) 64-14-54, тел.: (8182) 65-37-65, 65-38-78, 20-50-52

www.ippps.ru, e-mail: zakaz@ippps.ru

# ГДЕ КУПИТЬ

## ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги,  
достаточно обратиться в любую из торговых компаний  
Издательского Дома «ЛАНЬ»:

**по России и зарубежью**

«ЛАНЬ-ТРЕЙД»

192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
тел.. (812) 567-85-78, 567-14-45, 567-85-82

тел./факс: (812) 567-54-93

e-mail: trade@lanpbl.spb.ru

ICQ: 446-869-967

[www.lanpbl.spb.ru/price.htm](http://www.lanpbl.spb.ru/price.htm)

**в Москве и в Московской области**

«ЛАНЬ-ПРЕСС»

109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19

тел.. (499) 178-65-85

e-mail: lanpress@ultimanet.ru

**в Краснодаре и в Краснодарском крае**

«ЛАНЬ-ЮГ»

350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1

тел.. (8612) 74-10-35

e-mail: lankrd98@mail.ru

## ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:

«Сова»: <http://www.symplex.ru>

«Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>

«Библион»: <http://www.biblion.ru>

также Вы можете отправить заявку  
на покупку книги по адресу:

192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13