

629.78.076.6
E-73



Ю. А. ЕРМИЛОВ
Е. Е. ИВАНОВА
С. В. ПАНТЮШИН

УПРАВЛЕНИЕ
СБЛИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКИХ
АППАРАТОВ



МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

629.48.076.6

Б-43

Ю. А. ЕРМИЛОВ

Е. Е. ИВАНОВА

С. В. ПАНТЮШИН

УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Под редакцией Е. П. ПОПОВА

✓

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

ЛЕНИНГРАД

236074

6Т5.2

Е 73

УДК 629.154.4

Управление сближением космических аппаратов.
Ермилов Ю. А., Иванова Е. Е., Пантюшин С. В. Серия «Механика космического полета», Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 448 стр.

В книге дается систематическое изложение проблем и методов управления и построения алгоритмов управления сближением космических аппаратов, реализуемых с помощью ЭВМ.

Определена структура алгоритмов управления, соответствующих различным методам наведения, и изложена методика их синтеза. Даны решения (аналитические и численные) уравнений абсолютного и относительного движения космических аппаратов, которые могут быть положены в основу алгоритмов управления. Сформулированы алгоритмы определения управляющих воздействий и в результате исследования методических ошибок установлены области их применения. Рассмотрены вопросы построения импульсных программ управления без учета и с учетом ошибок измерений и исполнения и методы оптимизации этих программ.

Книга рассчитана на специалистов в области космической техники.

Илл. 96, библи. 129.

*Юрий Алексеевич Ермилов,
Елена Евгеньевна Иванова,
Станислав Васильевич Пантюшин*

УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

(Серия «Механика космического полета»)

М., 1977 г., 448 стр. с илл.

Редактор Ю. Г. Гуревич

Техн. редактор Н. В. Кошелева

Корректоры Э. В. Антонова, Л. П. Боровина

Сдано в набор 28/VII 1977 г. Подписано к печати 1/XII 1977 г. Бумага 84×108^{1/2}. Физ. печ. л. 14. Условн. печ. л. 23,52. Уч.-изд. л. 23,2. Тираж 1800 экз. Т-20759. Цена книги 2 р. 60 к. Заказ № 2700

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

30501—178
Е 053(02)—77 157-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1977

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Г л а в а 1. Общие проблемы управления и построения алгоритмов управления сближением космических аппаратов	17
§ 1.1. Задача управления сближением и средства ее решения	17
§ 1.2. Методы наведения, используемые при сближении	22
§ 1.3. Способы формирования управляющих воздействий	30
§ 1.4. Некоторые принципы построения алгоритмов управления	35
Г л а в а 2. Постановка основных задач, решаемых алгоритмом управления	42
§ 2.1. Модели движения космических аппаратов	42
§ 2.2. Модель работы системы управления	51
§ 2.3. Основные системы координат	55
§ 2.4. Постановка и методы решения задач оценки	60
§ 2.5. Постановка задач управления	64
Г л а в а 3. Законы управления сближением по методу параллельного наведения	70
§ 3.1. Уравнения относительного движения в визирной системе координат	70
§ 3.2. Общий вид законов управления и методика их синтеза	74
§ 3.3. Законы дискретного управления	78
§ 3.4. Логика раздельной коррекции	84
§ 3.5. Схемы совместной коррекции	87
§ 3.6. Некоторые аналитические соотношения	92
§ 3.7. Оценка эффективности и определение оптимальных параметров законов управления	101
Г л а в а 4. Решение двухимпульсной задачи управления в абсолютной системе координат	107
§ 4.1. Необходимые соотношения задачи двух тел	107
§ 4.2. Универсальное представление кеплеровых движений	113
§ 4.3. Решение задачи управления как задачи определения орбиты по двум положениям	118

§ 4.4. Определение траектории сближения с помощью итераций по универсальным переменным . . .	123
§ 4.5. Определение траектории сближения методом вариации элементов	127
Глава 5. Аналитическое решение уравнений относительного движения	133
§ 5.1. Уравнения относительного движения в орбитальной системе координат.	133
§ 5.2. Связь между относительными координатами и вариациями элементов опорной орбиты	143
§ 5.3. Общее решение линеаризованных уравнений	149
§ 5.4. Некоторые свойства и приложения решений уравнений в вариациях	156
§ 5.5. Общее решение уравнений относительного движения во втором приближении	164
§ 5.6. Об аналитическом решении точных уравнений относительного движения	167
Глава 6. Решение задач управления на основе аналитических решений уравнений относительного движения.	174
§ 6.1. Решение двухимпульсной задачи управления в линейном приближении	174
§ 6.2. Определение корректирующих импульсов в случае неполной коррекции промаха	181
§ 6.3. Определение корректирующих импульсов с заданным направлением	183
§ 6.4. Трехимпульсные и четырехимпульсные программы горизонтальных коррекций	196
§ 6.5. Законы асимптотического торможения	207
§ 6.6. О реализации метода свободных траекторий в визирной системе координат.	212
§ 6.7. Определение корректирующих импульсов на основе решения точных уравнений относительно движения	219
Глава 7. Решение двухимпульсной задачи управления на основе численного интегрирования уравнений относительного движения	225
§ 7.1. Постановка задачи	225
§ 7.2. Пределы применения упрощенных алгоритмов расчета корректирующих импульсов	227
§ 7.3. Обзор численных методов интегрирования	230
§ 7.4. Анализ методов интегрирования Рунге — Кутты для решения задачи прогноза конечных параметров	234
§ 7.5. Оптимизация свободных параметров в методах интегрирования Рунге — Кутты	240
Глава 8. Оптимальное детерминированное управление сближением	247
§ 8.1. Оптимизация двухимпульсной программы по времени сближения	247

§ 8.2. Оптимизация двухимпульсной программы при малом изменении начального или конечного времени	252
§ 8.3. Многоимпульсные программы, оптимальные по квадратичному показателю качества	255
§ 8.4. Преобразование импульсных программ межорбитального перехода в программы сближения	257
§ 8.5. Оптимальные двухимпульсные программы управления в нелинейной постановке	262
Глава 9. Методические погрешности решения задачи сближения	274
§ 9.1. Методические погрешности приближенных алгоритмов расчета импульсов сближения	274
§ 9.2. Методы повышения точности расчета импульсов сближения	289
§ 9.3. Погрешности наведения вследствие возмущений кеплерова движения	296
§ 9.4. Погрешности наведения вследствие ограниченности тяги	301
Глава 10. Построение оптимальных программ коррекций	303
§ 10.1. Определение точки последней коррекции	303
§ 10.2. Выбор начального приближения для распределения моментов коррекций на интервале сближения	309
§ 10.3. Определение потребных энергетических затрат	311
§ 10.4. Методика оптимизации программы коррекций	313
§ 10.5. Основные свойства оптимальных программ коррекций	316
Глава 11. Численные методы оценки параметров движения космических аппаратов	324
§ 11.1. Основные характеристики и классификация методов оценки	324
§ 11.2. Итерационные методы оценки по измерениям r и $\dot{r}$	329
§ 11.3. Начальное приближение оценок	342
§ 11.4. Упрощение итерационных методов оценки по измерениям r и $\dot{r}$	348
§ 11.5. Итерационные методы оценки при полном составе измерений	356
Глава 12. Аналитические методы оценки параметров движения космических аппаратов	369
§ 12.1. Оценки параметров движения при полном составе измерений	369
§ 12.2. Оценка параметров движения методом наименьших квадратов	373
§ 12.3. Метод оценки, основанный на условной линеаризации уравнений движения	378

§ 12.4. Полиномиальная аппроксимация параметров движения космических аппаратов	387
§ 12.5. Обработка измерений и многоимпульсные программы управления сближением	393
Глава 13. Оптимальные оценки параметров движения и управление сближением	402
§ 13.1. Оптимальные оценки, использующие уравнения движения	402
§ 13.2. Оптимальные оценки, использующие полиномиальную аппроксимацию параметров движения	414
§ 13.3. Об оптимизации управления сближением по оценкам параметров движения	423
§ 13.4. Некоторые особенности реализации метода свободных траекторий с помощью БЦВМ	429
Приложение 1. Оценки констант интегрирования уравнений относительного движения	436
Приложение 2. Основные технические данные бортовых радиотехнических измерительных систем [20]	437
Приложение 3. Корреляционные моменты ошибок оценок относительных координат и скоростей по единичным измерениям	438
Литература	440

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема управления сближением космических аппаратов на орбите спутника Земли или другого небесного тела представляет собой одну из важных и сложных проблем космонавтики. Без решения этой проблемы немислимо осуществление многих проектов по освоению космического пространства и планет Солнечной системы, а для ее эффективного решения необходимо проведение обширного комплекса научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ. Примерами успешного решения задачи сближения космических аппаратов могут служить операции по стыковке в ходе выполнения советской программы долговременных орбитальных станций со сменным экипажем «Салют» — «Союз» и американской программы пилотируемых полетов на Луну «Аполлон».

Проблема управления сближением космических аппаратов рассматривается в ряде работ (см., например, [7, 42, 52, 59, 64]), однако соответствующие их разделы носят в основном обзорный характер и ограничиваются сравнительно узким кругом вопросов, касающихся по существу только динамики сближения. Кроме того, они основаны на работах, опубликованных еще в 60-е годы, когда теоретические исследования и инженерные разработки ориентировались преимущественно на использование аналоговой вычислительной техники, а цифровые ЭВМ применялись главным образом для проведения дополетных расчетов, связанных с определением законов управления и запасов топлива на борту управляемого аппарата.

С тех пор положение изменилось коренным образом. Теперь бортовая цифровая вычислительная машина (БЦВМ) стала центральным устройством систем управления полетом почти всех современных космических аппаратов. Тем не менее вопросы разработки алгоритмов управ-

ления сближением и повышения их эффективности за счет использования вычислительных и логических возможностей БЦВМ пока не получили почти никакого освещения в литературе.

Предлагаемая книга представляет собой попытку заполнить в определенной мере отмеченные выше пробелы в литературе. Авторы стремились рассмотреть проблему управления сближением в целом, за исключением специфических вопросов управления ориентацией, которые с достаточной полнотой освещены в работах [17, 62, 66], а также сформулировать некоторые общие принципы построения алгоритмов управления сближением и подробно проанализировать их основные функции. Наибольшее внимание уделено алгоритмам, реализующим экономичные методы наведения, в частности — методу свободных траекторий.

Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемые алгоритмы управления формулируются не как реальные, а как принципиальные алгоритмы. Последние не зависят от типа БЦВМ, с помощью которых они будут осуществляться, и отличаются от первых отсутствием многочисленных вспомогательных процедур, связанных с организацией обмена информацией между БЦВМ и внешними устройствами (датчиками, исполнительными органами, телеметрической и радиокомандной системами, пультом управления космонавтов) и организацией вычислительного процесса с ограниченной разрядной сеткой и разделением времени, когда в одном такте работы БЦВМ производится решение нескольких задач.

Ввиду многообразия возможных приложений, выдвигающих различные требования к алгоритмам управления, авторы не отдают абсолютного предпочтения каким-либо одним методам или вычислительным схемам. Наоборот, рассматривается целый ряд возможных способов решения отдельных задач, возложенных на алгоритм управления, среди которых можно выбрать наиболее подходящие для данного конкретного случая. Это вызвано тем, что не существует таких методов и вычислительных схем, которые были бы оптимальными одновременно по всем показателям. Каждый из них обладает своими преимуществами и недостатками и имеет наилучшую область применения. Однако оценить в полной мере характеристики алгоритмов в об-

щем плане и дать окончательные рекомендации не представляется возможным, пока не заданы требования к качеству управления и не выбрана БЦВМ.

Книга рассчитана в основном на научных работников и инженеров, занимающихся вопросами управления полетом космических аппаратов. Она может быть полезной также аспирантам и студентам старших курсов высших учебных заведений, специализирующимся в данной области.

Содержание тринадцати глав книги можно условно разделить на несколько логически связанных друг с другом частей, обладающих определенной автономностью. Поэтому специалисты, знакомые с задачей сближения, могут начинать чтение книги с разделов, представляющих для них наибольший интерес.

Первую часть книги, которую составляют главы 1 и 2, можно рассматривать как вводную к последующим частям книги. В них дается общая характеристика проблемы управления сближением космических аппаратов, указываются возможные методы и средства ее решения, определяется структура алгоритмов управления, рассчитанных на использование БЦВМ, и намечаются подходы к их синтезу. Здесь также дается постановка основных задач, решаемых алгоритмом управления: задачи оценки (определения характеристик движения по измерительной информации) и задачи управления (определения управляющих воздействий по известным характеристикам движения).

Математическая формулировка задач оценки и управления основывается на выборе систем координат и моделей движения космических аппаратов и функционирования системы управления в целом. В качестве основной модели работы системы управления принята модель ее динамических и случайных ошибок (включая ошибки ориентации), а в качестве модели движения космических аппаратов — модель движения материальной точки в центральном поле тяготения. При этом учитывается возможность использования на практике как относительных систем координат, перемещающихся вместе с одним из сближаемых аппаратов, так и абсолютных (планетоцентрических) систем координат.

Во второй части книги (глава 3) сосредоточено рассмотрение законов управления, которые реализуют самый

простой из методов наведения — метод параллельного сближения, не учитывающий особенностей орбитального движения. Здесь приводятся уравнения относительного движения в системе координат, связанной с вектором относительной дальности, и излагается методика синтеза законов управления, которая состоит в выборе структуры законов исходя из соображений простоты реализации, приближенной аналитической оценки входящих в них постоянных параметров и оптимизации этих параметров методом проб и ошибок на основе численного интегрирования уравнений движения, замкнутых функциями управления. Приведены конкретные законы управления, отличающиеся друг от друга степенью сложности и соответственно большей или меньшей экономичностью.

В третьей части книги, объединяющей главы 4—9, рассматриваются алгоритмы определения управляющих воздействий, реализующие более сложные, но и более экономичные методы наведения, которые основаны на использовании законов небесной механики.

В главе 4 приводятся соотношения, описывающие движение космического аппарата в центральном поле тяготения, и на этой основе формулируются алгоритмы решения в абсолютной системе координат двухимпульсной задачи управления, составляющей основу метода свободных траекторий. При фиксированных расчетных моментах начала и окончания маневра сближения эта задача сводится к классической задаче определения кеплеровой орбиты по двум положениям, для решения которой разработан ряд хорошо известных методов, таких, как метод Гаусса и метод Эйлера — Ламберта. Поэтому основное внимание уделяется изложению менее известных, но довольно эффективных методов определения абсолютной двухимпульсной траектории сближения — методу итераций по универсальным переменным, дающему единую вычислительную схему для орбит любого типа (эллиптических, параболических, гиперболических), и методу вариаций элементов орбиты, распространяющемуся на задачи с незакрепленными моментами начала и окончания маневра сближения.

В главе 5 даются приближенные и точные уравнения относительного движения в орбитальной системе координат, в которой они имеют наиболее простой вид, и выводятся их аналитические решения, соответствующие участкам

свободного полета. Значительное внимание обращается на компактное представление решений линеаризованных уравнений, совпадающих по форме с уравнениями в вариациях, ввиду их большой практической важности и применимости не только в задаче управления сближением, но и в задачах выбора траекторий полета, навигации, коррекции орбит космических аппаратов и т. п.

В главе 6 излагаются аналитические методы определения управляющих воздействий, основанные на использовании соответствующих решений уравнений относительного движения. Для двухимпульсных маневров, описываемых линеаризованными уравнениями, получены конечные формулы, позволяющие вычислять импульсы сближения в зависимости от начальных условий, времени сближения и элементов опорной орбиты. Для аналогичных маневров, описываемых точными уравнениями (точными в пределах модели центрального поля тяготения), расчет импульсов сведен к итеративному нахождению одной постоянной, определяющей относительную траекторию сближения. Последний метод имеет много общего с методами определения двухимпульсной абсолютной траектории сближения, но выгодно отличается от них меньшей чувствительностью к ошибкам округления.

Помимо вопросов, связанных с решением двухимпульсной задачи управления, в этой главе в линейной постановке рассматриваются также вопросы определения импульсов сближения с заданным направлением и импульсов с неполной коррекцией прогнозируемых промахов, построения многоимпульсных программ управления и формирования законов асимптотического торможения, обеспечивающих уменьшение величины относительной скорости с уменьшением дальности до цели. Кроме того, анализируется возможность реализации метода свободных траекторий непосредственно в системе координат, связанной с вектором относительной дальности, без приборного построения орбитальной системы координат на борту управляемого аппарата.

В главе 7 рассматриваются вопросы определения импульсов сближения в методе свободных траекторий на основе численного интегрирования уравнений относительного движения. Предлагаются различные итеративные процедуры решения соответствующей краевой задачи и

исследуется влияние выбора схемы численного интегрирования на точность и быстроту расчета корректирующих импульсов.

В главе 8 рассматриваются детерминированные задачи оптимального управления сближением, формулируемые без учета случайных ошибок измерений и исполнения. Здесь дается краткий обзор методов и результатов решения задач оптимального управления в различных постановках и приводятся эффективные алгоритмы, которые могут быть достаточно просто реализованы на практике, а именно — конечные формулы для определения импульсных программ, оптимальных по квадратичному критерию, алгоритмы расчета двухимпульсных программ, оптимальных по энергетическим затратам, и схема преобразования импульсных программ межорбитального перехода в программы сближения. В главе представлен графический материал, который может служить для справок, прикладных расчетов и сравнительной оценки экономичности различных реальных алгоритмов управления. .

Наконец, в главе 9 проводится анализ методических ошибок решения задачи управления, причем в качестве меры погрешности используется величина промаха в расчетный момент встречи, отнесенная к начальной дальности. Основное внимание уделено ошибкам аналитических методов определения импульсов сближения в методе свободных траекторий, возникающим из-за неточности исходных уравнений относительного движения. Предложены способы повышения точности приближенных методов расчета корректирующих импульсов путем введения фиктивных начальных условий. Рассмотрены также методические ошибки наведения, которые вызываются неучетом ограниченности тяги двигателей, реализующих корректирующие импульсы, и неучетом несферичности центрального небесного тела.

В четвертой части книги (глава 10) рассматриваются методы построения оптимальных программ коррекций, учитывающих ошибки измерений параметров движения и ошибки исполнения корректирующих импульсов. При заданных длительности маневра сближения, числе коррекций и требуемой точности наведения оптимизация программы достигается посредством выбора моментов коррекций, при которых максимальные энергетические затраты на

сближение минимальны. Предложена простая методика определения момента последней коррекции, обеспечивающей заданную точность сближения.

В пятой части книги, которую составляют главы 11—13, излагаются методы и алгоритмы оценки параметров движения по результатам автономных измерений.

В главе 11 приводится классификация методов оценки и их важнейших точностных и вычислительных показателей, дается общая характеристика методов оценки для различного (полного и неполного) состава измерений и различных (приближенных и точных) уравнений относительного движения, положенных в основу вычислительной схемы.

В главе 12 рассматриваются алгоритмы оценки, реализующие метод наименьших квадратов и основанные на использовании аналитических решений уравнений относительного движения и полиномиальной аппроксимации непосредственно измеряемых параметров. Среди рассмотренных алгоритмов особый интерес может представлять алгоритм оценки, который исходит из условно линейной модели относительного движения и при своей простоте имеет достаточно высокую точность. Показано влияние выбора алгоритма оценки на основные характеристики маневра сближения: число коррекций, моменты их приложения и суммарные энергетические затраты.

В главе 13 излагаются алгоритмы оценки параметров движения, основанные на теории фильтрации Калмана. Для различных составов измерений и различных моделей, описывающих изменение параметров движения во времени, представлены матрицы, характеризующие рекуррентную процедуру улучшения оценок по мере поступления новых измерений.

В заключение главы и книги в целом излагаются вопросы локальной минимизации энергетических затрат на сближение с учетом ошибок измерений и исполнения и рассматриваются особенности реализации различных вариантов метода свободных траекторий с помощью БЦВМ.

Следует особо подчеркнуть, что все алгоритмы, рассматриваемые в книге, формулируются на основе безразмерных переменных, использование которых упрощает проблему масштабирования и позволяет экономить память и вычислительное время как при исследованиях, так и при

реализации алгоритмов. Кроме того, использование безразмерных переменных дает возможность получать численные результаты, имеющие не частное, а достаточно общее значение. Вследствие этого все численные данные, представленные в книге, пригодны для широкой совокупности маневров сближения, отличающихся условиями выполнения.

При написании книги были обобщены и систематизированы как материалы, взятые из различных литературных источников, так и результаты собственных исследований авторов. Некоторые из этих результатов были изложены в работах [14, 30—34, 36, 55, 56]. Значительная часть материала является оригинальной и нигде не публиковалась ранее.

Работа между авторами распределилась следующим образом. Ю. А. Ермиловым написаны главы 1—6, 8 и § 13.4. Е. Е. Ивановой — главы 7, 10 и § 5.1 и 8.5, С. В. Пантюшиным — главы 9, 11—13, причем § 9.1 и 9.2 совместно с В. В. Герасимовым.

Авторы считают своим долгом выразить признательность Б. В. Раушенбаху и М. С. Хитрику за внимание к работе и добрые советы и Г. Г. Терентьевой за помощь в решении ряда задач на ЭВМ. Особую благодарность авторы хотят высказать Д. Е. Охоцимскому и Ю. Г. Сихарулидзе, которые взяли на себя труд по рецензированию рукописи и ценные замечания которых позволили улучшить изложение материала и повысить общий научный уровень книги.

ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

§ 1.1. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ И СРЕДСТВА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Задача управления сближением космических аппаратов представляет собой одну из наиболее сложных научно-технических проблем космонавтики, требующих комплексного решения. Осуществление этой операции связано не только с разработкой теоретических основ и созданием бортовых технических средств управления, но и с использованием всей наземной и космической сети управления полетом космических аппаратов.

Ввиду сложности задачи и разнообразия приложений возможны различные подходы к ее решению, отличающиеся как распределением функций управления между Землей и бортом, так и выбором принципов, которые могут быть положены в основу системы управления и которые определяют ее конструктивные и динамические характеристики.

Управление сближением космических аппаратов с помощью наземного командно-измерительного комплекса основывается на тех же самых принципах, что и коррекция полета лунных и межпланетных космических аппаратов, и не вызывает принципиальных затруднений. Более сложна организация управления сближением с помощью автономных измерительных и вычислительных средств, требующая учета ограниченности бортовых энергетических и вычислительных ресурсов. Поэтому, прежде чем переходить к рассмотрению теоретических основ управления сближением и конкретных алгоритмов, целесообразно, не вдаваясь в математические детали, составить общее представление о возможных методах и средствах решения этой задачи и проблемах построения алгоритмов автономного управления сближением, реализуемых с помощью БЦВМ.

Сближение, причаливание и стыковка космических аппаратов как на орбите спутника Земли, так и на орбитах

спутников других небесных тел необходимы для осуществления многих важных космических проектов и программ и являются самостоятельными задачами управления движением космических аппаратов. Эти задачи решаются с помощью своих методов и технических средств, хотя и могут иметь некоторые общие элементы. Подробный обзор различных методов причаливания с описанием схем стыковочных устройств дан в книге [42]. В связи с этим вопросы причаливания и стыковки здесь не рассматриваются.

Несмотря на существенные различия в приложениях, задача сближения представляет собой весьма общую и специфическую задачу космонавтики. Вообще говоря, целью сближения может быть *перехват*, когда скорость одного космического аппарата относительно другого не ограничивается по величине, или *встреча*, когда конечная относительная скорость должна быть малой.

Чаще всего предполагается, что все необходимые маневры по сближению выполняет один из сближаемых аппаратов, который для изменения своей траектории имеет на борту ракетную двигательную установку с достаточным запасом топлива. Этот аппарат называют *перехватчиком*, *активным*, *управляемым* или *транспортным аппаратом*. Другой аппарат в процессе сближения не маневрирует и носит название *цели*, *пассивного аппарата*, *станции* или *базы*. Однако иногда более выгодным может оказаться *двустороннее управление сближением*, при котором попеременно или одновременно маневрирующими являются оба сближаемых аппарата. Тем не менее для определенности условимся считать, что маневры, обеспечивающие сближение, производит всегда один и тот же аппарат, который будем называть *управляемым*, а другой аппарат, который будем называть *аппаратом-целью* (или просто *целью*), движется по неизменной орбите.

Чтобы достигнуть встречи с целью, управляемый аппарат кроме ракетной двигательной установки маневрирования должен нести на борту комплекс специальных устройств, составляющих вместе с исполнительными органами *систему управления сближением*. Основная функция этой системы заключается в таком изменении управляющих воздействий (сил и моментов, прикладываемых к аппарату), при котором обеспечивается требуемая конечная точность сближения по относительным положению и скорости.

Система управления в целом состоит из системы управления движением центра масс, или *системы наведения*, и системы управления движением относительно центра масс, или *системы управления ориентацией*. В состав каждой из этих систем входят:

измерительные устройства или датчики, дающие информацию об управляемом движении;

преобразующие и вычислительные устройства, вырабатывающие по измерительной информации команды управления в соответствии с функциональными зависимостями, заложенными в систему при проектировании;

исполнительные органы, создающие управляющие воздействия в соответствии с командами управления.

В общем случае система управления ориентацией должна обеспечивать такие угловые положения аппарата в пространстве, которые необходимы для осуществления радиосвязи с Землей, навигационных измерений, измерений параметров относительного движения и исполнения коррекций траектории полета.

На практике применяются два вида управления сближением [52, 64]: *командное телеуправление* с помощью наземного измерительно-вычислительного комплекса и *автономное управление* с помощью бортовых измерительных и вычислительных средств.

Командное управление сближением с Земли производится аналогично коррекциям траекторий полета космических аппаратов на основе наземных траекторных измерений и телеметрической информации, получаемой с борта [52]. Оно применяется на участке *дальнего наведения* и служит лишь для выведения управляемого аппарата в зону автономного *ближнего наведения*, начинающегося поиском и захватом цели бортовыми измерительными средствами и заканчивающегося причаливанием и стыковкой. Это связано с тем, что при современных точностях определения орбит и прогнозирования на этой основе относительного движения сближаемых космических аппаратов точность командного управления недостаточна для полного выполнения встречи. Кроме того, принципиальным недостатком командного управления является его малая оперативность, поскольку траекторные измерения и их обработка могут продолжаться в течение нескольких витков, а время передачи команд на борт управляемого аппарата ограничено

временем его нахождения в зоне видимости командных пунктов. Необходимо принимать в расчет также и то, что по мере удаления космического аппарата от Земли трудности телеуправления возрастают, ибо с увеличением расстояния падает точность сопровождения и возрастает продолжительность прохождения радиосигналов при траекторных измерениях и передаче команд. Поэтому для сближения космических аппаратов вблизи других планет и в дальнем космосе в будущем будет использоваться преимущественно автономное управление.

Начальные условия для этапа автономного наведения определяются отклонениями по положению и скорости между сближаемыми аппаратами, которые получаются в результате предшествующих этапов управления сближением. В большинстве приложений эти отклонения обуславливаются ошибками командного или программного управления при выведении одного из сближаемых аппаратов в зону встречи с другим аппаратом.

Выведение в зону встречи может производиться с поверхности планеты либо с некоторой промежуточной орбиты и должно оканчиваться непосредственно в расчетной точке встречи или в некоторой вынесенной точке. С учетом ошибок управления, имеющих в основном случайный характер и характеризующихся эллипсоидом рассеивания, выведение в вынесенную точку имеет то преимущество, что при его использовании поиск цели бортовыми измерительными средствами может осуществляться в пределах узкого телесного угла, а не во всей сфере, как в случае выведения в расчетную точку встречи.

Конечные условия для этапа автономного наведения задаются различными в зависимости от программы полета. В большинстве случаев требуется, чтобы по достижении некоторой малой дальности до цели величина скорости сближения заключалась в определенных пределах, обеспечивающих безопасные (ограничение сверху) и надежные (ограничение снизу) причаливание и стыковку. Подход к цели при стыковке может производиться с любого направления, если осуществляется взаимная ориентация сближаемых аппаратов стыковочными узлами навстречу друг другу, либо с вполне определенного направления, если ориентация цели является независимой. В некоторых случаях после достижения заданного расстояния до цели требуется

сделать ее *облет* либо организовать *групповой полет* космических аппаратов, заключающийся в сохранении между ними определенной дистанции.

Система автономного управления сближением может быть: *автоматической*, в которой все операции по наведению и управлению ориентацией производятся без участия человека; *полуавтоматической*, когда операции по управлению разделены между техническими устройствами и операторами — членами экипажа космического корабля; *ручной*, если все необходимые операции по управлению выполняет экипаж. При этом может применяться *индикаторный режим* управления, когда команды управления, формируемые вычислительным устройством, не передаются на исполнение, а выводятся вместе с другой информацией на пульт управления, так что вычислительное устройство выступает в роли «советчика» операторов.

Следует отметить, что часть аппаратуры, необходимой для управления сближением, может быть размещена на аппарате-цели, если он является сотрудничающим. Например, на нем выгодно устанавливать ретрансляторы для радиолокационной системы и световые маяки для оптической измерительной системы. Это позволяет существенно снизить мощность и вес передатчиков или повысить дальность и точность измерений. Кроме того, на аппарате-цели целесообразно располагать весь измерительно-вычислительный комплекс для *наведения на себя*, если с одной и той же целью должно стыковаться несколько однотипных аппаратов.

Исходную информацию для автономного управления сближением могут давать как измерения параметров относительного движения, так и навигационные измерения, связанные с определением положения и скорости космического аппарата относительно небесного тела, вблизи которого выполняется операция сближения. Использование для наведения навигационных измерений, которые должны проводиться на каждом из сближаемых аппаратов (если только орбита одного из них неизвестна достаточно точно заранее), в принципе позволяет определять их координаты и скорости и, следовательно, относительное рассогласование по положению и скорости в любой требуемый момент времени. Такое наведение имеет смысл при больших расстояниях между аппаратами, превышающих дальность

действия системы измерения параметров относительного движения, и предполагает передачу навигационной информации с одного аппарата на другой в целях определения рассогласования и формирования управляющих команд. Передача информации может производиться: напрямую, если аппараты находятся в зоне прямой двусторонней радиосвязи; через наземные или плавучие ретрансляционные станции; через третий космический аппарат типа спутника связи «Молния».

Более простым в реализации, а также более оперативным и точным может оказаться автономное управление сближением на основе измерений параметров относительного движения, получаемых с помощью дальномерных и угломерных радиотехнических, оптических либо квантовомеханических средств локации и визирования цели. Это единственный из видов управления, который позволяет осуществлять сближение вплоть до причаливания и стыковки. Однако его применение ограничено условиями прямой видимости, даже если не принимать в расчет конечную дальность действия системы измерений параметров относительного движения. Поэтому в некоторых случаях может оказаться необходимым использование комбинированного управления, в соответствии с которым команды наведения формулируются при больших дальностях по навигационным измерениям и при малых дальностях по измерениям параметров относительного движения.

§ 1.2. МЕТОДЫ НАВЕДЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ СБЛИЖЕНИИ

Эффективность системы управления сближением и ее конструктивная сложность в целом, как и всякой системы управления полетом, зависят главным образом от выбора *метода наведения*. Здесь под методом наведения понимается совокупность принципов организации кинематики движения центра масс управляемого аппарата, обеспечивающих выполнение условий встречи. В этом отношении все методы наведения, которые могут быть предложены для сближения космических аппаратов, можно подразделить на две основные группы [42, 52, 64]: методы, строящиеся без учета законов орбитального движения, и методы, основанные на использовании этих законов.

Методы первой группы, называемые методами *пропорционального наведения* или методами *сближения по линии визирования*, берут свое начало от методов наведения управляемых снарядов. Кинематическая сущность этих методов применительно к сближению космических аппаратов в общем остается той же самой, но значительно изменяется их динамическое содержание и, следовательно, аппаратная реализация. Это связано с тем, что при движении в достаточно плотной среде наведение осуществляется за счет поворотов аэродинамических рулей, приводящих вследствие взаимодействия корпуса аппарата со средой к изменению направления скорости практически без изменения ее величины, тогда как в условиях космического полета управление движением центра масс возможно только за счет приложения реактивной тяги, изменяющей из-за ограниченности расходов топлива в основном величину, а не направление орбитальной скорости. Другая принципиальная особенность использования этих методов для осуществления орбитальной встречи состоит в необходимости регулирования относительной скорости при подходе к цели, в то время как при наведении управляемых снарядов эта проблема обычно не возникает.

При использовании методов наведения первой группы управление движением центра масс производится по данным измерений расстояния между аппаратами (относительной *дальности*), скорости изменения этого расстояния (скорости *сближения* или *удаления*) и угловой скорости вращения *линии визирования*, совпадающей с точностью до параллакса и ошибок сопровождения с линией, соединяющей центры масс аппаратов. Такая информация является вполне достаточной для реализации сближения, но не позволяет прогнозировать относительное движение и предвидеть последствия управляющих воздействий более или менее точно даже на сравнительно небольших интервалах времени. Это обусловлено тем, что неизвестно разностное гравитационное ускорение, определяющее относительное движение в свободном полете и зависящее от взаимного расположения сближаемых аппаратов по отношению к центру гравитационного притяжения. В силу этого на кинематику относительного движения налагаются ограничения, позволяющие решить задачу сближения несмотря на неполноту информации.

В общем виде эти ограничения заключаются в следующем. Посредством регулирования составляющей относительной скорости, нормальной к линии визирования, ограничивается угловая скорость вращения этой линии. При уменьшающейся дальности это приводит к последовательному уменьшению прогнозируемого пролета мимо цели и в конечном счете к установлению пересекающегося с целью направления относительной скорости. В свою очередь уменьшение дальности достигается с помощью регулирования составляющей относительной скорости вдоль линии визирования, обеспечивающего также и торможение при подходе к цели.

При реализации подобных методов наведения как для управления движением центра масс, так и для управления ориентацией в качестве опорной можно использовать непосредственно систему координат, связанную с линией визирования. При этом команды, управляющие работой двигателей маневрирования и ориентации, могут формироваться по сигналам измерений с помощью сравнительно несложных аналоговых устройств, если надлежащим образом выбраны законы управления угловой скоростью линии визирования, скоростью сближения и угловым положением аппарата.

Из методов сближения по линии визирования наиболее простым и удобным в реализации является метод *параллельного наведения (сближения)*, которому соответствует условие стабилизации величины угловой скорости линии визирования около нуля. Работоспособность этого метода как при автоматическом, так и при ручном управлении сближением была доказана на практике во время экспериментов по стыковке спутников «Космос» и космических кораблей «Союз», а также при доставке экипажей на орбитальные станции «Салют» [43].

Помимо простоты достоинством метода параллельного наведения, как и других методов этой группы, является возможность достижения встречи при неизвестных характеристиках орбитального движения. Кроме того, благодаря ограничениям, налагаемым на траекторию сближения, этот метод гораздо менее чувствителен к ошибкам измерений и другим возмущениям, чем методы наведения второй группы, учитывающие сравнительно малое по величине разностное гравитационное ускорение. Однако эти

преимущества даются ценой значительного расхода топлива, поскольку характер относительного движения (движение по прямой линии) значительно отличается от характера свободного движения под действием гравитационных сил.

По расходам топлива более экономичны методы наведения второй группы, которые учитывают естественное движение космических аппаратов в поле тяготения. Использование этих методов предполагает знание орбитального движения цели или управляемого аппарата и их взаимного расположения относительно небесного тела, в поле тяготения которого выполняется операция сближения. Кроме того, на борту управляемого аппарата необходимо строить систему координат, позволяющую прогнозировать относительное движение и определять приводящие к сближению управляющие воздействия. Обычно в качестве такого базиса используется орбитальная система координат, хотя при измерениях и реализации управляющих воздействий можно использовать также инерциальную или связанную с линией визирования систему координат.

Достаточно надежные и точные оценки параметров движения в орбитальной системе координат, необходимые для расчета управляющих воздействий, могут быть получены только с помощью достаточно сложной обработки измерительной информации, содержащей ошибки. Кроме того, и само определение управляющих воздействий, обеспечивающих сближение с учетом законов орбитального движения, требует решения в общем довольно сложной краевой двухточечной задачи, вытекающей из требования выполнения условий встречи при заданных начальных условиях относительного движения.

Таким образом, по сравнению с системами управления, реализующими методы наведения первой группы, системы управления, реализующие методы наведения второй группы, должны быть более сложными. В их состав наряду со средствами визирования цели должны входить дополнительно БЦВМ с согласующими устройствами ввода-вывода информации и устройства, связанные с построением орбитальной или инерциальной системы координат.

Решение краевой задачи определения управляющих воздействий значительно упрощается, если используется предположение об импульсном характере действия тяги при коррекции движения центра масс управляемого аппа-

рата. Смысл этого допущения, обычного при расчете траекторий космических аппаратов и называемого *импульсной аппроксимацией*, состоит в том, что тяга считается бесконечно большой по величине, а продолжительность активных участков бесконечно малой, так что приложение тяги приводит к мгновенному изменению скорости без изменения положения космического аппарата. В результате краевая задача определения управляющих воздействий сводится к краевой задаче определения *корректирующих импульсов скорости*, прикладываемых в дискретных точках и разделенных участками свободного полета. Импульсная аппроксимация достаточно оправдана и не приводит к заметным ошибкам, когда для маневрирования на орбите применяются такие ракетные двигатели, которые создают ускорения, сравнимые по величине с местным гравитационным ускорением [120].

С учетом импульсной аппроксимации методы наведения, основанные на использовании законов орбитального движения, сводятся к методам *импульсных коррекций*. Из этих методов наиболее простым, разработанным и известным является метод *свободных траекторий* [52], в котором каждый из корректирующих импульсов определяется из условия попадания в цель через некоторое время свободного полета. При отсутствии возмущений сближение по методу свободных траекторий сводится к двухимпульсному маневру, так как для выравнивания скорости аппарата со скоростью цели при их встрече необходим второй (тормозной) импульс. Для увеличения безопасности и надежности причаливания конечное торможение может быть растянуто по времени и осуществляться, например, по методу параллельного наведения.

Метод свободных траекторий, в основе которого лежит двухимпульсная схема сближения, является не единственным из возможных методов импульсных коррекций. Эти методы могут строиться также исходя из многоимпульсных схем, предназначенных формировать программную траекторию сближения с заданными характеристиками. Для выдерживания программной траектории предусматриваются дополнительно промежуточные коррекции. Примером подобных методов может служить четырехимпульсный метод коэллиптического перехода, разработанный для американской программы «Аполлон» [51].

Кроме импульсных методов наведения, предполагающих использование ракетных двигателей сравнительно большой тяги, к группе методов, учитывающих законы орбитального движения, относятся также различные оптимальные методы, предполагающие использование ракетных двигателей непрерывной или дискретной малой тяги.

Типичные блок-схемы систем управления сближением по методу параллельного наведения и методу свободных траекторий показаны соответственно на рис. 1.1 и 1.2.

Отмеченные выше сравнительные преимущества и недостатки методов наведения двух основных групп определяют области их применения для автономного управления сближением космических аппаратов. При этом необходимо различать выбор метода на стадии проектирования системы управления и выбор метода в ходе полета.

Для выбора метода наведения при разработке системы управления сближением определяющее значение при прочих равных условиях имеют ее весовые характеристики с учетом потребного запаса топлива на борту. Следовательно, применение методов импульсных коррекций и, в частности, метода свободных траекторий имеет смысл в системах управления, рассчитанных на такие условия сближения, для которых увеличение веса аппаратуры (за счет устройств, реализующих орбитальную систему координат) компенсируется экономией веса, достигаемой за счет уменьшения потребных расходов топлива.

Для грубых оценок в случае околокруговых орбитальных движений сближаемых аппаратов можно принять, что потребные расходы топлива пропорциональны начальной дальности. Без учета начальной относительной скорости коэффициент расхода топлива, выраженный через потребное приращение скорости на единицу начальной дальности, составляет для операций сближения около Земли примерно $2 \text{ (м/сек)}/\text{км}$ для метода свободных траекторий и примерно $5 \text{ (м/сек)}/\text{км}$ для метода параллельного наведения. Пусть разница в весе приборного оборудования равна весу топлива, дающего приращение скорости $15\text{--}30 \text{ м/сек}$. Тогда можно оценить, что при начальных дальностях, меньших $5\text{--}10 \text{ км}$, выгоднее использовать системы управления, реализующие метод параллельного наведения, а при более значительных дальностях — системы, реализующие метод свободных траекторий.

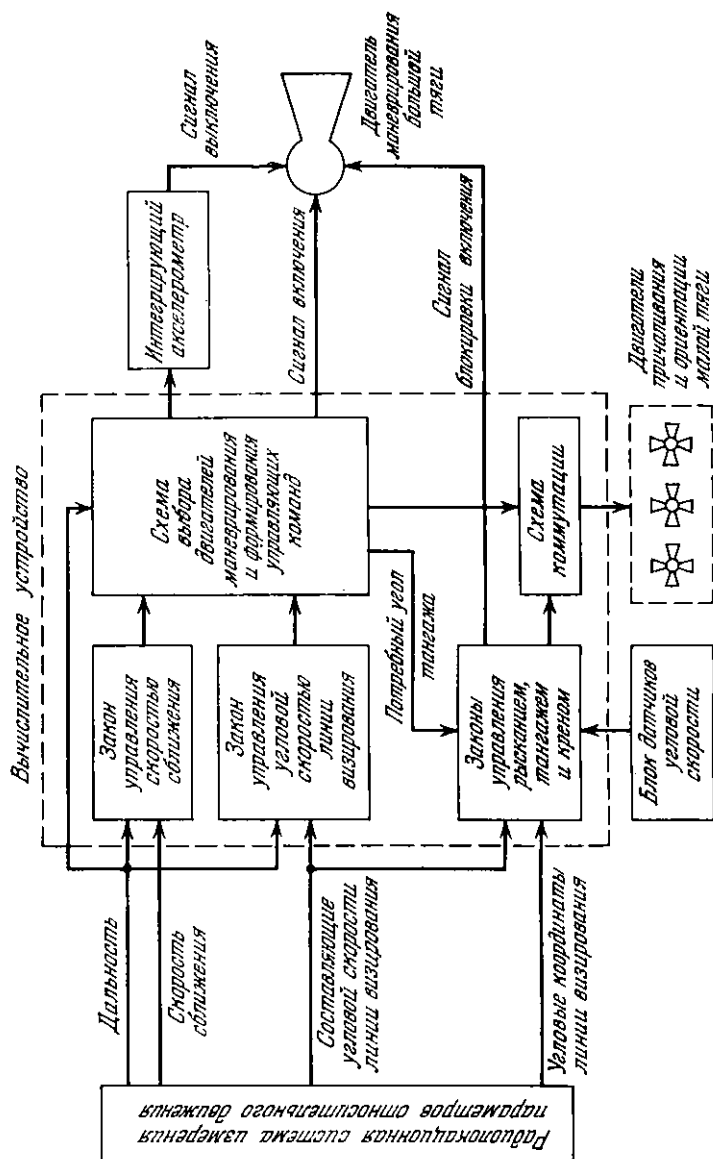


Рис. 1.1.

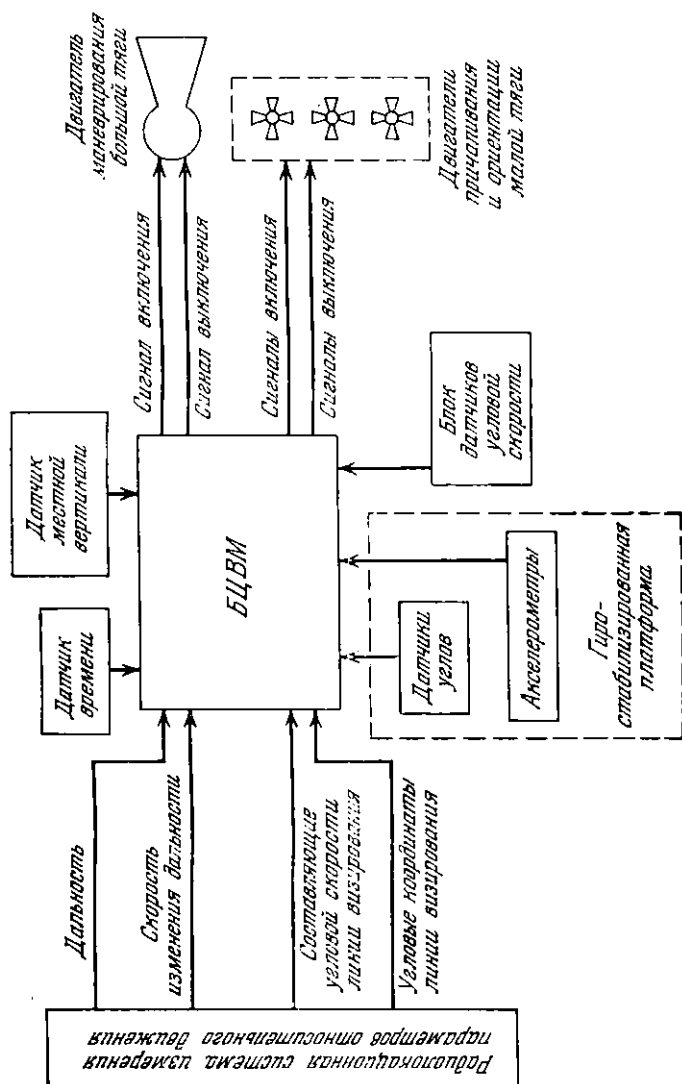


Рис. 1.2.

Для выбора метода наведения, осуществляемого в ходе полета, необходимо учитывать, что использование методов второй группы не имеет смысла, когда разностное гравитационное ускорение, учет которого и приводит к уменьшению потребных расходов топлива, сравнимо по величине с возмущениями, в первую очередь — с влиянием ошибок измерений и исполнения. Поэтому в процессе сближения следует переходить, например, от метода свободных траекторий к методу параллельного наведения по достижении таких условий, при которых влияние ошибок на точность прогноза относительного движения становится сравнимым с влиянием разностного гравитационного ускорения.

При фиксированной ориентации вектора относительной дальности величина разностного гравитационного ускорения, зависящая от разности высот, будет пропорциональна в первом приближении расстоянию между сближаемыми аппаратами. Поэтому при заданном уровне ошибок измерений и исполнения существует замкнутая трехмерная поверхность вокруг цели, при пересечении которой извне следует переходить от режима управления по методу свободных траекторий к режиму управления по методу параллельного наведения. Для упрощения расчетов, выполняемых на борту, в качестве такой поверхности удобно принять поверхность сферы, имеющей по грубым оценкам радиус порядка одного километра.

§ 1.3. СПОСОБЫ ФОРМИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Маневрирование, необходимое для реализации любого метода наведения, осуществляется посредством приложения к управляемому аппарату вполне определенной по величине и направлению тяги, создаваемой его двигательной установкой. Организация управления вектором тяги, линия действия которого должна проходить через центр масс, зависит от числа и расположения двигателей на корпусе аппарата и тесно связана с управлением ориентацией.

Для наглядности при рассмотрении ориентации будем использовать углы рыскания θ_y , тангажа θ_z и крена θ_x , которые определяются обычным образом (рис. 1.3), хотя угловое положение системы координат $x_c y_c z_c$, связанной с корпусом аппарата, относительно исполнительной систе-

мы координат xuz (визирной, инерциальной или орбитальной) удобнее описывать с вычислительной точки зрения направляющими косинусами, вектором конечного поворота или кватернионами [17, 48].

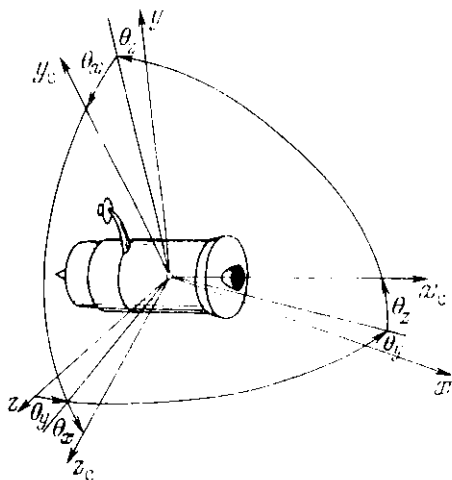


Рис. 1.3.

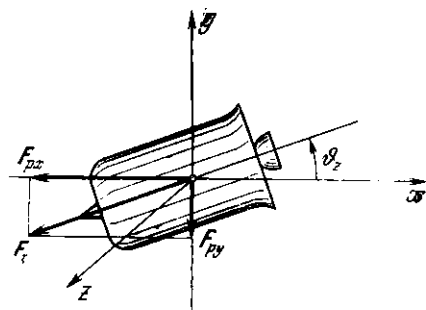


Рис. 1.4.

В зависимости от компоновочной схемы аппарата возможны следующие способы управления вектором тяги [42, 64].

Полярное управление полным вектором тяги (рис. 1.4). Для создания тяги в требуемом направлении используются

один блок двигателей, установленный по продольной оси аппарата x_c , и командные развороты самого аппарата по рысканию и тангажу на углы, задаваемые системой наведения. При этом ориентация аппарата по крену может быть, вообще говоря, произвольной.

Полярное управление боковой составляющей тяги (рис. 1.5). Изменение направления тяги осуществляется посредством переключения двух блоков продольных двигателей,

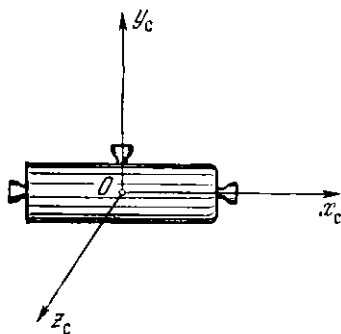


Рис. 1.5.

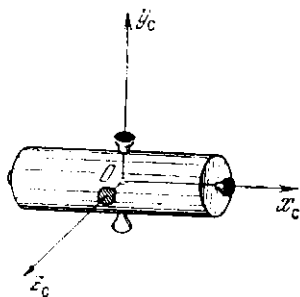


Рис. 1.6.

развивающих тягу в противоположных направлениях, и одного блока боковых двигателей, развивающих тягу в отрицательном направлении оси y_c , при непрерывной стабилизации аппарата по рысканию и тангажу и разворотах по крену на угол, задаваемый системой наведения.

Декартово управление вектором тяги (рис. 1.6). Изменение направления тяги достигается посредством переключения тяги шести отдельных блоков двигателей, развивающих тягу в положительном и отрицательном направлениях трех взаимно ортогональных осей аппарата, при этом аппарат стабилизируется по рысканию, тангажу и крену независимо от сигналов системы наведения.

Из указанных выше способов наиболее простым в конструктивном отношении является полярное управление вектором тяги, требующее наименьшего количества двигателей. Кроме того, оно наиболее выгодно и энергетически, поскольку для него величина приращения скорости от тяги, характеризующая расход топлива на маневрирование, равна интегралу от модуля ускорения, создаваемого

общей тягой, тогда как для других способов эта величина равна интегралу от суммы модулей ускорений, создаваемых соответствующими составляющими общей тяги. Однако существенным недостатком полярного управления является необходимость переориентации аппарата для измерения направления действия тяги, что приводит к увеличению расхода топлива на управление ориентацией и к запаздыванию в исполнении расчетных управляющих воздействий (в случае отсутствия прогноза). Поэтому и аппаратурное выполнение системы управления ориентацией может быть сравнительно сложным, ибо необходимо обеспечивать командные развороты на любые требуемые углы с высокой степенью точности и достаточным быстродействием. Другой недостаток полярного управления — его неприменимость на участке причаливания, когда управляемый аппарат не может иметь произвольную ориентацию, а должен быть обращен стыковочным узлом навстречу цели.

Декартово управление вектором тяги свободно от этих недостатков. Однако оно более сложно в компоновке и менее экономично при коррекции движения центра масс, хотя и более выгодно по расходу топлива на управление ориентацией. Полярное управление боковой составляющей тяги по своим достоинствам и недостаткам занимает промежуточное положение между декартовым и полярным управлением.

Для надежности и устойчивости сближения двигательная установка управляемого аппарата должна создавать такие управляющие ускорения, которые, с одной стороны, превышали бы все возмущающие ускорения и, с другой стороны, обеспечивали бы выполнение конечных условий встречи с требуемой точностью. Следовательно, необходимо иметь возможность изменять управляющие ускорения по величине в достаточно широком диапазоне. Для создания таких ускорений можно в принципе использовать ракетные двигатели регулируемой тяги. Однако они сравнительно сложны, так что для управления сближением предпочтительнее использовать двигатели нерегулируемой тяги, допускающие многократные запуски. Тогда требуемые изменения движения центра масс управляемого аппарата могут быть достигнуты с помощью последовательности дискретных коррекций.

Чтобы удовлетворить требованиям управляемости и точности в случае применения повторно включаемых и выключаемых двигателей, можно использовать комбинированную схему управления вектором тяги, ставшую классической [43]. При больших расстояниях до цели, когда возмущения сравнительно велики, коррекции движения производятся одним двигателем большой тяги по полярной схеме. При небольших расстояниях до цели вплоть до стыковки, когда возмущения малы и требуется высокая точность, коррекции выполняются несколькими двигателями относительно малой тяги по декартовой схеме. В такой комбинированной схеме сохраняются все выгоды полярного управления и используются преимущества декартова управления вектором тяги, худшая экономичность которого становится несущественной из-за малости потребных приращений скорости. Кроме того, двигатели небольшой тяги, применяемые для управления движением центра масс на конечном участке, могут использоваться при надлежащем их количестве, расположении на корпусе и коммутации включений также и для управления ориентацией на всех участках сближения.

Включение двигателей нерегулируемой тяги для исполнения расчетных коррекций производится командными сигналами, формируемыми БЦВМ по измерениям параметров относительного движения. Команды на выключение двигателей также могут формироваться непосредственно по измерениям, если измерительная система не «слепнет» во время работы двигателей и не теряет цели в результате командных разворотов аппарата.

Чтобы исключить влияние помех в измерениях от работающих двигателей, командные сигналы на их выключение могут вырабатываться также программно-временным устройством (по меткам времени) либо программными счетчиками времени (при их переполнении), которые предварительно настраиваются на длительности включения, вычисляемые по потребным приращениям скорости и известным номинальным значениям ускорений от тяги. Однако из-за разброса величины тяги двигателей и изменения массы аппарата такой способ выключения тяги в принципе не очень точен. Более надежный способ выключения тяги, нечувствительный к нестабильностям прикладываемых ускорений, основан на интегрировании показа-

ний акселерометров. В этом случае командные сигналы на выключение двигателей вырабатываются в тот момент времени, когда интеграл от измеряемого ускорения достигает потребного приращения скорости в направлении оси чувствительности акселерометра.

§ 1.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Всякий кинематический метод наведения реализуется в динамике с помощью *алгоритма управления*, в соответствии с которым измерительная информация преобразуется в управляющие сигналы, устанавливающие режимы работы двигательной установки маневрирования и системы управления ориентацией. В общем случае алгоритм управления сближением, запрограммированный в БЦВМ, должен обеспечивать решение следующих основных задач:

обработка результатов измерений с целью получения оценок параметров движения, используемых при определении управляющих воздействий;

прогнозирование движения и определение отклонений расчетных параметров от требуемых зависимостей;

принятие решения о коррекции движения;

вычисление управляющих воздействий и оптимизация характеристик маневра сближения;

выработка сигналов и команд, управляющих ориентацией и двигателями маневрирования;

контроль за исполнением управляющих команд.

В некоторых случаях к алгоритму управления сближением можно отнести также и задачу определения (или уточнения) опорной орбитальной системы координат по навигационным измерениям или измерениям параметров относительного движения. Кроме того, алгоритм может выполнять различные вспомогательные функции, такие как целеуказание для датчиков, обеспечение индикации условий полета для экипажа, подготовка информации для телеметрии, тестовая проверка элементов системы управления, выработка аварийных сигналов и т. д.

Разработка алгоритмов управления для конкретных приложений основывается на требованиях, предъявляемых к динамическим и конструктивным характеристикам сис-

темы, и зависит от возможностей реального приборного оборудования, в первую очередь — от характеристик БЦВМ и ее программного обеспечения, состава и точности измерений, ошибок исполнения управляющих сигналов, а также от компоновочной схемы управляемого аппарата и программы полета. Основные требования, вытекающие как из назначения системы управления, так и из условий ее функционирования, можно подразделить на требования, определяющие эффективность управления, и требования, относящиеся к структуре и вычислительным характеристикам алгоритма.

Требования первой группы формулируются обычно в виде требования оптимизации показателей качества, численные значения которых дают количественную основу для оценки эффективности управления и определяют желаемые свойства управляемого процесса. Наиболее важные из них, учитываемые во всех разработках, — это минимальный расход топлива и приемлемая конечная точность сближения. Эти два показателя, от которых зависит порой успех или неудача всей программы полета, взаимосвязаны, ибо при заданном уровне ошибок измерений и исполнения точность сближения может быть увеличена до определенного предела ценой дополнительного расхода топлива. Однако эта точность задается обычно не слишком высокой, так как для перехода к участку причаливания и стыковки достаточно обеспечить попадание в примерно километровую окрестность цели. При этом условия по скорости могут быть выполнены с помощью одного или нескольких тормозных импульсов.

В состав существенных показателей качества, принимаемых в расчет, включаются также потребная степень дросселирования двигателей регулируемой тяги и потребное число включений двигателей перегуливаемой тяги. Из-за сложностей регулирования тяги в широком диапазоне желательно, чтобы потребная степень дросселирования была по возможности небольшой. Точно так же по соображениям надежности потребное число включений двигателей должно быть небольшим, ибо, во-первых, существуют определенные трудности повторных запусков ракетных двигателей в условиях невесомости и, во-вторых, ударные перегрузки, возникающие при каждом включении и выключении двигателей сравнительно большой тяги,

могут нарушать нормальный режим работы и увеличивать вероятность отказов отдельных приборов, арретированных во время старта и включаемых после выведения на орбиту:

Такой показатель качества, как общее время сближения, сам по себе несуществен, кроме как в аварийных ситуациях и операциях по спасению космонавтов, когда требуется максимальное быстродействие. Поэтому на время сближения обычно не налагается каких-либо жестких ограничений. Однако иногда по техническим причинам управление сближением приходится планировать по времени вполне определенным образом. Например, может оказаться необходимым, чтобы в конце автоматического управления сближением цель освещалась Солнцем или чтобы на некотором интервале сближение было неконтролируемым вследствие временного отключения части приборов.

Из требований, предъявляемых к структуре алгоритмов управления, определяющим является требование достаточной их простоты. Это свойство важно по нескольким соображениям. Прежде всего для реализации простого алгоритма нужны небольшая память и малое вычислительное время на БЦВМ. Затем простые алгоритмы нетрудно исследовать и корректировать на всех стадиях разработки. Кроме того, для простых алгоритмов легче организовать всякого рода резервирование и тестовые проверки, чем для сложных алгоритмов. Однако к любому упрощению алгоритмов управления следует подходить с осторожностью, ибо выигрыш в структуре может обернуться неоправданным проигрышем в эффективности.

Желательно также, чтобы алгоритм управления был достаточно универсальным, гибким и допускал перенастройку в случае выхода из строя некоторых элементов штатной аппаратуры. Может быть предусмотрено также несколько способов управления, требующих своего приборного оборудования, чтобы в зависимости от обстановки, складывающейся в полете, переходить от одного режима управления к другому. Наконец, обязательное требование состоит в том, чтобы алгоритм обеспечивал необходимую точность расчетов и был устойчивым в вычислительном отношении, т. е. не приводил бы к накоплению ошибок округления, возникающих из-за ограниченности разрядной сетки БЦВМ.

Наиболее простую форму алгоритмы управления имеют при реализации методов сближения типа параллельного наведения, когда перечисленные выше задачи решаются не все и не в полном объеме. В этом случае функция алгоритма управления сводится фактически к формированию задающих воздействий и управляющих сигналов в зависимости от непосредственно измеряемых параметров относительного движения без сложных промежуточных преобразований. Такие функциональные зависимости управляющих сигналов от сигналов измерений называют обычно *законами управления*.

Более сложные и эффективные алгоритмы управления соответствуют импульсным методам наведения, основанным на использовании законов орбитального движения, и могут быть реализованы только с помощью БЦВМ. Поэтому рассмотрим возможные принципы построения таких алгоритмов более подробно.

Прежде всего, всякий обоснованный алгоритм управления должен быть рассчитан на многократную коррекцию, поскольку из-за возмущений достигнуть требуемой точности сближения при помощи единственного корректирующего импульса практически невозможно. Возмущения траектории сближения, приводящие к промахам, складываются из ошибок прогноза движения вследствие неточности используемой в расчетах модели, а также ошибок измерений и реализации расчетных коррекций скорости. Все ошибки, кроме методических, носят в основном случайный характер и не могут быть скомпенсированы заранее, так что процесс управления сближением является по своей природе стохастическим.

В стохастической постановке задача синтеза оптимальных алгоритмов управления [обеспечивающих в различных условиях полета наименьшее (или наибольшее) возможное значение наиболее важному показателю качества при допустимых значениях других показателей] представляет собой одну из самых сложных задач теории оптимального управления, особенно если наряду с коррекцией движения необходимо оптимальным образом организовать измерения и обработку результатов измерений. Эта задача может быть решена с помощью современных методов оптимизации, таких как метод статистических решений и метод динамического программирования [5, 74]. Однако для реализации

подобных решений необходимы значительная память и большие затраты вычислительного времени, так что из-за ограниченности ресурсов БЦВМ строго оптимальное управление в реальном масштабе времени может оказаться трудно осуществимым. Поэтому на практике исходят из упрощенных постановок задачи синтеза, которые приводят к более простым алгоритмам, требующим умеренных затрат памяти и вычислительного времени.

Тем не менее одновременно с разработкой реальных алгоритмов управления очень важно проводить теоретические исследования наивыгоднейших режимов управления сближением. Строго оптимальные решения полезны в двух отношениях: во-первых, как эталоны для сравнения практических решений и анализа предельных возможностей реальных систем управления и, во-вторых, как основа для создания новых методов управления и появления инженерных идей по организации процессов измерения и коррекции.

Первый шаг по упрощению синтеза алгоритма управления состоит в разделении общей задачи на задачу обработки измерительной информации и задачу коррекции. При таком подходе оптимальное стохастическое управление заключается в предварительной оптимальной оценке параметров движения и определении по этим оценкам управляющих воздействий из оптимальных функциональных зависимостей, синтезированных в детерминированной постановке. Справедливость принципа разделения строго доказана для линейных систем управления, оптимизируемых по квадратичному показателю качества, в предположении нормального закона распределения возмущений [44]. В других условиях этот принцип можно считать правомочным потому, что в результате сглаживания ошибки оценок становятся достаточно малыми по сравнению с оцениваемыми параметрами движения и не могут оказывать значительного влияния на характеристики процесса управления.

При использовании принципа разделения под оптимизацией коррекции понимается в общем случае определение оптимального числа корректирующих импульсов, их распределения по времени, расчетного времени сближения и доли прогнозируемого промаха, сводимой к нулю отдельным импульсом. Последняя характеристика, как будет

показано в дальнейшем, позволяет определять величину и направление каждого корректирующего импульса в зависимости от текущих оценок параметров движения.

При заданной точности оценки параметров движения статистическими либо детерминированными методами многократную коррекцию можно организовать двумя различными способами: 1) каждый из корректирующих импульсов прикладывается в установленные моменты времени; 2) расчетное время для приложения очередного импульса определяется в зависимости от текущих оценок параметров движения.

Алгоритмы управления с жесткой временной программой коррекции являются достаточно простыми. Для них оптимальная программа может быть рассчитана заранее (исходя из априорных значений параметров опорной орбиты и статистических характеристик ошибок выведения сближаемых аппаратов в зону автономного управления и других возмущений) и заложена в память БЦВМ. Однако такие алгоритмы будут давать наилучшие результаты не в каждом отдельном случае, а в среднем. Более того, при значительных отклонениях реальных параметров и характеристик от их номинальных значений, принятых в допустимых расчетах, качество управления будет далеким от оптимального вообще. Существенный недостаток управления по жесткой программе состоит и в том, что оно критично к непредвиденным задержкам коррекции. Поэтому если позволяют возможности БЦВМ, то с точки зрения надежности, точности и экономичности предпочтительнее использовать алгоритмы с гибкой логикой коррекции.

Для упрощения алгоритмов с гибкой логикой может быть использовано предположение о том, что каждая коррекция является полной, т. е. рассчитывается из условия полного устранения промаха. По-видимому, это допущение, используемое обычно и при построении алгоритмов с жесткой программой коррекции, не приводит к большим перерасходам топлива (или ухудшению качества управления в каком-либо другом смысле) по сравнению с более строгим допущением, что оптимальными являются неполные многократные коррекции.

В структурном отношении полный алгоритм управления целесообразно разбивать на независимые процедуры, решающие частичные задачи, что удобно при использова-

нии управляющих БЦВМ с разделением времени. При этом для каждой задачи может быть предусмотрено несколько вариантов решений, соответствующих различным режимам управления (штатному, запасным, аварийным). В автоматическом исполнении перенастройка универсального алгоритма с одного режима управления на другой может производиться с помощью специальной подпрограммы при появлении соответствующих сигналов, вырабатываемых программно или внешними устройствами.

Наконец, при достаточно малых методических ошибках требуемую точность вычислений можно обеспечить с помощью рационального масштабирования величин, участвующих в расчетах [22, 53]. При этом вычислительный процесс будет устойчивым, если в алгоритме не допускаются делений на малые величины и все расчетные формулы преобразованы к виду, не содержащему разностей больших величин.

ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ АЛГОРИТМОМ УПРАВЛЕНИЯ

§ 2.1. МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В соответствии с принципами, изложенными в предыдущей главе, разработка алгоритма управления сближением заключается в определении круга решаемых им задач, составлении его общей логической схемы, математической формулировке отдельных задач и выборе методов и вычислительных схем их решения. После завершения такого синтеза алгоритм в целом, как и его частные вычислительные схемы, должен быть проверен и уточнен с помощью моделирования процесса управления сближением на ЭВМ.

Из многочисленных задач, возлагаемых на алгоритм управления сближением, основными и наиболее трудоемкими являются задача обработки измерительной информации с целью получения оценок параметров движения (*задача оценки*) и задача определения по этим оценкам управляющих воздействий, обеспечивающих встречу (*задача управления*). Математическая формулировка этих задач и выбор методов их решения тесно связаны с выбором математической модели процесса управления сближением.

В общем случае модель процесса управления сближением включает в себя модель движения сближаемых космических аппаратов как материальных тел и модель работы аппаратуры управления, составляющих в совокупности модель замкнутой динамической системы. Эти модели должны, с одной стороны, давать качественно и количественно правильное описание процесса управления сближением в целом, но, с другой стороны, быть не настолько сложными, чтобы их нельзя было использовать для вычислений на борту в реальном масштабе времени или для дополетных аналитических и численных исследований.

Для исследования общих закономерностей совместного полета двух космических аппаратов и построения на этой основе алгоритмов управления сближением необходимо в первую очередь построить адекватные модели, описываю-

щие движение аппаратов как порознь, так и друг относительно друга. Для этого нужно определить число переменных, или степеней свободы, однозначно определяющих движение, и установить характер и законы изменения внешних воздействий, обуславливающих полет, после чего можно будет выбрать системы координат и составить дифференциальные уравнения движения.

Движение космического аппарата, как известно, складывается из поступательного движения его центра масс, определяющего траекторию полета, вращательного движения вокруг центра масс, определяющего угловое положение, или ориентацию аппарата, и изменения его формы вследствие упругих и пластических деформаций, перемещения внутренних масс и расхода топлива на маневрирование и управление ориентацией.

Строго говоря, эти три составляющие общего движения космического аппарата не могут быть отделены одна от другой и должны рассматриваться совместно. Но тогда динамическая модель будет иметь очень большое число степеней свободы и описываться дифференциальными уравнениями высокого порядка, в том числе и уравнениями в частных производных. Кроме того, общее движение определяется совместным действием многочисленных внешних и внутренних сил и моментов, законы изменения многих из которых известны весьма приблизительно либо вовсе не известны.

Все это сильно затрудняет и, казалось бы, делает практически невозможным изучение и использование законов движения космических аппаратов. Однако для наших целей подробное исследование всех сторон движения, особенно связанных с изменением формы, не обязательно, хотя сложный характер движения всегда следует иметь в виду и учитывать, когда это нужно. Поэтому, как и при решении других задач прикладной небесной механики, составляющей фундамент теории управления полетом космических аппаратов, сделаем ряд допущений, которые позволяют существенно упростить исследования без больших потерь точности [29].

Прежде всего будем пренебрегать изменением формы и структуры космических аппаратов, считая их абсолютно твердыми телами. Это допущение вполне обосновано, поскольку в соответствии с принципом затвердевания урав-

нения поступательно-вращательного движения тел переменной структуры и массы формально совпадают с уравнениями движения абсолютно твердых тел. Для этого нужно ввести фиктивные внешние силы и моменты, но они, за исключением реактивной силы тяги, обычно малы по сравнению с остальными внешними силами и [моментами и могут не приниматься в расчет [50]. Тогда движение отдельного космического аппарата будет иметь шесть степеней свободы (три поступательные и три вращательные).

Затем будем рассматривать поступательные движения центров масс независимо от вращательных движений около центров масс. Для космических аппаратов это тоже вполне обоснованное допущение. Несмотря на огромные по земным масштабам скорости, космический полет в сильно разреженной среде и слабых электромагнитных полях отличается прежде всего тем, что кроме искусственной силы тяги, создаваемой ракетной двигательной установкой маневрирования, все естественные силы, определяющие траекторию полета, весьма мало зависят от углового положения космического аппарата. Влияние ориентации на поступательное движение проявляется заметным образом на больших интервалах времени, значительно превышающих типичные времена сближения, и то в неуправляемом полете.

Более того, на всех участках полета, кроме конечного участка причаливания, можно пренебрегать линейными размерами сближаемых аппаратов по сравнению с расстояниями между ними и считать их точечными массами. При этом влияние вращательного движения на поступательное, проявляющееся только при поиске и захвате цели и исполнении коррекций траектории полета, удобно относить к модели работы системы управления сближением в целом.

При этих предположениях движение каждого из сближаемых аппаратов имеет три степени свободы и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Для управляемого аппарата эта система уравнений должна замыкаться функциями и уравнениями, моделирующими работу системы управления сближением и изображающими изменение управляющих воздействий. Разомнутая же система, как и система уравнений движения пассивного аппарата, соответствует свободному полету, и ее общее решение зависит от шести

произвольных постоянных интегрирования, которые полностью определяют траекторию, или *орбиту*, полета и называются *элементами*, или *параметрами*, орбиты.

При определении орбит космических аппаратов обычно используются прямоугольные системы декартовых координат с началом в центре масс небесного тела, вблизи которого происходит полет, и осями, не вращающимися относительно инерциального пространства. На интервалах времени, небольших по сравнению с периодами обращения планет вокруг Солнца или естественных спутников вокруг своих планет, поступательное движение небесных тел можно считать в первом приближении прямолинейным и равномерным. В этом случае переносные и кориолисовы силы инерции, действующие на космический аппарат в подвижной системе отсчета, практически отсутствуют, так что в соответствии с теорией относительных движений подобные системы координат удобно считать абсолютно неподвижными, и называть их *абсолютными системами координат*, а движение космических аппаратов по отношению к небесному телу в таких осях — *абсолютным движением*.

В свою очередь движение двух космических аппаратов друг относительно друга будет представлять собой разность двух абсолютных движений и также характеризоваться тремя степенями свободы, если движение одного из космических аппаратов является заданным и описывается известными функциями времени.

В полете на космический аппарат действуют многочисленные внешние силы, различные по своей природе. Это *гравитационные силы*, или *силы притяжения* со стороны Солнца, планет и спутников планет Солнечной системы, *аэродинамические силы*, возникающие за счет механического взаимодействия корпуса аппарата с газовой средой, *силы давления солнечного излучения* и *электромагнитные силы*, проявляющиеся вследствие электрического и магнитного взаимодействия аппарата с внешней космической средой. Однако из всех этих сил можно принимать в расчет лишь немногие, поскольку они значительно отличаются по величине и зависят от того, в какой области космического пространства происходит полет.

Наиболее типична ситуация, когда сближение космических аппаратов должно выполняться вблизи какого-либо

одного небесного тела, спутниками которого они являются, причем вне плотных слоев его атмосферы. Тогда преобладающее влияние на движение аппаратов оказывают только гравитационные силы от этого тела, а другие действующие силы будут несоизмеримо малы. Эти гравитационные силы зависят от формы небесного тела и внутреннего распределения плотности его вещества, являясь одновременной функцией точки пространства, в которой находится космический аппарат. В соответствии с теорией притяжения [28] на некотором удалении от притягивающего тела создаваемое им *гравитационное поле*, или *поле тяготения*, будет близко к *центральному*, или *ньютоновскому*, полю тяготения, потенциал которого определяется как

$$U_r = \frac{\mu}{R}, \quad (2.1.1)$$

где μ — гравитационная постоянная небесного тела, равная произведению универсальной постоянной тяготения на массу тела; R — расстояние от центра притяжения до аппарата.

Таким образом, в качестве основной модели движения космического аппарата можно принять модель движения материальной точки в центральном поле тяготения, т. е. можно ограничиться рамками так называемой *задачи двух тел*. Свободное движение, отвечающее такой модели, называют *невозмущенным кеплеровым движением*, а соответствующую траекторию полета — *невозмущенной*, или *кеплеровой*, *орбитой*.

Все факторы, которые отклоняют действительную траекторию полета от кеплеровой и которые обычно малы (если их измерять в единицах ускорения) по сравнению с основным гравитационным ускорением, называются *возмущениями*. При рассмотрении движения отдельного космического аппарата малые возмущения (например, гравитационные аномалии типа лунных масконов) могут приводить к заметным локальным и значительным глобальным нарушениям кеплерова движения. Влияние возмущений на относительное движение проявляется гораздо слабее, ибо для однотипных космических аппаратов возмущения почти одинаковы и при рассмотрении относительного движения как разности двух абсолютных движений взаимно исключаются.

Пусть движение космических аппаратов рассматривается в некоторой абсолютной системе координат XYZ . Предположим, что поле сил, в котором происходит полет, близко к центральному полю тяготения с потенциалом (2.1.1). Тогда основное ускорение, действующее на отдельный космический аппарат, будет выражаться как

$$\mathbf{a}_r = \frac{\partial U_r}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^3} \mathbf{R}, \quad (2.1.2)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор аппарата относительно центра притяжения.

Обозначим через $\mathbf{V}$ вектор скорости аппарата и через $\mathbf{a}_b$ — векторную сумму всех возмущающих ускорений. В результате уравнения свободного орбитального движения аппарата можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mu}{R^3} \mathbf{R} + \mathbf{a}_b, \quad (2.1.3)$$

где t — текущее время, а величина $\mathbf{a}_b$ мала по сравнению с величиной $\mathbf{a}_r$.

При рассмотрении относительного движения космических аппаратов обычно используются системы координат с началом в неманеврирующем аппарате-цели, движение которого при известных возмущениях вполне определено. Однако из-за навигационных ошибок орбита цели известна всегда неточно. Ввиду этого начало относительной системы координат удобнее связывать с точкой, достаточно близкой в любой момент времени к цели и движущейся по заданной номинальной орбите. С другой стороны, введение такого начала отсчета позволяет унифицировать запись уравнений относительного движения и естественно переходить к системам координат с началом, совпадающим с центром масс либо аппарата-цели, либо управляемого аппарата. Будем называть начало относительной системы координат *опорной точкой*, а ее движение относительно центрального небесного тела — *опорным движением*.

Обозначим через $\mathbf{R}$ планетоцентрический радиус-вектор опорной точки, а через $\mathbf{R}_c$ и $\mathbf{R}_a$ — соответственно радиус-векторы цели и управляемого аппарата. Тогда, если считать опорное движение кеплеровым, общие уравнения относительного движения можно записать, исходя из (2.1.3),

следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{\mu}{R^3} \mathbf{R} &= 0, \\ \frac{d^2 \mathbf{R}_\Pi}{dt^2} + \frac{\mu}{R_\Pi^3} \mathbf{R}_\Pi &= \mathbf{a}_{\text{в.ц}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{R}_\text{а}}{dt^2} + \frac{\mu}{R_\text{а}^3} \mathbf{R}_\text{а} &= \mathbf{a}_{\text{в.а}} + \mathbf{a}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

где $\mathbf{a}_{\text{в.ц}}$ и $\mathbf{a}_{\text{в.а}}$ — возмущения, отклоняющие реальное движение космических аппаратов от кеплерова; $\mathbf{a}$ — управляющее ускорение, создаваемое двигательной установкой маневрирования управляемого аппарата.

Введем в рассмотрение радиусы-векторы цели и управляемого аппарата относительно опорной точки

$$\mathbf{r}_\Pi = \mathbf{R}_\Pi - \mathbf{R}, \quad \mathbf{r}_\text{а} = \mathbf{R}_\text{а} - \mathbf{R}.$$

Тогда уравнения (2.1.4) можно представить в виде уравнений движения относительно подвижного полюса

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_\Pi}{dt^2} + \mu R_\Pi^{-3} \mathbf{r}_\Pi - \mu (R^{-3} - R_\Pi^{-3}) \mathbf{R} &= \mathbf{a}_{\text{в.ц}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_\text{а}}{dt^2} + \mu R_\text{а}^{-3} \mathbf{r}_\text{а} - \mu (R^{-3} - R_\text{а}^{-3}) \mathbf{R} &= \mathbf{a}_{\text{в.а}} + \mathbf{a}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

где

$$R_i = (R^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i + r_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad i = \Pi, \text{ а}.$$

Определим теперь вектор относительной дальности

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_\text{а} - \mathbf{R}_\Pi = \mathbf{r}_\text{а} - \mathbf{r}_\Pi$$

и выразим уравнения (2.1.5) в виде уравнений относительного движения сближаемых космических аппаратов

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{\text{в.а}} - \mathbf{a}_{\text{в.ц}} + \mathbf{a}, \quad (2.1.6)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор относительной скорости, а вектор-функция

$$\mathbf{g} = \mu R_\Pi^{-3} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_\Pi) - \mu R_\text{а}^{-3} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_\text{а}) \quad (2.1.7)$$

представляет собой разностное гравитационное ускорение в центральном поле тяготения, называемое иногда *приливным ускорением*.

Отметим, что в выражении (2.1.7) член $\mu (R_{\text{ц}}^{-3} - R_{\text{а}}^{-3}) \mathbf{R}$ характеризует главным образом разницу в величине, а член $\mu (\mathbf{R}_{\text{ц}}^{-3} \mathbf{r}_{\text{ц}} - R_{\text{а}}^{-3} \mathbf{r}_{\text{а}})$ — разницу в направлении гравитационного ускорения, действующего на два космических аппарата.

Если расстояние между космическими аппаратами невелико по сравнению с их расстояниями до центра притяжения, то возмущения, характеризующие отклонения силового поля от центрального поля тяготения, будут почти одинаковыми. Кроме того, поскольку их величина мала по сравнению с величиной a_r [см. (2.1.2)], то разность малых и почти равных возмущений можно не учитывать по сравнению с разностным гравитационным ускорением. Оценка влияния возмущающих ускорений на относительное движение околоземных космических аппаратов будет дана в главе 9.

Дальнейшее упрощение описания относительного движения можно получить, предположив, что величины $r_{\text{ц}}$ и $r_{\text{а}}$ много меньше величины R . Для этого представим разностное гравитационное ускорение (2.1.7) в виде

$$\mathbf{g} = -\mu R^{-3} [\kappa_{\text{а}} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_{\text{а}}) - \kappa_{\text{ц}} (\mathbf{R} + \mathbf{r}_{\text{ц}})], \quad (2.1.8)$$

где

$$\kappa_i = \frac{R^3}{R_i^3} = \left(1 + 2 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i}{R^2} + \frac{r_i^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad i = \text{ц, а}, \quad (2.1.9)$$

и используем разложение функции κ_i в ряд по степеням r_i/R :

$$\kappa_i = 1 - 3 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i}{R^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{r_i}{R} \right)^2 + \frac{15}{2} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i}{R^2} \right)^2 + \dots \quad (2.1.10)$$

Сохраняя в разложении (2.1.10) и, следовательно, в выражении для разностного гравитационного ускорения члены соответствующего порядка малости отношений r_i/R , можно получить уравнения относительного движения необходимой точности. В частности, в линейном приближении

$$\mathbf{g}_1 = -\frac{\mu}{R^3} \left[\mathbf{r} - 3 \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} \right) \mathbf{R} \right]$$

и в квадратичном приближении

$$g_2 = -\frac{\mu}{R^3} \left\{ r - 3 \left(\frac{R \cdot r}{R^2} \right) R - 3 \left[\left(\frac{R \cdot r_a}{R^2} \right) r_n - \left(\frac{R \cdot r_{II}}{R^2} \right) r_{II} \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left[\left(\frac{r_a}{R} \right)^2 - \left(\frac{r_{II}}{R} \right)^2 \right] + \frac{15}{2} \left[\left(\frac{R \cdot r_a}{R^2} \right)^2 - \left(\frac{R \cdot r_{II}}{R^2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Следует особо отметить, что в отличие от более точных выражений в линеаризованные уравнения движения радиусы-векторы сближаемых аппаратов r_a и r_{II} входят не по отдельности, а только в виде разности r , представляющей собой вектор относительной дальности и определяемой непосредственно из измерений. Таким образом, в линейном приближении все опорные орбиты равнозначны.

Если в качестве опорной орбиты принята орбита цели, то $r_{II} = 0$ и $r_a = r$. Если же начало системы координат, в которой рассматривается относительное движение, помещено в центр масс управляемого аппарата, то $r_{II} = -r$, $r_a = 0$. В последнем случае удобнее пользоваться вектором дальности от управляемого аппарата до цели, т. е. определять r как $r_{II} - r_a$. Тогда для этих двух крайних случаев выбора опорной орбиты приближенные и точные уравнения относительного движения будут иметь один и тот же вид, за исключением знака перед управляющим ускорением.

При решении задачи сближения используются, как правило, опорные системы координат, которые вращаются в инерциальном пространстве с некоторой угловой скоростью ω . В этом случае переход от абсолютных производных вектора дальности к относительным (локальным) осуществляется по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \dot{r} + \omega \times r, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \ddot{r} + 2\omega \times \dot{r} + \omega \times \omega \times r + \dot{\omega} \times r \end{aligned} \right\} \quad (2.1.11)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \dot{r} + \Omega r, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \ddot{r} + 2\Omega \dot{r} + (\Omega^2 + \dot{\Omega}) r. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

Здесь точками обозначены производные векторов по времени t во вращающейся системе координат, а Ω — квад-

ратная матрица третьего порядка, элементы которой определяются через проекции ω_i вектора угловой скорости ω на оси опорной системы координат:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица Ω является кососимметрической, т. е. удовлетворяет условию $\Omega^T = -\Omega$.

§ 2.2. МОДЕЛЬ РАБОТЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Чтобы завершить выбор модели процесса управления сближением, уравнения движения космических аппаратов необходимо дополнить моделью работы системы управления. Для этого рассмотрим возможные подходы к ее построению.

Система управления сближением, хотя и может иметь различную структуру, в общем представляет собой весьма сложный комплекс взаимодействующих между собой устройств, принципы действия и конструкции которых очень разнородны. Так, в ее состав входят или могут входить:

радиолокационная измерительная система, включающая в себя поисковые антенны, следящую антенну с приводами, приемопередатчики и линии связи между ними;

гиростабилизированная платформа со своими приводами, датчиками, устройствами управления приводами и довольно сложной системой коррекции;

инфракрасный датчик вертикали;

блок гироскопических датчиков угловой скорости;

БЦВМ, основные части которой — процессор, запоминающее устройство, устройство управления и устройства ввода-вывода информации и связи с внешними устройствами (датчиками, исполнительными органами, пультом управления космонавтов, телеметрической системой и т. д.);

общая двигательная установка космического аппарата, которая помимо самих двигателей маневрирования и ориентации состоит из баков с горючим и окислителем, системы подачи и распределения топлива, клапанов, регулирующих поступление топлива в камеры сгорания, и устройств управления клапанами.

Следовательно, систему управления можно расчленить (с той или иной степенью подробности) на отдельные элементы и составить уравнения, описывающие действие каждого элемента (функциональную зависимость переменных на выходе от переменных на входе элемента). Объединив все эти уравнения с учетом связей между элементами, получим динамическую модель, изображающую поведение реальной системы. В этом состоит прямой подход к построению модели работы системы управления.

Такой подход, вполне приемлемый и закономерный при исследовании уже созданных систем, мало годится при разработке алгоритмов управления. Это объясняется тем, что для составления полной модели необходимо точно знать состав системы и характеристики ее элементов, тогда как на стадии проектирования значительная часть аппаратуры окончательно не определена. Кроме того, даже если считать систему известной, ее точная модель будет весьма сложной и с помощью этой модели весьма трудно будет выявить наиболее существенные закономерности поведения системы в целом. Следует принимать в расчет также и чрезвычайную трудоемкость такого подхода, препятствующую оперативной оценке многочисленных вариантов, которые приходится перебирать при разработке алгоритмов управления.

В силу сказанного при выборе модели работы системы управления целесообразно придерживаться иного подхода. А именно, отвлекаясь от внутренних процессов различной природы, происходящих в системе, следует учитывать только внешние механические результаты ее действия, сказывающиеся на движении центра масс управляемого аппарата. Это вполне возможно, поскольку входными и выходными величинами системы управления являются кинематические параметры (измеряемые координаты и скорости на входе и управляющие ускорения на выходе).

При таком подходе работу системы управления удобно моделировать ее ошибками, которые можно условно подразделить по вызывающим их причинам на *динамические* и *случайные*. Ошибки первого типа обусловлены тем, что технические устройства, составляющие систему, обладают инерционностью и реагируют на входные сигналы неточно и с некоторым опозданием. Ошибки второго типа связаны с непредвиденными и неконтролируемыми нарушениями

работы системы управления, такими как не вполне точная настройка параметров, нестабильность характеристик, внешние помехи и т. д.

В целом наиболее существенные ошибки работы системы управления, влияющие на динамику сближения, складываются из *ошибок измерений* параметров движения, *ошибок преобразования* измерительной информации в управляющие сигналы и *ошибок исполнения* управляющих сигналов. В конечном итоге все эти ошибки определяют общие *ошибки управления*, которые выражаются в отклонениях движения управляемого аппарата от движения, предписываемого кинематическим методом наведения.

Ошибки измерений считаются в основном случайными, а их статистические характеристики в той или иной форме известными. Динамические ошибки измерений, которые можно аппроксимировать эквивалентными чистыми запаздываниями порядка одной секунды, хотя и существуют, но в силу сравнительно медленного характера управляемого движения играют меньшую роль, чем ошибки измерений.

Ошибки, возникающие в ходе преобразования измерительной информации в управляющие сигналы, обычно незначительны и могут вообще не учитываться по сравнению с двумя другими категориями ошибок. Особенно справедливо это допущение при использовании БЦВМ, которая практически безынерционна, защищена от внешних помех и обеспечена программными средствами для устранения последствий внутренних сбоев вычислительного процесса. Более того, с помощью БЦВМ управляющие сигналы могут вычисляться заранее на некоторый интервал времени вперед и реализоваться тогда, когда это необходимо.

Ошибки исполнения состоят из ошибок направления, величины и времени действия управляющих воздействий по сравнению с их расчетными значениями. Они обусловлены неточностью функционирования системы управления ориентацией, двигательной установки маневрирования и устройств, определяющих включение и выключение тяги.

С точки зрения динамики сближения весь процесс управления ориентацией можно моделировать угловыми ошибками и временными запаздываниями приведения ли-

нии действия тяги к ее расчетному направлению в исполнительной системе координат. Текущие угловые ошибки ориентации носят в основном колебательный характер, но при коротких периодах включения тяги и длительных интервалах между включениями могут моделироваться как чисто случайные ошибки. Запаздывания командных разворотов при установлении требуемого углового положения вектора тяги могут иметь порядок десятков и даже сотен секунд и должны учитываться в модели процесса и в логических схемах алгоритма управления.

Ошибки в величине и времени действия управляющих воздействий возникают в основном вследствие неточного знания профиля тяги ракетных двигателей, у которых величина тяги постепенно нарастает при включении, может колебаться после выхода двигателя на режим из-за колебаний подачи топлива и неустойчивости процессов горения и постепенно (теоретически бесконечно долго) уменьшается до нуля при выключении. Поскольку для динамики важна не столько сила тяги (или ускорение от тяги), сколько ее импульс (или создаваемый ею импульс скорости, который может быть измерен интегрирующим акселерометром), то сложный характер тяги можно не учитывать, считая, что она мгновенно достигает своего номинального значения и мгновенно падает до нуля, и определяя эффективное время работы двигателя (естественно, с ошибками), при котором постоянная тяга дает тот же самый импульс, что и реальная тяга.

Помимо ошибок в величине и времени действия тяги, обусловленных особенностями работы ракетных двигателей, существуют также задержки включения и выключения тяги вследствие инерционности системы подачи и зажигания топлива. Эффективные времена включения и выключения, учитывающие также время нарастания и падения тяги, исчисляются обычно долями секунды и могут приниматься или не приниматься в расчет в зависимости от их удельного веса в сравнении с ошибками в величине импульса. Кроме того, при моделировании процесса управления сближением следует учитывать и то, что включения двигателей маневрирования не могут быть слишком частыми, так как для подготовки двигателя к повторному запуску обычно необходимо некоторое время порядка нескольких секунд.

При использовании импульсной аппроксимации все ошибки исполнения сводятся в конечном итоге к ошибкам в импульсе скорости, которые можно считать, как и ошибки измерений, случайными.

§ 2.3. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При описании околопланетных движений космических аппаратов в небесной механике используются обычно две абсолютные системы координат: *экваториальная* и *эклиптическая*. В качестве базовой плоскости первой системы выбирается плоскость экватора небесного тела, второй системы — плоскость эклиптики (плоскость, в которой лежит орбита небесного тела). При этом базовой осью обеих систем служит линия пересечения этих двух плоскостей. Однако при автономном решении задач навигации и наведения применяется абсолютная система координат, направление осей которой определяется ориентацией инерциальной системы координат, строящейся на борту с помощью гиросtabilизированной инерциальной платформы и (или) звездных датчиков, и может быть совершенно произвольным.

Для описания опорного кеплерова движения, происходящего в одной плоскости, удобно применять абсолютную систему координат $X_0 Y_0 Z_0$, базовая плоскость $X_0 Y_0$ которой совпадает с плоскостью опорной орбиты, а ось Z_0 , нормальная к плоскости орбиты, направлена по вектору орбитальной угловой скорости ω_0 . Положение базовой оси X_0 , от которой отсчитывается центральный полярный угол θ , задающий положение опорной точки на ее орбите, может быть произвольным.

При рассмотрении относительного (равно как и возмущенного) движения основной является подвижная *орбитальная* система координат $x y z$, которая определяется следующим образом (рис. 2.1; l , m , n — орты соответ-

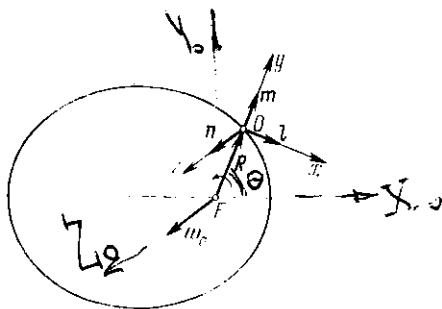


Рис. 2.1.

вующих осей). Начало этой системы совмещено с опорной точкой, движущейся по кеплеровой орбите. Ось y ориентируется непрерывно по радиусу-вектору R опорной точки, ось z , нормальная к плоскости орбиты, направлена по вектору орбитальной угловой скорости ω_0 , а ось x , ориентируемая по трансверсали противоположно направ-

Таблица 2.1

	X_0	Y_0	Z_0
x	$\sin \theta$	$-\cos \theta$	0
y	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0
z	0	0	1

лению движения, дополняет оси y и z до прямоугоньного правого базиса. Матрица направляющих косинусов осей x , y и z относительно осей абсолютного базиса $X_0Y_0Z_0$ дается табл. 2.1.

Орбитальная система координат может быть построена на борту актив-

ного или пассивного аппарата с помощью датчиков местной вертикали и гироскопических приборов, определяющих направление вектора орбитальной угловой скорости. При наличии атмосферы направление касательной к орбите может быть установлено с помощью ионных датчиков, что для околокруговых орбит дает направление еще одной оси орбитальной системы координат. Очевидно, что для построения орбитального базиса, как и всякого прямоугольного базиса, достаточно определить направление только двух из трех каких-либо его осей.

Иногда наряду с орбитальной используется *транспортирующая* относительная система координат $x'y'z'$ с началом в опорной точке, имеющая постоянное направление осей в инерциальном пространстве (рис. 2.2). Приборно транспортирующая система координат реализуется инерциальной платформой, выставленной так, что базовая плоскость $x'y'$ совпадает с плоскостью опорной орбиты. Использование этой системы удобно для привязки измерений параметров относительного движения с целью уточнения элементов опорной орбиты, а также для отработки расчетных управляющих воздействий.

Наконец, при исследовании и реализации методов сближения по линии визирования используется относительная система координат $x_1x_2x_3$, которая связана с линией, соединяющей центры масс сближаемых аппаратов. Такая

система координат называется *визирной*, или *лучевой*, и определяется следующим образом (рис. 2.3). Базовая ось x_1 направлена все время по вектору относительной дальности (линии визирования) r , а две другие взаимно ортогональные оси x_2 и x_3 могут вращаться вокруг оси x_1 с произвольной скоростью и занимать в каждый момент времени произвольное положение.

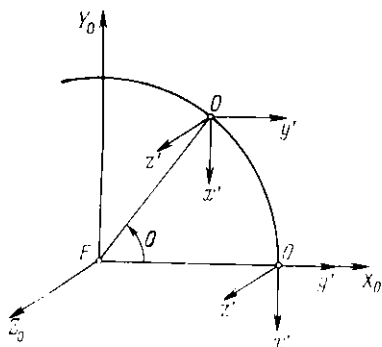


Рис. 2.2.

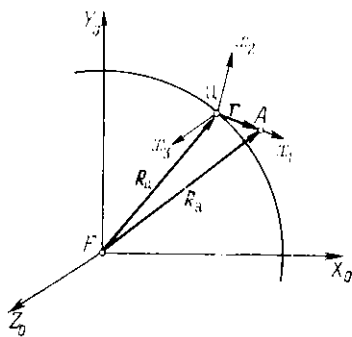


Рис. 2.3.

Положение визирной системы координат удобно задавать относительно орбитальной системы с помощью следующих трех последовательных поворотов (рис. 2.4). Первый поворот совершается в положительном направлении вокруг оси z на угол α , второй поворот — вокруг нового направления оси y в отрицательном направлении на угол β и третий поворот — вокруг окончательного направления оси x (теперь оси x_1) в положительном направлении на угол γ . Первые два угла представляют собой, таким образом, угловые сферические координаты (широту и долготу) вектора относительной дальности в орбитальной системе отсчета. Матрица направляющих косинусов осей визирной системы координат относительно осей орбитальной системы определяется через углы α , β и γ табл. 2.2. Матрица направляющих косинусов визирной системы координат относительно транспортирующей имеет точно такой же вид, что и матрица, даваемая табл. 2.2, если заменить в ней угол α на угол $\alpha + \theta$.

Приборно визирная система координат может быть построена с помощью визирующих цель устройств,

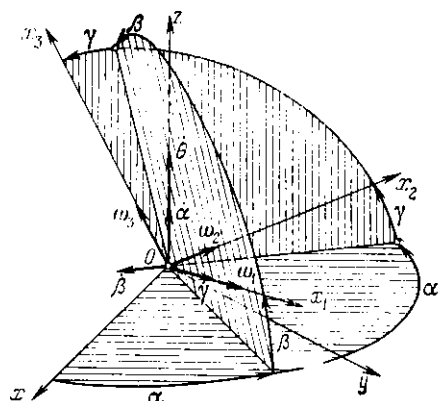


Рис. 2.4.

в частности следящей антенны радиолокатора. Если одна из осей управляемого аппарата все время ориентируется

Таблица 2.2

	x	y	z
x_1	$\cos \alpha \cos \beta$	$\sin \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$
x_2	$-\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\cos \beta \sin \gamma$
x_3	$\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$-\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\cos \beta \cos \gamma$
Для компактности записи для синусов и косинусов введены обозначения: $\sin \equiv s$, $\cos \equiv c$.			

в направлении на цель, то оси визирной системы координат можно отождествить с осями, связанными с корпусом аппарата.

Рассмотренные выше системы отсчета, наиболее удобные и естественные для записи уравнений абсолютного и относительного движений космических аппаратов, являются декартовыми прямоугольными системами координат. Наряду с ними нередко используются криволинейные системы координат, такие как цилиндрические и сферические. Последние оказываются полезными при аналитических исследованиях частных случаев движения. Однако с вычислительной точки зрения их использование обычно неоправдано, поскольку связанные с ними преобразования переменных являются сравнительно сложными и требуют специальных подпрограмм.

Прежде чем переходить непосредственно к постановке основных задач, решаемых алгоритмами управления, необходимо отметить, что возможны два различных подхода к их построению. При первом подходе измеренные значения параметров относительного движения используются для определения или уточнения характеристик абсолютного движения одного из сближаемых аппаратов в предположении, что орбита другого аппарата известна точно. После этого задача управления решается как задача определения абсолютной двухимпульсной или многоимпульсной траектории встречи.

Отличительной особенностью такого подхода является то, что для решения и задачи оценки и задачи управления могут быть использованы с не принципиальными дополнениями и видоизменениями разнообразные методы определения и коррекции орбит [6, 16, 19]. Однако практическая реализация подобных методов может вызывать определенные вычислительные трудности. Это связано с тем, что при прогнозировании промахов и расчете импульсных коррекций приходится оперировать с разностями почти одинаковых величин, приводящими к потере точности вычислений.

В качестве примера приведем некоторые цифры, характеризующие операции сближения около Земли, когда абсолютные скорости составляют около 8 км/сек. Предположим, что БЦВМ оперирует машинными словами, имеющими 15 двоичных разрядов, так что цена младшего разряда, теряемого при округлениях, составляет для скорости около 0,25 м/сек. В результате только за счет ошибки вычисления корректирующего импульса как разности

двух абсолютных скоростей могут возникать промахи до 3 км при времени сближения, достигающем половины периода кругового орбитального движения.

Таким образом, при использовании БЦВМ с небольшой разрядностью некоторые вычисления должны производиться с повышенной точностью, требующей для представления каждого числа не одну, а несколько ячеек памяти. Это может приводить к усложнению вычислительных программ и увеличению потребного объема памяти и вычислительного времени.

При втором подходе, который менее чувствителен к ошибкам округления и допускает меньшую разрядность БЦВМ или вычисления с одинарной точностью, обработка измерительной информации при получении оценок и формировании управляющих сигналов основывается на решении уравнений относительного движения.

§ 2.4. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ

При автономном управлении сближением основной источник информации, на которой базируется формирование управляющих воздействий, — это измерения параметров относительного движения, получаемые прямым визированием цели. Независимо от типа и физического принципа действия визирующих устройств непосредственному измерению поддаются следующие кинематические параметры: дальность до цели r , скорость измерения дальности $\dot{r}$, углы или направляющие косинусы вектора дальности r в измерительной системе координат и производные от этих величин или составляющие скорости вращения ω , вектора дальности относительно инерциального пространства. Будем предполагать, что измерения и их обработка производятся на достаточно протяженных участках свободного полета.

В общем случае измерительная (как и исполнительная) система координат отличается от системы координат, в которой вычисляются управляющие воздействия. Поэтому реальные алгоритмы управления должны включать в себя целую цепочку преобразований измерительной информации из одних систем отсчета в другие. Однако при исследованиях, связанных с разработкой алгоритмов, подобные

преобразования можно не рассматривать и принимать в качестве измерительной непосредственно вычислительную систему координат, если привести к ней все измеряемые параметры и ошибки измерений. При этом следует учитывать, что дальномерная информация будет одной и той же в любых системах отсчета, поскольку линейные расстояния инвариантны к преобразованиям координат, тогда как угломерная информация зависит от выбора системы отсчета и в угловые ошибки необходимо включать ошибки определения (построения) выбранного базиса.

Случайные ошибки измерений каждого из параметров могут содержать аддитивные (прямо складывающиеся с измеряемой величиной) и мультипликативные (пропорциональные измеряемой величине) члены, иметь медленно меняющиеся (систематические) и быстро меняющиеся (флуктуационные) составляющие и быть коррелированными (статистически зависимыми) по времени. Кроме того, может существовать корреляционная связь между ошибками измерений различных параметров.

На практике структура ошибок измерений и их вероятностные характеристики могут быть известны неточно. В этом случае ошибки измерений можно учитывать детерминированным образом, задавая их максимальные значения.

При хорошем знании структуры и характера изменения ошибок они описываются статистически с помощью многомерных законов распределения вероятностей, учитывающих все корреляционные зависимости. При этом систематические и флуктуационные ошибки рассматриваются по отдельности. В большинстве случаев законы распределения вероятностей этих ошибок измерений можно считать с достаточной для практики точностью нормальными, поскольку они вызываются совместным действием многочисленных случайных факторов. Тогда ошибки измерений полностью характеризуются своими средними значениями (математическими ожиданиями), которые обычно предполагаются нулевыми, и корреляционной матрицей (матрицей вторых моментов), которая симметрична и определенно положительна. Иногда можно принять, что флуктуационные ошибки измерений некоррелированы по времени, т. е. имеют характер белого шума.

В свою очередь, систематические ошибки обычно можно считать постоянными или меняющимися по простому закону.

По определению, систематические ошибки, нулевые при осреднении по множеству реализаций процесса измерений, отличны от нуля и принимают вполне определенные значения в отдельной реализации, тогда как флуктуационные ошибки будут нулевыми при их осреднении в каждой реализации. Отсюда следует, что при достаточной продолжительности процесса измерений флуктуационные ошибки можно эффективно отфильтровать (сгладить), в то время как систематические ошибки простой фильтрации не поддаются. Однако при некоторых сочетаниях флуктуационных и систематических ошибок последние можно включать в число оцениваемых параметров и компенсировать при осреднении флуктуационных ошибок.

При реализации методов сближения по линии визирования законы изменения измеряемых параметров, используемых для формирования управляющих сигналов, точно не известны из-за существенной неполноты информации. Поэтому эти законы аппроксимируются комбинациями известных линейно независимых функций с неизвестными постоянными коэффициентами. В этом случае задача оценки сводится к нахождению таких коэффициентов, чтобы соответствующее им представление измеряемых параметров согласовывалось с результатами измерений наилучшим в некотором смысле образом. В качестве базисных функций аппроксимации удобно использовать степенные и тригонометрические функции времени.

Следует отметить, что при оценке непосредственно измеряемых параметров относительного движения можно в принципе использовать информацию об опорной орбите, а также компенсировать систематические ошибки. Однако это сильно усложняет алгоритмы фильтрации и при сравнительно небольших интервалах осреднения не увеличивает, а даже уменьшает точность требуемых оценок. Поэтому подобные улучшения обычно нежелательны в алгоритмах управления сближением по методам типа метода параллельного наведения, основное достоинство которых — простота.

В зависимости от подхода к построению алгоритма управления, реализующего более сложные методы наведения, такие как метод свободных траекторий, оценками, получаемыми из измерений параметров относительного движения, могут быть либо элементы опорной орбиты, либо аналогичные характеристики относительного движения и, в частности, текущие координаты и составляющие скорости, определяющие последующее абсолютное либо относительное движение.

В случае, когда ошибки измерений малы, хорошие оценки могут быть получены детерминированными методами. В такой постановке для однозначного определения всех параметров движения, требуемых для расчета управляющих воздействий, достаточно шести независимых измерений, выполненных в один и тот же или разные моменты времени. Поскольку связь между измеряемыми и оцениваемыми параметрами нелинейна, то для нахождения детерминированных оценок необходимо решать систему нелинейных уравнений, соответствующую многоточечной краевой задаче (при неполном составе измерений).

В более общем случае, когда ошибки измерений не малы, достаточно точные оценки могут быть получены лишь статистическими методами исходя из избыточного числа измерений. При статистической обработке измерительной информации определение оценок основывается на минимизации некоторой интегральной меры рассогласований между измерениями и их расчетными значениями.

Наиболее известными методами статистических оценок, получившими свое название по взятому в их основу критерию оптимальности, являются методы наименьших квадратов, максимального правдоподобия и максимальной апостериорной вероятности (байесовых оценок) [2, 5, 16, 19, 44]. При использовании этих методов задача оценки сводится в конечном счете к решению системы уравнений, выражающих необходимые условия оптимальности.

При наличии первоначальной оценки параметров движения, заданной априори или полученной детерминированными методами, задача статистической обработки может ставиться и как задача уточнения приближенной оценки. В этом случае для упрощения расчетов система условных уравнений может быть линеаризована относи-

тельно номинальных значений оцениваемых параметров, так что поправки к оценкам могут вычисляться по конечным формулам.

Выбор метода статистической обработки измерительной информации зависит от уровня знания структуры и вероятностных характеристик ошибок измерений. Кроме того, немаловажное значение имеют объем, сложность вычислений и их точность при ограниченной разрядной сетке БЦВМ. Методы максимального правдоподобия и максимальной апостериорной вероятности требуют хорошего знания характеристик ошибок. Они более полно учитывают корреляционные связи между ошибками, включая временную корреляцию. Однако на практике нередко бывает весьма затруднительно достаточно точно предсказать требуемые характеристики, так что эффективность этих методов может оказаться невысокой, а связанные с ними вычислительные сложности — неоправданными. Поэтому иногда для получения оценок могут использоваться более простые, в том числе и эвристические методы, например метод среднеарифметических оценок (для постоянных параметров) или метод экспоненциального сглаживания.

§ 2.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

В предположении, что все необходимые параметры движения определены в результате решения соответствующей задачи оценки, задачи управления формулируются в общем виде следующим образом.

При использовании абсолютной системы координат предполагается, что известны элементы первоначальной орбиты управляемого аппарата и орбиты цели. Требуется среди допустимых управлений выбрать такое, которое, начиная действовать с момента времени t_0 , обеспечивает в конечный момент времени t_K выполнение условий встречи

$$R_a(t_K) = R_c(t_K), \quad V_a(t_K) = V_c(t_K). \quad (2.5.1)$$

При использовании относительной системы координат считаются известными элементы опорной орбиты, уравнения относительного движения и начальные условия $r(t_0) = r_0$, $v(t_0) = v_0$. Соответственно условия встречи

(2.5.1) записываются теперь в виде

$$r(t_k) = 0, \quad v(t_k) = 0. \quad (2.5.2)$$

В случае конечной тяги под выбором управления понимается нахождение составляющих управляющего ускорения a в зависимости от начальных условий как функций от времени (задача определения программы управления) или в виде функций от текущих значений параметров движения (задача определения законов управления, или задача синтеза). В случае импульсной тяги параметрами управления, определяемыми в зависимости от начальных или текущих значений параметров движения, будут моменты t_i приложения корректирующих импульсов $\Delta V_i = \Delta v_i$ и их составляющих в используемой системе координат.

Моменты начала t_0 и окончания t_k процесса управления могут быть как фиксированными (задача управления с закрепленным временем), так и изменяться в некоторых пределах (задача управления с незакрепленным временем). При этом разность

$$T = t_k - t_0$$

принято называть *расчетным временем сближения*.

При определении допустимых управлений могут учитываться разнообразные ограничения, вытекающие из технических ограничений.

Так, в случае импульсной тяги могут налагаться ограничения на величину, направление, моменты приложения и общее число импульсов. Математически это выражается соответственно таким образом:

$$|\Delta v_i| \leq \bar{J}_i,$$

где $\bar{J}_i$ — предельно допустимая величина импульса;

$$\Delta v_i = \bar{J}_i e_i,$$

где e_i — единичный вектор, задающий направление импульса;

$$t_{i+1} \geq t_i + \Delta t, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t_1 \geq t_0, \quad t_n \leq t_k,$$

где Δt — минимально допустимый интервал между импульсами;

$$n \leq \bar{n}, \quad (2.5.3)$$

где $\bar{n}$ — предельно возможное число импульсов.

В случае конечной тяги можно использовать как полярное, так и декартово управление вектором тяги и учитывать, что управляющие ускорения ограничены по величине вследствие ограниченности тяговых возможностей ракетных двигателей. Предположим, как обычно, что регулирование тяги осуществляется за счет изменения секундного расхода топлива $\bar{m}_j$ при постоянной скорости истечения газов из сопла w_j . Тогда ограничение на величину ускорения a_j , создаваемого отдельным двигателем, можно записать в виде

$$0 \leq a_j \leq \frac{w_j \bar{m}_j}{M},$$

где $\bar{m}_j$ — предельный для данного двигателя секундный расход топлива; M — текущая масса аппарата. При расходе топлива, небольшом по сравнению с массой всего аппарата, можно пренебрегать ее изменением и считать предельную величину управляющего ускорения постоянной.

Для полярного управления вектором тяги могут устанавливаться также ограничения на направление управляющего ускорения, например, в виде

$$0 \leq \arctg \frac{|e_1 \times a|}{e_1 \cdot a} \leq \arctg \frac{|e_1 \times e_2|}{e_1 \cdot e_2},$$

где e_1 и e_2 — заданные единичные векторы, угол между которыми не превышает 180° .

При постановке задачи управления следует принимать в расчет и требования к эффективности управления, выраженные через показатели качества. В частности, суммарный расход топлива должен быть минимальным или не превышать располагаемого запаса.

В общем случае масса топлива, затрачиваемого на сближение, зависит от его состава и типа двигателя и определяется как интеграл (за время сближения T) от массы топлива m , потребляемого двигательной установкой маневрирования в единицу времени:

$$M_T = \int_{t_0}^{t_K} m dt = M_0 - M_K,$$

где M_0 — начальная и M_K — конечная масса аппарата.

Чтобы не зависеть от характеристик конкретной двигательной установки, в соответствии с формулой Циолковского, связывающей приращение скорости от тяги с изменением массы аппарата, в качестве меры расхода топлива часто используется величина *характеристической скорости*

$$J = w_j \ln \frac{M_0}{M_K}.$$

В случае конечной тяги характеристическая скорость вычисляется как интеграл от модуля управляющего ускорения для полярной схемы

$$J = \int_{t_0}^{t_K} |a| dt$$

или как интеграл от суммы абсолютных величин составляющих управляющего ускорения для декартовой схемы

$$J = \int_{t_0}^{t_K} (|a_1| + |a_2| + |a_3|) dt,$$

где a_1, a_2, a_3 — проекция вектора a на оси системы координат, в которой стабилизируется аппарат.

Аналогичным образом определяется характеристическая скорость и в случае импульсной тяги. Для полярной схемы — это сумма величин приращений скорости Δv_i , создаваемых в моменты времени t_i ,

$$J = \sum_{i=1}^n |\Delta v_i|, \quad (2.5.4)$$

а для декартовой схемы — сумма величин приращений скорости по каждой оси

$$J = \sum_{i=1}^n (|\Delta v_{1i}| + |\Delta v_{2i}| + |\Delta v_{3i}|). \quad (2.5.5)$$

Следует отметить, что с вычислительной точки зрения задача определения управления, оптимального по расходу топлива, является довольно сложной и до сих пор окончательно еще не решена. Более простой является задача нахождения управлений, минимизирующих квадратичные

показатели качества, определяемые в виде

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} |a|^2 dt$$

в случае конечной тяги и

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\Delta v_i|^2 \quad (2.5.6)$$

в случае импульсной тяги.

Связь между характеристической скоростью и квадратичными показателями качества дают неравенства Гёльдера [8], принимающие соответственно вид

$$\int_{t_0}^{t_K} |a| dt \leq (t_K - t_0)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{t_K} |a|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\sum_{i=1}^n |\Delta v_i| \leq n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |\Delta v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичным образом принимаются в расчет и другие показатели качества управления, существенные в тех или иных приложениях. Например, если для маневрирования используются двигатели многократного запуска с ограниченным ресурсом, то имеют место ограничения на число их включений вида (2.5.3). В случае, когда решается задача оптимизации, вспомогательные показатели качества можно учитывать, вводя их в критерий оптимальности с некоторыми весами.

В формулировке задачи управления могут учитываться также физические ограничения, такие как ограничение на высоту траектории сближения над поверхностью небесного тела или требование прохождения траектории сближения через заданную область пространства, установленную из возможностей системы слежения за целью.

При известных оценках параметров движения и заданных ограничениях задача управления может рассматриваться в двух постановках: детерминированной и стохастической. В детерминированной постановке предполагается, что принятые в расчетах значения параметров точ-

но соответствуют их истинным значениям, и управление определяется из условий точного выполнения условий встречи. В стохастической постановке в той или иной мере учитываются случайные ошибки управления, вызываемые ошибками измерений и исполнения, и задается допустимая точность выполнения условий встречи или ставится задача минимизации конечных ошибок сближения.

Поскольку и исходные и результирующие ошибки управления являются случайными и их конкретные значения неизвестны, то при решении стохастических задач управления ошибки можно учитывать либо статистически, либо детерминированным образом. В первом случае задаются законы распределения или другие вероятностные характеристики ошибок. Во втором случае определяются максимально возможные значения ошибок, ожидаемые с некоторой вероятностью.

Большая часть того, что сказано выше, относится в равной степени как к методам наведения, основанным на использовании законов орбитального движения, так и к методам наведения, которые не учитывают этих законов. Однако применительно к последним при формулировке задач управления необходимо принимать во внимание существенную неполноту информации и считать известными только начальные или текущие значения переменных r , $\dot{r}$ и ω_r . Кроме того, дополнительно должны учитываться ограничения, налагаемые на величину составляющих угловой скорости линии визирования ω_r .

ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ ПО МЕТОДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО НАВЕДЕНИЯ

§ 3.1. УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ВИЗИРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Отличительная особенность методов сближения по линии визирования, не учитывающих законов орбитального движения, состоит в ограничении угловой скорости вращения этой линии, приводящем к встрече с целью. Можно говорить, что все они аппроксимируют с той или иной степенью точности метод параллельного наведения, при реализации которого из-за ошибок управления также невозможно точное выполнение требуемого равенства нулю величины угловой скорости линии визирования. В связи с этим для удобства терминологии будем объединять подобные методы наведения под общим названием метода параллельного наведения.

Определяющим требованием, предъявляемым обычно к законам управления сближением по методу параллельного наведения, является требование их простоты, ограничивающее возможность применения регулярных методов оптимального синтеза. Поэтому при разработке таких законов управления используется в основном эвристический подход.

Как уже отмечалось ранее, при исследовании и реализации метода параллельного наведения удобно использовать визирную систему координат, связанную с вектором относительной дальности. Уравнения относительного движения в этой системе нетрудно получить из общих векторных уравнений, представленных в § 2.1. При этом целесообразно ради сокращения записи в качестве опорной выбрать орбиту цели ($R = R_n$) и, кроме того, не учитывать возмущений, отклоняющих абсолютные движения сближаемых аппаратов от кеплерова ($a_{в.п.} = a_{в.л} = 0$).

В визирной системе координат $x_1 x_2 x_3$ проекции векторов R и r будем определять с помощью их направляющих

косинусов, т. е.

$$\mathbf{R} = R (m_1, m_2, m_3)^T, \quad \mathbf{r} = r (1, 0, 0)^T,$$

где m_1, m_2, m_3 выражаются через углы α, β, γ вторым столбцом табл. 2.2. Таким образом,

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = R r m_1, \quad \kappa_0 = \frac{R_{11}^3}{R_{11}^3} = \left(1 + 2 \frac{r}{R} m_1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

На основании уравнения (2.1.8) при $\mathbf{r}_c = 0$ получаем следующее выражение для составляющих разностного гравитационного ускорения:

$$\mathbf{g} = -\mu R^{-3} (\kappa_0 (R m_1 + r) - R m_1, \\ - (1 - \kappa_0) R m_2, \quad (1 - \kappa_0) R m_3)^T.$$

Вектор угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ визирной системы координат относительно инерциального пространства задается своими проекциями на оси x_1, x_2 и x_3 как

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T.$$

Заметим, что проекции ω_2 и ω_3 представляют собой составляющие угловой скорости вращения вектора относительной дальности (линии визирования), тогда как проекция ω_1 задает скорость вращения поперечных осей x_2 и x_3 вокруг луча визирования x_1 и может иметь совершенно произвольные величину и знак. Согласно определению углов, дающих переход от орбитальной к визирной системе координат, эти проекции выражаются следующими кинематическими соотношениями (см. рис. 2.4):

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\gamma} + (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \sin \beta, \\ \omega_2 &= (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \cos \beta \sin \gamma - \dot{\beta} \cos \gamma, \\ \omega_3 &= (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

В соответствии с (2.1.11) или (2.1.12) в визирной системе координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\dot{r}, r\omega_3, -r\omega_2)^T, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= (\ddot{r} - r(\omega_3^2 + \omega_2^2), \quad r\dot{\omega}_3 + 2\dot{r}\omega_3 + r\omega_1\omega_2, \\ &\quad -r\dot{\omega}_2 - 2\dot{r}\omega_2 + r\omega_1\omega_3)^T. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

Следовательно, точные уравнения относительного движения в этой системе имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r(\omega_3^2 + \omega_2^2) + \mu\kappa_0 R^{-3}r - \mu(1 - \kappa_0)R^{-2}m_1 &= a_1, \\ r\dot{\omega}_3 + 2\dot{r}\omega_3 + r\omega_1\omega_2 - \mu(1 - \kappa_0)R^{-2}m_2 &= a_2, \\ -r\dot{\omega}_2 - 2\dot{r}\omega_2 + r\omega_1\omega_3 - \mu(1 - \kappa_0)R^{-2}m_3 &= a_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

где a_1, a_2, a_3 — проекции вектора управляющего ускорения a на оси x_1, x_2, x_3 , а

$$\begin{aligned} m_1 &= \sin \alpha \cos \beta, & m_2 &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ m_3 &= -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Приведем также уравнения движения, линеаризованные по разностному гравитационному ускорению:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r(\omega_3^2 + \omega_2^2) + \mu R^{-3}r(1 - 3m_1^2) &= a_1, \\ r\dot{\omega}_3 + 2\dot{r}\omega_3 + r\omega_1\omega_2 - 3\mu R^{-3}rm_1m_2 &= a_2, \\ -r\dot{\omega}_2 - 2\dot{r}\omega_2 + r\omega_1\omega_3 - 3\mu R^{-3}rm_1m_3 &= a_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений движения, динамические соотношения (3.1.3) или (3.1.4) необходимо дополнить кинематическими соотношениями, дающими связь между производными от углов α, β, γ или направляющих косинусов m_1, m_2, m_3 и составляющими угловой скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Выражения для производных от углов следуют непосредственно из уравнений (3.1.1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_3 \cos \gamma + \omega_2 \sin \gamma) - \dot{\theta}, \\ \dot{\beta} &= \omega_3 \sin \gamma - \omega_2 \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} (\omega_3 \cos \gamma + \omega_2 \sin \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.5)$$

Для нахождения кинематических соотношений через направляющие косинусы воспользуемся известной формулой дифференцирования переменного единичного вектора:

$$\dot{e} = \mathbf{v} \times e, \quad (3.1.6)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор угловой скорости вращения вектора e в рассматриваемой системе координат.

Направляющие косинусы m_1, m_2, m_3 , входящие в уравнения движения (3.1.3) и (3.1.4), представляют собой составляющие орта $\mathbf{m}$ оси y орбитальной системы координат xuz . Вектор угловой скорости этой системы относительно инерциального пространства направлен по оси z , т. е. по нормали $\mathbf{n}$ к плоскости опорной орбиты, и имеет величину $\dot{\theta}$. Следовательно, чтобы получить вектор $\mathbf{v}$, необходимо из вектора вращения орбитальной системы координат $\dot{\theta}\mathbf{n}$ вычесть вектор вращения визирной системы координат $\boldsymbol{\omega}$ и спроектировать разность на оси визирной системы. Поскольку направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ к плоскости опорной орбиты равны n_1, n_2, n_3 , то

$$\mathbf{v} = (\dot{\theta}n_1 - \omega_1, \dot{\theta}n_2 - \omega_2, \dot{\theta}n_3 - \omega_3)^T.$$

Таким образом, применяя формулу (3.1.6) к любому единичному вектору $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$, не меняющему своего положения в орбитальной системе координат, имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_1 &= \omega_3 e_2 - \omega_2 e_3 + \dot{\theta}(e_3 n_2 - e_2 n_3), \\ \dot{e}_2 &= \omega_1 e_3 - \omega_3 e_1 + \dot{\theta}(e_1 n_3 - e_3 n_1), \\ \dot{e}_3 &= \omega_2 e_1 - \omega_1 e_2 + \dot{\theta}(e_2 n_1 - e_1 n_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.7)$$

Отсюда нетрудно получить требуемые кинематические соотношения для направляющих косинусов, подставляя в (3.1.7) вместо величин e_i составляющие ортов $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ осей x, y, z орбитальной системы координат. С учетом того, что каждый из элементов ортогональной матрицы направляющих косинусов равен своему алгебраическому дополнению, окончательные выражения для производных от направляющих косинусов осей орбитальной системы координат относительно осей визирной системы можно привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{l}_1 &= \omega_3 l_2 - \omega_2 l_3 + \dot{\theta} m_1, \\ \dot{l}_2 &= \omega_1 l_3 - \omega_3 l_1 + \dot{\theta} m_2, \\ \dot{l}_3 &= \omega_2 l_1 - \omega_1 l_2 + \dot{\theta} m_3, \\ \dot{m}_1 &= \omega_3 m_2 - \omega_2 m_3 - \dot{\theta} l_1, \\ \dot{m}_2 &= \omega_1 m_3 - \omega_3 m_1 - \dot{\theta} l_2, \\ \dot{m}_3 &= \omega_2 m_1 - \omega_1 m_2 - \dot{\theta} l_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_1 &= \omega_3 n_2 - \omega_2 n_3, \\ \dot{n}_2 &= \omega_1 n_3 - \omega_3 n_1, \\ \dot{n}_3 &= \omega_2 n_1 - \omega_1 n_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

Отметим, что в отличие от кинематических соотношений (3.1.5), вырождающихся при $\beta \rightarrow \pm 90^\circ$, уравнения (3.1.8) не имеют особенностей. Кроме того, они не содержат тригонометрических функций, вычисление которых требует сравнительно большого количества арифметических операций. Поэтому при численных расчетах предпочтительнее использовать систему (3.1.8) несмотря на ее более высокий порядок, причем для нахождения требуемых величин m_i достаточно интегрировать первые шесть уравнений этой системы.

Угловая скорость ω_1 вращения системы координат $x_1 x_2 x_3$ вокруг оси x_1 , входящая в динамические и кинематические уравнения, совершенно произвольна и может задаваться из различных соображений. В частности, она может быть такой, чтобы ось x_3 была направлена все время по вектору угловой скорости вращения вектора дальности. В этом случае $\omega_2 \equiv 0$ и плоскость $x_1 x_2$ будет содержать вектор относительной скорости и представлять, по определению, *плоскость наведения*. Другой важный для практики случай дает выбор $\omega_1 \equiv 0$, что для декартова управления вектором тяги соответствует стабилизации управляемого аппарата по крену.

§ 3.2. ОБЩИЙ ВИД ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ И МЕТОДИКА ИХ СИНТЕЗА

Независимо от метода наведения синтез законов управления сближением может быть основан на использовании понятия *потребной скорости*. *Потребная относительная скорость* v_T , соответствующая текущему взаимному положению r сближаемых аппаратов, определяется как мгновенная относительная скорость, которая необходима для сближения с целью за некоторое время T при заданных кинематических ограничениях. Разность между потребной скоростью v_T , вычисляемой в зависимости от r и T , и действительной скоростью v , получае-

мой из измерений, образует сигнал рассогласования Δv (мгновенное *потребное приращение скорости*), который служит для формирования управляющих сигналов.

При реализации метода параллельного наведения система управления движением центра масс разбивается обычно на два канала: *продольный* (канал дальности), обеспечивающий регулирование скорости сближения вдоль вектора дальности, и *боковой* (канал угловой скорости линии визирования), обеспечивающий поддержание на достаточно низком уровне составляющих относительной скорости по нормали к вектору дальности. В соответствии с этим вектор относительной скорости v раскладывается на продольную составляющую v_1 , измеряемую непосредственно как скорость изменения дальности, и боковые составляющие v_2 и v_3 , которые определяются как произведения составляющих угловой скорости линии визирования ω_3 и ω_2 на дальность r , взятые с соответствующими знаками, т. е., согласно (3.1.2),

$$v_1 = \dot{r}, \quad v_2 = \omega_3 r, \quad v_3 = -\omega_2 r.$$

Посредством регулирования продольной скорости v_1 обеспечивается сближение, т. е. уменьшение расстояния между аппаратами ($\dot{r} < 0$) и уменьшение величины скорости $\dot{r}$ при подходе к цели. Отсюда потребную скорость сближения можно задавать в виде убывающей функции дальности. При этом продольный канал будет выполнять две задачи: осуществлять торможение аппарата ($a_1 > 0$), если скорость сближения велика, и осуществлять разгон аппарата ($a_1 < 0$), если вместо сближения происходит удаление или величина скорости сближения недостаточна. Иными словами, если продольная составляющая скорости v_1 отличается от потребной скорости сближения, в продольном канале должны вырабатываться сигналы, устанавливающие действие продольной тяги на разгон или торможение.

Очевидно, что из-за постоянно действующих возмущений (таких, как ошибки измерений и исполнения, влияние бокового движения и воздействие разностного гравитационного ускорения) фактическая скорость сближения будет всегда отклоняться от расчетной. При использовании непрерывного управления, реализуемого с помощью двигателей регулируемой тяги, отклонения от потребной

скорости компенсируются пропорциональным изменением продольной составляющей тяги. При установлении потребной скорости сближения с помощью дискретного управления, реализуемого двигателями многократного запуска, необходимо предусматривать некоторые пороги для включения и выключения тяги на разгон и торможение, т. е. вводить зону нечувствительности и гистерезис для того, чтобы исключить необходимость в частом переключении двигательной установки. Пороговые значения, с которыми производится сравнение измеряемой продольной скорости при формировании управляющих сигналов, могут быть, как и потребная скорость сближения, убывающими функциями дальности.

При рассмотрении управления по боковому каналу ради наглядности можно пользоваться понятием *прогнозируемого пролета*, который определяется как минимальное расстояние, на котором прошел бы управляемый аппарат мимо цели при отсутствии управления. Предполагая, что, начиная с данного момента, аппарат движется относительно цели прямолинейно и равномерно, величину пролета можно оценить приближенно в виде

$$r_{\min} = \frac{r^2 \omega_r}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\omega}_r)^2}},$$

где $\omega_r = \sqrt{\dot{\omega}_z^2 + \dot{\omega}_y^2}$. Заметим, что мерой угловой скорости линии визирования ω_r и, следовательно, пролета может служить также величина второй производной от дальности, вычисленная без учета разностного гравитационного ускорения:

$$\omega_r^2 = \frac{\ddot{r}}{r}.$$

Уменьшение пролета достигается за счет уменьшения боковой скорости (рис. 3.1). Если не принимать в расчет возмущений прямолинейного движения, то чем меньше величина боковой скорости, тем более точно выдерживается требуемое направление движения к цели и тем меньше топлива нужно для его установления. Поэтому для бокового канала потребную скорость можно принимать равной нулю независимо от расстояния до цели. Следовательно, и потребная величина угловой скорости линии визирования также будет равна нулю.

Таким образом, при непрерывном управлении боковая составляющая управляющего ускорения должна задаваться (по величине) пропорциональной величине боковой скорости и иметь противоположное направление. При дискретном управлении командные сигналы для коррекции боковой скорости можно формировать непосредственно по сигналам измерений угловой скорости линии визирования. При этом для уменьшения числа запусков

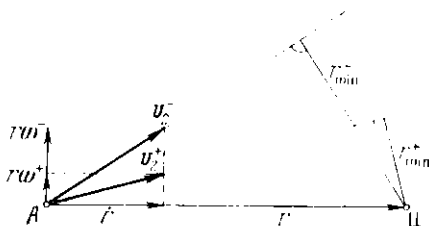


Рис. 3.1.

двигательной установки имеет смысл установить некоторые пороги включения по угловой скорости линии визирования, которые могут зависеть от дальности.

Выбор зависимостей поребной скорости от дальности, а при дискретном управлении также и функций переключения по линейной и угловой скоростям можно было бы основывать на использовании методов теории оптимального управления. Однако этот путь приводит к довольно сложным законам управления, которые могут не удовлетворять требованиям приборной реализуемости. Поэтому для конкретных приложений синтез более простых, хотя и менее эффективных, законов управления может проводиться в следующем порядке.

Сначала, исходя из технических соображений и упрощенного рассмотрения динамики сближения, устанавливаются вид функциональных преобразований измерительной информации для каждого канала наведения и логика формирования управляющих сигналов. Если законы управления предполагается реализовывать с помощью аналоговых элементов, то их структура до некоторой степени предопределена — функции управления выбираются из класса кусочно-линейных функций, удовлетворяющих

требованию простоты реализации. В случае использования для управления БЦВМ можно в принципе выбирать более сложные зависимости. Затем с помощью приближенного аналитического решения оцениваются численные значения постоянных параметров, входящих в законы управления. И, наконец, путем моделирования процесса управления на ЭВМ находятся оптимальные значения этих параметров, дающие минимальный расход топлива в среднем или минимальный расход топлива при наиболее неблагоприятных условиях сближения с учетом заданных ограничений на число включений двигателей маневрирования или диапазон дросселирования их тяги.

§ 3.3. ЗАКОНЫ ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

При дискретном управлении коррекция относительной скорости по каждому каналу наведения осуществляется релейными командными сигналами, которые включают отдельные двигатели при использовании декартова управления вектором тяги и по которым формируются команды включения продольного двигателя маневрирования при использовании полярного управления. Вид функциональных зависимостей, в соответствии с которыми эти сигналы вырабатываются по сигналам измерений, в общем не зависит от схемы управления вектором тяги.

Для бокового канала входными сигналами служат либо только одна составляющая угловой скорости линии визирования ω_z , которая при нормальной работе системы ориентации должна быть положительной и представлять с точностью до ошибок полный вектор угловой скорости линии визирования, либо две ее составляющие ω_2 и ω_3 , которые могут быть любого знака. Соответственно в боковом канале формируются либо один командный сигнал σ_2 , принимающий значения 1 или 0, либо два командных сигнала σ_2 и σ_3 , каждый из которых может принимать три значения: $+1, 0, -1$.

Сигналы $\sigma_i \neq 0$, показывающие необходимость коррекции боковой скорости, начинают вырабатываться всякий раз, когда величина угловой скорости линии визирования или ее составляющих превышает некоторый порог ω_n . Если выключение двигателей предполагается основывать на сигналах измерений, то этот же самый сигнал

$\sigma_i \neq 0$ продолжает формироваться до тех пор, пока угловая скорость не будет снижена до второго контрольного порога $\omega_n < \omega_b$. После этого начинает вырабатываться сигнал $\sigma_i = 0$, показывающий отсутствие необходимости

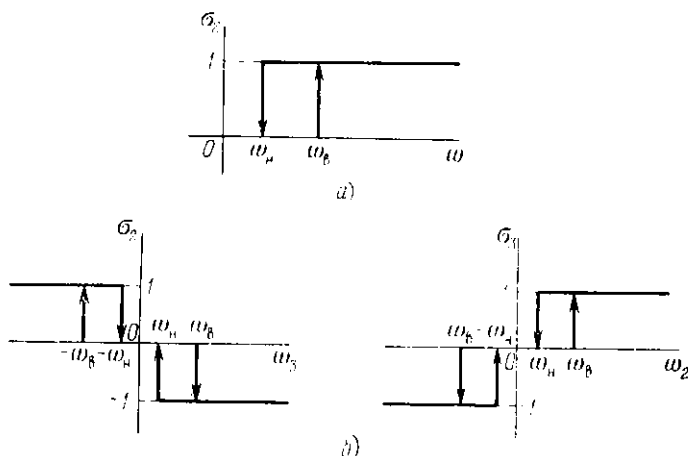


Рис. 3.2.

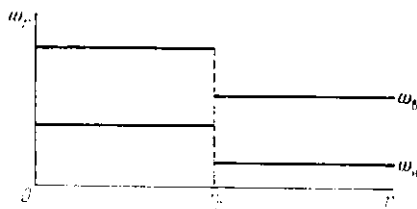


Рис. 3.3.

в коррекции боковой скорости. Таким образом, преобразование входных сигналов измерений в командные может производиться в соответствии с релейными характеристиками, показанными на рис. 3.2 (*a* — полярное управление, *б* — декартово управление).

В целях простоты реализации пороги коррекции угловой скорости линии визирования ω_b и ω_n могут устанавливаться кусочно-постоянными с одним или несколькими переключениями уровней по дальности (рис. 3.3).

Необходимость изменения порогов связана с обеспечением положительного знака угловой скорости линии визирования в случае полярного управления вектором тяги ($\omega_3 > 0$ при $\omega_2 = 0$). В этой схеме при сохранении знака угловой скорости отпадает необходимость в постоянной переориентации аппарата на 180° и коррекции боковой скорости будут односторонними ($a_2 < 0$), так что процесс сблизения в целом будет устойчивым.

Выбор порогов коррекции ω_b и ω_n для разных участков производится на основании следующих соображений.

Для уменьшения расхода топлива на обеспечение пересекающегося с целью направления движения угловая скорость линии визирования, остающаяся нескорректированной, должна быть по возможности минимальной, но такой, чтобы соответствующая составляющая ω_i не меняла своего знака. Отклонение остаточной скорости от значения ω_n зависит от ошибок в измеренной величине угловой скорости и динамических ошибок, приводящих к запаздываниям выключения тяги. При больших дальностях ($r > r_2$) основную роль играют неопределенности в величине угловой скорости, так что на этом участке значение порога ω_n устанавливается исходя из максимальной ошибки измерений угловой скорости. При малых дальностях ($r < r_2$) определяющее значение имеют запаздывания выключения тяги, поскольку, как это следует из уравнений (3.1.3), один и тот же импульс тяги вызывает теперь более значительные изменения угловой скорости, чем при больших дальностях. Поэтому, исходя из располагаемой величины ускорения от тяги и запаздываний выключения, нижний порог ω_n на этом участке повышается.

Верхний порог ω_b коррекции угловой скорости линии визирования устанавливается в зависимости от расхода топлива и ресурса по числу запусков двигателя. Если он будет близок к нижнему порогу ω_n , то для регулирования боковой скорости потребуется много небольших коррекций. С другой стороны, если этот порог будет выбран очень высоким, то это приведет к увеличению среднего значения угловой скорости линии визирования и, как результат, к возрастанию расхода топлива. Таким образом, для каждого участка существуют оптимальные значения порога

$\omega_в$, которые должны определяться в зависимости от конкретных характеристик датчиков угловой скорости линии визирования и исполнительных органов системы наведения. Приемлемые результаты дает выбор $\omega_в = 3\omega_н$ [123].

Помимо кусочно-постоянных порогов $\omega_в$ и $\omega_н$ можно рассматривать также пороги, которые непрерывно повышаются с уменьшением дальности.

Если выключение двигателей предполагается осуществлять по сигналам акселерометров, то потребное приращение боковой скорости вычисляется для полярной схемы как

$$\Delta v_2 = (\omega_н - \omega_3) r, \quad \omega_3 \geq \omega_в$$

и для декартовой схемы как

$$\Delta v_2 = (\omega_н \operatorname{sign} \omega_3 - \omega_3) r, \quad |\omega_3| \geq \omega_в,$$

$$\Delta v_3 = -(\omega_н \operatorname{sign} \omega_2 - \omega_2) r, \quad |\omega_2| \geq \omega_в.$$

В последних уравнениях порог выключения $\omega_н$ может быть взят равным нулю.

Для продольного канала основным входным сигналом служит измеряемая скорость $\dot{r}$, которая сравнивается с пороговыми значениями $\dot{r}_{в.т}$ и $\dot{r}_{в.р}$, определяющими необходимость коррекции скорости сближения соответственно при торможении и разгоне. Если $\dot{r} \leq \dot{r}_{в.т}$, то вырабатывается командный сигнал $\sigma_1 = 1$ для включения продольной тяги на торможение. Если $\dot{r} \geq \dot{r}_{в.р}$, то вырабатывается командный сигнал $\sigma_1 = -1$ для включения продольной тяги на разгон. В случае $\dot{r}_{в.т} < \dot{r} < \dot{r}_{в.р}$ формируется сигнал $\sigma_1 = 0$, обозначающий ненужность коррекции скорости сближения.

Когда выключение тяги производится по текущим измерениям, то после начала коррекции скорости сближения командный сигнал σ_1 не обнуляется до тех пор, пока не будет достигнут порог выключения $\dot{r}_{н.т}$ при торможении или порог $\dot{r}_{н.р}$ при разгоне. При одинаковых значениях порогов $\dot{r}_{н.т}$ и $\dot{r}_{н.р}$ их можно отождествить с потребной скоростью изменения дальности, хотя в общем случае они могут быть отличными друг от друга. Таким образом, формирование командного сигнала σ_1 в продольном канале может производиться в соответствии с релейной характеристикой, показанной на рис. 3.4.

Зависимости порогов коррекции скорости сближения от дальности должны иметь по соображениям простоты приборной реализации кусочно-линейный характер и обеспечивать приемлемое время сближения и заданную конечную точность. Во многих случаях эти зависимости, изображаемые на фазовой плоскости $r, \dot{r}$ в виде линий

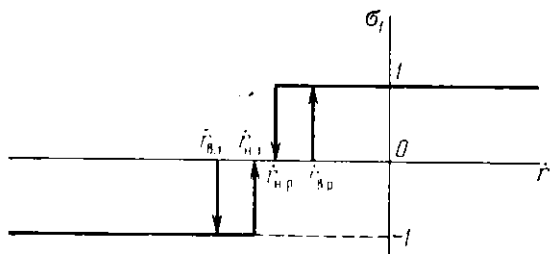


Рис. 3.4.

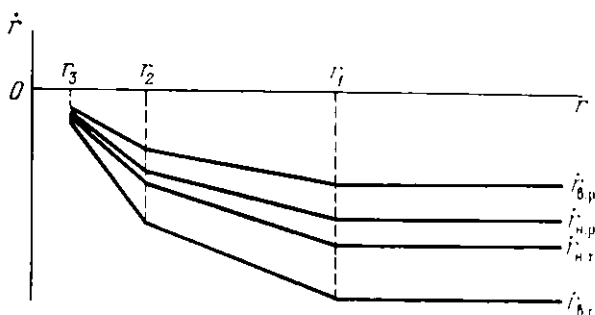


Рис. 3.5.

переключений, целесообразно выбирать с двумя изломами (рис. 3.5).

На первом участке ($r > r_1$), соответствующем максимальным дальностям, пороги переключений устанавливаются постоянными. Это необходимо для того, чтобы за счет ограничения скорости сближения наряду с ограничением угловой скорости линии визирования получить ограниченную величину кориолисова ускорения. В свою очередь, как следует из системы уравнений (3.1.8), величина ко-

риолисова ускорения, имеющего составляющие $2\dot{r}\omega_3$ и $-2\dot{r}\omega_2$, не должна превышать величины ускорения от поперечной тяги, чтобы была обеспечена управляемость по боковому каналу наведения.

На втором и третьем участках ($r < r_1$) достигается уменьшение скорости сближения до требуемых пределов при значении дальности r_3 , когда происходит переход к участку причаливания. Наклон линий переключений для промежуточных дальностей ($r_3 < r < r_1$) выбирается исходя из средней угловой скорости линии визирования, поскольку при сравнительно небольших значениях разностного гравитационного ускорения основное влияние на продольное движение оказывает центробежное ускорение $r(\omega_3^2 + \omega_2^2)$. При этом вводится излом линий переключений при значении дальности r_2 в связи с тем, что на этой дальности меняются пороги коррекции угловой скорости линии визирования.

В случае использования для выключения двигателей сигналов акселерометров потребные приращения продольной скорости вычисляются по формулам

$$\Delta v_1 = \begin{cases} \dot{r}_{н.т} - \dot{r} & \text{при } \dot{r} \leq \dot{r}_{в.т}, \\ \dot{r}_{н.р} - \dot{r} & \text{при } \dot{r} \geq \dot{r}_{в.р}. \end{cases}$$

Очевидно, кроме рассмотренных выше для формирования командных сигналов по продольному каналу могут использоваться также другие формы линий переключений и для каждой формы регулирование скорости сближения будет иметь свои особенности. В частности, в литературе предлагаются линии переключений в виде двух параллельных прямых линий [123], в виде двух прямых, пересекающихся в начале координат [73, 124], и в виде двух подобных парабол [85]. В этой связи необходимо обратить внимание на то, что законы управления, рассматриваемые в литературе, предназначены только для осуществления торможения в расчете на вполне определенные начальные условия и не предусматривают возможности разгона. Поэтому они носят менее универсальный характер, чем предлагаемые выше законы управления скоростью сближения, допускающие использование различных форм линий переключений.

В заключение отметим, что проверка условий, определяющих необходимость коррекции относительной скорости по продольному и боковому каналам, может производиться не непрерывно, а дискретным образом: либо через определенные интервалы времени, либо при некоторых фиксированных значениях дальности. Такая программа работы системы наведения может быть принята при формировании командных сигналов с помощью БЦВМ для того, чтобы в промежутках можно было решать другие задачи управления полетом.

§ 3.4. ЛОГИКА РАЗДЕЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ

В случае использования декартова управления вектором тяги продольная и боковая составляющие относительной скорости регулируются каждая по своему каналу независимо друг от друга. Если применяется полярное управление, то возможна как совместная, так и раздельная коррекция этих составляющих.

Раздельная коррекция выполняется при помощи последовательных разворотов и стабилизации управляемого аппарата в плоскости наведения относительно трех фиксированных положений (рис. 3.6): разгона ($\theta_z = 0$), коррекции боковой скорости ($\theta_z = 90^\circ$) и торможения ($\theta_z = 180^\circ$). При совместной коррекции тяга может прикладываться под любым углом к линии визирования.

В случае необходимости одновременного регулирования продольной и боковой скоростей схема раздельной коррекции менее экономична, чем схема совместной коррекции. Однако логика управления для первой схемы гораздо более простая и может быть реализована с помощью аналоговых релейных устройств.

Для полярного управления вектором тяги выходными сигналами системы наведения являются команды σ_1 , σ_2 и θ_z , определяющие величину и направление корректирующих импульсов. Общая команда на включение или выключение двигателя маневрирования σ формируется очевидным образом: $\sigma = 1$, если есть необходимость в коррекции хотя бы по одному каналу наведения, и $\sigma = 0$, если ни одну из двух ортогональных составляющих относительной скорости корректировать не нужно.

Что касается направления коррекции, задаваемого командным значением угла тангажа θ_z , то оно определяется однозначно лишь тогда, когда необходимо изменить только одну из составляющих скоростей: $\theta_z = 0$, если

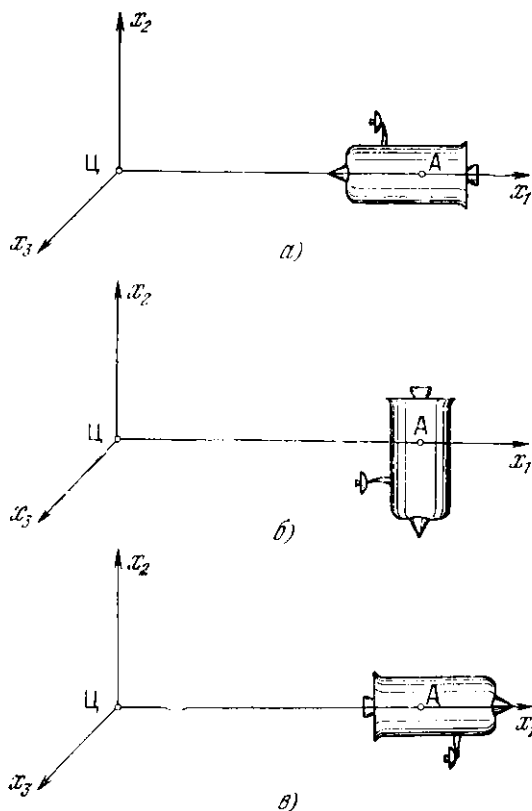


Рис. 3.6.

$\sigma_1 = -1$ и $\sigma_2 = 0$; $\theta_z = 90^\circ$, если $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 1$; $\theta_z = 180^\circ$, если $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 0$. Однако в тех случаях, когда выявляется потребность в коррекции сразу по двум каналам, выбор направления приложения тяги, задаваемого углом θ_z , может производиться из различных соображений, в частности так, как изложено ниже.

Как следует из уравнений относительного движения (3.1.3), центробежное ускорение вызывает уменьшение величины скорости сближения, а кориолисово ускорение приводит к возрастанию величины угловой скорости линии визирования при уменьшающейся дальности. Следовательно, с точки зрения экономии топлива выгодно, чтобы величина угловой скорости линии визирования была при торможении как можно большей, а при разгоне — как можно меньшей, тогда как при коррекции боковой скорости желательно, чтобы скорость сближения была небольшой.

Таким образом, если требуется осуществить торможение аппарата ($\sigma_1 = 1$), то сначала должна производиться коррекция продольной скорости ($\theta_z = 180^\circ$), а затем автоматически, после появления сигнала $\sigma_1 = 0$, — коррекция боковой скорости. Если же необходимо произвести разгон аппарата ($\sigma_1 = -1$), то первой выполняется боковая коррекция ($\theta_z = 90^\circ$).

Такая схема приоритетов коррекций по продольному и боковому каналам может применяться, если сигналы на включение двигателя формируются в двух каналах до начала разворота или запуска двигателя ($\sigma_0 = 0$) одновременно. Очевидно, такая ситуация является маловероятной. Более часто имеет место случай, когда сигнал

Таблица 3.1

σ_1	σ_2	σ	θ_z
0	0	0	θ_{z0}
-1	0	1	0
0	1	1	90°
1	0	1	180°
-1	1	1	90° при $\sigma_0 = 0$ θ_{z0} при $\sigma_0 = 1$
1	1	1	180° при $\sigma_0 = 0$ θ_{z0} при $\sigma_0 = 1$

на включение двигателя по одному каналу формируется уже после появления сигнала по другому каналу ($\sigma_0 = 1$). Поэтому, чтобы исключить излишние развороты и включения двигателя, целесообразно сначала закончить уже начавшийся разворот или начавшуюся коррекцию и только после этого перейти к разво-

роту в другое положение, т. е. сменить задающее воздействие θ_z для ориентации аппарата по тангажу.

Чтобы закончить синтез логической схемы раздельной коррекции, отметим, что если необходимость в коррекции

относительной скорости отсутствует ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), то ориентацию аппарата можно не менять, полагая $\theta_z = \theta_{z0}$. Кроме того, сразу после обнаружения и захвата цели бортовыми измерительными средствами управляемый аппарат может устанавливаться в положение для торможения ($\theta_z = 180^\circ$), чтобы можно было сразу включить двигатель для предотвращения столкновения с целью при небольших начальных дальностях.

Общая логика формирования управляющих сигналов при раздельной коррекции продольной и боковой составляющих относительной скорости может быть представлена на табл. 3.1.

§ 3.5. СХЕМЫ СОВМЕСТНОЙ КОРРЕКЦИИ

Рассмотренный в предыдущем параграфе вариант полярного управления, хотя и прост в реализации, но принципиально неэкономичен вследствие того, что коррекция продольной и боковой скоростей выполняется не совместно и величина боковой скорости преднамеренно снижается не до нуля, а до некоторого конечного уровня. В связи с этим представляет интерес рассмотреть также такие варианты полярного управления, которые позволяют за счет небольшого усложнения вычислений достичь снижения потребного расхода топлива.

Из анализа динамики сближения следует, что помимо оптимизации параметров можно использовать два пути уменьшения расхода топлива. Во-первых, можно пытаться уменьшать величину угловой скорости линии визирования до нуля, несмотря на наличие ошибок измерений и исполнения. Во-вторых, допускать совместную коррекцию составляющих относительной скорости посредством стабилизации аппарата относительно линии визирования в «косых» положениях. Кроме того, командные сигналы на выключение двигателя целесообразно формировать не по текущим измерениям параметров относительного движения, сравниваемым с пороговыми значениями, а по показаниям акселерометра.

Могут быть предложены и исследованы самые разнообразные варианты полярного управления, исходящие из этих соображений и отличающиеся друг от друга правилами выбора направления приложения тяги. Поэтому

ограничимся изложением только двух крайних разновидностей способа совместной коррекции.

В первом варианте боковая скорость корректируется только тогда, когда необходимо изменить продольную скорость. Это дает возможность поддерживать угловую скорость линии визирования около нуля посредством пропорциональных отклонений продольной оси аппарата, совпадающей с линией действия тяги, в ту или иную сторону от линии визирования. Такую схему будем называть *схемой зависимых коррекций с непрерывным разворотом*.

Во втором варианте по данным измерений параметров движения вычисляются поправки скорости, предусматривающие уменьшение угловой скорости линии визирования до нуля, выполняется разворот аппарата в положение для коррекции и производится коррекция, причем во время работы двигателя аппарат стабилизируется в инерциальном пространстве, а для выключения двигателя используются сигналы акселерометра. Такую схему управления будем называть *схемой стабилизированных коррекций*.

При рассмотрении схем совместной коррекции положение линии действия тяги по отношению к линии визирования и плоскости наведения удобнее определять не углами, а единичным вектором, связанным с продольной осью аппарата:

$$e = (\cos \theta_y \cos \theta_z, \quad \cos \theta_y \sin \theta_z, \quad \sin \theta_y)^T,$$

где θ_y — угол рыскания, а θ_z — угол тангажа.

В схеме зависимых коррекций необходимость их определяется сигналом σ_1 , формируемым в соответствии с релейной характеристикой (см. рис. 3.4). Для активных участков требуемое направление действия тяги задается непрерывно следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \sigma_1 / \sqrt{1 + (T_2 \omega_3)^2 + (T_3 \omega_2)^2}, \\ e_2 &= -T_2 \omega_3 / \sqrt{1 + (T_2 \omega_3)^2 + (T_3 \omega_2)^2}, \\ e_3 &= T_3 \omega_2 / \sqrt{1 + (T_2 \omega_3)^2 + (T_3 \omega_2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

где T_2 и T_3 — положительные масштабные множители с размерностью времени, определяющие распределение тяги на коррекцию продольной и боковой скоростей.

Когда требуемое направление коррекции задается указанным образом, положение продольной оси аппарата по рысканию и тангажу может быть произвольным. Однако если антенна радиолокатора, установленная по продольной оси, имеет ограниченное поле зрения или ограниченные углы поворота относительно корпуса аппарата, то линия действия тяги может отклоняться от линии визирования также только в ограниченных пределах, и прежде всего по рысканию. Поэтому при сравнительно больших значениях боковой скорости необходимо построение плоскости наведения.

Обозначим предельный допустимый угол отклонения по рысканию через $\bar{\theta}_y$. Тогда требуемое положение линии действия тяги будет определяться формулами (3.5.1) только в случае, когда

$$|T_3\omega_2|/\sqrt{1+(T_2\omega_3)^2+(T_3\omega_2)^2} < \sin \bar{\theta}_y, \quad (3.5.2)$$

и формулами

$$e_1 = \sigma_1 \cos \bar{\theta}_y / \sqrt{1+(T_2\omega_3)^2},$$

$$e_2 = -T_2\omega_3 \cos \bar{\theta}_y / \sqrt{1+(T_2\omega_3)^2},$$

$$e_3 = \text{sign } \omega_2 \sin \bar{\theta}_y,$$

если неравенство (3.5.2) имеет противоположный знак.

Выключение двигателя в таком варианте управления производится в момент выработки сигнала $\sigma_1 = 0$ независимо от величины оставшейся нескорректированной боковой скорости. Если допустимы большие отклонения от линии визирования по рысканию, то при надлежащем выборе масштабных коэффициентов T_2 и T_3 и их зависимости от дальности остаточная скорость может быть сделана малой, так как значительная доля приращения скорости от тяги будет затрачиваться на уменьшение боковой скорости. Только после снижения последней направление действия тяги будет приближаться к направлению торможения или разгона. Если же предельный угол $\bar{\theta}_y$ мал, то до включения двигателя необходимо предусмотреть приведение линии действия тяги в плоскость наведения.

По схеме стабилизированных коррекций управление может осуществляться следующим образом. При измерениях аппарат ориентируется продольной осью, вдоль

которой направлена антенна радиолокатора, на цель, так что

$$e = (-1, 0, 0)^T.$$

По данным измерений вычисляются величина потребного приращения скорости Δv и пороговая величина δv по следующим формулам:

$$\Delta v = \sqrt{\Delta v_1^2 + \Delta v_2^2 + \Delta v_3^2},$$

где

$$\Delta v_1 = \begin{cases} \dot{r} - \dot{r}_{н.т} & \text{при } \dot{r} \leq \dot{r}_{в.т}, \\ 0 & \text{при } \dot{r}_{в.т} < \dot{r} < \dot{r}_{в.р}, \\ \dot{r} - \dot{r}_{н.р} & \text{при } \dot{r} \geq \dot{r}_{в.р}, \end{cases}$$

$$\Delta v_2 = -\omega_3 r, \quad \Delta v_3 = \omega_2 r$$

и

$$\delta v = \sqrt{\delta v_1^2 + \delta v_2^2 + \delta v_3^2},$$

где

$$\delta v_1 = \begin{cases} \dot{r}_{н.т} - \dot{r}_{в.т} & \text{при } \dot{r} \leq \dot{r}_{н.т}, \\ 0 & \text{при } \dot{r}_{н.т} < \dot{r} < \dot{r}_{н.р}, \\ \dot{r}_{н.р} - \dot{r}_{в.р} & \text{при } \dot{r} \geq \dot{r}_{н.р}, \end{cases}$$

$$\delta v_2 = -\omega_3 r, \quad \delta v_3 = \omega_2 r.$$

Необходимость коррекции относительной скорости определяется сравнением величин Δv и δv . Если $\Delta v < \delta v$, то корректировать движение не нужно, и пассивный полет продолжается до тех пор, пока величина рассогласования Δv не сравняется с пороговой величиной δv . В этот момент акселерометр настраивается на текущую ошибку скорости Δv и определяется ориентация тяги относительно инерциального пространства. После этого аппарат разворачивается в заданное положение и выполняется коррекция. Вслед за исполнением коррекции аппарат возвращается в положение, требуемое для измерений, и весь процесс повторяется.

В случае отсутствия на борту инерциальной системы координат при обработке расчетных коррекций вектор тяги может стабилизироваться также и непосредственно в

визирной системе координат. Однако расчет правильного положения тяги в этом случае затрудняется тем, что приходится учитывать изменение составляющих приращения скорости вследствие неравномерного вращения используемой системы отсчета.

В связи с этим для упрощения вычислений и, следовательно, вычислительного устройства можно использовать и такую схему совместной коррекции, в которой предусматривается приложение импульсов в плоскости наведения в заранее выбранных дискретных положениях, например под углом 45° (при $\sigma_1 = -1$) или 135° (при $\sigma_1 = +1$) к линии визирования. Недостаток такой упрощенной схемы состоит в том, что требуемые приращения скорости по двум каналам наведения будут достигаться не одновременно и после выполнения условия выключения тяги по одному каналу необходимо выключать двигатель и разворачивать аппарат в другое положение. Логика формирования управляющих сигналов в этом случае достаточно очевидна и во многом сходна с рассмотренной ранее логикой раздельной коррекции.

Для повышения точности управления иногда может оказаться необходимым прогнозирование требуемого приращения скорости на момент включения двигателя, поскольку за время разворотов параметры относительного движения могут претерпевать значительные изменения. Кроме того, желательно также учитывать конечность тяги, с помощью которой реализуются коррекции.

В целях экономии топлива при определении необходимости коррекции относительной скорости можно принимать во внимание также тенденцию изменения расчетной величины приращения скорости. В том случае, когда величина коррекции уменьшается для последовательных моментов времени, то, несмотря на превышение порогов включения, коррекция может быть отсрочена, если только не нарушаются ограничения на величины скорости сближения и угловой скорости линии визирования. Величину угловой скорости линии визирования необходимо ограничивать сверху, потому что ее датчики, установленные на следящей антенне и имеющие вполне определенный диапазон чувствительности, при выходе измеряемой скорости из этого диапазона перестают функционировать из-за конструктивных ограничений на углы поворота

антенны. Величину скорости сближения необходимо ограничивать сверху при каждом значении дальности так называемой *параболой безопасности*, или *параболой торможения*, для того чтобы при располагаемом ускорении от тяги можно было успеть затормозить аппарат и недопустить его столкновения с целью.

§ 3.6. НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения относительного движения (3.1.3) довольно сложны и при наличии управляющих ускорений, формируемых на основе рассмотренных законов управления, не поддаются аналитическому решению даже в простейших случаях. Чтобы проанализировать динамику сближения при различных законах управления и хотя бы грубо оценить входящие в них постоянные параметры, уравнения движения следует максимально упростить, не нарушая в общем качественной картины процесса сближения.

Обычным предположением, используемым при исследовании метода параллельного наведения, является допущение малости разностного гравитационного ускорения. В этом случае задача становится двумерной, поскольку, если не прикладывать ускорений по нормали к плоскости наведения, она будет одной и той же и определяться лишь начальными условиями. Полагая в (3.1.3) разностное гравитационное ускорение равным нулю и считая, что плоскость наведения не вращается ($\omega_1 = 0$, $a_3 = 0$), будем иметь

$$\ddot{r} - r\omega^2 = a_1, \quad r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega = a_2, \quad (3.6.1)$$

где $\omega = \omega_2$ при $\omega_2 = 0$.

Без учета этого ускорения движение управляемого аппарата относительно цели на пассивных участках будет прямолинейным и равномерным. Следовательно, проектируя постоянный вектор скорости в разные моменты времени на нормаль к вектору дальности или непосредственно интегрируя второе уравнение (3.6.1) при $a_2 = 0$, получим закон сохранения момента количества движения

$$r^2\omega = r_0^2\omega_0 \quad (3.6.2)$$

(здесь нулевым индексом обозначены переменные, соответствующие началу пассивного участка).

При нормальном течении процесса сближения дальность до цели непрерывно уменьшается. Следовательно, $r < r_0$, так что величина угловой скорости линии визирования возрастает обратно пропорционально квадрату расстояния до цели.

На коротких активных участках коррекции боковой скорости можно считать, что

$$r \approx r_0 + \dot{r}_0 t,$$

и из уравнения бокового движения при постоянном поперечном ускорении a_2 получить

$$r^2 \omega = r_0^2 \omega_0 + a_2 \left(r_0 t + \frac{1}{2} \dot{r}_0 t^2 \right). \quad (3.6.3)$$

Отсюда, исключая время t , будем иметь

$$r^2 \omega = r_0^2 \omega_0 + a_2 \frac{r^2 - r_0^2}{2 \dot{r}_0}. \quad (3.6.4)$$

Поскольку направление корректирующей тяги должно быть противоположно направлению боковой скорости, то $a_2 < 0$ при $\omega_0 > 0$. Это означает, что на активных участках величина угловой скорости убывает также обратно пропорционально квадрату расстояния до цели.

Предположим, что включение и выключение поперечной тяги производится по пороговым значениям угловой скорости линии визирования ω_n и ω_n . Для пассивного участка примем $\omega_0 = \omega_n$ и $\omega = \omega_n$, так что из уравнения (3.6.2) находим

$$r = \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_n}} r_0.$$

Аналогичным образом для активного участка из уравнения (3.6.4) при $\omega_0 = \omega_n$ и $\omega = \omega_n$ имеем

$$r = \sqrt{\frac{a_2 - 2\dot{r}_0 \omega_n}{a_2 - 2\dot{r}_0 \omega_n}} r_0. \quad (3.6.5)$$

Таким образом, по мере приближения к цели протяженность активных и пассивных участков сокращается. При постоянных порогах переключения ω_n и ω_n значения дальности, при которых происходит переключение дви-

гателя, уменьшаются по геометрической прогрессии. Качественный характер изменения угловой скорости линии визирования при сближении поясняется фазовой траекторией на плоскости r, ω (рис. 3.7).

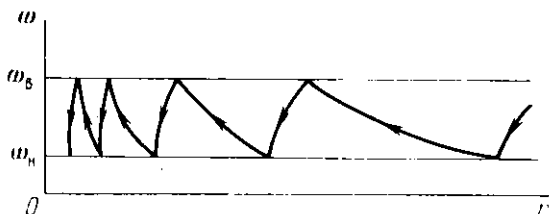


Рис. 3.7.

В случае, когда выключение тяги производится в соответствии с показаниями акселерометра, время работы двигателя, необходимое для устранения начальной боковой скорости, вычисляется в виде

$$t_2 = - \frac{r_0 \omega_0}{a_2}.$$

Подставляя эту величину в уравнение (3.6.3) при $\omega_0 = \omega_n$, найдем величину угловой скорости линии визирования, которая остается нескорректированной вследствие ограниченности тяги:

$$\omega_{\text{ост}} = \frac{\dot{r}_0 \omega_n^2}{2a_2 (1 - \dot{r}_0 \omega_n / a_2)^2}$$

или при $|a_2| \gg |\dot{r}_0 \omega_n|$

$$\omega_{\text{ост}} = \frac{\dot{r}_0 \omega_n^2}{2a_2}.$$

Поскольку по мере приближения к цели величина скорости сближения уменьшается, то постепенно будет уменьшаться и величина остаточной угловой скорости линии визирования.

Полностью избавиться от этой остаточной скорости можно в принципе с помощью прогнозирования (экстраполяции). Однако при наличии ошибок измерений и неизвестных гравитационных ускорениях более или менее точный прогноз относительного движения даже на не-

большие интервалы времени требует статистической обработки измерений, что существенно усложняет расчеты. Поэтому в алгоритмы, реализующие метод параллельного наведения, прогнозирование в явном виде обычно не включают.

При изучении общего характера продольного движения можно считать, что угловая скорость линии визирования постоянна и равна своему среднему значению. Обозначим это значение, промежуточное между ω_z и ω_n , через v . Тогда решение уравнения продольного движения при $a_1 = \text{const}$ будет иметь вид

$$r = r_0 \operatorname{ch} vt + \frac{\dot{r}_0}{v} \operatorname{sh} vt + \frac{a_1}{v^2} (\operatorname{ch} vt - 1),$$

$$\dot{r} = r_0 v \operatorname{sh} vt + \dot{r}_0 \operatorname{ch} vt + \frac{a_1}{v} \operatorname{sh} vt.$$

Исключая отсюда время, находим уравнение фазовой траектории

$$\dot{r}^2 - \dot{r}_0^2 = v^2 (r^2 - r_0^2) + 2a_1 (r - r_0). \quad (3.6.6)$$

Для пассивных участков ($a_1 = 0$) фазовые траектории продольного движения представляют собой гиперболы с асимптотами $\dot{r} = \pm vr$, проходящими через начало координат (рис. 3.8). Для активных участков фазовые траектории также являются гиперболами с асимптотами $\dot{r} = \pm (vr + a_1/2v)$, имеющими тот же наклон, но пересекающимися на оси r в точке $r = -a_1/2v^2$. При малых значениях средней угловой скорости линии визирования и достаточно большой величине продольного ускорения гиперболические фазовые траектории (3.6.6)

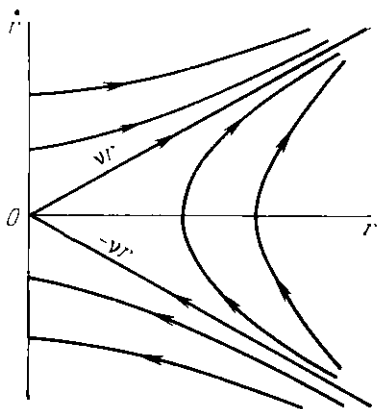


Рис. 3.8.

с большой точностью аппроксимируются параболami

$$\dot{r}^2 - \dot{r}_0^2 = 2a_1 (r - r_0).$$

Тормозные ($a_1 > 0$) и разгонные ($a_1 < 0$) активные участки фазовой траектории сближения имеют вид, показанный на рис. 3.9.

В случае, когда ускорение от силы тяги двигателей маневрирования большое, а активные участки короткие,

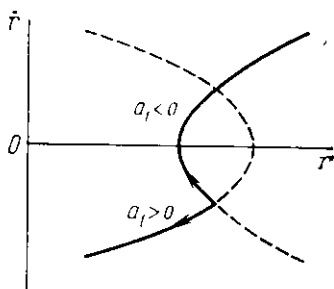


Рис. 3.9.

можно использовать импульсную аппроксимацию. Тогда продольную и боковую коррекции можно проанализировать совместно и получить явные зависимости числа коррекций и характеристической скорости от параметров, входящих в законы управления.

В предположении многократной коррекции будем приписывать индекс «i» параметрам движения в моменты приложения импульсов t_i и обозначать скорости непосредственно до и непосредственно после приложения импульса соответственно верхними индексами «минус» и «плюс».

Учитывая, что в периоды свободного полета вектор относительной скорости сохраняет свои величину и направление, имеем

$$\left. \begin{aligned} (v_{1,i-1}^+)^2 + (v_{2,i-1}^+)^2 &= (v_{1i}^-)^2 + (v_{2i}^-)^2, \\ r_{i-1} v_{2,i-1}^+ &= r_i v_{2i}^-. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.7)$$

Конкретно будем рассматривать следующие функции управления: постоянные верхний и нижний пороги коррекции угловой скорости линии визирования и зависящие от дальности пороги, определяющие коррекцию скорости сближения, т. е.

$$\left. \begin{aligned} v_{1i}^- &= -v_n r_i, & v_{2i}^- &= \omega_n r_i, \\ v_{1i}^+ &= -v_a r_i, & v_{2i}^+ &= \omega_n r_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.8)$$

Параметры v_n , v_a , ω_n , ω_n нельзя выбирать произвольным образом, поскольку и продольная и боковая коррекции выполняются при одной и той же дальности и между ними

существует связь, вытекающая из (3.6.7) и (3.6.8):

$$\frac{v_a^2 + \omega_n^2}{v_n^2 + \omega_a^2} = \frac{\omega_n}{\omega_a}. \quad (3.6.9)$$

Вводя обозначение

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_a}}$$

и пользуясь соотношениями (3.6.7)–(3.6.9), находим

$$r_i = \kappa r_{i-1}.$$

Это означает, что последовательные значения дальности, при которых выполняются коррекции, уменьшаются в геометрической прогрессии. Тогда можно записать

$$r_i = \kappa^i r_0, \quad (3.6.10)$$

где r_0 — дальность, при которой выполнена начальная коррекция.

Соотношение (3.6.10) можно использовать для оценки общего числа корректирующих импульсов n . Если заданную конечную дальность обозначить через r_k , то при совместной коррекции число импульсов n равно ближайшему целому числу, большему или равному величине

$$\tilde{n} = 1 + \frac{\ln(r_k/r_0)}{\ln \kappa}.$$

При раздельной коррекции это число нужно удвоить.

Величина приращения скорости для одной коррекции выражается как

$$J_i = v_c r_i,$$

где

$$v_c = \sqrt{(v_a - v_n)^2 + (\omega_n - \omega_a)^2}$$

в предположении одновременной коррекции и

$$v_c = |v_a - v_n| + |\omega_n - \omega_a|$$

в предположении поочередной коррекции двух составляющих относительной скорости. Суммируя приращения скорости от всех импульсов и используя соотношение (3.6.10), для полной характеристической скорости маневра

сближения находим

$$J = J_0 + \frac{v_c x}{1 - x} (r_0 - r_k),$$

где J_0 — величина начального импульса, устанавливающего нормальный режим сближения.

Приведем также выражение для интервала времени между коррекциями Δt_i , который постоянен:

$$\Delta t_i = \frac{v_a^2 \omega_v - (v_a - v_n) v_a v_n + v_n \omega_n^2}{(v_a^2 + v_n^2) (\omega_v^2 + \omega_n^2)}.$$

Следует отметить, что величина скорости сближения в результате коррекции может как увеличиваться, так и уменьшаться (соответственно при $v_a > v_n$ и при $v_a < v_n$). Наиболее интересным представляется промежуточный случай $v_a = v_n$, не требующий регулярных коррекций скорости сближения. Очевидно, что без продольной коррекции необходимость в разворотах аппарата по тангажу отпадает, что облегчает работу системы ориентации и делает весь процесс сближения более устойчивым. В этом случае продольное движение происходит в секторе, образуемом в фазовой плоскости $r, \dot{r}$ прямыми линиями с наклоном

$$v_n = \sqrt{\omega_v \omega_n}$$

и

$$v_n = (\omega_v + \omega_n)/2,$$

которые проходят через начало координат.

С учетом разностного гравитационного ускорения для произвольных законов управления даже при одних и тех же начальных значениях дальности и относительной скорости расход топлива существенно зависит от положения вектора начальной дальности по отношению к местной вертикали. Однако существует такой закон управления скоростью сближения, для которого расход одинаков при различных угловых положениях вектора дальности, если исходить из линеаризованных уравнений движения (3.1.4).

Предположим, что выбрана некоторая функция потребной скорости сближения от дальности, так что можно найти зависимость дальности от времени. Тогда, подставляя в уравнения (3.1.4) зависимость $r(t)$ и полагая $\omega_3 =$

$\ddot{\omega}_2 = 0$, нетрудно найти ускорения

$$a_1 = \ddot{r} + \frac{\mu r}{R^3} (1 - 3m_1^2),$$

$$a_2 = -\frac{3\mu r}{R^3} m_1 m_2, \quad a_3 = -\frac{3\mu r}{R^3} m_1 m_3,$$

необходимые для выдерживания потребной скорости сближения и поддержания на нуле угловой скорости линии визирования, и вычислить характеристическую скорость

$$J = J_0 + \int_{t_0}^{t_K} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} dt + J_K, \quad (3.6.11)$$

соответствующую выбранному закону управления. Здесь J_0 — величина начального импульса, требуемая для установления скорости сближения и сведения к нулю боковой скорости; J_K — величина конечного импульса, который может потребоваться для импульсного торможения.

Используя условие единичности вектора $\mathbf{m}$, преобразуем подкоренное выражение в (3.6.11) к виду

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\ddot{r} + \frac{\mu}{R^3} r \right)^2 - 6 \frac{\mu r}{R^3} \left(\ddot{r} - \frac{1}{2} \frac{\mu r}{R^3} \right) m_1^2.$$

Отсюда следует, что при законе управления

$$\ddot{r} - \frac{1}{2} \frac{\mu r}{R^3} = 0$$

величина потребного ускорения не зависит от направления вектора дальности и, следовательно, расход топлива также не будет зависеть от этой характеристики.

Для случая круговой опорной орбиты, когда

$$\frac{\mu}{R^3} = \omega_0^2 = \text{const},$$

нетрудно определить явную зависимость $r(t)$, имеющую вид

$$r(t) = r_0 \operatorname{ch} \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t + \frac{\dot{r}_0 \sqrt{2}}{\omega_0} \operatorname{sh} \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t,$$

и найти выражение для фазовых траекторий продольного движения, представляющих собой гиперболы:

$$r^2 - r_0^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \dot{r}}{\omega_0} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2} r_0}{\omega_0} \right)^2.$$

В результате можно определить время сближения

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \ln \sqrt{\frac{\omega_0 r_0 - \sqrt{2} \dot{r}_0}{\omega_0 r_0 + \sqrt{2} \dot{r}_0}}, \quad \dot{r}_0 \leq -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} r_0,$$

которому соответствует конечная скорость

$$\dot{r}_K = -\sqrt{\frac{(\dot{r}_0 \sqrt{2})^2 - (r_0 \omega_0)^2}{2 (r_0 \omega_0)^2}},$$

и характеристическую скорость (при $v^- = 0$)

$$J = -4\dot{r}_0 - \sqrt{2} \sqrt{(\dot{r}_0 \sqrt{2})^2 - (r_0 \omega_0)^2}.$$

Оптимальные характеристики для этого закона управления выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_0 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} r_0 \omega_0, \\ T &= \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \ln(2 + \sqrt{3}), \quad J = \sqrt{6} \omega_0 r_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.12)$$

С другой стороны, при сближении по асимптоте, когда выполняется равенство

$$\dot{r} = -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} r$$

и не требуется конечного торможения, имеем

$$J = 2\sqrt{2} \omega_0 r_0,$$

что примерно на 15% больше минимального расхода топлива, даваемого третьей формулой (3.6.12). При этом время сближения до некоторой конечной дальности r_K вычисляется по соотношению

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \ln \frac{r_0}{r_K}.$$

Например, при уменьшении дальности в 100 раз время сближения будет составлять чуть больше орбитального периода.

Следует отметить, что в литературе (см., например, [99, 105, 113]) рассматриваются в основном законы управления, использующие непрерывно регулируемую тягу.

Их отличительная особенность состоит в том, что они синтезированы без какого-либо учета разностного гравитационного ускорения и допускают аналитические оценки динамики сближения. Однако по сравнению с законами дискретного управления такие законы непрерывного управления имеют малое практическое значение и здесь не рассматриваются. В связи с этим ограничимся ссылкой на работу [42], в которой дан подробный обзор наиболее существенных результатов, полученных в этом направлении.

§ 3.7. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Поскольку все возмущения, включая начальные ошибки, влияющие на динамику сближения, имеют случайный характер, то для нахождения с наибольшей точностью потребных расходов топлива и других показателей качества управления применяется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Этот метод состоит в использовании датчиков случайных чисел для задания как начальных условий, так и ошибок измерений и исполнения при расчете отдельной траектории сближения и соответствующих ей показателей качества управления. При большом числе таких испытаний можно оценить статистические характеристики представляющих интерес показателей и вычислить их предельные значения, ожидаемые с определенной вероятностью.

Среднее значение $\bar{Q}$ какого-либо показателя качества управления Q определяется по выборке в виде

$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i,$$

где i — номер испытания, а n — общее число испытаний. Дисперсия оценивается по формуле

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2.$$

Максимальное значение показателя, соответствующее вероятности 0,997, может с достаточной для инженерной

практики точностью вычисляться по формуле

$$Q_{\max} = \bar{Q} + 3\sigma_Q,$$

которая строго справедлива только для случайных величин, распределенных по нормальному закону.

Обычно все статистические характеристики начальных условий для этапа автономного сближения задаются первоначально в орбитальной системе координат. В этом случае отдельная реализация начальных отклонений по положению и скорости, заключающихся в пределах эллипсоида рассеивания, определяется тем или иным способом как выборка случайных коррелированных чисел в виде

$$\begin{aligned} x(t_0) &:= x_0, & y(t_0) &:= y_0, & z(t_0) &:= z_0, \\ \dot{x}(t_0) &:= \dot{x}_0, & \dot{y}(t_0) &:= \dot{y}_0, & \dot{z}(t_0) &:= \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Тогда начальные условия для определения отдельной траектории сближения посредством интегрирования уравнений относительного движения в визирной системе координат (3.1.3) или (3.1.4) и (3.1.8) определяются с помощью матрицы направляющих косинусов (см. табл. 2.2), кинематических соотношений (3.1.1) и формул преобразования координат. В частности, полярные координаты r , α и β вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}, \quad \sin \beta = \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

Начальный угол γ может задаваться произвольным образом, например, так, чтобы

$$\omega_3(t_0) = \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 \cos^2 \beta_0 + \dot{\beta}_0^2}, \quad \omega_2(t_0) = 0.$$

В этом случае

$$\cos \gamma_0 = \frac{\dot{\alpha}_0 \cos \beta_0}{\omega_3(t_0)}, \quad \sin \gamma_0 = \frac{\dot{\beta}_0}{\omega_3(t_0)}.$$

Если оценка эффективности законов управления производится по наихудшему случаю, то наиболее неблагоприятные с точки зрения расхода топлива условия соот-

ветствуют относительному движению в плоскости опорной орбиты, когда разностное гравитационное ускорение может иметь наибольшую величину. Они характеризуются приближенно следующими цифрами: направление вектора дальности, имеющей максимально возможную величину, составляет с местным горизонтом угол $67,5^\circ$ или $247,5^\circ$, а относительная скорость, также максимальная по величине, направлена в сторону от цели примерно под углом 45° или соответственно 225° . Положение этих двух самых неблагоприятных точек мало зависит от законов управления и входящих в них параметров. Поэтому вся численная оптимизация может производиться для указанных начальных условий с последующей проверкой всех остальных предельных начальных отклонений.

После выбора начального приближения для искомых параметров законов управления из аналитических оценок их последовательное уточнение производится на основе сравнения значений характеристической скорости, соответствующих различным значениям этих параметров. Для поиска оптимальных параметров можно в принципе использовать различные регулярные методы оптимизации, излагаемые в [58, 63, 65, 72]. Однако при определении оптимальных параметров по наихудшему случаю или при сравнительно небольшом числе испытаний эти методы оказываются неэффективными вследствие скачков и негладкости функций показателей качества из-за релейного характера управления и других особенностей динамики сближения, а также отчасти и из-за конечного шага интегрирования уравнений.

В связи с этим поиск оптимальных значений параметров целесообразно осуществлять перебором дискретных значений каждого параметра в отдельности. Это позволяет найти комбинации, дающие уменьшение характеристической скорости по сравнению с наилучшим из всех раньше вычисленных значений с учетом общей тенденции изменения показателя качества. Пределы варьирования параметров устанавливаются из условий аппаратной реализации законов управления. Шаги дискретности выбираются с учетом возможной точности настройки этих параметров и величины ошибок измерений.

В качестве примера, иллюстрирующего определение оптимальных параметров законов управления по наихуд-

шему случаю начальных условий, приведем результаты численных расчетов, которые были получены для схемы раздельной коррекции и законов управления угловой скоростью линии визирования и скоростью сближения, изображенных на рис. 3.3 и 3.5. Рассматривался случай компланарного сближения, для которого начальные значения дальности и модуля относительной скорости были приняты в безразмерном виде равными единице. Опорная орбита считалась круговой. Ошибки измерений и исполнения не учитывались, а время разворотов управляемого аппарата соответствовало значению безразмерной угловой скорости, равному 45, что составляет примерно $3^\circ/\text{сек}$ при высоте околоземной орбиты около 250 км.

Принятый закон управления скоростью сближения полностью характеризуется значениями дальности, при которых происходит излом линий переключений, и значениями порогов переключения в точках излома. Оптимальные величины этих параметров в безразмерном виде представлены в табл. 3.2. Оптимальные величины порогов

Таблица 3.2

r	0,018	0,16	0,79
$\dot{r}_{в.т}$	-0,085	-0,43	-2,1
$\dot{r}_{н.т}$	-0,060	-0,28	-1,4
$\dot{r}_{н.р}$	-0,060	-0,26	-1,3
$\dot{r}_{в.р}$	-0,033	-0,17	-0,8

переключения для угловой скорости линии визирования составляют: $\omega_v = 4,6$, $\omega_n = 3$ при $r < 0,16$ и $\omega_v = 1,7$, $\omega_n = 0,43$ при $r > 0,16$.

Величины безразмерной характеристической скорости, соответствующие этим оптимальным параметрам, приведены на рис. 3.10 в виде графиков зависимости от угла наклона вектора начальной дальности к местному горизонту. Кривые характеризуют влияние наклона вектора относительной скорости к линии визирования и соответствуют начальному удалению от цели в прямом направ-

лении (кривая 1), под углом 45° (кривая 2) и под углом 90° (кривая 3).

Сравнительная оценка эффективности схемы раздельной коррекции и двух схем совместной коррекции проводилась методом статистических испытаний на основе корреляционной матрицы безразмерных начальных условий,

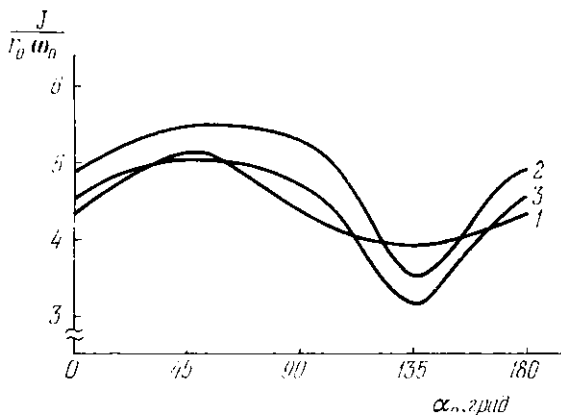


Рис. 3.10.

представленной табл. 3.3. При этом в качестве нормирующего параметра для координат было взято значение корня квадратного из следа подматрицы, соответствующей размерным позиционным ошибкам.

Для разных схем использовались (с соответствующими модификациями) одни и те же законы управления,

Таблица 3.3

	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$
x	0,542	0,008	-0,003	0,105	0,068	0,001
y		0,399	0,004	-0,530	0,694	0
z			0,059	0,005	-0,009	-0,123
$\dot{x}$				1,07	-1,24	0
$\dot{y}$					1,95	0
$\dot{z}$						1,85

параметры которых даны в предыдущем примере. Режимы разворота и угловые ошибки ориентации моделировались в соответствии с рассмотренными выше зависимостями. Кроме того, при проведении испытаний учитывались ошибки измерений и ошибки включения и выключения двигателя. Создаваемое двигателем ускорение в безразмерном виде было принято равным 72,5.

Результаты расчетов сведены в табл. 3.4, где даны средние значения, среднеквадратичные отклонения и максимальные значения характеристической скорости J , числа включений двигателя n и времени сближения T .

Таблица 3.4

Схема	$\bar{J}$	σ_J	$J_{\max}$	$\bar{n}$	σ_n	$n_{\max}$	$\bar{T}$	σ_T	$T_{\max}$
Раздельная коррекция	3,33	1,11	6,66	14	1	26	1,38	0,184	1,95
Зависимые коррекции	2,21	0,67	4,24	4	1	7	1,27	0,253	2,07
Стабилизированные коррекции	2,50	0,67	4,51	4	1	7	0,98	0,380	2,07

Важно отметить, что законы управления, реализующие метод параллельного наведения, получаются довольно нечувствительными к ошибкам. Иными словами, потребный расход топлива и другие показатели качества слабо зависят в среднем от ошибок настройки параметров и ошибок измерений. Однако локально, для отдельной траектории, при небольших изменениях параметров законов управления, ошибок измерений и начальных условий могут наблюдаться значительные скачки в показателях качества управления. Это связано с особенностями динамики сближения, такими как расходимость (неустойчивость) относительного движения при отсутствии управления, релейный характер управляющих воздействий, взаимная зависимость каналов наведения, осуществляемая через двигатель, и т. п. Поэтому надежные и гладкие зависимости показателей качества управления от параметров и начальных условий вместе с характеристиками разброса этих зависимостей могут быть получены только при достаточном количестве испытаний.

РЕШЕНИЕ ДВУХИМПУЛЬСКОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ В АБСОЛЮТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 4.1. НЕОБХОДИМЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

Выбор двухимпульсной схемы маневра сближения при рассмотрении задачи управления в абсолютной системе координат объясняется тем, что, во-первых, на этой схеме базируется метод свободных траекторий и, во-вторых, задача управления в такой постановке сводится к классической задаче определения орбиты по двум положениям, методы решения которой достаточно хорошо разработаны. Тем не менее следует иметь в виду, что в абсолютной системе координат могут ставиться и решаться более сложные задачи управления, подобные тем, которые рассматриваются в главе 6. Необходимо также отметить, что методы определения орбиты по двум положениям применимы непосредственно и к задаче получения детерминированных оценок параметров абсолютного движения в случае, когда одновременно измеряются не все шесть, а только три позиционных параметра относительного движения. Поскольку рассматриваемые здесь и в дальнейшем методы исходят из кеплеровой модели абсолютного движения, то перед изложением основного материала приводятся необходимые конечные соотношения задачи двух тел, которые удобны либо при аналитических исследованиях, либо при численных расчетах.

При отсутствии возмущений ($a_n = 0$) уравнения орбитального движения (2.1.3) имеют следующие конечные первые интегралы [19, 29, 70, 79, 80]:

интеграл момента количества движения (*интеграл площадей*)

$$\mathbf{R} \times \mathbf{V} = \mathbf{K}, \quad (4.1.1)$$

где $\mathbf{K}$ — векторная постоянная площадей;

интеграл энергии (*интеграл живых сил*)

$$V^2 - 2 \frac{\mu}{R} = H,$$

где H — постоянная энергии;

интеграл Лапласа

$$\left(V^2 - \frac{\mu}{R}\right) \mathbf{R} - R \dot{\mathbf{R}} V = \mu \mathbf{e}, \quad (4.1.2)$$

где $\mu \mathbf{e}$ — постоянный вектор Лапласа.

Из интеграла (4.1.1) следует, что

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} = 0$$

и при $\mathbf{K} \neq 0$ орбита лежит в плоскости, проходящей через центр притяжения и нормальной к вектору $\mathbf{K}$. При $\mathbf{K} = 0$ векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{V}$ коллинеарны, так что движение является прямолинейным.

Для определения движения в плоскости орбиты вводится постоянная

$$p = K^2/\mu,$$

называемая *фокальным параметром орбиты*, и центральный угол ϑ , который отсчитывается против направления движения часовой стрелки от направления вектора $\mathbf{e}$, проходящего через *перицентр*, и называется *истинной аномалией*:

$$\vartheta = \widehat{\mathbf{R} \mathbf{e}}.$$

Тогда уравнение орбиты имеет вид стандартного уравнения конического сечения (кривой второго порядка) в полярных координатах

$$R = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (4.1.3)$$

где $e = |\mathbf{e}|$ — *эксцентриситет орбиты*. Связь между углом ϑ и временем t выражается квадратурой

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - t_0), \quad (4.1.4)$$

где t_0 — время прохождения через *перицентр*.

Вследствие того, что в случае околокруговых орбит ($e \approx 0$) положение *перицентра* не определено, центральный угол, задающий положение космического аппарата на его орбите, удобнее измерять, вообще говоря, не от направления на *перицентр*, а от направления радиус-вектора $\mathbf{R}_0$, отвечающего некоторому исходному моменту

времени t_0 . Соответствующий угол, называемый *углом перехода*, равен

$$\theta = \vartheta - \vartheta_0,$$

где ϑ_0 — начальное значение истинной аномалии. Тогда вместо элементов e и t_0 используются элементы

$$c = e \cos \vartheta_0, \quad s = e \sin \vartheta_0$$

с соответствующей модификацией уравнений (4.1.3) и (4.1.4).

Тройки элементов p, e, t_0 и p, c, s относятся к группе *внутренних* элементов, определяющих размеры и форму кеплеровой орбиты, а также положение космического аппарата на орбите в любой момент времени безотносительно к системе координат, в которой рассматривается орбитальное движение. Расположение орбиты в пространстве определяется с помощью *внешних* элементов, численные значения которых зависят от выбора абсолютной системы координат XYZ . В качестве внешних элементов можно использовать в принципе те же величины, которые применяются для определения углового положения одного триэдра осей (например, вспомогательной системы координат $X^0Y^0Z^0$ или другой аналогичной системы, связанной с плоскостью орбиты; см. § 2.3) относительно другого триэдра осей (основной системы координат XYZ). При этом наибольшее применение находят долгота восходящего узла, наклонение орбиты, угол, задающий угловое расстояние от восходящего узла до точки начала отсчета центрального полярного угла (они наглядны геометрически, но могут приводить к возникновению особенностей), и система единичных векторов e_X, e_Y, e_Z осей вспомогательной системы координат $X^0Y^0Z^0$, которые свободны от вырождения, но избыточны (для определения углового положения в принципе достаточно трех угловых элементов).

При использовании векторных внешних элементов e_X, e_Y, e_Z орты l, m, n осей орбитальной системы координат xyz записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} l &= e_X \sin \theta - e_Y \cos \theta, \\ m &= e_X \cos \theta + e_Y \sin \theta, \\ n &= e_Z \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

и текущие координаты и составляющие скорости вычисляются по формулам

$$\mathbf{R} = R\mathbf{m}, \quad \mathbf{V} = V_R\mathbf{m} - V_\theta\mathbf{l}. \quad (4.1.6)$$

Здесь величина R определяется в соответствии с (4.1.3), а радиальная V_R и трансверсальная V_θ составляющие скорости определяются следующим образом:

$$V_R = \dot{R} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \epsilon, \quad V_\theta = R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \lambda,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1 + e \cos \theta = 1 + e \cos \theta - s \sin \theta, \\ \epsilon &= e \sin \theta = e \sin \theta + s \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

Основные элементы орбиты, через которые находятся параметры движения, вычисляются в свою очередь по начальным значениям векторов положения $\mathbf{R}_0$ и скорости $\mathbf{V}_0$, известным в некоторый момент времени t_0 . В связи с этим при численных расчетах в качестве элементов орбиты целесообразно использовать непосредственно начальные значения $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{V}_0$, которые, однако, не разделяются на внутренние и внешние и поэтому не очень наглядны и удобны при аналитических исследованиях.

В этом случае решение задачи двух тел представляется в форме Лагранжа

$$\mathbf{R} = F_T \mathbf{R}_0 + G_T \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{V} = \dot{F}_T \mathbf{R}_0 + \dot{G}_T \mathbf{V}_0,$$

где коэффициенты F_T , G_T , $\dot{F}_T$, $\dot{G}_T$ являются функциями времени и выражаются через угол перехода θ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} F_T &= 1 - \frac{R}{p} (1 - \cos \theta), \quad G_T = \frac{R R_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \theta, \\ \dot{F}_T &= \frac{\dot{R}_0}{p} (1 - \cos \theta) - \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \theta, \\ \dot{G}_T &= 1 - \frac{R_0}{p} (1 - \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.8)$$

Неизвестный угол перехода θ вычисляется для заданного времени полета $T = t - t_0$ через вспомогательные переменные (эксцентрическую аномалию и ее гиперболический и параболический аналоги), с помощью которых

квадратура вида (4.1.4) сводится к решению трансцендентного уравнения Кеплера, имеющего различный вид для разного типа орбит. Поэтому для численных расчетов коэффициенты (4.1.8) удобнее выразить непосредственно через разности вспомогательных переменных. При этом для экономии вычислительного времени расчетные формулы целесообразно привести к максимально простому виду в той части, которая относится к многократно повторяющимся операциям.

Исходя из этих соображений, можно предложить следующую схему расчета параметров движения по начальным условиям. Сначала последовательно вычисляются промежуточные величины

$$R_0 = (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{1/2},$$

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} (X_0 \dot{X}_0 + Y_0 \dot{Y}_0 + Z_0 \dot{Z}_0), \quad V_0^2 = \dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2,$$

$$\alpha = \frac{2}{R_0} - \frac{V_0^2}{\mu}, \quad e^2 = (1 - R_0 \alpha)^2 + S_0^2 \alpha, \quad p = (2 - R_0 \alpha) R_0 - S_0^2,$$

где X_0, Y_0, Z_0 — составляющие вектора R_0 , а $\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0$ — составляющие вектора V_0 , заданные для момента времени t_0 . Затем определяется тип орбиты в зависимости от значения эксцентриситета или величины α , обратной большой полуоси орбиты, вычисляются коэффициенты приведения к безразмерной форме

$$L = \begin{cases} 1/|\alpha| & \text{при } e \neq 1 \quad (\alpha \neq 0), \\ p & \text{при } e = 1 \quad (\alpha = 0), \end{cases}$$

$$V_L = \sqrt{\frac{\mu}{L}}$$

и находятся величины

$$\omega_L = \frac{V_L}{L}, \quad \rho_0 = \frac{R_0}{L}, \quad \sigma_0 = \frac{S_0}{\sqrt{L}}.$$

Постоянные параметры $\omega_L, \rho_0, \sigma_0$ и признак типа орбиты используются в последующих расчетах, связанных с определением положения и скорости для различных моментов времени.

Для произвольного момента времени $t \neq t_0$ параметры движения вычисляются следующим образом. Сначала

определяется безразмерное время полета (разность средних аномалий)

$$\tau = \omega_L (t - t_0)$$

и выбирается начальное приближение для разности вспомогательных переменных Δ в виде $\Delta_0 = \tau$.

После этого производится решение обобщенного уравнения Кеплера итерационным методом Ньютона. На очередном шаге вычисляются значения следующих функций:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для эллипса} \\ f_0 = \cos \Delta_n, \quad f_1 = \sin \Delta_n, \\ f_2 = 1 - \cos \Delta_n, \quad f_3 = \Delta_n - \sin \Delta_n; \\ \text{для параболы} \\ f_0 = 1, \quad f_1 = \Delta_n, \quad f_2 = \frac{1}{2} \Delta_n^2, \quad f_3 = \frac{1}{6} \Delta_n^3; \\ \text{для гиперболы} \\ f_0 = \operatorname{ch} \Delta_n, \quad f_1 = \operatorname{sh} \Delta_n, \\ f_2 = \operatorname{ch} \Delta_n - 1, \quad f_3 = \operatorname{sh} \Delta_n - \Delta_n; \end{array} \right\} \quad (4.1.9)$$

по этим функциям вычисляются величины

$$\tau_n = \rho_0 f_1 + \sigma_0 f_2 + f_3, \quad \rho = \rho_0 f_0 + \sigma_0 f_1 + f_2$$

и уточняется значение Δ по соотношениям

$$\delta_n = -\frac{1}{\rho} (\tau - \tau_n), \quad \Delta_{n+1} = \Delta_n + \delta_n. \quad (4.1.10)$$

Если поправка δ_n не удовлетворяет заданной точности, то итерации продолжают до тех пор, пока определяемая переменная Δ_n не перестанет изменяться заметным образом. При этом для улучшения сходимости поправка δ_n может увеличиваться или уменьшаться на каждом шаге по сравнению со значением, даваемым уравнением (4.1.10), в зависимости от хода итерационного процесса, адаптируясь к характеру изменения решаемой функции.

После решения уравнения Кеплера вычисляются безразмерные коэффициенты по выражениям

$$\begin{aligned} f_\tau &= 1 - \frac{f_2}{\rho_0}, & g_\tau &= \tau - f_3, \\ f'_\tau &= -\frac{f_1}{\rho \rho_0}, & g'_\tau &= 1 - \frac{f_2}{\rho} \end{aligned}$$

и находятся координаты и скорости, соответствующие заданному моменту t , по уравнениям

$$\mathbf{R} = f_2 \mathbf{R}_0 + \frac{g_2}{\omega_L} \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{V} = \omega_L f_2' \mathbf{R}_0 + g_2' \mathbf{V}_0.$$

Угол перехода θ определяется из уравнений

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - k_c \frac{f_2^2}{\rho}, \\ \sin \theta &= \frac{k_s}{\rho} (\tau - f_3), \end{aligned}$$

где

$$k_c = \frac{\rho}{R_0}, \quad k_s = \frac{\sqrt{L\rho}}{R_0}.$$

Следует отметить, что для повышения точности расчетов с ограниченной разрядностью при решении уравнения Кеплера тригонометрические и гиперболические функции в (4.1.9) можно выразить через функции половинного аргумента.

§ 4.2. УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЕПЛЕРОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

Как следует из предыдущего, при решении задачи определения кеплерова движения по начальным условиям для разного типа орбит требуются свои расчетные формулы. Это усложняет программирование и проведение расчетов на ЭВМ. Поэтому в последнее время в вычислительную практику начинают внедряться универсальные формулы, пригодные для всех типов кеплеровых движений, включая прямолинейные. Преимущество этих формул по сравнению с классическими состоит в том, что при их использовании необязательно знать тип орбиты и, кроме того, переход от одного типа к другому становится непрерывным и не приводит к возникновению неопределенностей и особых случаев.

Эти формулы были предложены впервые в 1947 г. в работе [125] и в 1960 г. в работе [101]. С тех пор появилось довольно много публикаций, посвященных представлению и использованию универсальных переменных. Однако в литературе на русском языке, если не считать

переводной книги [19] и появившейся в последнее время книги [6], подробное описание таких переменных и их основных свойств по существу отсутствует, в связи с чем авторы сочли целесообразным включить определение универсальных переменных и описание их использования для решения двухимпульсной задачи управления. Конкретно рассматриваются универсальные переменные в наиболее общей их форме, предложенной в работе [98]. Соотношение между этими переменными и универсальными переменными, предлагаемыми другими авторами, показано в работе [116].

По сравнению с оригинальной трактовкой [98], при которой различные универсальные переменные имеют различную размерность, здесь вводится их безразмерные формы. Это позволяет установить прямую аналогию с классическим представлением кеплеровых движений с помощью тригонометрических функций от эксцентрической аномалии и степенных и гиперболических функций от ее аналогов, когда все независимые и зависимые переменные являются безразмерными. Кроме того, в случае использования безразмерных переменных экономится вычислительное время за счет сокращения числа операций, наиболее часто повторяющихся при численных расчетах, и облегчается масштабирование величин при выполнении расчетов на ЭВМ с фиксированной запятой.

Выберем за единицу длины некоторое характерное расстояние L и определим безразмерные характеристики орбитального движения в соответствии с уравнениями

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{L^3}} (t - t_0), \quad \rho = \frac{R}{L}, \quad v = \sqrt{\frac{L}{\mu}} V,$$

$$\eta = \frac{L}{\mu} H, \quad \sigma = \frac{R \dot{h}}{\sqrt{\mu L}}.$$

Тогда уравнения движения в центральном поле тяготения будут иметь вид

$$\frac{d\rho}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\rho^{-3}.$$

Для представления решения этих уравнений введем регуляризирующую независимую переменную ψ , определяемую как

$$\frac{d\tau}{d\psi} = \rho; \quad \psi = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0.$$

Если решение искать в виде степенных рядов от ψ , то его можно выразить через трансцендентные функции вида

$$f_i(\eta, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \psi^{2j+i}}{(2j+i)!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2.1)$$

где безразмерная постоянная энергии η вычисляется из уравнения

$$\eta = v_0^2 - \frac{2}{\rho_0}.$$

Это решение записывается как

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \rho_0 f_1 + \sigma_0 f_2 + f_3, \\ \rho &= f_1 \rho_0 + g_1 v_0, \quad v = f_1' \rho_0 + g_1' v_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 1 - \frac{f_2}{\rho_0}, & g_1 &= \tau - f_3, \\ f_1' &= -\frac{f_1}{\rho_0}, & g_1' &= 1 - \frac{f_3}{\rho}, \\ \sigma_0 &= \rho_0 v_0, & \rho &= \rho_0 f_0 + \sigma_0 f_1 + f_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.3)$$

Первое уравнение (4.2.2) представляет собой универсальное уравнение Кеплера, устанавливающее связь между временем перехода τ и переменной ψ . Для заданного τ разрешить это уравнение относительно ψ можно методом Ньютона. При этом в качестве начального приближения для ψ можно принять значение

$$\psi_0 = |\eta| \tau. \quad (4.2.4)$$

Заметим, что для вычисления ρ и v , а следовательно, и R и V необходимы универсальные функции только до третьего порядка. Однако при решении других задач могут понадобиться функции более высоких порядков. Тогда с помощью рядов следует вычислить функции только двух старших порядков, а остальные функции вычислять в соответствии с легко проверяемым равенством

$$f_i = \frac{\psi^i}{i!} + \eta f_{i+2}. \quad (4.2.5)$$

При аппроксимации бесконечных рядов (4.2.1) конечными рядами число членов, принимаемых в расчет, зависит от требуемой точности вычислений. Как показывает

опыт, обычно бывает достаточно учитывать не более шести-семи членов.

Из определения функций $f_i(\eta, \psi)$ нетрудно получить выражения для их производных, которые могут понадобиться в дальнейшем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}(\psi f_{i+1} - i f_{i+2}) \quad \text{при } i \neq 0, \\ \frac{\partial f_0}{\partial \eta} &= f_2 + \eta \frac{\partial f_2}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial f_i}{\partial \psi} &= f_{i-1} \quad \text{при } i \neq 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial \psi} = \eta f_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.6)$$

Кроме того, полезными могут оказаться следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} f_0 - \eta f_2 &= 1, \\ f_1 f_2 - f_0 f_3 &= \psi f_2 - f_3, \\ f_0^2 - \eta f_1^2 &= 1, \\ f_2^2 - f_1 f_3 &= \psi f_3 - 2f_4, \\ f_1^2 - f_0 f_2 &= f_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

Прямое соответствие между универсальными и классическими переменными для разного типа орбит показано в табл. 4.1, где Δ — разность вспомогательных перемен-

Таблица 4.1

η	$<0 \quad (e < 1)$	$=0 \quad (e = 1)$	$>0 \quad (e > 1)$
ψ	$\left(\frac{a}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta$	$\left(\frac{p}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta$	$\left(-\frac{a}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta$
f_0	$\cos \Delta$	1	$\operatorname{ch} \Delta$
f_1	$\left(\frac{a}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \Delta$	$\left(\frac{p}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta}{1!}$	$\left(-\frac{a}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} \Delta$
f_2	$\left(\frac{a}{L}\right) (1 - \cos \Delta)$	$\left(\frac{p}{L}\right) \frac{\Delta^2}{2!}$	$\left(-\frac{a}{L}\right) (\operatorname{ch} \Delta - 1)$
f_3	$\left(\frac{a}{L}\right)^{\frac{3}{2}} (\Delta - \sin \Delta)$	$\left(\frac{p}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Delta^3}{3!}$	$\left(-\frac{a}{L}\right)^{\frac{3}{2}} (\operatorname{sh} \Delta - \Delta)$

ных, соответствующих текущему t и начальному t_0 моментам времени; e — эксцентриситет; a — большую полуось; p — параметр орбиты.

Необходимо подчеркнуть, что в отличие от классического представления универсальные функции зависят не от одного, а от двух аргументов: η и ψ . Это обстоятельство осложняет использование универсальных переменных при решении задач прикладной небесной механики. Поэтому было бы полезным найти преобразования, которые сводили бы универсальные функции, введенные выше, к функциям от одного аргумента. Такое преобразование существует и его нетрудно обнаружить, если внимательно рассмотреть выражение (4.2.1): в нем можно вынести за знак суммы переменную ψ в степени i . Тогда можно определить новые универсальные функции от одного аргумента

$$\varphi_i(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^j}{(2j+i)!}$$

такие, что будет иметь место равенство

$$f_i(\eta, \psi) = \psi^i \varphi_i(\xi) \quad (4.2.8)$$

при

$$\xi = \eta\psi^2. \quad (4.2.9)$$

Выражения для функций φ_i , аналогичные (4.2.5), имеют вид

$$\varphi_i = \frac{1}{i!} + \xi\varphi_{i+2}.$$

Соответственно равенства (4.2.7) записываются теперь так:

$$\begin{aligned} \varphi_0 - \xi\varphi_2 &= 1, & \varphi_0^2 - \xi\varphi_1^2 &= 1, & \varphi_1^2 - \varphi_0\varphi_2 &= \varphi_2, \\ \varphi_1\varphi_2 - \varphi_0\varphi_3 &= \varphi_2 - \varphi_3, \\ \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 &= \varphi_2 - 2\varphi_4, \end{aligned}$$

а выражения для производных от φ_i имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{d\xi} &= \frac{1}{2\xi} (\varphi_{i-1} - i\varphi_i) = \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - i\varphi_{i+2}) \quad \text{при } i \neq 0, \\ \frac{d\varphi_0}{d\xi} &= \frac{1}{2} \varphi_1. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что как тригонометрические, так и гиперболические функции вычисляются на ЭВМ также с помощью рядов. Поэтому использовать одну общую подпрограмму для вычисления нужного количества функций f_i или φ_i вместо двух аналогичных может оказаться с точки зрения организации счета предпочтительнее, что также говорит в пользу применения универсальных формул вместо классических.

§ 4.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТЫ ПО ДВУМ ПОЛОЖЕНИЯМ

При формулировке задачи управления будем предполагать, что встреча обеспечивается двумя импульсами скорости. Первый импульс ΔV_0 , прикладываемый в момент времени t_0 , переводит управляемый аппарат на траекторию сближения, которая пересекает конечную орбиту в момент времени t_k , когда в этом месте оказывается цель. С помощью второго импульса ΔV_k , прикладываемого в момент времени t_k , достигается выравнивание скорости аппарата со скоростью цели.

Обозначим вектором q_0 элементы первоначальной орбиты управляемого аппарата, вектором q — элементы траектории сближения и вектором q_k — элементы его конечной орбиты, совпадающей с орбитой цели. Предположим, что элементы q_0 и q_k заданы. Тогда, считая неизвестными элементы q и импульсы ΔV_0 и ΔV_k , можно выписать следующие уравнения для их определения:

$$R(t_0, q) = R(t_0, q_0), \quad V(t_0, q) = V(t_0, q_0) + \Delta V_0, \quad (4.3.1)$$

$$R(t_k, q) = R(t_k, q_k), \quad V(t_k, q) + \Delta V_k = V(t_k, q_k). \quad (4.3.2)$$

Здесь уравнения (4.3.1) представляют начальные условия задачи, а уравнения (4.3.2) — конечные условия, выражающие условия встречи (2.5.1).

Нетрудно видеть, что первые уравнения (4.3.1) и (4.3.2) могут быть разрешены относительно q независимо от вторых уравнений, после чего из последних можно вычислить импульсы ΔV_0 и ΔV_k . Таким образом, задача управления свелась к двухточечной краевой задаче определения кеплеровой орбиты.

При фиксированных моментах времени t_0 и t_k эта краевая задача представляет собой классическую задачу Ламберта небесной механики, решенную впервые еще Гауссом, — задачу определения орбиты по двум положениям и времени перехода из одного положения в другое. В самом деле, по элементам q_0 для момента времени t_0 можно вычислить векторы положения R_0 и скорости V_0^- , которые будет иметь управляемый аппарат непосредственно перед приложением импульса ΔV_0 . Аналогичным образом по элементам q_k для момента времени t_k можно вычислить векторы положения R_k и скорости V_k^+ , которые будет иметь аппарат непосредственно после приложения импульса ΔV_k . Таким образом, движение аппарата по траектории сближения должно начинаться из известного положения R_0 и заканчиваться в известном положении R_k , причем время полета $T = t_k - t_0$ задано.

При нефиксированных моментах времени t_0 и t_k задача управления представляет собой краевую задачу с подвижными концами, поскольку траектория сближения может начинаться из любой точки некоторого участка начальной орбиты, соответствующего возможному диапазону изменения времени t_0 , и заканчиваться в любой точке некоторого участка конечной орбиты, соответствующего диапазону изменения времени t_k . Очевидно, что эта задача имеет бесчисленное множество решений, поскольку условий (4.3.1) и (4.3.2) недостаточно для однозначного определения значений вектора q и моментов t_0 и t_k . Следовательно, в этом случае необходимо задавать дополнительные связи, позволяющие получать единственную траекторию сближения. Их можно найти из рассмотрения таких практически важных задач, как задача управления с помощью импульсов ограниченной величины или импульсов, прикладываемых в заданных направлениях, задача о минимуме суммарного приращения скорости, характеризующего затраты топлива на сближение, задача о минимуме времени сближения при ограниченном расходе топлива и т. п.

Следует отметить, что в классической небесной механике, имеющей дело с движением естественных небесных тел, краевые задачи с подвижными концами не рассматривались. Однако именно к таким задачам сводится большинство задач, связанных с управлением полетом космических аппаратов и выбором их траекторий.

Классические методы определения орбиты по двум положениям основаны на использовании геометрических и динамических зависимостей задачи. Покажем ее решение на примере определения траектории сближения с помощью итераций по параметру p .

Пусть для заданных моментов времени t_0 и t_k вычислены векторы R_0, V_0^-, R_k, V_k^+ . Тогда, используя уравнения (4.1.3), (4.1.5) и (4.1.6), можно записать

$$\frac{p}{1+c} = R_0, \quad \frac{p}{1+c \cos \theta - s \sin \theta} = R_k, \quad (4.3.3)$$

$$e_{X^0} = m_0, \quad e_{X^0} \cos \theta + e_{Y^0} \sin \theta = m_k, \quad (4.3.4)$$

где $m_0 = \frac{R_0}{R_0}$, $m_k = \frac{R_k}{R_k}$ и θ — угол перехода от R_0 к R_k .

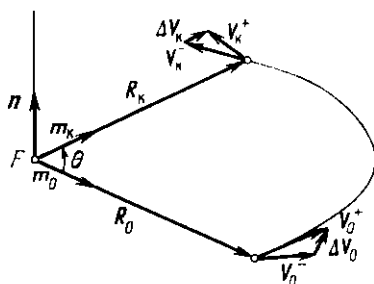


Рис. 4.1.

Плоскость орбиты перехода, содержащая векторы R_0 и R_k , определяется координатным ортом (рис. 4.1)

$$n = (m_0 \times m_k) / \sin \theta.$$

Угол перехода для относительных наклонений орбит, меньших 90° , находится из очевидных соотношений

$$\cos \theta = m_0 \cdot m_k, \quad \sin \theta = \text{sign}(I_{k,k} \cdot m_0) |m_0 \times m_k|, \quad (4.3.5)$$

где $I_{k,k}$ — соответствующий моменту времени t_k орт оси x связанной с целью орбитальной системы координат xuz . В результате из (4.3.4) нетрудно определить векторные элементы e_{X^0} и e_{Y^0} орбиты перехода.

Таким образом, если векторы R_0 и R_k не лежат на одной прямой ($\sin \theta \neq 0$), то угол перехода и угловое поло-

жение орбиты в пространстве определяются сразу. В особом случае, когда $\sin \theta = 0$, условиям перехвата удовлетворяют орбиты любого наклонения. Тогда для заданных векторов V_0^+ и V_K^+ наклонение может быть определено однозначно из условия минимума по этому углу суммарного приращения скорости

$$J = \sqrt{(V_{R0}^+ - V_{R0}^-)^2 + (V_{\theta 0}^+)^2 + (V_{\theta 0}^-)^2 - 2V_{\theta 0}^+ V_{\theta 0}^- \cos(i - i_0)} + \\ + \sqrt{(V_{RK}^+ - V_{RK}^-)^2 + (V_{\theta K}^+)^2 + (V_{\theta K}^-)^2 - 2V_{\theta K}^+ V_{\theta K}^- \cos i}, \quad (4.3.6)$$

где i_0 — заданное наклонение начальной орбиты; i — неизвестное наклонение орбиты перехода относительно орбиты цели.

Вернемся теперь к выражениям (4.3.3), откуда при известном значении угла θ находим

$$c = \frac{p}{R_0} - 1, \quad s = \frac{1}{\sin \theta} \left[\left(\frac{p}{R_0} - 1 \right) \cos \theta - \left(\frac{p}{R_K} - 1 \right) \right], \\ e = \sqrt{c^2 + s^2}. \quad (4.3.7)$$

Итак, единственным неизвестным элементом, через который определяются два других внутренних элемента орбиты перехода, является параметр p . Значение этого параметра находится из разностного уравнения Кеплера итерационным методом Ньютона.

Предположим, что известно приближенное значение параметра p . Тогда по формулам (4.3.7) можно определить приближенные значения c , s и e . Затем для случая $e < 1$ вычисляется разность Δ эксцентрических аномалий:

$$\cos \Delta = 1 - \frac{(1 - e^2) R_0 R_K}{p^2} (1 - \cos \theta), \\ \sin \Delta = \sqrt{1 - e^2} \frac{R_0 R_K}{p^2} [(1 + c) \sin \theta - s(1 - \cos \theta)],$$

и из разностного уравнения Кеплера находится значение поправочной функции

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\frac{\mu(1 - e^2)^3}{p^3}} (t_K - t_0) - \\ - \left[\Delta + \frac{c + e^2}{1 + e} \sin \Delta + \frac{\sqrt{1 - e^2} s}{1 + e} (1 - \cos \Delta) \right],$$

Если абсолютная величина $\varepsilon(p)$ больше заданного предела,

определяющего точность вычислений, то рассчитывается поправка к приближенному значению p по методу Ньютона. В случае $e \geq 1$ поправочная функция формируется из разностного уравнения Кеплера, соответствующего параболической или гиперболической орбитам.

После нахождения параметра p с нужной точностью векторы скорости V_0^+ и V_K^- , которые будет иметь управляемый аппарат после старта с начальной орбиты и перед выходом на конечную орбиту, вычисляются соответственно при $\theta = 0$ и $\theta \neq 0$ по второму уравнению (4.1.6). Результирующие выражения можно с учетом (4.1.5) и (4.3.4) привести к виду, не требующему знания ни одного из элементов траектории сближения, кроме параметра p :

$$V_0^+ = \sqrt{\mu p} \frac{R_K - R_0}{R_0 R_K \sin \theta} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{R_0}{R_0} \lg \frac{0}{2},$$

$$V_K^- = \sqrt{\mu p} \frac{R_K - R_0}{R_0 R_K \sin \theta} - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{R_K}{R_K} \lg \frac{0}{2}.$$

Тогда, зная векторы V_0^+ и V_K^- , соответствующие начальной и конечной орбитам, можно вычислить приращения скорости ΔV_0 и ΔV_K .

Таким образом, задача определения траектории сближения и импульсных приращений скорости полностью решена. Рассмотренный метод основан на использовании в качестве основной неизвестной параметра орбиты p . Остальные методы определения кеплеровой орбиты по двум положениям строятся по той же схеме: из геометрических соображений находится плоскость орбиты и угол перехода; затем выбирается некоторая величина, через которую выражаются все остальные величины, входящие в уравнение Кеплера, и основная неизвестная определяется из этого уравнения каким-либо итерационным методом.

Более подробно останавливаться на рассмотрении этих методов не имеет смысла, так как с исчерпывающей полнотой они изложены в руководствах по небесной механике (см., например, [19, 70, 79, 80]). Отметим только их общие характерные свойства: 1) для разных типов орбит расчеты ведутся по разным формулам; 2) каждый из них не универсален и имеет свою область наилучшего применения; 3) все они имеют неопределенности или особые случаи, в которых они недействительны.

§ 4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ СБЛИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАЦИЙ ПО УНИВЕРСАЛЬНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

При классическом подходе к определению траектории сближения по двум положениям независимо от используемого метода решение разветвляется в соответствии с типом конического сечения и геометрией задачи. Попытки найти единое решение, объединяющее все частные случаи, привели к необходимости использования универсальных переменных. Однако существуют трудности, которые не могут быть исключены за счет выбора переменных, а именно: плоскость орбиты не может быть определена без привлечения дополнительных соображений, если заданные векторы R_0 и R_K коллинеарны; решение не может быть однозначным, если допускаются многократные обращения по эллиптической орбите.

Наиболее общий метод решения этой задачи, учитывающий эти случаи и не приводящий к возникновению особенностей, предложен в работе [117]. Здесь мы будем следовать в основном этой работе, но для упрощения записи будем использовать универсальные переменные в безразмерной форме.

При заданных векторах начального ρ_0 и конечного ρ_K положения и времени полета τ из основных уравнений плоского орбитального движения имеем

$$\rho_K = f_\tau \rho_0 + g_\tau v_0^+, \quad v_K^- = f'_\tau \rho_0 + g'_\tau v_0^+, \quad (4.4.1)$$

где безразмерные коэффициенты определяются уравнениями (4.2.3), а величина η , входящая в универсальные функции f_i , вычисляется как

$$\eta = (v_0^+)^2 - \frac{2}{\rho_0}. \quad (4.4.2)$$

Умножим левую и правую части первого уравнения (4.4.1) скалярно на ρ_0 и выразим f_τ и g_τ в явном виде. В результате получим

$$\rho_0 \cdot \rho_K = \rho_0^2 f_2 + \sigma_0 (\tau - f_3),$$

где

$$\sigma_0 = \rho_0 \cdot v_0^+ = \rho_0 v_{R_0}.$$

Два других соотношения для определения траектории сближения через универсальные переменные дают обобщенное уравнение Кеплера и уравнение для величины радиуса-вектора ρ_K , которые теперь записываются соответственно в виде

$$\tau = \rho_0 f_1 + \sigma_0 f_2 + f_3, \quad \rho_K = \rho_0 f_0 + \sigma_0 f_1 + f_2. \quad (4.4.3)$$

Таким образом, имеются три уравнения относительно трех неизвестных η , ψ и σ_0 , причем величина σ_0 входит в них линейно и ее нетрудно исключить. Используя равенства (4.2.7), окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(\eta, \psi) &= (\tau - f_3)^2 - (\rho_0 \rho_K + \rho_0 \cdot \rho_K) f_2 = 0, \\ \varepsilon_2(\eta, \psi) &= \tau f_1 - (\rho_0 + \rho_K) f_2 + \psi f_3 - 2f_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.4)$$

Уравнения (4.4.4) образуют систему нелинейных алгебраических уравнений относительно η и ψ , которая может быть решена с помощью метода Ньютона. Соответствующие итерационные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_{n+1} &= \eta_n + \frac{1}{d} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \psi} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \psi} \right), \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \frac{1}{d} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta} \right), \end{aligned}$$

где

$$d = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \psi} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \eta} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \psi},$$

а функции ε_1 , ε_2 и их производные вычислены при $\eta = \eta_n$ и $\psi = \psi_n$. Производные от ε_1 и ε_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta} &= -2(\tau - f_3) \frac{\partial f_3}{\partial \eta} - (\rho_0 \rho_K + \rho_0 \cdot \rho_K) \frac{\partial f_2}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \eta} &= \tau \frac{\partial f_1}{\partial \eta} - (\rho_0 + \rho_K) \frac{\partial f_2}{\partial \eta} + \psi \frac{\partial f_3}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial f_4}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \psi} &= -2(\tau - f_3) f_2 - (\rho_0 \rho_K + \rho_0 \cdot \rho_K) f_1, \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \psi} &= \tau f_0 - (\rho_0 + \rho_K) f_1 + \psi f_2 - f_3, \end{aligned}$$

где производные от функций f_i по η определяются уравнениями (4.2.6).

Необходимо отметить, что в отличие от классических методов рассматриваемый здесь универсальный метод определения траектории сближения сводится к итерационному процессу по двум переменным. Это связано с тем, что универсальное уравнение Кеплера нелинейно по двум переменным η и ψ , а не по одной, как уравнение Кеплера в его обычных формах. Тем не менее и в универсальном представлении задача может быть сведена к решению одного уравнения относительно одной неизвестной. Для этого нужно в соответствии с равенством (4.2.8) выразить универсальные функции f_i через вспомогательные функции φ_i и подставить их в систему (4.4.4), что дает

$$\left. \begin{aligned} (\tau - \psi^3 \varphi_3)^2 - \psi^2 (\rho_0 \rho_K + \rho_0 \cdot \rho_K) \varphi_2 &= 0, \\ (\tau - \psi^3 \varphi_3) - \psi (\rho_0 + \rho_K - \psi^2 \varphi_2) \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.5)$$

Переменная ψ положительна и входит в эти уравнения в виде целых степеней, так что ее можно выразить в виде

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{\varphi_2} [\rho_0 + \rho_K \pm \sqrt{(1 + \varphi_0)(\rho_0 \rho_K + \rho_0 \cdot \rho_K)}]} \quad (4.4.6)$$

и исключить из системы (4.4.5). В результате приходим к одному уравнению

$$\sqrt{\frac{1}{\varphi_2} [\rho_0 + \rho_K \pm \sqrt{(1 + \varphi_0)(\rho_0 \rho_K + \rho_0 \cdot \rho_K)}]} \left[(\rho_0 + \rho_K) \frac{\varphi_3}{\varphi_2} \mp \mp \frac{\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3}{\varphi_1 \varphi_2} \sqrt{(1 + \varphi_0)(\rho_0 \rho_K + \rho_0 \cdot \rho_K)} \right] = \tau, \quad (4.4.7)$$

в котором функции φ_i зависят от одной переменной $\xi = \eta \psi^2$. Последнее уравнение можно разрешить относительно ξ методом Ньютона и определить неизвестные η и ψ , используя формулу (4.4.6) и равенство (4.2.9). Однако по сравнению с исходной системой (4.4.4), имеющей однопозначное решение, уравнение (4.4.7), имеет для одного и того же начального приближения двузначное решение, соответствующее прямой и обратной орбитам перехода. Поэтому фактически это уравнение нужно решать дважды для верхнего и нижнего знака и использовать какой-либо критерий, например величину суммарного приращения скорости, для выбора одного из двух решений.

На практике итерационный процесс определения η и ψ из системы (4.4.4) сходится очень быстро для широ-

кого диапазона начальных приближений. Как только η и ψ найдены и, следовательно, определены f_i , f_τ и g_τ , из уравнений (4.4.1) можно получить начальную скорость перехода

$$\mathbf{v}_0^+ = \frac{1}{g_\tau} (\rho_k - f_\tau \rho_0).$$

Знания векторов ρ_0 и $\mathbf{v}_0^+$ достаточно для определения траектории сближения любого типа, при этом решение свободно от особенностей. В частности, может быть вычислена конечная скорость перехода

$$\mathbf{v}_k^- = f'_\tau \rho_0 + g'_\tau \mathbf{v}_0^+.$$

Таким образом, задача решена, если величина g_τ не равна нулю.

Нетрудно видеть, что условие $g_\tau = 0$ соответствует случаю коллинеарности векторов ρ_0 и ρ_k , когда информация о положении плоскости орбиты перехода отсутствует. Тем не менее и в этом случае можно определить радиальную и тангенциальную составляющие начальной скорости перехода $\mathbf{v}_0^+$. Из уравнений (4.4.3) имеем

$$\rho_0 v_{R0}^+ = \sigma_0 = \frac{1}{f_2} (\tau - \rho_0 f_1 - f_3) = \frac{1}{f_2} (g_\tau - \rho_0 f_1),$$

откуда при $g_\tau = 0$ можно определить

$$v_{R0}^+ = -f_1/f_2.$$

Имея в виду равенство

$$(v_0^+)^2 = (v_{R0}^+)^2 + (v_{\theta 0}^+)^2,$$

при известной величине η из уравнения (4.4.2) находим

$$v_{\theta 0}^+ = \sqrt{\eta + \frac{2}{\rho_0} - (v_{R0}^+)^2}.$$

Следовательно, одна из существенных особенностей, характерных для методов определения орбиты по двум положениям, частично разрешена. Если к тому же использовать условие минимума суммарного приращения скорости (4.3.6) по углу i , то и в случае компланарности векторов ρ_0 и ρ_k задача может быть решена до конца.

Другая существенная неопределенность, связанная с множественностью решений в случае эллиптических тра-

екторий, также может быть разрешена, если отбор решений основывать на величине приращений скорости, требуемых для их реализации, и величине соответствующего периода обращения

$$\tau_0 = 2\pi (-\eta)^{1/2},$$

где $\eta < 0$ для эллиптических орбит. Чтобы получить решение, отвечающее одному витку траектории, в качестве начального приближения для η нужно выбирать значение, близкое к нулю. При этом начальное приближение для ψ можно выбирать обычным образом согласно (4.2.4).

§ 4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ СБЛИЖЕНИЯ МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотренные выше методы определения траектории сближения по двум положениям наиболее пригодны для случая фиксированных методов начала и конца перехода. Если время перехода не задано, то поиск на их основе траектории, удовлетворяющей дополнительным ограничениям, требует многократного решения задачи Ламберта. Однако краевую задачу с незакрепленными концами можно решать и непосредственно, например с помощью метода последовательных приближений Ньютона, который в космической навигации называется *методом дифференциального исправления орбиты* [80] или *методом вариации элементов* [70]. Этот метод, основанный на линеаризации заданных зависимостей для искомых параметров относительно их приближенных значений, позволяет естественным образом учитывать дополнительные ограничения и достигать их выполнения вместе с выполнением граничных условий.

В общем виде краевая двухточечная задача с незакрепленными концами может рассматриваться как задача определения моментов времени t_0 , t_k и произвольных элементов q траектории сближения. В этом случае на каждом шаге итерационного процесса по методу Ньютона требуется решение системы алгебраических уравнений восьмого порядка относительно поправок δt_0 , δt_k и δq в зависимости от невязок в граничных и дополнительных условиях. Однако порядок общей системы уравнений для поправок можно понизить до пятого и упростить ее численное

решение, выбирая в качестве основных неизвестных составляющие начальной V_0^+ или конечной V_k^- скорости перехода. Тогда краевые условия соответственно на левом ($t = t_0$) или правом ($t = t_k$) конце траектории могут выполняться на каждом шаге точно, если просто полагать

$$R_0^+ = R_0^- \quad \text{или} \quad R_k^- = R_k^+,$$

где

$$R_0^- = R(t_0, q_0), \quad R_0^+ = R(t_0, q),$$

$$R_k^- = R(t_k, q), \quad R_k^+ = R(t_k, q_k).$$

После решения краевой задачи в такой постановке знания векторов R_0 , V_0^+ или R_k , V_k^- достаточно для вычисления, если это нужно, любой системы элементов q орбиты перехода.

Введем рекуррентные формулы для последовательного уточнения траектории сближения с помощью итераций по вектору начальной потребной скорости V_0^+ и моментам времени t_0 и t_k . При этом будем предполагать, что дополнительные связи, позволяющие однозначно определять маневр сближения, можно представить в обобщенной форме:

$$Q_0(t_0, t_k, R_0^+, V_0^+) = 0, \quad Q_k(t_0, t_k, R_0^+, V_0^+) = 0. \quad (4.5.1)$$

Кроме того, будем учитывать, что на время начала t_0 и конца t_k маневра могут накладываться ограничения сверху и снизу, т. е.

$$\underline{t_0} \leq t_0 < t_k \leq \bar{t}_k.$$

Пусть известно n -е приближение для начальной скорости $V_0^+ = (V_0^+)_n$ и моментов времени $t_0 = (t_0)_n$ и $t_k = (t_k)_n$. Дадим значениям t_0 и t_k малые приращения δt_0 и δt_k . Тогда в соответствии с уравнениями движения в центральном поле тяготения вариации положения и скорости в точках схода с начальной орбиты и выхода на конечную орбиту определяются в виде

$$\delta R_i^+ = V_i^+ \delta t_i, \quad \delta V_i^+ = - \frac{\mu}{(R_i^+)^3} R_i^+ \delta t_i, \quad (4.5.2)$$

где R_i и V_i вычислены для $t_i = (t_i)_n$ по заданным элемен-

там q_i и индекс «минус» соответствует начальной орбите ($i = 0$), а индекс «плюс» — конечной орбите ($i = k$).

Пусть краевые условия на левом конце траектории

$$R_0^+ = R_0^-$$

выполняются при любых допустимых значениях времени t_0 и, в частности, при $t_0 = (t_0)_n$ и $t_0 = (t_0 + \delta t_0)_n$. Тогда с точностью до членов второго порядка малости изменение положения R_0^+ начальной точки траектории при изменении t_0 на δt_0 будет равно

$$\delta R_0^+ = \delta R_0^- = V_0^- \delta t_0. \quad (4.5.3)$$

Найдем теперь выражения для вариации положения R_k^- конечной точки траектории сближения и конечной скорости перехода V_k^- в зависимости от вариации начальной скорости перехода V_0^+ и моментов времени t_0 и t_k . В соответствии с лагранжевым представлением кеплеровых движений величины t_0 и t_k входят в функциональные зависимости, определяющие конечные значения параметров движения через их начальные значения, только в виде разности $T = t_k - t_0$. Следовательно, для варьированной траектории имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta R_k^- &= V_k^- (\delta t_k - \delta t_0) + \frac{\partial R_k^-}{\partial R_0^+} \delta R_0^+ + \frac{\partial R_k^-}{\partial V_0^+} \delta V_0^+, \\ \delta V_k^- &= -\frac{\mu}{(R_k^-)^3} R_k^- (\delta t_k - \delta t_0) + \frac{\partial V_k^-}{\partial R_0^+} \delta R_0^+ + \frac{\partial V_k^-}{\partial V_0^+} \delta V_0^+. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.4)$$

Получим далее выражения для линейных приращений функций (4.5.1), представляющих дополнительные связи. Непосредственным варьированием находим

$$\delta Q_i = \frac{\partial Q_i}{\partial t_0} \delta t_0 + \frac{\partial Q_i}{\partial t_k} \delta t_k + \frac{\partial Q_i}{\partial R_0^+} \delta R_0^+ + \frac{\partial Q_i}{\partial V_0^+} \delta V_0^+, \quad i = 0, k. \quad (4.5.5)$$

Определяя зависимую вариацию δR_0^+ через независимую вариацию δt_0 в соответствии с уравнением (4.5.3), будем

иметь

$$\delta Q_i = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial t_0} + \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{R}_0^+} \mathbf{V}_0^- \right) \delta t_0 + \frac{\partial Q_i}{\partial t_K} \delta t_K + \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{V}_0^+} \delta \mathbf{V}_0^+, \\ i = 0, \kappa.$$

Используем теперь второе граничное условие $\mathbf{R}_K^- = \mathbf{R}_K^+$. Из него следует, что вариация конечной точки траектории сближения $\delta \mathbf{R}_K^-$ должна быть такой, чтобы компенсировать невязку $\mathbf{R}_K^- - \mathbf{R}_K^+$ и изменение положения расчетной точки встречи $\delta \mathbf{R}_K^+$ вследствие сдвига момента времени t_K на величину δt_K :

$$\mathbf{R}_K^- + \delta \mathbf{R}_K^- = \mathbf{R}_K^+ + \delta \mathbf{R}_K^+,$$

где $\delta \mathbf{R}_K^-$ определяется первым уравнением (4.5.4), а $\delta \mathbf{R}_K^+$ — первым уравнением (4.5.2). Отсюда находим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_K^-}{\partial \mathbf{R}_0^+} \mathbf{V}_0^- - \mathbf{V}_K^- \right) \delta t_0 - \Delta \mathbf{V}_K \delta t_K + \frac{\partial \mathbf{R}_K^-}{\partial \mathbf{V}_0^+} \delta \mathbf{V}_0^+ = \mathbf{R}_K^+ - \mathbf{R}_K^-. \quad (4.5.6)$$

Наконец, вариации ограничений δQ_i вследствие изменения $\mathbf{V}_0^+$, t_0 и t_K должны быть такими, чтобы компенсировать невязки Q_i :

$$\delta Q_i + Q_i = 0, \quad i = 0, \kappa. \quad (4.5.7)$$

Таким образом, объединяя (4.5.6) с (4.5.7) и выражая δQ_i через $\delta \mathbf{V}_0^+$, δt_0 и δt_K с помощью уравнения (4.5.5), получим систему линейных уравнений пятого порядка для последовательного вычисления поправок

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_K \\ b_0^T & c_{00} & c_{0K} \\ b_K^T & c_{K0} & c_{KK} \end{pmatrix}_n \begin{pmatrix} \delta \mathbf{V}_0^+ \\ \delta t_0 \\ \delta t_K \end{pmatrix}_n = - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_K^- - \mathbf{R}_K^+ \\ Q_0 \\ Q_K \end{pmatrix}_n,$$

где

$$A = \frac{\partial \mathbf{R}_K^-}{\partial \mathbf{V}_0^+}, \quad a_0 = \frac{\partial \mathbf{R}_K^-}{\partial \mathbf{R}_0^+} \mathbf{V}_0^- - \mathbf{V}_K^+, \quad a_K = -\Delta \mathbf{V}_K,$$

$$b_i^T = \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{V}_0^+}, \quad c_{i0} = \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{R}_0^+} \mathbf{V}_0^- + \frac{\partial Q_i}{\partial t_0}, \quad c_{iK} = \frac{\partial Q_i}{\partial t_K}, \quad i = 0, \kappa.$$

При фиксированных моментах времени t_0 и t_k соответствующие вариации δt_0 и δt_k равны нулю и дополнительные ограничения вида (4.5.1) не используются. В этом случае задача сводится к обращению матрицы третьего порядка. Кроме того, порядок обрабатываемой матрицы сокращается на единицу, если фиксируется один из моментов времени t_0 и t_k , в частности при достижении границ допустимых интервалов изменения этих переменных.

Остановимся теперь кратко на вопросе выбора начального приближения для элементов, определяющих траекторию сближения.

Если отклонения траектории сближения считать малыми по отношению к начальной или конечной орбите, то ее элементы могут быть приближенно определены с помощью частных производных, вычисленных для начальной или конечной орбиты. Иными словами, в качестве нулевого приближения для искомых элементов принимаются фактически элементы начальной или конечной орбиты. При таком выборе количество итераций при уточнении элементов траектории сближения будет небольшим (порядка нескольких единиц), особенно если орбиты обоих сближаемых аппаратов не очень сильно отличаются друг от друга. В случае, когда итерациями определяется начальная скорость перехода V_0^+ , то для начала итераций ее можно полагать равной по величине и направлению скорости цели, соответствующей моменту времени t_0 . Что касается выбора начального приближения для моментов времени t_0 и t_k , то при больших допустимых интервалах их изменения указать заранее приемлемые значения обычно затруднительно. В этом случае можно проверять значения, соответствующие границам заданных интервалов и их средним точкам.

В заключение отметим общие методы вычисления матриц частных производных, которые необходимо знать при решении краевой задачи определения траектории сближения методом Ньютона.

Независимо от выбора переменных полный набор линейно независимых частных производных от параметров движения по элементам орбиты составляет фундаментальную матрицу решений однородных уравнений в вариациях, определяющих в любой момент времени малые отклонения от номинальной орбиты вследствие малых

изменений ее элементов. Поэтому для матриц, образуемых полным набором производных, можно принять обобщенное название *фундаментальные матрицы орбитального движения*. Среди них особое место занимают матрицы частных производных от параметров движения по их начальным значениям, которые удобно выделять, когда это нужно, специальным названием *переходные матрицы*. Следует иметь в виду, что фундаментальные матрицы орбитального движения обладают как общими свойствами решений линейных дифференциальных уравнений [48], так и некоторыми специфическими свойствами [16, 19, 76, 79, 91], вытекающими из свойств потенциального поля тяготения.

Наиболее просто фундаментальные матрицы вычисляются приближенно с помощью численного дифференцирования [16, 80]. Другой приближенный метод, требующий сравнительно небольшой памяти и умеренного количества операций, основан на численном интегрировании уравнений в вариациях [16]. Если для номинальной траектории известно решение в аналитической форме, как это имеет место в случае кеплеровых орбит, то и для элементов фундаментальной матрицы можно получить явные аналитические выражения исходя из свойств уравнений в вариациях [48]. Для произвольной абсолютной системы координат фундаментальные матрицы определены аналитически через эксцентрическую и гиперболическую аномалии в книге [80]. Довольно компактные формулы для элементов переходной матрицы получены через универсальные переменные в работах [98, 116]. Однако наиболее простой вид переходные матрицы имеют в орбитальной системе координат независимо от конкретной формы переменных, выбранных для описания орбитального движения [76, 79]. Определение фундаментальных матриц в этой системе отсчета будет дано в главе 5 при решении линеаризованных уравнений относительного движения, совпадающих по форме с уравнениями в вариациях.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 5.1. УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В настоящей главе рассматриваются аналитические решения уравнений относительного движения двух космических аппаратов, начиная с линеаризованных уравнений и кончая уравнениями, точными в пределах модели центрального поля тяготения.

В случае использования одних и тех же переменных линеаризованные уравнения относительного движения совпадают по форме с уравнениями орбитального движения в вариациях, которые находят широкое применение в задачах космонавтики. Поэтому значительное внимание уделяется здесь выводу и компактному представлению решений линеаризованных уравнений относительного движения в орбитальной системе координат. Очевидно, что, имея решения в одной относительной системе отсчета, получить решения для другой системы не представляет трудностей, если использовать соответствующие преобразования координат.

При выводе решений применяются в основном безразмерные переменные и постоянные интегрирования, которые связаны с вариациями элементов опорной орбиты и имеют определенный физический смысл. Это дает возможность существенно упростить все расчетные формулы и получить в конечном счете явные и достаточно простые выражения для управляющих воздействий, соответствующих различным импульсным и непрерывным методам управления, которые рассматриваются в последующих главах.

Для упрощения уравнений относительного движения будем предполагать, что опорной является орбита цели ($R = R_c$, $r_c = 0$), причем возмущающие ускорения отсутствуют ($a_{в.ц} = a_{в.ц} = 0$). Для перехода к другим опорным орбитам достаточно в этом случае вычесть одну из другой две аналогичные системы уравнений движения,

записанные соответственно для активного и пассивного аппаратов.

Раскладывая векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ по осям орбитальной системы координат xyz , связанной с целью, будем иметь

$$\mathbf{R} = (0, R, 0)^T, \quad \mathbf{r} = (x, y, z)^T.$$

Отсюда

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = Ry,$$

и вектор разностного гравитационного ускорения (2.1.8) выражается в явном виде:

$$\mathbf{g} = -\mu R^{-3} (\kappa_0 x, \kappa_0 (R + y) - R, \kappa_0 z)^T,$$

где в соответствии с (2.1.9) при $r_{ц} = 0$

$$\kappa_0 = \left(1 + 2 \frac{y}{R} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Орбитальная система координат вращается относительно инерциального пространства с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta})^T, \quad (5.1.1)$$

где θ — центральный полярный угол, задающий положение цели на ее орбите. Следовательно, согласно (2.1.11) или (2.1.12) для орбитального базиса имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\dot{x} - \dot{\theta}y, \dot{y} + \dot{\theta}x, \dot{z})^T, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= (\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x, \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y, \ddot{z})^T. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2)$$

Введем для составляющих относительной скорости в орбитальной системе координат обозначения

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Тогда, проектируя уравнения (2.1.6) при $\mathbf{a}_{в.ц} = \mathbf{a}_{в.а} = 0$ на оси x, y, z , получим следующие уравнения относительного движения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= 2\dot{\theta}v_y + \ddot{\theta}y - (\mu\kappa_0 R^{-3} - \dot{\theta}^2)x + a_x, \\ \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_y &= -2\dot{\theta}v_x - \ddot{\theta}x - (\mu\kappa_0 R^{-3} - \dot{\theta}^2)y + \\ & & & + \mu(1 - \kappa_0)R^{-2} + a_y, \\ \dot{z} &= v_z, & \dot{v}_z &= -\mu\kappa_0 R^{-3}z + a_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.3)$$

Соответствующие приближенные уравнения записываются с точностью до членов второго порядка малости в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= 2\dot{\theta}v_x + \ddot{\theta}y + \dot{\theta}^2x - \mu R^{-3}\left(1 - 3\frac{y}{R}\right)x + a_x, \\ \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_y &= -2\dot{\theta}v_x - \ddot{\theta}x + \dot{\theta}^2y - \\ & & & - \mu R^{-3}\left(2y + \frac{3}{2}\frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{R}\right) + a_y, \\ \dot{z} &= v_z, & \dot{v}_z &= -\mu R^{-3}\left(1 - 3\frac{y}{R}\right)z + a_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.4)$$

Несколько более просто уравнения относительного движения выражаются, если согласно (5.1.2) за составляющие относительной скорости принять проекции векторной разности абсолютных скоростей двух аппаратов:

$$v_x = \dot{x} - \dot{\theta}y, \quad v_y = \dot{y} + \dot{\theta}x, \quad v_z = \dot{z}. \quad (5.1.5)$$

В этом случае уравнения движения, эквивалентные уравнениям (5.1.3), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= v_x + \dot{\theta}y, & \dot{v}_x &= \dot{\theta}v_y - \mu\kappa_0 R^{-3}x + a_x, \\ \ddot{y} &= v_y - \dot{\theta}x, & \dot{v}_y &= -\dot{\theta}v_x - \mu\kappa_0 R^{-3}y + \mu(1 - \kappa_0)R^{-2} + a_y, \\ \ddot{z} &= v_z, & \dot{v}_z &= -\mu\kappa_0 R^{-3}z + a_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.6)$$

Переменные величины R , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, которые входят в представленные выше уравнения, выражаются через угол перехода θ в явном виде так:

$$R = \frac{p}{\lambda}, \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \lambda^2, \quad \ddot{\theta} = -2 \frac{\mu}{p^3} \epsilon \lambda^3, \quad (5.1.7)$$

где λ и ϵ определены уравнениями (4.1.7).

Отметим, что нередко при рассмотрении относительного (равно как и возмущенного) движения используется орбитальная система координат $x y z$ с осями z и x , имеющими противоположные направления по сравнению с используемой нами системой координат $x y z$, ось z которой, нормальная к плоскости орбиты, направлена по вектору орбитальной угловой скорости (5.1.1), а ось x — по трансверсали против направления вектора орбитальной

линейной скорости опорного движения. Для перехода от одной такой системы отсчета к другой можно формально во всех соотношениях менять знаки при $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ на обратные.

При выявлении общих закономерностей динамики сближения удобно, как и при исследовании любых динамических систем, использовать безразмерные переменные. Это дает возможность за счет сокращения числа характерных параметров упростить как аналитические исследования, так и численные решения и применять одни и те же результаты в подобных условиях, хотя для разных целей более предпочтительными оказываются свои формы безразмерных переменных.

В общем случае при наличии управляющих ускорений аналитически исследовать систему уравнений относительного движения, представляющую собой нелинейную нестационарную систему дифференциальных уравнений, затруднительно или вовсе невозможно. Поэтому для определения траекторий сближения приходится обычно использовать численные методы, в частности численное интегрирование.

В размерной форме численное решение уравнений относительного движения зависит от начальных условий по относительным положению и скорости, начального положения полюса относительной системы координат на опорной орбите, линейных размеров и формы опорной орбиты, интенсивности поля тяготения, в котором выполняется маневр сближения, а также характеристик управляющих ускорений. Вследствие того, что при изменении хотя бы одного из этих факторов уравнения движения необходимо интегрировать заново, отдельная траектория носит частный характер. В связи с этим желательно обобщать получаемые результаты так, чтобы при изменении некоторых условий задачи новое решение можно было бы получать из найденных ранее путем несложных пересчетов. Такое обобщение может быть достигнуто методами теории подобия [3, 67].

При исследовании динамики сближения наибольший интерес представляют такие переменные, как время, относительные координаты, скорости и ускорения. Поэтому будем рассматривать приведение к безразмерной форме только этих переменных. Размеры опорной орбиты будем характеризовать фокальным параметром p , ее форму и

начальное положение полюса относительной системы координат — элементами c, z , а поле тяготения — гравитационной постоянной центрального тела μ .

Постоянные параметры приведения. Для приведения переменных, определяющих траекторию сближения, к безразмерной форме в некоторых случаях удобно использовать постоянные коэффициенты подобия. В качестве основного параметра приведения примем величину угловой скорости обращения по круговой орбите радиуса p

$$\omega_0 = \sqrt{\mu/p^3},$$

так что за единицу времени можно выбрать время, в течение которого опорная точка проходит угловое расстояние, равное одному радиану:

$$K_t = 1/\omega_0.$$

Тогда безразмерное время

$$\tau = \frac{t - t_0}{K_t} = \omega_0(t - t_0)$$

будет представлять собой центральный угол, который проходит космический аппарат от начальной точки в круговом движении. Выберем за единицу длины некоторое характерное расстояние L :

$$K_L = L.$$

Тогда единицами скорости K_V и ускорения K_W будут величины

$$K_V = K_L/K_t = \omega_0 L, \quad K_W = K_V/K_t = \omega_0^2 L.$$

Если обозначить производные по независимой переменной τ штрихами, то безразмерные относительные координаты, скорости и ускорения будут иметь вид

$$h = \frac{H}{K_L} = \frac{H}{L}, \quad h' = \frac{\dot{H}}{K_V} = \frac{\dot{H}}{\omega_0 L}, \quad h'' = \frac{\ddot{H}}{K_W} = \frac{\ddot{H}}{\omega_0^2 L},$$

где $H = x, y, z$ и соответственно $h = \xi, \eta, \zeta$.

Нетрудно показать, что при произвольном выборе L в соответствующие безразмерные уравнения движения не будет входить величина гравитационной постоянной μ .

Следовательно, одни и те же результаты решения этих уравнений пригодны для различных центральных полей тяготения. Однако нелинеаризованные уравнения будут содержать отношение p/L . Поэтому за единицу длины можно принять непосредственно значение параметра p [36]. Тогда основные коэффициенты подобия определяются в виде

$$K_l = \sqrt{p^3/\mu}, \quad K_L = p, \quad K_v = \sqrt{\mu/p}, \quad K_w = \mu/p^2. \quad (5.1.8)$$

В этом случае результаты решения не зависят от размеров опорной орбиты. Следовательно, если не считать приведенного ускорения от тяги, характерными параметрами будут только элементы c и s , определяющие форму опорной орбиты ($e = \sqrt{c^2 + s^2}$) и начальное положение относительно перицентра полюса опорной системы координат ($\operatorname{tg} \vartheta_0 = s/c$). К тому же, если принимать в расчет только относительное, а не абсолютное время и измерять полярный угол θ от перицентра опорной орбиты, то для ее описания достаточно одного элемента e .

В линеаризованные уравнения относительного движения в отличие от нелинеаризованных отношение p/L в явном виде не входит. Благодаря этому становится возможным распоряжаться выбором единицы длины L в зависимости от требований конкретной задачи. Например, в случае использования при сближении двигателей непрерывной или дискретной тяги иногда желательно исключить влияние величины располагаемого ускорения. Тогда величину L следует полагать равной a_0/ω_0^2 , где a_0 — величина номинального или максимального ускорения от тяги. Иногда в качестве единицы длины L бывает удобно выбирать величину начальной относительной дальности r_0 [14, 31]. Тогда в безразмерном виде начальное расстояние между аппаратами будет всегда равно единице.

Предположим, что траектория сближения определяется интегрированием уравнений относительного движения по размерному или безразмерному времени. В этом случае переменные коэффициенты соответствующей системы уравнений, вытекающей из системы (5.1.3), будут меняться с увеличением t или τ неравномерно. Это следует из

того, что при постоянной секториальной скорости опорного движения полярный угол θ , от которого зависят коэффициенты, изменяется более быстро при меньших расстояниях и более медленно при больших расстояниях от центра притяжения. В результате для обеспечения требуемой точности решения шаг интегрирования приходится выбирать достаточно малым исходя из максимальной скорости изменения коэффициентов, что приводит к увеличению вычислительного времени. Если в качестве аргумента принять полярный угол θ , то переменные коэффициенты уравнений относительного движения будут изменяться более равномерно, что позволит при заданной точности решения увеличивать шаг интегрирования и сокращать общие затраты вычислительного времени.

Пусть выбрана совокупность коэффициентов подобия (5.1.8). Для безразмерных координат, составляющих скорости и составляющих управляющего ускорения введем обозначения

$$h = H/\rho, \quad v_h = \dot{H} \sqrt{\rho/\mu}, \quad \alpha_h = a_H \rho^2/\mu, \quad (5.1.9)$$

где, как и ранее, $H = x, y, z$ и $h = \xi, \eta, \zeta$. Тогда, если обозначить производные по θ штрихами, уравнения относительного движения (5.1.3) можно преобразовать с учетом (5.1.7) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= \frac{1}{\lambda^2}, \\ \xi' &= \frac{1}{\lambda^2} v_\xi, \\ v_\xi' &= 2v_\eta - 2\varepsilon\lambda\eta - (\kappa_0 - \lambda)\lambda\xi + \frac{1}{\lambda^2} \alpha_\xi, \\ \eta' &= \frac{1}{\lambda^2} v_\eta, \quad v_\eta' = \\ &= -2v_\xi + 2\varepsilon\lambda\xi - (\kappa_0 - \lambda)\lambda\eta + 1 - \kappa_0 + \frac{1}{\lambda^2} \alpha_\eta, \\ \zeta' &= \frac{1}{\lambda^2} v_\zeta, \quad v_\zeta' = -(\kappa_0 - \lambda)\lambda\zeta + \frac{1}{\lambda^2} \alpha_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.10)$$

где

$$\kappa_0 = [1 + 2\lambda\eta + \lambda^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)]^{-\frac{3}{2}}.$$

Для сравнения на рис. 5.1 показан характер изменения в пределах одного витка при $e = 0,03$ величин

$$\begin{aligned} a_t &= -\dot{\vartheta} p^3/\mu = 2\varepsilon(t)\lambda(t), & b_t &= \dot{\vartheta} \sqrt{p^3/\mu} = \lambda^2(t), \\ a_\vartheta &= 2\varepsilon(\vartheta)\lambda(\vartheta), & b_\vartheta &= \lambda^2(\vartheta). \end{aligned}$$

Первые две величины выражают коэффициенты системы (5.1.3), в которой в качестве аргумента используется время t , а последние две — соответствующие коэффициенты

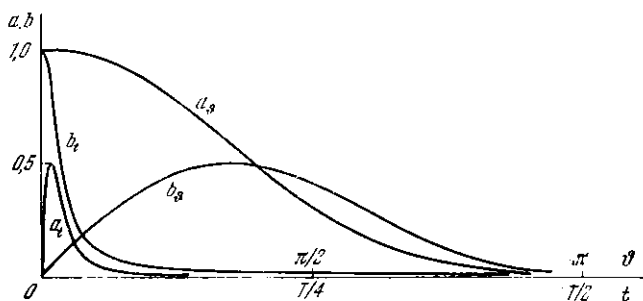


Рис. 5.1.

системы (5.1.10), в которой аргументом служит полярный угол ϑ . Использование в качестве аргумента полярного угла имеет также и то преимущество, что время движения вычисляется через этот угол достаточно просто с помощью конечных соотношений, тогда как для обратного перехода необходимо решение трансцендентного уравнения Кеплера.

Система уравнений (5.1.10) полностью подобна системе уравнений (5.1.3), причем коэффициенты подобия для координат, скоростей и ускорений постоянны, а значения аргумента ϑ в сходственных точках подобных орбит равны между собой. Правые части системы (5.1.10) зависят лишь от двух характерных параметров c и s [см. (4.1.7)]. Если найдено численное решение системы (5.1.10) при заданных значениях c и s , то с помощью коэффициентов подобия (5.1.8) это решение можно перевести в реальные физические величины для любых линейных размеров опорной орбиты и любого центрального поля тяготения. Если же известно решение задачи в размерной форме,

то оно может быть пересчитано для опорной орбиты с теми же самыми элементами c и s , но с иными геометрическими размерами и интенсивностью поля тяготения через отношения коэффициентов подобия следующим образом:

$$x^{(2)} = \frac{K_L^{(2)}}{K_L^{(1)}} x^{(1)}, \quad \dot{x}^{(2)} = \frac{K_V^{(2)}}{K_V^{(1)}} \dot{x}^{(1)} \text{ и т. д.,}$$

где индекс (1) соответствует первичному, а индекс (2) — вторичному решению.

Из сказанного выше следует, что безразмерные переменные в форме (5.1.9) особенно удобно применять для представления численных результатов и построения номограмм, ибо при их использовании переход к размерным величинам осуществляется простым умножением на постоянные коэффициенты подобия. Однако более простую форму, чем (5.1.10), безразмерные уравнения относительного движения имеют в случае, если используются переменные коэффициенты приведения [30].

Переменные коэффициенты приведения. Как и ранее, в качестве независимой переменной будем использовать вместо времени полярный угол θ . Будем относить линейные отклонения к текущей величине радиуса-вектора R опорной точки, а за безразмерные скорости примем производные от приведенных линейных отклонений по углу θ . Таким образом, в явном виде безразмерные относительные координаты и скорости определяются следующим образом:

$$h = \frac{H}{R} = \frac{\lambda H}{p}, \quad v_h = \frac{\dot{H}}{R\dot{\theta}} = \frac{\dot{R}}{R\dot{\theta}} \frac{H}{R} = \\ = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\dot{H}}{\lambda} = \varepsilon \frac{H}{p}. \quad (5.1.11)$$

Тогда уравнения относительного движения (5.1.3) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= v_{\xi}, & v_{\xi}' &= 2v_{\eta} + \frac{1-x_0}{\lambda} \xi + \frac{1}{\lambda^3} a_{\xi}, \\ \eta' &= v_{\eta}, & v_{\eta}' &= -2v_{\xi} + \frac{1-x_0}{\lambda} (1+\eta) + \frac{1}{\lambda^3} a_{\eta}, \\ \zeta' &= v_{\zeta}, & v_{\zeta}' &= -\zeta + \frac{1-x_0}{\lambda} \zeta + \frac{1}{\lambda^3} a_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.12)$$

где теперь

$$\kappa_0 = [\xi^2 + (1 + \eta)^2 + \zeta^2]^{-\frac{3}{2}}$$

и каждая составляющая приведенного ускорения от тяги α_h определяется третьим выражением (5.1.9). Соответствующий безразмерный аналог приближенных уравнений движения (5.1.4) записывается в виде

$$\xi' = v_\xi, \quad v_\xi' = 2v_\eta + \frac{3}{\lambda} \xi\eta + \frac{1}{\lambda^3} \alpha_\xi,$$

$$\eta' = v_\eta, \quad v_\eta' = -2v_\xi + \frac{3}{\lambda} \left(\eta + \frac{1}{2} \xi^2 - \eta^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \right) + \frac{1}{\lambda^3} \alpha_\eta,$$

$$\zeta' = v_\zeta, \quad v_\zeta' = -\zeta - \frac{3}{\lambda} \eta\zeta + \frac{1}{\lambda^3} \alpha_\zeta.$$

В дальнейшем будет показано, что безразмерные переменные в форме (5.1.11) особенно удобны при аналитическом решении приближенных уравнений относительного движения. Помимо этого, подобные переменные целесообразно использовать и при численном интегрировании. Из сравнения систем (5.1.12) и (5.1.10) следует, что при каждом обращении к счету правых частей в случае использования переменных (5.1.11) требуется меньше арифметических операций, чем в случае использования переменных (5.1.9). В результате, особенно при массовых расчетах, может быть достигнута значительная экономия машинного времени. Однако для окончательного представления получаемые решения следует выражать все-таки через безразмерные переменные (5.1.9).

Возможные типы безразмерных переменных, конечно, не исчерпываются рассмотренными выше. Очевидно, что в качестве обобщенных переменных состояния можно использовать любые безразмерные комбинации параметров относительного движения, которые имеют определенный физический смысл и удобны для анализа. Например, за единицу длины нередко принимается величина большой полуоси опорной орбиты, а за независимую переменную — эксцентрическая аномалия [83]. Однако подобные параметры приведения и переменные не являются универсальными и не позволяют получать обобщенные решения в виде, едином для любого типа опорных орбит. Другие известные формы безразмерных переменных, предлагаемые

в работе [42], представляют собой приведенные значения кинетической энергии и прогнозируемого пролета мимо цели. Они достаточно удобны при исследовании динамики сближения в бессиловом поле, но с учетом разностного гравитационного ускорения не упрощают анализа и приводят к более сложным расчетным формулам, чем те, которые можно получить на основе рассмотренных выше безразмерных переменных.

§ 5.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ КООРДИНАТАМИ И ВАРИАЦИЯМИ ЭЛЕМЕНТОВ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ

Из выражений, приведенных в предыдущем параграфе, следует, что и приближенные и точные уравнения относительного движения представляют собой достаточно сложные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, проинтегрировать которые аналитически даже для пассивных участков на первый взгляд затруднительно. Поэтому в задачах управления сближением предлагается обычно использовать либо решения, полученные численным интегрированием этих уравнений, либо их приближенные аналитические решения, соответствующие малым значениям эксцентриситета опорной орбиты. Однако в предположении центрального поля тяготения орбитальные движения обоих аппаратов на пассивных участках являются кеплеровыми и описываются системами дифференциальных уравнений, имеющими по пять конечных независимых интегралов и по одному интегралу, сводящемуся к простой квадратуре (см. § 4.1). Следовательно, и свободное относительное движение, представляющее собой разность двух кеплеровых движений, должно изображаться аналогичными интегралами.

В линейном и квадратичном приближении аналитические решения уравнений относительного движения удобно получать путем варьирования интегралов опорного кеплерова движения, выраженных через соответствующие переменные. При этом для сокращения выкладок можно использовать простые геометрические соображения [30, 32].

В качестве внутренних элементов опорной орбиты будем использовать, как и ранее, параметры p , c , s и определять опорное движение полярными координатами R и θ .

Положение космического аппарата по отношению к опорной точке в абсолютной вспомогательной системе координат $X_0Y_0Z_0$, связанной с

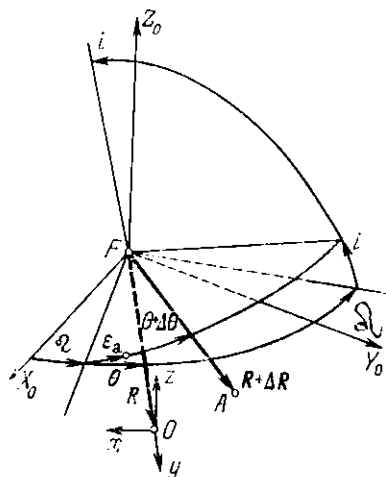


Рис. 5.2.

плоскостью опорной орбиты, будем определять долготой восходящего узла Ω , аргументом начала отсчета полярного угла ϵ_a и полярным углом $\theta + \Delta\theta$, который задаст положение космического аппарата на его орбите, имеющей наклонение i относительно опорной орбиты. Расстояние космического аппарата от центра притяжения будем обозначать через $R + \Delta R$ (рис. 5.2).

Спроектируем возмущенный радиус-вектор $R + \Delta R$ на оси орбитальной системы координат xuz .

В результате для составляющих отклонения от опорной точки по положению получим

$$\frac{x}{R + \Delta R} = \cos(\theta + \Delta\theta + \Omega + \epsilon_a) \sin(\theta - \Omega) - \\ - \sin(\theta + \Delta\theta + \Omega + \epsilon_a) \cos(\theta - \Omega) \cos i,$$

$$\frac{R + y}{R + \Delta R} = \cos(\theta + \Delta\theta + \Omega + \epsilon_a) \cos(\theta - \Omega) + \\ + \sin(\theta + \Delta\theta + \Omega + \epsilon_a) \sin(\theta - \Omega) \cos i,$$

$$\frac{z}{R + \Delta R} = \sin(\theta + \Delta\theta + \Omega + \epsilon_a) \sin i.$$

Если космический аппарат движется по своей орбите, не отклоняясь далеко от опорной точки, то величины ΔR , $\Delta\theta$ и i будут малыми. Кроме того, малой должна быть и сумма углов $\Omega + \epsilon_a$, хотя по отдельности они могут быть какими угодно. Следовательно, с точностью до членов

третьего порядка малости

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{R} &= -(\Delta\theta + \varOmega + \varepsilon_a) - (\Delta\theta + \varOmega + \varepsilon_a) \frac{\Delta R}{R} + \\ &\quad + \frac{i^2}{2} \sin(\theta - \varOmega) \cos(\theta - \varOmega), \\ \frac{y}{R} &= \frac{\Delta R}{R} - \frac{1}{2} (\Delta\theta + \varOmega + \varepsilon_a)^2 - \frac{i^2}{2} \sin^2(\theta - \varOmega), \\ \frac{z}{R} &= i \sin(\theta - \varOmega) + i (\Delta\theta + \varOmega + \varepsilon_a) \cos(\theta - \varOmega) + \\ &\quad + i \sin(\theta - \varOmega) \frac{\Delta R}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

Наряду с постоянными $\varOmega$, ε_a и i в соотношения (5.2.1) входят переменные приращения $\Delta\theta$ и ΔR , соответствующие данному моменту времени t . Эти величины можно выразить через независимые вариации элементов опорной орбиты. С точностью до членов второго порядка малости включительно приращения $\Delta\theta$ и ΔR можно представить через первые и вторые изохронные вариации функций θ и R :

$$\Delta\theta = \delta\theta + \frac{1}{2} \delta^2\theta, \quad \Delta R = \delta R + \frac{1}{2} \delta^2 R.$$

По определению, переменные θ и R зависят от постоянных p , c , s и t_0 согласно выражениям

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + c \cos \theta - s \sin \theta)^2} = \Theta, \quad (5.2.2)$$

$$R = \frac{p}{1 + c \cos \theta - s \sin \theta}, \quad (5.2.3)$$

где

$$\Theta = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - t_0). \quad (5.2.4)$$

Следовательно, для фиксированного момента времени t первые и вторые вариации функций θ и R определяются:

$$\delta = \frac{\partial}{\partial p} \delta p + \frac{\partial}{\partial c} \delta c + \frac{\partial}{\partial s} \delta s + \frac{\partial}{\partial t_0} \delta t_0, \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} \delta p^2 + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \delta c^2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta s^2 + \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \delta t_0^2 + \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p \partial c} \delta p \delta c + \frac{\partial^2}{\partial p \partial s} \delta p \delta s + \frac{\partial^2}{\partial p \partial t_0} \delta p \delta t_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial c \partial s} \delta c \delta s + \frac{\partial^2}{\partial c \partial t_0} \delta c \delta t_0 + \frac{\partial^2}{\partial s \partial t_0} \delta s \delta t_0 \right). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Аналитические выражения для частных производных от θ и R по p , c , s и t_0 нетрудно получить из уравнений (5.2.2) и (5.2.3). Полные выражения для этих производных даны в работе [32]. Теперь запишем их в несколько иной форме, более удобной для численных расчетов.

Первые производные от θ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial p} &= -\frac{3}{2p} \Theta \lambda^2, & \frac{\partial \theta}{\partial t_0} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \lambda^2, \\ \frac{\partial \theta}{\partial c} &= 2\lambda^2 \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\lambda^3} = \begin{cases} \frac{1}{1-e^2} \left[(1+\lambda) \sin \theta - s + \frac{s\lambda^2}{\lambda_0^2} - \right. \\ \left. - 3c\Theta\lambda^2 \right], & e \neq 1, \\ \frac{2}{5} c\lambda^2 \left(3\Theta - \frac{e}{\lambda^3} + \frac{s}{\lambda_0^3} \right) + \\ + s \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right), & e = 1, \end{cases} \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} &= -2\lambda^2 \int_0^\theta \frac{\sin \theta d\theta}{\lambda^3} = \begin{cases} -\frac{1}{1-e^2} \left[(1+\lambda) \cos \theta + c - \frac{2\lambda^2}{\lambda_0} - \right. \\ \left. - 3s\Theta\lambda^2 \right], & e \neq 1, \\ \frac{2}{5} s\lambda^2 \left(3\Theta - \frac{e}{\lambda^3} + \frac{s}{\lambda_0^3} \right) - \\ - c \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right), & e = 1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.7)$$

Первые производные от R :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p} &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{3}{2} \Theta \epsilon \lambda \right), \\ \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t_0} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \epsilon \lambda, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial c} &= \frac{1}{\lambda} \left(-\cos \theta + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial c} \right), \\ \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial s} &= \frac{1}{\lambda} \left(\sin \theta + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial s} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

Вторые производные от θ :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} &= \frac{3}{4p^2} (5 - 6\Theta \epsilon \lambda) \Theta \lambda^2, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial t_0} &= \frac{3}{2p} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 - 2\Theta \epsilon \lambda) \lambda^2, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_0^2} &= -2 \frac{\mu}{p^3} \epsilon \lambda^3, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial c} &= \frac{3}{p} \left(-\cos \theta + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial c} \right) \Theta \lambda, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial s} &= \frac{3}{p} \left(\sin \theta + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \Theta \lambda, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial c^2} &= \frac{2}{\lambda} \left(2 \cos \theta - \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial c} - 6\lambda^2 J_{cc}, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial c \partial s} &= \frac{2}{\lambda} \left(-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial c} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} - \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial c} \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) + 6\lambda^2 J_{cs}, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} &= -\frac{2}{\lambda} \left(2 \sin \theta + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \frac{\partial \theta}{\partial s} - 6\lambda^2 J_{ss}, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial c \partial t_0} &= 2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left(-\cos \theta + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial c} \right) \lambda, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial t_0} &= 2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left(\sin \theta + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \lambda.
 \end{aligned} \right\} (5.2.9)$$

Вторые производные от R :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} &= \frac{3}{4p^2} [\epsilon + 3\Theta (\lambda - 1) \lambda^2] \Theta \lambda^2, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial t_0^2} &= \frac{\mu}{p^3} (\lambda - 1) \lambda^3, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial c} &= -\frac{1}{p} \left(\frac{\cos \theta}{\lambda} + \frac{3}{2} \Theta \lambda \sin \theta \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{p} \left[\frac{\epsilon}{\lambda} - \frac{3}{2} \Theta (\lambda - 1) \lambda \right] \frac{\partial \theta}{\partial c}, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial s} &= \frac{1}{p} \left(\frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{3}{2} \Theta \lambda \cos \theta \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{p} \left[\frac{\epsilon}{\lambda} - \frac{3}{2} \Theta (\lambda - 1) \lambda \right] \frac{\partial \theta}{\partial s},
 \end{aligned} \right\} (5.2.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial c^2} &= 2 \frac{\cos^2 \theta}{\lambda} + 2 \frac{\sin \theta}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial c} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \left(\frac{\partial \theta}{\partial c} \right)^2 - \\
 &\quad - 6\epsilon \lambda J_{cc}, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial c \partial s} &= -2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\lambda} + \frac{\cos \theta}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial c} + \\
 &\quad + \frac{\sin \theta}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial c} \frac{\partial \theta}{\partial s} + 6\epsilon \lambda J_{cs}, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial s^2} &= 2 \frac{\sin^2 \theta}{\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial c} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 - \\
 &\quad - 6\epsilon \lambda J_{ss}, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial t_0} &= \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} [\epsilon + 3\Theta(\lambda-1)\lambda^2] \lambda, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial c \partial t_0} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left[\sin \theta + (\lambda-1) \frac{\partial \theta}{\partial c} \right] \lambda, \\
 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial t_0} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left[\cos \theta + (\lambda-1) \frac{\partial \theta}{\partial s} \right] \lambda.
 \end{aligned} \right\} (5.2.10)$$

Здесь интегралы

$$J_{cc} = \int_0^\theta \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\lambda^3}, \quad J_{cs} = \int_0^\theta \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{\lambda^3}, \quad J_{ss} = \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\lambda^3}$$

вычисляются в зависимости от эксцентриситета опорной орбиты по следующим формулам:

при $e \neq 1$:

$$J_{cc} = \frac{1}{6(1-e^2)} \left[\frac{2+\lambda}{\lambda^3} \sin \theta \cos \theta - 2s \left(\frac{\cos \theta}{\lambda^3} - \lambda_0^{-3} \right) + \right. \\ \left. + 3\Theta - \frac{5c}{\lambda^3} \frac{\partial \theta}{\partial c} \right],$$

$$J_{cs} = \frac{1}{6(1-e^2)} \left[3 \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\lambda^3} - \frac{4\epsilon}{\lambda^3} \sin \theta \cos \theta + \right. \\ \left. + \frac{5}{\lambda^2} \left(s \frac{\partial \theta}{\partial c} + c \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \right],$$

$$J_{ss} = \frac{1}{6(1-e^2)} \left(-\frac{2+\lambda}{\lambda^3} \sin \theta \cos \theta - 2c \frac{\sin \theta}{\lambda^3} + \right. \\ \left. + 3\Theta - \frac{5s}{\lambda^2} \frac{\partial \theta}{\partial c} \right),$$

при $e = 1$:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{с}} &= \frac{c^2}{7} \left(\frac{e}{\lambda^4} - \frac{s}{\lambda_0^4} \right) + \frac{21s^2 - 11c^2}{35} \left(\frac{e}{\lambda^3} - \frac{s}{\lambda_0^3} \right) - \\
 &\quad - \frac{2cs}{3} (\lambda^{-3} - \lambda_0^{-3}) - \frac{7s^2 - 13c^2}{35} \Theta + cs (\lambda^{-2} - \lambda_0^{-2}), \\
 J_{\text{сs}} &= -\frac{cs}{7} \left(\frac{e}{\lambda^4} - \frac{s}{\lambda_0^4} \right) + \frac{32}{35} \left(\frac{e}{\lambda^3} - \frac{s}{\lambda_0^3} \right) + \\
 &\quad + \frac{s^2 - c^2}{3} (\lambda^{-3} - \lambda_0^{-3}) - \frac{4}{7} cs \Theta - \frac{s^2 - c^2}{2} (\lambda^{-2} - \lambda_0^{-2}), \\
 J_{\text{ss}} &= \frac{s^2}{7} \left(\frac{e}{\lambda^4} - \frac{s}{\lambda_0^4} \right) - \frac{21c^2 - 11s^2}{35} \left(\frac{e}{\lambda^3} - \frac{s}{\lambda_0^3} \right) + \\
 &\quad + \frac{2cs}{3} (\lambda^{-3} - \lambda_0^{-3}) - \frac{7c^2 - 13s^2}{35} \Theta - cs (\lambda^{-2} - \lambda_0^{-2}).
 \end{aligned}$$

Подстановка соотношений (5.2.7), (5.2.8) и (5.2.9), (5.2.10) в формулы для первой (5.2.5) и второй (5.2.6) вариаций функций θ и R дает линейную и квадратичную части приращений $\Delta\theta$ и ΔR , которые входят в выражения для относительных координат (5.2.1). Таким образом, решение уравнений относительного движения в линейном и квадратичном приближениях в принципе определено.

Нетрудно видеть, что это решение является общим, поскольку оно зависит от шести независимых постоянных δp , δc , δs , δt_0 , $\Omega + \epsilon_a$ и i , которые можно отождествить с произвольными постоянными интегрирования.

§ 5.3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

В линейном приближении уравнения (5.2.1) дают

$$\frac{x}{R} = -(\delta\theta + \Omega + \epsilon_a), \quad \frac{y}{R} = \frac{\delta R}{R}, \quad \frac{z}{R} = i \sin(\theta - \Omega). \quad (5.3.1)$$

Выражая здесь первые вариации $\delta\theta$ и δR в соответствии с (5.2.5), (5.2.7) и (5.2.8), нетрудно получить уравнения, связывающие в явном виде размерные (x , y , z) или безразмерные (x/R , y/R , z/R) относительные координаты космического аппарата с вариациями элементов опорной орбиты. Продифференцировав результирующие соотношения по независимой переменной (времени t или углу θ), получим аналогичные уравнения для составляющих размерной или безразмерной относительной скорости.

Введем в орбитальной системе координат вектор отклонений по положению r с компонентами x, y, z или $x/R, y/R, z/R$ и вектор отклонений по скорости v с компонентами, определяемыми соответственным образом. Тогда общее решение линеаризованных уравнений относительного движения (уравнений в вариациях) в этой системе координат можно записать в векторно-матричной форме

$$r = Fc, \quad v = Gc, \quad (5.3.2)$$

где c — шестимерный вектор произвольных постоянных интегрирования, которые могут быть выражены через вариации элементов опорной орбиты, а F и G — матрицы размера 3×6 , составляющие фундаментальную матрицу шестого порядка

$$\Phi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}.$$

Если использовать в качестве составляющих вектора c непосредственно величины $\delta p/p, \delta c, \delta s, \sqrt{\mu/p^3} \delta t_0, \Omega + \varepsilon_a$ и i , то выражения для элементов матриц F и G будут довольно громоздкими. Чтобы привести общее решение (5.3.2) к максимально простому виду, следует ввести другие постоянные интегрирования — *константы первого рода*. Эти константы представляют собой линейно независимые комбинации вариаций исходных элементов опорной орбиты и определяются различным образом в зависимости от значения эксцентриситета [30, 32].

Для опорных орбит, отличных от параболических ($e \neq 1$), константы первого рода записываются так:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -(\Omega + \varepsilon_a) + \frac{cs(1 + \lambda_0)}{\lambda_0^2} \frac{\delta c}{1 - e^2} + \\ &\quad + \frac{(1 - c)(1 + \lambda_0)}{\lambda_0} \frac{\delta s}{1 - e^2} + \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \\ c_2 &= \frac{\delta p}{2p} + \frac{c\delta c + s\delta s}{1 - e^2}, \quad c_3 = -i \sin^* \Omega, \\ c_4 &= \frac{s^2 - \lambda_0^2}{\lambda_0^2} \frac{\delta c}{1 - e^2} - \frac{2s}{\lambda_0} \frac{\delta s}{1 - e^2} - s \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \\ c_5 &= \frac{cs}{\lambda_0^2} \frac{\delta c}{1 - e^2} + \frac{1 - c}{\lambda_0} \frac{\delta s}{1 - e^2} - c \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \\ c_6 &= i \cos \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3)$$

Тогда, если в качестве переменных состояния использовать безразмерные переменные

$$\mathbf{r} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right)^T, \quad \mathbf{v} = \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{x}{R} \right), \frac{d}{d\theta} \left(\frac{y}{R} \right), \frac{d}{d\theta} \left(\frac{z}{R} \right) \right)^T, \quad (5.3.4)$$

выражения для ненулевых элементов матриц

$$F = \| f_{ij} \|, \quad G = \| g_{ij} \|, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.3.5)$$

независимо от начала отсчета угла θ будут иметь вид

$$\begin{aligned} f_{11} &= 1, \quad f_{12} = 3\Theta\lambda^2, \quad f_{14} = (1 + \lambda) \sin \theta, \\ f_{15} &= -(1 + \lambda) \cos \theta, \quad f_{22} = 2 - 3\Theta\epsilon\lambda, \\ f_{31} &= \lambda \cos \theta, \quad f_{25} = \lambda \sin \theta, \quad f_{33} = \cos \theta, \quad f_{36} = \sin \theta, \\ g_{12} &= 3 - 6\Theta\epsilon\lambda, \quad g_{14} = 2\lambda \cos \theta - c, \\ g_{15} &= 2\lambda \sin \theta + s, \quad g_{22} = -3\epsilon/\lambda - 3\Theta[(2\lambda - 1)(\lambda - 1) - e^2], \\ g_{24} &= (2\lambda - 1) \sin \theta + s, \quad g_{25} = (2\lambda - 1) \cos \theta - c, \\ g_{33} &= -\sin \theta, \quad g_{36} = \cos \theta. \end{aligned}$$

Для параболических опорных орбит ($e = 1$) константы первого рода, описывающие относительное движение в плоскости опорной орбиты, определяются через вариации ее элементов в виде

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -(\zeta + \epsilon_a) - \frac{s(1 + \lambda_0)}{2\lambda_0^2} \frac{\delta p}{p} - \\ &- \frac{sc(2 + 3\lambda_0)}{5\lambda_0^3} \delta c + \frac{3c\lambda_0^2 + 1 + \lambda_0}{5\lambda_0^2} \delta s + \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \\ c_2 &= \frac{2}{5} (c\delta c + s\delta s), \\ c_4 &= \frac{1}{\lambda_0} \frac{\delta p}{p} - \frac{\lambda_0^2 + 4}{5\lambda_0^3} \delta c - \frac{s(1 + \lambda_0)}{5\lambda_0^2} \delta s - \\ &- s \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \\ c_5 &= -\frac{s}{2\lambda_0^2} \frac{\delta p}{p} - \frac{sc(2 + \lambda_0)}{5\lambda_0^3} \delta c + \\ &+ \frac{\lambda_0^2 + 1}{5\lambda_0^2} \delta s - c \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.6)$$

Константы c_3 и c_6 , описывающие движение по нормали к плоскости опорной орбиты, одна и та же независимо от формы опорной орбиты. Соответствующие полные матрицы F и G фундаментальных решений имеют в этом случае вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{\lambda} & 0 & (1 + \lambda) \sin \theta & -(1 + \lambda) \cos \theta & 0 \\ 0 & \frac{1 + \lambda}{\lambda} & 0 & \lambda \cos \theta & \lambda \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & \sin \theta \end{pmatrix},$$

$G =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 & 2\lambda \cos \theta - c & 2\lambda \sin \theta + s & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2\lambda^2} & 0 & (2\lambda - 1) \sin \theta + s & (2\lambda - 1) \cos \theta - c & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Значения произвольных постоянных интегрирования c_i , через которые выражается общее решение уравнений в вариациях, вычисляются на практике чаще всего по начальным условиям, т. е. по значениям координат и скоростей, известных для некоторого момента времени t_0 . Следовательно, требуемые зависимости можно получить, если разрешить уравнения (5.3.2) относительно c , представляя общее решение в виде интегралов уравнений в вариациях. Запишем эти интегралы в общем виде

$$c = Pr + Qv, \quad (5.3.7)$$

где

$$P = \| p_{ij} \|, \quad Q = \| q_{ij} \|$$

— матрицы размера 6×3 . Нулевые элементы этих матриц в случае непараболических опорных орбит выражаются в явном виде следующим образом:

$$p_{11} = 1, \quad p_{12} = \frac{1}{1 - e^2} [3\varepsilon(1 + \lambda) - 3\Theta(3\lambda - 1 + e^2)],$$

$$p_{22} = \frac{1}{1 - e^2} (3\lambda - 1 + e^2), \quad p_{33} = \cos \theta, \quad p_{63} = \sin \theta,$$

$$p_{12} = \frac{1}{1 - e^2} \left[-3 \left(\cos \theta + c + \frac{s\varepsilon}{\lambda} \right) + 3s\lambda(3\lambda - 1 + e^2) \right],$$

$$p_{52} = \frac{1}{1-e^2} \left[-3 \left(\sin \theta - s + \frac{c\varepsilon}{\lambda} \right) + 3c\Theta (3\lambda - 1 + e^2) \right],$$

$$q_{11} = \frac{1}{1-e^2} [-(1+\lambda)\varepsilon + 3\Theta\lambda^2], \quad q_{33} = -\sin \theta,$$

$$q_{12} = \frac{1}{1-e^2} [2 - (\lambda - 1)\lambda - 3\Theta\varepsilon\lambda], \quad q_{63} = \cos \theta,$$

$$q_{21} = -\frac{1}{1-e^2} \lambda^2, \quad q_{22} = \frac{1}{1-e^2} \varepsilon\lambda,$$

$$q_{41} = \frac{1}{1-e^2} [(1+\lambda)\cos \theta + c - 3s\Theta\lambda^2],$$

$$q_{42} = \frac{1}{1-e^2} (-\lambda \sin \theta - 2s + 3s\Theta\varepsilon\lambda),$$

$$q_{51} = \frac{1}{1-e^2} [(1+\lambda)\sin \theta - s - 3c\Theta\lambda^2],$$

$$q_{52} = \frac{1}{1-e^2} [\lambda \cos \theta - 2c + 3c\Theta\varepsilon\lambda].$$

Аналогичные выражения имеют место и в случае параболических опорных орбит [30, 32].

Более просто интегралы для составляющих относительного движения в плоскости опорной орбиты можно представить, если ввести новые постоянные интегрирования — *константы второго рода*. Для случая $e \neq 1$ они определяются так:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 &= c_1 + cc_3 + sc_4 = -(\Omega + \varepsilon_a) - \frac{s}{2\lambda_0^2} \delta c + \\ &\quad + \frac{c}{2\lambda_0} \delta s + (1 - e^2) \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \\ \bar{c}_2 &= c_2 + cc_4 - sc_5 = \frac{\delta n}{2p}, \\ \bar{c}_4 &= c_4 + cc_2 + sc_1 = c \frac{\delta p}{2p} - s(\Omega + \varepsilon_a) - \delta c, \\ \bar{c}_5 &= c_5 + cc_1 - sc_2 = -s \frac{\delta p}{2p} - c(\Omega + \varepsilon_a) + \delta s, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

и матрицы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ имеют вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \frac{\varepsilon}{\lambda} - 3\theta(3\lambda - 1 + e^2) & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & -3(\cos \theta + c) & 0 \\ 0 & 3(\sin \theta - s) & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 3\theta\lambda^2 & 2 - 3\theta\varepsilon\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta \\ (1 + \lambda) \cos \theta & -\lambda \sin \theta & 0 \\ (1 + \lambda) \sin \theta & \lambda \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Для случая $e = 1$ можно записать

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}_1 &= c_1 - \frac{3}{2}(cc_5 + sc_4) = -(\zeta + \varepsilon_a) - \\ &\quad - \frac{5s(1 + \lambda_0)}{4\lambda_0^2} \frac{\delta p}{p} - \frac{s(2 + \lambda_0)}{2\lambda_0^3} \delta c + \\ &\quad + \frac{1 + \lambda_0}{2\lambda_0} \delta s + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \\ \tilde{c}_2 &= c_2 + cc_4 - sc_5 = \frac{\delta p}{2p}, \\ \tilde{c}_4 &= cc_4 - sc_5 - \frac{3}{2}c_2 = \frac{\delta p}{2p} - (c\delta c + s\delta s), \\ \tilde{c}_5 &= c_1 + cc_5 + sc_4 = (\zeta + \varepsilon_a) - s\delta c + c\delta s \end{aligned} \right\} \quad (5.3.9)$$

и выразить интегралы уравнений в вариациях с помощью матриц

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1 + 4\lambda}{2\lambda^2} \varepsilon & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 2 - 3\lambda & 0 \\ 0 & -3\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\lambda} & \frac{1 + \lambda}{2\lambda} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta \\ \lambda^2 - 1 & -\varepsilon\lambda & 0 \\ (1 + \lambda)\varepsilon & (\lambda - 1)\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Заметим, однако, что общее решение уравнений в вариациях выражается через константы второго рода сложнее, чем через константы первого рода. Поэтому их следует использовать лишь в качестве промежуточных величин при определении постоянных интегрирования через координаты и составляющие скорости. Иными словами, сначала должны вычисляться значения констант второго рода $\tilde{c}_i$ на основе матриц $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, а затем по ним — значения констант первого рода c_i согласно формулам

$$c_1 = \frac{1}{1 - e^2} (\tilde{c}_1 - c\tilde{c}_5 - s\tilde{c}_4), \quad c_2 = \frac{1}{1 - e^2} (\tilde{c}_2 - c\tilde{c}_4 + s\tilde{c}_5),$$

$$c_4 = \frac{1}{1 - e^2} (\tilde{c}_4 - c\tilde{c}_2 - s\tilde{c}_1), \quad c_5 = \frac{1}{1 - e^2} (\tilde{c}_5 - c\tilde{c}_1 + s\tilde{c}_2)$$

или

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{5} \left(\tilde{c}_1 + \frac{3}{2} \tilde{c}_5 \right), \\ c_4 &= \frac{2}{5} c \left(\tilde{c}_4 + \frac{3}{2} \tilde{c}_2 \right) + \frac{2}{5} s (\tilde{c}_5 - \tilde{c}_1), \\ c_2 &= \frac{2}{5} (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_4), \\ c_5 &= \frac{2}{5} c (\tilde{c}_5 - \tilde{c}_1) - \frac{2}{5} s \left(\tilde{c}_4 + \frac{3}{2} \tilde{c}_2 \right), \end{aligned}$$

которые следуют соответственно из выражений (5.3.8) и (5.3.9). При таком способе вычисления констант первого рода экономится значительное количество арифметических операций по сравнению с их непосредственным вычислением на основе матриц P и Q .

Рассмотрим физический смысл постоянных интегрирования $c_1, \dots, c_6$.

Смысл постоянных c_3 и c_6 , описывающих относительное движение по нормали к плоскости опорной орбиты, достаточно очевиден. Постоянная c_3 характеризует

начальное отклонение из плоскости опорной орбиты, а постоянная c_6 — начальную нормальную скорость. Кроме того, геометрическая сумма этих констант равна по величине относительному наклонению орбит i и характеризует максимальные значения отклонения от плоскости опорной орбиты и составляющей скорости. Точки опорной орбиты, которые соответствуют моментам достижения максимума по координате и максимума по скорости, отстоят друг от друга на четверть витка, причем максимальная скорость достигается в узлах, где отклонение по положению становится равным нулю.

Постоянная c_1 характеризует отставание или опережение движения по сравнению с опорным при прохождении характерных точек орбит. Постоянная c_2 определяет относительную вариацию большой полуоси опорной орбиты и, следовательно, является мерой изменения полной энергии и момента количества орбитального движения, а также периода обращения в случае эллиптической опорной орбиты. Наконец, геометрическая сумма постоянных c_4 и c_5 характеризует отклонение возмущенной орбиты от круговой. Аналогичный смысл имеют и константы второго рода, как это можно видеть из их определения.

§ 5.4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ

Решения линейных уравнений в вариациях, описывающих малые отклонения от опорного движения, играют важную роль в прикладной небесной механике. Поэтому представляет интерес рассмотреть основные свойства этих решений и их возможные приложения в задаче управления сближением. Рассмотрение основывается на представлении общих решений уравнений в вариациях через произвольные постоянные интегрирования. Соотношения, вытекающие из такого представления, справедливы не только для кеплеровых, но и для произвольных опорных орбит, по которым могут двигаться космические аппараты, и оказываются полезными как при аналитических исследованиях, так и при составлении вычислительных программ.

Уравнения в вариациях в относительной системе координат, перемещающейся по опорной траектории, в общем

виде имеют вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{a},$$

где точкой обозначено дифференцирование по независимой переменной; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — трехмерные векторы отклонений от опорной точки по положению и скорости; $\mathbf{a}$ — вектор управляющих (возмущающих) ускорений; $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы третьего порядка, элементы которых зависят от выбора опорной траектории и относительной системы координат.

Предположим, что общее решение однородных уравнений в вариациях (при $\mathbf{a} = 0$) получено в форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{c}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{c} \quad (5.4.1)$$

или

$$\mathbf{c} = \mathbf{P}\mathbf{r} + \mathbf{Q}\mathbf{v}. \quad (5.4.2)$$

Здесь матрицы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ размера 3×6 удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{G}, \quad \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{G},$$

а матрицы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ размера 6×3 — уравнениям

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{Q}\mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{B}.$$

Если матрицы $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ вычислены для одного и того же момента времени, то с помощью подстановки (5.4.2) в (5.4.1) и обратной подстановки нетрудно убедиться, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{P} &= \mathbf{E}_3, & \mathbf{F}\mathbf{Q} &= 0, \\ \mathbf{G}\mathbf{P} &= 0, & \mathbf{G}\mathbf{Q} &= \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{P}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\mathbf{G} &= \mathbf{E}_6, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.3)$$

где $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{E}_6$ — единичные матрицы соответственно третьего и шестого порядков.

Выражения для элементов матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ через элементы матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, как и обратные соотношения, можно получить, разбивая основные прямоугольные матрицы на квадратные блоки и определяя неизвестные подматрицы из системы уравнений, вытекающих из основных уравнений (5.4.3). Существование решений этих уравнений гарантируется тем, что составная фундаментальная матрица является по определению неособенной.

Для определения постоянных c через отклонения по положению и скорости, известные в некоторый момент времени t , можно использовать непосредственно интегралы (5.4.2).

В случае, когда известны только отклонения по положению в моменты времени t_0 и t_K , постоянные определяются из уравнения

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_K \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_K \end{pmatrix}.$$

С помощью соотношений (5.4.1), (5.4.2) и (5.4.3) нетрудно показать, что решение этого уравнения имеет вид

$$c = Q_K (F_0 Q_K)^{-1} r_0 + Q_0 (F_K Q_0)^{-1} r_K, \quad (5.4.4)$$

т. е. операция обращения матрицы шестого порядка свелась к обращению двух матриц третьего порядка.

В случае кеплеровых опорных орбит матрицы размера 6×3

$$F_{0K} = Q_K (F_0 Q_K)^{-1}, \quad F_{K0} = Q_0 (F_K Q_0)^{-1}, \quad (5.4.5)$$

стоящие соответственно при векторах r_0 и r_K , могут быть определены в явном виде. Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \theta_K - \theta_0, \quad \sigma = 3(\Theta_K - \Theta_0)\lambda_0\lambda_K, \quad \gamma = \lambda_0\lambda_K \sin \varphi, \\ \alpha_0 &= 3\Theta_0\lambda_0^2, \quad \alpha_K = 3\Theta_K\lambda_K^2, \\ \beta_0 &= 2 - 3\Theta_0\varepsilon_0\lambda_0, \quad \beta_K = 2 - 3\Theta_K\varepsilon_K\lambda_K, \\ \gamma_0 &= \lambda_0[1 + \lambda_0 - (1 + \lambda_K)\cos \varphi], \\ &\quad \gamma_K = \lambda_K[1 + \lambda_K - (1 + \lambda_0)\cos \varphi], \\ d &= \beta_0\gamma_K + \beta_K\gamma_0 - (\alpha_K - \alpha_0)\gamma = \\ &\quad = 2(\gamma_0 + \gamma_K) - \sigma[\sin \varphi + (1 + \lambda_0)\varepsilon_K - \\ &\quad \quad - (1 + \lambda_K)\varepsilon_0]. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.6)$$

Тогда применительно к переменным (5.3.4) ненулевые элементы матрицы

$$F_{0K} = \| f_{ij}^{0K} \|, \quad i = 6, \quad j = 3$$

можно выразить в виде

$$\begin{aligned}
 f_{11}^{0K} &= \frac{1}{d} [(1 + \lambda_K) (\lambda_K \beta_0 - \lambda_0 \beta_K \cos \varphi - \alpha_K \gamma)], \\
 f_{12}^{0K} &= -\frac{1}{d} \{ \lambda_K [(1 + \lambda_K) \alpha_0 - (1 + \lambda_0) \alpha_K \cos \varphi] - \\
 &\quad - \beta_K (1 + \lambda_0) (1 + \lambda_K) \sin \varphi \}, \\
 f_{21}^{0K} &= \frac{1}{d} \gamma, \quad f_{22}^{0K} = \frac{1}{d} \gamma_K, \\
 f_{33}^{0K} &= \frac{\sin \theta_K}{\sin \varphi}, \quad f_{36}^{0K} = -\frac{\cos \theta_K}{\sin \varphi}, \\
 f_{41}^{0K} &= \frac{1}{d} (\beta_K \lambda_0 \sin \theta_0 - \beta_0 \lambda_K \cos \theta_0), \\
 f_{42}^{0K} &= \frac{1}{d} \{ \beta_K [(1 + \lambda_0) \cos \theta_0 - (1 + \lambda_K) \cos \theta_K] - \\
 &\quad - (\alpha_K - \alpha_0) \lambda_K \sin \theta_K \}, \\
 f_{51}^{0K} &= \frac{1}{d} (\beta_0 \lambda_K \cos \theta_K - \beta_K \lambda_0 \cos \theta_0), \\
 f_{52}^{0K} &= -\frac{1}{d} \{ \beta_K [(1 + \lambda_K) \sin \theta_K - (1 + \lambda_0) \sin \theta_0] - \\
 &\quad - (\alpha_K - \alpha_0) \lambda_K \cos \theta_K \}.
 \end{aligned}$$

Выражения для элементов матрицы F_{K0} симметричны выражениям для элементов матрицы F_{0K} и могут быть получены из них перестановкой индексов «0» и «K», в том числе и в соотношениях (5.4.6).

Если в два момента времени известны отклонения по скорости, то постоянные интегрирования находятся из уравнения

$$\begin{pmatrix} G_0 \\ G_K \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_K \end{pmatrix},$$

если только составная матрица неособенная, как это имеет место в случае некруговых опорных орбит. Тогда справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (5.4.5):

$$c = P_K (G_0 P_K)^{-1} v_0 + P_0 (G_K P_0)^{-1} v_K.$$

Выше были рассмотрены решения однородных уравнений в вариациях, т. е. при отсутствии управляющего ускорения a . При наличии управляющих воздействий

решения можно получить методом вариации произвольных постоянных интегрирования. Применение этого метода в случае конечной тяги дает

$$\dot{c} = Qa. \quad (5.4.7)$$

В случае импульсной тяги, интегрируя это уравнение и переходя к бесконечно большому ускорению, действующему в течение бесконечно малого времени, можно получить выражение для приращения констант в результате приращения скорости:

$$\Delta c = Q\Delta v. \quad (5.4.8)$$

Поскольку при импульсной тяге меняется скачком только скорость, а положение аппарата не меняется, то последнее соотношение следует также непосредственно и из уравнения (5.4.2).

Рассмотрим теперь решение сопряженных уравнений и его связь с решением уравнений в вариациях.

Введем трехмерные векторы λ_r и λ_v , сопряженные соответственно с векторами r и v . Тогда согласно определению сопряженные, или присоединенные, уравнения будут иметь вид

$$\dot{\lambda}_r = -A^T \lambda_v, \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_r - B^T \lambda_v.$$

В соответствии с общей теорией линейных дифференциальных уравнений [39] при известном интеграле уравнений в вариациях (5.4.2) общее решение сопряженных уравнений записывается в виде

$$\lambda_r = P^T k, \quad \lambda_v = Q^T k,$$

где k — вектор произвольных постоянных интегрирования. Соответствующий интеграл, выражающий постоянный вектор k через текущие значения λ_r и λ_v , имеет вид

$$k = F^T \lambda_r + G^T \lambda_v.$$

Заметим, что существует общее соотношение (первый интеграл) уравнений в вариациях и сопряженных с ними уравнений

$$\lambda_r \cdot r + \lambda_v \cdot v = k \cdot c.$$

В теории оптимального управления полетом космических аппаратов особое значение имеет вектор λ_v , со-

пряженный с вектором скорости v . Этот вектор, называемый *базисом-вектором*, или *ведущим вектором*, позволяет определять величину и направление оптимальных управляющих воздействий в различной постановке задачи оптимального управления [47, 57, 59]. В связи с этим представляет интерес выразить вектор произвольных постоянных интегрирования k и, следовательно, общее решение для λ_c через значения базиса-вектора λ_{v0} и λ_{vk} , известные в моменты времени t_0 и t_k . С помощью основных уравнений (5.4.3) можно показать, что искомое выражение имеет вид

$$k^T = \lambda_{r0}^T (F_k Q_0)^{-1} F_k + \lambda_{vk}^T (F_0 Q_k)^{-1} F_0. \quad (5.4.9)$$

Покажем теперь связь переходной матрицы Ψ с матрицами общих решений F , G и P , Q . Пусть переходная матрица Ψ_{k0} определяет относительные положение и скорость в момент времени t_k через положение и скорость, заданные в начальный момент времени t_0 , т. е.

$$\begin{pmatrix} r_k \\ v_k \end{pmatrix} = \Psi_{k0} \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Разобьем матрицу шестого порядка Ψ_{k0} на четыре подматрицы третьего порядка:

$$\Psi_{k0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_k}{\partial r_0} & \frac{\partial r_k}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v_k}{\partial r_0} & \frac{\partial v_k}{\partial v_0} \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя соотношения (5.4.1) и (5.4.2), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_k}{\partial r_0} &= F_k P_0, & \frac{\partial r_k}{\partial v_0} &= F_k Q_0, \\ \frac{\partial v_k}{\partial r_0} &= G_k P_0, & \frac{\partial v_k}{\partial v_0} &= G_k Q_0. \end{aligned}$$

Таким образом, переходная матрица, если она нужна, может быть получена перемножением основных матриц F , G и P , Q , вычисленных для соответствующих моментов времени.

В случае кеплеровых опорных орбит аналитические выражения для элементов переходной матрицы можно

представить в общей форме, пригодной при любых значениях эксцентриситета, если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 3\Theta\lambda^2 - 2\lambda_0 \frac{\partial\theta}{\partial c} - s \frac{\partial\theta}{\partial s}, \\ \sigma_2 &= 6\Theta\lambda^2 - 3\lambda_0 \frac{\partial\theta}{\partial c} - 3s \frac{\partial\theta}{\partial s}, \\ \sigma_3 &= \lambda_0 \frac{\partial\theta}{\partial s},\end{aligned}$$

где частные производные $\partial\theta/\partial c$ и $\partial\theta/\partial s$ определены в соответствии с (5.2.7). Тогда применительно к безразмерным переменным (5.3.4) ненулевые элементы переходной матрицы

$$\Psi = \|\psi_{ij}\|, \quad i, j = 6 \quad (5.4.10)$$

записываются в виде

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= 1, \quad \psi_{12} = \sigma_2, \quad \psi_{14} = -\sigma_1, \quad \psi_{15} = -\sigma_3, \\ \psi_{22} &= 1 + \frac{1}{\lambda} [3(1 - \cos \theta) - \varepsilon \sigma_2], \quad \psi_{33} = \cos \theta, \\ \psi_{24} &= -\frac{1}{\lambda} [2(1 - \cos \theta) - s \sin \theta - \varepsilon \sigma_1], \\ \psi_{25} &= \frac{1}{\lambda} (\lambda_0 \sin \theta + \varepsilon \sigma_3), \quad \psi_{36} = \sin \theta, \\ \psi_{42} &= \frac{2}{\lambda} [3(1 - \cos \theta) - \varepsilon \sigma_2], \quad \psi_{63} = -\sin \theta, \\ \psi_{44} &= 1 - \frac{2}{\lambda} [2(1 - \cos \theta) - s \sin \theta - \varepsilon \sigma_1], \\ \psi_{45} &= \frac{2}{\lambda} (\lambda_0 \sin \theta + \varepsilon \sigma_3), \quad \psi_{66} = \cos \theta, \\ \psi_{52} &= \frac{1}{\lambda^2} \{3[\lambda \sin \theta - \varepsilon(1 - \cos \theta)] - [(\lambda - 1)\lambda - \varepsilon^2] \sigma_2\}, \\ \psi_{54} &= \frac{1}{\lambda^2} \{(1 + \lambda_0 + \varepsilon^2 \cos \theta - 4\lambda) \sin \theta - 2s(1 - \cos \theta) + \\ &\quad + [(\lambda - 1)\lambda - \varepsilon^2] \sigma_2\}, \\ \psi_{55} &= \frac{1}{\lambda^2} \{\lambda_0(\lambda \cos \theta - \varepsilon \sin \theta) + [(\lambda - 1)\lambda - \varepsilon^2] \sigma_3\}.\end{aligned}$$

Заметим, что в случае необходимости представленная выше переходная матрица и общие решения уравнений в вариациях в орбитальной системе координат могут быть

выражены через универсальные переменные. Сопоставляя выражения для одних и тех же функций через угол перехода θ и через универсальные переменные, находим

$$1 - \cos \theta = \frac{L}{p} \lambda_0 \lambda f_2, \quad \sin \theta = \left(\frac{L}{p} \right)^{\frac{3}{2}} \lambda_0 \lambda (\tau - f_3),$$

$$f_0 = 1 - \frac{(1 - e^2)(1 - \cos \theta)}{\lambda \lambda_0},$$

$$f_1 = \left(\frac{p}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_0 \sin \theta - s(1 - \cos \theta)}{\lambda \lambda_0},$$

$$f_2 = \frac{p}{L} \frac{1 - \cos \theta}{\lambda \lambda_0}, \quad f_3 = \left(\frac{p}{L} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\Theta - \frac{\sin \theta}{\lambda \lambda_0} \right),$$

$$\sin \theta + \sigma_1 = \lambda^2 \lambda_0^2 (\tau f_2 + \psi f_4 - 3f_5).$$

Если сравнить между собой все представленные выше решения уравнений в вариациях, то можно заключить, что более универсальными и удобными, хотя и менее употребительными, чем переходные матрицы, являются фундаментальные матрицы, связанные с той или иной полной системой произвольных постоянных интегрирования. Основные преимущества подобных решений по сравнению с решениями, выраженными через начальные условия, следующие:

произвольные постоянные более просто определяются через любые физически возможные граничные условия, чем отклонения по положению и скорости, приведенные к некоторому моменту времени;

элементы фундаментальных матриц зависят только от текущего времени, тогда как элементы переходных матриц зависят также и от начального времени;

выражения для составляющих общего решения менее сложны и громоздки, чем выражения для элементов переходных матриц;

произвольные постоянные связаны непосредственно с вариациями элементов, определяющих невозмущенную опорную орбиту.

§ 5.5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Задача решения уравнений относительного движения с учетом членов второго порядка малости рассматривалась в работах [83, 95, 109], где представлены конечные расчетные формулы для случаев нулевых и малых значений эксцентриситета опорной орбиты. Общее решение для опорных орбит произвольного эксцентриситета получено в работе [32] с помощью метода вариаций опорного движения, который позволяет в принципе находить аналитические решения и с учетом членов более высокого порядка.

Пусть первое приближение ξ_1, η_1, ζ_1 определено в соответствии с уравнениями (5.3.4). Тогда второе приближение ξ_2, η_2, ζ_2 , определяемое согласно (5.2.1), можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + \xi_1 \eta_1 + \frac{1}{2} \zeta_1 \zeta_1' - \frac{1}{2} \delta^2 \theta, \\ \eta_2 &= \eta_1 - \frac{1}{2} \xi_1^2 - \frac{1}{2} \zeta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 R}{R}, \\ \zeta_2 &= \zeta_1 - \xi_1 \zeta_1' + \eta_1 \zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.1)$$

Таким образом, если использовать аналитические зависимости (5.3.2), (5.3.5) для линейного приближения, то для получения аналитического решения в квадратичном приближении остается, казалось бы, только выразить в явном виде вариации $\delta^2 \theta$ и $\delta^2 R$ через произвольные постоянные интегрирования (5.3.3) или (5.3.6). Однако квадратичную часть решения представить через эти постоянные в единой форме невозможно. Это связано с тем, что шесть постоянных интегрирования зависят от семи независимых величин $\mathcal{Q}, \varepsilon_a, i, \delta p, \delta c, \delta s, \delta t_0$, выражающих вариацию опорной орбиты, и последние нельзя определить через первые, если только не наложить какого-либо дополнительного ограничения на начало отсчета полярного угла θ .

На практике начало отсчета угла θ удобно задавать либо некоторой характерной точкой орбиты, такой как перигентр или узел, либо фиксированным моментом времени. В первом случае имеет место равенство $s \delta c = c \delta s$ ($\delta \theta_0 = 0$), во втором — равенство $\delta t_0 = 0$.

Рассмотрим подробнее случай, когда в качестве полярного угла используется истинная аномалия. Тогда $c = e$,

$s = \delta s = 0$ и из уравнений (5.3.3) имеем

$$\frac{\delta p}{2p} = c_2 + e c_4, \quad \delta e = -(1 - e^2) c_4, \quad \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0 = -\frac{1}{e} c_5.$$

Подстановка этих выражений в формулы для вторых вариаций (5.2.6) с учетом (5.2.9), (5.2.10) при $s = 0$ и $e \neq 1$ приводит к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \vartheta &= \frac{3}{2} c_2^2 \Theta \lambda^2 (5 - 6\Theta e \lambda) + \\ &\quad + 3c_2 c_4 \Theta \lambda^2 (2\lambda \cos \vartheta + e) - \\ &\quad - \frac{3}{e} c_2 c_5 \lambda^2 (1 - 2\Theta e \lambda) - \frac{1}{e} c_4 c_5 \lambda^2 (2\lambda \cos \vartheta - e) - \\ &\quad - \frac{1}{e} c_5^2 \lambda^3 \sin \vartheta + c_4^2 [\lambda (1 + \lambda) \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\cos \vartheta + 2e) \sin \vartheta - 3(1 - e^2) \Theta \lambda^2], \\ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 R}{R} &= \frac{3}{2} c_2^2 \Theta \lambda [e + 3\Theta (\lambda - 1) \lambda^2] + \\ &\quad + c_2 c_4 (2\lambda \cos \vartheta - 4e + 6e\Theta e \lambda + 3\Theta \lambda^3 \sin \vartheta) - \\ &\quad - c_2 c_4 (\lambda \sin \vartheta + 3\Theta \lambda^3 \cos \vartheta) - \frac{1}{e} c_4 c_5 \lambda^3 \sin \vartheta + \\ &\quad + \frac{1}{2e} c_5^2 \cos \vartheta + \frac{1}{2} c_4^2 [\lambda (1 + \lambda) \sin^2 \vartheta + \\ &\quad + (1 - e^2) (2 - 3\Theta e \lambda)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.2)$$

В случае параболической опорной орбиты уравнения (5.3.6) дают

$$\frac{\delta p}{2p} = c_2 + c_4, \quad \delta e = \frac{5}{2} c_2, \quad \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0 = -c_5,$$

и аналогичные соотношения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \vartheta &= \frac{1}{2} c_2^2 \left(5 \frac{1 + \lambda}{\lambda} + \frac{53}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^3} \right) \sin \vartheta + \\ &\quad + c_2 c_4 \left(3 + 2\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \sin \vartheta - c_2 c_5 \lambda + \frac{1}{2} c_4^2 (2\lambda^3 - \\ &\quad - \cos \vartheta) \sin \vartheta + c_4 c_5 \lambda^2 (1 - 2\lambda \cos \vartheta) - c_5^2 \lambda^3 \sin \vartheta, \\ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 R}{R} &= -\frac{1}{2} c_2^2 \left(5 \cos \vartheta + \frac{8}{\lambda} + \frac{15}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^3} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} c_2 c_4 \left[(3\lambda - 2) \cos \vartheta + \frac{2}{\lambda} \right] + \frac{1}{2} c_2 c_5 (2 + \lambda) \sin \vartheta + \\ &\quad + \frac{1}{2} c_4^2 \lambda (1 + \lambda) \sin^2 \vartheta - c_4 c_5 \lambda^3 \sin \vartheta + \frac{1}{2} c_5^2 \lambda^3 \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Заметим, что при $e = 0$ общее решение, вытекающее из (5.5.2), становится недействительным, так как в нем будут члены, обратно пропорциональные эксцентриситету. Чтобы распространить решение на случай круговых опорных орбит, когда положение перицентра не определено, полярный угол θ следует отсчитывать от другой характерной точки орбиты, например от восходящего узла. Однако можно показать, что тогда появится особенность при нулевом наклонении i . Поэтому удобнее измерять полярный угол θ от точки, соответствующей фиксированному начальному времени.

При $\delta t_0 = 0$ уравнения (5.3.3) дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta p}{2p} &= c_2 + cc_4 - sc_5, \\ \delta c &= -(1 - c^2)c_4 - 2s\lambda_0 c_5, \\ \delta s &= csc_4 - (\lambda_0^2 - s^2)c_5. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.3)$$

Окончательные формулы, получающиеся после подстановки (5.5.3) в (5.2.6) с учетом (5.2.9) и (5.2.10), довольно громоздки. Поэтому приведем лишь соотношения, которые получаются в случае круговой опорной орбиты ($c = s = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \theta &= \frac{15}{2} c_2^2 \theta + 6c_2 c_4 \theta \cos \theta + 6c_2 c_5 \theta \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{2} c_4^2 (5 \sin \theta \cos \theta - 3\theta) + c_4 c_5 (1 - \cos \theta) (1 + 5 \cos \theta) + \\ &+ \frac{1}{2} c_5^2 (8 \sin \theta - 5 \sin \theta \cos \theta - 3\theta), \\ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 R}{R} &= c_2 c_4 (2 \cos \theta + 3\theta \sin \theta) + c_2 c_5 (2 \sin \theta - 3\theta \cos \theta) + \\ &+ c_4^2 (1 + \sin^2 \theta) + 2c_4 c_5 (1 - \cos \theta) \sin \theta + c_5^2 (1 - \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования, входящие в общие решения уравнений второго приближения, определяются в каждом конкретном случае из соответствующих граничных условий, причем для вычисления этих констант нужно использовать какой-либо итерационный метод решения нелинейных алгебраических уравнений, например метод Ньютона. В качестве начального приближения, обеспечивающего сходимость процесса итерации, можно выбирать значения постоянных, даваемые линейной теорией.

В некоторых случаях можно учитывать приращения постоянных только первого или второго порядка малости, для которых нетрудно получить аналитические выражения.

Когда постоянные интегрирования определяются из начальных условий, в процессе итераций наряду с выражениями для координат (5.5.1) должны участвовать выражения для составляющих относительной скорости. Если в два различных момента времени известны отклонения по положению, то необходимо итерировать только уравнения для координат, записанные для этих моментов.

Очевидно, что решение уравнений относительного движения во втором приближении можно найти также и через начальные условия. Переходная матрица второго порядка, элементы которой представляют собой вторые частные производные от текущих параметров движения по их начальным значениям, была получена в работе [77]. Как и в линейном приближении, выражения для элементов переходной матрицы второго порядка имеют более сложный вид по сравнению с составляющими решения, выраженного через произвольные постоянные интегрирования.

§ 5.6. ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Как уже отмечалось, уравнения относительного движения космических аппаратов, точные в рамках модели центрального поля тяготения, имеют на пассивных участках аналитическое решение, вытекающее из интегралов кеплерова движения. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выразить это решение в наиболее простой и удобной для использования форме. Ниже дается одно из возможных представлений общего решения уравнений относительного движения, предложенное в работе [34].

Последовательность вывода полного интеграла точных уравнений свободного относительного движения (5.1.3) или (5.1.6) при $a_x = a_y = a_z = 0$ может быть такой. Сначала выражаются параметры абсолютного движения управляемого аппарата через параметры абсолютного движения цели и параметры относительного движения. Затем выписываются конечные интегралы кеплерова движения управляемого аппарата, которые преобразуются к разностной форме. И, наконец, находится ин-

теграл, выражающий в явном виде зависимость параметров относительного движения от времени.

Для наглядности в качестве абсолютной удобно использовать планетоцентрическую систему координат XYZ ,

плоскость XY которой совпадает с плоскостью орбиты цели, а ось X направлена по линии относительных узлов в сторону восходящего узла.

Положение цели на своей орбите задается углом $\theta_{ц}$, который отсчитывается от начальной точки орбиты, отстоящей от оси X на угол $\epsilon_{ц}$. При этом размеры и форму опорной орбиты можно определять постоянной площадью $K_{ц}$ и элементами $c_{ц}$ и $s_{ц}$. Аналогичные параметры управляемого аппарата будем обозначать теми же самыми

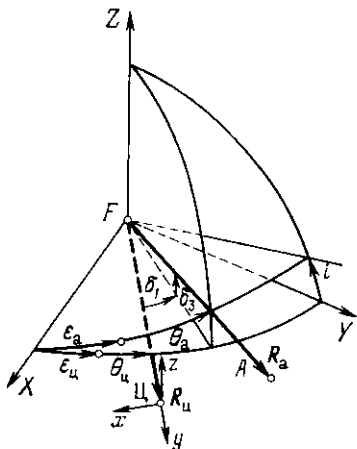


Рис. 5.3.

буквами с нижним индексом «а». Взаимное наклонение орбит обозначим через i (рис. 5.3).

В соответствии с намеченной выше процедурой вывода решения из интегралов площадей (4.1.1) и интегралов Лапласа (4.1.2) нетрудно получить следующие конечные интегралы уравнений относительного движения:

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \sqrt{x^2 + (R_{ц} + y)^2 + z^2} = \frac{K_{ц}^2 (1 + c_2)^2}{\mu (1 + c_3^2 + c_6^2)} - \\ &\quad - (R_{ц} + y) (c_4 \cos \theta_{ц} - c_5 \sin \theta_{ц}) - \\ &\quad - x (c_4 \sin \theta_{ц} + c_5 \cos \theta_{ц}), \\ z &= (R_{ц} + y) (c_3 \cos \theta_{ц} + c_6 \sin \theta_{ц}) + \\ &\quad + x (c_3 \sin \theta_{ц} - c_6 \cos \theta_{ц}), \\ x &= \theta_{ц} (R_{ц} + y) + \frac{\mu}{K_{ц} (1 + c_2)} \left[-c_4 \cos \theta_{ц} + \right. \\ &\quad \left. + c_5 \sin \theta_{ц} - \frac{(R_{ц} + y) + z (c_3 \cos \theta_{ц} + c_6 \sin \theta_{ц})}{R_a} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -\dot{R}_{0\text{ц}} - \dot{\theta}_{0\text{ц}} x + \frac{\mu}{K_{\text{ц}}(1+c_2)} \left[c_4 \sin \theta_{0\text{ц}} + c_5 \cos \theta_{0\text{ц}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x+z(c_3 \sin \theta_{0\text{ц}} - c_6 \cos \theta_{0\text{ц}})}{R_{\text{а}}} \right], \\ \dot{z} &= \frac{\mu}{K_{\text{ц}}(1+c_2)} \left[c_3 c_5 + c_4 c_6 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(R_{0\text{ц}} + y)(c_3 \sin \theta_{0\text{ц}} - c_6 \cos \theta_{0\text{ц}}) - x(c_3 \cos \theta_{0\text{ц}} + c_6 \sin \theta_{0\text{ц}})}{R_{\text{а}}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.1)$$

Здесь c_i ($i = 2, \dots, 6$) — безразмерные постоянные интегрирования, которые определяются через параметры орбитального движения в виде

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{K_{\text{а}} - K_{\text{ц}} \cos i}{K_{\text{ц}} \cos i}, \quad c_3 = \sin \varepsilon_{\text{ц}} \operatorname{tg} i, \\ c_4 &= e_{\text{аХ}} \cos \varepsilon_{\text{ц}} + \frac{e_{\text{аY}}}{\cos i} \sin \varepsilon_{\text{ц}}, \\ c_5 &= e_{\text{аХ}} \sin \varepsilon_{\text{ц}} - \frac{e_{\text{аY}}}{\cos i} \cos \varepsilon_{\text{ц}}, \quad c_6 = \cos \varepsilon_{\text{ц}} \operatorname{tg} i, \end{aligned}$$

где $\mu e_{\text{аХ}}$ и $\mu e_{\text{аY}}$ — проекции вектора Лапласа управляемого аппарата на оси X и Y , и выражаются в зависимости от начальных условий относительного движения, соответствующих значению $\theta_{0\text{ц}} = 0$, формулами

$$\left. \begin{aligned} K_z &= x_0(\dot{R}_{0\text{ц}} + \dot{y}_0 + \dot{\theta}_{0\text{ц}} x_0) - \\ &\quad - (R_{0\text{ц}} + y_0)[\dot{x}_0 - \dot{\theta}_{0\text{ц}}(R_{0\text{ц}} + y_0)], \\ c_3 &= \frac{x_0 \dot{z}_0 - z_0[\dot{x}_0 - \dot{\theta}_{0\text{ц}}(R_{0\text{ц}} + y_0)]}{K_z}, \\ c_6 &= \frac{(R_{0\text{ц}} + y_0) \dot{z}_0 - z_0(\dot{R}_{0\text{ц}} + \dot{y}_0 + \dot{\theta}_{0\text{ц}} x_0)}{K_z}, \\ K_{\text{ц}}(1+c_2) &= (1+c_3^2+c_6^2)K_z, \\ c_4 &= -\frac{K_{\text{ц}}(1+c_2)}{\mu} [\dot{x}_0 - \dot{\theta}_{0\text{ц}}(R_{0\text{ц}} + y_0)] - \\ &\quad - \frac{R_{0\text{ц}} + y_0 + z_0 c_3}{R_{\text{а0}}}, \\ c_5 &= \frac{K_{\text{ц}}(1+c_2)}{\mu} (\dot{R}_{0\text{ц}} + \dot{y}_0 + \dot{\theta}_{0\text{ц}} x_0) - \frac{x_0 - z_0 c_6}{R_{\text{а0}}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.2)$$

Отметим некоторые особенности интегралов уравнений относительного движения в форме (5.6.1). Прежде всего параметры движения по нормали к плоскости опорной орбиты выражены через параметры движения в плоскости этой орбиты. Это означает, что две составляющие относительного движения разделяются, как в линейном приближении, хотя и не полностью. Далее, нетрудно видеть, что задача интегрирования системы дифференциальных уравнений шестого порядка свелась, по сути дела, к задаче интегрирования системы второго порядка относительно переменных x и y , через которые выражены остальные переменные состояния. Если использовать два соотношения для R_a , то одну из переменных x или y можно было бы исключить и прийти к единственному дифференциальному уравнению. Однако это уравнение будет содержать неопределенности. Поэтому в такой формулировке интегрировать численно целесообразно не одно, а два дифференциальных уравнения. Соотношения для R_a могут служить для контроля за точностью численного интегрирования.

Покажем, что свести решение уравнений относительного движения к одной квадратуре возможно, если ввести дополнительно некоторую угловую координату. Такой координатой может быть, в частности, угол, отсчитываемый от некоторой фиксированной линии в плоскости опорной орбиты до проекции на эту плоскость радиуса-вектора управляемого аппарата. Нетрудно видеть, что определение подобного угла тесно связано с определением сферических и цилиндрических относительных координат. Следовательно, чтобы получить требуемую квадратуру, нужно перейти от декартовых к криволинейным координатам.

Рассмотрим в качестве примера использование сферических координат, которые связаны с декартовыми координатами соотношениями (см. рис. 5.3)

$$\left. \begin{aligned} x &= R_a \sin \delta_1 \cos \delta_3, \\ y &= R_a \cos \delta_1 \cos \delta_3 - R_{ц}, \\ z &= R_a \sin \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.6.3)$$

где $-180^\circ \leq \delta_1 \leq 180^\circ$ и $-90^\circ \leq \delta_3 \leq 90^\circ$.

Введем дополнительную переменную — полярный угол

$$\psi = \theta_{11} - \delta_1.$$

Теперь первые интегралы уравнений относительного движения (5.6.1) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= \frac{p_{11}}{1 + (c_4 \cos \psi - c_5 \sin \psi) \cos \delta_3}, \\ \lg \delta_3 &= c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi, \\ R_{11} \dot{\psi} &= \frac{\mu}{K_{11}(1 + c_2) \cos^2 \delta_3} \times \\ &\quad \times [1 + (c_4 \cos \psi - c_5 \sin \psi) \cos \delta_3], \\ \dot{R}_{11} &= \frac{\mu}{K_{11}(1 + c_2)} [(c_4 c_6 + c_5 c_3) \sin \delta_3 + \\ &\quad + (c_4 \sin \psi + c_5 \cos \psi) \cos \delta_3] \\ R_{11} \dot{\delta}_3 &= \frac{\mu}{K_{11}(1 + c_2)} [(c_4 c_6 + c_5 c_3) \cos \delta_3 - \\ &\quad - (c_4 \sin \psi + c_5 \cos \psi) \sin \delta_3 - c_3 \sin \psi + c_6 \cos \psi], \end{aligned} \right\} \quad (5.6.4)$$

где p_{11} — фокальный параметр орбиты управляемого аппарата, определяемый через константы относительного движения следующим образом:

$$p_{11} = \frac{K_{11}^2 (1 + c_2)^2}{\mu (1 + c_3^2 + c_6^2)}.$$

Отсюда для производной от угла ψ при $-90^\circ \leq \delta_3 \leq 90^\circ$ находим

$$\dot{\psi} = \sqrt{\frac{\mu}{p_{11}^3 (1 + c_3^2 + c_6^2)}} \Lambda^2, \quad (5.6.5)$$

где

$$\Lambda = \sqrt{1 + (c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi)^2} + c_4 \cos \psi - c_5 \sin \psi.$$

Интегрирование уравнения (5.6.5) завершает решение уравнений относительного движения. Это решение можно выразить и в виде квадратуры, которая устанавливает

связь между углом ψ и временем полета $t - t_0$:

$$\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\Lambda^3} = \sqrt{\frac{\mu}{p_a^3(1+c_3^2+c_6^2)}} (t - t_0), \quad (5.6.6)$$

где ψ_0 — начальное значение угла ψ , играющее роль постоянной c_1 .

В выражении через угол ψ декартовы относительные координаты и составляющие относительной скорости определяются из уравнений (5.6.3), (5.6.4) и (5.6.4) в явном виде таким образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p_a}{\Lambda} \sin(\theta_{II} - \psi), \\ y &= \frac{p_a}{\Lambda} \cos(\theta_{II} - \psi) - \frac{p_{II}}{\lambda_{II}}, \\ z &= \frac{p_a}{\Lambda} (c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi), \\ \dot{x} &= \frac{\mu p_a}{K_{II} p_{II}} \frac{\lambda_{II}^2}{\Lambda} \cos(\theta_{II} - \psi) + \\ &\quad + \frac{\mu}{K_{II}(1+c_2)} \left[-c_4 \cos \theta_{II} + c_5 \sin \theta_{II} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(\theta_{II} - \psi) + (c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi)(c_3 \cos \theta_{II} + c_6 \sin \theta_{II})}{\sqrt{1 + (c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi)^2}} \right], \\ \dot{y} &= -\frac{\mu p_a}{K_{II} p_{II}} \frac{\lambda_{II}^2}{\Lambda} \sin(\theta_{II} - \psi) - \frac{\mu}{K_{II}} \varepsilon_{II} + \\ &\quad + \frac{\mu}{K_{II}(1+c_2)} \left[c_4 \sin \theta_{II} + c_5 \cos \theta_{II} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\theta_{II} - \psi) + (c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi)(c_3 \sin \theta_{II} - c_6 \cos \theta_{II})}{\sqrt{1 + (c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi)^2}} \right], \\ \dot{z} &= \frac{\mu}{K_{II}(1+c_2)} \left[c_3 c_5 + c_4 c_6 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_3 \sin \psi - c_6 \cos \psi}{\sqrt{1 + (c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi)^2}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.6.7)$$

где λ_{II} и ε_{II} определены уравнениями (4.1.7).

Итак, чтобы вычислить параметры относительного движения для некоторого момента времени $t \neq t_0$, необходимо определить текущее значение угла ψ . Для этого нужно либо непосредственно проинтегрировать уравнение (5.6.5) от t до t_0 , либо разрешить квадратуру (5.6.6). Последнее можно выполнить, производя замену переменной, аналогичную замене разности истинных аномалий на разность эксцентрических аномалий или ее аналогов, и решая соответствующее уравнение Кеплера. При этих вычислениях промежуточным этапом может быть определение угла ψ через центральный полярный угол θ_a .

Требуемые расчетные формулы для нахождения тригонометрических функций от угла ψ через тригонометрические функции от угла θ_a нетрудно вывести из геометрических и динамических соотношений. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\cos(\psi - \psi_0) = \frac{c_t}{\sqrt{c_t^2 + s_t^2}}, \quad \sin(\psi - \psi_0) = \frac{s_t}{\sqrt{c_t^2 + s_t^2}},$$

где

$$\begin{aligned} c_t &= \sqrt{1 + c_3^2 + c_6^2} \cos \theta_a + \\ &+ (c_3 \cos \psi_0 + c_6 \sin \psi_0) (c_3 \sin \psi_0 - c_6 \cos \psi_0) \sin \theta_a, \\ s_t &= [1 + (c_3 \cos \psi_0 + c_6 \sin \psi_0)^2] \sin \theta_a, \end{aligned}$$

и начальное значение ψ_0 угла ψ определяется в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned} \cos \psi_0 &= \frac{R_{0\Omega} + y_0}{\sqrt{(R_{0\Omega} + y_0)^2 + x_0^2}}, \\ \sin \psi_0 &= - \frac{x_0}{\sqrt{(R_{0\Omega} + y_0)^2 + x_0^2}}. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что если спутники обращаются по близким орбитам, то постоянные интегрирования s_i будут малы по сравнению с единицей. Учитывая члены соответствующих порядков малости по этим постоянным и относительным координатам по сравнению с расстоянием до центра притяжения $R_{0\Omega}$, из представленного выше решения можно получить соотношения, дающие приближенные решения того или иного порядка.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 6.1. РЕШЕНИЕ ДВУХИМПУЛЬСНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В предположении центрального поля тяготения и двухимпульсного маневра сближения задача определения управляющих воздействий, обеспечивающих встречу, допускает в орбитальной системе координат решения в виде конечных соотношений независимо от точности исходных уравнений относительного движения. При этом, естественно, наиболее простые, но и наименее точные формулы для расчета корректирующих импульсов соответствуют линейной теории относительного движения.

В линейной постановке аналитические выражения могут быть найдены не только для разовой полной коррекции промаха, составляющей основу метода свободных траекторий, но и для некоторых многоимпульсных коррекций, в частности коррекций с заданным направлением, а также сформулированы методы асимптотического торможения, предназначенные для уменьшения величины относительной скорости с уменьшением дальности до цели с учетом разностного гравитационного ускорения. Кроме того, метод свободных траекторий, как и другие методы импульсных коррекций, может быть реализован непосредственно в визирной (лучевой) системе координат без приборного построения орбитального базиса на борту управляемого космического аппарата.

Все указанные методы коррекции, отличные от двухимпульсного и базирующиеся на линейной теории, могут быть обобщены и на нелинейную динамику относительного движения. Однако в нелинейной постановке конечные соотношения для управляющих воздействий получить затруднительно и задачи управления должны решаться численно.

При формулировке задач управления на основе линейаризованных уравнений относительного движения ус-

ловия встречи удобно выразить в явном виде через управляющие воздействия и постоянные интегрирования, определяющие движение до начала управления.

В соответствии с общей формой (5.3.2) решения линеаризованных уравнений условия встречи (2.5.2) в относительной системе координат можно записать в виде

$$r_k = F_k c_k = 0, \quad v_k = G_k c_k = 0, \quad (6.1.1)$$

где c_k — конечные значения переменных c , которые постоянны на пассивных участках и меняются в зависимости от управляющих воздействий на активных участках. Столбцы и строки фундаментальной матрицы Φ , составленной из матриц F и G , линейно независимы при любых значениях времени $t \geq t_0$. Следовательно, для выполнения условий (6.1.1) необходимо и достаточно, чтобы в результате управления все переменные c принимали к конечному времени t_k нулевые значения. Тогда, используя зависимости (5.4.7) и (5.4.8), находим

$$c_k = c_0 + \int_{t_0}^{t_k} Q a dt = 0$$

в случае конечной тяги и

$$c_k = c_0 + \sum_{i=1}^n Q_i \Delta v_i = 0 \quad (6.1.2)$$

в случае импульсной тяги, где n — общее число импульсов.

При заданных начальных условиях c_0 можно однозначно определить управления a или Δv_i из условий встречи, приведенных к виду $c_k = 0$, если число параметров, характеризующих эти управления при заданных ограничениях, не превышает размерности вектора c_k . В противном случае существует бесконечное множество допустимых управлений, удовлетворяющих условиям встречи, и среди них можно выбрать такие, которые будут в том или ином смысле оптимальными. Пока ограничимся рассмотрением в основном импульсных управлений, которые могут быть получены из определяющих уравнений без привлечения дополнительных условий оптимизации.

В общем случае уравнения (6.1.2) образуют систему алгебраических уравнений шестого порядка относитель-

но $4n$ неизвестных: моментов приложения t_i импульсов Δv_i и их трех составляющих $\Delta v_{xi}, \Delta v_{yi}, \Delta v_{zi}$ ($i = 1, \dots, n$). Возможны различные комбинации ограничений на число импульсов, их величины, направления и моменты приложения, которые позволяют решить задачу и приводят к различным методам коррекции. Однако наиболее простой является двухимпульсная задача управления, которая составляет основу метода свободных траекторий и в относительной системе координат формулируется следующим образом. Начальный импульс Δv_0 , прикладываемый в момент времени t_0 , определяется из условия попадания в цель, т. е. из условия полного устранения (без учета возмущений) промаха, прогнозируемого на расчетный момент времени t_k . Конечный импульс Δv_k , прикладываемый в момент времени t_k , определяется из условия уменьшения до нуля конечной относительной скорости и служит обычно для оценки расхода топлива на торможение, которое должно быть растянуто по времени.

Двухимпульсная задача допускает однозначное решение, если моменты начала t_0 и конца t_k маневра сближения фиксированы. Конечные формулы для расчета двухимпульсного маневра выводятся во многих работах в предположении, что опорная орбита является круговой. Для общего случая некруговых опорных орбит выражения для корректирующих импульсов получают обычно на основе переходной матрицы Ψ_{t_0} , вычисляемой для моментов времени t_0 и t_k . В результате расчетные формулы в явном виде получаются довольно громоздкими [89], так что в этом случае корректирующие импульсы предпочтительнее вычислять численным обращением матриц, составленных из блоков переходной матрицы.

Здесь вывод аналитических зависимостей для корректирующих импульсов следует работе [30] и основывается на использовании вместо координат и скоростей постоянных интегрирования, через которые условия встречи приведены к виду (6.1.2). Это позволяет упростить расчетные формулы по сравнению с известными [89] и получить достаточно простые исходные уравнения для определения поправок на конечную тягу, с помощью которой реализуются расчетные импульсные коррекции [31].

Будем считать, что $n = 2$ и моменты времени t_0 и t_k фиксированы. Тогда система определяющих уравнений

(6.1.2) становится замкнутой относительно импульсов Δv_0 , Δv_k и преобразуется к виду

$$Q_0 \Delta v_0 + Q_k \Delta v_k = (Q_0, Q_k) \begin{pmatrix} \Delta v_0 \\ \Delta v_k \end{pmatrix} = -c_0. \quad (6.1.3)$$

Как и в других подобных случаях, рассмотренных ранее, при решении уравнения (6.1.3) обращение матрицы шестого порядка, образованной матрицами Q_0 и Q_k , можно свести к обращению двух матриц третьего порядка. Для этого умножим (6.1.3) слева последовательно на F_k и F_0 и используем равенства $F_k Q_k = F_0 Q_0 = 0$, следующие из соотношений (5.4.3). В результате система уравнений шестого порядка разобьется на две независимые системы третьего порядка, решение которых определяется так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_0 &= -(F_k Q_0)^{-1} F_k c_0 = -(F_k Q_0)^{-1} r_k^0, \\ \Delta v_k &= -(F_0 Q_k)^{-1} F_0 c_0 = -(F_0 Q_k)^{-1} r_0, \end{aligned} \right\} \quad (6.1.4)$$

где r_0 — вектор начального отклонения по положению, а r_k^0 — вектор конечного отклонения, прогнозируемый на расчетный момент времени t_k при отсутствии управления.

Полученные соотношения показывают, что начальный импульс вычисляется через конечное положение, а конечный импульс — через начальное положение. Следовательно, мерой промахов могут служить величины разноименных импульсов и наоборот.

Нетрудно видеть, что выражение для начального импульса можно получить также и из условия перехвата:

$$r_k = F_k (c_0 + Q_0 \Delta v_0) = 0,$$

где r_k — промах после приложения импульса Δv_0 . Аналогичным образом конечный импульс можно определить из условия сведения к нулю конечной относительной скорости, получающейся в результате приложения начального импульса в момент времени непосредственно перед встречей, т. е.

$$\Delta v_k = -v_k = -G_k (c_0 + Q_0 \Delta v_0) = -(F_0 Q_k)^{-1} F_0 c_0.$$

Заметим, что потребная начальная скорость перехода v_{T_0} (которая определяется как начальная скорость, необходимая для достижения цели за время $T = t_k - t_0$ и равная относительной скорости непосредственно после

приложения импульса Δv_0) выражается не через конечное, а через начальное положение. Это легко показать с помощью соотношений (5.4.3):

$$\begin{aligned} v_{T0} &= v_0 + \Delta v_0 = [G_0 - (F_K Q_0)^{-1} F_K] c_0 = \\ &= - (F_K Q_0)^{-1} F_K P_0 F_0 c_0 = - (F_K Q_0)^{-1} F_K P_0 r_0. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Так же, как были выведены выражения для импульсов, обеспечивающих сведение к нулю конечного промаха, можно получить выражения для начальных импульсов, обеспечивающих сведение к нулю конечной скорости:

$$\Delta v_0 = - (G_K Q_0)^{-1} G_K c_0 = - (G_K Q_0)^{-1} v_K^0, \quad (6.1.6)$$

где вектор v_K^0 имеет смысл, аналогичный смыслу вектора r_K^0 . При этом вектор конечного промаха, определяющий дальность «зависания», выражается в виде

$$r_K = F_K [E - Q_0 (G_K Q_0)^{-1} G_K] c_0$$

и соответствующая потребная скорость вычисляется по формулам

$$v_{T0} = - (G_K Q_0)^{-1} G_K P_0 F_0 c_0 = - (G_K Q_0)^{-1} G_K P_0 r_0. \quad (6.1.7)$$

Полученные выше соотношения для корректирующих импульсов, выраженные через матрицы общих решений линеаризованных уравнений относительного движения, равным образом справедливы как в случае кеплеровых, так и в случае опорных орбит произвольного вида. При этом для фактического определения коррекций необходимо обратить матрицы, входящие в соответствующие формулы. Для кеплеровых опорных орбит эти обратные матрицы и, следовательно, матрицы, определяющие корректирующие импульсы, можно выразить в явном виде [30].

Определим входящие в соотношения (6.1.4) матрицы размера 3×6

$$\begin{aligned} U_0 &= \| u_{ij}^0 \| = - (F_K Q_0)^{-1} F_K, \\ U_K &= \| u_{ij}^K \| = - (F_0 Q_K)^{-1} F_0 \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

и для сокращения записи используем обозначения (5.4.6):

$$\begin{aligned} \varphi &= \theta_K - \theta_0, \quad \sigma = 3 (\Theta_K - \Theta_0) \lambda_0 \lambda_K, \quad \gamma = \lambda_0 \lambda_K \sin \varphi, \\ \gamma_0 &= \lambda_0 [1 + \lambda_0 - (1 + \lambda_K) \cos \varphi], \\ \gamma_K &= \lambda_K [1 + \lambda_K - (1 + \lambda_0) \cos \varphi], \\ d &= 2 (\gamma_0 + \gamma_K) - \sigma [\sin \varphi + (1 + \lambda_0) \varepsilon_K - (1 + \lambda_K) \varepsilon_0], \end{aligned}$$

где переменные Θ , θ , λ , ε определены для моментов времени t_0 и t_K в соответствии с уравнениями (5.2.4), (5.2.2) и (4.1.7). Тогда выражения для элементов матрицы U_0 , определяющей начальный импульс Δv_0 через константы второго рода (5.3.8), можно привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} u_{11}^0 &= -\frac{1}{d} \gamma, & u_{21}^0 &= -\frac{1}{d} \gamma_K, \\ u_{12}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \varepsilon_0 + 2\lambda_K - 2\lambda_0 \cos \varphi] (1 + \lambda_K) - 3\Theta_K \gamma, \\ u_{14}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \varepsilon_0 \cos \theta_K + 2(\lambda_K \cos \theta_K - \lambda_0 \cos \theta_0) + \\ &\quad + 3c\Theta_K \gamma], \\ u_{16}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \varepsilon_0 \sin \theta_K + 2(\lambda_K \sin \theta_K - \lambda_0 \sin \theta_0) - \\ &\quad - 3s\Theta_K \gamma], \\ u_{22}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \lambda_0 (1 + \lambda_K) - 2(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_K) \sin \varphi - \\ &\quad - 3\Theta_K \gamma_K], \\ u_{24}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \lambda_0 \cos \theta_K - 2(1 + \lambda_K) \sin \theta_K + \\ &\quad + 2(1 + \lambda_0) \sin \theta_0 + 3c\Theta_K \gamma_K], \\ u_{25}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \lambda_0 \sin \theta_K + 2(1 + \lambda_K) \cos \theta_K - \\ &\quad - 2(1 + \lambda_0) \cos \theta_0 - 3s\Theta_K \gamma_K], \\ u_{33}^0 &= -\frac{\cos \theta_K}{\sin \varphi}, & u_{36}^0 &= -\frac{\sin \theta_K}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.9)$$

Остальные элементы матрицы U_0 тождественно равны нулю. Выражения для элементов матрицы U_K , определяющей конечный импульс Δv_K , могут быть получены из (6.1.9) простой перестановкой индексов «0» и «K», поскольку Δv_0 и Δv_K входят в исходные уравнения (6.1.3) симметричным образом. В случае необходимости нетрудно найти выражения для элементов аналогичных матриц, определяющих корректирующие импульсы через константы первого рода (5.3.3). Однако они более сложны и поэтому здесь не приводятся.

При использовании безразмерных выражений вида (6.1.9) следует иметь в виду, что для получения размерных

приращений скорости все элементы, соответствующие начальному импульсу, необходимо умножать на коэффициент v_L^0 , а элементы, соответствующие конечному импульсу, — на коэффициент v_L^K . Эти переменные коэффициенты приведения определяются общим выражением вида

$$v_L = \frac{L}{p} R\dot{\theta} = L\omega_0\lambda, \quad (6.1.10)$$

где L — некоторый масштабный множитель, равный, например, параметру опорной орбиты или значению начальной дальности.

Для представления корректирующих импульсов через начальное и конечное положения определим согласно соотношениям (6.1.4) следующие матрицы третьего порядка:

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= \| w_{ij}^0 \| = - (F_K Q_0)^{-1}, \\ W_K &= \| w_{ij}^K \| = - (F_0 Q_K)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.11)$$

Явные выражения для элементов матриц W_0 и W_K можно получить либо непосредственным обращением, либо из соотношений (6.1.9) исходя из выражений для безразмерных координат через константы второго рода. В частности, для элементов матрицы W_0 имеем

$$\left. \begin{aligned} w_{11}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \varepsilon_0 \varepsilon_K + 2 (\varepsilon_K \lambda_K - \varepsilon_0 \lambda_0) - \gamma], \\ w_{12}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \varepsilon_0 \lambda_K + 2 (\lambda_K^2 - \lambda_0^2) + \gamma_0], \\ w_{21}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \varepsilon_K \lambda_0 + 2 (\lambda_K^2 - \lambda_0^2) - \gamma_K], \\ w_{22}^0 &= \frac{1}{d} [\sigma \lambda_0 \lambda_K - \varepsilon_K (1 + \lambda_K) + \\ &\quad + \varepsilon_0 (1 + \lambda_0) - (1 + \lambda_0) (1 + \lambda_K) \sin \varphi], \\ w_{33}^0 &= -1/\sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.12)$$

Остальные элементы матрицы W_0 тождественно равны нулю. Матрица W_K получается из матрицы W_0 (и наоборот) простой перестановкой элементов и сменой их знака:

$$w_{ii}^K = -w_{ii}^0, \quad w_{ij}^K = -w_{ji}^0.$$

Это свойство матриц W_0 и W_K является прямым следствием того, что переходная матрица Ψ_{K0} является *симплектической* [19, 76, 79].

Следует иметь в виду, что аналитические выражения вида (6.1.9) и (6.1.12) могут использоваться не только при определении корректирующих импульсов, но и при решении других задач. Например, матрицы, определяемые уравнениями (6.1.14), входят в уравнения (5.4.4) и (5.4.9), определяющие постоянные интегрирования через двухточечные граничные условия уравнений в вариациях и сопряженных с ними уравнений.

§ 6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ В СЛУЧАЕ НЕПОЛНОЙ КОРРЕКЦИИ ПРОМАХА

При рассмотрении многоимпульсных детерминированных коррекций из физических соображений следует, что каждая отдельная коррекция, кроме предпоследней, устраняет не весь промах, прогнозируемый на расчетный момент встречи, а только некоторую его долю. Следовательно, задачу расчета многоимпульсных коррекций можно упростить, предполагая эту долю заданной. Если, кроме того, считать, что моменты коррекций фиксированы, то можно определить величину и направление всех корректирующих импульсов.

Пусть импульс Δv_i , прикладываемый в момент времени t_i , корректирует некоторую долю L_i первоначального промаха

$$r_K^0 = F_K c_0 = \sum_{i=1}^n L_i c_0$$

где c_0 — начальное значение вектора констант свободного относительного движения, а L_i — матрица третьего порядка, которая может быть как диагональной, так и недиагональной.

Поскольку совокупность всех импульсов должна устранять весь этот промах, то имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n L_i = E, \quad (6.2.1)$$

где E — единичная матрица третьего порядка.

Умножим основное уравнение для импульсов (6.1.2) слева на F_K . Тогда, используя равенство (6.2.1), для определения импульса Δv_i можно выделить уравнение

$$L_i F_K c_0 + F_K Q_i \Delta v_i = 0. \quad (6.2.2)$$

Отсюда находим

$$\Delta v_i = - (F_K Q_i)^{-1} L_i F_K c_0 = - (F_K Q_i)^{-1} L_i r_K^0. \quad (6.2.3)$$

Выражение (6.2.3) определяет корректирующий импульс в функции от первоначального промаха или начальных значений констант свободного движения, которые они имели до реализации первого импульса. Представляет интерес выразить корректирующие импульсы через текущий промах и текущие значения констант свободного движения.

Введем в рассмотрение матрицу третьего порядка K_i , элементы которой определяют корректируемую долю текущего промаха по каждой координате. Поскольку неустранимая доля промаха равна $E - K_i$, то после коррекции, выполненной в момент времени t_i , промах будет равен

$$r_K^i = (E - K_i) r_K^{i-1}. \quad (6.2.4)$$

Здесь r_K^{i-1} — промах до коррекции, прогнозируемый на конечный момент времени t_K в соответствии с уравнением

$$r_K^{i-1} = F_K c_{i-1},$$

где c_{i-1} — вектор констант свободного движения до приложения очередного корректирующего импульса Δv_i .

С другой стороны, промах после коррекции можно представить в стандартной форме

$$r_K^i = F_K c_i, \quad (6.2.5)$$

где c_i — вектор констант свободного движения после приложения импульса Δv_i . Этот вектор равен

$$c_i = c_{i-1} + Q_i \Delta v_i.$$

Следовательно, приравнявая выражения (6.2.4) и (6.2.5), можно получить

$$\Delta v_i = - (F_K Q_i)^{-1} K_i F_K c_{i-1} = - (F_K Q_i)^{-1} K_i r_K^{i-1}. \quad (6.2.6)$$

Если определяемые выражениями (6.2.3) и (6.2.6) корректирующие импульсы одного номера считать равными, то с учетом выражений для приращений констант от корректирующих импульсов находим

$$K_i = L_i \left(\sum_{j=i}^n L_j \right)^{-1}.$$

Выражения (6.2.3) и (6.2.6) позволяют определить все корректирующие импульсы, кроме самого последнего — тормозного. Конечный импульс будет, очевидно, равен относительной скорости в конечный момент времени, взятой с обратным знаком, т. е.

$$\Delta \mathbf{v}_n = -G_n \mathbf{c}_{n-1} = -(F_{n-1} Q_n)^{-1} \mathbf{r}_n^{n-1}, \quad (6.2.7)$$

где $\mathbf{c}_{n-1}$ — вектор констант свободного движения после приложения предпоследнего импульса, который должен устранить весь нескорректированный до этого промах.

В случае кеплеровых опорных орбит элементы матриц, входящих в соотношения (6.2.3), (6.2.6) и (6.2.7), нетрудно выразить в явном виде с помощью соотношений, представленных в предыдущем параграфе.

Отметим, что задача оптимизации многоимпульсных коррекций может быть сформулирована как задача определения оптимальных матриц K_i или L_i при условии, что промах после предпоследней коррекции должен становиться равным нулю. Однако с вычислительной точки зрения такая постановка задачи может быть не проще, чем исходная задача оптимизации. Тем не менее при расчете оптимальных программ коррекций может оказаться полезным находить и эти матрицы, определяющие для каждого импульса корректируемую долю промаха.

§ 6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ С ЗАДАНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ

Как следует из предыдущего, использование метода свободных траекторий связано с выбором моментов времени для проведения импульсных коррекций скорости. Обычно предполагается эти моменты устанавливать заранее с помощью дополетных статистических исследований либо определять в процессе сближения так, чтобы расход

топлива при имеющихся рассогласованиях по положению и скорости был близок к минимальному.

И в том и в другом варианте расчетное направление коррекции при изменении параметров движения изменяется и может быть, вообще говоря, совершенно произвольным. Следовательно, при реализации метода свободных траекторий необходимо иметь возможность направлять вектор тяги двигателей маневрирования в любую сторону под любыми требуемыми углами в исполнительной системе координат. При использовании экономичного полярного управления вектором тяги эта задача в техническом отношении довольно трудная. Она может быть решена с помощью достаточно сложного оборудования, например с помощью блока программных разворотов, включающего в себя датчики угловой скорости и интеграторы кинематических уравнений угловых движений, либо с помощью специальных датчиков углового положения аппарата, осуществляющих контроль за разворотами во всей сфере [62, 66, 73]. Поэтому в целях упрощения системы ориентации в некоторых разработках вместо жестких или энергетически оптимальных алгоритмов управления сближением по методу свободных траекторий может оказаться более целесообразным использовать упрощенные алгоритмы, отвечающие приложению корректирующих импульсов в удобных для ориентации фиксированных направлениях.

К выбору фиксированного направления коррекции можно подойти также и с другой точки зрения. Поскольку ошибки измерений параметров относительного движения влияют на точность определения различных составляющих корректирующего импульса в различной степени, можно в качестве фиксированных выбрать такие направления коррекции, которые менее всего чувствительны к ошибкам измерений.

Как следует из уравнений (5.3.1), составляющие относительного движения в плоскости и по нормали к плоскости опорной орбиты в линейном приближении разделены, так что импульсы для коррекции составляющей движения вне плоскости орбиты должны прикладываться по нормали к плоскости опорной орбиты. Поэтому выбирать направление коррекции из каких-либо дополнительных соображений можно только для составляю-

щей относительного движения в плоскости опорной орбиты.

Для определенности предположим, что в двухимпульсной схеме фиксировано с точностью до положения «вперед — назад» направление начального импульса, которое будем определять углом δ , отсчитываемым в плоскости опорной орбиты от оси x орбитальной системы координат. Тогда можно записать

$$\Delta v_x^0 = \pm J_0 \cos \delta, \quad \Delta v_y^0 = \pm J_0 \sin \delta, \quad (6.3.1)$$

где величина приращения скорости в плоскости опорной орбиты $J_0 > 0$ и знак «минус» соответствует импульсу, прикладываемому в обратную сторону. С другой стороны, для составляющих Δv_x^0 и Δv_y^0 имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_x^0 &= v_L^0 (u_{11}^0 c_1 + u_{12}^0 c_2 + u_{14}^0 c_4 + u_{15}^0 c_5) = v_L^0 f_x d, \\ \Delta v_y^0 &= v_L^0 (u_{21}^0 c_1 + u_{22}^0 c_2 + u_{24}^0 c_4 + u_{25}^0 c_5) = v_L^0 f_y d, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.2)$$

где константы c_i определены по начальным условиям в соответствии с уравнениями (5.3.7), а коэффициенты линейных форм f_x и f_y , поделенные на определитель d , задаются в явном виде соотношениями типа (6.1.9). Масштабный коэффициент v_L^0 , необходимый для пересчета составляющих импульса к размерной форме, определяется уравнением (6.1.10).

Сравнивая выражения (6.3.1) и (6.3.2), устанавливаем, что при фиксированном направлении коррекции должно выполняться ограничение

$$f = f_y \cos \delta - f_x \sin \delta = 0. \quad (6.3.3)$$

При заданных начальных условиях величины f_x и f_y являются функциями от двух переменных t_0 и t_K . Следовательно, обеспечить выполнение условия (6.3.3) можно выбором времени как начала, так и окончания маневра сближения. Однако при автономном управлении сближением возможности варьирования начального времени t_0 ограничены тем, что переход на траекторию сближения не может быть выполнен раньше, чем произведены измерения параметров относительного движения и обработка результатов измерений. Поэтому определять из условия (6.3.3) можно практически только конечное время t_K

или, что эквивалентно при закреплённом значении t_0 , время сближения $T = t_k - t_0$ (или угол перехода $\varphi = \theta_k - \theta_0$), а изменение начального времени ожидания t_0 (или начальной фазы θ_0) в допустимых пределах использовать, когда это возможно, для общего уменьшения расхода топлива.

Остается теперь доказать, что для любого направления коррекции, задаваемого углом δ , уравнение (6.3.3) имеет хотя бы одно положительное решение относительно времени сближения T (или угла перехода φ). Или, что то же самое, показать, что при увеличении времени сближения, начиная с самых малых значений, направление начального импульса, определяемое по составляющим (6.3.2), пробегает все значения угла δ между 0 и 180° (необязательно непрерывно).

В общем случае эллиптических и гиперболических опорных орбит именно такой характер изменения потребного направления коррекции с ростом времени сближения легко устанавливается численными расчетами. Однако аналитические доказательства затруднены сложной зависимостью величин f_x и f_y от времени сближения T . Поэтому ограничимся рассмотрением более простого, но важного случая круговых опорных орбит.

Для круговых опорных орбит ($e = 0$) начальное время t_0 или начальный полярный угол θ_0 можно без нарушения общности положить равным нулю. Тогда выражения для f_x и f_y через угол $\theta = \varphi$ записываются в явном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} f_x &= -3c_2 \theta \sin \theta + (2c_5 - c_1) \sin \theta + 2(2c_2 - c_4) \times \\ &\quad \times (1 - \cos \theta), \\ f_y &= 3c_5 \theta \sin \theta + 3(2c_2 + c_4) \theta \cos \theta - \\ &\quad - 4(2c_2 + c_4) \sin \theta - 2(2c_5 + c_1)(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

где постоянные c_i вычислены из уравнений (5.3.7) по начальным условиям, соответствующим некоторому моменту времени $t \geq 0$. Подставляя эти соотношения в уравнение (6.3.3) и группируя члены, находим

$$f = 3\theta(k_1 \sin \theta + k_2 \cos \theta) - k_3 \sin \theta - k_4(1 - \cos \theta) = 0, \quad (6.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= c_2 \sin \delta + c_5 \cos \delta, \quad k_2 = (2c_2 + c_4) \cos \delta, \\ k_3 &= (2c_5 - c_1) \sin \delta + 4(2c_2 + c_4) \cos \delta, \\ k_4 &= 2(2c_2 - c_4) \sin \delta + 2(2c_5 + c_1) \cos \delta. \end{aligned}$$

Введем постоянные θ_1 и θ_2 в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad \sin \theta_1 = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \\ \cos \theta_2 &= \frac{k_3}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}}, \quad \sin \theta_2 = -\frac{k_4}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (6.3.4) можно привести к виду

$$3 \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \theta = \sqrt{k_3^2 + k_4^2} \frac{\sin(\theta + \theta_2) - \sin \theta_2}{\sin(\theta + \theta_1)}. \quad (6.3.5)$$

Таким образом, задача о нахождении корней уравнения (6.3.3) при $e = 0$ сводится к определению точек пересечения прямой линии с кривой, заданной отношением двух гармонических функций.

Для наших целей подробное исследование решений уравнения (6.3.5) не обязательно. Достаточно только увидеть, что знаменатель правой части меняет свой знак при значениях угла $\theta = m\pi - \theta_1$ ($m = 1, 2, \dots$). Следовательно, кроме тривиального корня $\theta = 0$ уравнение (6.3.5) имеет бесконечное множество положительных корней, соответствующих разному числу витков и близких к $m\pi - \theta_1$.

Для определения времени сближения, соответствующего заданному направлению коррекции, т. е. нахождения с нужной точностью корней уравнения (6.3.3), применимы общеизвестные численные методы, такие как метод дихотомии, метод линейной интерполяции или метод касательных Ньютона [26, 35, 63, 65]. Существует целый ряд стандартных подпрограмм, основанных на этих методах и входящих в математическое обеспечение стационарных ЭВМ. Однако подобные подпрограммы, естественно, не учитывают специфику рассматриваемой задачи и плохо приспособлены для использования в БЦВМ. Это касается прежде всего вычислений, связанных с отделением корней

и выбором начальных приближений, обеспечивающих сходимость итерационного процесса. Поэтому в основу бортовых алгоритмов определения требуемого времени сближения целесообразно положить надежный метод поиска нулей монотонных функций, предлагаемый в книге [10].

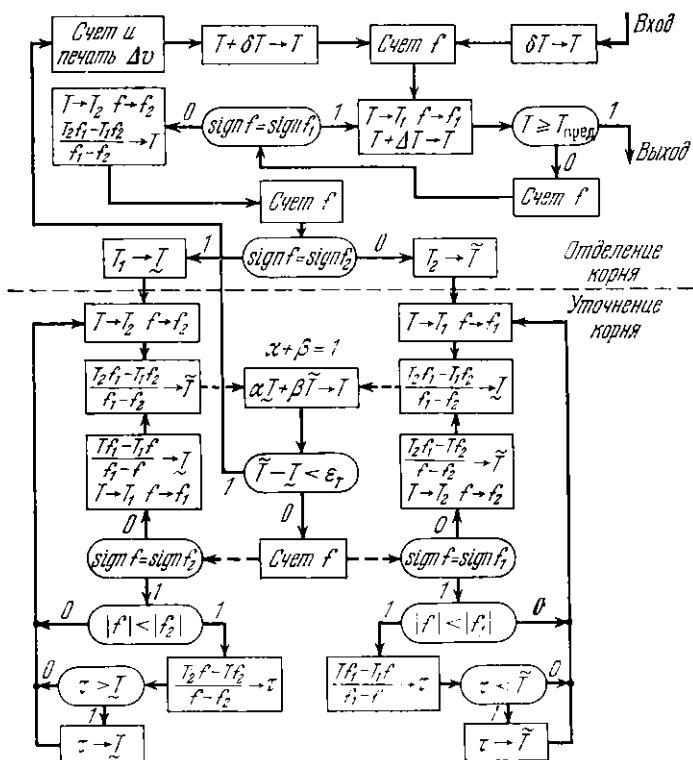


Рис. 6.1.

Один из возможных алгоритмов поиска нулей функции (6.3.3), основанный на использовании свойства монотонности функции вблизи нуля, представлен блок-схемой на рис. 6.1. Здесь прямоугольниками обозначены безусловные операторы, а овалами — условные операторы. Если

условие, проверяемое данным оператором, выполнено, то стрелке, обозначающей оператор перехода, приписывается символ 1 («да»), в противном случае — символ 0 («нет»). Стрелки внутри прямоугольников указывают присваивание значений, т. е. засылку чисел, получающихся в результате арифметических операций, в соответствующие ячейки памяти ЭВМ.

Для иллюстрации рассмотрим результаты численных расчетов, полученные для случая круговой опорной орбиты. Начальные условия соответствовали моменту приложения импульса с заданным направлением, определяемым углом δ . Отклонения по положению задавались в безразмерном виде на окружности единичного радиуса углом α_0 , т. е.

$$x_0 = r_0 \cos \alpha_0, \quad y_0 = r_0 \sin \alpha_0, \quad (6.3.6)$$

а отклонения по скорости выбирались согласно выражениям

$$\dot{x}_0 = \dot{\theta}_0 y_0, \quad \dot{y}_0 = -\dot{\theta}_0 x_0, \quad (6.3.7)$$

что в линейном приближении соответствует равенству векторов орбитальных скоростей двух аппаратов.

Результаты расчетов представлены графиками на рис. 6.2—6.7.

На рис. 6.2 показана зависимость угла перехода θ , вычисленного как решение уравнения (6.3.3), от направления коррекции (угла δ). Параметром семейства кривых является угол α_0 , меняющийся с шагом 30° от 0 до 180° . Видно, что в пределах полутора витков ($\theta < 540^\circ$) для одного и того же направления коррекции существует от одного до трех значений времени сближения, которым отвечают разные значения характеристической скорости. Интересно отметить, что соответствующие ветви кривых имеют общую точку пересечения, т. е. при определенном направлении коррекции время сближения получается одним и тем же независимо от начальных условий. Например, первый нуль достигается при $\delta \approx 100^\circ$ и $\theta \approx 106^\circ$, а второй нуль — при $\delta = 90^\circ$ и $\theta = 360^\circ$.

Эффективность различных направлений коррекции в смысле энергетических затрат поясняется рис. 6.3, где с шагом 30° представлены аналогичные зависимости для характеристической скорости. Заметим, что для получения

размерных величин значения приращений скорости, считываемые с графиков, следует умножать на коэффициент подобия $r_0 \omega_0$, где r_0 — начальная дальность, а ω_0 — угловая скорость опорного орбитального движения.

Примечательно, что при $\delta \approx 90^\circ$ (вертикальное направление коррекции) наблюдается значительный рост характеристической скорости. Это можно объяснить тем, что за

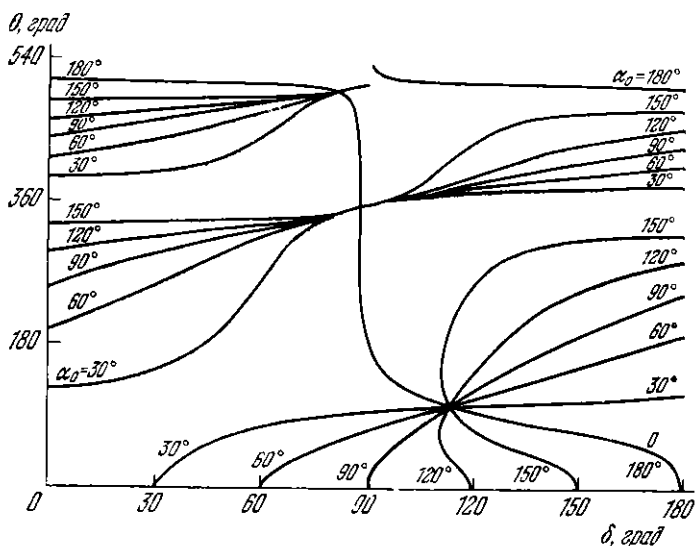


Рис. 6.2.

счет действия только радиальной тяги невозможно выравнять периоды обращения обоих спутников и свести к нулю разность высот. Иными словами, относительное движение является полностью управляемым при всех значениях угла δ , кроме значения $\delta = 90^\circ$. Этот вывод не противоречит и физическим соображениям, поскольку вертикальные коррекции связаны с поворотом вектора орбитальной скорости, требующим гораздо больших энергетических затрат, чем изменение величины скорости с помощью близких к коллинеарным коррекций, более эффективно влияющих на характеристики орбитального движения. Отсюда следует вывод, что из всех возможных

направлений коррекции энергетически наименее выгодно вертикальное направление, хотя оно и может быть достаточно просто определено с помощью датчиков вертикали любого типа.

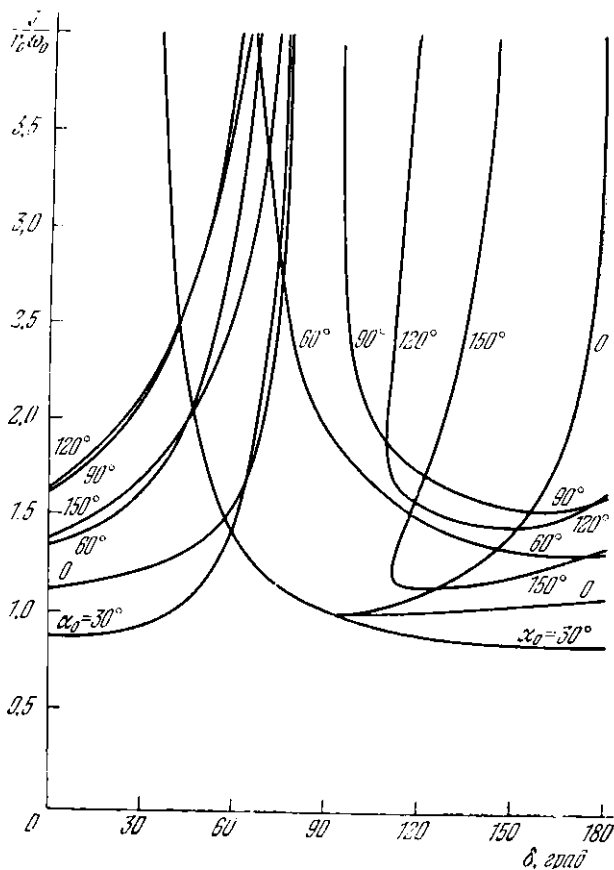


Рис. 6.3.

Более экономично направление коррекции по линии визирования ($\delta = \alpha_0$) или по нормали к линии визирования ($\delta = \alpha_0 \pm 90^\circ$) (рис. 6.4 и 6.5, где соответственные кривые обозначены цифрами 1—3). Как и можно было

ожидать, коррекции по линии визирования (пунктирные линии) более выгодны при $\alpha_0 \approx 0$ и менее выгодны при $\alpha_0 \approx 90^\circ$, но в среднем более экономичны все же коррекции по нормали к линии визирования (сплошные линии).

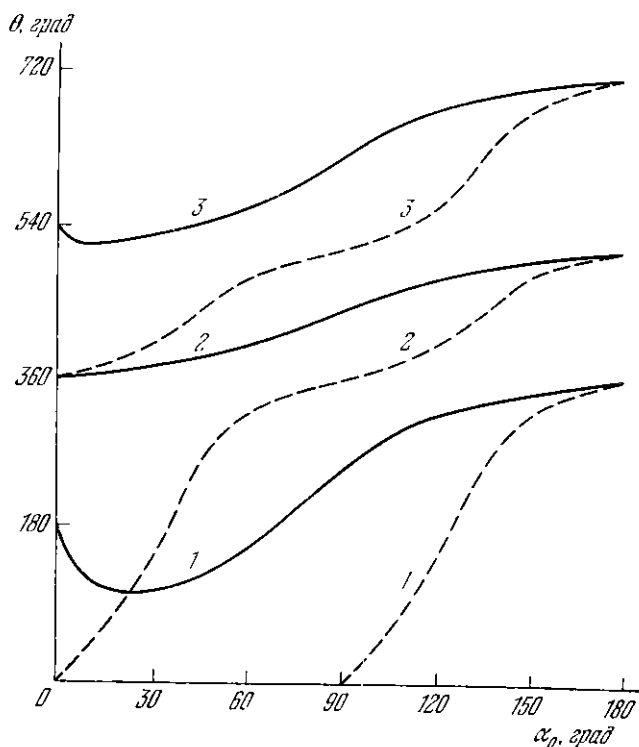


Рис. 6.4.

Преимущество обоих направлений коррекции состоит в том, что они легко устанавливаются с помощью визирующих средств. Однако, чтобы не возникало больших методических ошибок, предварительно необходимо скорректировать составляющую относительного движения по нормали к плоскости опорной орбиты.

От этого недостатка, характерного и для всех остальных методов коррекции в каком-либо выбранном заранее направлении, свободен только метод горизонтальных кор-

рекций, поскольку импульсы для сведения к нулю отклонений из плоскости опорной орбиты также должны прикладываться в горизонтальной плоскости. Следовательно, эти коррекции могут быть реализованы одними и теми

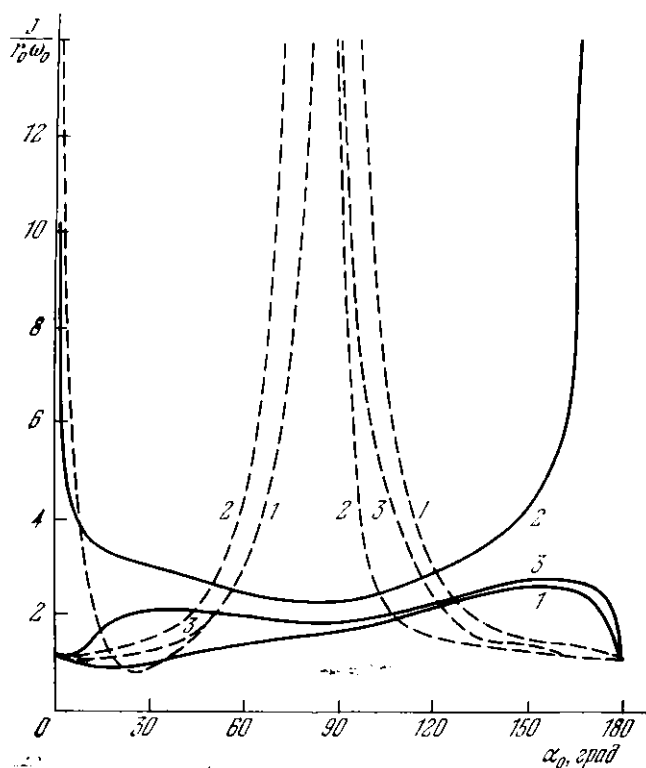


Рис. 6.5.

же техническими средствами. Метод горизонтальных коррекций может оказаться особенно удобным при полуавтоматическом управлении сближением, когда ориентирование аппарата в горизонтальной плоскости может производиться вручную по подвижному изображению поверхности небесного тела, наблюдаемому на проградуйрованном экране оптического визира-вертикали.

Заметим, что в зависимости от условий сближения корректировать составляющие относительного движения в плоскости и по нормали к плоскости опорной орбиты можно как раздельно, так и совместно. В первом случае боковые коррекции выгодно производить в узлах, где боковые отклонения становятся равными нулю.

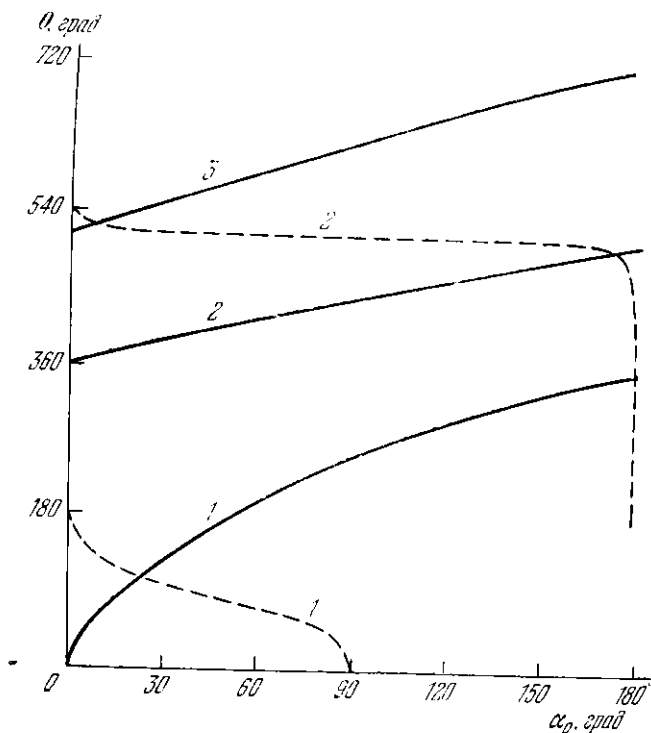


Рис. 6.6.

Как следует из графиков, представленных на рис. 6.3, по экономичности метод горизонтальных коррекций близок к оптимальному двухимпульсному методу. Хотя по времени сближения и по направлениям коррекции расхождения могут быть значительными, проигрыш в характеристической скорости даже в наихудших случаях составляет всего лишь несколько процентов.

Сравнение методов вертикальных (пунктирные линии) и горизонтальных (сплошные линии) коррекций приведено на рис. 6.6 и 6.7, где цифры 1—3 обозначают соответственные кривые.

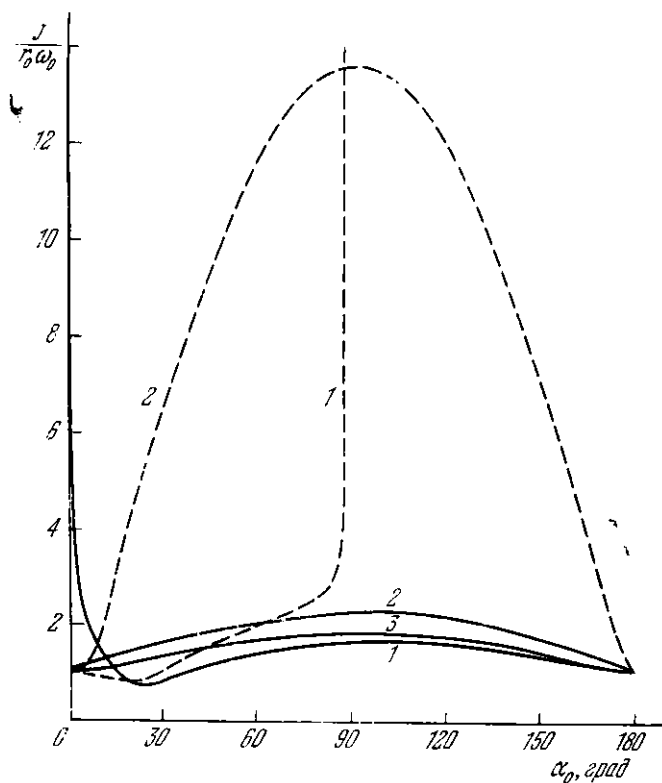


Рис. 6.7.

Из других подобных методов коррекции заслуживает внимания метод касательных коррекций, который для не слишком вытянутых опорных орбит мало чем отличается от метода горизонтальных коррекций. При наличии у центрального тела атмосферы для ориентации аппарата по вектору орбитальной скорости могут быть использованы ионные датчики.

§ 6.4. ТРЕХИМПУЛЬСНЫЕ И ЧЕТЫРЕХИМПУЛЬСНЫЕ ПРОГРАММЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КОРРЕКЦИЙ

Если корректировать относительное движение в плоскости опорной орбиты, то для определения корректирующих импульсов имеются четыре условия, которые нужно удовлетворить выбором параметров управления. В случае использования горизонтальных коррекций параметрами управления являются моменты приложения импульсов и их величины (с учетом знака). Таким образом, можно рассматривать следующие четырехпараметрические программы горизонтальных коррекций, для определения которых конечные условия встречи являются достаточными.

1. Двухимпульсные программы: начальный (конечный) импульс — горизонтальный, конечный (начальный) импульс — произвольного направления. При заданном начальном времени из достаточных условий определяются время сближения, величина (и знак) начального импульса и две составляющие конечного импульса. Подобные программы были рассмотрены в предыдущем параграфе. Если имеется возможность варьировать и начальное время, то горизонтальными могут быть и начальный и конечный импульсы.

2. Трехимпульсные программы: два импульса — горизонтальные, один импульс — произвольного направления. Все моменты приложения импульсов фиксированы и из достаточных условий определяются величины горизонтальных импульсов и две составляющие импульса произвольного направления, который может прикладываться и в начале, и в промежутке, и в конце маневра сближения.

3. Трехимпульсные программы: все импульсы — горизонтальные. Из достаточных условий определяются величины этих импульсов и момент приложения одного из них, два других момента коррекции должны быть заданы.

4. Четырехимпульсные программы: все импульсы — горизонтальные и моменты их приложения фиксированы. Из достаточных условий определяются величины импульсов.

При определении многоимпульсных программ управления основную систему уравнений (6.1.2) удобно запи-

сать в явном виде. В случае использования констант второго рода уравнения для корректирующих импульсов в плоскости опорной орбиты выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_L^i} [3\Theta_i \lambda_i^2 \Delta v_{xi} + (2 - 3\Theta_i \varepsilon_i \lambda_i) \Delta v_{yi}] &= 0, \\ \bar{c}_2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_L^i} \Delta v_{xi} &= 0, \\ \bar{c}_4 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_L^i} [(1 + \lambda_i) \cos \theta_i \Delta v_{xi} - \lambda_i \sin \theta_i \Delta v_{yi}] &= 0, \\ \bar{c}_5 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_L^i} [(1 + \lambda_i) \sin \theta_i \Delta v_{xi} + \lambda_i \cos \theta_i \Delta v_{yi}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1)$$

Прежде всего покажем, что вместо одного начального или конечного импульса, отвечающего двухимпульсной схеме, можно использовать два горизонтальных импульса. Иначе говоря, один импульс произвольного направления может быть реализован двумя горизонтальными, разделенными некоторым интервалом времени.

Пусть с помощью горизонтальных импульсов Δv_{x1} и Δv_{x2} , прикладываемых в моменты времени t_1 и t_2 , осуществляется перевод управляемого аппарата на траекторию сближения. Тогда уравнения для определения этих импульсов, а также составляющих конечного импульса $\Delta v_{xк}$ и $\Delta v_{yк}$ следуют из уравнений (6.4.1), если положить в них $\Delta v_{y1} = \Delta v_{y2} = 0$ и $n = 3$. При фиксированных моментах времени t_1 , t_2 и $t_k = t_3$ результирующая система является линейной и замкнутой относительно искомых параметров управления и может быть решена в конечном виде. Это решение, записанное аналогично (6.3.2), можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_{x1} &= v_L^1 (a_{11} \bar{c}_1 + a_{12} \bar{c}_2 + a_{14} \bar{c}_4 + a_{15} \bar{c}_5), \\ \Delta v_{x2} &= v_L^2 (a_{21} \bar{c}_1 + a_{22} \bar{c}_2 + a_{24} \bar{c}_4 + a_{25} \bar{c}_5), \\ \Delta v_{xк} &= v_L^k (a_{k1} \bar{c}_1 + a_{k2} \bar{c}_2 + a_{k4} \bar{c}_4 + a_{k5} \bar{c}_5), \\ \Delta v_{yк} &= v_L^k (b_{k1} \bar{c}_1 + b_{k2} \bar{c}_2 + b_{k4} \bar{c}_4 + b_{k5} \bar{c}_5). \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

Выражения для соответствующих коэффициентов двух линейных форм, определяющих горизонтальные импульсы, симметричны и могут быть получены одни из других перестановкой индексов 1 и 2. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\sigma_i &= 3 (\Theta_K - \Theta_i) \lambda_i^2, \quad \varphi_i = \theta_K - \theta_i, \\ \varphi &= \theta_2 - \theta_1, \\ \alpha_i &= (1 + \lambda_K) (1 + \lambda_i) \sin \varphi_i, \\ \gamma_i &= \lambda_K [1 + \lambda_K - (1 + \lambda_i) \cos \varphi_i], \\ \beta &= (1 + \lambda_1) (1 + \lambda_2) \sin \varphi - \alpha_1 + \alpha_2, \\ d &= \sigma_2 \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_1 - 2\beta,\end{aligned}$$

то с учетом неизменности знака определителя d будем иметь

$$\begin{aligned}a_{11} &= -\frac{1}{d} \gamma_2, \quad a_{12} = \frac{1}{d} [\sigma_2 \lambda_K (1 + \lambda_K) - 2\alpha_2 - 3\Theta_K \gamma_2], \\ a_{21} &= \frac{1}{d} \gamma_1, \quad a_{22} = -\frac{1}{d} [\sigma_1 \lambda_K (1 + \lambda_K) - 2\alpha_1 - 3\Theta_K \gamma_1], \\ a_{14} &= \frac{1}{d} [\sigma_2 \lambda_K \cos \theta_K + 2(1 + \lambda_2) \sin \theta_2 - \\ &\quad - 2(1 + \lambda_K) \sin \theta_K + 3c\Theta_K \gamma_2], \\ a_{24} &= -\frac{1}{d} [\sigma_1 \lambda_K \cos \theta_K + 2(1 + \lambda_1) \sin \theta_1 - \\ &\quad - 2(1 + \lambda_K) \sin \theta_K + 3c\Theta_K \gamma_1], \\ a_{15} &= \frac{1}{d} [\sigma_2 \lambda_K \sin \theta_K - 2(1 + \lambda_2) \cos \theta_2 + \\ &\quad + 2(1 + \lambda_K) \cos \theta_K - 3s\Theta_K \gamma_2], \\ a_{25} &= -\frac{1}{d} [\sigma_1 \lambda_K \sin \theta_K - 2(1 + \lambda_1) \cos \theta_1 + \\ &\quad + 2(1 + \lambda_K) \cos \theta_K - 3s\Theta_K \gamma_1].\end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов линейных форм, определяющих составляющие конечного импульса, имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}a_{K1} &= \frac{1}{d} (\gamma_2 - \gamma_1), \quad b_{K1} = \frac{1}{d} \beta, \\ a_{K2} &= -\frac{1}{d} [\sigma_2 \lambda_K (1 + \lambda_1) \cos \varphi_1 - \sigma_1 \lambda_K (1 + \lambda_2) \cos \varphi_2 - \\ &\quad - 2(1 + \lambda_1) (1 + \lambda_2) \sin \varphi - 3\Theta_K (\gamma_2 - \gamma_1)],\end{aligned}$$

$$b_{K2} = \frac{1}{d} (\sigma_2 \alpha_2 - \sigma_1 \alpha_1 + 3\Theta_K \beta),$$

$$a_{K4} = -\frac{1}{d} [(\sigma_2 - \sigma_1) \lambda_K \cos \theta_K + 2(1 + \lambda_2) \sin \theta_2 - \\ - 2(1 + \lambda_1) \sin \theta_1 + 3c\Theta_K (\gamma_2 - \gamma_1)],$$

$$b_{K4} = \frac{1}{d} [-\sigma_2(1 + \lambda_1) \sin \theta_1 + \sigma_1(1 + \lambda_2) \sin \theta_2 + \\ + (\sigma_2 - \sigma_1)(1 + \lambda_K) \sin \theta_K - 3c\Theta_K \beta],$$

$$a_{K5} = -\frac{1}{d} [(\sigma_2 - \sigma_1) \lambda_K \sin \theta_K + 2(1 + \lambda_1) \cos \theta_1 - \\ - 2(1 + \lambda_2) \cos \theta_2 - 3s\Theta_K (\gamma_2 - \gamma_1)],$$

$$b_{K5} = \frac{1}{d} [\sigma_2(1 + \lambda_1) \cos \theta_1 - \sigma_1(1 + \lambda_2) \cos \theta_2 - \\ - (\sigma_2 - \sigma_1)(1 + \lambda_K) \cos \theta_K + 3s\Theta_K \beta].$$

Расчетные формулы для определения трехимпульсных программ имеют такой же самый вид и в случаях, когда произвольное направление может иметь начальный и промежуточный импульс.

Программа управления в варианте, когда с помощью горизонтальных коррекций осуществляется также и конечное торможение, определяется из уравнений (6.4.1) аналогичным образом. Если моменты времени, соответствующие тормозным коррекциям, обозначить через t_3 и t_4 , то коэффициенты линейных форм вида (6.4.2), определяющих каждый из четырех горизонтальных импульсов Δv_{xi} , симметричны и могут быть получены одни из других циклической перестановкой индексов 1, 2, 3, 4. В частности, обозначая

$$\sigma_i = 3\Theta_i \lambda_i^2, \quad \varphi_{ij} = \theta_i - \theta_j, \\ \alpha_{ij} = (1 + \lambda_i)(1 + \lambda_j) \sin \varphi_{ij},$$

$$\beta_{ij} = (1 + \lambda_j) \sin \theta_j - (1 + \lambda_i) \sin \theta_i,$$

$$\gamma_{ij} = (1 + \lambda_i) \cos \theta_i - (1 + \lambda_j) \cos \theta_j,$$

$$d = \sigma_4 (\alpha_{12} + \alpha_{23} - \alpha_{13}) - \sigma_3 (\alpha_{12} + \alpha_{24} - \alpha_{14}) + \\ + \sigma_2 (\alpha_{43} + \alpha_{13} - \alpha_{14}) - \sigma_1 (\alpha_{43} + \alpha_{23} - \alpha_{21}),$$

для первого импульса имеем

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{d} (a_{34} + a_{23} - a_{24}), \\a_{12} &= \frac{1}{d} (\sigma_2 a_{34} + \sigma_4 a_{23} - \sigma_3 a_{24}), \\a_{14} &= \frac{1}{d} (\sigma_2 \beta_{34} + \sigma_4 \beta_{23} - \sigma_3 \beta_{24}), \\a_{15} &= \frac{1}{d} (\sigma_2 \gamma_{34} + \sigma_4 \gamma_{23} - \sigma_3 \gamma_{24}).\end{aligned}$$

Следует отметить, что возможно увеличение расхода топлива вследствие замены начального импульса Δv_0 , который может иметь произвольное направление, двумя горизонтальными. Чтобы оценить это, для начальных условий вида (6.3.6) и (6.3.7) были рассчитаны оптимальные двухимпульсные программы и трехимпульсные программы с разными интервалами времени между горизонтальными коррекциями. Опорная орбита предполагалась эллиптической ($e = 0,03$) и начальный момент времени t_0 соответствовал прохождению через перицентр. Во всех вариантах конечное время t_k полагалось равным оптимальному времени встречи, найденному для двухимпульсной программы. Момент времени t_1 для первой горизонтальной коррекции совпадал с начальным моментом t_0 , а момент времени t_2 для второй горизонтальной коррекции был сдвинут вперед на интервал $\Delta t > 0$. Заметим, что вопросы, связанные с оптимизацией двухимпульсной программы, рассматриваются в главе 8.

Качество оптимального двухимпульсного управления поясняется рис. 6.8 и 6.9, на которых показаны зависимости времени сближения T , измеряемого в долях орбитального периода $T_{\text{орб}}$, и энергетических характеристик J_0 , J_k и $J_0 + J_k$, приведенных к начальной дальности r_0 , от угла начального положения α_0 . Графики зависимости характеристической скорости J от интервала сдвига Δt для трехимпульсных программ даны для различных значений угла α_0 на рис. 6.10. Из зависимостей следует, что существуют оптимальные значения интервала сдвига $\Delta t_{\text{опт}}$, которым соответствуют наименьшие значения характеристической скорости. Изменение оптимального интервала сдвига $\Delta t_{\text{опт}}$, имеющего порядок 0,1 от орбитального

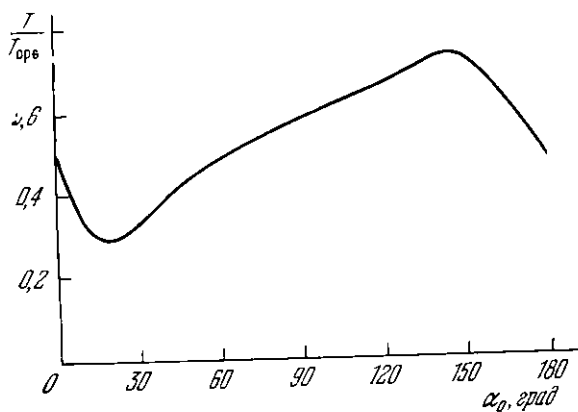


Рис. 6.8.

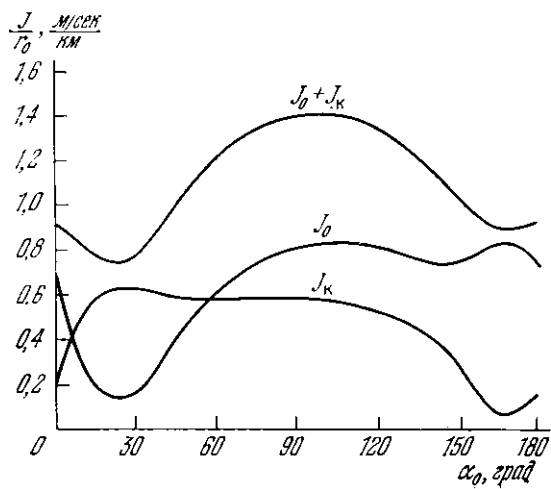


Рис. 6.9.

периода $T_{\text{орб}}$, в зависимости от угла начального положения α_0 показано на рис. 6.11. Зависимость разности характеристических скоростей, соответствующих трехимпульсной и оптимальной двухимпульсной программам, от угла начального положения α_0 представлена на рис. 6.12. Здесь для трехимпульсных программ величина J_0 имеет смысл суммарного приращения скорости от горизонтальных импульсов.

Важно отметить, что энергетические характеристики трехимпульсных программ можно существенно улучшить, устанавливая оптимальные моменты времени для всех трех корректирующих импульсов. Тогда трехимпульсные программы оказываются более экономичными, чем оптимальные двухимпульсные программы, особенно при не очень коротких временах сближения.

Рассмотренные выше трехимпульсные программы с одним импульсом произвольного направления, а также четырехимпульсные программы отличаются тем, что все моменты коррекции предполагаются фиксированными и корректирующие импульсы определяются через начальные условия линейными соотношениями. Для трехимпульсных программ только с горизонтальными коррекциями необходимо в общем случае решение нелинейного уравнения.

Ради простоты предположим, что опорная орбита является круговой. Тогда уравнения для определения трехимпульсной программы горизонтальных коррекций находятся из (6.4.1):

$$\left. \begin{aligned} c_1 + \frac{3}{\omega_0 L} \sum_{i=1}^3 \theta_i \Delta v_{xi} &= 0, \\ c_2 - \frac{1}{\omega_0 L} \sum_{i=1}^3 \Delta v_{xi} &= 0, \\ c_4 + \frac{2}{\omega_0 L} \sum_{i=1}^3 \cos \theta_i \Delta v_{xi} &= 0, \\ c_5 + \frac{2}{\omega_0 L} \sum_{i=1}^3 \sin \theta_i \Delta v_{xi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.3)$$

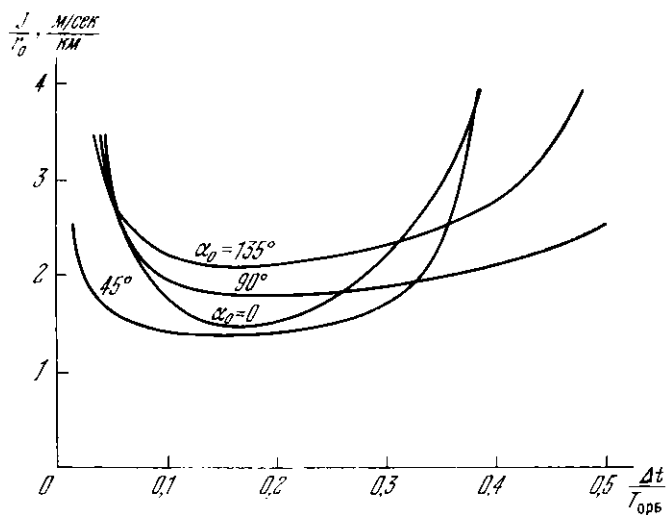


Рис. 6.10.

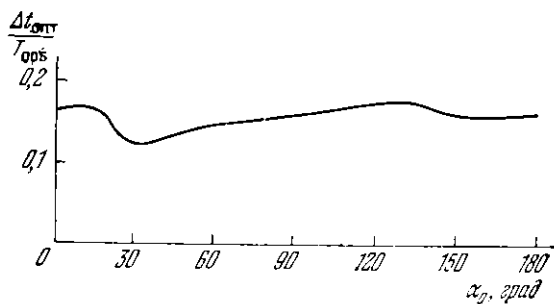


Рис. 6.11.

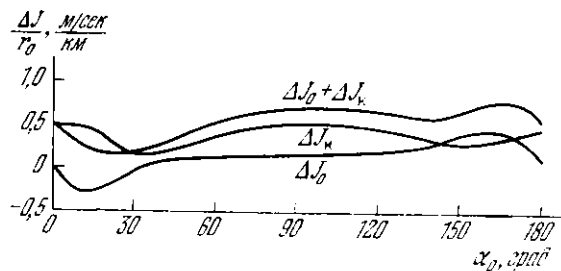


Рис. 6.12.

Разрешив последние три уравнения относительно Δv_{x1} , Δv_{x2} и Δv_{x3} , получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_{x1} &= \frac{\omega_0 L}{d} \left[c_2 \sin \varphi_{32} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_4}{2} (\sin \theta_3 - \sin \theta_2) + \frac{c_5}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_3) \right], \\ \Delta v_{x2} &= \frac{\omega_0 L}{d} \left[c_2 \sin \varphi_{31} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_4}{2} (\sin \theta_3 - \sin \theta_1) + \frac{c_5}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_3) \right], \\ \Delta v_{x3} &= \frac{\omega_0 L}{d} \left[c_2 \sin \varphi_{21} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_4}{2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + \frac{c_5}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.4.4)$$

где

$$\varphi_{ij} = \theta_i - \theta_j, \quad d = \sin \varphi_{32} + \sin \varphi_{21} - \sin \varphi_{31}. \quad (6.4.5)$$

Подстановка этих выражений в первое уравнение (6.4.3) дает соотношение, связывающее три момента коррекции:

$$\begin{aligned} &\frac{c_1}{3} (\sin \varphi_{32} + \sin \varphi_{21} - \sin \varphi_{31}) + \\ &\quad + c_2 (\theta_1 \sin \varphi_{32} + \theta_3 \sin \varphi_{21} - \theta_2 \sin \varphi_{31}) + \\ &\quad + \frac{c_4}{2} [\theta_1 (\sin \theta_3 - \sin \theta_2) + \theta_3 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - \\ &\quad - \theta_2 (\sin \theta_3 - \sin \theta_1)] + \frac{c_5}{2} [\theta_1 (\cos \theta_2 - \cos \theta_3) + \\ &\quad + \theta_3 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \theta_2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_3)] = 0. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Таким образом, определив из уравнения (6.4.6) один из моментов коррекции при двух других заданных, по уравнениям (6.4.4) можно вычислить значения всех трех горизонтальных импульсов. При этом два момента коррекции могут выбираться произвольным образом, но так, чтобы результирующий определитель d , даваемый уравнениями (6.4.5), не был равен нулю.

Если же величина d принимается равной нулю, произвольным образом не может быть выбран ни один из трех моментов коррекции. Нетрудно показать, что условию $d = 0$ соответствует выполнение условий

$$\theta_2 - \theta_1 = k\pi, \quad \theta_3 - \theta_2 = l\pi, \quad (6.4.7)$$

где k и l — целые положительные числа. В этом случае определяющие уравнения (6.4.3) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_0}{3} x_1 + k\pi \Delta v_{x2} + (k+l)\pi \Delta v_{x3} &= 0, \\ 2\omega_0 y_1 - v_{x1} - \Delta v_{x1} - \Delta v_{x2} - \Delta v_{x3} &= 0, \\ \frac{\omega_0}{2} y_1 + [(-1)^k - 1] \Delta v_{x2} + [(-1)^{k+l} - 1] \Delta v_{x3} &= 0, \\ v_{y1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.8)$$

где x_1 , y_1 , v_{x1} и v_{y1} — параметры относительного движения непосредственно перед приложением импульса Δv_{x1} .

Отсюда следует, что начальный корректирующий импульс прикладывается в перицентре или апоцентре относительной траектории, которым соответствует равенство нулю вертикальной составляющей относительной скорости. Согласно (6.4.7) последующие импульсы также должны прикладываться в этих точках, отстоящих друг от друга на половину витка. При этом целые числа k и $k+l$ не должны быть одновременно четными. Из-за ухудшения точности линеаризованных уравнений с ростом времени наибольший интерес для практики могут представлять только программы коррекции, которым отвечают наименьшие продолжительности сближения, т. е. $k = l = 1$. В этом случае формулы для расчета импульсов, следующие из (6.4.8), имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta v_{x1} &= \omega_0 \left(\frac{x_1}{6\pi} + \frac{15}{8} y_1 \right) - v_{x1}, \\ \Delta v_{x2} &= \frac{\omega_0}{4} y_1, \\ \Delta v_{x3} &= -\omega_0 \left(\frac{x_1}{6\pi} + \frac{1}{8} y_1 \right). \end{aligned}$$

С точки зрения формулировки алгоритма управления выражения для второго корректирующего импульса Δv_{x2} желательно представить через текущие параметры относительного движения, которые будут иметь место непосредственно перед его приложением. Из общих интегралов уравнений околокругового относительного движения

нетрудно установить, что при $\theta_2 = \theta_1 + \pi$

$$x_1 = x_2 - 3\pi \left(2y_2 - \frac{1}{\omega_0} v_{x2} \right),$$

$$2y_1 - \frac{1}{\omega_0} (v_{x1} + \Delta v_{x1}) = -\frac{x_1}{6\pi} + \frac{1}{8} y_1 = 2y_2 - \frac{1}{\omega_0} v_{x2},$$

$$\frac{2}{\omega_0} (v_{x1} + \Delta v_{x1}) - 3y_1 = \frac{x_1}{3\pi} + \frac{3}{4} y_1 = -\frac{2}{\omega_0} v_{x2} + 3y_2.$$

Отсюда находим

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4} y_2, \quad x_1 = -\frac{3\pi}{4} \left(9y_2 - \frac{4}{\omega_0} v_{x2} \right), \quad y_1 = 7y_2 - \frac{4}{\omega_0} v_{x2},$$

так что

$$\Delta v_{x2} = \frac{\omega_0}{4} y_1 = \omega_0 \left(\frac{x_2}{6\pi} + \frac{15}{8} y_2 \right) - v_{x2}.$$

Таким образом, первые два корректирующих импульса выражаются через текущие параметры движения одной и той же формулой

$$\Delta v_x = \omega_0 \left(\frac{x}{6\pi} + \frac{15}{8} y \right) - v_x$$

и должны прикладываться тогда, когда $v_y = 0$. Очевидно, правила подобного рода могут использоваться и при наличии возмущений, отклоняющих траекторию сближения от расчетной. Заметим, что при отсутствии возмущений второй корректирующий импульс Δv_{x2} прикладывается на линии $x = -\frac{3\pi}{4} y$, соответствующей условиям гоманова перехода в линеаризованной форме [121].

Для иллюстрации экономичности трехимпульсных программ горизонтальных коррекций по сравнению с оптимальными двухимпульсными программами на рис. 6.13 представлены графики зависимости характеристических скоростей от угла начального положения α_0 ($J_i = |\Delta v_{xi}|$, $i = 1, 2, 3$). Начальные условия по скорости задавались в соответствии с уравнениями

$$v_{x0} = \frac{3}{2} \omega_0 y_0, \quad v_{y0} = 0,$$

характеризующими переход между компланарными круговыми орбитами. Из этих зависимостей следует, что трех-

импульсные программы (сплошная кривая) более экономичны, чем оптимальные двухимпульсные программы (пунктирная кривая). Однако для их реализации в общем

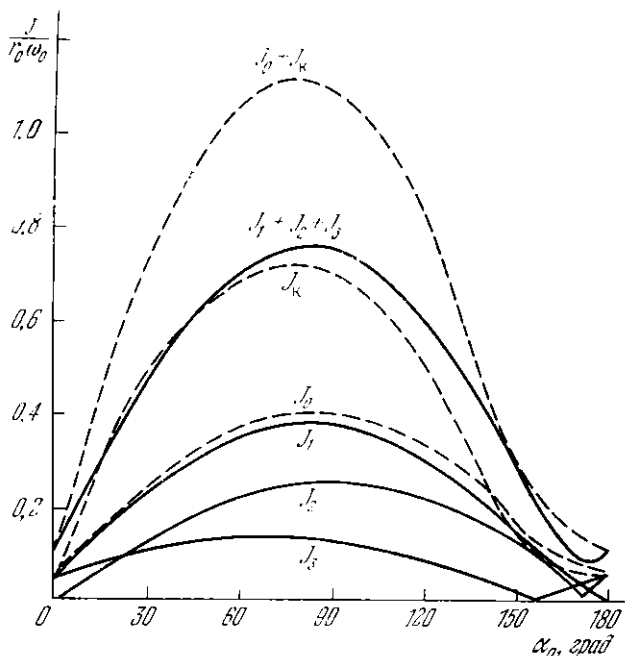


Рис. 6.13.

случае может потребоваться время ожидания до полу-периода, что может привести к большому разлету аппаратов по дуге опорной орбиты.

§ 6.5. ЗАКОНЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Как в двухимпульсных, так и в многоимпульсных схемах последний корректирующий импульс предназначен для гашения относительной скорости до нуля в момент достижения цели. Однако из-за ограниченности тяги двигателей маневрирования конечное торможение не может быть реализовано мгновенно. Для безопасности причаливания оно должно быть «растянуто» по времени и

организовано так, чтобы обеспечить уменьшение величины относительной скорости одновременно с уменьшением дальности до цели.

Для решения этой задачи можно выбрать в принципе два пути: переходить на небольших дальностях к методу параллельного наведения или, оставаясь в рамках метода свободных траекторий, использовать линейную зависимость потребной скорости от дальности и эффект уменьшения величины конечной скорости при увеличении расчетного времени сближения.

Последний путь приводит к методам, которые могут быть названы методами *асимптотического торможения* [52]. Для понимания основной идеи асимптотического торможения рассмотрим *метод затухающего перехвата*, предложенный в работе [122].

Ради простоты ограничимся, как и в [122], случаем компланарного сближения с целью на круговой орбите, хотя основные принципы управления остаются справедливыми и в более общих случаях. Пусть T — расчетное время сближения, отсчитываемое от текущего момента времени t , и

$$\theta = \omega_0 T, \quad d = 8(1 - \cos \theta) - 3\theta \sin \theta.$$

Тогда составляющие потребной и конечной скоростей определяются через текущие координаты из уравнений (6.1.5), (6.1.11) и (6.1.12) в явном виде следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\omega_0}{d} [x \sin \theta + 2y(1 - \cos \theta - d)], \\ \dot{y} &= -\frac{\omega_0}{d} [2x(1 - \cos \theta) + y(4 \sin \theta - 3\theta \cos \theta)] \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_K &= -\frac{\omega_0}{d} [x \sin \theta + 2y(1 - \cos \theta)], \\ \dot{y}_K &= \frac{\omega_0}{d} [2x(1 - \cos \theta) - y(4 \sin \theta - 3\theta)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.5.2)$$

Обычно время T вычисляется как время, оставшееся до встречи, т. е.

$$T = t_K - t, \quad (6.5.3)$$

где значение расчетного момента встречи t_k постоянно. Тогда, если в начальный момент времени t_0 перевести управляемый аппарат на траекторию сближения, то (без учета ошибок) в каждый последующий момент времени $t > t_0$ измеряемые действительные скорости будут совпадать с потребными скоростями, вычисляемыми по формулам (6.5.1). В результате корректировать дополнительно траекторию оказывается не нужным вплоть до момента времени t_k . При этом составляющие конечной скорости (6.5.2), которую необходимо погасить тормозным импульсом, будут иметь одни и те же постоянные значения независимо от того, в какой точке траектории сближения они вычислены на момент времени t_k .

Чтобы уменьшить величину конечной скорости сближения, нужно увеличить расчетное время сближения T , входящее в формулы (6.5.1) и (6.5.2) через переменную θ , по сравнению со значением, даваемым уравнением (6.5.3). Предположим, что после некоторого времени полета по первоначальной траектории сближения реализована дополнительная коррекция, которая вычислена как разность между новой потребной скоростью, соответствующей новому времени сближения, и действительной скоростью. Тогда аппарат перейдет на другую траекторию сближения, для которой благодаря большей продолжительности полета конечная скорость должна быть меньше по величине, чем первоначально вычисленная. Увеличивая число таких повторных коррекций, можно перейти в пределе к непрерывному управлению, обеспечивающему уменьшение конечной скорости до нуля.

Пусть расчетное время сближения T изменяется непрерывно согласно уравнению

$$T = t_k - \kappa t,$$

где κ — постоянный коэффициент сдвига времени. Предположим, что текущее время t приближается к значению t_k/κ и, следовательно, величина θ стремится к нулю, так как $\theta = \omega_0(t_k - \kappa t)$. Тогда, используя приближенное представление

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2,$$

уравнения (6.5.1) можно аппроксимировать следующим

образом:

$$\dot{x} = -\frac{x}{t_k - \kappa t} + \omega_0 y, \quad \dot{y} = -\frac{y}{t_k - \kappa t} - \omega_0 x.$$

Из общего решения этих уравнений, имеющего вид

$$x = (\kappa\varphi)^{\frac{1}{\kappa}} (c_1 \cos \varphi - c_2 \sin \varphi),$$

$$y = (\kappa\varphi)^{\frac{1}{\kappa}} (c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные интегрирования и

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\kappa} (t_k - \kappa t),$$

следует, что при $\varphi \rightarrow 0$ ($t_k \rightarrow t_k/\kappa$) значения координат, скоростей и ускорений стремятся к нулю, если только $0 < \kappa < 1/2$. Иными словами, конечное торможение, достигаемое за счет увеличения расчетного времени сближения, может быть реализовано за конечное время с помощью ограниченной по величине тяги.

К асимптотическим методам торможения, обеспечивающим последовательное уменьшение величины относительной скорости, можно отнести также *метод координатно-скоростных коррекций* [4], суть которого состоит в следующем. Наряду с коррекциями, которые приводят к уменьшению до нуля составляющих конечного промаха (но не гасят конечной скорости) и определяются уравнениями вида (6.1.4), используются коррекции, которые приводят к уменьшению до нуля конечной скорости (но не ликвидируют промаха) и определяются уравнениями вида (6.1.6). Если выбором времени сближения T свести к минимуму разность между векторами потребной скорости, соответствующими двум типам коррекций, то можно ожидать, что будет достигнуто уменьшение как промаха, так и конечной скорости. Прикладывая серию таких коррекций, можно обеспечить выполнение условий встречи с требуемой точностью и по координатам и по скоростям. В работе [4] предлагается выбирать расчетное время сближения из условия совпадения потребных скоростей (6.1.5) и (6.1.7) только по направлению. Тогда коррекции конечной скорости будут сближающими только в случае круговых опорных орбит и то не при всех начальных усло-

виях. В связи с этим некоторый интерес может представлять нахождение других аналогичных условий, которые обеспечивали бы асимптотическое торможение и в более общих случаях. Например, можно исследовать условие совмещения направлений потребных скоростей, когда в качестве их составляющих используются не производные от координат $\dot{x}$ и $\dot{y}$, как в работе [4], а разности абсолютных скоростей, определяемые согласно (5.1.5). Можно также использовать условие минимума среднеквадратичной разности между составляющими векторов двух потребных скоростей и т. п. Однако нетрудно видеть, что такие условия выбора времени сближения для координатно-скоростных коррекций могут не всегда обеспечивать желаемый эффект уменьшения относительной скорости одновременно с уменьшением дальности до цели и поэтому имеют ограниченную область применения.

Более надежным подходом к организации асимптотического торможения, обобщающим метод затухающего перехвата, является подход, при котором потребные скорости сближения задаются в виде линейных зависимостей от текущих координат

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y,$$

$$\dot{z} = a_{33}z.$$

При этом коэффициенты a_{ij} , определяющие характеристики переходного процесса, могут быть переменными, как в методе затухающего перехвата, либо постоянными и удовлетворять критериям устойчивости замкнутой линейной системы управления.

Один из возможных вариантов выбора коэффициентов a_{ij} дают уравнения для потребной скорости (6.5.1), в которых расчетное время сближения $T(\theta)$ считается постоянным независимо от времени, истекшего с начала торможения. При таком выборе условия устойчивости выполняются при любых значениях T , кроме некоторых особых значений. Следовательно, время T можно считать свободным параметром и использовать его выбор для минимизации потребного расхода топлива в зависимости от начальных условий.

Другой выбор коэффициентов a_{ij} могут давать выражения для потребной скорости, соответствующей коррекциям конечной скорости и определяемой уравнениями вида (6.1.7).

Следует отметить, что законы асимптотического торможения, учитывающие разностное гравитационное ускорение, можно считать обобщением *экспоненциальных законов управления* [81, 113], которые этого ускорения не учитывают и в орбитальной системе координат записываются в виде

$$a_x = b_1 \dot{x} + b_2 x,$$

$$a_y = b_1 \dot{y} + b_2 y,$$

$$a_z = b_1 \dot{z} + b_2 z,$$

где b_1 — коэффициент, определяющий затухание переходного процесса; b_2 — коэффициент, определяющий величину потребного ускорения от тяги; a_x , a_y и a_z — составляющие этого ускорения.

§ 6.6. О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА СВОБОДНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ВИЗИРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

При использовании метода свободных траекторий определение корректирующих импульсов и прогнозирование параметров относительного движения наиболее удобно производить в орбитальной системе координат, связанной с одним из сближаемых аппаратов. Поэтому часто предполагается, что на борту управляемого аппарата эта система построена и применяется не только для вычислений, но и для ориентации аппарата при измерениях параметров относительного движения и исполнении расчетных коррекций скорости.

Обычно орбитальная система координат строится в полете с помощью специальных датчиков [62, 66]. При этом наиболее простой и распространенной является их жесткая установка на корпусе аппарата. В этом случае осями орбитального базиса будут оси, связанные с корпусом, при условии, что аппарат ориентирован в этой системе с требуемой точностью по всем трем каналам (рыскание, тангаж, крен). С другой стороны, при измерениях параметров относительного движения аппарат должен быть

ориентирован в направлении на цель той своей осью, по которой установлена антенна радиолокатора наведения. Следовательно, в периоды построения орбитальной системы координат может происходить потеря цели, а в периоды измерений — потеря орбитальной ориентации.

Это противоречие можно разрешить, если осуществить ориентацию аппарата в орбитальной системе один раз, запомнить это положение относительно инерциальных или связанных с корпусом осей в качестве начального и далее определять текущее положение этой системы посредством вычислений [17], корректируя периодически расчеты по показаниям датчиков. Однако процесс выставки датчиков при построении и коррекции орбитальной системы координат является сравнительно длительным и может занимать заметные доли витка. Такие продолжительности переходных процессов могут оказаться для управления сближением совершенно недопустимыми, так как они будут приводить к разлету аппаратов и к задержкам в расчете и исполнении коррекций относительного движения, вызывающим существенный перерасход топлива.

Другое техническое решение проблемы дает установка датчиков орбитальной системы координат или следящей антенны радиолокатора на основании, подвижном относительно корпуса аппарата. Однако подобный путь связан с большими конструктивными трудностями и усложняет общую компоновку аппарата. Поэтому представляет интерес найти возможности реализации метода свободных траекторий непосредственно в визирной системе координат и только на основе информации о параметрах относительного движения, получаемых измерениями в этой системе [33].

Пусть продольная ось управляемого аппарата x_1 , вдоль которой направлена антенна радиолокатора, ориентируется непрерывно на цель. При этом положение поперечных его осей x_2 и x_3 не устанавливается определенным, т. е. ориентация аппарата по крену может быть совершенно произвольной, лишь бы не была слишком большой скорость вращения по крену. Ограничение этой скорости необходимо для того, чтобы ослабить влияние перекрестных гироскопических связей при стабилизации продольной оси аппарата по линии визирования по каналам рыскания и тангажа.

Положение орбитальной системы координат xuz относительно связанной с корпусом визирной системы координат $x_1x_2x_3$ будем определять матрицей направляющих косинусов, изменение которых во времени описывается кинематическими уравнениями (3.1.8). Будем считать, что орбитальная система координат определена, если матрица направляющих косинусов известна в каждый момент времени.

Предположим, что при визировании цели измеряются следующие параметры: дальность до цели r , скорость изменения дальности $\dot{r}$, составляющие угловой скорости линии визирования ω_3 и ω_2 и скорость вращения аппарата по крену ω_1 . Кроме того, при последовательных измерениях путем соответствующей их обработки определяются также значения производных $\ddot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\omega}_3$, $\dot{\omega}_2$, $\dot{\omega}_1$.

Пусть составляющие корректирующего импульса в орбитальной системе координат вычисляются через текущие параметры относительного движения в соответствии с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_x &= a_{11}x + a_{12}y - \dot{x}, \\ \Delta v_y &= a_{21}x + a_{22}y - \dot{y}, \\ \Delta v_z &= a_{33}z - \dot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6.1)$$

где коэффициенты a_{ij} , зависящие от времени коррекции, времени сближения и параметров опорной орбиты, определяются из соотношений вида (6.1.9).

Проектируя вектор корректирующего импульса на оси визирной системы координат, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_1 &= l_1 \Delta v_x + m_1 \Delta v_y + n_1 \Delta v_z, \\ \Delta v_2 &= l_2 \Delta v_x + m_2 \Delta v_y + n_2 \Delta v_z, \\ \Delta v_3 &= l_3 \Delta v_x + m_3 \Delta v_y + n_3 \Delta v_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.6.2)$$

где l_i , m_i , n_i ($i = 1, 2, 3$) — направляющие косинусы осей визирной системы координат $x_1x_2x_3$ относительно осей орбитальной системы координат xuz .

Выразим координаты x , y , z через дальность r и направляющие косинусы:

$$x = l_1 r, \quad y = m_1 r, \quad z = n_1 r. \quad (6.6.3)$$

Дифференцируя (6.6.3), с помощью кинематических соот-

ношений (3.1.8) находим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= l_1 \dot{r} + (l_2 \omega_3 - l_3 \omega_2 + m_1 \dot{\theta}) r, \\ \dot{y} &= m_1 \dot{r} + (m_2 \omega_3 - m_3 \omega_2 - l_1 \dot{\theta}) r, \\ \dot{z} &= n_1 \dot{r} + (n_2 \omega_3 - n_3 \omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.6.4)$$

Подстановка (6.6.3) и (6.6.4) в (6.6.1) с последующей подстановкой в (6.6.2) после несложных преобразований дает

$$\Delta v_1 = v_1 r - \dot{r}, \quad \Delta v_2 = v_2 r - \omega_3 r, \quad \Delta v_3 = v_3 r + \omega_2 r,$$

где

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a_{11} \dot{l}_1^2 + a_{22} m_1^2 + a_{33} n_1^2 + (a_{12} + a_{21}) l_1 m_1, \\ v_2 &= a_{11} l_1 l_2 + a_{22} m_1 m_2 + a_{33} n_1 n_2 + \\ &\quad + a_{12} m_1 l_2 + a_{21} l_1 m_2 + \dot{\theta} n_3, \\ v_3 &= a_{11} l_1 l_3 + a_{22} m_1 m_3 + a_{33} n_1 n_3 + \\ &\quad + a_{12} m_1 l_3 + a_{21} l_1 m_3 - \dot{\theta} n_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.5)$$

Отсюда следует, что в визирной системе координат корректирующий импульс выражается через непосредственно измеряемые параметры движения, причем потребная скорость линейно уменьшается с уменьшением дальности. Однако коэффициенты пропорциональности, задающие функцию потребной скорости от дальности, неизвестны до тех пор, пока не будет определено положение орбитальной системы координат относительно визирной системы.

Линеаризованные уравнения относительного движения в визирной системе координат имеют вид (3.1.4). Зная текущие значения параметров r , ω_1 , ω_2 и ω_3 и их производных, из этих уравнений для случая круговой опорной орбиты ($\mu R^{-3} = \omega_0^2$) можно вычислить следующие величины (при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$):

$$\begin{aligned} \alpha &= m_1^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\ddot{r}}{r \omega_0^2} - \frac{\omega_3^2 + \omega_2^2}{\omega_0^2} + 1 \right), \\ \beta &= m_1 m_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{\omega}_3}{\omega_0^2} + 2 \frac{\dot{r} \omega_3}{r \omega_0^2} + \frac{\omega_1 \omega_3}{\omega_0^2} \right), \\ \gamma &= m_1 m_3 = \frac{1}{3} \left(- \frac{\dot{\omega}_2}{\omega_0^2} - 2 \frac{\dot{r} \omega_2}{r \omega_0^2} + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_0^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= 2m_1\dot{m}_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\ddot{r}}{r\omega_0^2} - \frac{\dot{r}\ddot{r}}{r^2\omega_0^2} - 2 \frac{\omega_3\dot{\omega}_3 + \omega_2\dot{\omega}_2}{\omega_0^2} \right), \\
\dot{\beta} &= m_1\dot{m}_2 + m_2\dot{m}_1 = \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{\ddot{\omega}_3}{\omega_0^2} + 2 \frac{\dot{r}\dot{\omega}_3}{r\omega_0^2} + 2 \frac{\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}^2}{r^2\omega_0^2} \omega_3 + \frac{\omega_1\dot{\omega}_2 + \omega_2\dot{\omega}_1}{\omega_0^2} \right), \\
\dot{\gamma} &= m_1\dot{m}_3 + m_3\dot{m}_1 = \\
&= \frac{1}{3} \left(-\frac{\ddot{\omega}_2}{\omega_0^2} - 2 \frac{\dot{r}\dot{\omega}_2}{r\omega_0^2} - 2 \frac{\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}^2}{r^2\omega_0^2} \omega_2 + \frac{\omega_1\dot{\omega}_3 + \omega_3\dot{\omega}_1}{\omega_0^2} \right).
\end{aligned}$$

По этим величинам, используя снова кинематические соотношения (3.1.8), нетрудно определить

$$\left. \begin{aligned}
m_1 &= \pm \sqrt{\alpha}, \quad l_1 = \pm \frac{\omega_3\beta - \omega_2\gamma - \dot{\alpha} + \alpha\dot{\alpha}/2\alpha}{\omega_0\sqrt{\alpha}}, \\
m_2 &= \pm \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}, \quad l_2 = \pm \frac{\omega_1\gamma - \omega_2\alpha - \dot{\beta} + \beta\dot{\alpha}/2\alpha}{\omega_0\sqrt{\alpha}}, \\
m_3 &= \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}, \quad l_3 = \pm \frac{\omega_2\alpha - \omega_1\beta - \dot{\gamma} + \gamma\dot{\alpha}/2\alpha}{\omega_0\sqrt{\alpha}}.
\end{aligned} \right\} \quad (6.6.6)$$

Таким образом, направляющие косинусы осей x и y орбитальной системы координат определены, если $\alpha \neq 0$. Направляющие косинусы оси z легко определяются из условий ортогональности матрицы направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}
n_1 &= l_2m_3 - l_3m_2, \\
n_2 &= l_3m_1 - l_1m_3, \\
n_3 &= l_1m_2 - l_2m_1.
\end{aligned}$$

Как видно из полученных формул, направления осей x и y определяются из уравнений относительного движения в визирной системе координат лишь с точностью до знака. Такая неопределенность является следствием центральной симметрии относительного движения, и без дополнительной информации раскрыть ее невозможно. Однако при управлении сближением это не имеет существенного значения, так как в расчетные формулы (6.6.5) направляющие косинусы этих осей входят лишь в виде попарных произведений.

Следует отметить, что исходная информация является избыточной. Это видно из того, что по ней вычислены все шесть направляющих косинусов, между которыми имеются три дополнительных условия ортонормированности:

$$\left. \begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1, \\ m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 &= 0, \\ l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.7)$$

Первое из этих условий дает

$$\alpha = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \quad (6.6.8)$$

При соблюдении равенства (6.6.8) второе условие (6.6.7) будет выполняться тождественно, т. е. единичные векторы осей x и y , получаемые из измерений, будут ортогональными.

Из третьего условия следует

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \alpha &= \left(\omega_3 \beta - \omega_2 \gamma - \dot{\alpha} + \frac{\alpha \dot{\alpha}}{2\alpha} \right)^2 + \\ &+ \left(\omega_1 \gamma - \omega_3 \alpha - \dot{\beta} + \frac{\beta \dot{\alpha}}{2\alpha} \right)^2 + \left(\omega_2 \alpha - \omega_1 \beta - \dot{\gamma} + \frac{\gamma \dot{\alpha}}{2\alpha} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.6.9)$$

Таким образом, избыточность информации можно использовать для того, чтобы при наличии ошибок измерений вычисленные векторы были единичными и взаимно ортогональными. Для этого, используя соотношения (6.6.8) и (6.6.9), расчетные формулы (6.6.6) преобразуем к следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{f}}, & l_1 &= \frac{\omega_3 \beta - \omega_2 \gamma - \dot{\alpha} + \alpha g/f}{\sqrt{h}}, \\ m_2 &= \frac{\beta}{\sqrt{f}}, & l_2 &= \frac{\omega_1 \gamma - \omega_3 \alpha - \dot{\beta} + \beta g/f}{\sqrt{h}}, \\ m_3 &= \frac{\gamma}{\sqrt{f}}, & l_3 &= \frac{\omega_2 \alpha - \omega_1 \beta - \dot{\gamma} + \gamma g/f}{\sqrt{h}}, \end{aligned}$$

где знаки $\pm$ опущены и использованы обозначения

$$\begin{aligned} f &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, & g &= \alpha \dot{\alpha} + \beta \dot{\beta} + \gamma \dot{\gamma}, \\ h &= \left(\omega_3 \beta - \omega_2 \gamma - \dot{\alpha} + \frac{\alpha g}{f} \right)^2 + \left(\omega_1 \gamma - \omega_3 \alpha - \dot{\beta} + \frac{\beta g}{f} \right)^2 + \\ &+ \left(\omega_2 \alpha - \omega_1 \beta - \dot{\gamma} + \frac{\gamma g}{f} \right)^2. \end{aligned}$$

В особом случае $\alpha = 0$, который соответствует положению управляемого аппарата на орбите цели или на нормали к плоскости ее орбиты, аналогичным путем можно получить

$$\begin{aligned} m_1 &= 0, & l_1 &= \frac{\omega_3 \dot{\beta} - \omega_2 \dot{\gamma} - (\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2)}{\omega_0 \sqrt{\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}}, \\ m_2 &= \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}}, & l_2 &= m_3 \sqrt{1 - l_1^2}, \\ m_3 &= \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}}, & l_3 &= -m_2 \sqrt{1 - l_1^2}. \end{aligned}$$

Точность определения орбитальной системы координат по измерениям параметров относительного движения в визирной системе координат зависит от точности принятой модели относительного движения, аппаратных ошибок измерений, ошибок ориентации и погрешностей определения производных в результате обработки измерительной информации.

Методические ошибки можно свести к минимуму, выбрав более точную модель относительного движения, чем линейная модель с круговой опорной орбитой, принятая выше лишь для упрощения выкладок и более ясного объяснения основных положений метода. Предлагаемый метод нетрудно обобщить и на существенно некруговые опорные орбиты. Однако если для околокруговых движений достаточно иметь на борту информацию лишь о средней угловой орбитальной скорости ω_0 на номинальной орбите, относительно которой производится линеаризация разностного гравитационного ускорения, то для некруговых орбит необходимо знать три элемента, определяющих опорную орбиту в ее плоскости.

Несколько более сложно определять орбитальную систему координат исходя из точных уравнений относительного движения (3.1.3), поскольку величина m_1 входит в них существенно нелинейно. Поэтому для ее вычисления необходимо прибегать к итерациям, используя в качестве начального приближения значение, даваемое линеаризованными уравнениями.

Влияние ошибок измерений на точность определения орбитальной системы координат можно значительно

уменьшить, применяя статистические методы обработки информации. При этом одновременно с определением требуемых направляющих косинусов могут уточняться также необходимые элементы опорной орбиты, неточность знания которых эквивалентна до некоторой степени ошибкам измерений.

Что касается ошибок ориентации, то их влияние зависит от приборной реализации системы управления. Можно, например, уменьшить это влияние, если развязать движение антенны радиолокатора при слежении за целью от углового движения корпуса аппарата и определять орбитальную систему координат относительно осей, связанных с антенной.

Численные оценки показывают, что при ошибках измерений, типичных для современных радиолокационных средств, точность определения орбитальной системы координат по измерениям параметров относительного движения (при соответствующей их обработке) сравнима с точностью построения этой системы с помощью специальных датчиков.

Если на борту имеется инерциальная система координат, то орбитальный базис может быть определен и относительно этой системы отсчета. При этом вместо дифференциальных можно использовать интегральные уравнения относительного движения аналогично тому, как это делается в работе [61].

§ 6.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В предыдущих параграфах были рассмотрены приближенные методы определения корректирующих импульсов в задаче сближения, основанные на использовании аналитических решений линеаризованных уравнений относительного движения и имеющие вследствие этого ограниченную область применения. Более точные и общие методы расчета корректирующих импульсов можно строить исходя из аналитического решения точных уравнений относительного движения (см. § 5.6). Ниже излагается один из таких методов, предполагающий использование двух-импульсной схемы маневра сближения. Этот метод,

выведенный в работе [34], имеет много общего с методами решения задачи Ламберта в абсолютной системе координат, но отличается от них меньшей чувствительностью к ошибкам округления.

Как и при решении двухимпульсной задачи управления в других формулировках, будем предполагать, что моменты приложения t_0 и t_k начального и конечного импульсов фиксированы. При этом моменту времени t_0 соответствует значение угла перехода по опорной орбите $\theta = 0$, а моменту времени t_k — известное значение θ .

Прежде всего покажем, что, как и при решении задачи в абсолютной системе координат, все неизвестные параметры, определяющие траекторию сближения и, следовательно, корректирующие импульсы, можно выразить через какой-либо один параметр. При использовании решения уравнений относительного движения в форме (5.6.1) или (5.6.7) наиболее простые расчетные формулы получаются, если за основную неизвестную принять константу c_2 , которая представляет собой приведенную разность постоянных площадей двух орбит в проекции на нормаль к плоскости орбиты сближения.

При выводе расчетных формул будем исходить из условий перехвата

$$x(t_k) = y(t_k) = z(t_k) = 0.$$

В соответствии с этим приравняем нулю конечные значения координат, которые определяются из уравнений (5.6.7) для $t = t_k$ и соответствующего значения угла перехода θ_k . В результате получим

$$\psi = \theta_k, \quad (6.7.1)$$

$$\Lambda_k = 1 + c_4 \cos \theta_k - c_5 \sin \theta_k = \frac{(1 + c_2)^2}{1 + c_3^2 + c_6^2} \lambda_{k, \text{н}}, \quad (6.7.2)$$

$$c_3 \cos \theta_k + c_6 \sin \theta_k = 0. \quad (6.7.3)$$

Из последнего уравнения нетрудно установить, что

$$c_3 = -b \sin \theta_k, \quad c_6 = b \cos \theta_k, \quad (6.7.4)$$

где

$$b = \pm \sqrt{c_3^2 + c_6^2}.$$

Подставив теперь соотношения (6.7.4) в выражения для постоянных c_3 и c_6 (5.6.2), найдем

$$b = -\frac{1}{R_s} z_0,$$

$$\dot{z}_{T0} = \frac{1}{R_s} \left[(\dot{R}_{0\text{н}} + \dot{y}_{T0}) \sin \theta_{\text{н}} + \dot{x}_{T0} \cos \theta_{\text{н}} - \frac{\mu^2}{K_{\text{н}}^3} \lambda_{0\text{н}}^2 R_c \right],$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$R_c = (R_{0\text{н}} + y_0) \cos \theta_{\text{н}} - x_0 \sin \theta_{\text{н}},$$

$$R_s = (R_{0\text{н}} + y_0) \sin \theta_{\text{н}} + x_0 \cos \theta_{\text{н}}.$$

Таким образом, величина b и, следовательно, постоянные c_3 и c_6 полностью определены, а составляющая потребной начальной скорости перехода по оси z выражена через составляющие потребной скорости по осям x и y .

Чтобы определить составляющие начальной потребной скорости перехода $\dot{x}_{T0}$ и $\dot{y}_{T0}$, подставим выражения для постоянных c_4 и c_5 через начальные условия из уравнений (5.6.2) в уравнение (6.7.2) и используем явное выражение для постоянной c_2 через эти же условия. В результате получим линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных $\dot{x}_{T0}$ и $\dot{y}_{T0}$. Решение этих уравнений, дополненное преобразованным выражением для $\dot{z}_{T0}$, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{T0} &= \frac{\mu}{K_{\text{н}}} \frac{\beta x_0 - p_a \sin \theta_{\text{н}}}{(1 + c_2) R_s} + \frac{K_{\text{н}}}{R_{0\text{а}}^2} (R_{0\text{н}} + y_0), \\ \dot{y}_{T0} &= \frac{\mu}{K_{\text{н}}} \frac{\beta (R_{0\text{н}} + y_0) + p_a \cos \theta_{\text{н}}}{(1 + c_2) R_s} - \frac{K_{\text{н}}}{R_{0\text{а}}^2} x_0 - \dot{R}_{0\text{н}}, \\ \dot{z}_{T0} &= \frac{\mu}{K_{\text{н}}} \frac{\beta z_0}{(1 + c_2) R_s}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.5)$$

Здесь

$$p_a = \frac{K_{\text{н}}^2 (1 + c_2)^2}{\mu (1 + b^2)}, \quad \beta = \gamma - \frac{R_c}{R_{0\text{а}}}, \quad \gamma = 1 - \frac{(1 + c_2)^2}{1 + b^2} \lambda_{\text{н.н}},$$

где

$$R_{0\text{а}} = \sqrt{x_0^2 + (R_{0\text{н}} + y_0)^2 + z_0^2}.$$

В соответствии с этим выражения для постоянных c_4 и c_5 преобразуются к виду

$$c_4 = \frac{1}{R_s} [(p_a - R_{0a}) \sin \theta_a - x_0 \gamma],$$

$$c_5 = \frac{1}{R_s} [(p_a - R_{0a}) \cos \theta_a + (R_{0a} + y_0) \gamma].$$

Теперь можно получить выражения для составляющих конечной скорости перехода. Для этого при $t = t_K$ преобразуем выражения для $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$, даваемые уравнениями (5.6.7), в соответствии с условиями (6.7.1) — (6.7.3) и (6.7.5). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_K &= \frac{\mu}{K_{\Pi}} \frac{b^2 - c_2}{1 + b^2} \lambda_{K,\Pi}, \\ \dot{y}_K &= -\frac{\mu}{K_{\Pi}} \varepsilon_{K,\Pi} + \frac{\mu}{K_{\Pi}} \frac{p_a - R_{0a} + R_s \gamma}{(1 + c_2) R_s}, \\ \dot{z}_K &= \frac{\mu (1 + c_2)}{K_{\Pi} (1 + b^2)} b \lambda_{K,\Pi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.6)$$

Итак, единственной неизвестной величиной, через которую выражены все остальные, является значение постоянной c_2 . Эта постоянная определяется из разностного уравнения Кеплера, соответствующего траектории сближения.

Решить уравнение Кеплера относительно неизвестной c_2 можно с помощью следующего алгоритма.

Сначала определяется значение угла перехода θ_a , соответствующее орбите сближения, согласно уравнениям (4.3.5).

Через относительные координаты эти уравнения записываются в виде

$$\cos \theta_a = \frac{R_c}{R_{0a}}, \quad \sin \theta_a = \operatorname{sign}(R_s) \frac{\sqrt{R_s^2 + c_0^2}}{R_{0a}}.$$

Затем выбирается некоторое начальное приближение для c_2 , например $c_2 = 0$, и для этого значения вычисляются

значения параметров орбиты сближения:

$$p_a = \frac{K_a^2 (1 + c_a)^2}{\mu (1 + b^2)}, \quad c_a = \frac{p_a}{R_{0a}} - 1,$$

$$s_a = \sqrt{\frac{p_a}{\mu}} R_{0a} = \frac{(1 + c_a) R_c + \gamma R_{0a}}{\sqrt{1 + b^2} R_s},$$

$$e_a = \sqrt{c_a^2 + s_a^2}, \quad \lambda_{\kappa, a} = 1 + c_a \cos \theta_a - s_a \sin \theta_a.$$

Далее, в зависимости от значения эксцентриситета орбиты сближения e_a вычисления ведутся по следующим формулам:

при $e_a < 1$:

$$L = \frac{p_a}{1 - e_a^2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - e_a^2}{1 + c_a}, \quad \delta_0 = \frac{\sqrt{1 - e_a^2}}{1 + c_a}, \quad \sigma_0 = \delta_0 s_a,$$

$$\cos \Delta = 1 - \rho_0 \frac{1 - \cos \theta_a}{\lambda_{\kappa, a}},$$

$$\sin \Delta = \delta_0 \frac{(1 + c_a) \sin \theta_a - s_a (1 - \cos \theta_a)}{\lambda_{\kappa, a}},$$

$$f_1 = \sin \Delta, \quad f_2 = 1 - \cos \Delta, \quad f_3 = \Delta - \sin \Delta;$$

при $e_a = 1$:

$$L = p_a, \quad \rho_0 = \frac{1}{1 + c_a}, \quad \sigma_0 = \frac{s_a}{1 + c_a},$$

$$\Delta = \frac{(1 + c_a) \sin \theta_a - s_a (1 - \cos \theta_a)}{(1 + c_a) \lambda_{\kappa, a}},$$

$$f_1 = \Delta, \quad f_2 = \frac{1}{2} \Delta^2, \quad f_3 = \frac{1}{6} \Delta^3;$$

при $e_a > 1$:

$$L = \frac{p_a}{e_a^2 - 1}, \quad \rho_0 = \frac{e_a^2 - 1}{1 + c_a}, \quad \delta_0 = \frac{\sqrt{e_a^2 - 1}}{1 + c_a}, \quad \sigma_0 = \delta_0 s_a,$$

$$\operatorname{ch} \Delta = 1 + \rho_0 \frac{1 - \cos \theta_a}{\lambda_{\kappa, a}},$$

$$\operatorname{sh} \Delta = \delta_0 \frac{(1 + c_a) \sin \theta_a - s_a (1 - \cos \theta_a)}{\lambda_{\kappa, a}},$$

$$f_1 = \operatorname{sh} \Delta, \quad f_2 = \operatorname{ch} \Delta - 1, \quad f_3 = \operatorname{sh} \Delta - \Delta.$$

После этого определяется расчетное время сближения

$$T_p = \sqrt{\frac{L^3}{\mu}} (\rho_0 f_1 + \sigma_0 f_2 + f_3).$$

Если это время отличается от заданного времени $T = t_k - t_0$ в пределах требуемой точности решения, то задача решена. В противном случае вычисляется поправка к приближенному значению c_2 по методу Ньютона согласно формуле

$$\delta c_2 = (T - T_p) \left/ \frac{dT_p}{dc_2} \right.,$$

где производная dT_p/dc_2 определяется численным дифференцированием.

После нахождения значения c_2 составляющие начальной потребной скорости и конечной скорости перехода вычисляются непосредственно по уравнениям (6.7.5) и (6.7.6). В результате определяются составляющие начального импульса скорости

$$\Delta v_{x0} = \dot{x}_{T0} - \dot{x}_0,$$

$$\Delta v_{y0} = \dot{y}_{T0} - \dot{y}_0,$$

$$\Delta v_{z0} = \dot{z}_{T0} - \dot{z}_0,$$

где начальные значения производных от координат $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ считаются известными, и величина конечного импульса

$$J_K = \sqrt{\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2 + \dot{z}_K^2}.$$

Необходимо отметить, что в приведенном выше решении при небольших относительных отклонениях некоторые члены представляют собой разности почти одинаковых величин, так что при численных расчетах может происходить потеря точности вычислений. Однако в отличие от решения двухимпульсной задачи управления в абсолютной системе координат эта трудность может быть устранена, ибо соответствующие разности легко преобразовать к форме, нечувствительной к ошибкам округления [34].

РЕШЕНИЕ ДВУХИМПУЛЬСНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Работа алгоритма управления сближением космических аппаратов по методу свободных траекторий независимо от того, является ли программа коррекций рассчитанной заранее или определяемой на борту, распадается на следующие этапы:

- измерения и обработка измерений;
- расчет корректирующего импульса;
- выдача команд на реализацию вычисленного импульса.

Указанный цикл повторяется для всех коррекций.

Рассмотрим итерационный метод расчета отдельного корректирующего импульса, представляющий собой по существу метод Ньютона решения краевой задачи и включающий в себя:

- прогноз конечных параметров (координат) управляемого аппарата на момент его встречи с целью;

- определение невязок конечных параметров и расчет частных производных от промахов по составляющим начальной скорости;

- расчет поправок начальной потребной скорости;

- повторение вычислений по предыдущим пунктам до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

Наиболее трудоемким из указанных вычислений является прогноз конечных параметров. Этот прогноз осуществляется путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений относительного движения в орбитальной системе координат (5.1.3). Для простоты будем рассматривать плоское движение. В этом случае:

уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \lambda^2 \dot{y} - 2 \frac{\mu}{p^3} \varepsilon \lambda^3 y + \\ &\quad + \frac{\mu}{p^3} \lambda^4 x - \frac{\mu x}{\left[x^2 + \left(\frac{p}{\lambda} + y \right)^2 \right]^{3/2}} + a_x, \\ \ddot{y} &= -2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \lambda^2 \dot{x} + 2 \frac{\mu}{p^3} \varepsilon \lambda^3 x + \frac{\mu}{p^3} \lambda^4 y - \\ &\quad - \frac{\mu \left(\frac{p}{\lambda} + y \right)}{\left[x^2 + \left(\frac{p}{\lambda} + y \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\mu}{p^2} \lambda^2 + a_y. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.1)$$

Требуется проинтегрировать систему уравнения (7.1.1) при начальных условиях

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, & \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \\ y(t_0) &= y_0, & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0 \end{aligned}$$

и оценить условия в конечный момент времени t_k , т. е. определить $x(t_k)$, $y(t_k)$, $\dot{x}(t_k)$, $\dot{y}(t_k)$.

Полагая величину методической погрешности интегрирования известной, примем следующие основные критерии для анализа и выбора метода численного интегрирования:

потребный объем постоянной и оперативной памяти для реализации метода в БЦВМ;

вычислительное время, необходимое для прогноза конечных параметров движения.

Для определения корректирующего импульса необходимо решение следующей краевой задачи. Для заданных начальных условий по положению $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ найти такие составляющие начальной потребной скорости $\dot{x}(t_0 + 0) = \dot{x}_0^+$, $\dot{y}(t_0 + 0) = \dot{y}_0^+$, которые обеспечивали бы выполнение условий $x(t_k) = y(t_k) = 0$. Разность между потребной и заданной начальными скоростями дает составляющие корректирующего импульса

$$\Delta \dot{x}_0 = \dot{x}_0^+ - \dot{x}_0^-, \quad \Delta \dot{y}_0 = \dot{y}_0^+ - \dot{y}_0^-.$$

При использовании метода Ньютона решение этой краевой задачи сводится к последовательности численного

решения задачи Коши, связанной с уточнением начальной потребной скорости в зависимости от невязок конечных координат. В этом случае выбор алгоритма расчета корректирующего импульса состоит по существу в выборе численного метода решения задачи Коши для системы (7.1.1). При численном интегрировании удобнее использовать безразмерную форму этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= \frac{1}{\lambda^2}, \quad \xi' = \frac{1}{\lambda^2} v_z, \quad \eta' = \frac{1}{\lambda^2} v_\eta, \\ v_z' &= 2v_\eta - 2\varepsilon\lambda\eta - (\kappa_0 - \lambda)\lambda\xi + \frac{1}{\lambda^2} \alpha_z, \\ v_\eta' &= -2v_z + \\ &\quad + 2\varepsilon\lambda\xi - (\kappa_0 - \lambda)\lambda\eta + 1 - \kappa_0 + \frac{1}{\lambda^2} \alpha_\eta, \\ \kappa_0 &= [1 + 2\lambda\eta + \lambda^2(\xi^2 + \zeta^2)]^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.2)$$

где $\lambda = 1 + e \cos \vartheta$, $\varepsilon = e \sin \vartheta$, а ξ , η , v_z , v_η — безразмерные относительные координаты и составляющие относительной скорости. В дальнейшем речь будет идти об интегрировании именно этой системы дифференциальных уравнений относительного движения.

§ 7.2. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНЕНИЯ УПРОЩЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА КОРРЕКТИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ

Как следует из предыдущей главы, простое аналитическое решение поставленной краевой задачи для системы (7.1.1) или (7.1.2) возможно лишь при существенных упрощениях. А именно, конечные выражения для потребной скорости можно получить исходя из приближенных уравнений относительного движения с учетом членов первого или второго порядка малости в разложении разностного гравитационного ускорения. Такие алгоритмы определения корректирующих импульсов, справедливые только при малых расстояниях между сближаемыми космическими аппаратами по сравнению с их расстоянием до центра притяжения, обладают, кроме того, приемлемой точностью лишь при небольших расчетных временах сближения из-за наличия вековых членов в решениях исходных приближенных уравнений относительного движения.

Подробный анализ методических ошибок упрощенных алгоритмов будет дан в главе 9. Здесь же, в § 7.2, будет только продемонстрирована их ограниченная применимость на типичных примерах. Конкретно рассматриваются три алгоритма;

основанный на линеаризованных уравнениях относительного движения в предположении круговой опорной орбиты;

основанный на линеаризованных уравнениях относительного движения в предположении существенно некруговой опорной орбиты;

основанный на приближенных уравнениях относительного движения, учитывающих члены второго порядка малости, в предположении эллиптической опорной орбиты малого эксцентриситета.

Методические погрешности упрощенных алгоритмов расчета корректирующих импульсов удобно характеризовать величиной конечного промаха, накапливающегося к расчетному моменту встречи. При заданных начальных условиях по положению эту ошибку нетрудно определить с помощью численного интегрирования уравнений относительного движения, используя в качестве начальных условий по скорости составляющие потребной скорости, найденные по соответствующему упрощенному алгоритму.

Методические ошибки, связанные с упрощением расчета корректирующих импульсов и приводящие к конечному промаху, исследовались на примере решения задачи сближения с целью на эллиптической орбите, имеющей эксцентриситет $e \approx 0,03$, при начальной относительной дальности $r_0 = 0,11$. Зависимость конечного промаха Δr от угла перехода θ по орбите цели, эквивалентного заданному времени сближения, представлена на рис. 7.1. Кривые 1, 2, 3 отвечают соответственно линейной модели с круговой опорной орбитой, линейной модели с эллиптической опорной орбитой и квадратичной модели относительного движения, положенным в основу упрощенных алгоритмов расчета корректирующих импульсов.

Примем, что величина допустимого конечного промаха составляет 1% от начальной дальности (на рис. 7.1 эта величина отмечена пунктирной линией). Тогда можно видеть, что даже при длительностях маневра, которым соответствуют значения $\theta < 80^\circ$, методические погрешности

всех алгоритмов превышают допустимый промах. Аналогичный характер изменения методических ошибок имеет место и при других условиях сближения, причем ошибки возрастают с увеличением эксцентриситета орбиты цели и начальной дальности. Поэтому в общем случае следует использовать более точные алгоритмы расчета корректирующих импульсов и, в частности, алгоритм, основанный на решении краевой задачи итерационным методом Ньютона и подробно рассматриваемый в § 8.5.

Очевидно, что для реализации подобных алгоритмов прогноза необходима память для записи метода интегрирования и правых частей исходных дифференциальных уравнений. Ввиду того, что в системах команд некоторых БЦВМ может отсутствовать операция извлечения корня, правые части уравнений необходимо преобразовывать к соответствующему виду. При оценке потребной памяти будем основываться на уравнениях движения в форме (7.1.2) и предполагать использование методов интегрирования Рунге — Кутты, применяемых обычно при численном решении задачи Коши.

Предположим, что на борту управляемого аппарата установлена БЦВМ, в которой машинное слово имеет девятнадцать значащих разрядов. Тогда из предварительного анализа изменения значений переменных следует, что вычисления в БЦВМ достаточно проводить с одинарной разрядностью. Для реализации алгоритма прогноза необходимо 180—220 команд, из них 150 команд используются для записи правых частей дифференциальных уравнений. Если система команд БЦВМ содержит операцию извлечения корня, то потребное число команд уменьшается на

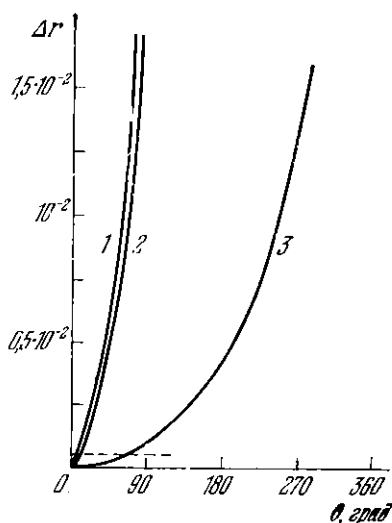


Рис. 7.1.

25—30. Для записи метода интегрирования Рунге — Кутты второго, третьего и четвертого порядков требуется соответственно 30, 50 и 70 команд. Необходимое количество ячеек оперативной памяти, используемых при реализации метода интегрирования, зависит от распределения вычислений, связанных с прогнозом, по тактам работы БЦВМ. Если все вычисления производятся в одном такте, то требуется около десяти ячеек оперативной памяти.

§ 7.3. ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Численное решение задачи Коши для системы m обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'_i = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m),$$

$$y_i(0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

без ограничений, налагаемых на вид правых частей f_i , и без использования производных более высоких порядков осуществляется с помощью методов интегрирования общего назначения. Имеется значительное количество работ, посвященных рассмотрению различных аспектов численного решения задачи Коши. В данном параграфе рассматриваются развитие некоторых идей в этой области и возможности их применения к решению задачи сближения космических аппаратов. Все алгоритмы оцениваются с точки зрения их применимости в БЦВМ.

Для описания численных методов интегрирования и анализа их свойств удобно использовать приведенную в [54] классификацию, согласно которой методы интегрирования разделяются на одноточечные, многоточечные, смешанные, двусторонние и рекуррентные.

Одноточечные методы для вычисления очередного значения функции используют только одно значение функции в предыдущей точке интегральной кривой, и на каждом шаге правая часть дифференциального уравнения вычисляется несколько (j) раз. Так, в методе Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n,$$

где h — шаг интегрирования, правая часть дифференциального уравнения вычисляется один раз ($j = 1$). Для

метода Рунге — Кутты третьего порядка

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(t_n, y_n), \\k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\k_3 &= hf\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2\right), \\y_{n+1} &= y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3\end{aligned}$$

правая часть вычисляется три раза ($j = 3$).

Многоточечные методы для продвижения вперед по интегральной кривой учитывают значения функции и ее производной в нескольких предыдущих точках. Например, в методе, имеющем структуру

$$y_{n+1} = y_n + h\left(2y'_n - \frac{3}{2}y'_{n-1} + \frac{1}{2}y'_{n-2}\right),$$

используется значение функции в исходной точке и значения производной в исходной и двух предыдущих точках. В модифицированном методе Гурка

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= 1,146208 y_n - 0,201087 y_{n-1} + 0,054879 y_{n-2} + \\&+ h(1,641586 y'_n - 1,008013 y'_{n-1} + 0,275097 y'_{n-2})\end{aligned}$$

учитываются значения функции и ее производной в исходной и двух предыдущих точках.

В многоточечных методах используются формулы предиктора и формулы корректора. С помощью формулы корректора новое значение функции, полученное по формуле предиктора, уточняется один или k раз. Примером может служить метод, имеющий структуру

$$\begin{aligned}z_{n+1} &= -4y_n + 5y_{n-1} + h(4y'_n + 2y'_{n-1}), \\y_{n+1} &= y_{n-1} + h\left(\frac{1}{3}z_{n+1} + \frac{4}{3}y'_n + \frac{1}{3}y'_{n-1}\right),\end{aligned}$$

и метод вида

$$\begin{aligned}z_{n+1} &= 1,547652 y_n - 1,867503 y_{n-1} + 2,017204 y_{n-2} - \\&- 0,697353 y_{n-3} + h(2,002247 y'_n - \\&- 2,031690 y'_{n-1} + 1,818609 y'_{n-2} - 0,714320 y'_{n-3}), \\y_{n+1} &= y_n + h(0,375000 z'_{n+1} + 0,791667 y'_n - \\&- 0,208333 y'_{n-1} + 0,041667 y'_{n-2}).\end{aligned}$$

К методам смешанного типа относятся методы, имеющие признаки односточечных и многоточечных методов. В качестве примера можно привести метод псевдо-Рунге — Кутта [87] вида

$$\begin{aligned}k_0(y_{n-1}) &= hf(y_{n-1}), \\k_1(y_{n-1}) &= hf[y_{n-1} + 0,8 k_0(y_{n-1})], \\k_0(y_n) &= hf(y_n), \quad k_1(y_n) = hf[y_n + 0,8 k_0(y_n)], \\y_{n+1} &= y_n + k_0(y_n) + 0,020833 [k_0(y_n) - k_0(y_{n-1})] + \\&\quad + 0,520833 [k_1(y_n) - k_1(y_{n-1})].\end{aligned}$$

Двусторонние методы включают в себя два метода, ошибки интегрирования которых имеют разные знаки. Среднее значение решения, получаемого этими методами, принимается за окончательное. Двусторонние методы могут быть одно- или многоточечными. Примером односточечного двустороннего метода может служить метод вида [23]

$$\begin{aligned}k_1^{(1)} &= hf(t_n, y_n), \\k_1^{(2)} &= hf(t_n, y_n), \\k_2^{(1)} &= hf\left[t_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1^{(1)}\right], \\k_2^{(2)} &= hf\left[t_n + \frac{5}{12}h, y_n + \frac{5}{12}k_1^{(2)}\right], \\k_3^{(1)} &= hf\left[t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2^{(1)}\right], \\k_3^{(2)} &= hf\left[t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2^{(2)}\right], \\y_{n+1}^{(1)} &= y_n + \frac{1}{4}[k_1^{(1)} + 3k_3^{(1)}], \\y_{n+1}^{(2)} &= y_n + \frac{1}{4}[k_1^{(2)} + 3k_3^{(2)}], \\y_{n+1} &= \frac{1}{2}[y_{n+1}^{(1)} + y_{n+1}^{(2)}].\end{aligned}$$

Рекуррентные методы подробно изучены в работе [38]. Основная идея этих методов состоит в том, что для метода Рунге — Кутта порядка l соответствующие коэффициенты, определяющие параметры метода, выбираются так, чтобы они удовлетворяли и методам более низких поряд-

ков точности. В этом случае при интегрировании по методу порядка l можно последовательно получать решения по методам более низких порядков только при l обращениях к вычислению правых частей. Один из методов такого типа имеет вид

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(y_n), & y_{n+1}^{(1)} &= y_n + k_1, \\k_2 &= hf(y_n + k_1), & y_{n+1}^{(2)} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\k_3 &= hf\left[y_n + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\right], \\y_{n+1}^{(3)} &= y_n + \frac{1}{3}\left[2k_3 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\right].\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты метода третьего порядка ($l = 3$) удовлетворяют, также и методам второго и первого порядков.

Следует отметить, что рекуррентный метод четвертого порядка, из которого можно было бы получить методы первого, второго и третьего порядков, невозможен. В то же время существуют методы четвертого порядка, коэффициенты которых удовлетворяют методам первого и второго порядков.

Рассмотренная выше классификация основана на уже сложившемся делении методов на одно- и многоточечные, но не учитывает вида аппроксимации решения, используемой в методе.

Как уже было отмечено, многоточечные методы для вычисления очередного значения функции используют значения функции и ее производной в нескольких предыдущих точках, т. е. для многоточечных методов требуются «разгонные» участки. Участок «разгона» для многоточечных методов может быть осуществлен с использованием простых однотоочечных методов. Для этого необходимо выбрать такой шаг интегрирования, чтобы вычислительная погрешность не превосходила погрешности аппроксимации многоточечного метода. Для некоторых методов удается организовать итерационный процесс «разгона».

Таким образом, для многоточечных методов при их реализации в БЦВМ кроме алгоритма собственно интегрирования должен быть запрограммирован алгоритм «разгона». Основным требованием, предъявляемым к

алгоритмам, реализуемым в БЦВМ, является требование экономии памяти. Поэтому многоточечные методы менее удобны при решении задач на БЦВМ, чем одноточечные методы. По тем же самым соображениям оказываются нежелательными и методы смешанного типа и двусторонние.

Самыми экономичными в смысле загрузки памяти являются одноточечные методы. Кроме того, в работе [54] показано, что одноточечные методы с простым алгоритмом, например классические методы Рунге — Кутты третьего и четвертого порядков, обеспечивают наименьшую погрешность интегрирования. Поэтому для решения задачи Коши на БЦВМ предпочтительнее использовать методы Рунге — Кутты от первого до четвертого порядков, имеющие простую структуру.

§ 7.4. АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ РУНГЕ — КУТТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗА КОНЕЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Оценка свойств численных методов интегрирования проводилась с помощью математических экспериментов. Математические эксперименты по определению вычислительных и точностных характеристик методов осуществлялись для системы уравнений относительного движения в безразмерной форме (7.1.2) при различных начальных условиях, приведенных в табл. 7.1 и 7.2, применительно к задаче сближения с целью на эллиптической орбите малого ($e = 0,1$; табл. 7.1) или большого ($e = 0,8$; табл. 7.2) эксцентриситета. В этих таблицах: ϑ_0 — истинная аномалия цели, соответствующая моменту начала маневра сближения; α_0 — угол наклона вектора начальной дальности к местному горизонту в точке цели; θ — угол перехода по орбите цели, определяющий интервал интегрирования.

В вариантах 1, 2, 3, 7, 11 табл. 7.1 орбита управляемого аппарата совпадает с орбитой цели. В варианте 4 орбита управляемого аппарата характеризуется условиями: $\xi_0 = v_{\xi_0} = v_{\eta_0} = 0$, $\eta_0 = 0,025$. В вариантах 5, 6, 8, 9, 10 орбита управляемого аппарата отличается от орбиты цели по высоте на 0,01 в перигентре и на 0,025 в апоцентре.

Таблица 7.1

Вариант	ϑ_0 , град	α_1 , град	ϑ , град
1	0	1,5	360
2	0	30	360
3	0	6	360
4	0	0	360
5	0	0	360
6	0	6	360
7	0	6	180
8	0	6	180
9	0	0	180
10	180	6	180
11	180	6	180

Таблица 7.2

Вариант	Орбита управляемого аппарата	ϑ_0 , град	α_0 , град	ϑ , град
1	Совпадает с орбитой цели Характеризуется условиями: $\xi_0 = v_{\xi_0} = v_{\eta_0} = 0$, $\eta_0 = 1,6 \cdot 10^{-3}$	0	1,5	360
2		0	30	360
3		0	30	180
4		0	0	360

Были исследованы следующие методы интегрирования:
метод первого порядка (метод Эйлера)

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n;$$

метод второго порядка структуры

$$k_1 = hf(\vartheta_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(\vartheta_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2);$$

метод третьего порядка структуры

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(\vartheta_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(\vartheta_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf(\vartheta_n + h, y_n - k_1 + 2k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3); \end{aligned} \right\} \quad (7.4.1)$$

классический метод Рунге — Кутты четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(\vartheta_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(\vartheta_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(\vartheta_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(\vartheta_n + h, y_n + k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \right\} \quad (7.4.2)$$

Выбор этих методов для исследования произведен с учетом того, что различие в свойствах односточных методов одной структуры меньше, чем различие для методов разных структур.

Типичные результаты численных расчетов приведены на рис. 7.2—7.4 и в табл. 7.3 и 7.4.

На рис. 7.2 и 7.3 представлены в полулогарифмическом масштабе зависимости методической ошибки — конечного промаха Δr , приведенного к начальной дальности r_0 , от шага интегрирования h для различных методов и различных исходных данных. На каждом рисунке проведена линия, показывающая уровень принятой допустимой ошибки $\Delta r/r_0 = 1\%$. Обозначение кривых на графиках соответствует вариантам табл. 7.1 и 7.2, причем вариантам табл. 7.1 приписана буква «м» (малый эксцентриситет), а вариантам табл. 7.2 — буква «б» (большой эксцентриситет). Цифры I—IV, проставленные около кривых, соответствуют порядку метода интегрирования.

На рис. 7.4 приведены зависимости числа обращений N к счету правых частей от допустимой методической ошибки Δ/r_0 для начальных условий, соответствующих варианту 7м. Число обращений к счету правых частей N

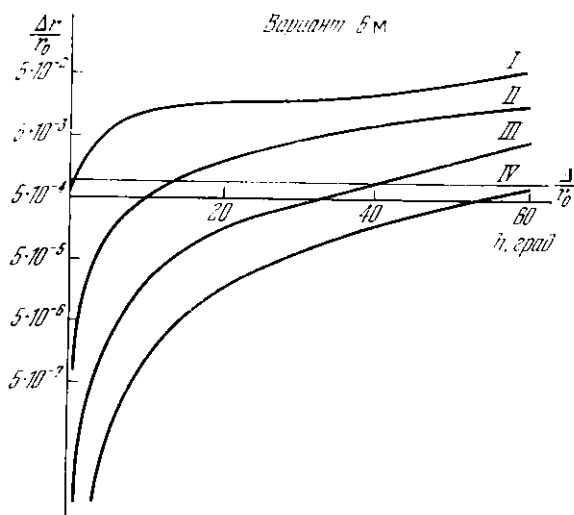


Рис. 7.2.

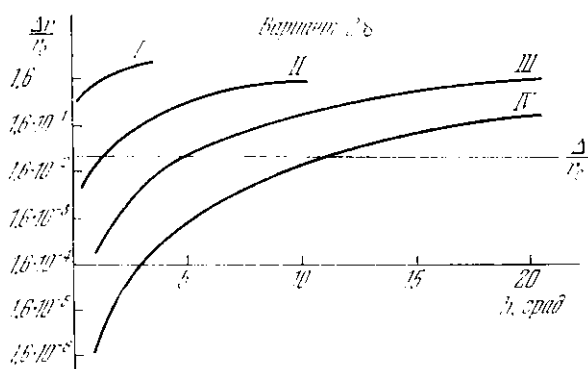


Рис. 7.3.

рассчитывается по формуле

$$N = \frac{\theta}{h} l,$$

где l — порядок метода.

В табл. 7.3 и 7.4 помещены значения измеряемого в градусах допустимого шага интегрирования $h_{\text{доп}}$ (шага,

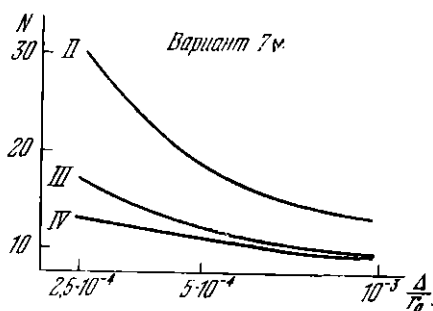


Рис. 7.4.

обеспечивающего выбранную точность) и соответствующего числа обращений к счету правых частей N для методов интегрирования разных порядков и различных начальных условий (для вариантов 1м — 11м и 16 — 46 соответственно).

Анализ приведенных результатов исследований показывает, что метод Эйлера не обеспечивает заданной точности для орбит как малого, так и большого эксцентриситета, а при одинаковой точности вычислений требует значительно большего времени счета, чем методы более высоких порядков.

Из табл. 7.3 и рис. 7.4 следует, что метод Рунге — Кутта четвертого порядка по числу обращений к счету правых частей не имеет явных преимуществ перед методом Рунге — Кутта третьего порядка. Поскольку метод меньшего порядка требует меньшей памяти БЦВМ, то естественно выбрать алгоритм решения задачи Кони наименьшего порядка.

Для орбит малого эксцентриситета при начальных дальностях порядка 0,1—0,2 и углах перехода $\theta \leq 180^\circ$ может быть использован метод Рунге — Кутта второго

Таблица 7.3

Порядок метода	I		II		III		IV	
Вариант	$h_{\text{доп.}}$ град	N	$h_{\text{доп.}}$ град	N	$h_{\text{доп.}}$ град	N	$h_{\text{доп.}}$ град	N
1 м	0,6	600	12	60	35	31	58	25
2 м	0,75	480	11	65	36	30	52	28
3 м	—	—	13,5	54	39	28	50	29
4 м	0,6	600	10	72	39	28	60	24
5 м	4,5	80	40	18	68	16	70	21
6 м	1,5	240	13,5	54	41	29	62	24
7 м	1,5	120	25	15	52	11	80	9
8 м	2,5	72	26,5	14	56,5	10	73	10
9 м	1,5	120	32	12	56	10	66	11
10 м	1,5	120	16	23	62	9	70	11
11 м	—	—	18	20	60	9	72	10

Таблица 7.4

Порядок метода	I		II		III		IV	
Вариант	$h_{\text{доп.}}$ град	N	$h_{\text{доп.}}$ град	N	$h_{\text{доп.}}$ град	N	$h_{\text{доп.}}$ град	N
1 б	0,2	1800	0,4	1800	2,3	471	6	240
2 б	0,2	1800	0,4	1800	2,3	471	6	240
3 б	0,1	1800	1,5	240	5,5	99	11,5	63
4 б	0,2	1800	3	240	9,5	114	21	68

порядка. Однако в случае начала маневра в апоцентре и при $\theta > 180^\circ$ метод третьего порядка в два раза экономичнее метода второго порядка (соответственно 9 и 20 обращений к счету правых частей).

Для орбит большого эксцентриситета наилучшим по числу обращений к счету правых частей является метод Рунге — Кутта четвертого порядка.

§ 7.5. ОПТИМИЗАЦИЯ СВОБОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ РУНГЕ — КУТТА

Запишем метод Рунге — Кутта порядка l в виде

$$k_i = hf \left(\vartheta_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^l \gamma_i k_i, \quad \alpha_1 = 0.$$

Постоянные параметры α_i , β_{ij} и γ_i при каждом l связаны между собой определенными соотношениями [11]. При $l = 3$ параметры α_2 и α_3 являются свободными. Соответствующий выбор значений этих параметров позволяет получать конкретные методы Рунге — Кутта, обладающие теми или иными свойствами.

Выберем свободные параметры α_2 и α_3 так, чтобы повысить точность метода Рунге — Кутта третьего порядка.

В общей постановке задачу определения значений свободных параметров можно сформулировать следующим образом. Пусть F есть некоторая положительная функция качества интегрирования. При заданных правых частях дифференциальных уравнений эта функция будет зависеть от шага интегрирования h и от q свободных параметров метода $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, т. е.

$$F = F(h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q).$$

При фиксированном h значения α_i , при которых функция F достигает своего наименьшего значения, определяют наилучший метод интегрирования в смысле критерия

$$F^0 = \min_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}} F(h, \alpha_1, \dots, \alpha_q).$$

В случае, когда F зависит более чем от одного параметра и шаг интегрирования h имеет большое значение, отыскание минимума функции F оказывается возможным лишь методами случайного поиска.

Для задачи интегрирования системы (7.1.2) в качестве критерия оптимальности выбрана функция F вида

$$F(h, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i=0}^{n-1} \{ [\xi(\vartheta_i, h, \alpha_2, \alpha_3) - \xi_0(\vartheta_i)]^2 + \\ + [\eta(\vartheta_i, h, \alpha_2, \alpha_3) - \eta_0(\vartheta_i)]^2 \}^{1/2}, \quad (7.5.1)$$

где $\xi_0(\vartheta_i)$, $\eta_0(\vartheta_i)$ — эталонные значения координат в узлах ϑ_i ; $\xi(\vartheta_i, h, \alpha_2, \alpha_3)$, $\eta(\vartheta_i, h, \alpha_2, \alpha_3)$ — координаты, соответствующие выбранным значениям параметров α_2 и α_3 в тех же узлах.

Эталонные значения координат ξ_0 и η_0 , входящие в критерий оптимальности (7.5.1), находились интегрированием системы (7.1.2) методом Рунге — Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0,1^\circ$. При вычислении аналогичных значений координат ξ и η , отвечающих методу Рунге — Кутты третьего порядка с различными значениями параметров α_2 и α_3 , использовался шаг интегрирования $h = 10^\circ$.

Отыскание коэффициентов метода интегрирования, оптимальных в смысле критерия (7.5.1), осуществлялось с помощью метода Гаусса — Зейделя, который состоит в следующем.

Вначале отыскивается значение $\alpha_2^{(1)}$, обеспечивающее наименьшее значение функции F по параметру α_2 при закреплённом α_3 , т. е.

$$F[\alpha_2^{(1)}, \alpha_3] = \min_{\{\alpha_2\}} F(\alpha_2, \alpha_3).$$

Затем закрепляется найденное значение $\alpha_2^{(1)}$ и отыскивается значение $\alpha_3^{(1)}$ такое, что

$$F_1[\alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}] = \min_{\{\alpha_3\}} F[\alpha_2^{(1)}, \alpha_3].$$

Далее определяется

$$F_2[\alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}] = \min_{\{\alpha_3^{(1)}\}} \{ \min_{\{\alpha_2^{(1)}\}} F_1[\alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}] \}$$

и процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто

$$|F_{i+1}[\alpha_2^{(i+1)}, \alpha_3^{(i+1)}] - F_i[\alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)}]| \leq \varepsilon,$$

где ε — любое наперед заданное малое число.

Некоторые типичные результаты численных расчетов и выводы из них излагаются ниже.

Для варианта начальных условий 2б описанным выше способом были найдены оптимальные значения параметров $\alpha_2 = 1,2$ и $\alpha_3 = 0,9$. При этих значениях метод

интегрирования имеет вид

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(\vartheta_n, y_n), \\ k_2 &= hf(\vartheta_n + 1,2h, y_n + 1,2k_1), \\ k_3 &= hf(\vartheta_n + 0,9h, y_n + 0,754251k_1 + \\ &\quad + 0,145749k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + 0,344729k_1 - 0,224359k_2 + \\ &\quad + 0,879630k_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.2)$$

Аналогичным образом находились оптимальные значения свободных параметров и для других вариантов начальных условий, в частности для варианта 3б: $\alpha_2 = 0,05$ и $\alpha_3 = 2,15$.

Сопоставление метода третьего порядка (7.5.2), строго оптимального при $h = 10^\circ$, по методическим ошибкам

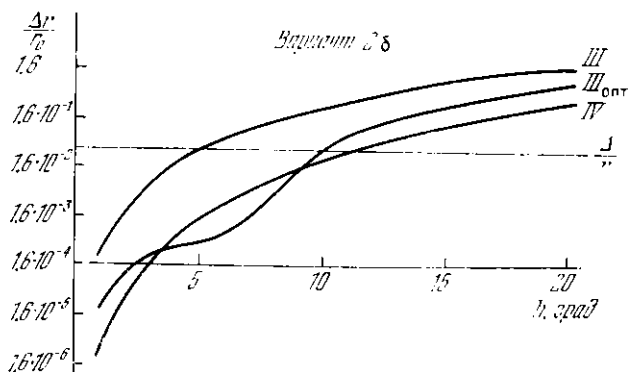


Рис. 7.5.

$\Delta r/r_0$ в зависимости от шага интегрирования h со стандартными методами третьего (7.4.1) и четвертого (7.4.2) порядков дано для варианта 2б на рис. 7.5. Аналогичные зависимости имеют место и при других вариантах начальных условий.

В табл. 7.5 указанные методы интегрирования сопоставляются при различных начальных условиях по значениям допустимого шага интегрирования $h_{\text{доп}}$ и соответствующего числа обращений N к счету правых частей.

Таблица 7.5

Порядок метода	III		III _{опт}		IV	
Вариант	$h_{\text{доп. град}}$	N	$h_{\text{доп. град}}$	N	$h_{\text{доп. град}}$	N
1 6	2,3	471	5	216	6	240
2 6	2,3	471	7,5	144	6	240
3 6	5,5	99	9,5	57	11,5	63
4 6	9,5	114	15	72	21	68

Из этих и аналогичных (не приведенных здесь) данных следует, что оптимальный метод интегрирования третьего порядка гораздо точнее стандартного метода того же порядка и имеет почти одинаковую точность со стандартным

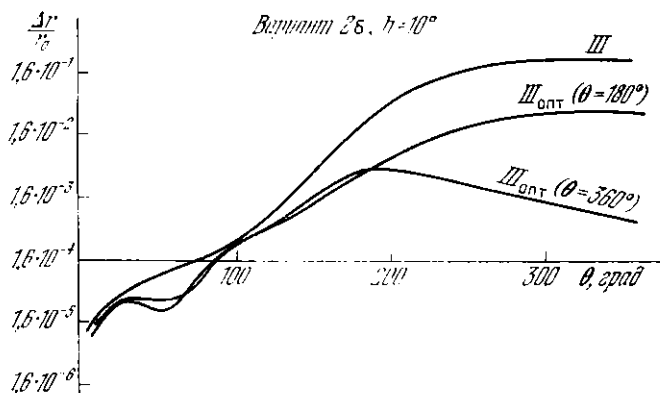


Рис. 7.6.

методом четвертого порядка (а при некоторых значениях h даже точнее его), но требует меньшего числа обращений N к счету правых частей.

Рис. 7.6 иллюстрирует возможности метода, оптимального при одних значениях интервала интегрирования θ , в случае его использования при других значениях этого

интервала. На этом рисунке для варианта начальных условий 26 приведены зависимости методической ошибки $\Delta r/r_0$ от интервала интегрирования θ , соответствующие методам Рунге — Кутты третьего порядка со стандартными и оптимальными значениями свободных параметров α_2 и α_3 . В качестве оптимальных использовались значения параметров α_2 и α_3 , найденные при $\theta = 180^\circ$ и $\theta = 360^\circ$.

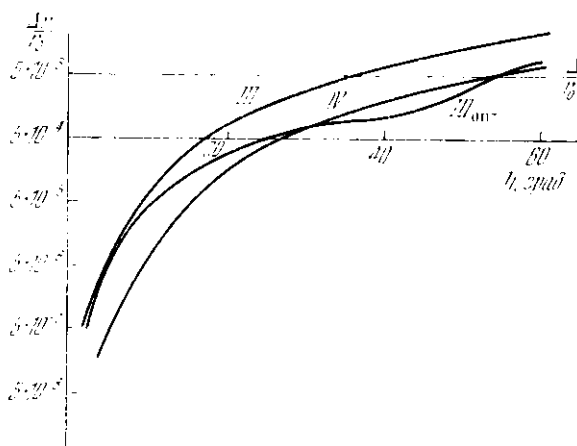


Рис. 7.7.

Из этих и аналогичных (не приведенных здесь) графиков следует, что в конце интервала интегрирования ошибки метода с коэффициентами, оптимальными для большего интервала, значительно меньше ошибки метода с коэффициентами, оптимальными для меньшего интервала (которая близка к погрешности стандартного метода). Поэтому, используя первый из указанных методов, можно при заданной точности вычислений увеличить шаг интегрирования и уменьшить тем самым вычислительное время при решении задачи прогноза. Отсюда можно сделать вывод, что параметры метода целесообразно оптимизировать для максимально возможного интервала интегрирования.

Необходимо отметить также возможность увеличения точности интегрирования при различных начальных условиях за счет использования метода интегрирования с

оптимальными коэффициентами, найденными для каких-то одних начальных условий. В качестве примера на рис. 7.7 приведены зависимости методических ошибок методов Рунге — Кутта со стандартными и оптимальными коэффициентами от шага интегрирования; коэффициенты получены для варианта 2б и используются в варианте 2м.

Сравнение методов Рунге — Кутта третьего порядка со стандартными и оптимальными значениями свободных параметров по величине допустимого шага интегрирования $h_{\text{доп}}$ и числу обращений N к счету правых частей для вариантов начальных условий, которым соответствует малый эксцентриситет орбиты цели, дано в табл. 7.6.

Таблица 7.6

Порядок метода	II		II _{опт}		III		III _{опт}		
	Вариант	$h_{\text{доп}},$ <i>град</i>	N	$h_{\text{доп}},$ <i>град</i>	N	$h_{\text{доп}},$ <i>град</i>	N	$h_{\text{доп}},$ <i>град</i>	N
1 м	—	—	—	—	35	31	60	18	
2 м	—	—	—	—	36	30	57	19	
7 м	25	15	60	6	52	11	60	9	

Описанным выше способом можно оптимизировать и единственный свободный параметр α_2 метода Рунге — Кутта второго порядка. В качестве примера на рис. 7.8 и в табл. 7.6 приведены результаты, которые были получены при использовании метода второго порядка, оптимального в варианте начальных условий 7м.

Основываясь на данных табл. 7.3 и 7.6, можно заключить, что в случае большого эксцентриситета орбиты цели можно использовать метод интегрирования не ниже третьего порядка. Из этих данных также следует, что при малом эксцентриситете орбиты цели и при $\theta < 180^\circ$ оптимизировать метод третьего порядка не имеет большого смысла, поскольку даже для стандартного метода число обращений N к счету правых частей равно, а в некоторых случаях меньше, чем для метода четвертого порядка.

Из проведенного анализа численных результатов можно сделать следующие выводы:

специальным выбором свободных параметров можно значительно улучшить характеристики метода интегрирования;

значения оптимальных параметров зависят от начальных условий и интервала интегрирования (оптимизацию целесообразно проводить для максимального интервала интегрирования и максимальных начальных отклонений).

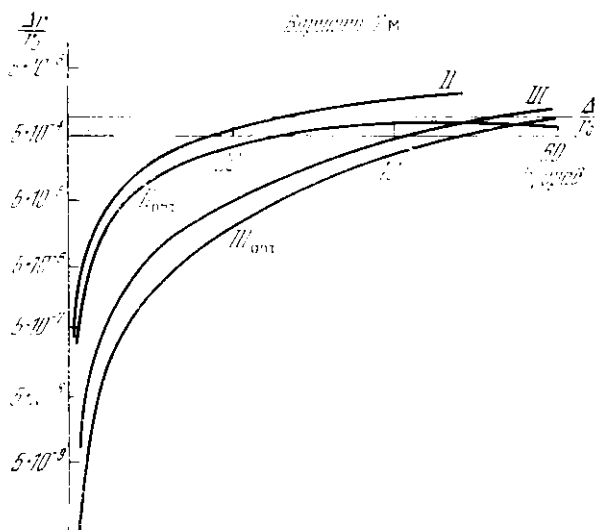


Рис. 7.8.

Заметим здесь, что метод Рунге — Кутты пятого порядка не дает увеличения точности решения задачи [11]. Поэтому оптимизировать метод четвертого порядка, по видимому, не имеет смысла. Следовательно, можно ожидать, что для решения задачи прогноза параметров относительного движения и при малых и при больших эксцентриситетах орбиты цели наиболее выгодным с точки зрения экономии памяти БЦВМ и времени счета будет метод Рунге — Кутты третьего порядка со специальным образом выбранными параметрами.

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ

§ 8.1. ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХИМПУЛЬСНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ВРЕМЕНИ СБЛИЖЕНИЯ

В детерминированной постановке формальное решение задач оптимального управления сближением, не доводимое до численных результатов, стало сравнительно простым в связи с созданием аппарата вариационного исчисления, позволяющего учитывать ограничения на переменные управления и фазовые координаты [9, 39, 60]. Однако фактическое их решение упирается, как правило, в огромные вычислительные трудности. Поэтому особый интерес для практики представляют как аналитические решения, полученные даже при идеализированных предпосылках, так и эффективные численные методы оптимизации.

Для космических маневров наиболее существенным критерием оптимальности является критерий минимума расхода топлива [24, 59]. Доказано [112], что при отсутствии атмосферы наименьший расход топлива соответствует импульсному управлению, когда энергия затрачивается лишь на мгновенное изменение скорости и не расходуется на преодоление гравитационных сил. Общая теория оптимальных импульсных траекторий полета космических аппаратов была разработана Лоуденом [47] и стимулировала появление многочисленных работ по оптимальным импульсным переходам между кеплеровыми орбитами. Сводка основных результатов этих исследований с указанием обширной библиографии дана в обзоре [96]. Однако импульсные маневры сближения, отличающиеся от маневров межорбитального перехода дополнительным условием синхронизации движения управляемого аппарата с движением цели, изучены подробно лишь в случае близких околокруговых орбит двух аппаратов [118, 119].

При современном состоянии исследований для разработки оптимальных алгоритмов управления сближением

наибольший интерес представляет, по-видимому, метод свободных траекторий, основанный на двухимпульсной схеме маневра сближения. Поэтому рассмотрение вопросов оптимального управления целесообразно начать с методов оптимизации двухимпульсных программ, достаточно просто реализуемых с помощью БЦВМ.

Для произвольных начальных условий достигнуть минимизации расхода топлива, соответствующего двухимпульсной программе управления, можно в принципе за счет вариации моментов приложения начального и конечного импульсов. Иными словами, соответствующие свободные переменные t_0 и t_k должны выбираться из условия минимума функции $J(t_0, t_k)$, определяемой уравнением (2.5.4) или (2.5.5) при $n = 2$.

В случае использования линеаризованных уравнений движения на основании соображений, высказанных ранее при рассмотрении программ с фиксированными направлениями коррекции, из условия минимума характеристической скорости следует определять только время сближения T , а начальный момент времени t_0 считать закрепленным.

Численные расчеты показывают, что в случае круговых и эллиптических опорных орбит функция $J(T)$, соответствующая как линейным, так и нелинейным уравнениям движения, имеет целое множество минимумов, соответствующих разному числу периодов (или полупериодов в случае некомпланарного сближения) обращения вокруг центрального тела. Из-за ухудшения точности решения линеаризованных уравнений с увеличением времени прогнозирования из всех возможных решений для T следует выбирать такие, которые соответствуют первому (либо второму) минимуму характеристической скорости. В этом случае сближение при любых начальных условиях будет заканчиваться в пределах одного витка.

Для определения оптимального времени сближения, обеспечивающего наименьшую характеристическую скорость при заданных начальных условиях, можно использовать, вообще говоря, как прямые, так и непрямые методы поиска минимума функции одной переменной. Прямые методы основаны на непосредственном сравнении значений функции в двух проверочных точках и запоминании меньшего из них. Эти методы отличаются правилами вы-

бора проверочных точек (стратегией поиска), обеспечивающими сходимость к точке минимума. Непрямые методы исходят из необходимых условий минимума, т. е. связаны с определением таких значений переменной, при которых производная от функции обращается в нуль.

В рассматриваемой задаче необходимые условия, используемые обычно для нахождения аналитических решений либо точного положения точки минимума, когда минимум очень пологий, приводят к сложному трансцендентному уравнению относительно T , разрешить которое можно только с помощью итераций. Получить численное решение этого уравнения труднее, чем просто вычислить несколько значений характеристической скорости и выбрать меньшее из них, не говоря уже об обычных проблемах определения начального приближения для T , обеспечивающего сходимость, и проверки стационарной точки на минимум. Поэтому для экономии вычислительного времени и памяти БЦВМ на практике более выгодно применять алгоритмы, в основе которых лежит тот или иной прямой метод поиска экстремума.

Основываясь на общих свойствах минимизируемой функции $J(T)$, можно предложить следующий простой и эффективный алгоритм нахождения оптимального времени сближения $T_{\text{опт}}$, соответствующего первому минимуму характеристической скорости $J_{\text{опт}} = J(T_{\text{опт}})$.

Процесс поиска разбивается на два этапа. Первый из них предназначен для определения интервала, внутри которого лежит искомая точка минимума, а второй — для последовательного уточнения приближенно найденных значений $T_{\text{опт}}$ и $J_{\text{опт}}$.

Как следует из общих соображений, подтверждаемых аналитическими выражениями для корректирующих импульсов, очень малым временам сближения соответствуют заведомо большие значения характеристической скорости ($J \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow 0$). Поэтому этап грубого поиска удобно начинать с задания некоторого очень малого времени $T = \delta T$, увеличивая которое, можно достигнуть уменьшения характеристической скорости.

Последующий выбор пробных точек производится с постоянным шагом ΔT , величина которого подбирается так, чтобы нельзя было перейти в область сходимости ко второму минимуму функции $J(T)$. Если измерять T в

долях орбитального периода $T_{\text{орб}}$ опорного движения, то величина этого шага имеет порядок двух-трех десятых.

Грубый поиск с шагом ΔT продолжается до тех пор, пока функция $J(T)$ не начнет возрастать. Тем самым будет определена верхняя граница $\bar{T}$ для $T_{\text{опт}}$, а нижняя граница $\underline{T}$ будет, очевидно, равна значению T , соответствующему двум шагам в обратном направлении.

После нахождения верхней и нижней границ для уточнения положения точки минимума можно применить оптимальный метод поиска экстремума, обеспечивающий наиболее быстрое уменьшение интервала неопределенности и предполагающий выбор очередной пробной точки симметрично точке приближенного минимума по отношению к концам интервала [10, 72].

Если число испытаний n задано, то оптимальной стратегией, позволяющей получать наибольшую гарантированную точность, будет стратегия, в соответствии с которой при выборе пробных точек интервал неопределенности $(\underline{T}, \bar{T})$ делится последовательно в отношении, задаваемом отношением последовательных целых чисел Фибоначчи

$$N_i = N_{i-1} + N_{i-2}, \quad i = 3, \dots, n, \quad N_1 = N_2 = 1.$$

При этом поиск начинается с деления интервала в отношении, задаваемом двумя наибольшими числами N_{n-1} и N_n .

Однако на практике поиск должен заканчиваться не по числу проб, а по достижении заданной точности. Поэтому пробные точки должны выбираться по правилу золотого сечения, т.е. интервал неопределенности следует делить в постоянном отношении

$$\kappa = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \approx 0,618.$$

Такой способ выбора пробных точек при большом числе испытаний лишь на 17% хуже первого способа [10, 72] и может быть рекомендован для практики. Блок-схема алгоритма оптимизации, включающего этап точного поиска по правилу золотого сечения, представлена на рис. 8.1 (обозначения те же, что и на рис. 6.1; нижний индекс «опт» приписывается значениям T и J , соответствующим наименьшему из всех ранее вычисленных значений ха-

рактической скорости и принимаемым в качестве приближенного оптимального решения).

Примерами использования данного алгоритма могут служить оптимальные решения, приведенные в главе 6.

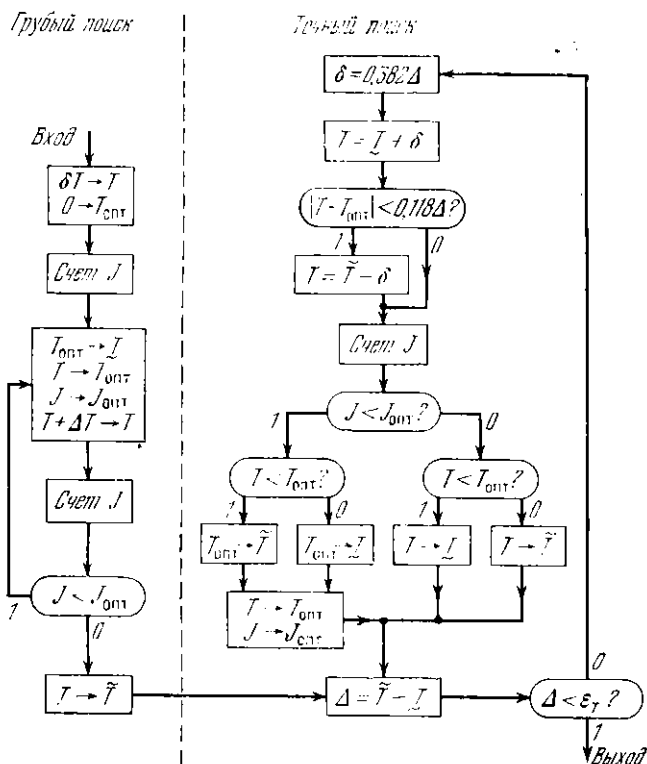


Рис. 8.1.

При вычислениях значение постоянной ε_T , характеризующей точность решения, было принято равным 10^{-4} , а величина шага ΔT — равной 0,2. Соответствующее число проб, необходимых для нахождения оптимума, в рассматриваемых случаях не превышало 15—20.

Очевидно, что для практики важнее определить не столько точное положение минимума, как какое-либо

значение времени сближения, которое бы давало величину характеристической скорости, близкую к минимальной. При обычных условиях сближения минимум, как правило, пологий. Поэтому для бортовых алгоритмов точность определения $T_{\text{опт}}$, задаваемую числом ε_T , можно выбирать на два-три порядка хуже, чем при исследованиях. В этом случае количество необходимых проб снижается до единиц, что приводит к существенному уменьшению общего вычислительного времени без больших потерь качества.

§ 8.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХИМПУЛЬСНОЙ ПРОГРАММЫ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ НАЧАЛЬНОГО ИЛИ КОНЕЧНОГО ВРЕМЕНИ

При разработке алгоритмов управления сближением по двухимпульсной схеме иногда может оказаться необходимым минимизировать не суммарную характеристическую скорость, а только величину начального либо конечного импульса.

Как показывает анализ формул (6.1.9), подтверждаемый и численными расчетами, характер зависимости $J_0 = |\Delta v_0|$ и $J_K = |\Delta v_K|$ от времени сближения в общем такой же, что и их суммы. Поэтому для нахождения соответствующих оптимальных решений может быть применен тот же алгоритм одномерной минимизации, который был изложен в предыдущем параграфе. Однако иногда более выгодным может оказаться другой алгоритм, который дает, вообще говоря, несколько худшие результаты и является более громоздким, чем первый, но зато не требует итераций.

Этот алгоритм основан на предположении, что оптимальные значения моментов времени для проведения коррекций отличаются от их номинальных значений t_0 и t_K лишь на малые смещения, и относится к группе непрямых методов оптимизации в том смысле, что для вычисления поправок δt_0 и δt_K , минимизирующих величину одного из импульсов, используются соответствующие производные.

Пусть заданы моменты времени t_0 и t_K , для которых вычислены матрицы влияния Q_0 и Q_K и их производные по времени $\dot{Q}_0$ и $\dot{Q}_K$. Требуется определить, как изменяются векторы приращений скорости Δv_0 и Δv_K , вычисляемые

в соответствии с уравнениями (6.1.4), при сдвиге t_0 и t_k на малые величины δt_0 и δt_k .

Обозначим вариации векторов Δv_0 и Δv_k соответственно через δv_0 и δv_k . Тогда основное уравнение (6.1.3) для смещенных коррекций запишется в виде

$$c_0 + Q(t_0 + \delta t_0)(\Delta v_0 + \delta v_0) + \\ + Q(t_k + \delta t_k)(\Delta v_k + \delta v_k) = 0.$$

Раскладывая матричную функцию $Q(t + \delta t)$ в ряд по степеням δt и сохраняя только члены порядка не выше первого, после исключения членов нулевого порядка, соответствующих исходному уравнению (6.1.3), будем иметь

$$\dot{Q}_0 \Delta v_0 \delta t_0 + \dot{Q}_k \Delta v_k \delta t_k + Q_0 \delta v_0 + Q_k \delta v_k = 0. \quad (8.2.1)$$

Поскольку уравнение (8.2.1) имеет такую же структуру, что и уравнение (6.1.3), то по аналогии с (6.1.4) находим

$$\delta v_0 = U_0 (\dot{Q}_0 \Delta v_0 \delta t_0 + \dot{Q}_k \Delta v_k \delta t_k),$$

$$\delta v_k = U_k (\dot{Q}_0 \Delta v_0 \delta t_0 + \dot{Q}_k \Delta v_k \delta t_k),$$

где матрицы U_0 и U_k определены уравнениями (6.1.8). Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\Delta v_0)}{\partial t_0} &= U_0 \dot{Q}_0 \Delta v_0, & \frac{\partial (\Delta v_0)}{\partial t_k} &= U_0 \dot{Q}_k \Delta v_k, \\ \frac{\partial (\Delta v_k)}{\partial t_0} &= U_k \dot{Q}_0 \Delta v_0, & \frac{\partial (\Delta v_k)}{\partial t_k} &= U_k \dot{Q}_k \Delta v_k. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.2)$$

Имея явные выражения для производных от импульсов, нетрудно рассчитать величину δt_0 или δt_k , которая минимизирует величину одного из смещенных импульсов.

В общих выражениях можно записать

$$\Delta v + \delta v = \Delta v + w_i \delta t_i, \quad (8.2.3)$$

где w_i — производная от соответствующего импульса по t_0 или t_k .

Геометрически модуль суммы векторов Δv и $w_i \delta t_i$, определяющей смещенный импульс, достигает наименьшего значения при таком $\delta t_i = \delta t_{i \text{ опт}}$, при котором вектор $\Delta v + w_i \delta t_{i \text{ опт}} = \Delta v_{\text{опт}}$ становится ортогональным век-

тору w_i (как это следует из рис. 8.2), или аналитически, когда скалярное произведение этих векторов обращается в нуль.

Таким образом, умножая (8.2.3) слева на вектор-строку w_i^T или транспонированное уравнение справа на вектор-

столбец w_i и приравнявая результат нулю, получим следующее выражение для оптимального сдвига времени:

$$\delta t_{i\text{опт}} = - \frac{w_i^T \cdot \Delta v}{w_i^T \cdot w_i}.$$

Если, следуя [19], ввести проективный оператор (матрицу преобразования)

$$\Pi_i = E - \frac{w_i \cdot w_i^T}{w_i^T \cdot w_i},$$

где E — единичная матрица третьего порядка, то минимальная коррекция (начальная либо конечная) при малых изменениях времени начала или конца сближения определится в линейном приближении в виде

$$\Delta v_{\text{опт}} = \Delta v + w_i \delta t_{i\text{опт}} = \Pi_i \Delta v,$$

т. е. будет представлять собой некоторую долю от несмещенного импульса.

Следует иметь в виду, что применение такого метода для минимизации суммы модулей векторов $\Delta v_0 + w_{0i} \delta t_i$ и $\Delta v_k + w_{ki} \delta t_i$, где δt_i равно δt_0 или δt_k , не имеет явных преимуществ перед методами прямого поиска, поскольку в этом случае задача сводится к решению алгебраического уравнения четвертой степени.

В заключение получим выражения для производных от J_0 и J_k . Для этого воспользуемся соотношениями

$$J_i = |\Delta v_i| = \sqrt{\Delta v_i^T \cdot \Delta v_i}, \quad i = 0, k.$$

Если проварьировать это соотношение по Δv_i , то будем иметь

$$\delta J_i = \frac{\Delta v_i^T}{J_i} \delta v_i.$$

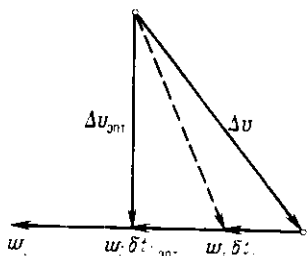


Рис. 8.2.

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_0}{\partial t_0} &= \frac{\Delta v_0^T}{J_0} \frac{\partial (\Delta v_0)}{\partial t_0}, & \frac{\partial J_0}{\partial t_K} &= \frac{\Delta v_0^T}{J_0} \frac{\partial (\Delta v_0)}{\partial t_K}, \\ \frac{\partial J_K}{\partial t_0} &= \frac{\Delta v_K^T}{J_K} \frac{\partial (\Delta v_K)}{\partial t_0}, & \frac{\partial J_K}{\partial t_K} &= \frac{\Delta v_K^T}{J_K} \frac{\partial (\Delta v_K)}{\partial t_K},\end{aligned}$$

где соответствующие производные от Δv_0 и Δv_K даются уравнениями (8.2.2).

§ 8.3. МНОГОИМПУЛЬСНЫЕ ПРОГРАММЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО КВАДРАТИЧНОМУ ПОКАЗАТЕЛЮ КАЧЕСТВА

Одна из немногих задач оптимального импульсного управления сближением, которая, как и в случае непрерывного управления, может быть решена до конца аналитически, — это задача определения программы, оптимальной в смысле квадратичного показателя качества.

Пусть заданы число корректирующих импульсов n и моменты их приложения t_i . Требуется найти величину и направление корректирующих импульсов Δv_i , которые обеспечивают выполнение условий встречи (6.1.2) и минимизируют квадратичный показатель качества (2.5.6).

Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа, т. е. будем искать минимум функции

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\Delta v_i|^2 + l^T \left(c_0 + \sum_{i=1}^n Q_i \Delta v_i \right), \quad (8.3.1)$$

где l — шестимерный вектор постоянных множителей.

Варьируя функцию (8.3.1) по Δv_i и вынося вариацию δv_i^T за скобки, получим

$$\delta J = \sum_{i=1}^n \delta v_i^T (\Delta v_i + Q_i^T l) = 0.$$

Следовательно, отдельный импульс определяется как

$$\Delta v_i = -Q_i^T l.$$

Подстановка этого выражения в основное уравнение (6.1.2)

дает

$$l = \left(\sum_{j=1}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} c_0.$$

Таким образом, окончательно

$$\Delta v_i = - Q_i^T \left(\sum_{j=1}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} c_0. \quad (8.3.2)$$

Если сравнить это выражение с (6.2.3), то оптимальную весовую матрицу L_i , определяющую долю корректируемого промаха, можно представить в виде

$$L_i = F_K Q_i Q_i^T \left(\sum_{j=1}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} (M F_K)^{-1} M,$$

где M — произвольная матрица размера 6×3 такая, что произведение $M F_K$ является неособенной матрицей. В частности, за M можно принять матрицу F_K^T или матрицу P_K [матрицы F и P входят в решения (5.4.1) и (5.4.2)].

Имея соотношение (8.3.2), из (2.5.6) нетрудно получить явное выражение для минимального показателя качества

$$J_{\text{зопт}} = \frac{1}{2} c_0 \left(\sum_{j=1}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} c_0.$$

Через текущие параметры состояния оптимальные корректирующие импульсы определяются следующим образом:

$$\Delta v_i = - Q_i^T \left(\sum_{j=i}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} c_{i-1},$$

причем

$$\begin{aligned} c_i &= \left(\sum_{j=i+1}^n Q_j Q_j^T \right) \left(\sum_{j=1}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} c_0 = \\ &= \left(\sum_{j=i+1}^n Q_j Q_j^T \right) \left(\sum_{j=i}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} c_{i-1}. \end{aligned}$$

Соответствующий оптимальный весовой множитель K_i , задающий долю корректируемого текущего промаха,

определяется в виде

$$K_i = F_K Q_i Q_i^T \left(\sum_{j=i}^n Q_j Q_j^T \right)^{-1} (M F_K)^{-1} M.$$

Интересно отметить, что общий случай оптимальных многоимпульсных программ включает и двухимпульсную программу, т. е.

$$\Delta v_0 = - Q_0^T (Q_0 Q_0^T + Q_K Q_K^T)^{-1} c_0 = - (F_K Q_0)^{-1} F_K c_0,$$

$$\Delta v_K = - Q_K^T (Q_0 Q_0^T + Q_K Q_K^T)^{-1} c_0 = - (F_0 Q_K)^{-1} F_0 c_0.$$

Это легко проверить, используя основные соотношения (5.4.3). Отсюда, кстати, следует доказательство следующих очевидных с физической точки зрения утверждений, если рассматривать два последних корректирующих импульса как двухимпульсный маневр:

предпоследний импульс устраняет весь конечный промах, оставшийся нескорректированным в результате предыдущих коррекций;

последний импульс сводит к нулю конечную скорость, т. е. является тормозным.

§ 8.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОГРАММ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕХОДА В ПРОГРАММЫ СБЛИЖЕНИЯ

В ряде работ [84, 92, 129] показано, что при неограниченном времени задача импульсного сближения, оптимального по расходу топлива, сводится к задаче межорбитального перехода, решение которой получить гораздо проще и можно довести до конечных аналитических выражений в случае близких граничных орбит [40, 90, 93]. Характеристическая скорость, требуемая для сближения, может быть сделана равной минимальной характеристической скорости межорбитального перехода за счет соответствующего ожидания на начальной или некоторой промежуточной орбите. Обеспечение условий, необходимых для начала или продолжения перехода, благодаря разности периодов двух орбит называют обычно *фазированием*. Оно заключается в достижении заданной величины рассогласования по дуге опорной орбиты или фазового центрального угла между аппаратом и целью. Здесь под межор-

битальным переходом понимается, как обычно, маневр перевода управляемого аппарата с начальной орбиты на конечную, по которой движется цель, но в другую ее точку. От сближения межорбитальный переход принципиально отличается тем, что управляемый аппарат может достигать конечной орбиты и выходить на нее в любой момент времени, а не только тогда, когда в этой точке находится цель.

При обращении двух спутников по одной и той же орбите вокруг центрального тела должны совпадать все элементы, определяющие их орбитальное движение, за исключением лишь временного элемента (через одни и те же точки орбиты спутники проходят в разные моменты времени). Для наглядности и простоты анализа в качестве полярного угла, задающего положение цели на ее орбите, будем использовать истинную аномалию θ . Тогда в качестве внутренних элементов удобно принять параметры p , e и t_n , так что единственным несовпадающим элементом будет время прохождения через перигецентр t_n .

Поскольку вариации всех элементов, кроме t_n , должны быть равными нулю, из уравнений (5.3.3) при $c = e$, $s = 0$ и $t_0 = t_n$ для констант первого рода находим

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_n,$$

$$c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = 0,$$

$$c_5 = -e \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_n = -e c_1.$$

Следовательно, с помощью соотношений (5.3.2) и (5.3.5) относительные координаты и составляющие относительной скорости при движении спутников по одной орбите могут быть записаны в виде

$$\xi = \lambda^2 c_1, \quad v_\xi(\xi') = -2e\lambda c_1,$$

$$\eta = -e\lambda c_1, \quad v_\eta(\eta') = -[\lambda(\lambda - 1) - e^2]c_1,$$

$$\zeta = v_\zeta(\zeta') = 0$$

или в размерной форме

$$\begin{aligned}x &= \frac{p^2}{R} c_1, & \dot{x} &= -\frac{\dot{R} p^2}{R^2} c_1, \\y &= -\sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \dot{R} c_1, & \dot{y} &= -\frac{V \sqrt{\mu p^3}}{R^2} \left(\frac{p}{R} - 1 \right) c_1, \\z &= \dot{z} = 0,\end{aligned}$$

где величина c_1 произвольна.

Представленные выше соотношения можно рассматривать как конечные условия межорбитального перехода, записанные через константы первого рода или через отклонения по положению и скорости. Через константы второго рода (5.3.8) эти условия определяются так:

$$\bar{c}_2 = c_3 = \bar{c}_4 = \bar{c}_5 = c_6 = 0$$

и

$$\bar{c}_1 = (1 - e^2) \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_{11} \neq 0.$$

Следовательно, для реализации межорбитального перехода корректирующие импульсы должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned}\bar{c}_2 &= \sum_{i=1}^n \Delta v_{\xi i} = 0, \\ \bar{c}_3 &= \sum_{i=1}^n \Delta v_{\zeta i} \sin \vartheta_i = 0, \\ \bar{c}_4 + \sum_{i=1}^n [\Delta v_{\xi i} (1 + \lambda_i) \cos \vartheta_i - \Delta v_{\eta i} \lambda_i \sin \vartheta_i] &= 0, \\ \bar{c}_5 + \sum_{i=1}^n [\Delta v_{\xi i} (1 + \lambda_i) \sin \vartheta_i + \Delta v_{\eta i} \lambda_i \cos \vartheta_i] &= 0, \\ \bar{c}_6 + \sum_{i=1}^n \Delta v_{\zeta i} \cos \vartheta_i &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (8.4.1)$$

Предположим, что найдена программа межорбитального перехода с моментами коррекций t_i и общим числом импульсов n , которая обеспечивает выполнение условий (8.4.1). В этом случае фазирование, необходимое для выполнения сближения, может быть достигнуто разде-

лением импульсов, не приводящим к увеличению расхода топлива [84, 92]. Это нетрудно показать при условии, что опорная орбита замкнутая (круговая или эллиптическая).

Пусть импульс Δv_m , прикладываемый в момент времени t_m , разделяется на два импульса: импульс $\kappa \Delta v_m$, который прикладывается в момент времени t_m , и импульс $(1 - \kappa) \Delta v_m$, который прикладывается в момент времени, отстоящий от момента t_m на целое число k периодов обращения $T_{\text{орб}}$. Тогда значения всех тригонометрических функций от истинной аномалии, вычисляемые для моментов времени $t = t_m$ ($\vartheta = \vartheta_m$) и $t = t_m + kT_{\text{орб}}$ ($\vartheta = \vartheta_m + 2k\pi$), будут совпадать. Следовательно, условия (8.4.1) будут выполняться также и при разделенном импульсе Δv_m , причем величина приращения скорости от двух импульсов будет той же самой, что и от одного импульса, если только $0 < \kappa < 1$.

Таким образом, пять из шести условий встречи (6.1.2) выполнены и коэффициент разделения импульса κ должен выбираться так, чтобы обеспечить выполнение оставшегося условия $\bar{c}_1 = 0$. Для момента времени $t = t_m + kT_{\text{орб}}$ получаем

$$\kappa = 1 + \frac{(1 - e^2)^{3/2} \bar{c}_{1п}}{6k\pi\lambda_m (\lambda_m \Delta v_{\xi m} - \varepsilon_m \Delta v_{\eta m})},$$

где $\bar{c}_{1п}$ — значение константы $\bar{c}_1$, соответствующее программе межорбитального перехода:

$$\bar{c}_{1п} = \bar{c}_1 + \sum_{i=1}^n [3\Theta_i \lambda_i^2 \Delta v_{\xi i} + (2 - 3\Theta_i \varepsilon_i \lambda_i) \Delta v_{\eta i}].$$

Минимальную характеристическую скорость, необходимую для осуществления межорбитального перехода и встречи при неограниченном времени, называют иногда *ценой траектории сближения* [121]. В случае круговых опорных орбит нетрудно показать [121, 127], что цена траектории в плоскости опорной орбиты равна сумме приращений скорости, требуемых для перевода апоцентра и перигея относительной траектории на высоту опорной орбиты при помощи двух переходов по полуэллипсам Гомана. Эта цена определяется следующим образом:

$$J_{\text{min}}^0 = \frac{\omega_0}{4} (|\underline{y}| + |\tilde{y}|),$$

где y — относительная высота перицентра, а $\tilde{y}$ — относительная высота апоцентра, или в выражении через константы относительного движения

$$J_{\min}^0 = L\omega_0 \max \left(|c_2|, \frac{1}{2} \sqrt{c_4^2 + c_6^2} \right).$$

Цена составляющей траектории сближения по нормали к плоскости опорной орбиты равна по величине нормальной скорости в узле и определяется в виде

$$J_{\min}^n = L\omega_0 \sqrt{c_3^2 + c_6^2}.$$

При некоторых начальных условиях время ожидания, необходимое для фазирования и последующего перехода в точку встречи, оказывается недопустимо большим. Например, максимальное время ожидания для начала сближения при компланарных граничных круговых орбитах определяется разностью периодов обращения и составляет так называемый *синодический период*. Поэтому при минимизации расхода топлива общее время сближения чаще всего либо ограничивается сверху, либо задается фиксированным.

Для определения многоимпульсных программ, обеспечивающих минимум расхода топлива при ограниченном времени сближения, можно использовать как прямые, так и непрямые методы оптимизации.

Применительно к задачам, описываемым линейными уравнениями, разработан целый ряд непрямых методов, исходящих из необходимых условий экстремума. По-видимому, наиболее эффективным из них является метод, предложенный в работе [112] и развитый в работе [94]. Этот метод основан на понятии достижимого множества и состоит в минимизации функции невязок в граничных условиях посредством максимизации расхода топлива по начальным значениям сопряженных переменных. В другом методе [118, 119] упрощение решения краевой импульсной задачи достигается за счет использования свойств годографа базиса-вектора, описываемого простыми аналитическими выражениями в случае круговой опорной орбиты.

Из прямых методов сравнительно простыми и эффективными оказываются методы, основанные на идеях сим-

плексного метода [45]. Однако они имеют ограниченную применимость, поскольку, во-первых, справедливы только при линейной зависимости корректируемых параметров от корректирующих импульсов и, во-вторых, не позволяют находить программы с числом импульсов, меньшим максимально необходимого (согласно [57] максимальное число импульсов, необходимое для реализации оптимального управления, равно числу конечных условий, которым должны подчиняться переменные состояния).

Более универсальным прямым методом определения оптимальных многоимпульсных программ управления является метод, который был предложен в работе [107] и получил дальнейшее развитие в работах [103] и [111]. Этот метод не налагает принципиально никаких ограничений на количество корректирующих импульсов и в равной мере пригоден как при линейной, так и при существенно нелинейной зависимости корректируемых параметров от корректирующих импульсов. Кроме того, при использовании этого метода не возникает никаких трудностей с выбором начального приближения, обеспечивающего сходимость итерационного процесса. Здесь за начальное приближение принимается двухимпульсная программа, которая при малых временах сближения является абсолютно оптимальной [119].

§ 8.5. ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВУХИМПУЛЬСНЫЕ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Как в теоретическом, так и в практическом плане задачу оптимизации двухимпульсных программ управления важно рассматривать не только в линейной, но и в существенно нелинейной постановке, когда относительное движение космических аппаратов описывается полными уравнениями.

По сравнению с линеаризованным случаем нахождение оптимальной двухимпульсной программы с учетом нелинейности уравнений движения имеет свои особенности и требует гораздо большего вычислительного времени, так как на каждом шаге корректирующие импульсы вычисляются не по простым конечным формулам, а с помощью итерационного решения красовой задачи.

В нелинейной постановке задача определения оптимальной двухимпульсной программы управления решалась численно при следующих предположениях:

сближение выполняется в центральном поле тяготения;

относительное движение является компланарным, поскольку отклонения из плоскости опорной орбиты обычно малы и могут быть скорректированы независимо;

маневр сближения считается идеальным, т. е. не учитываются ошибки измерений и исполнения, а также

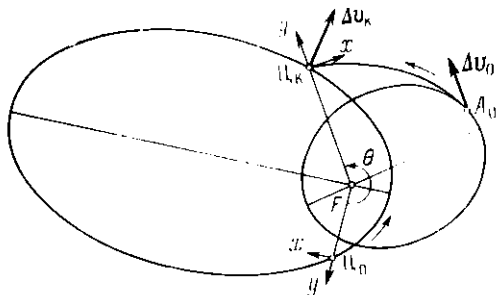


Рис. 8.3.

ошибки из-за ограниченности величины тяги, с помощью которой реализуются корректирующие импульсы.

Геометрия маневра сближения показана на рис. 8.3, где Π_0 и A_0 — точки положения цели и управляемого аппарата в момент начала маневра t_0 ; Δv_0 — начальный импульс скорости, обеспечивающий встречу аппаратов в момент времени t_k в точке Π_k ; Δv_k — конечный импульс скорости, обеспечивающий торможение при встрече.

Под параметрами программы управления понимаются длительность маневра, определяемая углом перехода $\theta = \vartheta_k - \vartheta_0$, где ϑ_0 и ϑ_k — значения истинной аномалии цели в моменты выдачи начального и конечного импульсов, и составляющие (в декартовой или полярной системе координат) начального Δv_0 и конечного Δv_k импульсов скорости.

Приводимые ниже результаты относятся к выполнению маневра сближения при следующих условиях. Цель Π движется по эллиптической орбите, элементы которой (фокальный параметр p , эксцентриситет e и время прохождения через перигеицентр t_n) известны, а управляемый

аппарат A находится первоначально на некоторой промежуточной компланарной орбите. Предполагается, что начальная дальность r_0 от Ц до A постоянна, а угол α_0 , который составляет вектор дальности с местным горизонтом, меняется от 0 до 360° . В качестве опорной принята орбитальная система координат, связанная с целью. Предполагается также, что гравитационная постоянная μ центрального тела, в поле тяготения которого выполняется маневр сближения, известна.

Качество программы управления оценивается величиной характеристической скорости

$$J = |\Delta v_0| + |\Delta v_k|. \quad (8.5.1)$$

Оптимальной программе управления соответствует минимум характеристической скорости J , который может быть достигнут за счет выбора угла перехода θ .

Как уже отмечалось, в точной постановке определение двухимпульсной программы управления сводится к решению краевой двухточечной задачи для системы дифференциальных уравнений относительного движения. Даже если использовать наиболее простые безразмерные формы уравнений вида (5.1.10) или (5.1.12), получить аналитическое решение этой задачи в общем виде затруднительно. Поэтому краевая задача решалась численно с помощью ЭВМ.

Из всех возможных методов решения краевых задач будем использовать как наиболее удобный для практики итерационный метод Ньютона, который состоит в следующем.

Для заданных начальных отклонений по положению x_0, y_0, z_0 в орбитальной системе координат xuz и времени сближения T (или угла перехода θ) по одному из упрощенных алгоритмов определяются составляющие потребной начальной относительной скорости $\dot{x}_{0T}, \dot{y}_{0T}, \dot{z}_{0T}$, которые принимаются в качестве первого приближения искомого решения краевой задачи. Для этих начальных условий интегрированием полных уравнений относительного движения от момента $t = t_0$ (или угла перехода $\theta = 0$) определяются конечные невязки, или составляющие промаха, — значения относительных координат в расчетный момент встречи $t = t_k$ (или $\theta = \theta_k - \theta_0$). После этого каждой составляющей начальной потребной скорости

даются некоторые приращения $\delta \dot{x}_{0T}$, $\delta \dot{y}_{0T}$, $\delta \dot{z}_{0T}$ и система дифференциальных уравнений движения интегрируется заново:

1) при начальных скоростях $\dot{x}_{0T} + \delta \dot{x}_{0T}$, $\dot{y}_{0T}$, $\dot{z}_{0T}$, в результате чего определяются новые значения невязок, которые можно представить как $x_k + (\delta x_k)_x$, $y_k + (\delta y_k)_x$, $z_k + (\delta z_k)_x$;

2) при начальных скоростях $\dot{x}_{0T}$, $\dot{y}_{0T} + \delta \dot{y}_{0T}$, $\dot{z}_{0T}$, в результате чего определяются невязки $x_k + (\delta x_k)_y$, $y_k + (\delta y_k)_y$, $z_k + (\delta z_k)_y$;

3) при начальных скоростях $\dot{x}_{0T}$, $\dot{y}_{0T}$, $\dot{z}_{0T} + \delta \dot{z}_{0T}$, в результате чего определяются невязки $x_k + (\delta x_k)_z$, $y_k + (\delta y_k)_z$, $z_k + (\delta z_k)_z$.

Теперь вычисляются частные производные от составляющих конечного промаха по составляющим начальной скорости:

$$a_{xx} = \frac{\partial x_k}{\partial \dot{x}_0} \approx \frac{(\delta x_k)_x}{\delta \dot{x}_{0T}},$$

$$a_{xy} = \frac{\partial x_k}{\partial \dot{y}_0} \approx \frac{(\delta x_k)_y}{\delta \dot{y}_{0T}},$$

$$a_{xz} = \frac{\partial x_k}{\partial \dot{z}_0} \approx \frac{(\delta x_k)_z}{\delta \dot{z}_{0T}};$$

$$a_{yx} = \frac{\partial y_k}{\partial \dot{x}_0} \approx \frac{(\delta y_k)_x}{\delta \dot{x}_{0T}},$$

$$a_{yy} = \frac{\partial y_k}{\partial \dot{y}_0} \approx \frac{(\delta y_k)_y}{\delta \dot{y}_{0T}},$$

$$a_{yz} = \frac{\partial y_k}{\partial \dot{z}_0} \approx \frac{(\delta y_k)_z}{\delta \dot{z}_{0T}};$$

$$a_{zx} = \frac{\partial z_k}{\partial \dot{x}_0} \approx \frac{(\delta z_k)_x}{\delta \dot{x}_{0T}},$$

$$a_{zy} = \frac{\partial z_k}{\partial \dot{y}_0} \approx \frac{(\delta z_k)_y}{\delta \dot{y}_{0T}},$$

$$a_{zz} = \frac{\partial z_k}{\partial \dot{z}_0} \approx \frac{(\delta z_k)_z}{\delta \dot{z}_{0T}}.$$

Используя линейную аппроксимацию составляющих промаха

$$x_k = a_{xx}\Delta\dot{x}_{0T} + a_{xy}\Delta\dot{y}_{0T} + a_{xz}\Delta\dot{z}_{0T},$$

$$y_k = a_{yx}\Delta\dot{x}_{0T} + a_{yy}\Delta\dot{y}_{0T} + a_{yz}\Delta\dot{z}_{0T},$$

$$z_k = a_{zx}\Delta\dot{x}_{0T} + a_{zy}\Delta\dot{y}_{0T} + a_{zz}\Delta\dot{z}_{0T},$$

можно найти поправки $\Delta\dot{x}_{0T}$, $\Delta\dot{y}_{0T}$, $\Delta\dot{z}_{0T}$ для составляющих начальной скорости. Тогда следующее приближение определяется как

$$\dot{x}_{0T}^{(n+1)} = \dot{x}_{0T}^{(n)} + \Delta\dot{x}_{0T},$$

$$\dot{y}_{0T}^{(n+1)} = \dot{y}_{0T}^{(n)} + \Delta\dot{y}_{0T},$$

$$\dot{z}_{0T}^{(n+1)} = \dot{z}_{0T}^{(n)} + \Delta\dot{z}_{0T}.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность решения. Эта точность может задаваться как точность определения составляющих скорости $\dot{x}_{0T}$, $\dot{y}_{0T}$, $\dot{z}_{0T}$ в виде

$$|\dot{x}_{0T}^{(n+1)} - \dot{x}_{0T}^{(n)}| \leq \delta\dot{x},$$

$$|\dot{y}_{0T}^{(n+1)} - \dot{y}_{0T}^{(n)}| \leq \delta\dot{y},$$

$$|\dot{z}_{0T}^{(n+1)} - \dot{z}_{0T}^{(n)}| \leq \delta\dot{z}$$

или

$$\left| \sqrt{[\dot{x}_{0T}^{(n+1)}]^2 + [\dot{y}_{0T}^{(n+1)}]^2 + [\dot{z}_{0T}^{(n+1)}]^2} - \sqrt{[\dot{x}_{0T}^{(n)}]^2 + [\dot{y}_{0T}^{(n)}]^2 + [\dot{z}_{0T}^{(n)}]^2} \right| \leq \delta v$$

либо допустимой величиной невязок

$$|x_k^{(n)}| \leq \delta x, \quad |y_k^{(n)}| \leq \delta y, \quad |z_k^{(n)}| \leq \delta z$$

или

$$r_k = \sqrt{[x_k^{(n)}]^2 + [y_k^{(n)}]^2 + [z_k^{(n)}]^2} \leq \delta r.$$

Рассмотренный метод определения частных производных от составляющих конечного промаха по составляющим начальной скорости численным дифференцированием не единственный, хотя и наиболее простой. Требуемые производные, представляющие собой элементы переходной матрицы, могут вычисляться также исходя из аналитических выражений, представленных в § 5.4.

Поиск оптимальной двухимпульсной программы управления осуществляется следующим образом.

При фиксированном угле начала маневра θ_0 :

вычисляется характеристическая скорость J_1 , необходимая для сближения космических аппаратов за время, соответствующее углу θ_1 ;

угол перехода θ_1 изменяется на величину $\Delta\theta$:

$$\theta_2 = \theta_1 \pm \Delta\theta;$$

вычисляется соответствующее значение J_2 и сравнивается с ранее найденным значением J_1 и т. д.;

вычисления θ_n и J_n продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто выполнение неравенства

$$J_{n+1} > J_n.$$

Найденное значение J_n может быть принято в качестве оптимальной оценки потребной энергетики, а соответствующий угол перехода θ_n — за $\theta_{\text{опт}}$. Очевидно, что значения $J_{\text{опт}}$ и $\theta_{\text{опт}}$ зависят от величины шага $\Delta\theta$. Эту зависимость можно аппроксимировать в окрестности точки (θ_n, J_n) некоторым многочленом. Для наших целей достаточно ограничиться квадратичной аппроксимацией функции $J(\Delta\theta)$, которая сводится к построению параболы по трем точкам: (θ_{n-1}, J_{n-1}) , (θ_n, J_n) , (θ_{n+1}, J_{n+1}) . Тогда в качестве оптимальных параметров двухимпульсной программы $\theta_{\text{опт}}$ и $J_{\text{опт}}$ могут быть приняты значения θ и J , соответствующие вершине параболы.

Анализ полученных численных результатов позволил выявить ряд закономерностей.

Прежде всего следует отметить, что изменение угла начального положения управляемого аппарата относительно цели α_0 существенно влияет на оптимальную «длительность» маневра $\theta_{\text{опт}}$ и на потребную характеристическую скорость $J_{\text{опт}}$. В наибольшей степени эта зависимость проявляется при начале маневра вблизи перигея орбиты цели ($\theta_0 = 0$) и в наименьшей степени — при начале маневра в окрестности апогея ($\theta_0 = 180^\circ$).

На рис. 8.4 показана зависимость оптимального угла перехода θ и потребной характеристической скорости J от угла α_0 для $\theta_0 = 180^\circ$, $r_0 = 0,16$, $v_0 = 0$, $e = 0,8$ (при других исходных данных имеют место аналогичные зависимости). Из графика следует, что наименьшей величине

$J_{\text{опт}}$ соответствует наибольшая оптимальная «длительность» маневра θ .

С увеличением начальной дальности r_0 (рис. 8.5 и 8.6) потребная характеристическая скорость возрастает

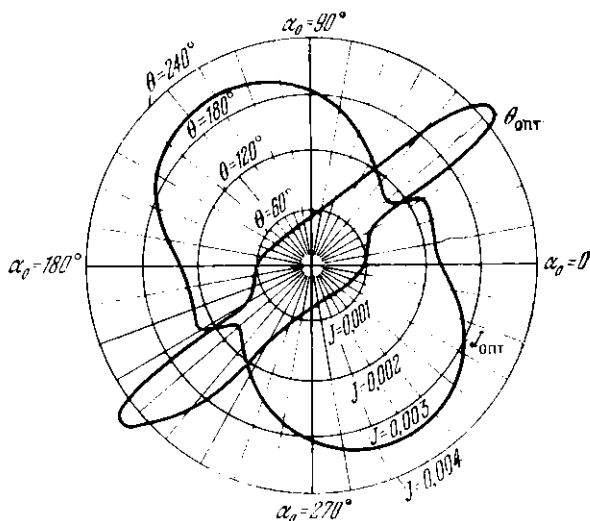


Рис. 8.4.

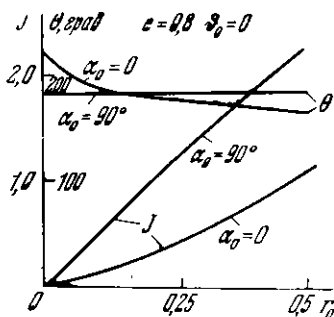


Рис. 8.5.

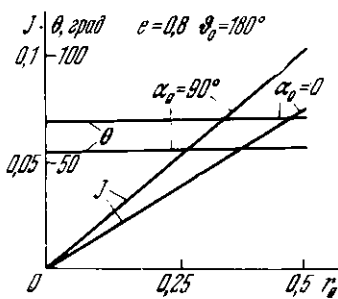


Рис. 8.6.

практически линейно вплоть до значения $r_0 = 0,5$, так что качество маневра можно характеризовать постоянной величиной удельных затрат J/r_0 . Оптимальный угол перехода θ при этом меняется незначительно.

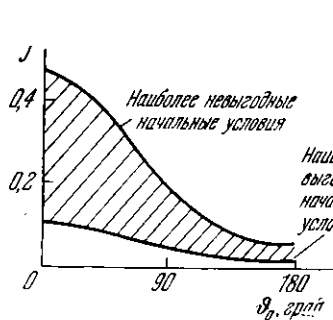


Рис. 8.7.

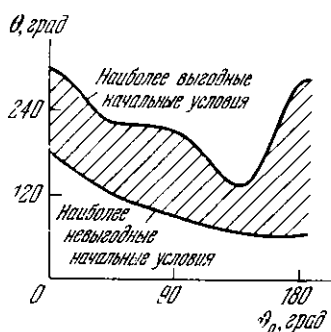


Рис. 8.8.

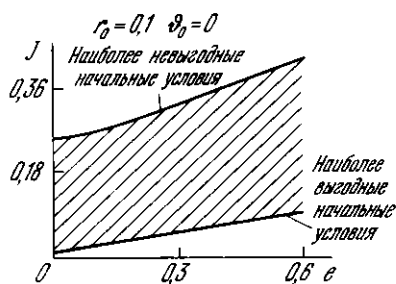


Рис. 8.9.

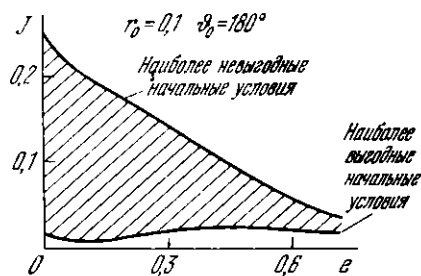


Рис. 8.10.

Численные расчеты показывают, что потребная характеристическая скорость с увеличением угла ϑ_0 (при постоянстве других условий) убывает и достигает минимума при $\vartheta_0 = 180^\circ$.

Различие наиболее выгодного и наиболее невыгодного вариантов начальных условий по характеристической скорости и по углу перехода показано в зависимости от угла ϑ_0 начального положения цели на орбите с эксцентриситетом $e = 0,6$ соответственно на рис. 8.7 и 8.8.

Увеличение эксцентриситета орбиты цели приводит к увеличению характеристической скорости маневров, начинающихся вблизи перигея, и к ее уменьшению при начале сближения в окрестности апогея (рис. 8.9 и 8.10).

Таким образом, для рассматриваемого двухимпульсного маневра наименьшие затраты характеристической скорости достигаются при начале сближения вблизи апогея орбиты цели. С увеличением эксцентриситета орбиты цели они убывают и влияние угла начального положения α_0 на параметры оптимальной программы становится меньше.

Все приведенные результаты были получены для начального положения управляемого аппарата относительно цели в режиме «зависания», т. е. при $v_0 = 0$. Если скорость управляемого аппарата относительно цели в начальный момент времени отлична от нуля, то исследование надо, вообще говоря, проводить заново. Однако расчеты показывают, что качественная картина при изменении v_0 не меняется.

В качестве примера рассмотрим вариант сближения с целью на орбите, имеющей эксцентриситет $e = 0,8$. Для случая начала сближения в районе апогея начальные условия примем в виде

$$\begin{aligned}\xi_0 &= r_0 \cos \alpha_0, & \dot{\xi}_0 &= k_1 \sin \alpha_0, \\ \eta_0 &= r_0 \sin \alpha_0, & \dot{\eta}_0 &= k_2 \cos \alpha_0,\end{aligned}$$

где $r_0 = 0,16$ или $r_0 = 0,32$, а коэффициенты k_1 и k_2 соответственно равны $-0,0049$ и $0,0198$ или $-0,0098$ и $0,0396$.

Оптимальные характеристики маневра сближения для этих вариантов начальных условий (т. е. для ненулевой начальной скорости) показаны в зависимости от угла α_0 на рис. 8.11.

Максимальные значения характеристической скорости соответствуют значениям $\alpha_0 = 150^\circ$, $\alpha_0 = 330^\circ$ и составляют 0,045 для $r_0 = 0,16$ и 0,090 для $r_0 = 0,32$, т. е. величина характеристической скорости изменяется пропорционально начальной относительной дальности. Из

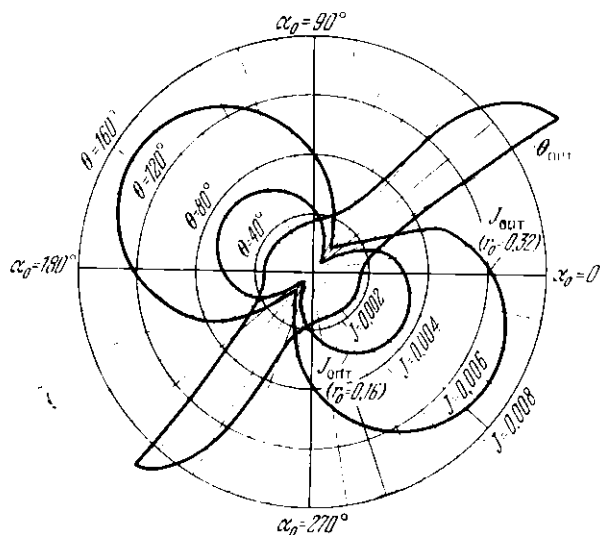


Рис. 8.11.

этого следует, что общие выводы, сделанные ранее для режима «зависания», остаются справедливыми и в общем случае.

Очевидно, что при одних и тех же значениях характеристической скорости предпочтительнее маневры с меньшей длительностью. Из рис. 8.11 следует, что если для всех углов начального положения α_0 выбрать одинаковый наименьший угол перехода $\theta \approx 40^\circ$, то минимальные значения характеристической скорости возрастут, а максимальные не изменятся.

На рис. 8.12 приведены диаграммы характеристической скорости для оптимального θ_{opt} и фиксированного угла перехода $\theta = 40^\circ$. Из рисунка видно, что угол перехода при маневре можно выбирать одинаковым для всей начальной зоны сближения без увеличения расходов топли-

ва. Отсюда вытекает возможность использования программ управления с фиксированными моментами приложения коррекций.

Выше было рассмотрено оптимальное импульсное управление сближением. Оптимальное управление сближением с конечной тягой исследуется в ряде работ. Так, в

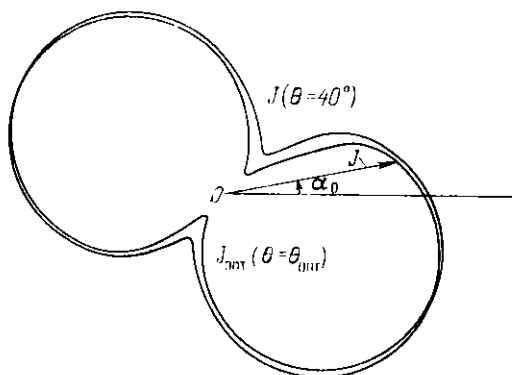


Рис. 8.12.

работе [100] определены энергетические затраты для метода параллельного наведения в орбитальной и инерциальной системах координат исходя из предположения нерегулируемой скорости сближения. В более строгой вариационной постановке эта задача решена в работе [14], где для оптимизации управления использован прямой метод Ритца [37]. В остальных известных работах, посвященных решению задачи оптимальной неимпульсной встречи, используются преимущественно не прямые методы решения вариационных задач, причем уравнения относительного движения считаются линейными.

Одними из первых в этом направлении являются работы [68] и [97], в которых выводятся и анализируются необходимые условия оптимальности, но решение не доведено до численных результатов. Наиболее существенные данные по численному решению пространственных и компланарных задач оптимального управления сближением представлены в работах [69] и [114].

В работе [114] исследуется задача о максимальном быстрой действии при ограниченном расходе топлива. Для ре-

шения задачи применен метод Нейштадта [13], требующий нахождения максимума времени сближения как функции от начальных значений сопряженных переменных. Здесь исследовались три метода поиска экстремума функции от многих переменных: метод параллельных касательных, метод скорейшего спуска и метод сопряженных направлений [63, 65, 72, 102], из которых наилучшую сходимость показал метод сопряженных направлений.

В работе [69] рассматривается эквивалентная задача минимизации расхода топлива при ограниченном времени сближения. Здесь для нахождения начальных значений сопряженных переменных применен модифицированный метод Ньютона.

Наконец, в работе [82] приводятся результаты решения задачи о максимальном быстродействии в случае эллиптических опорных орбит и дается сравнение оптимального полярного и декартова управлений. Как и в работе [144], успех численного решения связан с применением метода Нейштадта в комбинации с методом сопряженных направлений.

Следует отметить, что одномерная задача оптимального сближения по нормали к плоскости опорной орбиты допускает решение в замкнутой аналитической форме как при минимизации времени сближения, так и при минимизации расхода топлива. Некоторые из относящихся к этой задаче результатов можно найти в работах [78] и [110].

Необходимо обратить внимание также на работы [127, 128]. В работе [127] строится программа горизонтальных коррекций с тремя активными участками, которая пригодна в случае пересекающихся орбит сближаемых аппаратов и оказывается оптимальной при определенных условиях фазирования. В [128] результаты предыдущей работы обобщаются на случай эллиптических опорных орбит.

Кроме того, имеется несколько работ, в которых исследуется задача непрерывного управления сближением, оптимального по квадратичному критерию. Эта одна из немногих задач оптимального управления, которая в линейной постановке разрешима в квадратурах. В случае круговой опорной орбиты решение задачи может быть получено в конечной форме [104].

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ

§ 9.1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА ИМПУЛЬСОВ СБЛИЖЕНИЯ

В предыдущих главах на основании определенных допущений были получены различные формы уравнений движения космических аппаратов и алгоритмы расчета импульсов скорости, обеспечивающих их сближение в расчетный момент времени.

Совершенно очевидно, что аналитические формулы расчета импульсов сближения, полученные с учетом членов первого и второго порядка малости разностного гравитационного ускорения, обладают методическими погрешностями, величины которых зависят от начальных условий маневра, его длительности и параметров опорной орбиты.

В качестве результирующего показателя, характеризующего методическую погрешность формул для расчета импульса сближения, можно принять величину промаха в расчетный момент встречи. Этот показатель позволяет разработать единый подход к оценке и сравнению различных аналитических алгоритмов.

При использовании безразмерной формы записи уравнений относительного движения (см. § 5.1), аргументом которых является истинная аномалия, начальные условия и параметры маневра удобно характеризовать совокупностью следующих величин: дальностью r_0 , углами α_0 и β_0 наклона вектора дальности r_0 относительно фиксированных направлений, положением цели на орбите в начале (ϑ_0) и конце (ϑ_K) маневра, а также эксцентриситетом e орбиты цели. Тогда универсальными характеристиками методических погрешностей можно считать зависимости промаха r_K от угла перехода $\theta := \vartheta_K - \vartheta_0$, полученные при различных значениях эксцентриситета e .

Блок-схема расчета методических погрешностей двухимпульсных алгоритмов управления компланарным

сближением приведена на рис. 9.1. В блок 1 расчета импульса $[\Delta v_0$, обеспечивающего встречу аппаратов при $\vartheta = \vartheta_k$, вводятся начальные условия r_0 , α_0 и параметры

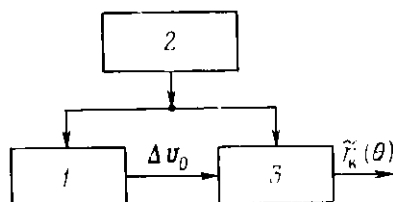


Рис. 9.1.

маневра e , ϑ_0 , ϑ_k , а также гравитационная постоянная μ . В блоке 3 проводится интегрирование уравнений относительного движения аппаратов на интервале $[\vartheta_0, \vartheta_k]$ методом Рунге — Кутты и расчет промаха $r_k = r(\theta)$ и его относительной величины $\tilde{r}_k = r_k / r_0$.

Затем весь цикл расчетов повторяется для других совокупностей исходных данных, задаваемых блоком 2:

$$e = 0, 0,01, 0,02, \dots, 0,1;$$

$$\tilde{r}_0 = \frac{r_0}{p} = 0,0125, 0,025, 0,05, 0,075, 0,1;$$

$$\alpha_0 = 0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ;$$

$$\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots, 360^\circ.$$

При расчете большого числа вариантов целесообразно в блоке 3 заменить численное интегрирование уравнений относительного движения вычислением разности двух кеплеровых движений.

Рассмотрим особенности трех аналитических алгоритмов расчета импульсов сближения, построенных в предположении, что 1) орбита цели круговая, а разностное гравитационное ускорение линейно; 2) орбита цели эллиптическая, а разностное гравитационное ускорение линейно; 3) орбита цели эллиптическая, а разностное гравитационное ускорение аппроксимировано с учетом членов второго порядка малости (квадратичная аппроксимация).

Алгоритм, основанный на первом предположении. В вычислительном отношении он наиболее прост, а в смы-

сле методических погрешностей наименее точен по сравнению с другими перечисленными выше алгоритмами (см. гл. 6).

Формулы для расчета составляющих начального импульса, обеспечивающего встречу сближаемых аппаратов в расчетный момент, представляют собой простые аналитические функции от начальных условий r_0 , α_0 , β_0 и угла перехода θ .

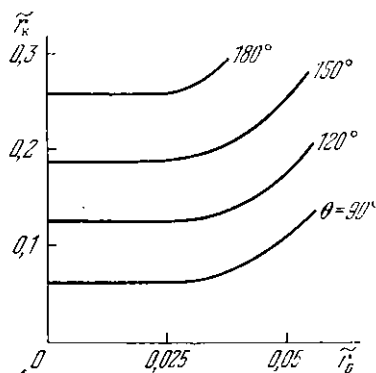


Рис. 9.2.

рис. 9.2. Зависимости $r_k(\theta)$ для различных значений $\frac{r_0}{p} = \tilde{r}_0 = 0,025, 0,05, 0,075, 0,1$ и α_0 приведены на рис. 9.3—9.6 соответственно. Из них следует, что вид характеристик при изменении угла α_0 может меняться в широких пределах.

Используем полученные характеристики для построения допустимых областей применения рассматриваемого алгоритма расчета импульсов сближения в плоскости параметров «расстояние между аппаратами — угол перехода».

С этой целью зададимся фиксированной величиной допустимого промаха $\tilde{r}_{k, \text{доп}}$ и определим по графикам (см. рис. 9.3—9.6) величину угла перехода $\theta_{\text{доп}}$, соответствующую выполнению условия $\tilde{r}_k(\theta_{\text{доп}}) = \tilde{r}_{k, \text{доп}}$ при различных значениях $\tilde{r}_0$.

На рис. 9.7 построены кривые $\tilde{r}_0$ доп ($\theta_{\text{доп}}$), соответствующие значению $\tilde{r}_{k, \text{доп}} = 0,1$. Они определяют границы областей, в которых алгоритм обеспечивает не менее чем

Определим зависимость $\tilde{r}_k(\theta)$ при различных расстояниях между аппаратами, а также исследуем влияние эллиптичности орбиты цели на эту зависимость.

Начнем с рассмотрения случая $e = 0$. Здесь естественно ожидать увеличение промаха $\tilde{r}_k$ с возрастанием расстояния r_0 при фиксированных значениях угла перехода θ . Для $\alpha_0 = 0$ это подтверждается графиками, приведенными на

десятикратное уменьшение расстояния между аппаратами при угле перехода θ . Эти области ограничены кривыми $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ и осями координат.

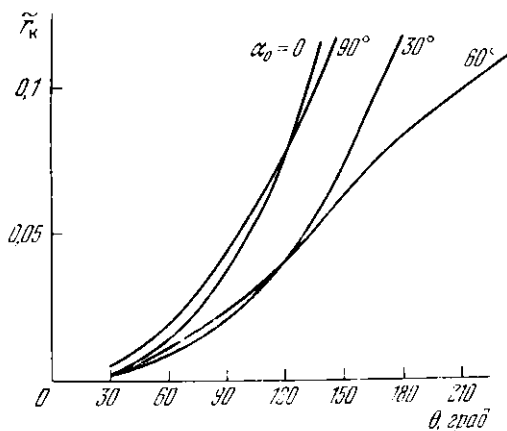


Рис. 9.3.

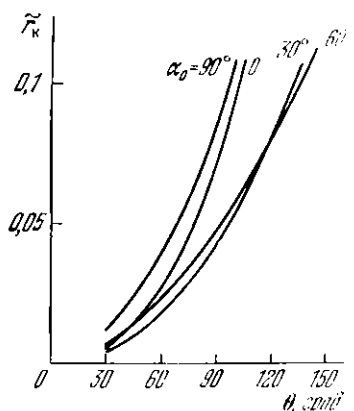


Рис. 9.4.

Границы областей $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ при $\alpha_0 = \text{const}$ имеют характер монотонно убывающих кривых. Это объясняется тем, что величина конечного промаха, обусловленная ошибкой линеаризации, возрастает с увеличением r_0 и θ (см. рис. 9.3—9.6). График $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ при $\alpha_0 = 0$ (см.

рис. 9.7) показывает, что значение $\theta_{\text{доп}}$ меняется от 70° при $\tilde{r}_{0 \text{ доп}} = 0,1$ до 180° при $\tilde{r}_{0 \text{ доп}} = 0,0125$.

Характеристики $\tilde{r}_k(\theta)$ для случаев $\alpha_0 = 30^\circ$ и $\alpha_0 = 90^\circ$ практически совпадают соответственно с характеристиками

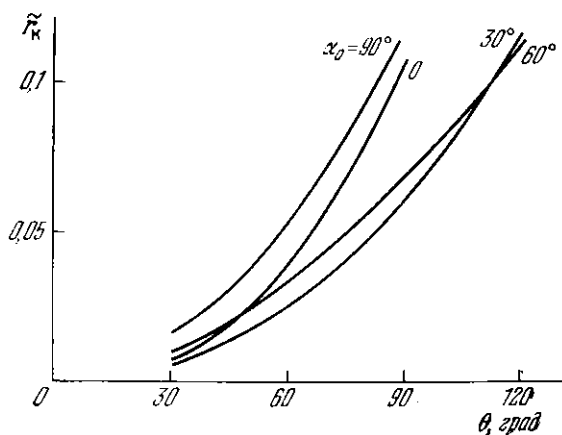


Рис. 9.5.

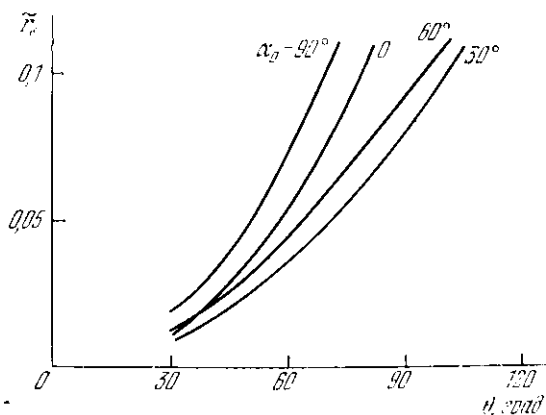


Рис. 9.6.

для $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_0 = 60^\circ$, поэтому зависимости $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$, приведенные на рис. 9.7, могут быть использованы и при значениях $\alpha_0 = 30^\circ$ и $\alpha_0 = 90^\circ$.

Следует отметить, что в зависимости от условий задачи для построения границ $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ применения алгоритма следует задавать различные значения относительного промаха $\tilde{r}_{\text{к. доп}} = \text{const}$, поэтому характеристики $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ могут быть существенно отличными от графиков, приведенных на рис. 9.7, и, в частности, могут иметь немонотонный характер.

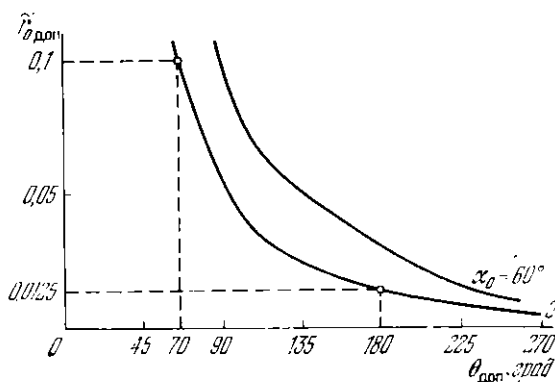


Рис. 9.7.

Установив ограниченность возможного применения формул для случая круговой орбиты цели, перейдем к рассмотрению их погрешностей для орбит цели, отличных от круговых. Логично предположить, что с увеличением эксцентриситета e погрешности формул будут возрастать, а области применения алгоритма сужаться. Начнем рассмотрение зависимостей $\tilde{r}_{\text{к}}(\theta)$ при $e = 0,03$ и $\tilde{r}_0 = 0,025, 0,05, 0,075, 0,1$ (рис. 9.8—9.11 соответственно). Характер кривых $\tilde{r}_{\text{к}}(\theta)$ при различных значениях угла α_0 одинаков, однако наименьшая крутизна кривой $\tilde{r}_{\text{к}}(\theta)$ соответствует случаю $\alpha_0 = 0$. Этот факт имеет простое объяснение: при $\alpha_0 = 0$ разностное гравитационное ускорение мало на всей траектории сближения и погрешности соответствующих расчетных формул минимальны.

Полагая $\tilde{r}_{\text{к. доп}} = 0,1$, построим для $e = 0,03$ (рис. 9.12) границы $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ области применения алгоритма, аналогичные рассмотренным выше. Из рис. 9.12 видно, что монотонное убывание зависимости $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ характерно

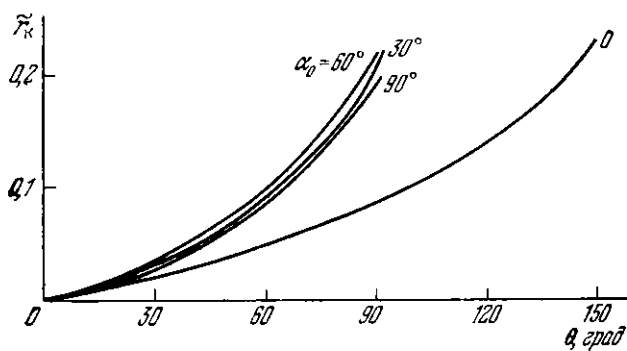


Рис. 9.8.

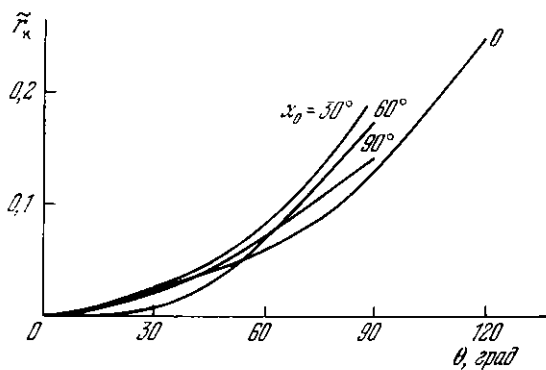


Рис. 9.9.

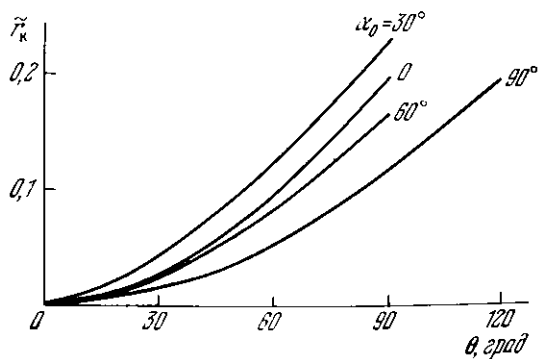


Рис. 9.10.

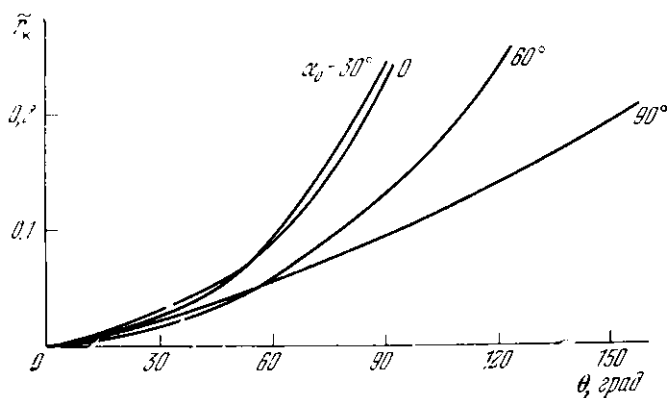


Рис. 9.11.

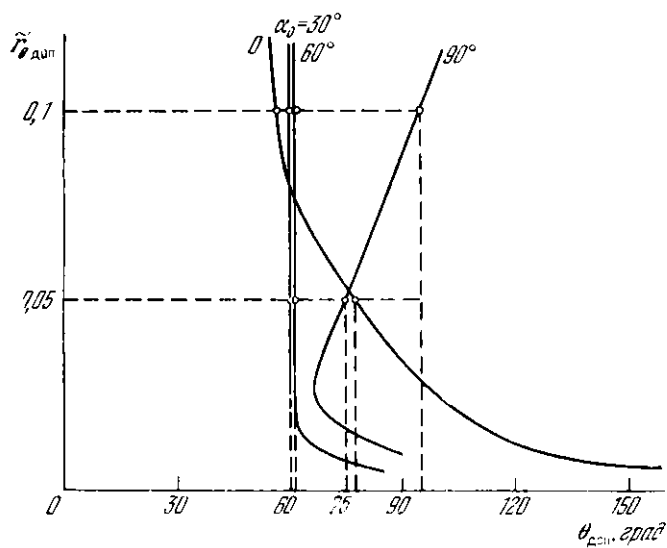


Рис. 9.12.

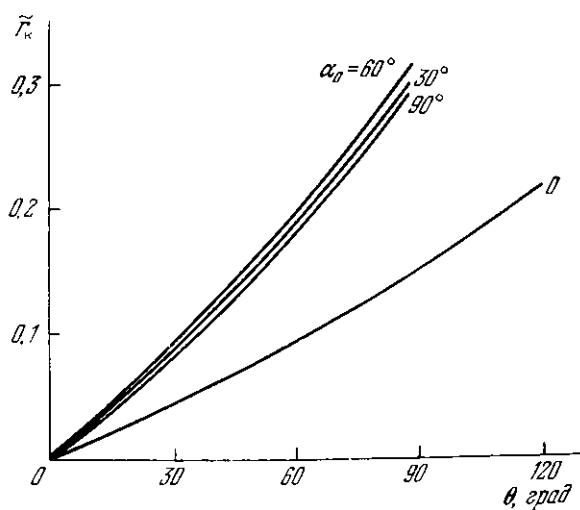


Рис. 9.13.

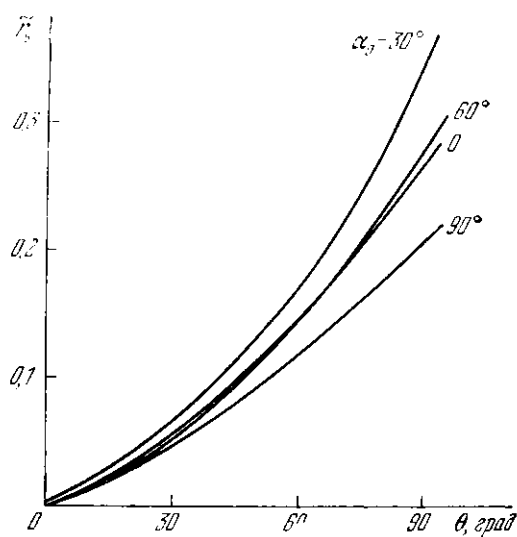


Рис. 9.14.

лишь для случая $\alpha_0 = 0$; при $\alpha_0 = 30^\circ$ и $\alpha_0 = 60^\circ$ кривые вертикальны, а при $\alpha_0 = 90^\circ$ зависимость имеет положительный наклон ($\tilde{r}_{0 \text{ доп}} > 0,03$).

Таким образом, при $e = 0,03$ и $\tilde{r}_0 = \text{const}$ величина $\theta_{\text{доп}}$ существенно зависит от угла α_0 ; например, при $\tilde{r}_{0 \text{ доп}} = 0,1$ и $\alpha_0 = 0, 30^\circ, 60^\circ$ имеем $\theta_{\text{доп}} \approx 60^\circ$, в то время как при $\alpha_0 = 90^\circ$ $\theta_{\text{доп}} \approx 95^\circ$. При $\tilde{r}_{0 \text{ доп}} = 0,05$ для всей совокупности значений α_0 имеем $\theta_{\text{доп}} \approx 60^\circ - 75^\circ$; при дальнейшем уменьшении $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}$ значения $\theta_{\text{доп}}$ возрастают, причем особенно быстро при $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Как и следовало ожидать, при одинаковых $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}$ область применения алгоритма по углу перехода θ для случая $e = 0$ существенно шире, чем при $e = 0,03$.

Теперь остается установить, как изменяется точность алгоритма при дальнейшем увеличении эксцентриситета орбиты цели. Для этого построим характеристики $\tilde{r}_k(\theta)$ для $e = 0,05$ при $\tilde{r}_0 = 0,025$ и $\tilde{r}_0 = 0,1$ (рис. 9.13 и 9.14) и зависимость $\tilde{r}_{0 \text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$, соответствующую случаю $e = 0,05$ (рис. 9.15). Сравнение областей применения рассматриваемого алгоритма при $e = 0,03$ и $e = 0,05$ (см. рис. 9.12 и 9.15) показывает, что с увеличением эксцентриситета e значения $\theta_{\text{доп}}$ уменьшаются и при $e = 0,05$ составляют не более $45^\circ - 65^\circ$ для $0,025 \leq \tilde{r}_0 \leq 0,1$.

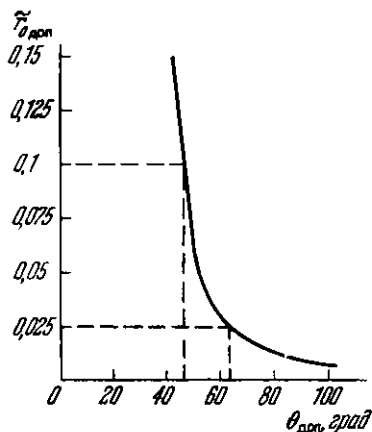


Рис. 9.15.

Характеристики $\tilde{r}_k(\theta)$ при $e = 0,1$ для различных значений $\tilde{r}_0$ показаны на рис. 9.16. Они мало зависят от $\tilde{r}_0$. Исследование показывает, что при $e = 0,1$ характеристики $\tilde{r}_k(\theta)$ мало зависят и от угла α_0 . Можно сделать вывод, что при $e = 0,1$ формулы, основанные на предположении о круговой орбите цели, становятся неработоспособными уже при $\theta > 30^\circ$ независимо от значений параметров $\tilde{r}_0$ и α_0 в указанных на рис. 9.16 диапазонах их изменений.

Поэтому исследование методических погрешностей рассматриваемого алгоритма при $e > 0,1$ не представляет практического интереса.

Алгоритм, основанный на втором предположении. Алгоритм расчета импульса скорости, обеспечивающего встречу сближаемых аппаратов в расчетный момент (см.

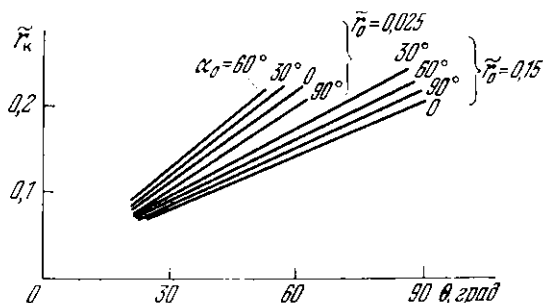


Рис. 9.16.

гл. 6), представляет собой двухступенчатую вычислительную процедуру: определение констант второго рода по заданным начальным условиям маневра и параметрам опорной орбиты и расчет импульса скорости через полученные константы.

Рассмотрим погрешности этого алгоритма, для чего получим зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ и построим границы областей его применения в плоскости параметров «расстояние между аппаратами — угол перехода», приняв допустимую величину относительного промаха $\tilde{r}_{k, \text{доп}} = 0,1$. Не приводя полученных характеристик $\tilde{r}_k(\theta)$, построим границы областей $\tilde{r}_{0, \text{доп}}(\theta_{\text{доп}})$ для трех значений эксцентриситета: $e = 0, 0,03, 0,1$ (рис. 9.17, на котором для сравнения штриховой линией показана граница области применения алгоритма, использующего формулу для круговых орбит — см. рис. 9.12). Как и следовало ожидать, алгоритм расчета импульса сближения, учитывающий эллиптичность орбит цели, имеет более широкую область применения по расстоянию между аппаратами и углу перехода по сравнению с алгоритмом, использующим формулы для круговых орбит.

Алгоритм, основанный на третьем предположении. Этот алгоритм квадратичной аппроксимации, предложенный в работе [83] для орбит цели малого эксцентриситета,

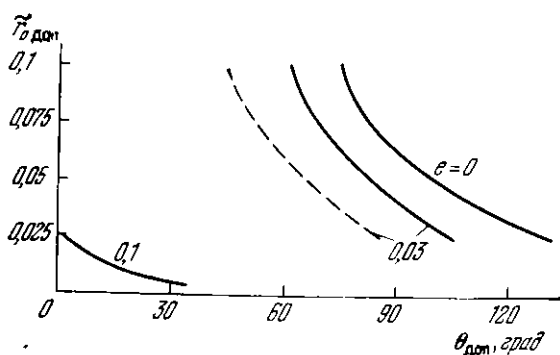


Рис. 9.17.

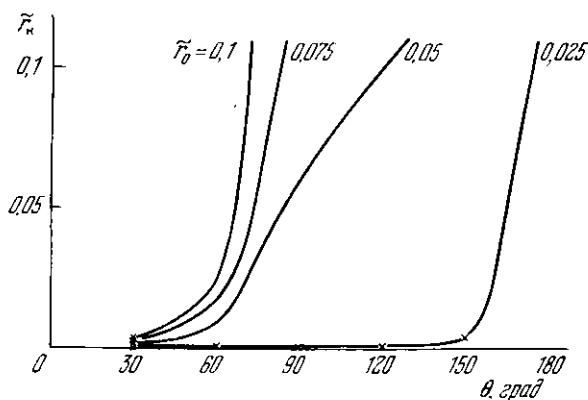


Рис. 9.18.

сводится к двухступенчатому расчету составляющих импульса скорости, обеспечивающего встречу сближаемых аппаратов в расчетный момент времени. В вычислительном отношении он сложнее двух рассмотренных выше алгоритмов, но обладает повышенной по сравнению с ними точностью.

Основные источники погрешностей алгоритма квадратичной аппроксимации следующие:

в разложении функций от эксцентрисической аномалии в ряд по эксцентриситету учитываются лишь линейные члены;

в разложении нелинейного разностного гравитационного ускорения используются линейные и квадратичные относительно координат составляющие;

решение квадратичных уравнений относительного движения вторично упрощается на этапе решения краевой задачи по определению составляющих импульса скорости.

Как и при рассмотрении двух предыдущих алгоритмов, определим погрешности алгоритма квадратичной аппрок-

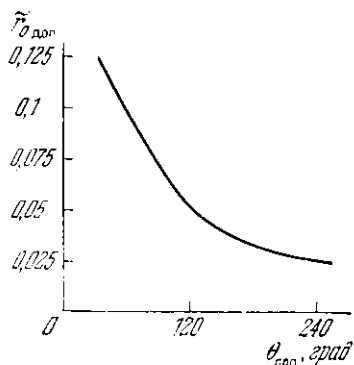


Рис. 9.19.

симации при изменении эксцентриситета орбиты цели в диапазоне $0 \leq e \leq 0,1$. Для случая $e = 0$ и $\alpha_0 = 0$ зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ при различных значениях $\tilde{r}_0$ показаны на рис. 9.18. По ним построена зависимость $\tilde{r}_{0\text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ для значения допустимого промаха $\tilde{r}_{k\text{ доп}} = 0,1$ (рис. 9.19). Зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ для $\alpha_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ при $\tilde{r}_0 = 0,025$ и $\tilde{r}_0 = 0,1$ приведены на рис. 9.20. Зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ по сравнению с полученными ранее для других алгоритмов

обладают следующими особенностями: в диапазоне значений $0 < \theta \leq 50^\circ$ при $\alpha_0 = 90^\circ$ и $\tilde{r}_0 = 0,025$ погрешность алгоритма почти не зависит от угла перехода θ ; при $\theta > 60^\circ$ и $\tilde{r}_0 = 0,1$ с увеличением θ погрешность алгоритма быстро нарастает; при $\tilde{r}_0 = 0,025$ зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ имеют немонотонный характер с несколькими экстремумами.

В тех случаях, когда характеристики $\tilde{r}_k(\theta)$ пересекают прямую $\tilde{r}_k = \tilde{r}_{k\text{ доп}} = 0,1$ в нескольких точках (см. рис. 9.20), при построении зависимости $\tilde{r}_{0\text{ доп}}(\theta_{\text{доп}})$ можно использовать лишь одно наименьшее значение угла θ .

Сравнение областей применения трех рассмотренных алгоритмов (см. рис. 9.7, 9.17 и 9.19) показывает, что ал-

горитм квадратичной аппроксимации существенно расширяет диапазон допустимых значений угла перехода θ при малых расстояниях между аппаратами ($\tilde{r}_0 \approx 0,025$), а при больших расстояниях между ними ($\tilde{r}_0 \approx 0,1$) он не дает никакого выигрыша по сравнению с двумя другими алгоритмами.

При $e = 0,05$ зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ практически совпадают с соответствующими характеристиками при $e = 0$ (см. рис. 9.18 и 9.20) и поэтому здесь не приводятся. При $e = 0,1$

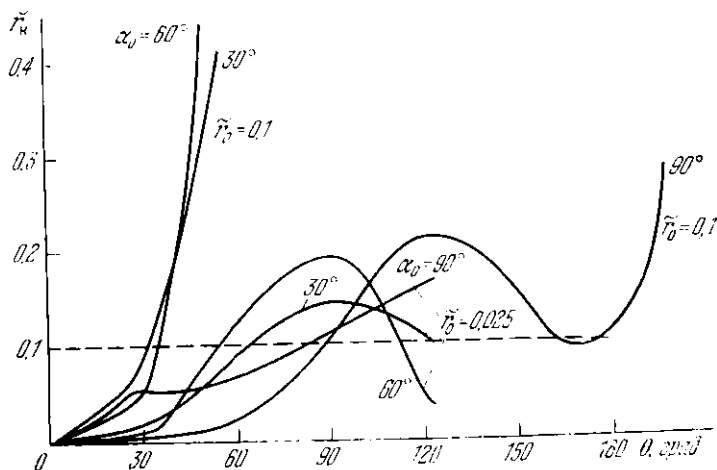


Рис. 9.20.

для случаев $\tilde{r}_0 = 0,025$ и $\tilde{r}_0 = 0,05$ они приведены на рис. 9.21 и 9.22.

С ростом $\tilde{r}_0$ до значений 0,1 характер зависимостей $\tilde{r}_k(\theta)$ при $e = 0,1$ меняется аналогично тому, как это имеет место при $e = 0$ (см. рис. 9.20). Наиболее существенно влияние проявляется при углах перехода $\theta < 90^\circ$.

Из сравнения зависимостей $\tilde{r}_k(\theta)$, приведенных на рис. 9.18, 9.20 и рис. 9.21, 9.22, видно, что с ростом эксцентриситета до значений $e = 0,1$ погрешности рассматриваемого алгоритма возрастают, но при этом значения $\theta_{\text{доп}}$, соответствующие $\tilde{r}_{k,\text{доп}} = 0,1$, изменяются очень мало. Лишь при $\tilde{r}_{k,\text{доп}} = 0,05$ и $\tilde{r}_{k,\text{доп}} = 0,03$ снижение точности алгоритма с увеличением e сопровождается сужением области его применения по углу перехода θ .

Итак, можно сделать следующие выводы, характеризующие рассмотренные алгоритмы.

1. Все три алгоритма имеют ограниченные области применения в плоскости параметров «расстояние между аппаратами — угол перехода».

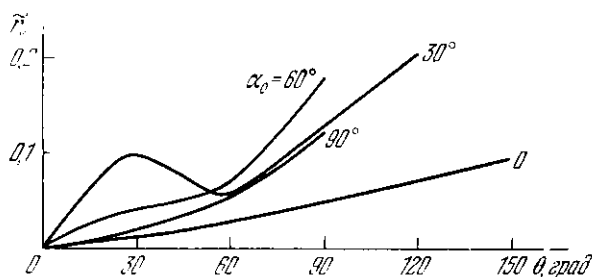


Рис. 9.21.

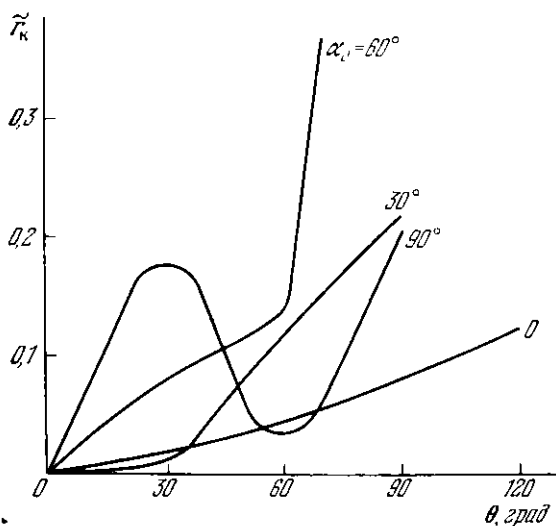


Рис. 9.22.

2. При расстояниях между аппаратами порядка $\tilde{r}_0 \approx 0,05$ лишь алгоритм квадратичной аппроксимации может применяться для расчета импульсов сближения

при углах перехода θ до 180° , в то время как два других алгоритма следует использовать для расчетов при углах перехода не более 60° — 90° .

3. Зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ позволяют построить области применения алгоритмов в плоскости параметров «расстояние между аппаратами — угол перехода». Отметим, что хотя при исследовании использовались безразмерные величины $\tilde{r}_k$ и $\tilde{r}_0$, полученные результаты могут быть легко пересчитаны в конкретные величины для широкого класса маневров, соответствующих различным начальным условиям и параметрам орбит.

4. При выборе алгоритма расчета импульсов сближения особое внимание следует уделять его точности и сложности расчетных формул. В большинстве практически важных случаев, когда расстояния между аппаратами невелики, более точный, но и более громоздкий алгоритм квадратичной аппроксимации использовать нецелесообразно.

5. Зависимости $\tilde{r}_k(\theta)$ могут быть использованы и для оценки методических погрешностей многоимпульсных маневров: для этого многоимпульсный маневр следует рассматривать как совокупность двухимпульсных, к каждому из которых применима рассмотренная выше методика исследования.

Существенным недостатком рассмотренных алгоритмов является ограниченный диапазон допустимых углов перехода, внутри которого удовлетворяется требуемое условие точности по промаху. В этой связи следует считать заслуживающей внимания задачу разработки простых способов расширения областей применения алгоритмов по углам перехода без ухудшения их точности. Рассмотрению этой задачи будет посвящен следующий параграф.

§ 9.2. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА ИМПУЛЬСОВ СБЛИЖЕНИЯ

При оценке эффективности того или иного метода повышения точности алгоритмов следует принимать во внимание не только получаемый результат, например степень уменьшения промаха $\tilde{r}_k$ при неизменном угле перехода θ или степень увеличения θ при постоянном $\tilde{r}_{k, \text{доп}}$, но и то, какими средствами этот результат достигнут.

Перечислим некоторые методы увеличения допустимых значений угла перехода θ , которые могут быть использованы в любом из рассмотренных выше алгоритмов.

1. Введение фиктивных начальных условий по положению при сохранении неизменными параметров маневра $\vartheta_0, \vartheta_k, e$.

2. Введение фиктивных условий встречи (фиктивной точки прицеливания) при сохранении неизменными начальных условий и параметров маневра $r_0, \vartheta_0, \vartheta_k, e$.

3. Введение фиктивного угла перехода θ при сохранении неизменными r_0, ϑ_0, e .

Мы рассмотрим только первый метод применительно к задаче увеличения угла перехода θ (при сохранении неизменной точности маневра) для алгоритма расчета импульсов сближения, полученного в предположении о линейности разностного гравитационного ускорения и круговой орбите цели.

Сформулируем задачу следующим образом. При планарном движении аппаратов известны начальные условия и параметры маневра $r_0, \alpha_0, \vartheta_0, \vartheta_k$ ($\theta = \vartheta_k - \vartheta_0$), e . Надо найти такие значения r_0^Φ и α_0^Φ , зависящие от $e, \vartheta_0, \vartheta_k, r_0, \alpha_0$, введение которых в алгоритм расчета импульса встречи позволит увеличить угол перехода θ , при котором выполняется условие $\hat{i}_k(\theta) \leq \bar{i}_{k, \text{доп}}$, где $\bar{i}_{k, \text{доп}}$ — допустимая величина относительного промаха. Эту задачу можно поставить и по-другому: разработать правило перехода от совокупности величин $r_0, \alpha_0, \vartheta_0, \vartheta_k, e$ к совокупности величин $r_0^\Phi, \alpha_0^\Phi, \vartheta_0, \vartheta_k, e$, которая обеспечила бы уменьшение промаха $\hat{i}_k(\theta)$ при фиксированном значении θ : $\hat{i}_k^\Phi(\theta) < \hat{i}_k(\theta)$. Здесь через $\hat{i}_k^\Phi$ и $\hat{i}_k$ обозначены значения промаха двухимпульсных маневров, для которых импульсы, обеспечивающие встречу аппаратов, рассчитываются по формулам для круговых орбит цели и линеаризованного разностного гравитационного ускорения при фиктивных (r_0^Φ, α_0^Φ) и истинных (r_0, α_0) начальных условиях.

Алгоритм расчета импульсов сближения, полученный в предположении о линейности разностного гравитационного ускорения и круговой орбите цели, методические погрешности которого рассматривались в § 9.1, основан на использовании известных аналитических решений

уравнений относительного движения аппаратов:

$$\begin{aligned}x(\theta) &= x_0 + a_1(\theta) y_0 + a_2(\theta) x'_0 + a_3(\theta) y'_0, \\y(\theta) &= b_1(\theta) y_0 + b_2(\theta) x'_0 + b_3(\theta) y'_0, \\z(\theta) &= c_1(\theta) z_0 + c_2(\theta) z'_0.\end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по углу $\theta = \left(\frac{\mu}{R_0}\right)^{1/2} (t - t_n)$, который отсчитывается от момента t_n прохождения через перигентр (R_0 — радиус опорной орбиты), а коэффициенты $a_1(\theta)$, . . . , $c_2(\theta)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}a_1(\theta) &= 6(\theta - \sin \theta), & a_2(\theta) &= 4 \sin \theta - 3\theta, \\a_3(\theta) &= 2(1 - \cos \theta), \\b_1(\theta) &= 4 - 3 \cos \theta, & b_2(\theta) &= -a_3(\theta), & b_3(\theta) &= \sin \theta, \\c_1(\theta) &= \cos \theta, & c_2(\theta) &= b_3(\theta).\end{aligned}$$

Составляющие x'_0 , y'_0 , z'_0 скорости, обеспечивающей встречу аппаратов при $\theta = \theta_k$, определяются путем решения краевой задачи, граничные условия которой имеют вид

$$x(\theta_k) = 0, \quad y(\theta_k) = 0, \quad z(\theta_k) = 0. \quad (9.2.1)$$

При исследовании методических погрешностей рассматриваемого алгоритма было установлено, что промах имеет характер недолета и что составляющая промаха x_k , как правило, самая значительная по сравнению с y_k и z_k , наиболее чувствительна к изменениям y_0 и x'_0 вследствие того, что коэффициенты $a_1(\theta)$ и $a_2(\theta)$ содержат вековые составляющие. При больших значениях θ коэффициент $a_1(\theta) > 0$ и, следовательно, приращение Δy_0 вызывает изменение $\Delta x_k = \Delta y_0 a_1(\theta)$, совпадающее с ним по знаку, на основании чего можно утверждать, что изменение $\Delta y_0 > 0$ должно приводить к уменьшению недоleta x_k при $\theta = \theta_k$.

Итак, установлен простой способ уменьшения промаха x_k (и r_k) — введение в расчет импульса сближения фиктивной координаты $y_0^\Phi = y_0 + \Delta y_0$, отличающейся от действительной на некоторую положительную величину Δy_0 (в этом случае алгоритм расчета импульса сближения назовем *модифицированным*). Эта величина является функ-

цией от нескольких переменных $[\Delta y_0 = \Delta y_0(\theta, r_0, \alpha_0)]$ и может быть определена путем аппроксимации численных результатов исследования большого числа вариантов маневров с разными углами перехода θ и начальными условиями r_0 и α_0 .

Наиболее просто функция $\Delta y_0(\theta, r_0, \alpha_0)$ определяется для случая, когда аппараты выводятся на одну или близкие орбиты и $\alpha_0 = 0$. В этом случае аппроксимация функции $\Delta y_0 = (\theta, r_0)$ осуществляется на основании предположений, что величина Δy_0 пропорциональна дальности r_0 и возрастает пропорционально углу перехода θ .

Для случая $\alpha_0 = 0$ будем искать функцию $\Delta y_0(\theta, r_0)$ в виде

$$\Delta y_0 = k_0 r_0 \theta, \quad (9.2.2)$$

где k_0 — некоторая постоянная.

В § 9.1 было показано, что алгоритм, полученный в предположении о линейности разностного гравитационного ускорения и круговой опорной орбите, может быть использован для расчета импульса скорости, обеспечивающего встречу аппаратов и в тех случаях, когда орбиты цели отличны от круговых, поэтому в общем случае функция Δy_0 зависит также от эксцентриситета e и может быть записана в виде

$$\Delta y_0 = k_0 k_1(e) r_0 \theta.$$

Влияние эллиптичности орбиты цели учитывается здесь с помощью функции $k_1(e)$. Чтобы исключить необходимость разработки аппроксимации функции $k_1(e)$, можно использовать форму записи (9.2.2), определяя коэффициент k_0 для каждого значения e .

Рассмотренный метод используем для повышения точности маневров сближения аппаратов на эллиптической орбите, эксцентриситет которой $e = 0,03$. Функция Δy_0 для этого случая имеет вид $\Delta y_0 = 0,001 r_0 \theta$ (θ в радианах). Результаты расчетов промаха $i_k^{\Phi}(\theta)$ для маневров различной длительности приведены в табл. 9.1. В ней же для сравнения дана зависимость $\tilde{r}_k(\theta)$, соответствующая $\Delta y_0 = 0$.

Из таблицы видно, что если при $\Delta y_0 = 0$ алгоритм становится неработоспособным уже при $\theta = \pi/2$, то его модификация пригодна для расчета импульсов сближения

Таблица 9.1

θ	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\tilde{r}_K^\Phi(\theta)$	0,04	0,02	0,06	0,05
$\tilde{r}_K(\theta)$	0,12	2,05	10	—

для маневров с углами перехода до $\theta = \frac{11}{6}\pi$ и обеспечивает при этом достаточно высокую точность.

Рассмотренный метод повышения точности алгоритма является частным случаем общего приема, состоящего в том, что действительные начальные координаты маневра x_0, y_0, z_0 заменяются на фиктивные $x_0^\Phi, y_0^\Phi, z_0^\Phi$; значения $x_0^\Phi, y_0^\Phi, z_0^\Phi$ определяются из условий минимума промаха $\tilde{r}_K(\theta)$ при начальных условиях $x_0^\Phi, y_0^\Phi, z_0^\Phi, v_{x0}^\Phi, v_{y0}^\Phi, v_{z0}^\Phi$ ($v_{x0}^\Phi, v_{y0}^\Phi, v_{z0}^\Phi$ — составляющие скорости, обеспечивающей сближение аппаратов при угле перехода θ и при начальных условиях $x_0^\Phi, y_0^\Phi, z_0^\Phi$):

$$\frac{\partial \tilde{r}_K(\theta)}{\partial x_0^\Phi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{r}_K(\theta)}{\partial y_0^\Phi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{r}_K(\theta)}{\partial z_0^\Phi} = 0. \quad (9.2.3)$$

Правило перехода от величин x_0, y_0, z_0 к величинам $x_0^\Phi, y_0^\Phi, z_0^\Phi$ или методика расчета значений $\Delta x_0 = x_0^\Phi - x_0, \Delta y_0 = y_0^\Phi - y_0, \Delta z_0 = z_0^\Phi - z_0$ в зависимости от начальных условий и параметров маневра могут быть существенно упрощены, если определять величины $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$, используя уравнения (9.2.3) для нескольких значений θ из рассматриваемого диапазона.

Предположим, что начальные условия маневров x_0, y_0, z_0 , эксцентриситет e орбиты цели и угловое положение цели на орбите θ_0 известны. Предположим также, что путем введения фиктивных начальных условий $x_0^\Phi, y_0^\Phi, z_0^\Phi$ в расчет импульса, обеспечивающего сближение аппаратов, мы хотим повысить точность алгоритма для маневров с углами перехода θ , лежащими в пределах $\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$.

Тогда в соответствии со сказанным выше значения Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 следует определять из условия минимума квадратичной формы

$$J_r = \sum_{i=1}^4 \tilde{r}_k^2(\theta_i),$$

где $\theta_i = \frac{\pi}{2} i$ ($i = 1, \dots, 4$), составляющие которой $\tilde{r}_k(\theta_i)$ определяются для совокупности значений x_0^Φ , y_0^Φ , z_0^Φ , полученных из уравнений (9.2.3) для различных θ . Простота и удобство такого подхода состоят в том, что полученные в результате его использования величины Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 постоянны для маневров с углами перехода, лежащими в диапазоне $\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$.

Следует отметить, что введение в алгоритм расчета импульса скорости, обеспечивающего сближение аппаратов, поправок начальных координат Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 , не зависящих от угла перехода и рассчитываемых методом, рассмотренным выше, может привести к некоторому снижению его точности по сравнению со случаем, когда в алгоритм вводятся поправки Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 , определяемые для каждого значения угла перехода θ . Однако это снижение точности для большинства практически важных случаев невелико.

Еще более простой по сравнению с рассмотренным и эффективный метод повышения точности алгоритма для расчета импульса сближения можно получить для орбит цели с эксцентриситетом $0 \leq e \leq 0,05$. Он заключается во введении в начальные условия маневра поправки Δy_0 , пропорциональной разности расстояний сближаемых аппаратов до центра притяжения. В случае, когда $r_0 \gg z_0$, разность расстояний R_a и R_n сближаемых аппаратов до центра притяжения, определяемая соотношением

$$\Delta R = |R_a - R_n| \approx r_0 \sin \alpha_0,$$

может быть принята в качестве величины, характеризующей разностное гравитационное ускорение. В свою очередь величину Δy_0 , определяющую фиктивную координату $y_0^\Phi = y_0 + \Delta y_0$, будем считать функцией от разности ΔR и эксцентриситета орбиты цели. Численные расчеты для орбит цели с указанным выше эксцентриситетом

позволили установить следующее соотношение для вычисления Δy_0 через начальные условия и параметры маневра (α_0 и θ в градусах):

$$\Delta y_0 = [1 - (3e)^{-1} 10^{-7} r_0 (300 - \theta)] r_0 \sin \alpha_0.$$

Эффективность модифицированного алгоритма, использующего для расчета импульса сближения фиктивную координату y_0^Φ , характеризуется графиками, построенными

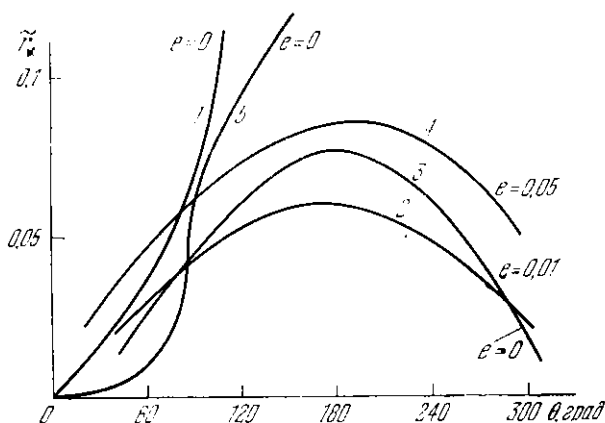


Рис. 9.23.

на рис. 9.23 для $r_0 = 0,05$ и $\alpha_0 = 0$, где представлены зависимости $\tilde{i}_k(\theta)$ алгоритма круговых орбит (кривая 1) и его модификации (кривые 2—4). Здесь же приведена зависимость $\tilde{i}_k(\theta)$ алгоритма квадратичной аппроксимации разностного гравитационного ускорения (кривая 5). Из рис. 9.23 следует, во-первых, что модифицированный алгоритм обеспечивает высокую точность сближения для маневров с углами перехода θ до 300° , т. е. расширяет область значений θ , в которой $\tilde{i}_k < 0,1$, примерно в 3—4 раза по сравнению с обычным методом. Во-вторых, этот алгоритм обладает существенно меньшей методической погрешностью (существенно более высокой точностью) даже по сравнению с алгоритмом квадратичной аппроксимации.

Точность предложенной модификации алгоритма зависит от коэффициентов, определяемых расчетным путем для исследуемой совокупности величин r_0 , α_0 , e , θ . Приведен-

ные значения постоянных $[(3e)^{-1}; 10^{-7}; 300]$ были получены исходя из условия минимума величины промаха для случая наибольших значений $\tilde{r}_0$, e , θ ($\tilde{r}_0 = 0,1$; $e = 0,05$; $\theta = \frac{11}{6}\pi$).

Существенным достоинством рассмотренного метода является то обстоятельство, что в большинстве случаев повышение его точности достигается при малых значениях Δy_0 . Поэтому решения уравнений относительного движения в случае круговых опорных орбит для начальных условий x_0 , y_0^ϕ , z_0 и решения полных уравнений движения численными методами для начальных условий x_0 , y_0 , z_0 оказываются весьма близкими. Это имеет большое значение для прогнозирования движения сближаемых аппаратов, так как позволяет использовать для расчетов траекторий простые формулы круговых орбит вместо численного интегрирования полных уравнений движения.

§ 9.3. ПОГРЕШНОСТИ НАВЕДЕНИЯ ВСЛЕДСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ КЕПЛЕРОВА ДВИЖЕНИЯ

Все полученные ранее расчетные формулы, входящие в алгоритм управления сближением и требуемые для прогноза относительного движения и определения управляющих воздействий, основаны на фундаментальном упрощающем предположении, что свободное абсолютное движение сближаемых аппаратов является кеплеровым, т. е. происходит под действием только одного гравитационного ускорения, имеющего величину

$$g = \frac{\mu}{R^2}. \quad (9.3.1)$$

Для обоснованного применения этих формул необходимо оценить влияние реально существующих возмущений кеплерова движения на точность решения задачи наведения.

Из возмущений различной природы, отклоняющих движение космических аппаратов от кеплерова, рассмотрим возмущения, связанные с несферичностью центрального тела, вблизи которого выполняется маневр сближения. Возмущения подобного рода существенны и должны учитываться, если движение космических аппаратов рассмат-

ривается в непосредственной близости от центрального тела [16, 79, 80].

Влияние несферичности центрального тела на движение космических аппаратов является предметом исследования теории гравитационного потенциала и гравиметрии, основные методы которой наиболее полно разработаны для Земли [28].

При рассмотрении влияния формы Земли на притяжение различных тел ее точная форма (геоид) заменяется условным эллипсоидом, поверхность которого наиболее близка к поверхности геоида и который называется общим земным эллипсоидом. Вектор g ускорения в какой-либо точке, соответствующей общему земному эллипсоиду, расположен в плоскости меридиана, проходящего через эту точку. Его радиальная g_R и меридиональная g_m составляющие имеют положительное направление соответственно к центру Земли и к Северному полюсу и выражаются следующим образом:

$$g_R = g_R^{(0)} + g_R^{(2)} + g_R^{(4)}, \quad (9.3.2)$$

$$g_m = g_m^{(2)} + g_m^{(4)}. \quad (9.3.3)$$

Здесь

$$g_R^{(0)} = \frac{\mu}{R^2}, \quad (9.3.4)$$

$$g_R^{(2)} = -2 \frac{c_e}{R^4} P_{20}(\sin B) = \frac{c_R}{R^4} (1 - 3 \sin^2 B), \quad (9.3.5)$$

$$g_R^{(4)} = \frac{c_\kappa}{R^6} \left(5 \sin^4 B - \frac{30}{7} \sin^2 B + \frac{3}{7} \right), \quad (9.3.6)$$

$$g_m^{(2)} = -\frac{c_e}{R^4} \sin 2B, \quad (9.3.7)$$

$$g_m^{(4)} = \frac{1}{14} \frac{c_\kappa}{R^6} (2 \sin 2B - 7 \sin B), \quad (9.3.8)$$

где B — геоцентрическая широта; $P_{20}(\sin B)$ — полином Лежандра от $\sin B$; c_e и c_κ — константы [79].

Для определения возмущений, действующих на движение сближаемых аппаратов и вызываемых членами $g_R^{(2)}$, $g_R^{(4)}$, $g_m^{(2)}$, $g_m^{(4)}$, т. е. несферичностью формы Земли и ее вращением, необходимо вычислить составляющие

ускорений (9.3.4) — (9.3.8), действующих на управляемый аппарат и цель, а затем найти их векторные разности. Решение этой задачи приводится ниже.

Введем следующие обозначения для составляющих ускорения, действующего на управляемый аппарат:

g_{aS} — направлена по радиусу-вектору R_a , соединяющему управляемый аппарат с центром притяжения;

g_{aT} — направлена по нормали к радиусу-вектору R_a и лежит в плоскости орбиты аппарата;

g_{aW} — направлена по нормали к плоскости орбиты аппарата и дополняет систему g_{aS} , g_{aT} до правой.

Обозначим через δ_a угол между плоскостью орбиты управляемого аппарата и меридиональной плоскостью, проходящей через аппарат. Тогда составляющие ускорения запишутся в виде

$$g_{aS} = -g_R, \quad g_{aT} = g_m \cos \delta_a, \quad g_{aW} = g_m \sin \delta_a. \quad (9.3.9)$$

Значения g_R и g_m вычисляются по формулам (9.3.2) — (9.3.8) после подстановки в них величины R_a , определяемой равенством

$$R_a = \frac{p_a}{1 + e_a \cos(\vartheta_a - \vartheta_{0a})}, \quad (9.3.10)$$

где e_a и p_a — эксцентриситет и фокальный параметр орбиты; ϑ_{0a} — значение истинной аномалии управляемого аппарата в момент начала маневра.

Входящую в формулы (9.3.5) — (9.3.8) широту B необходимо вычислить как функцию от истинной аномалии аппарата по значениям элементов его орбиты p_a , e_a , ϑ_{0a} и кеплеровых углов λ_a , i_a , ω_a , определяющих положение орбиты в пространстве. Поскольку элементы p_a , e_a , ϑ_{0a} могут быть определены только в случае, когда известны координаты и скорости движения управляемого аппарата, расчету $B(\vartheta)$ должен предшествовать расчет импульса скорости, обеспечивающего встречу сближаемых аппаратов в заданный момент времени.

Итак, формулы (9.3.2) — (9.3.10) определяют возмущающие ускорения управляемого аппарата, вызванные несферичностью формы Земли и ее вращением. Подобным же образом могут быть вычислены и возмущения, действующие на цель. Вводя в рассмотрение угол ϑ_c , состав-

ляющие ускорения $g_{\text{ис}}$, $g_{\text{ит}}$, $g_{\text{ив}}$ и параметры орбиты цели $p_{\text{ц}}$, $e_{\text{ц}}$, $\vartheta_{\text{ц}}$, получим расчетные формулы для определения возмущений движения цели, аналогичные (9.3.2) — (9.3.9).

Для определения влияния рассматриваемых возмущений на относительное движение сближаемых аппаратов необходимо найти векторные разности

$$\Delta g_s = g_{\text{ас}} - g_{\text{ис}}, \Delta g_t = g_{\text{ат}} - g_{\text{ит}}, \Delta g_w = g_{\text{ав}} - g_{\text{ив}},$$

а также их проекции на оси координат, связанные с целью. После этого найдем составляющие возмущающего ускорения, направленные вдоль осей подвижной орбитальной системы координат, связанной с целью, подставляя которые в уравнения относительного движения аппаратов, получим возможность оценить их влияние на рассматриваемом интервале времени.

Для упрощения расчетов можно исключить из формул (9.3.5) — (9.3.9) широту B и угол δ_a , введя в рассмотрение угол $\varphi_{\text{а1}}$, характеризующий положения управляемого аппарата на орбите и отсчитываемый от восходящего узла, и наклонение $i_{\text{а1}}$ орбиты [79]. Тогда формулы (9.3.9) приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned} g_{\text{ас}} &= \frac{c_e}{R_a^4} (3 \sin^2 i_{\text{а1}} \sin \varphi_{\text{а1}} - 1), \\ g_{\text{ат}} &= - \frac{c_e}{R_a^4} \sin^2 i_{\text{а1}} \sin (2\varphi_{\text{а1}}), \\ g_{\text{ав}} &= - \frac{c_e}{R_a^4} \sin (2i_{\text{а1}}) \sin (2\varphi_{\text{а1}}). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.11)$$

Выражения для расчета составляющих ускорения $g_{\text{ис}}$, $g_{\text{ит}}$, $g_{\text{ив}}$, действующего на цель, полностью аналогичны (9.3.11) и здесь не приводятся.

Наряду с рассмотренным способом учета возмущений, связанных с несферичностью формы Земли и ее вращением, существуют более простые, но менее точные приемы, сводящиеся к расчету отклонений координат аппарата, вызываемых ускорениями g_s , g_t , g_w за один виток его обращения вокруг планеты. Этот расчет проводится для обоих аппаратов; затем полученные результаты интерполируются с учетом длительности маневра, после чего находится векторная разность полученных величин, соответствующая

щая возмущениям относительного движения управляемого аппарата и цели.

Используем эту методику для расчета ошибки наведения Δr_k при реализации маневра сближения двух аппаратов, движущихся компланарно по низкой, близкой к круговой орбите вокруг Земли. В момент начала маневра взаимное положение аппаратов (в подвижной орбитальной системе координат) характеризуется следующими значениями координат: $x_0 = 50 \text{ км}$, $y_0 = 20 \text{ км}$. Угол перехода маневра составляет полвитка. В расчете предполагается, что расстояние r между аппаратами в ходе выполнения маневра меняется по линейному закону: $r(t) = r_0(1 - t/t_k)$, где t_k — длительность маневра. Наклонение орбиты движения принято наиболее неблагоприятным ($i = 45^\circ$), когда ошибки, связанные с несферичностью формы Земли и ее вращением, максимальны [79]. Результаты расчета дали следующие значения: $\Delta x_k = 155 \text{ м}$, $\Delta y_k = 32 \text{ м}$, $\Delta r_k = 158 \text{ м}$.

При выполнении маневра сближения на орбитах вокруг Земли помимо несферичности ее формы и вращения необходимо учитывать воздействие на космические аппараты сопротивления атмосферы, имеющее вековой характер и возрастающее с течением времени [79].

Методика оценки влияния сопротивления атмосферы на движение космического аппарата за один виток его обращения вокруг Земли изложена в [79] и здесь не приводится. Для приближенных оценок этого влияния на точность выполнения маневра сближения с углом перехода $\theta \neq 180^\circ$ можно рассчитать возмущение движения каждого аппарата за один виток обращения вокруг Земли, затем пересчитать эти возмущения с учетом истинного угла перехода θ и, наконец, найти их векторную разность, определяющую возмущение относительного движения.

Как показывает анализ, возмущающее влияние несферичности Земли, ее вращения и сопротивления атмосферы на движение сближаемых аппаратов существенно слабее, чем влияние конечности тяги, неточности знания параметров опорной орбиты, ошибок измерений параметров движения и ошибок исполнения расчетных коррекций скорости. Поэтому на практике рассмотренные в этой главе факторы можно в алгоритмах управления не учитывать.

§ 9.4. ПОГРЕШНОСТИ НАВЕДЕНИЯ ВСЛЕДСТВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ ТЯГИ

При рассмотрении управления сближением обычно исходят из того, что двигатели маневрирования имеют неограниченно большую тягу, в связи с чем любые изменения скорости происходят мгновенно, т. е. имеют импульсный характер. Это предположение существенно упрощает решение задачи сближения и, в частности, расчет импульсов скорости, необходимых для встречи аппаратов.

Для полного исключения методических ошибок, связанных с предположением об импульсном характере действия тяги, необходимо вводить в расчет активные участки, длительность которых рассчитывается по величине импульсов скорости и величине ускорения от тяги. Для представляющей интерес совокупности начальных условий и параметров маневра методическая погрешность (промах), вызванная конечностью активного участка, может быть определена путем сравнения результатов численных решений уравнений относительного движения с учетом и без учета конечной длительности работы двигателей. Этот метод, однако, неудобен тем, что он не дает аналитических выражений для рассматриваемых погрешностей через начальные условия маневра и ускорение.

Различные подходы к оценкам влияния ограниченности тяги на точность траекторий сближения рассмотрены в работах [31, 88], посвященных двухимпульсным маневрам сближения. Наиболее распространенная рекомендация по уменьшению ошибок наведения, вызванных ограниченностью тяги, сводится к необходимости включения двигателя раньше расчетного момента на интервал, равный половине вычисленного времени его работы [86]. В то же время с целью упрощения выкладок анализ влияния ограниченности тяги проводится в предположении, что направление вектора тяги в течение всего периода работы двигателя считается неизменным.

В [31] рассмотрены два способа постоянной ориентации вектора тяги при отработке импульсов скорости (относительно инерциальной и относительно орбитальной систем координат) и даны удобные формулы для расчета поправок на конечную тягу. Сопоставление этих способов ориентации вектора тяги дает следующие результаты:

ошибки импульсной аппроксимации тяги (конечный промах) примерно на порядок больше в случае стабилизации вектора тяги относительно инерциальной системы координат;

оба способа ориентации вектора тяги имеют практически одинаковые энергетические характеристики;

приближенная формула для расчета промаха может быть представлена в виде

$$r_k = \frac{m}{a^2},$$

где коэффициент m зависит от способа ориентации вектора тяги и начальных условий маневра; a — ускорение, создаваемое тягой.

Заметим в заключение, что вследствие простоты моделирования на ЭВМ полных уравнений движения космических аппаратов как в абсолютной, так и в относительной системе координат (включая активный участок) для проверки достоверности результатов использования линейной теории следует использовать численные методы расчета соответствующих погрешностей наведения и методы их минимизации, собственные погрешности которых малы и практически не зависят от начальных условий и параметров орбит аппаратов.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ КОРРЕКЦИЙ

§ 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧКИ ПОСЛЕДНЕЙ КОРРЕКЦИИ

Рассмотренные в предыдущих главах методы вычисления двухимпульсных программ управления, в том числе и оптимальных, формулировались в идеализированной постановке, без учета реальных ошибок измерений и исполнения. С учетом этих ошибок может оказаться невозможным достигнуть попадания в заданную окрестность цели с помощью только одного корректирующего импульса скорости, являющегося начальным импульсом двухимпульсной программы. Поэтому для обеспечения требуемой точности сближения необходимо предусмотреть промежуточные корректирующие импульсы, количество и величина которых зависят от величины ошибок, параметров орбиты цели, начальных условий и времени сближения.

Возможны два подхода к определению полной программы коррекций: она может быть рассчитана заранее на весь интервал сближения либо последовательно уточняться в процессе сближения. В настоящей главе излагается методика определения программы маневрирования с фиксированными моментами приложения коррекций, оптимальной по энергетическим затратам при учете ошибок измерений и исполнения. Оптимизация осуществляется в минимаксном смысле для наихудших вариантов начальных условий и сочетания ошибок, которые считаются детерминированными. При этом предполагается, что каждая коррекция является полной.

При нахождении многоимпульсной программы коррекций момент приложения последней из них можно определять в какой-то мере независимо от остальных. Это объясняется следующими причинами.

Если последнюю коррекцию смещать к концу заданного интервала сближения, то точность наведения будет увеличиваться, но будет возрастать и величина коррек-

тирующего импульса скорости. Кроме того, при этом будут возрастать также отклонения, оставшиеся нескорректированными после предыдущих коррекций, так что для их ликвидации необходимы все большие и большие энергетические затраты, вследствие чего положение точки последней коррекции следует выбирать настолько далеко от расчетного момента встречи, насколько позволяют требования к точности выполнения конечных условий сближения.

Для маневра сближения наиболее существенным является обычно требование обеспечения заданной конечной точности по положению. Поэтому ниже будут учитываться только ограничения на конечные координаты, хотя предлагаемый подход нетрудно обобщить и на случай выполнения конечных условий по скорости.

Ограничиваясь ради простоты рассмотрением компланарного маневра сближения, составляющие конечного промаха по положению можно в линейном приближении представить в виде

$$\left. \begin{aligned} x_k &= a_{xx} \delta x + a_{xy} \delta y + a_{x\dot{x}} \delta \dot{x} + a_{x\dot{y}} \delta \dot{y}, \\ y_k &= a_{yx} \delta x + a_{yy} \delta y + a_{y\dot{x}} \delta \dot{x} + a_{y\dot{y}} \delta \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1.1)$$

Здесь δx , δy , $\delta \dot{x}$, $\delta \dot{y}$ — отклонения параметров относительного движения от их значений, отвечающих точному выполнению конечных условий сближения; $a_{xx}, \dots, a_{y\dot{y}}$ — элементы соответствующей переходной матрицы, представляющие частные производные от конечных координат по

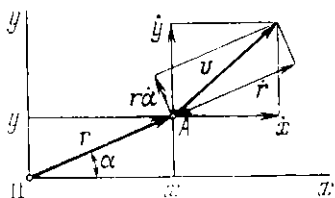


Рис. 10.1.

текущим координатам и составляющим относительной скорости и определяемые в явном виде в зависимости от угла перехода θ соотношениями типа (5.4.10).

Пусть расчет коррекций основывается на измерениях дальности r , скорости изменения дальности $\dot{r}$, угла α между вектором дальности и осью x орбитальной системы координат xuz и скорости изменения этого угла $\dot{\alpha}$. Тогда относительные координаты и составляющие скорости в орбитальной системе отсчета определяются из соотношений

(рис. 10.1)

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha; \quad (10.1.2)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \sin \alpha,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha.$$

Ошибки определения координат и составляющих скорости вследствие ошибок измерений вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \Delta r \cos \alpha - r \Delta \alpha \sin \alpha, \\ \delta y &= \Delta r \sin \alpha + r \Delta \alpha \cos \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (10.1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{x} &= \Delta \dot{r} \cos \alpha - \dot{r} \Delta \alpha \sin \alpha - \\ &\quad - \Delta r \dot{\alpha} \sin \alpha - r \Delta \dot{\alpha} \sin \alpha - r \dot{\alpha} \Delta \alpha \cos \alpha, \\ \delta \dot{y} &= \Delta \dot{r} \sin \alpha + \dot{r} \Delta \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \Delta r \dot{\alpha} \cos \alpha + r \Delta \dot{\alpha} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \Delta \alpha \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (10.1.4)$$

где Δr , $\Delta \dot{r}$, $\Delta \alpha$, $\Delta \dot{\alpha}$ — ошибки измерения соответствующих параметров, которые считаются малыми.

Если в выражениях (10.1.3) и (10.1.4) все ошибки считать независимыми и исключить тригонометрические функции с помощью соотношений (10.1.2), можно получить выражения для максимально возможных отклонений координат

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \sqrt{\left(\frac{x}{r} \Delta r\right)^2 + (y \Delta \alpha)^2}, \\ \delta y &= \sqrt{\left(\frac{y}{r} \Delta r\right)^2 + (x \Delta \alpha)^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.1.5)$$

и составляющих скорости

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{x} &= \left[\left(\frac{x}{r} \Delta \dot{r}\right)^2 + \left(\dot{r} \frac{y}{r} \Delta \alpha\right)^2 + (y \Delta \dot{\alpha})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\dot{\alpha} \frac{y}{r} \Delta r\right)^2 + (\dot{\alpha} x \Delta \alpha)^2 \right]^{1/2}, \\ \delta \dot{y} &= \left[\left(\frac{y}{r} \Delta \dot{r}\right)^2 + \left(\dot{r} \frac{x}{r} \Delta \alpha\right)^2 + (x \Delta \dot{\alpha})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\dot{\alpha} \frac{x}{r} \Delta r\right)^2 + (\dot{\alpha} y \Delta \alpha)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1.6)$$

Входящие в эти соотношения величины $\dot{r}$ и $\dot{\alpha}$ нетрудно выразить через координаты и составляющие скорости в

соответствии с уравнениями (см. рис. 10.1)

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \dot{x} \cos \alpha + \dot{y} \sin \alpha = \frac{1}{r} (x\dot{x} + y\dot{y}), \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{r} (-\dot{x} \sin \alpha + \dot{y} \cos \alpha) = \frac{1}{r^2} (x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \right\} \quad (10.1.7)$$

Подстановка (10.1.7) в (10.1.6) дает

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \left[\left(\frac{x}{r} \Delta \dot{r} \right)^2 + \left(\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \frac{y}{r} \Delta \alpha \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (y \Delta \dot{\alpha})^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} \frac{y}{r} \Delta r \right)^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} x \Delta \alpha \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \delta \dot{y} &= \left[\left(\frac{y}{r} \Delta \dot{r} \right)^2 + \left(\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \frac{x}{r} \Delta \alpha \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (x \Delta \dot{\alpha})^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} \frac{x}{r} \Delta r \right)^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} y \Delta \alpha \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Если в какой-то момент времени t прикладывается коррекция, то при определении отклонений скорости необходимо учитывать кроме ошибок измерений также и ошибки исполнения.

Предположим, что ошибки исполнения сводятся к ошибкам в составляющих корректирующего импульса $d\dot{x}$ и $d\dot{y}$, которые независимы и некоррелированы с ошибками измерений. Тогда полные ошибки в составляющих относительной скорости определяются в виде

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \left[\left(\frac{x}{r} \Delta \dot{r} \right)^2 + \left(\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^2} y \Delta \alpha \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (y \Delta \dot{\alpha})^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} y \Delta r \right)^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} x \Delta \alpha \right)^2 + (d\dot{x})^2 \right]^{1/2}, \\ \delta \dot{y} &= \left[\left(\frac{y}{r} \Delta \dot{r} \right)^2 + \left(\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^2} x \Delta \alpha \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (x \Delta \dot{\alpha})^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} x \Delta r \right)^2 + \left(\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} y \Delta \alpha \right)^2 + (d\dot{y})^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Составляющие промаха x_k и y_k , ожидаемые в конце интервала сближения, определяются значениями параметров относительного движения в точке приложения последней коррекции $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, отклонениями этих параметров $\delta x, \delta y, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}$, которые вызываются ошибками системы управления, и временем, оставшимся до встречи, которому соответствует угол перехода $\theta = \theta_k - \theta_0$.

Рассмотрим способ определения точки последней коррекции на следующем примере.

Пусть орбита цели имеет эксцентриситет $e = 0,03$ и пусть управляемый аппарат находится на круговой орбите, касающейся орбиты цели в перигентре. Поскольку эксцентриситет опорной орбиты невелик и прогнозирование конечного промаха осуществляется на сравнительно небольшом интервале времени, то для вычисления составляющих промаха в соответствии с уравнениями (10.1.1) можно использовать переходную матрицу, элементы которой аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{xx} &= 1, & a_{yx} &= 0, \\ a_{xy} &= -6(\theta - \sin \theta) \approx 0, & a_{yy} &= 4 - 3 \cos \theta \approx 1, \\ a_{\dot{x}\dot{x}} &= -(3\theta - 4 \sin \theta) \approx \theta, & a_{\dot{y}\dot{x}} &= 2(1 - \cos \theta) \approx 0, \\ a_{\dot{x}\dot{y}} &= -2(1 - \cos \theta) \approx 0, & a_{\dot{y}\dot{y}} &= \sin \theta \approx \theta. \end{aligned}$$

Предположим, что максимальные значения ошибок измерений равны утроенным значениям ошибок системы [20], приведенным в приложении 2, ошибки реализации корректирующего импульса в два раза меньше ошибок измерений скорости сближения, а допустимый конечный промах определяется ограничением

$$\delta r = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

При этих данных предельное положение точки последней коррекции определялось путем вычисления конечного промаха δr для различных значений характерных параметров и его сравнения с допустимой величиной $0,25 \cdot 10^{-3}$. Во время расчетов параметры, влияющие на положение точки последней коррекции, варьировались в соответствии с изменением дальности r в пределах от 0 до $2,5 \cdot 10^{-3}$ с шагом $2,5 \cdot 10^{-4}$, относительной скорости $\dot{r}$ — в пределах от 0 до $2,5 \cdot 10^{-2}$ с шагом $0,625 \cdot 10^{-3}$ и угла перехода θ — в пределах от 0 до 15° с шагом $2,5^\circ$. Типичные результаты расчетов приведены на рис. 10.2.

По допустимой величине промаха $\delta r = 0,25 \cdot 10^{-3}$ были построены границы положения точки последней коррекции в плоскости параметров «угол перехода — дальность» для разных значений относительной скорости (рис. 10.3).

Из рисунка видно, что для рассмотренного диапазона изменения $\dot{r}$ угол перехода, соответствующий точке последней коррекции, может быть принят равным $\theta \approx 6^\circ$; это значение должно быть уточнено при построении и оптимизации полной программы коррекций.

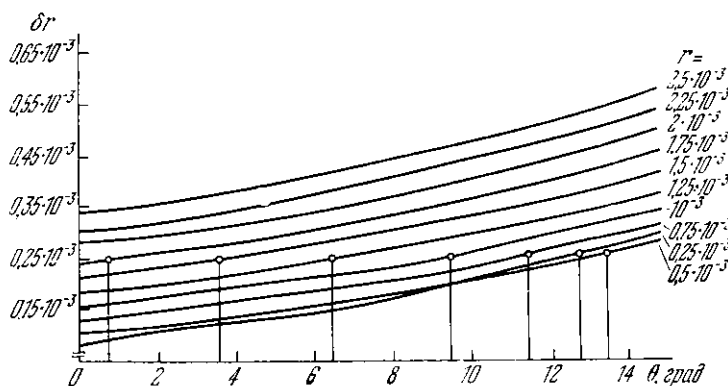


Рис. 10.2.

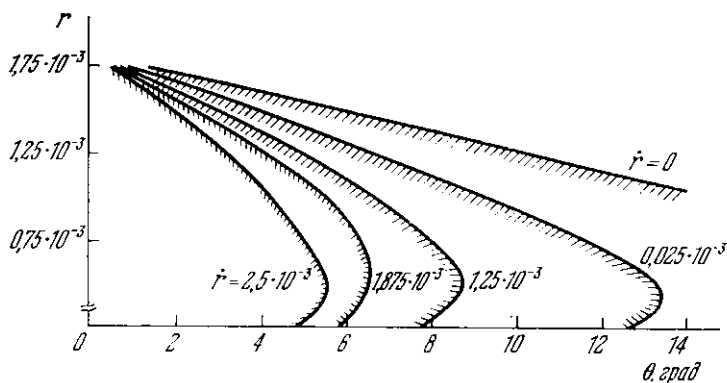


Рис. 10.3.

Необходимо отметить, что в некоторых случаях кроме основного требования выполнения конечной точности сближения существенное влияние на положение всех коррекций могут оказывать и другие ограничения, вытекающие

щие из технических возможностей системы управления. В частности, времена переориентации управляемого аппарата, подготовки двигателя к повторному запуску и реализации импульса с помощью ограниченной по величине тяги определяют минимально возможный интервал между коррекциями.

§ 10.2. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ КОРРЕКЦИЙ НА ИНТЕРВАЛЕ СБЛИЖЕНИЯ

При заданном уровне ошибок и выбранной точности сближения, определяемой по конечному промаху, необходимые энергетические затраты для программ с фиксированными моментами приложения коррекций зависят главным образом от распределения этих моментов на интервале сближения. Задача оптимального распределения коррекций рассматривалась в ряде работ, основные результаты

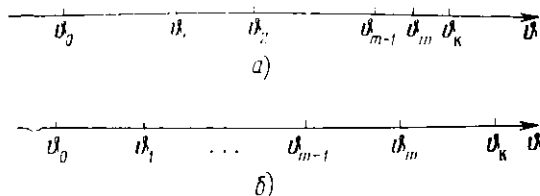


Рис. 10.4.

которых состоят в следующем [24, 96, 106]. В предположении, что отклонения от номинальной траектории являются малыми и описываются линейными уравнениями, а случайные ошибки имеют нормальный характер, оптимальным в среднем будет распределение моментов коррекций по геометрической прогрессии, если учитывать только ошибки измерений, и по арифметической прогрессии, если учитывать также и ошибки исполнения.

Используя в качестве меры времени центральные углы, определяющие орбитальное движение цели, в случае распределения коррекций по геометрической прогрессии

(рис. 10.4, а) будем иметь

$$\frac{\vartheta_K - \vartheta_1}{\vartheta_K - \vartheta_0} = \frac{\vartheta_K - \vartheta_2}{\vartheta_K - \vartheta_1} = \dots = \frac{\vartheta_K - \vartheta_m}{\vartheta_K - \vartheta_{m-1}} = \kappa$$

или

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \dots = \frac{\theta_m}{\theta_{m-1}} = \kappa,$$

где ϑ_i — истинная аномалия, θ_i — угол перехода в точку встречи, соответствующие i -й промежуточной коррекции, общее число которых равно m . Перемножив эти отношения, получаем

$$\frac{\vartheta_K - \vartheta_m}{\vartheta_K - \vartheta_0} = \frac{\theta_m}{\theta} = \kappa^m.$$

Здесь величина ϑ_m или θ_m предполагается заданной. Отсюда находим

$$\kappa = \sqrt[m]{\frac{\vartheta_K - \vartheta_m}{\vartheta_K - \vartheta_0}}. \quad (10.2.1)$$

Следовательно, точки приложения коррекций определяются соотношениями

$$\vartheta_i = \vartheta_K - \kappa^i (\vartheta_K - \vartheta_0). \quad (10.2.2)$$

При распределении коррекций по арифметической прогрессии (рис. 10.4, б) интервалы между ними постоянны, так что

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \dots = \vartheta_m - \vartheta_{m-1} = \vartheta_K - \vartheta_m = \delta$$

или

$$\theta - \theta_1 = \theta_1 - \theta_2 = \dots = \theta_{m-1} - \theta_m = \theta_m = \delta.$$

Отсюда находим, что

$$\delta = \frac{\vartheta_K - \vartheta_0}{m+1} = \frac{\theta}{m+1},$$

и точки коррекций можно определять в соответствии с уравнением

$$\vartheta_i = \vartheta_0 + i\delta.$$

Численные расчеты показывают, что для соотношения (10.1.2) между ошибками измерений и исполнения программа коррекций, построенная по геометрической про-

грессии, ближе к оптимальной, чем программа, построенная по арифметической прогрессии. Поэтому в качестве начального приближения для оптимального распределения коррекций предпочтительнее выбирать распределение по геометрической прогрессии, задаваемое соотношениями (10.2.1) и (10.2.2). При этом точка последней коррекции, определяемая углом ϑ_m или θ_m , находится по методике, изложенной в предыдущем параграфе.

§ 10.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТРЕБНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ

Для организации итерационного процесса оптимизации программы управления с промежуточными коррекциями необходимо уметь вычислять полные потребные энергетические затраты для отдельных пробных программ, имеющих заданное распределение коррекций. Определение потребных энергетических затрат производится путем моделирования процесса сближения на ЭВМ и может быть основано на минимаксном подходе, который заключается в следующем. При каждом просчете процесса сближения на ЭВМ в соответствии с уравнениями (10.1.5) — (10.1.7) вычисляются максимальные ошибки в положении и скорости, имеющие неизменный знак на всем угловом интервале сближения θ , т. е. ошибки условно считаются систематическими. Для одних и тех же начальных условий и интервала сближения выбирается сочетание знаков ошибок, дающее по сравнению с другими их сочетаниями наибольшие энергетические затраты, которые и принимаются в качестве потребных.

Определение энергетических затрат на основе моделирования процесса сближения осуществляется в следующем порядке.

1. Интегрированием уравнений относительного движения определяются истинные значения координат x_i , y_i и составляющих относительной скорости $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, соответствующих углу ϑ_i в момент приложения очередной i -й коррекции.

2. По известным параметрам относительного движения x_i , y_i , $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$ и величинам ошибок измерений Δr , $\Delta \dot{r}$, $\Delta \alpha$, $\Delta \dot{\alpha}$ вычисляются максимальные ошибки положения и скорости δx_i , δy_i , $\delta \dot{x}_i$, $\delta \dot{y}_i$.

3. Определяются «измеренные» координаты и скорости

$$\tilde{x}_i = x_i \pm \delta x_i, \quad \tilde{y}_i = y_i \pm \delta y_i,$$

$$\dot{\tilde{x}}_i = \dot{x}_i \pm \delta \dot{x}_i, \quad \dot{\tilde{y}}_i = \dot{y}_i \pm \delta \dot{y}_i,$$

причем знаки ошибок устанавливаются в соответствии с рассматриваемым вариантом их сочетания.

4. По «измеренным» координатам с помощью решения соответствующей задачи определяются составляющие скорости $\dot{\tilde{x}}_i^+$, $\dot{\tilde{y}}_i^+$, необходимой для сближения с целью за время, соответствующее углу $\vartheta_i = \vartheta_k - \vartheta_i$.

5. Находятся составляющие корректирующего импульса с учетом максимальной ошибки их реализации

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{\tilde{x}}_i^+ - \dot{\tilde{x}}_i^- \pm d\dot{x}_i,$$

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{\tilde{y}}_i^+ - \dot{\tilde{y}}_i^- \pm d\dot{y}_i$$

и вычисляется величина i -й коррекции как

$$J_i = \sqrt{(\Delta \dot{x}_i)^2 + (\Delta \dot{y}_i)^2}.$$

6. Проводится интегрирование уравнений относительного движения при начальных условиях

$$\vartheta = \vartheta_i, \quad x = x_i, \quad \dot{x} = \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i,$$

$$y = y_i, \quad \dot{y} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i,$$

в результате чего определяются истинные значения координат и скоростей для угла ϑ_{i+1} следующей $(i+1)$ -й коррекции.

7. Расчет повторяется, начиная с п. 2, до тех пор, пока не будет достигнута конечная точка интервала сближения ϑ_k .

8. В конечной точке регистрируются промахи по координатам x_k и y_k , находится величина промаха

$$\delta r = \sqrt{x_k^2 + y_k^2},$$

определяются составляющие конечного импульса

$$\Delta \dot{x}_k = -\dot{x}_k, \quad \Delta \dot{y}_k = -\dot{y}_k,$$

вычисляется его величина

$$J_k = \sqrt{(\Delta \dot{x}_k)^2 + (\Delta \dot{y}_k)^2}$$

и подсчитываются полные энергетические затраты J на сближение как сумма величин начального, конечного и всех промежуточных импульсов:

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^m J_i + J_K.$$

На этом расчет варианта заканчивается.

При фиксированных начальных условиях и интервале сближения θ возможно 64 варианта сочетания знаков ошибок

$$\pm \delta x, \pm \delta y, \pm \delta \dot{x}, \pm \delta \dot{y}, \pm d\dot{x}, \pm d\dot{y}.$$

Определение наиболее неблагоприятного с точки зрения энергетических затрат варианта может производиться по схеме прямого перебора всех вариантов путем сравнения соответствующих энергетических затрат и выделения такого сочетания, при котором энергетические затраты получаются наибольшими среди всех ранее вычисленных.

Аналогичным образом выбираются и наиболее неблагоприятные условия, которые должны ориентироваться на максимально возможные начальные дальность и относительную скорость. Благодаря малому отличию оптимального распределения коррекций от их распределения по геометрической прогрессии весь расчет наиболее тяжелых с точки зрения энергетических затрат условий сближения может основываться на использовании программы коррекций, построенной по геометрической прогрессии.

§ 10.4. МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ КОРРЕКЦИЙ

Аналитические оценки и численные расчеты показывают, что дополнительные энергетические затраты на компенсацию ошибок системы управления возрастают с увеличением продолжительности процесса сближения. Поэтому оптимальные интервалы сближения для многоимпульсных программ управления, построенных с учетом ошибок, должны уменьшаться по сравнению с интервалами сближения идеальных двухимпульсных программ, результаты исследования которых представлены в главе 8.

Приближенный выбор оптимального интервала сближения $\theta = \theta_K - \theta_0$ с учетом ошибок измерений и испол-

нения может производиться путем минимизации по этой переменной полного расхода энергетических затрат J , вычисляемых для наихудшего варианта начальных условий и сочетания знаков ошибок. При этом число m промежуточных коррекций, распределенных по геометрической прогрессии, также определяется из условия минимума энергетических затрат J при фиксированном значении угла перехода θ .

После нахождения оптимальных значений интервала сближения θ и числа промежуточных коррекций m осуществляется оптимизация полной программы управления путем перераспределения «моментов» ϑ_i приложения промежуточных коррекций, распределенных первоначально по геометрической прогрессии.

При фиксированных значениях θ и m энергетические затраты J являются функцией m переменных ϑ_i , на которые наложены ограничения

$$\vartheta_{i-1} < \vartheta_i < \vartheta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \vartheta_{m+1} = \vartheta_k. \quad (10.4.1)$$

Таким образом, задача оптимизации программы коррекций сводится к отысканию минимума функции $J(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$. При этом должны учитываться ограничения на конечный промах в виде неравенств

$$|x_k| \leq \delta_x, \quad |y_k| \leq \delta_y \quad (10.4.2)$$

или

$$\delta r = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq \delta_r, \quad (10.4.3)$$

т. е. имеет место задача на условный экстремум.

Поскольку рассматриваемая функция $J(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ довольно сложна и определяется в неявном виде, то для нахождения ее минимума следует использовать численные методы нелинейного программирования [35, 58, 63, 65, 72]. При численных расчетах были использованы как наиболее простые в реализации метод Гаусса — Зейделя и градиентный метод, дополненные процедурами выполнения условий по конечному промаху.

Поиск минимума функции J по методу Гаусса — Зейделя осуществляется путем последовательной вариации точек приложения промежуточных коррекций, начиная с первой. Для этого очередная точка ϑ_i смещается на неко-

торую величину $\Delta\vartheta_i$, имеющую положительный или отрицательный знак. Если при этом расход J убывает, то делается новый шаг в том же направлении и этот процесс продолжается до тех пор, пока величина J не начнет возрастать или не нарушатся ограничения (10.4.1). В этом случае фиксируется найденное оптимальное положение точки ϑ_i и производится переход к поиску оптимального положения следующей точки ϑ_{i+1} и так далее. После окончания первого цикла оптимизации, в результате которого варьируются положения всех m точек коррекции, запоминается наименьшее суммарное значение суммарного расхода $J^{(1)}$ и осуществляется переход ко второму циклу оптимизации, начинающемуся вновь с пробных вариаций положения первой точки. В ходе этого процесса производится изменение величины и знака шагов $\Delta\vartheta_i$. Оптимизация в целом заканчивается, когда будет достигнуто выполнение неравенства

$$|J^{(n+1)} - J^{(n)}| \leq \delta_J,$$

где $J^{(n)}$ — полные энергетические затраты после окончания n -го цикла оптимизации; δ_J — малая наперед заданная величина.

Кроме проверки ограничений (10.4.1), на каждом шаге итерационного процесса проверяется также выполнение условий по конечному промаху (10.4.2) или (10.4.3). Поскольку величина промаха зависит главным образом от положения точки ϑ_m последней коррекции, то при нарушении этих ограничений производится смещение последней коррекции к концу интервала сближения ϑ_k малыми шагами $\delta\vartheta_m$ до тех пор, пока не будет достигнута допустимая величина промаха. После этого процесс минимизации возобновляется.

Аналогичным образом, осуществляется минимизация программы коррекций по градиентному методу. Основное отличие этого метода от метода Гаусса — Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса варьируется положение не одной, а всех промежуточных коррекций, кроме последней. Для этого сначала малыми пробными шагами определяются составляющие градиента функции J по первым $m - 1$ переменным ϑ_i , после чего делается рабочий шаг в направлении, противоположном этому градиенту. Величина рабочего шага, меняющегося

в ходе итерационного процесса с некоторой дискретностью, уменьшается по мере продвижения к точке минимума функции J . Изменение переменной ϑ_m , определяющей положение точки последней коррекции, используется для выполнения ограничений по конечному промаху в случае их нарушения.

§ 10.5. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ КОРРЕКЦИЙ

Для выяснения характерных особенностей оптимальных маневров сближения с промежуточными коррекциями рассмотрим типичные результаты численных расчетов, полученные по изложенной выше методике для двух крайних случаев: орбита цели малого эксцентриситета ($e = 0,1$)

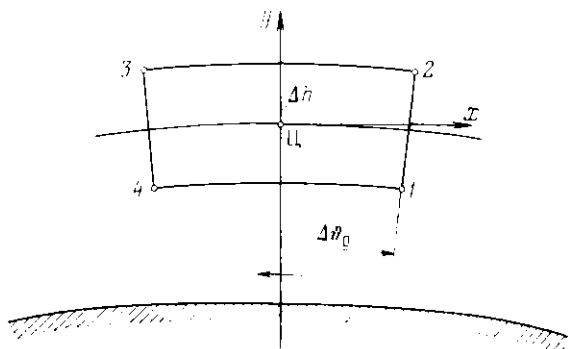


Рис. 10.5.

и орбита цели большого эксцентриситета ($e = 0,8$). В обоих случаях начальные условия для маневра сближения соответствуют расположению цели в перигеентре своей орбиты ($\vartheta_0 = 0$); они задаются нулевыми для относительной скорости и областью в виде криволинейного четырехугольника для относительных координат (рис. 10.5). При этом в соответствии с минимаксным подходом рассматриваются только граничные точки области, отвечающие максимальным начальным дальностям и обозначенные на рис. 10.5 цифрами 1—4. Все численные расчеты базируются

ся на значениях ошибок измерений и исполнения, заданных соотношениями (10.1.2).

В качестве основы для построения оптимальных программ коррекций и оценки их эффективности используются представленные в главе 8 данные, относящиеся к идеальным двухимпульсным маневрам сближения. Минимальные энергетические затраты, $J_{\text{опт}}$ на идеальное сближение и соответствующие им интервалы сближения $\theta_{\text{опт}} = \theta_{\kappa, \text{опт}}$ приведены для четырех вариантов начальных условий (граничных точек заданной области) в табл. 10.1.

Т а б л и ц а 10.1

Вариант началь- ных условий	$\Delta\theta_0$, град	Δh	$\theta_{\text{опт}}$, град		$J_{\text{опт}}$	
			$e = 0,1$	$e = 0,8$	$e = 0,1$	$e = 0,8$
1	-1,5	-0,01	191	179	0,0034	0,00041
2	-1,5	0,01	256	191	0,0096	0,00058
3	1,5	0,01	194	179	0,0034	0,00041
4	1,5	-0,01	258	190	0,0096	0,00058

Как следует из таблицы, наибольшие энергетические затраты на сближение требуются в случае, когда управляемый аппарат первоначально находится сзади и выше или впереди и ниже цели (положения «впереди» и «сзади» определяются по отношению к направлению орбитального движения). Этот вывод, основанный на частных результатах, имеет весьма общее значение и справедлив для любых интервалов сближения, а не только для оптимальных, если только начальная дальность при различных взаимных положениях аппаратов имеет одну и ту же величину.

Для неидеальных маневров сближения необходимо прежде всего подобрать такое число промежуточных коррекций m , которое обеспечивало бы заданную конечную точность сближения и минимизировало потребные энергетические затраты. Оптимальное значение числа m определяется путем исследования зависимости от этой переменной полных энергетических затрат на сближение J , соответствующих наихудшему варианту начальных условий и сочетания знаков ошибок в положении и скорости, при

некотором фиксированном угловом интервале сближения θ , не превышающем 180° . В качестве наихудших начальных условий (вариант 4) приняты такие, которым соответствуют максимальные энергетические затраты без учета ошибок в положении и скорости. Наихудшее сочетание знаков ошибок определяется как $\delta x > 0$, $\delta y < 0$, $\delta \dot{x} < 0$, $\delta \dot{y} < 0$, $\delta \ddot{x} > 0$, $\delta \ddot{y} < 0$ в случае $e = 0,1$ и как $\delta x > 0$, $\delta y < 0$, $\delta \dot{x} > 0$, $\delta \dot{y} < 0$, $\delta \ddot{x} > 0$, $\delta \ddot{y} > 0$ в случае $e = 0,8$. При этом коррекции распределяются на интервале сближения по геометрической прогрессии, а допустимые конечные промахи определяются величиной $\delta r \leq 5 \cdot 10^{-4}$.

Численные расчеты показывают, что с увеличением числа коррекций m полный энергетический расход монотонно убывает. Однако при $m > 6$ выигрыш становится незначительным, а интервалы между последними коррекциями, все меньшими и меньшими по величине, уменьшаются настолько, что их невозможно выдержать на практике (если принимать в расчет время на переориентацию управляемого аппарата при реализации коррекций и другие подобные факторы). Поэтому за оптимальное принимается число коррекций $m = 6$.

Далее, для маневра сближения с шестью промежуточными коррекциями находится оптимальный угловой интервал сближения θ , сокращающийся по сравнению с идеальным случаем вследствие влияния ошибок системы управления. Поиск оптимального интервала θ путем минимизации энергетических затрат J осуществляется при тех же условиях, что и поиск оптимального числа коррекций m , а именно для наихудшего варианта начальных условий и сочетания знаков ошибок при распределении коррекций по геометрической прогрессии. Определяемое таким образом значение углового интервала сближения θ не будет строго оптимальным и должно проверяться и уточняться, как и число коррекций m , после нахождения их оптимального распределения.

В результате численных расчетов на этом этапе определения оптимальной программы управления для оптимального интервала сближения выбрано значение $\theta = 130^\circ$ в случае $e = 0,1$ и $\theta = 135^\circ$ в случае $e = 0,8$. Данные, соответствующие оптимальному интервалу сближения, а также несколько большему и несколько меньшему интервалам, представлены в табл. 10.2, где в графе $J_{\text{опт}}$ приве-

Таблица 10.2

$\theta_i, \text{град}$	$\theta, \text{град}$					
	100	130	160	120	135	150
	$e = 0,1$			$e = 0,8$		
θ_1	48	54	66	60	68	89
θ_2	62	82	105	90	101	120
θ_3	75	101	128	105	108	138
θ_4	85	112	141	113	124	145
θ_5	90	120	149	116	130	148
θ_6	94	124	154	118	134	149,5
J	0,058	0,053	0,057	0,102	0,100	0,104
$J_{\text{опт}}$	0,036	0,027	0,018	0,028	0,014	0,006

дены расходы на сближение без учета ошибок системы управления.

После выбора оптимального углового интервала сближения θ и числа коррекций m производится оптимизация распределения коррекций согласно методике, рассмотренной в предыдущем параграфе. Результаты оптимизации сведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3

i		0	1	2	3	4	5	6	k
$\theta_i, \text{град}$	$e = 0,1$	0	32	57	76	92	106	119	130
	$e = 0,8$	1,5	92	106	118	125	130	133	135
J_i	$e = 0,1$	0,010	0,005	0,005	0,004	0,003	0,003	0,003	0,014
	$e = 0,8$	0,010	0,011	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,003

Характеристики программ коррекций при распределении оптимальном и по геометрической прогрессии сопоставлены в табл. 10.4.

Для случая $e = 0,8$ сравнение энергетических затрат для этих двух распределений в зависимости от углового

Таблица 10.4

ϑ_i , град	Распределение			
	по геометр. прогрессии	оптимальное	по геометр. прогрессии	оптимальное
	$e = 0,1$		$e = 0,8$	
ϑ_1	54	32	68	92
ϑ_2	82	57	101	106
ϑ_3	101	78	115	118
ϑ_4	112	92	124	125
ϑ_5	120	106	130	130
ϑ_6	124	119	134	133
J	0,053	0,047	0,100	0,071
ΔJ	0,006		0,029	

интервала сближения θ показано также графически на рис. 10.6.

Полные энергетические затраты J и значения конечного промаха δr для характерных граничных точек области

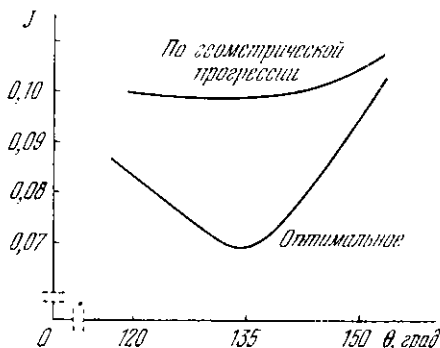


Рис. 10.6.

начальных условий в районе перицентра приведены в табл. 10.5. Здесь же указаны энергетические затраты $J_{\text{опт}}$, получающиеся при заданном интервале сближения $\theta = 130^\circ$ или $\theta = 135^\circ$ без учета ошибок измерений и исполнения.

Таблица 10.5

Вариант началь- ных условий	$e = 0,4$			$e = 0,8$		
	J	$J_{\text{опт}}$	δr	J	$J_{\text{опт}}$	δr
1	0,028	0,012	$1 \cdot 10^{-4}$	0,026	0,005	$3 \cdot 10^{-4}$
2	0,047	0,026	$3 \cdot 10^{-4}$	0,027	0,006	$4 \cdot 10^{-4}$
3	0,033	0,008	$1 \cdot 10^{-4}$	0,028	0,003	$2 \cdot 10^{-4}$
4	0,047	0,026	$3 \cdot 10^{-4}$	0,029	0,006	$3 \cdot 10^{-4}$

Таким образом, максимальные энергетические затраты на сближение в районе перицентра составляют 0,047 при малых и 0,029 при больших значениях эксцентриситета орбиты цели. При этом конечные промахи не превышают величины $4 \cdot 10^{-4}$.

Для проверки оптимальности программ коррекций, найденных при вполне определенном сочетании знаков ошибок, они были испытаны и при других сочетаниях. Оказалось, что варианты, выбранные как наихудшие для распределения коррекций по геометрической прогрессии и используемые в качестве таковых при оптимизации программ коррекций, в самом деле требуют наибольших энергетических затрат. Следовательно, найденные распределения коррекций действительно являются оптимальными (в минимаксном смысле).

На основании полученных результатов можно сделать некоторые общие выводы, которые подтверждаются также и другими подобными расчетами, выполненными при других значениях ошибок, эксцентриситета орбиты цели и начальных условий маневра сближения.

1. С учетом ошибок системы управления оптимальные интервалы сближения уменьшаются по сравнению с интервалами, вычисляемыми без учета этих ошибок, причем тем больше, чем выше уровень ошибок. Соответственно возрастают и энергетические затраты, которые могут достигать значений, на порядок превышающих минимальные энергетические затраты на идеальное двухимпульсное сближение. При этом число коррекций, зависящее в основном от уровня ошибок, может меняться от единицы до десятка единиц.

2. Ошибки системы управления влияют на характеристики маневров сближения с промежуточными коррекциями тем сильнее, чем более быстро меняются в полете параметры относительного движения. В частности, если сближение осуществляется в районе перицентра орбиты цели, то при больших значениях эксцентриситета энергетические затраты с учетом ошибок возрастают (по сравнению с идеальным случаем) более значительно, чем при малых значениях эксцентриситета орбиты цели.

3. Для принятого в расчетах соотношения между ошибками измерений и исполнения оптимальное распределение моментов коррекций на интервале сближения в общем близко к их распределению по геометрической прогрессии. Однако в случае малых эксцентриситетов орбиты цели точки коррекций распределяются более равномерно, тогда как в случае больших эксцентриситетов они сгущаются к концу интервала сближения.

4. При одном и том же числе коррекций оптимизация их распределения позволяет достигать улучшения энергетических характеристик маневра сближения по сравнению с использованием более простых распределений по арифметической или геометрической прогрессии, причем оптимизация дает более значительный эффект в случае больших эксцентриситетов и менее значительный эффект в случае малых эксцентриситетов орбиты цели.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что в принятом подходе к оптимизации программы коррекций ошибки системы управления, имеющие случайный характер, учитываются детерминированным образом, т. е. вызываемые ими ошибки в параметрах движения считаются максимально возможными по величине и систематическими с наихудшим сочетанием знаков. Подобная реализация ошибок весьма маловероятна, так что потребные энергетические затраты, определяемые в расчете на наиболее неблагоприятное стечение обстоятельств, должны превышать с некоторым запасом энергетические затраты, необходимые при случайном изменении ошибок, и гарантировать выполнение маневра сближения в любом случае.

С другой стороны, энергетические затраты на сближение, вычисляемые без применения какой-либо фильтрации измерений от ошибок, значительно превышают затраты на

идеальное сближение. Рациональная статистическая обработка измерительной информации позволяет существенно уменьшить ошибки оценки параметров движения и приблизить потребные энергетические затраты к затратам, соответствующим идеальному двухимпульсному маневру сближения. Рассмотренная методика построения оптимальных многоимпульсных программ управления обобщается и на этот случай, если под ошибками в параметрах движения понимать максимально возможные ошибки оценки, соответствующие выбранному методу фильтрации.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

§ 11.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ

Важной составной частью общего алгоритма управления сближением является алгоритм оценки параметров движения космических аппаратов по измерениям, реализуемым автономными (бортовыми) или наземными средствами.

Поскольку измерения содержат случайные и систематические ошибки, алгоритм оценки должен быть эффективным в смысле снижения влияния ошибок на точность получаемых оценок. Во многих случаях повышение точности оценок может быть достигнуто путем накопления значительного числа избыточных измерений с последующей обработкой результатов каким-либо статистическим методом. Другой путь к получению высокоточных оценок состоит в том, чтобы при расчете оценок использовать измерения только тех параметров движения, точность определения которых относительно высока. В этом случае нет необходимости проведения большого числа измерений — оно может быть равно числу определяемых величин.

Оба названных подхода — статистический и детерминированный — позволяют создать большое число алгоритмов оценки, различных по своей структуре и основным вычислительным процедурам.

Общий алгоритм получения оценок параметров движения космических аппаратов состоит из ряда блоков, выполняющих определенные автономные задачи и соответствующих в большинстве своем основным этапам преобразования информации, поступающей от измерительной системы. Работа алгоритма оценки параметров движения начинается после поступления в БЦВМ сигнала о захвате цели следящей антенной. Алгоритм оценки включает в себя блоки первичной и вторичной обработки измерительной

информации. Первичная обработка состоит в выделении полезного сигнала из выходного сигнала приемника, в идентификации цели по какому-либо характерному признаку и в простейшей обработке полезных сигналов, отраженных от цели за сравнительно короткий отрезок времени. Результатом первичной обработки является сглаженное измерение параметров движения, используемое для последующей обработки.

Вторичная обработка может объединять в себе задачи получения оценок параметров движения, их прогнозирования и ряд других. В некоторых случаях одной из первых процедур первичной и вторичной обработки является отбраковка измерений, содержащих большие ошибки. Отбраковка осуществляется путем сравнения результатов измерений с априорной информацией о них, полученной на основании знания ошибок измерений и ожидаемых значений параметров движения. Процедура отбраковки позволяет повысить точность используемых измерений и исключить влияние отдельных выбросов на точность полученных оценок.

Из приведенных выше блоков общего алгоритма оценки видно, что алгоритм вторичной обработки выполняет важную роль не только в повышении точности оценок, но и в преобразовании информации из одного вида в другой с учетом требований общего алгоритма управления.

Ввиду того, что алгоритм первичной обработки измерений строится в основном с учетом специфических характеристик цепи «передатчик — канал связи — приемник», а блок первичной обработки является составной частью измерительной системы и конструктивно с ней совмещен, он здесь не рассматривается. Не рассматриваются здесь также вопросы поиска, захвата и сопровождения цели, тесно связанные с задачей управления ориентацией аппаратов относительно центра масс. Интересующиеся этими вопросами могут обратиться к работам [1, 2, 41].

Основное внимание при дальнейшем изложении будет уделено методам вторичной обработки информации и получения оценок параметров движения по результатам первичных измерений. Все рассматриваемые методы ориентированы на применение БЦВМ. В целях упрощения терминологии в дальнейшем задача вторичной обработки измерений названа *задачей оценки параметров*

движения, а алгоритм вторичной обработки — *алгоритмом оценки*.

Если орбита цели и ее ориентация в пространстве известны, движение управляемого аппарата определяется шестипараметрическими совокупностями координат и скоростей, элементов орбит или констант интегрирования уравнений относительного движения. Таким образом, задача оценки параметров движения управляемого аппарата может быть поставлена как задача оценки любой из трех названных выше совокупностей:

$$\begin{aligned}x &= (x, y, z, v_x, v_y, v_z), \\p &= (p, e, \Delta\vartheta_0, i, \omega, \Omega), \\k &= (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6).\end{aligned}$$

Различные измерительные системы в зависимости от принципа действия, структуры, наличия блоков обработки первичных измерений и т. д. могут обеспечить измерение не шести, а большего или меньшего числа параметров. Если число измеряемых параметров меньше числа определяемых величин, наблюдаемая система является недоопределенной и для получения недостающей информации следует повторить измерения в различные моменты времени, дополнив их уравнениями движения. Если число измеряемых параметров больше числа определяемых величин, то система переопределена и возникает вопрос о наилучшем использовании результатов избыточных измерений. Поскольку относительное влияние ошибок измерений различных параметров на точность искомых оценок существенно неодинаково, решение о выборе полной или неполной совокупности первичных измерений для использования в алгоритме оценки оказывает решающее влияние на ряд его важнейших характеристик — точностных и вычислительных.

Таким образом, в основу одной из классификаций алгоритмов оценки может быть положен *признак использования полной или неполной совокупности измеряемых параметров*.

Автономные радиотехнические системы, как правило, измеряют следующие параметры относительного движения: расстояние между аппаратами r , угол β наклона вектора r к плоскости опорной орбиты, угол α наклона к местной

горизонтали проекции вектора $\mathbf{r}$ на плоскость опорной орбиты, а также их производные $\dot{r}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$.

Исключая некоторые из этих параметров, можно получить различные неполные совокупности, среди которых важное для практики значение имеют следующие: r , α , β и r , $\dot{r}$. Первая из них наиболее просто определяет координаты относительного движения аппаратов в различные моменты времени, т. е. граничные условия для краевых задач, решения которых дают оценки скоростей; вторая совокупность интересна тем, что объединяет параметры, измеряемые с очень высокой точностью [20], и позволяет создавать алгоритмы, дающие достаточно точные оценки при малом числе измерений.

По числу измерений, используемых при расчете оценок, алгоритмы делятся на *детерминированные* и *статистические*. В детерминированных алгоритмах общее число измеренных параметров равно числу определяемых величин (шести). Статистические алгоритмы используют большое число избыточных измерений, результаты которых обрабатываются каким-либо статистическим методом. Как детерминированные, так и статистические алгоритмы могут использовать полный или неполный состав первичных измерений.

Статистические алгоритмы могут быть классифицированы *по критериям оценки*: с минимальной дисперсией, максимальной вероятности (максимального правдоподобия), с минимальной ошибкой.

По методам обработки измерительной информации алгоритмы делятся на *рекуррентные* и *групповой обработки*.

В рекуррентных методах текущая оценка формируется заново после каждого измерения и является функцией предыдущей оценки и нового измерения. В методах групповой обработки оценка является результатом обработки серии измерений и может быть получена только после завершения этой серии. Рекуррентные методы дают оценки на каждом такте (шаге) измерений, поэтому они чувствительны к появлению больших единичных ошибок. В противоположность этому методы групповой обработки малочувствительны к таким ошибкам, но не дают текущих оценок до завершения всех измерений.

По характеру вычислительных процедур алгоритмы делятся на *итерационные* и *аналитические*. Это деление

относится как к детерминированным, так и к статистическим алгоритмам. Итерационные алгоритмы включают в себя различные итерационные процедуры: решение краевых задач с частично заданными граничными условиями, расчет корней трансцендентных уравнений, решение систем нелинейных алгебраических уравнений и т. д. Аналитические алгоритмы не содержат итерационных процедур — все расчеты в них проводятся по конечным формулам. В большинстве случаев реализация на ЭВМ аналитических алгоритмов существенно проще, чем итерационных, однако их возможности (точностные, логические, структурные) по сравнению с итерационными более ограничены.

В зависимости от описания модели движения алгоритмы оценки делятся на *алгоритмы, использующие уравнения движения аппаратов, и алгоритмы, использующие различные способы аппроксимации искомым параметров*. Первая группа в свою очередь подразделяется по виду уравнений движения на подгруппы: с линейными, квадратичными и полными нелинейными уравнениями. Вторая группа объединяет различные способы аппроксимации искомым параметров: временными полиномами, ортогональными функциями времени и т. д.

Перечислим некоторые основные характеристики алгоритмов оценки.

1. Важнейший показатель итерационных алгоритмов — их область сходимости, которая в общем случае может зависеть от начальных условий задачи r_0 , α_0 , β_0 и параметров орбит p , e .

2. Другая важная характеристика статистических алгоритмов — зависимость точности оценок от числа и интервала измерений при заданной (или принятой) частоте измерений. По этой характеристике (или семейству характеристик) определяют необходимое число измерений для получения заданной точности оценок.

3. Существенное значение при выборе алгоритма оценки имеет зависимость точности оценок координат и скоростей от расстояния между аппаратами при различных параметрах орбит. Одни алгоритмы обеспечивают равномерную сходимость оценок к истинным значениям определяемых величин при уменьшении расстояния между аппаратами. Другие имеют остаточную ошибку (напри-

мер, ошибку оценки скорости), которая при уменьшении расстояния между аппаратами стремится к некоторой постоянной величине.

4. Важным свойством алгоритмов является их реакция на ошибки измерений разного вида (знакопеременные, знакопостоянные, медленно меняющиеся, случайные), т. е. зависимость или инвариантность ошибок оценок относительно вида ошибок измерений.

5. Гибкость и эффективность алгоритмов оценки, а также простота их практической реализации во многом зависят от ограничений, которые они налагают на интервал измерений сверху и снизу, поэтому значения максимального и минимального интервалов измерений представляют собой один из их важнейших показателей.

6. Важными характеристиками методов оценки, не использующих уравнения движения аппаратов, являются зависимости методической погрешности принятой аппроксимации от интервала измерений при различных начальных условиях и параметрах орбит, а также зависимости точности оценок от числа членов аппроксимирующих функций при различных интервалах измерений.

7. Для методов оценки, использующих решения приближенных уравнений движения, одной из важнейших характеристик алгоритма является оптимальное число измерений, соответствующее минимуму ошибки оценки, или оптимальный интервал измерений, определяемый по числу измерений и шагу их повторений.

8. Наконец, алгоритм оценки можно характеризовать требованиями, предъявляемыми к БЦВМ, в которой он реализуется: необходимое быстродействие, объем постоянной и оперативной памяти, влияние разрядности БЦВМ на точность оценки и ряд других.

Перечисленные показатели были положены в основу при сравнительном анализе методов оценки, рассмотренных в этой и последующих главах.

§ 11.2. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ r И $\dot{r}$

Рассмотрим методы оценки координат и скоростей относительного движения космических аппаратов по измерениям расстояния r между ними и его производной $\dot{r}$, реализуемым автономными средствами одного из аппара-

тов. Будем считать, что известны элементы опорной орбиты: фокальный параметр p , эксцентриситет e и угловое положение цели относительно перицентра ϑ_0 .

Характерная особенность рассматриваемых методов состоит в том, что они используют лишь высокоточные измерения r и $\dot{r}$ из полной совокупности параметров $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$, а измерения со сравнительно низкой точностью углов α, β и их производных $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ не используются вообще либо используются для определения начального приближения вектора x_0

$$x_0^{(0)} = (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0)$$

или определения квадранта вектора положения

$$r_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Запишем очевидные соотношения

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r\dot{r} = xv_x + yv_y + zv_z,$$

используя которые можно получить несколько схем определения вектора x :

1) по измерениям r и $\dot{r}$ в трех точках пространства, соответствующих значениям аномалии $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2$, при этом составляющими вектора измерений являются следующие величины:

$$u_1 = [r_0^2, r_1^2, r_2^2, (r\dot{r})_0, (r\dot{r})_1, (r\dot{r})_2];$$

2) по измерениям r и $\dot{r}$ в шести точках пространства:

$$u_2 = [(r\dot{r})_n], \quad n = 1, 2, \dots, 6;$$

3) по измерениям r в шести точках пространства:

$$u_3 = [r_n], \quad n = 1, 2, \dots, 6;$$

4) по измерениям $\dot{r}$ в шести точках пространства:

$$u_4 = [\dot{r}_n], \quad n = 1, 2, \dots, 6.$$

Все приведенные схемы используют достаточное число измерений и соответствуют детерминированным методам определения вектора $x = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$. Избыточность трех измерений в схеме 2 является кажущейся, поскольку совокупность $r, \dot{r}$ используется в ней в мультипликативной форме $r\dot{r}$, эквивалентной одному параметру.

Следует заметить, что схемы 1—4 характеризуют лишь формально возможные пути расчета x по измерениям $r, \dot{r}$. При более тщательном рассмотрении можно убедиться, что по крайней мере две из них (3 и 4) соответствуют случаям, когда система ненаблюдаема, поэтому схемы 3 и 4 для построения соответствующих алгоритмов оценки использоваться быть не могут.

Рассмотрим более подробно схемы 1 и 2. Запишем для них соотношения, связывающие измерения $\tilde{r}$ и $\dot{\tilde{r}}$ с составляющими вектора x_0 .

Схема 1.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ \tilde{r}_n^2 &= x_n^2(x_0) + y_n^2(x_0) + z_n^2(x_0), \\ \tilde{r}_0 \dot{\tilde{r}}_0 &= x_0 v_{x0} + y_0 v_{y0} + z_0 v_{z0}, \\ \tilde{r}_n \dot{\tilde{r}}_n &= x_n(x_0) v_{xn}(x_0) + y_n(x_0) v_{yn}(x_0) + \\ &\quad + z_n(x_0) v_{zn}(x_0), \\ n &= 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.1)$$

Схема 2.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_n \dot{\tilde{r}}_n &= x_n(x_0) v_{xn}(x_0) + y_n(x_0) v_{yn}(x_0) + \\ &\quad + z_n(x_0) v_{zn}(x_0), \quad n = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.2)$$

В уравнениях (11.2.1) и (11.2.2) через $x_n(x_0), \dots, v_{zn}(x_0)$ обозначены функциональные связи координат и скоростей в моменты $\vartheta_n = \vartheta_0 + n\Delta\vartheta$ ($n = 1, 2, \dots$) с вектором

$$x_0 = (x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}),$$

определяемые в общем случае численным решением уравнений движения на интервале $[\vartheta_0, \vartheta_n]$ при начальном условии

$$x(\vartheta_0) = x_0.$$

Вследствие нелинейности уравнений (11.2.1) и (11.2.2) относительно вектора x_0 его расчет проводится каким-либо численным методом на ЭВМ. Рассмотрим решение системы (11.2.2) методом Ньютона. Пусть искомое решение равно

$$x_0 = x_0^*.$$

Введем обозначения правых частей уравнений (11.2.2)

$$f_n(x_0) = x_n(x_0) v_{x_n}(x_0) + y_n(x_0) v_{y_n}(x_0) + z_n(x_0) v_{z_n}(x_0) \quad (11.2.3)$$

и невязок

$$\delta_n(x_0) = -\tilde{r}_n \dot{r}_n + f_n(x_0), \quad n = 1, 2, \dots, 6. \quad (11.2.4)$$

С учетом очевидного равенства

$$\delta_n(x_0^*) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, 6$$

запишем решение системы (11.2.2) методом Ньютона в виде

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + (A^{(i)})^{-1} \delta^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta_1}{\partial x_0} & \dots & \dots & \frac{\partial \delta_1}{\partial v_{z_0}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \delta_6}{\partial x_0} & \dots & \dots & \frac{\partial \delta_6}{\partial v_{z_0}} \end{pmatrix} - \text{матрица частных производных при } x_0 = x_0^{(i)}, \quad (11.2.5)$$

$\delta^{(i)} = (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_6^i)^T$ — вектор невязок на i -м шаге.

Приведем уравнения относительного движения аппаратов (см. гл. 5), предварительно преобразовав их к виду, удобному для вычислений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= \frac{v_x}{c_1(\vartheta)}, \\ \frac{dv_x}{d\vartheta} &= c_3(\vartheta)x + c_4(\vartheta)y - 2v_y, \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= \frac{v_y}{c_1(\vartheta)}, \\ \frac{dv_y}{d\vartheta} &= c_3(\vartheta)y - c_4(\vartheta)x + 2v_x - \frac{1}{\lambda c_2(\vartheta)} + 1, \\ \frac{dz}{d\vartheta} &= \frac{v_z}{c_1(\vartheta)}, \\ \frac{dv_z}{d\vartheta} &= -\frac{z}{c_2(\vartheta)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.6)$$

Здесь $c_1(\vartheta) = \lambda^2$; $c_2(\vartheta) = \lambda^2 R_1^3(\vartheta)$; $c_3(\vartheta) = \lambda^2 - c_2(\vartheta)$; $c_4(\vartheta) = 2e\lambda \sin \vartheta$, где

$$\lambda = 1 + e \cos \vartheta; R_1(\vartheta) = \left[x^2 + z^2 + \left(\frac{1}{\lambda} + y \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Запишем алгоритм расчета вектора x_0 по измерениям $r, \dot{r}$.

Алгоритм А1.

Шаг 0. Задать нулевое приближение вектора x_0

$$x_0^{(0)} = (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0) \text{ при } \vartheta = \vartheta_0$$

и моменты измерений ϑ_n ($n = 1, 2, \dots, 6$).

Шаг 1. Интегрировать уравнения (11.2.6) на интервале $[\vartheta_0, \vartheta_6]$, определенном шагом 0, при начальном условии $x_0^{(0)}$ и найти координаты и скорости $x_n^0, y_n^0, \dots, v_{zn}^0$ в моменты ϑ_n ($n = 1, 2, \dots, 6$). По формулам (11.2.3) и (11.2.4) с учетом измерений $\tilde{r}_n$ и $\dot{\tilde{r}}_n$ ($n = 1, 2, \dots, 6$) вычислить невязки δ_n^0 ($n = 1, 2, \dots, 6$).

Шаг 2. Интегрировать уравнения (11.2.6) на интервале $[\vartheta_0, \vartheta_6]$ для шести вариантов начальных условий

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= (x_0^0 + \delta x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0), \\ x_0^{(2)} &= (x_0^0, y_0^0 + \delta y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0), \\ x_0^{(3)} &= (x_0^0, y_0^0, z_0^0 + \delta z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0), \\ x_0^{(4)} &= (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0 + \delta v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0), \\ x_0^{(5)} &= (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0 + \delta v_{y0}^0, v_{z0}^0), \\ x_0^{(6)} &= (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0 + \delta v_{z0}^0) \end{aligned}$$

и найти для каждого из них координаты и скорости $x_{ni}, y_{ni}, z_{ni}, v_{xni}, v_{yni}, v_{zni}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) в моменты ϑ_n ($n = 1, 2, \dots, 6$).

Шаг 3. С учетом измерений $\tilde{r}_n$ и $\dot{\tilde{r}}_n$ ($n = 1, 2, \dots, 6$) по формулам (11.2.3) и (11.2.4) вычислить невязки $\delta_n^{(j)}$ ($n = 1, 2, \dots, 6; j = 0, 1, 2, \dots, 6$) для семи вариантов начальных условий, определенных шагами 1 и 2, а затем — элементы матрицы (11.2.5) с помощью формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_n}{\partial x_0} &= \frac{\delta_n^{(1)} - \delta_n^{(0)}}{\delta x_0}, \quad n = 1, 2, \dots, 6, \\ \frac{\partial \delta_n}{\partial y_0} &= \frac{\delta_n^{(2)} - \delta_n^{(0)}}{\delta y_0}, \quad n = 1, 2, \dots, 6, \\ &\dots \end{aligned}$$

Шаг 4. Вычислить поправку вектора $x_0^{(0)}$

$$\Delta x_0^{(0)} = (A^0)^{-1} \delta^0$$

по известным A^0 и δ^0 , определенным шагами 3 и 1 соответственно, и найти новое приближение

$$x_0^{(1)} = x_0^{(0)} + \Delta x_0^{(0)}. \quad (11.2.7)$$

Если

$$|\Delta x_0^{(0)}| < \delta_{0k}, \quad (11.2.8)$$

где δ_{0k} — малая положительная величина, то считать $x_0^{(0)}$ оценкой искомого вектора, в противном случае вернуться к шагу 1 при $x_0^{(1)}$. Шаги 1—4 повторяются до выполнения условия (11.2.8).

Для улучшения сходимости алгоритма в процедуру расчета новых приближений вектора x_0 , реализуемую по формуле (11.2.7), следует ввести переменный коэффициент a_x :

$$x_0^{(i+1)} = x_0^{(i)} + a_x \Delta x_0^{(i)}.$$

Величина коэффициента a_x меняется в зависимости от соотношения невязок $\delta^{(i+1)}$ и $\delta^{(i)}$. Если на i -м шаге было принято $a_x = 1$ и получено $|\delta^{(i+1)}| > |\delta^{(i)}|$, то a_x следует уменьшать до получения соотношения $|\delta^{(i+1)}| < |\delta^{(i)}|$; если на i -м шаге имеет место $|\delta^{(i+1)}| < |\delta^{(i)}|$, то a_x следует увеличивать до тех пор, пока не будет достигнуто соотношение $|\delta^{(i+1)}| > |\delta^{(i)}|$.

В рассмотренном алгоритме основные вычислительные процедуры связаны с расчетом элементов матрицы частных производных невязок по искомым переменным, включающим семикратное интегрирование уравнений относительного движения на интервале $[\vartheta_0, \vartheta_1]$.

Таким образом, существенное упрощение вычислений может быть достигнуто или путем сокращения необходимого числа интегрирований уравнений движения, или путем упрощения самой процедуры интегрирования.

Рассмотрим способ, существенно упрощающий исходные уравнения (11.2.1) и (11.2.2) и алгоритм их решений. В основу этого способа положим *условно линейную модель относительного движения аппаратов* следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_0 + c_{xn} v_{x0}, & y_n &= y_0 + c_{yn} v_{y0}, \\ z_n &= z_0 + c_{zn} v_{z0}, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.2.9)$$

В равенствах (11.2.9) через c_{xn} , c_{yn} , c_{zn} обозначены коэффициенты линеаризации, которые определяются через координаты x_n^0 , y_n^0 , z_n^0 [вычисляемые путем интегрирования уравнений (11.2.6) методом Рунге — Кутты] в виде

$$c_{xn}^0 = \frac{x_n^0 - x_0^0}{t_{x_0}^0}, \quad c_{yn}^0 = \frac{y_n^0 - y_0^0}{t_{y_0}^0}, \quad c_{zn}^0 = \frac{z_n^0 - z_0^0}{t_{z_0}^0} \quad (11.2.10)$$

при произвольно выбранном начальном условии

$$x(\vartheta_0) = x_0^{(0)} = (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0). \quad (11.2.11)$$

Если $x_0^{(0)}$ соответствует точному значению x_0^* искомого вектора, то формулы (11.2.9) верны при любых n . При несовпадении векторов $x_0^{(0)}$ и x_0^* , что всегда имеет место на практике, формулы (11.2.9) характеризуются методической погрешностью, величина которой сложным образом зависит от ошибки начального приближения $\Delta x_0^{(0)} = x_0^{(0)} - x_0^*$ и интервала движения $[\vartheta_0, \vartheta_n]$.

Равенства (11.2.9) дают простую форму связи искомых координат и скоростей x_0 , y_0 , z_0 , v_{x0} , v_{y0} , v_{z0} с координатами x_n , y_n , z_n в моменты ϑ_n ($n = 1, 2, \dots$), что имеет важное значение при замене неявных функциональных связей в равенствах (11.2.1) и (11.2.2) конечными формулами.

Запишем соотношения, аналогичные (11.2.9), для скоростей. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\left. \begin{aligned} v_{xn} &= \frac{c_{x(n+1)}^0 - c_{xn}^0}{\bar{c}_{xn}^0} v_{x0}, \\ v_{yn} &= \frac{c_{y(n+1)}^0 - c_{yn}^0}{\bar{c}_{yn}^0} v_{y0}, \\ v_{zn} &= \frac{c_{z(n+1)}^0 - c_{zn}^0}{\bar{c}_{zn}^0} v_{z0}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.12)$$

Здесь через $\bar{c}_{xn}^0$, $\bar{c}_{yn}^0$, $\bar{c}_{zn}^0$ обозначены коэффициенты линеаризации, определяемые, как и коэффициенты c_{xn}^0 , c_{yn}^0 , c_{zn}^0 , через координаты и скорости x_n^0 , y_n^0 , z_n^0 , v_{xn}^0 , v_{yn}^0 , v_{zn}^0 ($n = 1, 2, \dots$), полученные путем интегрирования уравнений (11.2.6) методом Рунге — Кутты при произвольно

выбранном начальном условии (11.2.11):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}_{xn}^0 &= \frac{x_{n+1}^0 - x_n^0}{t_{xn}^0}, \\ \tilde{c}_{yn}^0 &= \frac{y_{n+1}^0 - y_n^0}{t_{yn}^0}, \\ \tilde{c}_{zn}^0 &= \frac{z_{n+1}^0 - z_n^0}{t_{zn}^0}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.13)$$

Подстановка значений x_n , y_n , z_n и v_{xn} , v_{yn} , v_{zn} ($n = 1, 2, \dots, 6$), определенных равенствами (11.2.9) и (11.2.12), в формулы (11.2.1) и (11.2.2) приводит к уравнениям второго порядка относительно переменных x_0 , y_0 , $\dots$, v_{z0} .

Опуская выкладки расчетных формул, приведем другой алгоритм определения вектора x_0 , в основу которого положена модель движения (11.2.9), (11.2.13). Процесс уточнения вектора x_0 осуществляется с помощью метода Ньютона. Алгоритм использует схему измерений $(\tilde{r}i)_n$ ($n = 1, 2, \dots, 6$) и является аналогом алгоритма А1.

Алгоритм А2.

Шаг 0. Задать нулевое приближение вектора x_0

$$x_0^{(0)} = (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0),$$

моменты измерений ϑ_n ($n = 1, 2, \dots, 6$), а также дополнительное значение $\vartheta = \vartheta_7$, необходимое для расчета коэффициентов c_{xn} , c_{yn} , c_{zn} , $\tilde{c}_{xn}$, $\tilde{c}_{yn}$, $\tilde{c}_{zn}$ ($n = 1, 2, \dots, 6$).

Шаг 1. Интегрировать уравнения (11.2.6) на интервале $[\vartheta_0, \vartheta_7]$, определенном шагом 0, и найти координаты x , y , z в моменты ϑ_n ($n = 1, 2, \dots, 7$).

Шаг 2. Вычислить коэффициенты c_{xn}^0 , c_{yn}^0 , c_{zn}^0 , $\tilde{c}_{xn}^0$, $\tilde{c}_{yn}^0$, $\tilde{c}_{zn}^0$ по формулам (11.2.10) и (11.2.13) и коэффициенты b_{xn}^0 , b_{yn}^0 , b_{zn}^0 , a_{xn}^0 , a_{yn}^0 , a_{zn}^0 по формулам

$$\begin{aligned} b_{xn}^0 &= (c_{xn}^0)^{-1} (c_{x(n+1)}^0 - c_{xn}^0), & a_{xn}^0 &= b_{xn}^0 c_{xn}^0, \\ b_{yn}^0 &= (c_{yn}^0)^{-1} (c_{y(n+1)}^0 - c_{yn}^0), & a_{yn}^0 &= b_{yn}^0 c_{yn}^0, \\ b_{zn}^0 &= (c_{zn}^0)^{-1} (c_{z(n+1)}^0 - c_{zn}^0), & a_{zn}^0 &= b_{zn}^0 c_{zn}^0, \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \dots, 6.$$

Шаг 3. Вычислить функции f_n^0 ($n = 1, 2, \dots, 6$):

$$f_n^0 = b_{xn}^0 v_{x0}^0 + a_{xn}^0 (v_{x0}^0)^2 + b_{yn}^0 y_0^0 v_{y0}^0 + \\ + a_{yn}^0 (v_{y0}^0)^2 + b_{zn}^0 z_0^0 v_{z0}^0 + a_{zn}^0 (v_{z0}^0)^2.$$

Шаг 4. Вычислить коэффициенты $c_{n1}^0, \dots, c_{n6}^0$ ($n = 1, 2, \dots, 6$):

$$c_{n1}^0 = b_{xn}^0 v_{x0}^0, \quad c_{n2}^0 = b_{yn}^0 v_{y0}^0, \quad c_{n3}^0 = b_{zn}^0 v_{z0}^0, \\ c_{n4}^0 = b_{xn}^0 x_0^0 + 2a_{xn}^0 v_{x0}^0, \quad c_{n5}^0 = b_{yn}^0 y_0^0 + 2a_{yn}^0 v_{y0}^0, \\ c_{n6}^0 = b_{zn}^0 z_0^0 + 2a_{zn}^0 v_{z0}^0.$$

Шаг 5. Вычислить невязки δ_n^0 ($n = 1, 2, \dots, 6$) с учетом измерений $(\tilde{r}, \dot{r})_n$:

$$\delta_n^0 = (i\tilde{r})_n + f_n^0.$$

Шаг 6. Вычислить поправку $\Delta x_0^{(0)} = (\Delta x_0^0, \Delta y_0^0, \dots, \Delta v_{z0}^0)$ из уравнений

$$\delta_n^0 = c_{n1}^0 \Delta x_0^0 + c_{n2}^0 \Delta y_0^0 + c_{n3}^0 \Delta z_0^0 + c_{n4}^0 \Delta v_{x0}^0 + c_{n5}^0 \Delta v_{y0}^0 + c_{n6}^0 \Delta v_{z0}^0, \\ n = 1, 2, \dots, 6$$

и проверить условие

$$|\Delta x_0^{(0)}| > \delta_{00}. \quad (11.2.14)$$

Если условие (11.2.14) выполняется, то найти новое приближение вектора x_0

$$x_0^{(1)} = x_0^{(0)} + \Delta x_0^{(0)}$$

и вернуться к шагу 3 алгоритма при $x_0 = x_0^{(1)}$. Шаги 3—6 повторять до нарушения условия (11.2.14), после чего перейти к шагу 7.

Шаг 7. Значение $x_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$), полученное на шаге 6, считать первым приближением оценки вектора x_0

$$x_0^{(i)} = \hat{x}_0^{(0)}$$

и вернуться к шагу 0 алгоритма при $x_0^{(0)} = \hat{x}_0^{(i)}$. Шаги 1—6 расчета $\hat{x}_0^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) повторять до выполнения

условия

$$|\hat{x}_0^{(k)} - \hat{x}_0^{(k-1)}| < \delta_{00},$$

после чего значение $\hat{x}_0^{(k)}$ считать искомой оценкой вектора x_0

$$\hat{x}_0^{(k)} = \hat{x}_0$$

и расчет прекратить.

Таким образом, алгоритм А2 содержит два итерационных цикла: расчет поправок $\Delta x_0^{(0)}$ и расчет оценок $\hat{x}_0^{(0)}$.

Оба рассмотренных алгоритма могут быть улучшены с помощью целого ряда приемов, в частности путем сокращения числа итерируемых переменных в цикле расчета поправок $\Delta x_0^{(0)}$ с шести до пяти за счет перехода от формул

$$(\tilde{r}\tilde{r})_n = x_n v_{xn} + y_n v_{yn} + z_n v_{zn}, \quad n = 1, 2, \dots, 6$$

к формулам

$$\tilde{r}_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

$$(\tilde{r}_n \tilde{r}_n) = x_n v_{xn} + y_n v_{yn} + z_n v_{zn}, \quad n = 1, 2, \dots, 5.$$

Приведем некоторые характеристики алгоритмов А1 и А2, определяющие требования к БЦВМ, предназначенной для их реализации. Рассчитаем число типовых вычислительных операций, выполняемых при реализации алгоритмов в БЦВМ.

Введем обозначения: $N(+)$ — число операций типа операции сложения, $N(\times)$ — умножения, $N(:)$ — деления, $N(\sqrt{})$ — извлечения корня, $N(\text{trig})$ — расчета $\sin \vartheta$ или $\cos \vartheta$, $N_{ок}$ — число шагов при реализации процедуры интегрирования уравнений относительного движения; m_H — число итераций при решении системы расчета поправок методом Ньютона; m_0 — число итераций в процессе уточнения оценок $\hat{x}_0$.

Результаты расчета сведены в табл. 11.1.

Помимо общего числа типовых вычислительных операций, однозначно определяемых через число итераций m_H и m_0 , в табл. 11.1 приведено число простейших операций типа операции сложения (N^{Σ}), эквивалентное по быстродействию совокупности всех операций алгоритмов. При

Таблица 11.1

Алгоритм оценки	Число типовых операций					
	$N(+)$	$N(\times)$	$N(\cdot)$	$N(V)$	$N(\text{trig})$	N^Σ
A1	$3206m_0$	$4374m_0$	$608m_0$	$106m_0$	$182m_0$	248 646
A2	$571m_0 +$ $+ 222m_H m_0$	$843m_0 +$ $+ 456m_H m_0$	$139m_0 +$ $+ 36m_H m_0$	$15m_0 +$ $+ 15m_H m_0$	$30m_0$	78 153

расчете N^Σ было принято [22, 53], что затраты машинного времени, требуемого для выполнения одной операции умножения, эквивалентны его затратам на четыре операции сложения, затраты на одно деление — затратам на десять операций сложения, затраты на извлечение корня — затратам на 100 операций сложения, затраты на вычисление $\sin \phi$ — затратам на 250 операций сложения. Кроме того, было принято, что количество итераций составляет $m_{II} = m_0 - 3$, а шаг интегрирования уравнений относительного движения равен интервалу между измерениями, поэтому общее число шагов $N_{ок} = 7$.

Условно все процедуры алгоритмов A1 и A2 можно разделить на три основные группы:

1) интегрирование уравнений относительного движения методом Рунге — Кутты при произвольных начальных условиях для определения координат и скоростей в моменты измерений на интервале $[\phi_0, \phi_n]$;

2) расчет вспомогательных коэффициентов и невязок, определяющих уравнение для расчета поправок $\Delta x_0^{(0)}$;

3) решение системы нелинейных уравнений шестого порядка относительно поправок к искомым величинам.

Определим число типовых вычислительных операций отдельных процедур (табл. 11.2).

Анализ таблицы показывает, что в общем числе операций интегрирование уравнений относительного движения составляет 94% (алгоритм A1) и 49% (алгоритм A2); это объясняется в первую очередь тем, что в расчетах коэффициентов, вспомогательных функций и поправок отсут-

Таблица 11.2

Процедура алгоритмов	Алгоритм оценки	Число типовых операций				
		$N(+)$	$N(\times)$	$N(:)$	$N(\sqrt{})$	$N(\text{trig})$
Интегрирование уравнений относительного движения	A1	$2912m_0$	$3822m_0$	$53m_0$	$91m_0$	$182m_0$
	A2	$480m_1$	$626m_0$	$90m_0$	$15m_1$	$30m_0$
Расчет коэффициентов и вспомогательных функций	A1	$72m_0$	$96m_0$	$36m_0$	0	0
	A2	$91m_0$	$217m_0$	$49m_0$	0	0
Расчет поправок	A1	$222m_0$	$456m_0$	$36m_0$	$15m_0$	0
	A2	$222m_0m_H$	$456m_0m_H$	$36m_0m_H$	$15m_0m_H$	0

ствуют сложные вычислительные операции типа операций извлечения корня и расчета тригонометрических функций.

Приведем результаты анализа типовых вычислительных операций, характеризующих шаги 1—7 алгоритма A2: интегрирование уравнений относительного движения методом Рунге — Кутты третьего порядка характеризуется следующими операциями, соответствующими одному шагу расчета:

$$N(+)=64, N(\times)=84, N(:)=12, N(\sqrt{})=3, \\ N(\text{trig})=4;$$

расчет коэффициентов $c_{xn}, \dots, \bar{c}_{xn}, \dots, b_{xn}, \dots, a_{zn}, \dots, a_{zn}$ дает

$$N(+)=49, N(\times)=49, N(:)=49;$$

расчету функций f_n и невязок δ_n соответствуют

$$N(+)=42, N(\times)=168;$$

расчет поправки Δx_0 характеризуется величинами

$$N(+)=222, N(\times)=456, N(:)=36, N(\sqrt{})=15.$$

Проведенный анализ позволяет оценить требования к БЦВМ, реализующей алгоритмы, как по быстродействию, так и по необходимости использования специальных подпрограмм для расчета тригонометрических функций и извлечения корня.

Для оценки времени, потребного для реализации алгоритмов, необходимо знать длительность выполнения элементарных вычислительных операций, которая для некоторых современных БЦВМ составляет [20, 27]:

$$\left. \begin{array}{l} \text{БЦВМ UNIVAC 1824} - 8 \text{ мксек,} \\ \text{БЦВМ корабля «Аполлон»} - 7 \text{ мксек.} \end{array} \right\} (11.2.15)$$

Приняв в соответствии с (11.2.15) среднее число элементарных операций типа операции сложения равным $125 \cdot 10^3$ в секунду, получим время, необходимое для реализации алгоритмов А1 и А2:

$$T_{A1} \approx 2 \text{ сек,} \quad T_{A2} \approx 0,7 \text{ сек.} \quad (11.2.16)$$

Следует иметь в виду, что значения (11.2.16), как и результаты, приведенные в табл. 11.1 и 11.2, характеризуют оценки алгоритмов, соответствующие случаю, когда шаг измерений совпадает с шагом интегрирования уравнений относительного движения. Если по условиям задачи программа измерений растянута во времени до величины, соответствующей прохождению целью угла θ по опорной орбите, результаты табл. 11.1 и 11.2, а также значения (11.2.16) следует умножить на коэффициент

$$K = \frac{\theta}{\Delta\theta_{\text{интегр}}},$$

где $\Delta\theta_{\text{интегр}}$ — шаг интегрирования уравнений движения.

Скорость сходимости и устойчивость рассмотренных алгоритмов существенно зависят от того, насколько удачно выбрано начальное приближение $x_0^{(0)}$ искомого вектора.

Ниже будут рассмотрены некоторые методы получения начального приближения оценки $\hat{x}_0^{(0)}$, эффективные в смысле быстродействия, простоты реализации в БЦВМ и точности оценки. Поскольку эти методы могут быть использованы не только для получения начальных оценок в итерационных алгоритмах, но и в качестве вполне

самостоятельных способов, дающих в ряде случаев достаточно точные оценки параметров движения, их рассмотрение выделено в самостоятельный параграф.

§ 11.3. НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОЦЕНОК

Рассмотрим метод получения оценок, основанный на *линейной аппроксимации относительного движения аппаратов в окрестности одной фиксированной точки*.

Если измерительная система обеспечивает определение шести параметров относительного движения (см. § 11.1)

$$\tilde{u} = (\tilde{r}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\dot{r}}, \tilde{\dot{\alpha}}, \tilde{\dot{\beta}}),$$

то в предположении равномерного движения аппаратов в окрестности точки, соответствующей моменту ϑ_0 , принятому за начало измерений, можно записать следующие соотношения для оценок $\hat{r}_0, \hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}_0 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{r}_n - (\vartheta_N - \vartheta_0) \tilde{r}'_0, \\ \hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_n - (\vartheta_N - \vartheta_0) \tilde{\alpha}'_0, \\ \hat{\beta}_0 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\beta}_n - (\vartheta_N - \vartheta_0) \tilde{\beta}'_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.3.1)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}'_0 &= \left. \frac{dr}{d\vartheta} \right|_{\vartheta_0} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{r}_n}{\lambda_n^2} - \\ &\quad - \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{r}_n - \tilde{r}_0}{\lambda_n^2 n \delta \vartheta} \right) (\vartheta_N - \vartheta_0), \\ \tilde{\alpha}'_0 &= \left. \frac{d\alpha}{d\vartheta} \right|_{\vartheta_0} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{\alpha}_n}{\lambda_n^2} - \\ &\quad - \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_0}{\lambda_n^2 n \delta \vartheta} \right) (\vartheta_N - \vartheta_0), \end{aligned} \right\} \quad (11.3.2)$$

$$\hat{\beta}'_0 = \left. \frac{d\beta}{d\vartheta} \right|_{\vartheta_0} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{\beta}_n}{\lambda_n^2} - \left. \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_0}{\lambda_n^2 n \delta \vartheta} \right) (\vartheta_N - \vartheta_0) \right\} \quad (11.3.2)$$

— производные, определяемые по измерениям параметров $\tilde{r}_n, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$), реализованным в моменты $\vartheta_n = \vartheta_0 + n\delta\vartheta$ с постоянным шагом $\delta\vartheta$; $\lambda_n = 1 + \epsilon \cos \vartheta_n$.

Формулы (11.3.1) и (11.3.2) получены на основании следующих соображений. Результаты измерений параметров r_n, α_n, β_n содержат случайные ошибки и могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_n &= r_0 + \Delta r_n^{\pi} + \Delta r_n^c, \\ \tilde{\alpha}_n &= \alpha_0 + \Delta \alpha_n^{\pi} + \Delta \alpha_n^c, \\ \tilde{\beta}_n &= \beta_0 + \Delta \beta_n^{\pi} + \Delta \beta_n^c, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (11.3.3)$$

где r_0, α_0, β_0 — истинные значения величин r, α, β в момент $\vartheta = \vartheta_0$; $\Delta r_n^{\pi}, \Delta \alpha_n^{\pi}, \Delta \beta_n^{\pi}$ — отклонения $\tilde{r}_n, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n$ от истинных значений в моменты $\vartheta_n = n\delta\vartheta$, связанные с динамикой движения аппаратов; $\Delta r_n^c, \Delta \alpha_n^c, \Delta \beta_n^c$ — случайные ошибки измерений.

Из равенств (11.3.3) следует, что после реализации N измерений ($N \rightarrow \infty$) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sum \tilde{r}_n &\rightarrow \sum (r_0 + \Delta r_n^{\pi}), \quad \sum_{n=0}^N \Delta r_n^c \rightarrow 0, \\ \sum \tilde{\alpha}_n &\rightarrow \sum (\alpha_0 + \Delta \alpha_n^{\pi}), \quad \sum_{n=0}^N \Delta \alpha_n^c \rightarrow 0, \\ \sum \tilde{\beta}_n &\rightarrow \sum (\beta_0 + \Delta \beta_n^{\pi}), \quad \sum_{n=0}^N \Delta \beta_n^c \rightarrow 0, \end{aligned}$$

из которых с учетом сделанного ранее допущения о линейной аппроксимации относительного движения аппаратов непосредственно вытекают формулы (11.3.1) и (11.3.2).

Поскольку современные радиолокационные системы не обеспечивают высокой точности измерений параметров α и β , для определения $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$ целесообразно вместо (11.3.2) использовать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_0^{(N)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_0}{n \delta \vartheta}, \\ \hat{\beta}_0^{(N)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_0}{n \delta \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (11.3.4)$$

Для расчета же $\hat{r}_0$ следует использовать первое равенство (11.3.2), так как значения $\dot{r}_n$ измеряются с высокой точностью [20] и в дополнительном сглаживании значений $\dot{r}_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) нет необходимости.

Заметим, что если в формулах (11.3.4) заменить $\delta \vartheta$ на Δt , то они будут определять значения $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$. Для получения $\hat{r}_0$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_0$ из равенств (11.3.2) в них следует положить $\lambda_n = 1$, $(\vartheta_N - \vartheta_0) \rightarrow (t_N - t_0)$, $\delta \vartheta \rightarrow \Delta t$.

Таким образом, соотношения (11.3.1) и (11.3.2) определяют оценки $\hat{r}_0$, $\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\beta}_0$, а следовательно, и оценки координат и скоростей относительного движения аппаратов:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \hat{r}_0 \cos \hat{\beta}_0 \cos \hat{\alpha}_0, \\ \hat{y}_0 &= \hat{r}_0 \cos \hat{\beta}_0 \sin \hat{\alpha}_0, \\ \hat{z}_0 &= \hat{r}_0 \sin \hat{\beta}_0, \\ \hat{v}_{x0} &= \hat{r}_0 \cos \hat{\beta}_0 \cos \hat{\alpha}_0 - \hat{r}_0 \hat{\alpha}_0 \sin \hat{\alpha}_0 \cos \hat{\beta}_0 - \hat{r}_0 \hat{\beta}_0 \cos \hat{\alpha}_0 \sin \hat{\beta}_0, \\ \hat{v}_{y0} &= \hat{r}_0 \cos \hat{\beta}_0 \sin \hat{\alpha}_0 + \hat{r}_0 \hat{\alpha}_0 \cos \hat{\beta}_0 \cos \hat{\alpha}_0 - \hat{r}_0 \hat{\beta}_0 \sin \hat{\beta}_0 \sin \hat{\alpha}_0, \\ \hat{v}_{z0} &= \hat{r}_0 \sin \hat{\beta}_0 + \hat{r}_0 \hat{\beta}_0 \cos \hat{\beta}_0. \end{aligned}$$

Типичные зависимости ошибок оценок координат и скоростей от числа измерений N при постоянном интервале между ними приведены на рис. 11.1. Наличие у кривых минимума при некотором значении $N = N_{\text{опт}}$

можно объяснить тем, что, с одной стороны, ошибки оценок $\Delta\hat{r}$ и $\Delta\hat{v}$ убывают с ростом N (кривая A), а с другой, собственные (методические) погрешности формул (11.3.1) и (11.3.2) возрастают из-за увеличения влияния нелинейностей в уравнениях движения аппаратов (кривая B). Наложение этих двух противоположных эффектов дает характеристики с явно выраженным минимумом. Эти

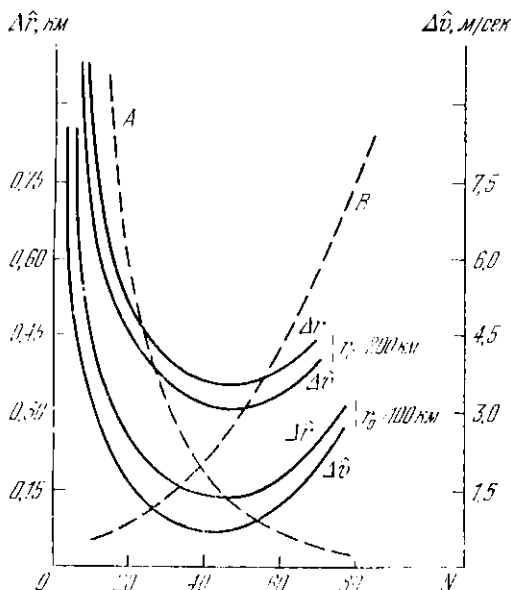


Рис. 11.1.

характеристики для случаев $r_0 = 100 \text{ км}$, $r_0 = 200 \text{ км}$, $e = 0,8$ и приведены на рис. 11.1. Для расчета оценок $\hat{r}_0$ и $\hat{v}_0$ использовались формулы (11.3.1), в которых производные $\dot{\hat{r}}_0$ и $\dot{\hat{v}}_0$ определялись с помощью равенств, аналогичных (11.3.4):

$$\dot{\hat{r}}_0^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{r}_n - \tilde{r}_0}{n \delta \vartheta},$$

$$\dot{\hat{v}}_0^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{v}_n - \tilde{v}_0}{n \delta \vartheta}.$$

Ошибки измерений параметров r и α считались случайными нормально распределенными величинами, статистические характеристики которых были приняты следующими (см. приложение 2):

$$M[\Delta r] = M[\Delta \alpha] = 0,$$

$$\sqrt{M[\Delta r]^2} = \sigma_{\Delta r} = 4 \cdot 10^{-3} r,$$

$$\sqrt{M[\Delta \alpha]^2} = \sigma_{\Delta \alpha} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Из рис. 11.1 видно, что минимум ошибок оценок соответствует числу измерений $N_{\text{опт}} \approx 40$. Дополнительные исследования показали, что величина $N_{\text{опт}}$ практически не зависит от эксцентриситета опорной орбиты (при постоянном интервале наблюдений).

Зависимости минимальных значений ошибок оценок $\Delta \hat{r}_{\min}$ и $\Delta \hat{v}_{\min}$ (отнесенных к их значениям при $\Delta \vartheta = 4^\circ$) от интервала измерений, равного $\Delta \vartheta$ ($N_{\text{опт}} \approx 40$), для различных значений эксцентриситета e приведены на рис. 11.2. Из него следует, что минимальные ошибки оценок практически постоянны при $\Delta \vartheta \leq 8^\circ$, а при $\Delta \vartheta > 10 \div 12^\circ$ начинают быстро возрастать, поэтому интервал измерений $\Delta \vartheta \approx 12^\circ$ ($N_{\text{опт}} \approx 40$) следует рекомендовать в качестве максимальной величины, обеспечивающей для эллиптических орбит произвольного эксцентриситета наибольшую возможную для данного способа точность оценок.

Важной характеристикой рассмотренного метода является зависимость минимальных ошибок оценок $\Delta \hat{r}_{\min} = \Delta \hat{r}(N_{\text{опт}})$, $\Delta \hat{v}_{\min} = \Delta \hat{v}(N_{\text{опт}})$ ($N_{\text{опт}} \approx 40$) от расстояния r между аппаратами (рис. 11.3). Из приведенных на этом рисунке зависимостей видно, что ошибки оценки координат монотонно снижаются по мере уменьшения r , в то время как ошибки оценки скоростей не могут быть сделаны ниже некоторой величины $\Delta v_{\text{пред}}$, характеризующей остаточную методическую ошибку формул (11.3.1), (11.3.2) и всего метода в целом.

Заметим, что полученные результаты справедливы для случая, когда ошибки измерений являются случайными или знакопеременными. Если же измерения содержат постоянную составляющую, то она переходит в оценки

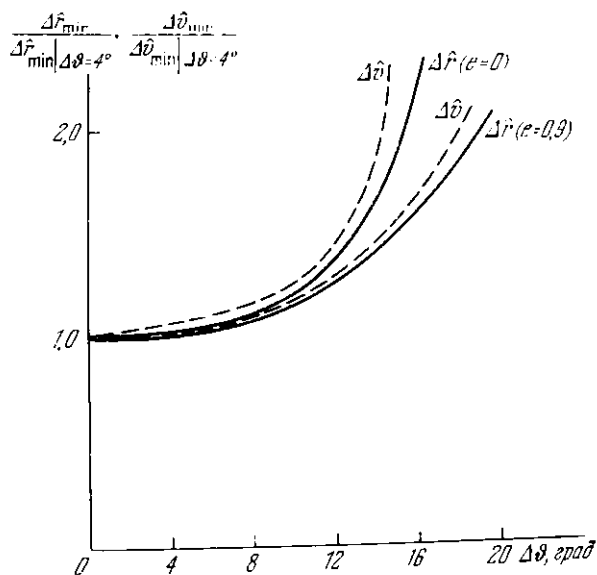


Рис. 11.2.

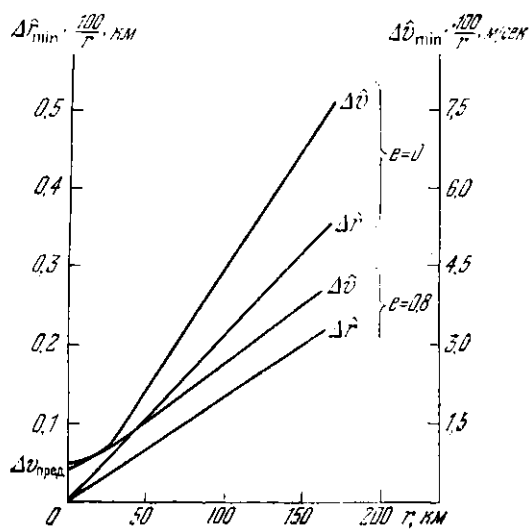


Рис. 11.3.

координат и без применения специальных методов ее компенсировать невозможно. Для получения достаточно точных оценок скоростей в этом случае следует применять методы, которые рассматриваются ниже.

§ 11.4. УПРОЩЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ r И $\dot{r}$

Выше было показано, что процедура численного интегрирования уравнений относительного движения аппаратов характеризуется большим числом типовых вычислительных операций, поэтому одним из основных направлений упрощения вычислительного алгоритма расчета оценок является переход к использованию аналитических решений линеаризованных или квадратичных (второго приближения) уравнений относительного движения, приведенных в главе 5.

Рассмотрим наиболее простую форму решения линеаризованных уравнений относительного движения в предположении круговой опорной орбиты.

Метод эквивалентных круговых орбит. Метод основан на предположении, что на малом интервале измерений $[\vartheta_0, \vartheta_N]$ движение цели по эллиптической орбите с параметрами p и e может быть заменено движением по эквивалентной круговой орбите, радиус которой равен текущему (в точках ϑ_0 или ϑ_N) расстоянию аппарата от центра притяжения

$$R_0 = p (1 + e \cos \vartheta_i)^{-1}, \quad i = 0, N. \quad (11.4.1)$$

Это предположение не вызывает возражений в случае орбит малого эксцентриситета. При значениях $e = 0,1 \div 0,9$ оно также может быть принято, если рассматривать случаи $\vartheta_0 = 0$ (перицентр) или $\vartheta_0 = 180^\circ$ (апоцентр), поскольку эквивалентные круговые и эллиптические орбиты в этих точках касательны друг к другу.

Итак, предположим, что движение цели происходит по круговой орбите радиуса R_0 , определенного равенством (11.4.1). Запишем решение линеаризованных уравнений относительного движения, предварительно

преобразовав их к виду

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + y_0 6(\theta - \sin \theta) + x'_0(4 \sin \theta - 3\theta) + \\ &\quad + y'_0 2(1 - \cos \theta), \\ y(\theta) &= y_0(4 - 3 \cos \theta) + x'_0 2(\cos \theta - 1) + y'_0 \sin \theta, \\ x'(\theta) &= y_0 6(1 - \cos \theta) + x'_0 2(4 \cos \theta - 3) + \\ &\quad + y'_0 2 \sin \theta, \\ y'(\theta) &= y_0 3 \sin \theta - x'_0 2 \sin \theta + y'_0 \cos \theta, \\ z(0) &= z_0 \cos \theta + z'_0 \sin \theta, \\ z'(\theta) &= -z_0 \sin \theta + z'_0 \cos \theta, \end{aligned} \right\} (11.4.2)$$

где $\theta = \left(\frac{\mu}{R_0^3} \right)^{1/2} t$.

Переход от безразмерной формы координат и скоростей, определенных равенствами (11.4.2), к истинным значениям осуществляется путем умножения координат на R_0 , а скоростей на $\left(\frac{\mu}{R_0^3} \right)^{1/2}$.

Для значений $\theta_n = n\delta\theta$ ($\delta\theta$ — постоянный шаг измерений) запишем коэффициенты равенств (11.4.2) в форме

$$\left. \begin{aligned} a_{1n} &= 6(\theta_n - \sin \theta_n), \quad a_{2n} = -\theta_n + \frac{2}{3} a_{1n}, \\ a_{3n} &= 2(1 - \cos \theta_n), \quad a_{4n} = 3 + a_{3n}, \\ a_{5n} &= -a_{3n}, \quad a_{6n} = \theta_n - \frac{a_{1n}}{6}, \quad a_{7n} = 3a_{3n}, \\ a_{8n} &= 1 - 2a_{3n}, \quad a_{9n} = 2a_{6n}, \quad a_{10n} = 3a_{6n}, \\ a_{11n} &= -a_{9n}, \quad a_{12n} = 1 + a_{3n}, \quad a_{13n} = a_{12n}, \\ a_{14n} &= a_{6n}, \quad a_{15n} = -a_{6n}, \quad a_{16n} = a_{12n}, \end{aligned} \right\} (11.4.3)$$

Индексы коэффициентов выбраны так, чтобы равенства (11.4.3) соответствовали матричному соотношению

$$x_n = A_{n0} x_0,$$

где

$$x_n = (x, y, x', y', z, z'), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$A_{n0} = \begin{pmatrix} 1 & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & 0 & 0 \\ 0 & a_{4n} & a_{5n} & a_{6n} & 0 & 0 \\ 0 & a_{7n} & a_{8n} & a_{9n} & 0 & 0 \\ 0 & a_{10n} & a_{11n} & a_{12n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13n} & a_{14n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15n} & a_{16n} \end{pmatrix}.$$

Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} f_n = & a_{7n} x_0 y_0 + (a_{1n} a_{7n} + a_{4n} a_{10n}) y_0^2 + (a_{4n} a_{11n} + \\ & + a_{2n} a_{7n} + a_{1n} a_{8n} + a_{5n} a_{10n}) x_0 y_0 + (a_{1n} a_{12n} + a_{6n} a_{10n} + \\ & + a_{3n} a_{7n} + a_{1n} a_{9n}) y_0 y_0 + \\ & + a_{8n} x_0 x_0' + (a_{5n} a_{11n} + a_{2n} a_{8n}) (x_0')^2 + (a_{5n} a_{12n} + \\ & + a_{6n} a_{11n} + a_{3n} a_{8n} + a_{2n} a_{9n}) x_0 y_0' + a_{9n} x_0 y_0 + \\ & + (a_{6n} a_{12n} + a_{3n} a_{9n}) (y_0')^2 + a_{13n} a_{15n} z_0^2 + \\ & + a_{14n} a_{16n} (z_0')^2 + (a_{14n} a_{15n} + a_{13n} a_{16n}) z_0 z_0', \end{aligned} \quad (11.4.4)$$

невязки

$$\delta_n = -(r\dot{r})_n + f_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.4.5)$$

и матрицу

$$C_n = [c_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (11.4.6)$$

коэффициенты которой определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_{1j} &= a_{7j} y_0 + a_{8j} x_0 + a_{9j} y_1', \\ c_{2j} &= (a_{2j} a_{7j} + a_{1j} a_{11j} + a_{1j} a_{8j} + a_{5j} a_{10j}) y_0 + \\ &+ a_{8j} x_0 + 2(a_{2j} a_{8j} + a_{5j} a_{11j}) x_0' + (a_{3j} a_{8j} + \\ &+ a_{2j} a_{9j} + a_{5j} a_{12j} + a_{6j} a_{11j}) y_0', \\ c_{3j} &= a_{7j} x_0 + 2(a_{1j} a_{7j} + a_{4j} a_{10j}) y_0 + \\ &+ (a_{2j} a_{7j} + a_{1j} a_{8j} + a_{4j} a_{11j} + a_{5j} a_{10j}) x_0' + \\ &+ (a_{3j} a_{7j} + a_{1j} a_{9j} + a_{4j} a_{12j} + a_{6j} a_{10j}) y_0', \\ c_{4j} &= a_{9j} x_0 + (a_{1j} a_{12j} + a_{6j} a_{10j} + a_{3j} a_{7j} + \\ &+ a_{1j} a_{9j}) y_0 + (a_{3j} a_{8j} + a_{2j} a_{9j} + a_{5j} a_{12j} + \\ &+ a_{6j} a_{11j}) x_0' + 2(a_{3j} a_{9j} + a_{6j} a_{12j}) y_0', \\ c_{5j} &= 2a_{13j} a_{15j} z_0 + (a_{14j} a_{15j} + a_{13j} a_{16j}) z_0', \\ c_{6j} &= (a_{14j} a_{15j} + a_{13j} a_{16j}) z_0 + 2a_{14j} a_{16j} z_0'. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.7)$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем алгоритм расчета вектора $x_0 = (x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ по измерениям r и $\dot{r}$, реализованным в шести точках $\theta = n\delta\theta$ ($n = 1, 2, \dots, \dots, 6$).

Алгоритм.

Шаг 0. Задать нулевое приближение вектора x_0

$$x_0^{(0)} = (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0) \quad \text{при } \theta = \theta_0$$

и моменты измерений $\theta_n = n \delta\theta$ ($n = 1, 2, \dots, 6$).

Шаг 1. По формулам (11.4.3) вычислить коэффициенты $a_{1n}, \dots, a_{16n}$ для моментов θ_n , определенных шагом 0.

Шаг 2. По формулам (11.4.4) вычислить функции f_n , а затем по формулам (11.4.5) — невязки δ_n с учетом измерений $(r, \dot{r})_n$.

Шаг 3. По формулам (11.4.7) вычислить коэффициенты $c_{1n}, \dots, c_{6n}$ ($n = 1, 2, \dots, 6$) и найти поправку $\Delta x_0^{(0)} = (\Delta x_0^0, \Delta y_0^0, \Delta z_0^0, \Delta v_{x0}^0, \Delta v_{y0}^0, \Delta v_{z0}^0)$ из уравнения

$$\delta^0 = C_n^0 \Delta x_0^{(0)},$$

где

$$\delta^0 = (\delta_1^0, \delta_2^0, \delta_3^0, \delta_4^0, \delta_5^0, \delta_6^0)^\top,$$

а матрица C_n^0 определяется формулой (11.4.6).

Шаг 4. Если

$$\Delta r^0 = [(\Delta x_0^0)^2 + (\Delta y_0^0)^2 + (\Delta z_0^0)^2]^{1/2} > \delta_r,$$

$$\Delta v^0 = [(\Delta v_{x0}^0)^2 + (\Delta v_{y0}^0)^2 + (\Delta v_{z0}^0)^2]^{1/2} > \delta_v,$$

где δ_r, δ_v — малые положительные числа, то следует найти новое приближение вектора x_0

$$x_0^{(1)} = x_0^{(0)} + \Delta x_0^{(0)}$$

и вернуться к шагу 2 алгоритма при $x_0 = x_0^{(1)}$. Шаги 2—4 повторять i раз до нарушения условий

$$[(\Delta x_0^i)^2 + (\Delta y_0^i)^2 + (\Delta z_0^i)^2]^{1/2} > \delta_r,$$

$$[(\Delta v_{x0}^i)^2 + (\Delta v_{y0}^i)^2 + (\Delta v_{z0}^i)^2]^{1/2} > \delta_v,$$

после чего значение $x_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$), полученное в процессе итераций, считать оценкой вектора x_0

$$x_0^{(i)} = \hat{x}_0$$

и расчет прекратить.

Анализ типовых вычислительных операций, необходимых для реализации приведенного алгоритма в БЦВМ, показывает, что за счет отказа от численных решений полных уравнений относительного движения аппаратов удается сократить число элементарных вычислительных операций, необходимых для реализации алгоритма оценки, с 78 153 до 31 176, т. е. в 2,5 раза.

В заключение отметим, что метод эквивалентных круговых орбит, как и следовало ожидать, налагает жесткие ограничения сверху на интервал измерений, поскольку собственные (методические) погрешности формул (11.4.2), положенных в основу расчета оценок, с увеличением интервала измерений быстро возрастают. В общем случае эти погрешности зависят от начальных условий задачи r_0 , α_0 , β_0 , параметров опорной орбиты p , e , ϑ_0 и интервала $\Delta\theta$.

Использование линеаризованной модели относительного движения аппаратов. Рассмотренный выше итерационный метод оценки координат и скоростей по измерениям r и $\dot{r}$ обладает существенными методическими погрешностями, поскольку он соответствует частному случаю линеаризованной модели движения при круговой опорной орбите. Более высокой точностью и универсальностью по сравнению с ним обладает модель относительного движения, полученная для линеаризованного разностного гравитационного ускорения при произвольной опорной орбите. В § 5.3 было показано, что вектор $x = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ с помощью простых соотношений связан с вектором констант интегрирования $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$, поэтому задачи получения оценки $\hat{x}$ и оценки $\hat{k}$ эквивалентны.

Запишем решение линеаризованных уравнений относительного движения через константы интегрирования $k_1, \dots, k_6$:

$$x(\vartheta) = k_1 + b_1 k_2 + b_2 k_4 + b_3 k_5,$$

$$y(\vartheta) = b_4 k_2 + b_5 k_4 + b_6 k_5,$$

$$z(\vartheta) = b_7 k_3 + b_8 k_6,$$

$$x'(\vartheta) = b_9 k_2 + b_{10} k_4 + b_{11} k_5,$$

$$y'(\vartheta) = b_{12} k_2 + b_{13} k_4 + b_{14} k_5,$$

$$z'(\vartheta) = -b_8 k_3 + b_7 k_6.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 3\lambda^2\Theta, \quad b_2 = (1 + \lambda)\sin\vartheta, \quad b_3 = -(1 + \lambda)\cos\vartheta, \\ b_4 &= 2 - 3e\Theta\sin\vartheta, \quad b_5 = \lambda\cos\vartheta, \quad b_6 = \lambda\sin\vartheta, \\ b_7 &= \cos\vartheta, \quad b_8 = \sin\vartheta, \quad b_9 = \frac{db_1}{d\vartheta}, \quad b_{10} = \frac{db_2}{d\vartheta}, \\ b_{11} &= \frac{db_3}{d\vartheta}, \quad b_{12} = \frac{db_4}{d\vartheta}, \quad b_{13} = \frac{db_5}{d\vartheta}, \quad b_{14} = \frac{db_6}{d\vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (11.4.8)$$

где $\lambda = 1 + e\cos\vartheta$; $\Theta = \left(\frac{\mu}{p^3}\right)^{1/2}(t - t_n)$; t_n — момент прохождения цели через перигеум своей орбиты; ϑ — истинная аномалия цели.

Введем обозначения вспомогательных функций

$$\begin{aligned} f_n &= b_{9n}k_1k_2 + b_{10n}k_1k_4 + b_{11n}k_1k_5 + \\ &+ (b_{1n}b_{10n} + b_{2n}b_{9n} + b_{4n}b_{12n} + b_{5n}b_{12n})k_2k_4 + \\ &+ (b_{2n}b_{11n} + b_{3n}b_{10n} + b_{4n} + b_{6n}b_{12n})k_2k_5 + \\ &+ (b_{5n} + b_{6n}b_{13n} + b_{2n}b_{11n} + b_{3n}b_{10n})k_1k_6 + \\ &+ (b_{1n}b_{9n} + b_{4n}b_{12n})k_2^2 + (b_{2n}b_{10n} + b_{5n}b_{13n})k_4^2 + \\ &+ (b_{6n} + b_{3n}b_{11n})k_5^2 + b_{7n}b_{8n}k_3^2 + b_{7n}b_{8n}k_6^2 + k_3k_6, \\ &n = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (11.4.9)$$

и матрицу

$$\bar{C}_n = [\bar{c}_{jn}], \quad j, n = 1, 2, \dots, 6, \quad (11.4.10)$$

элементы которой определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{1n} &= b_{9n}k_2 + b_{10n}k_4 + b_{11n}k_5, \\ \bar{c}_{2n} &= b_{9n}k_1 + 2k_2(b_{1n}b_{9n} + b_{4n}b_{12n}) + \\ &+ (b_{1n}b_{10n} + b_{2n}b_{9n} + b_{4n}b_{12n} + b_{5n}b_{12n})k_4 + \\ &+ (b_{1n}b_{11n} + b_{3n}b_{9n} + b_{4n} + b_{6n}b_{12n})k_5, \\ \bar{c}_{3n} &= 2b_{7n}b_{8n}k_3 + k_6, \\ \bar{c}_{4n} &= b_{10n}k_1 + (b_{1n}b_{10n} + b_{2n}b_{9n} + b_{4n}b_{12n} + \\ &+ b_{5n}b_{12n})k_2 + 2(b_{2n}b_{10n} + b_{5n}b_{13n})k_4 + \\ &+ (b_{2n}b_{11n} + b_{3n}b_{10n} + b_{6n}b_{13n} + b_{5n})k_5, \\ \bar{c}_{5n} &= b_{11n}k_1 + (b_{2n}b_{11n} + b_{3n}b_{10n} + b_{4n} + b_{6n}b_{12n})k_2 + \\ &+ (b_{5n} + b_{6n}b_{13n} + b_{2n}b_{11n} + b_{3n}b_{10n})k_4 + \\ &+ 2(b_{6n} + b_{3n}b_{11n})k_5, \\ \bar{c}_{6n} &= 2b_{7n}b_{8n}k_6 + k_3, \\ &n = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.11)$$

Преобразуем равенства (11.4.8) к виду, удобному для расчетов на ЭВМ, и приведем их в необходимой для расчетов последовательности:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_n &= \vartheta_0 + n \Delta \vartheta, \quad \lambda_n = 1 + e \cos \vartheta_n, \\ \Theta_n &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_n} \frac{d\vartheta}{\lambda^2}, \quad b_{1n} = 3\lambda_n \Theta_n, \quad b_{2n} = (1 + \lambda_n) \Theta_n, \\ b_{7n} &= \cos \vartheta_n, \quad b_{8n} = \sin \vartheta_n, \quad b_{3n} = -(1 + \lambda_n) b_{7n}, \\ b_{6n} &= \lambda_n b_{8n}, \quad b_{4n} = 2 - 3eb_{6n}, \quad b_{5n} = 2\lambda_n b_{7n}, \\ b_{9n} &= 3 - 6eb_8(1 + eb_7), \quad b_{10n} = -b_{3n} - eb_{7n}b_{8n}, \\ b_{11n} &= b_{2n} + eb_{7n}b_{8n}, \\ b_{12n} &= -3e \left\{ \frac{b_{8n}}{\lambda_n^2} + \Theta_n b_{7n} + e \left[\frac{b_{7n}b_{8n}}{\lambda_n} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Theta_n (b_{7n}^2 - b_{8n}^2) \right] \right\}, \\ b_{13n} &= -eb_{7n}b_{8n} + b_{6n}, \quad b_{14} = b_{5n} - eb_{8n}^2, \\ n &= 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.12)$$

Запишем алгоритм расчета вектора констант по измерениям r и $\dot{r}$, реализованным в шести точках пространства.

Алгоритм.

Шаг 0. Задать нулевое приближение вектора k

$$k^0 = (k_1^0, k_2^0, k_3^0, k_4^0, k_5^0, k_6^0)$$

и моменты измерений ϑ_n, Θ_n ($n = 1, 2, \dots, 6$).

Шаг 1. По формулам (11.4.12) вычислить коэффициенты $b_{1n}, \dots, b_{14n}$ для моментов ϑ_n , определенных шагом 0.

Шаг 2. По формулам (11.4.9) вычислить функции f_n ($n = 1, 2, \dots, 6$), а затем с учетом измерений r_n и $\dot{r}_n$ найти невязки δ_n по формулам

$$\delta_n = -\frac{r_n \dot{r}_n}{\lambda_n^2} + f_n, \quad n = 1, 2, \dots, 6.$$

Шаг 3. По формулам (11.4.11) вычислить коэффициенты $\bar{c}_{1n}, \dots, \bar{c}_{6n}$ ($n = 1, 2, \dots, 6$) и найти поправку $\Delta k = (\Delta k_1, \Delta k_2, \dots, \Delta k_6)$ из уравнения

$$\delta = \bar{C}_n \Delta k,$$

где $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6)$, а матрица C_n определяется формулой (11.4.10).

Шаг 4. Если

$$\|\Delta k\| > \delta_0, \quad (11.4.13)$$

где δ_0 — малая положительная величина, то найти новое приближение вектора k

$$k^{(1)} = k^{(0)} + \Delta k$$

и вернуться к шагу 2 алгоритма при $k = k^{(1)}$. Шаги 2—4 повторять i раз до нарушения условия (11.4.13), после чего значение $k^{(i)}$, полученное в результате итераций, считать оценкой вектора k

$$k^{(i)} = \hat{k}$$

и расчет прекратить.

Приведем окончательный результат расчета типовых вычислительных операций, необходимых для реализации рассмотренного алгоритма в БЦВМ, указав общее число типовых вычислительных операций на один цикл итераций:

$$N(+)=656, \quad N(\times)=864, \quad N(:)=48,$$

$$N(\vee)=15, \quad N(\text{trig})=12.$$

Полученный результат показывает, что алгоритм оценки вектора констант интегрирования по измерениям r и $\dot{r}$ в шести точках пространства обладает более экономичной вычислительной процедурой по сравнению с алгоритмом оценки, использующим формулы круговых орбит. При этом, однако, следует иметь в виду, что в обоих случаях определяются различные совокупности

$$k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) \quad \text{и} \quad x = (x, y, z, v_x, v_y, v_z),$$

поэтому для более корректного сравнения двух алгоритмов проведенный анализ следует дополнить рассмотрением процедуры перехода от вектора k к вектору x , реализуемой по формулам § 5.3.

Основное преимущество алгоритма оценки, использующего модель линеаризованного движения для произвольных опорных орбит, по сравнению с алгоритмом оценки по формулам круговых орбит состоит в том, что он налагает существенно меньше ограничений на интервал изме-

рений $[\theta_0, \theta_6]$ и может быть использован для любых опорных орбит, как эллиптических, так и гиперболических.

Заканчивая рассмотрение итерационных методов оценки по измерениям r и $\dot{r}$, следует указать на возможную неоднозначность оценок, получаемых по измерениям r и $\dot{r}$ в форме произведения $r\dot{r}$, что определяется свойством формулы

$$r\dot{r} = xv_x + yv_y + zv_z, \quad (11.4.14)$$

положенной в основу расчетных соотношений вычислительного алгоритма: при изменении знаков у координат и скоростей на обратные правая часть равенства (11.4.14) не изменяется.

Таким образом, рассмотренные методы дают оценки координат и скоростей с точностью до квадранта. Для уточнения квадранта необходимо использовать дополнительную информацию, которую можно получить с помощью системы ориентации и следящей антенны.

Наконец, последний важный вопрос касается влияния ошибок измерений на точность оценок координат и скоростей и на выбор интервала между измерениями. Здесь в общем случае необходимо решить вариационную задачу, в которой функционал качества зависит от ошибок измерений и моментов их реализации. Даже в простейшей постановке для линейной модели движения с учетом того, что минимально необходимое для расчета оценок число измерений r и $\dot{r}$ равно шести, решение этой задачи довольно громоздко, и мы ее рассматривать не будем.

§ 11.5. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПРИ ПОЛНОМ СОСТАВЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотренные выше методы позволяют получить достаточно точные оценки вектора $x = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ с помощью малого числа измерений параметров r и $\dot{r}$ и представляют собой важную группу детерминированных методов оценки. В этом параграфе будут проанализированы итерационные методы, которые используют полный состав измерений параметров движения $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$, реализуемых автономной радиотехнической системой. Основной вычислительной процедурой этих методов является решение *двухточечных краевых задач с заданными на концах*

фиксированного интервала движения координатами или скоростями. Блок-схемы алгоритмов этой группы приведены на рис. 11.4. Рассмотрим наиболее простой из них.

Алгоритм оценки координат и скоростей по двум измерениям. Блок-схема алгоритма показана на рис. 11.4, а. По измерениям

$$r_i, \alpha_i, \beta_i, \dot{r}_i, \dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \quad (11.5.1)$$

проведенным в моменты ϑ_1 и ϑ_2 , определяют векторы

$$x_i = (x_i, y_i, z_i, v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}), \quad i = 1, 2.$$

Затем решают две краевые задачи:

1) по граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1, & x &= x_1, & y &= y_1, & z &= z_1, \\ \vartheta &= \vartheta_2, & x &= x_2, & y &= y_2, & z &= z_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.5.2)$$

определяют составляющие вектора скорости $v = (v_x, v_y, v_z)$ в момент ϑ_1 или ϑ_2 ;

2) по граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1, & v_x &= v_{x1}, & v_y &= v_{y1}, & v_z &= v_{z1}, \\ \vartheta &= \vartheta_2, & v_x &= v_{x2}, & v_y &= v_{y2}, & v_z &= v_{z2} \end{aligned} \right\} \quad (11.5.3)$$

определяют составляющие вектора положения $r = (x, y, z)$ в момент ϑ_1 или ϑ_2 (эта задача может не иметь однозначного решения).

Поскольку измерения (11.5.1) содержат ошибки, значения $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ и $v_i = (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$ ($i = 1, 2$), полученные в результате решения краевых задач (11.5.2) и (11.5.3), также обладают определенной погрешностью. Рассмотрим связь ошибок измерений координат x_i, y_i, z_i с ошибками расчета скоростей v_{xi}, v_{yi}, v_{zi} при решении краевой задачи (11.5.2), а затем проведем аналогичный анализ связи ошибок измерений скоростей с ошибками расчета координат при решении краевой задачи (11.5.3). В общем случае для произвольного интервала $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ вариации скоростей $\Delta v_{x1}, \Delta v_{y1}, \Delta v_{z1}$ в момент ϑ_1 связаны с вариациями координат $\Delta x_2, \Delta y_2, \Delta z_2$ в момент ϑ_2 соотношением

$$\Delta r_2 = \Psi_{21} \Delta v_1, \quad (11.5.4)$$

где

$$\Delta r_2 = (\Delta x_2, \Delta y_2, \Delta z_2)^T, \quad \Delta v_1 = (\Delta v_{x1}, \Delta v_{y1}, \Delta v_{z1})^T \quad (11.5.5)$$

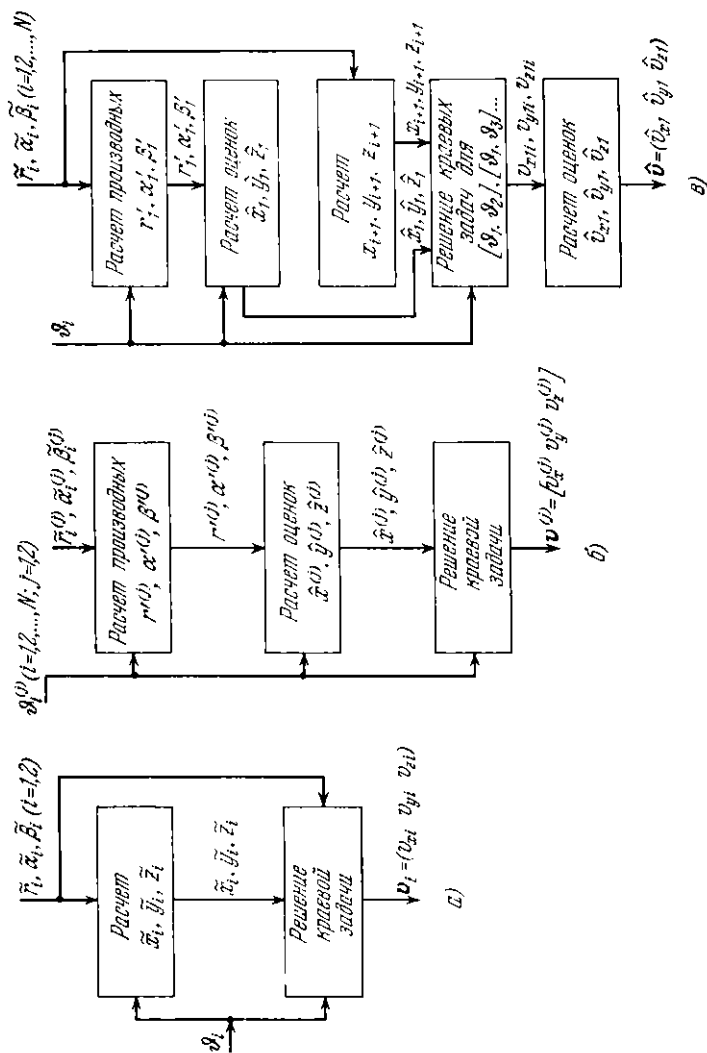


Рис. 11.4.

— векторы-столбцы;

$$\Psi_{21} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial v_{x1}} & \frac{\partial x_2}{\partial v_{y1}} & \frac{\partial x_2}{\partial v_{z1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial v_{x1}} & \frac{\partial y_2}{\partial v_{y1}} & \frac{\partial y_2}{\partial v_{z1}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial v_{x1}} & \frac{\partial z_2}{\partial v_{y1}} & \frac{\partial z_2}{\partial v_{z1}} \end{pmatrix} \quad (11.5.6)$$

— блок переходной матрицы для интервала $[\vartheta_1, \vartheta_2]$, элементы которой в общем случае определяются численными методами с использованием полных уравнений относительного движения аппаратов.

В свою очередь составляющие вектора Δr связаны с ошибками измерений Δr , $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$ параметров r , α , β следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \Delta r \cos \beta \cos \alpha - r (\Delta \beta \sin \beta \cos \alpha + \\ &\quad + \Delta \alpha \cos \beta \sin \alpha), \\ \Delta y &= \Delta r \cos \beta \sin \alpha + r (-\Delta \beta \sin \beta \sin \alpha + \\ &\quad + \Delta \alpha \cos \beta \cos \alpha), \\ \Delta z &= \Delta r \sin \beta + r \Delta \beta \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (11.5.7)$$

Подставив в равенства (11.5.7) значения r_i , α_i , β_i ($i = 1, 2$), получим ошибки Δr_1 и Δr_2 в моменты ϑ_1 и ϑ_2 , определяющие точность задания граничных условий краевой задачи (11.5.2). Поскольку соотношение (11.5.4) учитывает лишь ошибки измерений в момент ϑ_2 , для учета ошибок измерений в момент ϑ_1 его можно модифицировать следующим образом:

$$\Delta r_2 + \Delta r_1 = \Psi_{21} \Delta v_1. \quad (11.5.8)$$

Таким образом, формулы (11.5.4) — (11.5.8) определяют ошибки расчета скорости через ошибки измерений параметров r , α , β , реализованных в двух точках пространства.

Рассмотренный метод позволяет получить достаточно точные оценки скорости при значительных интервалах между измерениями. Это объясняется тем, что с ростом интервала $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ элементы матрицы Ψ_{21} имеют тенденцию к возрастанию, поэтому при ограниченных по величине ошибках Δr_1 и Δr_2 ошибка Δv_1 в соответствии с равенством

(11.5.8) будет уменьшаться. Характерная зависимость ошибки оценки скорости в момент ϑ_1 от интервала измерений $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ для фиксированных значений Δr и $\Delta\alpha$, равных утроенным значениям ошибок системы [20]

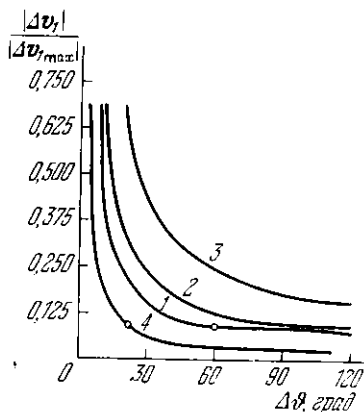


Рис. 11.5.

$$\Delta r_s = 12 \cdot 10^{-3} r,$$

$$\Delta\alpha_s = 12 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \quad (11.5.9)$$

показана на рис. 11.5 (кривая 1). Она отвечает наилучшему из возможных сочетанию ошибок измерений на концах интервала $[\vartheta_1, \vartheta_2]$:

$$\vartheta = \vartheta_1: \Delta r_1 = \Delta r_s,$$

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_s,$$

$$\vartheta = \vartheta_2: \Delta r_2 = -\Delta r_s,$$

$$\Delta\alpha = -\Delta\alpha_s.$$

Кривая 1 получена для случая компланарного движения аппаратов на эллиптической орбите, эксцентриситет которой равен $e = 0,05$. Ошибка Δv_1 приведена к максимальному значению ошибки скорости $\Delta v_{1\max}$, получаемой по единичным измерениям параметров $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ и определяемой приближенным равенством

$$\Delta v_{1\max} \approx r_1 \Delta \dot{\alpha}_s, \quad (11.5.10)$$

где $\Delta \dot{\alpha}_s = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек}$. Использование нормированной ошибки позволяет исключить из рассмотрения такой важный параметр, как расстояние между аппаратами, поскольку числитель и знаменатель дроби $\Delta v_1 / \Delta v_{1\max}$ пропорциональны величине r_1 . При других по сравнению с (11.5.9) ошибках измерений Δr_q и $\Delta\alpha_q$ зависимости, приведенные на рис. 11.5, следует пересчитать пропорциональным образом, умножив их ординаты на коэффициент

$$k_{qs} \approx \frac{\Delta\alpha_q}{\Delta\alpha_s}.$$

Важно отметить, что зависимости $\Delta v_1/\Delta v_{1\max}$ от $\Delta\theta$ сохраняют свой характер в большом диапазоне изменения эксцентриситета опорной орбиты: для значений $e \approx 0,3$ и $e \approx 0,8$ они имеют вид кривых 2 и 3 соответственно (см. рис. 11.5). Приведенные характеристики позволяют сделать вывод, справедливый для широкого класса эллиптических орбит: метод оценки скоростей по измерениям параметров r , α , β в двух точках пространства дает оценки, ошибки которых не превышают $0,1 \Delta v_{\max}$ при интервалах $\Delta\theta$ между измерениями, удовлетворяющих неравенствам

$$\Delta\theta \geq 60^\circ \quad (e \approx 0), \quad \Delta\theta > 180^\circ \quad (e \approx 0,8).$$

Основным достоинством рассмотренного метода является малое число измерений (два), однако точность оценок координат в этом методе соответствует точности единичных измерений, ошибки которых определяются равенствами (11.5.7).

Выше уже отмечалось, что для получения достаточно точной оценки координат нужно решить краевую задачу (11.5.2) с заданными на концах интервала $[\theta_1, \theta_2]$ скоростями $\mathbf{v}_1 = (v_{x1}, v_{y1}, v_{z1})$ и $\mathbf{v}_2 = (v_{x2}, v_{y2}, v_{z2})$. Поскольку эта задача аналогична только что рассмотренной и отличается от нее лишь величинами, заданными на концах интервала измерений, ее подробное рассмотрение здесь не проводится.

Заметим, что недостаток (невысокая точность оценки координат) метода, использующего решение краевой задачи (11.5.2) для получения оценки скорости, не является препятствием для его использования в программах управления сближением, так как влияние ошибок измерения координат на траекторию сближения существенно меньше влияния ошибок оценки скоростей, которые, как было показано выше, могут быть сделаны достаточно малыми.

Модифицированный алгоритм оценки координат и скоростей по измерениям в окрестностях двух точек. Блок-схема алгоритма показана на рис. 11.4, б. Отличие этого алгоритма от предыдущего состоит в том, что он содержит дополнительную процедуру оценки координат в моменты θ_1 и θ_2 на концах интервала измерений. По измерениям $\tilde{r}_n, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n, \tilde{r}_n, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n$ ($n = 1, \dots, N_1$), реализованным в моменты $\theta_{n1} = \theta_1 + n\delta\theta_1$ с шагом $\delta\theta_1$, с помощью соотношений, аналогичных (11.3.1) и (11.3.2), определяются

оценки $\hat{r}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ в момент ϑ_1 , затем с помощью аналогичной процедуры находятся оценки $\hat{r}_2, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2$ в момент ϑ_2 по измерениям, реализованным в моменты $\vartheta_{n2} = \vartheta_2 - n\delta\vartheta_2$ с шагом $\delta\vartheta_2$. После этого решается двухточечная краевая задача, граничные условия которой имеют вид

$$\begin{aligned}\vartheta = \vartheta_1: \hat{x}_1 &= \hat{r}_1 \cos \hat{\alpha}_1 \cos \hat{\beta}_1, & \hat{y}_1 &= \hat{r}_1 \cos \hat{\beta}_1 \sin \hat{\alpha}_1, \\ & & \hat{z}_1 &= \hat{r}_1 \sin \hat{\beta}_1, \\ \vartheta = \vartheta_2: \hat{x}_2 &= \hat{r}_2 \cos \hat{\alpha}_2 \cos \hat{\beta}_2, & \hat{y}_2 &= \hat{r}_2 \cos \hat{\beta}_2 \sin \hat{\alpha}_2, \\ & & \hat{z}_2 &= \hat{r}_2 \sin \hat{\beta}_2,\end{aligned}$$

и в момент ϑ_1 или ϑ_2 определяются скорости v_x, v_y, v_z , которые в дальнейшем считаются оценками скоростей в соответствующий момент времени. Вследствие того, что в отличие от предшествующего в рассматриваемом алгоритме при решении краевой задачи используются оценки координат $\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1$ и $\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2$, а не результаты однократных измерений $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1$ и $\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2$, точность оценок скоростей v_1 или v_2 при одном и том же интервале измерений будет значительно выше. Как следует из равенства (11.5.8), при одинаковых значениях допустимой ошибки скорости Δv_1 этот метод требует значительно меньших интервалов измерений, чем предыдущий. Кроме того, этот метод дает достаточно точные оценки и координат и скоростей. Отметим также, что для оптимальной реализации метода необходимо провести около восьмидесяти измерений: по сорок в окрестности каждой из точек ϑ_1 и ϑ_2 (см. § 11.3).

Зависимость $\Delta v_1/\Delta v_{1\max}$ от $\Delta\vartheta$ для этого метода приведена на рис. 11.5 (кривая 4). Она соответствует случаю компланарного движения аппаратов (эксцентриситет опорной орбиты $e = 0,05$). Ошибки измерений параметров r, α, β считались случайными нормально распределенными величинами, математические ожидания которых равны нулю, а среднеквадратичные отклонения соответствовали ошибкам систем [20], использованным при расчетах кривых 1—3 (см. рис. 11.5), и значениям $\Delta v_{1\max}$: $\sigma_r = 4 \cdot 10^{-3} r$, $\sigma_\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$, $\sigma_\beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек}$.

Сравнение кривых 1 и 4, полученных двумя рассмотренными выше методами оценки для одинаковых значений $e = 0,05$, показывает, что интервал измерений $\Delta\vartheta$, обеспечивающий ошибки оценки скорости, меньшие

$0,1 \Delta \vartheta_{\text{max}}$, при использовании модифицированного метода сокращается примерно в три раза: с 60° до 20° . При этом следует иметь в виду, что обе характеристики получены для наихудшего (маловероятного) из возможных случаев: ошибки измерений и ошибки оценки координат в моменты ϑ_1 и ϑ_2 имеют противоположные знаки.

Таким образом, характеристики, построенные на рис. 11.5, следует считать верхними границами реальных ошибок оценок скоростей. Зависимости ошибок оценок координат $\Delta r(\Delta \vartheta)$ модифицированного алгоритма полностью совпадают с соответствующими характеристиками алгоритма оценки, рассмотренного в § 11.3, и поэтому здесь не приводятся.

Многошаговый алгоритм оценки. Блок-схема алгоритма показана на рис. 11.4, *в*. Сначала по измерениям параметров r_i , α_i , β_i , реализованным в моменты $\vartheta_i = \vartheta_1 + i\delta\vartheta_1$ ($i = 1, \dots, N_1$) с шагом $\delta\vartheta_1$ в окрестности точки ϑ_1 , рассчитываются оценки координат $\hat{x}_1$, $\hat{y}_1$, $\hat{z}_1$ с помощью метода, использованного в предыдущем алгоритме. Затем по результатам измерения координат x_i , y_i , z_i в моменты ϑ_i решаются двухточечные краевые задачи для интервалов $[\vartheta_1, \vartheta_i]$, граничные условия которых имеют вид

$$\vartheta = \vartheta_1: x = \hat{x}_1, y = \hat{y}_1, z = \hat{z}_1,$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + i\delta\vartheta_1: x = x_i, y = y_i, z = z_i, \quad i = 1, \dots, N_1.$$

В итоге получается N_1 совокупностей единичных оценок скоростей $v_{1i} = (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$ в момент ϑ_1 , после осреднения которых определяются оценки средних значений и дисперсий

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} v_{1i}, \quad \hat{\sigma}_{v_1}^2 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sigma_{v_{1i}}^2, \quad (11.5.11)$$

где $\sigma_{v_{1i}}^2$ — дисперсии оценок скоростей v_{1i} по единичным измерениям, расчет которых проводится по формулам приложения 3.

Равенства (11.5.11) справедливы для случаев, когда ошибки измерений не имеют постоянной составляющей и все измерения равноточны. С ростом числа измерений дисперсии оценок уменьшаются пропорционально $1/N_1$, а сами оценки стремятся к истинным значениям скоростей. Точность оценок скоростей может быть повышена за счет

увеличения числа измерений. Точность оценок координат, полученных этим методом, соответствует алгоритму линейной аппроксимации, исследованному в § 11.3.

Этот алгоритм оценки вектора положения r и вектора скорости v объединяет в себе положительные свойства

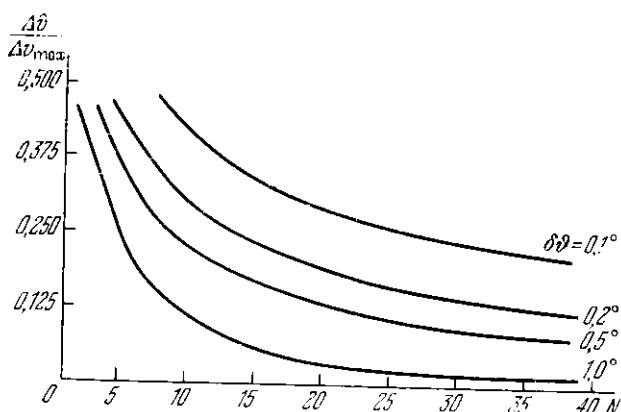


Рис. 11.6.

двух других алгоритмов, рассмотренных в настоящем параграфе: обеспечивает высокую точность оценок r и v . Более того, на этапе расчета оценки v_1 он усиливает положительные качества алгоритма линейной аппроксимации в двух точках, так как решение краевой задачи повторяется многократно. При чисто случайных и знакопеременных ошибках измерений метод обеспечивает монотонную сходимость оценок к истинным значениям величин. При наличии в ошибках постоянной составляющей он дает смещенные оценки координат и несмещенные оценки скоростей.

Следует отметить, что при получении оценок координат интервал и число измерений следует выбирать на основании рекомендаций, приведенных в § 11.3: $\Delta\varphi \approx 12^\circ$, $N_1 \approx 40$. На этапе оценки скорости выбор шага и числа измерений (особенно шага) должен проводиться из соображений достижения быстрой сходимости оценок к истинным значениям оцениваемых величин. Зависимость ошибок оценок скорости от числа измерений N при различных интервалах между измерениями показана на рис. 11.6

[значения $\Delta v_{\max}$ определяются по равенству (11.5.10)]. Эти характеристики справедливы для эллиптических орбит произвольного эксцентриситета. Они позволяют сделать вывод, что близкими к оптимальным параметрам процесса оценки скоростей можно считать следующие: шаг $\delta\theta_1 \approx 0,5^\circ \div 1,0^\circ$, число измерений $N_1 \approx 40$. При шаге $\delta\theta_1 \approx 0,1^\circ \div 0,5^\circ$ скорость сходимости оценок скорости значительно ниже, а число измерений слишком велико.

Следует отметить, что для получения оценки скоростей нет необходимости в предварительном расчете оценки координат x_1, y_1, z_1 в момент θ_1 . В самом деле, рассмотренную выше процедуру получения значений v_{1i} ($i = 1, \dots, N_1$) путем решения краевых задач для интервалов $[\theta_1, \theta_i]$ можно провести, заменив оценки $\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1$ результатами единичных измерений $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1$ в момент $\theta = \theta_1$. Зависимость $\Delta\hat{v}/\Delta v_{\max}$ от N в этом случае практически совпадет с характеристиками, приведенными на рис. 11.5.

Таким образом, для оценки координат и скоростей в общем случае необходимо проводить две серии измерений со следующими значениями шага измерений и числа сеансов: для оценки координат следует принять $\delta\theta_1 \approx 0,1^\circ \div 0,3^\circ$ и $N_1 \approx 40$, для оценки скоростей — $\Delta\theta_1 \approx 1^\circ$ и $N_1 \approx 40$.

Учитывая эти рекомендации, следует осуществлять программу измерений на интервале $[\theta_1, \theta_2]$. При реализации рассмотренного алгоритма в БЦВМ ее загрузка возрастает, поскольку для получения оценки скорости необходимо многократно решать краевые задачи. Это обстоятельство, однако, не является препятствием для его реализации в БЦВМ в силу следующих обстоятельств:

интервалы краевых задач равны $i\delta\theta$ ($i = 1, 2, \dots, N$), где $\delta\theta$ — шаг измерений, поэтому, положив шаг интегрирования уравнений относительного движения равным $\delta\theta$, получим сравнительно небольшое число шагов, необходимое для реализации вычислений (при $i = 1, \dots, 40$);

поскольку интервал движения, соответствующий i -й краевой задаче, увеличивается по сравнению с $(i-1)$ -й на малую величину (равную шагу $\delta\theta$), нетрудно обеспечить сходимость процесса итераций при решении краевой

задачи за один шаг. Для этого достаточно в качестве начального приближения скорости v_{0i}^0 для i -й краевой задачи принять оценку скорости $v_{0(i-1)}^0$, полученную при решении $(i-1)$ -й задачи. Моделирование такой процедуры на ЭВМ полностью подтвердило это положение (для решения краевых задач был использован метод Ньютона).

Таким образом, сравнительно небольшое число шагов интегрирования уравнений относительного движения аппаратов и сходимость итераций за один цикл снимают многие опасения относительно целесообразности использования многошагового алгоритма оценки в БЦВМ.

Для более полного сравнения методов, рассмотренных в этом параграфе, определим число типовых вычислительных операций, необходимых для реализации соответствующих вычислительных алгоритмов в БЦВМ, а также эквивалентное им число элементарных вычислительных операций типа операции сложения, характеризующих требования к быстродействию БЦВМ. При расчетах будем использовать методику и обозначения, изложенные в § 11.3, предполагая, что:

1) в методе оценки по двум измерениям и его модификации шаг интегрирования уравнений относительного движения аппаратов равен $\delta\theta = 2^\circ$, а интервал между измерениями составляет $\theta_2 - \theta_1 = 90^\circ$; в модификации алгоритма оценки по двум измерениям для получения оценок координат реализуются две серии измерений по сорок измерений в каждой;

2) в многошаговом алгоритме процедура оценки скоростей включает решение сорока краевых задач для интервалов $0-1^\circ$, $0-2^\circ$, $0-3^\circ$, ..., $0-40^\circ$; при решении краевых задач шаг интегрирования уравнений относительного движения аппаратов составляет $\delta\theta = 1^\circ$; для получения оценки координат используется процедура, тождественная соответствующей процедуре двух предыдущих методов;

3) число итераций, за которое сходится процесс расчета скорости, принято равным трем в методе оценки по двум измерениям и в методе оценки по измерениям в окрестностях двух точек; в многошаговом алгоритме число итераций при решении краевой задачи на каждом шаге равно единице.

Таблица 11.3

Алгоритм оценки	Число типовых операций					N^{Σ}
	$N(+)$	$N(\times)$	$N(:)$	$N(\sqrt{})$	$N(\text{trig})$	
По двум измерениям	37 477	49 182	7074	1170	2348	866 168
По измерениям в окрестности двух точек	37 806	49 445	7156	1170	2352	869 192
Многошаговый	53 212	71 862	10 601	3444	1640	1 471 497

Результаты расчетов сведены в табл. 11.3. Они показывают близость рассмотренных методов по числу основных вычислительных операций, а следовательно, и по быстродействию. Следует, однако, иметь в виду, что расчет числа типовых операций первых двух алгоритмов оценки проводился при интервале измерений $\Delta\theta = 90^\circ$, при других интервалах полученные значения должны быть пересчитаны пропорциональным образом: например, при $\Delta\theta = 15^\circ$ значения $N(+)$, ..., $N(\text{trig})$ должны быть умножены на коэффициент $15/90$. Таким образом, эти алгоритмы обладают близкими к многошаговому алгоритму вычислительными характеристиками лишь при больших интервалах между измерениями ($\Delta\theta \geq 90^\circ$) и будут значительно эффективней его при малых интервалах между измерениями. Поскольку точность оценок скоростей по двум измерениям координат при малых интервалах между измерениями невысока, указанное выше обстоятельство не имеет существенного практического значения.

В заключение рассмотрения итерационных методов следует еще раз подчеркнуть, что для правильной и полной оценки их возможностей следует постоянно иметь в виду степень влияния характера ошибок на точность получаемых оценок. Частично эти вопросы уже были обсуждены в соответствующих параграфах. В частности, было показано, что при случайных и знакопеременных ошибках многошаговый алгоритм обеспечивает высокую точность оценок координат и монотонную сходимость

оценок скоростей к их истинным значениям. При наличии систематических ошибок их влияние на точность оценок может быть определено с использованием метода суперпозиции. Если ошибки измерений имеют более сложную структуру и включают постоянную составляющую, медленно меняющуюся составляющую и случайную составляющую, то наибольшую точность оценок могут обеспечить итерационные методы, использующие измерения r и $\dot{r}$ в трех или шести точках, достаточно близких друг к другу. При сложной структуре ошибок измерений наиболее достоверные и точные оценки могут быть получены только в результате численного моделирования задачи с использованием методов Монте-Карло [25, 75, 108].

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

§ 12.1. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПОЛНОМ СОСТАВЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Ниже рассмотрены способы оценки параметров движения космических аппаратов, использующие статистические методы обработки избыточной информации, получаемой автономными измерительными средствами. Основное внимание уделено различным модификациям метода наименьших квадратов, используемого как для оценки координат и скоростей движения сближаемых аппаратов, так и для оценок констант интегрирования соответствующих уравнений.

Почти все рассмотренные здесь методы используют аналитические решения приближенных уравнений относительного движения или аналитические формулы теории кеплерова движения. Исключение составляет способ оценки, использующий условно линейную модель движения аппаратов, получаемую путем численного решения уравнений движения. Этот способ излагается здесь потому, что он является наиболее простой и рациональной модификацией метода наименьших квадратов для оценки координат и скоростей и логически тесно связан с материалом всей главы в целом.

Наряду с методами оценки, использующими различные формы уравнений движения аппаратов, рассмотрен также способ полиномиальной аппроксимации измеряемых параметров и его применение для оценки и прогнозирования движения.

В противоположность распространенному мнению [1] о том, что полиномиальную аппроксимацию параметров движения целесообразно использовать лишь в случае полиномов малых степеней (до третьей включительно), доказывается простота его реализации в ЭВМ при степенях полиномов до шестой включительно. Этот вывод основывается на анализе типовых вычислительных опе-

раций, необходимых для реализации соответствующего алгоритма.

Рассмотрим метод получения оценки координат и скоростей относительного движения сближаемых аппаратов в фиксированный момент времени по измерениям параметров $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ (дальности, углов наклона вектора дальности относительно фиксированных направлений и их производных). Измерения реализуются в моменты времени

$$t_n = t_0 + n\Delta t \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Обозначим вектор состояния системы через

$$x = (x, y, x', y', z, z')^T. \quad (12.1.1)$$

Тогда в случае круговых опорных орбит решение уравнений относительного движения двух аппаратов может быть записано в виде

$$x_n = \Psi_{n0}^x x_0, \quad (12.1.2)$$

где x_n, x_0 — векторы состояния системы (12.1.1) для моментов t_n и t_0 соответственно; Ψ_{n0}^x — переходная матрица размера 6×6 для интервала $[t_0, t_n]$:

$$\Psi_{n0}^x = \begin{pmatrix} 1 & 6(\theta_n - \sin \theta_n) & 4 \sin \theta_n - 3\theta_n & 2(1 - \cos \theta_n) & 0 & 0 \\ 0 & 4 - 3 \cos \theta_n & 2(\cos \theta_n - 1) & \sin \theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 6(1 - \cos \theta_n) & 4 \cos \theta_n - 3 & 2 \sin \theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 3 \sin \theta_n & -2 \sin \theta_n & \cos \theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_n & 0 & 0 & \sin \theta_n \\ 0 & 0 & -\sin \theta_n & 0 & 0 & \cos \theta_n \end{pmatrix}. \quad (12.1.3)$$

Здесь угол θ определяется по формуле

$$\theta = \left(\frac{\mu}{R_0^3} \right)^{1/3} t, \quad (12.1.4)$$

где R_0 — радиус опорной орбиты.

Поскольку измерения $\tilde{r}_n, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n, \tilde{\dot{r}}_n, \tilde{\dot{\alpha}}_n, \tilde{\dot{\beta}}_n$ однозначно определяют вектор $\tilde{x}_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$), из равенства (12.1.2) можно получить следующее соотношение для

оценки вектора x_0 :

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\Psi_{n0}^x)^{-1} \tilde{x}_n. \quad (12.1.5)$$

Если измерения равноточны, а ошибки измерений — случайные величины с равными нулю математическими ожиданиями и известными дисперсиями, то дисперсия оценки (12.1.5) может быть определена равенством

$$D_{x_0}^{(N)} = \frac{1}{N} D_{x_0}, \quad (12.1.6)$$

где D_{x_0} — дисперсия единичной оценки вектора x_0 , определяемая по формулам, приведенным в приложении 3.

В формулах (12.1.3)—(12.1.6) используются безразмерные величины координат и скоростей относительного движения аппаратов — составляющие вектора x .

Основное достоинство рассматриваемого метода состоит в чрезвычайной простоте рабочих формул для расчета средних значений и дисперсий, однако его точность существенно зависит от интервала измерений и начальных условий маневра $(r_0, \alpha_0, \beta_0, \dot{r}_0, \dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0)$.

С учетом того, что собственные (методические) погрешности формул (12.1.2) и (12.1.3) быстро возрастают с увеличением интервала движения, этот метод следует применять лишь в том случае, когда интервал измерений $[\theta_0, \theta_N]$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta\theta = (\theta_N - \theta_0) \leq 10^\circ \div 20^\circ,$$

если расстояние r_0 между аппаратами не превышает $0,1R_0$, и

$$\Delta\theta \leq 20^\circ \div 40^\circ,$$

если $r_0 \leq 0,02 R_0$. В этих случаях эксцентриситет опорной орбиты не должен превышать величины $e = 0,02$.

Приведенные рекомендации, полученные на основании анализа большой совокупности численных расчетов, указывают на сравнительно узкую область применения рассматриваемого метода, что существенно снижает его практическую ценность.

Другим, более точным и универсальным, методом оценки параметров движения является *метод осреднения*,

использующий решение линеаризованных уравнений относительного движения, записанное через константы интегрирования $k_1, \dots, k_6$ (см. гл. 5):

$$x = A_n^k k, \quad (12.1.7)$$

где $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$ — вектор констант; A_n^k — матрица размера 6×6 :

$$A_n^k = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & b_9 & 0 & b_{10} & b_{11} & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & b_{13} & b_{14} & 0 \\ 0 & 0 & b_7 & 0 & 0 & b_8 \\ 0 & 0 & -b_8 & 0 & 0 & b_7 \end{pmatrix}, \quad (12.1.8)$$

элементы $b_1, \dots, b_{14}$ которой определяются равенствами (11.4.8). Из-за однозначной связи векторов k и x_0 задачи получения оценок $\hat{k}$ и $\hat{x}_0$ равнозначны, поэтому в дальнейшем будет говориться лишь об оценке вектора k .

В силу полной аналогии равенств (12.1.7) и (12.1.2) оценку вектора k и его дисперсии можно записать в виде

$$\hat{k} = \frac{1}{N} \sum (A_n^k)^{-1} \tilde{x}_n, \quad (12.1.9)$$

$$\hat{D}_k = \frac{1}{N} D_{k0}. \quad (12.1.10)$$

В равенстве (12.1.10) через D_{k0} обозначена дисперсия единичного измерения вектора k в момент $\theta = \theta_0$ ($t = t_0$), которая определяется следующим образом. Сначала по формулам приложения 3 рассчитывают D_{x0} — дисперсию вектора x_0 — через дисперсии измерений $r, \dot{r}, \dots, \beta$, затем по формулам § 5.3, определяющим линейную связь x_0 с k , осуществляется переход от D_{x0} к D_{k0} .

Поскольку формулы (12.1.7) и (12.1.8), положенные в основу рассматриваемого метода, имеют более широкий, чем формулы (12.1.2) и (12.1.3), диапазон применения как по параметрам орбит (p, e), так и по начальным условиям маневра ($r_0, \alpha_0, \beta_0, \dot{r}_0, \dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$), точность оценок (12.1.9) и (12.1.10) при всех прочих равных условиях должна быть выше точности оценок (12.1.5) и (12.1.6). Принципиально формулы (12.1.7) и (12.1.8) не налагают каких-либо ограничений на эксцентриситет опорной ор-

Приведенная методика исходила из линейной функциональной зависимости $\tilde{u}(x)$, поэтому она может быть реализована непосредственно с использованием решений линеаризованных уравнений относительного движения, а также других форм решений, линейных относительно оцениваемых параметров. Следует отметить, что метод наименьших квадратов может быть распространен и на случай нелинейной зависимости $\tilde{u}(x)$ с помощью ряда способов, которые будут изложены в следующем параграфе.

Рассмотрим методику получения МНК-оценок параметров движения космических аппаратов для наиболее простых моделей относительного движения.

Линейная аппроксимация в одной точке. Используя уравнения относительного движения, аргументом которых является истинная аномалия ϑ цели (см. § 5.3), запишем их решение по Эйлеру в виде

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \delta\vartheta \lambda_n^{-2} v_{xn}, \\ y_{n+1} &= y_n + \delta\vartheta \lambda_n^{-2} v_{yn}, \\ z_{n+1} &= z_n + \delta\vartheta \lambda_n^{-2} v_{zn}, \end{aligned} \right\} \quad (12.2.3)$$

где

$$\lambda_n = 1 + e \cos \vartheta_n; \quad \delta\vartheta - \text{шаг решения; } \vartheta_n = \vartheta_0 + \delta\vartheta n \quad (n = 0, 1, \dots, N).$$

Формулам (12.2.3) можно сопоставить векторную форму записи

$$x_{n+1}^{(3)} = x_n^{(3)} + \delta\vartheta \lambda_n^{-2} v_n^{(3)}, \quad (12.2.4)$$

где

$$x_n^{(3)} = (x_n, y_n, z_n)^T; \quad v_n^{(3)} = (v_{xn}, v_{yn}, v_{zn})^T.$$

Предположив, что на интервале $n\delta\vartheta$ ($n = 1, 2, \dots, N$) движение аппаратов равномерно, перепишем формулу (12.2.4) в виде

$$x_n^{(3)} = x_0^{(3)} + n\delta\vartheta \lambda_n^{-2} v_0^{(3)}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (12.2.5)$$

Это соотношение линейно относительно составляющих вектора $x = (x^{(3)}, v^{(3)})$ в момент $\vartheta = \vartheta_0$. Измерения $\tilde{r}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, реализованные автономной системой в моменты $\vartheta_n = \vartheta_0 + n\delta\vartheta$ ($n = 1, 2, \dots, N$), определяют составляющие

вектора $x_n^{(3)}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_n &= \tilde{r}_n \cos \tilde{\beta}_n \cos \tilde{\alpha}_n, \\ \hat{y}_n &= \tilde{r}_n \cos \tilde{\beta}_n \sin \tilde{\alpha}_n, \\ \hat{z}_n &= \tilde{r}_n \sin \tilde{\beta}_n, \end{aligned} \right\} \quad (12.2.6)$$

поэтому для получения МНК-оценок координат и скоростей в момент $\vartheta = \vartheta_0$ можно записать следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 [c_n] + \dot{v}_{x0} [c_n^2] &= [c_n \tilde{r}_n], \\ \dot{x}_0 N + \dot{v}_{x0} [c_n] &= [\tilde{r}_n]. \end{aligned} \right\} \quad (12.2.7)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} c_n &= n \delta \vartheta \lambda_n^{-2}, \quad [c_n^2] = \sum_{n=1}^N c_n^2, \quad [c_n \tilde{r}_n] = \sum_{n=1}^N c_n \tilde{r}_n; \\ [\tilde{r}_n] &= \sum_{n=1}^N \tilde{r}_n, \quad [c_n] = \sum_{n=1}^N c_n, \quad \lambda_n = 1 + e \cos \vartheta_n. \end{aligned} \right\} \quad (12.2.8)$$

Уравнения для расчета оценок $\hat{y}_0$, $\hat{v}_{y0}$ и $\hat{z}_0$, $\hat{v}_{z0}$ аналогичны (12.2.7) и здесь не приводятся. Таким образом, формулы (12.2.6)–(12.2.8) дают МНК-оценки координат и скоростей относительного движения аппаратов по измерениям дальности r , угла β наклона вектора r относительно плоскости опорной орбиты и угла α наклона проекции вектора r на плоскость опорной орбиты относительно местной горизонтали.

Важно заметить, что методические погрешности формул (12.2.3), положенных в основу метода, возрастают с увеличением числа измерений N . Одновременно с увеличением N уменьшается дисперсия оценок, определяемых формулами (12.2.7) и (12.2.8), поэтому зависимости ошибок оценок $\Delta \hat{x}_0$, $\Delta \hat{v}_{x0}$, а также $\Delta \hat{y}_0$, $\Delta \hat{v}_{y0}$, $\Delta \hat{z}_0$, $\Delta \hat{v}_{z0}$ от числа измерений имеют вид кривых с явно выраженным минимумом. Зависимости модулей ошибок вектора положения $\Delta r_0 = (\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2 + \Delta z_0^2)^{1/2}$ и вектора скорости $\Delta v_0 = (\Delta v_{x0}^2 + \Delta v_{y0}^2 + \Delta v_{z0}^2)^{1/2}$ от числа измерений имеют аналогичный вид.

Несмотря на то, что линейная аппроксимация относительного движения аппаратов в окрестности точки $\vartheta = \vartheta_0$ представляет наименее точную модель движения,

ее использование для получения оценок координат и скоростей при движении космических аппаратов по эллиптическим орбитам произвольного эксцентриситета дает в ряде случаев приемлемые по точности оценки. Для иллюстрации этого положения приведем численный пример расчета оценок координат и скоростей космического аппарата по измерениям r и α , реализуемым автономной радиотехнической системой, характеристики которой следующие (см. приложение 2):

$$M[\Delta r] = M[\Delta \alpha] = 0, \quad \sigma_{\Delta r} = 4 \cdot 10^{-3} r,$$

$$\sigma_{\Delta \alpha} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Закон распределения ошибок считается нормальным. Рассматривается случай компланарного движения двух аппаратов, находящихся на одной орбите (фокальный параметр $p = 7000$ км, эксцентриситет $e = 0,8$) и смещенных вдоль нее относительно друг друга соответственно на расстояния $r_0 = 100$ км, $r_0 = 50$ км и $r_0 = 10$ км в момент начала измерений ($\vartheta_0 = 0$). Для расчета оценок вектора положения $\hat{r}_0$ и вектора скорости $\hat{v}_0$ используются формулы (12.2.7) и (12.2.8). Измерения $\tilde{r}$ и $\tilde{\alpha}$ проводятся равномерно с шагом $\delta\theta = 0,1^\circ$, или, что то же самое, с интервалом $\Delta t \approx 1,5$ сек.

Зависимости ошибок оценок модуля вектора r_0 и модуля вектора v_0 от числа измерений N приведены в табл. 12.1. Из нее видно, что оптимальное число измерений, соответствующее минимальным ошибкам оценок, равно $N_{\text{опт}} \approx 50$. Из таблицы следует также, что минимальные ошибки оценки вектора положения составляют незначительную величину (~ 20 м), в то время как минимальные ошибки оценки скорости не могут быть сделаны ниже 2 м/сек даже при относительно малых расстояниях между аппаратами. Эти выводы остаются справедливыми для широкого класса начальных условий движения аппаратов (r_0, α_0) и параметров орбит (p, e), и, в частности, для орбит, близких к круговым, если только $v_0 \leq 50$ м/сек. Отмеченный выше недостаток — наличие остаточной погрешности в оценке скорости — представляет собой основной отрицательный фактор рассмотренного метода, самое большое достоинство которого состоит в чрезвычайной простоте рабочих формул.

Таблица 12.1

$r_0, \text{ км}$	N	10	20	30	40	50	60	70
100	$\Delta \hat{r}_0, \text{ м}$	351	151	130	108	24	107	202
	$\Delta \hat{v}_0, \text{ м/сек}$	26,6	8,1	6,7	4,5	3	5,2	8,6
50	$\Delta \hat{r}_0, \text{ м}$	179	80	75	69	24	76	164
	$\Delta \hat{v}_0, \text{ м/сек}$	14	5	4,8	3,9	2,1	4,6	7,6
10	$\Delta \hat{r}_0, \text{ м}$	41	39	24	19	32	63	133
	$\Delta \hat{v}_0, \text{ м/сек}$	4	3,6	2,7	2,4	3,2	4,7	7,1

Метод линеаризации в одной точке использует наиболее простую из всех возможных моделей относительного движения аппаратов, поэтому точность его оценок ограничена определенными пределами, которые зависят от начальных условий задачи, длительности интервала измерений и ряда других факторов. Приведем другой метод, дающий более точные оценки за счет использования полной модели движения.

§ 12.3. МЕТОД ОЦЕНКИ, ОСНОВАННЫЙ НА УСЛОВНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Этот метод основан на представлении решений полных уравнений относительного движения в виде линейного соотношения

$$\mathbf{x}_n^{(3)} = \mathbf{x}_0^{(3)} + \mathbf{c}_n \mathbf{v}_0^{(3)}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (12.3.1)$$

где

$$\mathbf{x}_n^{(3)} = (x_n, y_n, z_n)^T, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = (x_0, y_0, z_0)^T, \quad \mathbf{v}_0^{(3)} = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})^T,$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} c_{xn} & 0 & 0 \\ 0 & c_{yn} & 0 \\ 0 & 0 & c_{zn} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (12.3.2)$$

Коэффициенты c_{xn} , c_{yn} , c_{zn} матрицы (12.3.2) определяются равенствами

$$c_{xn} = \frac{x_n^0 - x_0^0}{t_{x0}^0}, \quad c_{yn} = \frac{y_n^0 - y_0^0}{t_{y0}^0}, \quad c_{zn} = \frac{z_n^0 - z_0^0}{t_{z0}^0}, \quad (12.3.3)$$

где через x_n^0 , y_n^0 , z_n^0 ($n = 1, 2, \dots, N$) обозначены результаты численного решения уравнений относительного движения методом Рунге—Кутты при произвольно выбранном начальном условии

$$x_0^0 = (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0).$$

Векторному равенству (12.3.1) соответствуют три соотношения

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_0 + c_{xn} v_{x0}, \\ y_n &= y_0 + c_{yn} v_{y0}, \\ z_n &= z_0 + c_{zn} v_{z0}, \\ n &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (12.3.4)$$

используя которые нетрудно записать уравнения для расчета МНК-оценок $\hat{x}_0$, $\hat{y}_0$, $\hat{z}_0$, $\hat{v}_{x0}$, $\hat{v}_{y0}$, $\hat{v}_{z0}$ по измерениям $\tilde{r}_n$, $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, определяющим координаты $\tilde{x}_n$, $\tilde{y}_n$, $\tilde{z}_n$ в моменты $\vartheta_n = \vartheta_0 + n\delta\vartheta$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_0 [c_{xn}] + \hat{v}_{x0} [c_{xn}^2] &= [c_{xn} \tilde{r}_n], \\ N \hat{x}_0 + \hat{v}_{x0} [c_{xn}] &= [\tilde{r}_n]; \end{aligned} \right\} \quad (12.3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}_0 [c_{yn}] + \hat{v}_{y0} [c_{yn}^2] &= [c_{yn} \tilde{y}_n], \\ N \hat{y}_0 + \hat{v}_{y0} [c_{yn}] &= [\tilde{y}_n]; \end{aligned} \right\} \quad (12.3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{z}_0 [c_{zn}] + \hat{v}_{z0} [c_{zn}^2] &= [c_{zn} \tilde{z}_n], \\ N \hat{z}_0 + \hat{v}_{z0} [c_{zn}] &= [\tilde{z}_n]. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.7)$$

В уравнениях (12.3.5)–(12.3.7) квадратные скобки обозначают операцию суммирования:

$$\begin{aligned} [c_{xn}] &= \sum_{n=1}^N c_{xn}, \\ [c_{xn} \tilde{r}_n] &= \sum_{n=1}^N c_{xn} \tilde{r}_n \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Модель (12.3.4) относительного движения аппаратов обладает методической погрешностью, а ее точность зависит от точности задания вектора x_0^0 и интервала движения $\Delta\theta = \theta_N - \theta_0$. Эти же факторы определяют и методические погрешности расчетных формул (12.3.5)—(12.3.7).

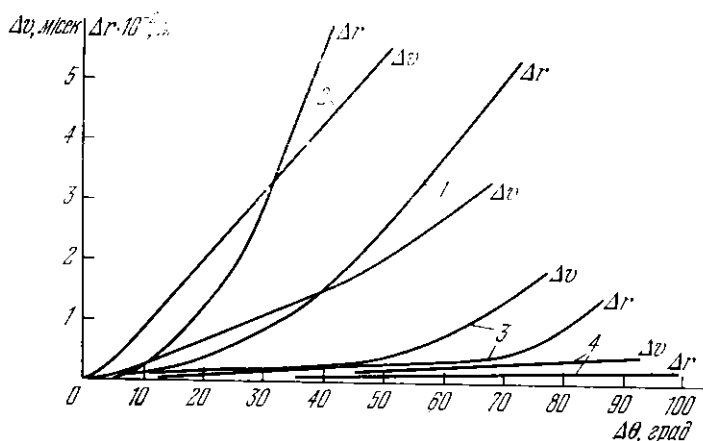


Рис. 12.1.

Характерные зависимости методических ошибок формул (12.3.5)—(12.3.7) от интервала движения при различных значениях ошибок Δr_0^0 и Δv_0^0 задания вектора $x_0^0 = (r_0^0, v_0^0)$ приведены на рис. 12.1 (кривые 1 соответствуют значениям $\Delta v_0^0 = 5$ м/сек, $\Delta r_0^0 = 0$; кривые 2 — $\Delta v_0^0 = 30$ м/сек, $\Delta r_0^0 = 0$; кривые 3 — $\Delta v_0^0 = 3$ м/сек, $\Delta r_0^0 = 0$; кривые 4 — $\Delta v_0^0 = 0$, $\Delta r_0^0 = 1$ км). Они наглядно показывают основные достоинства рассматриваемой модели движения и всего метода в целом: сравнительно слабая зависимость методических ошибок от точности задания вектора положения (Δr_0^0); низкий уровень ошибок в широком диапазоне изменений интервала движения; относительно невысокий уровень методических ошибок при значительных ошибках задания вектора скорости (Δv_0^0). К этому следует добавить, что в силу независимости расчетов оценок координат и скоростей вдоль каждой из осей x, y, z [см. формулы

(12.3.5)–(12.3.7)] взаимное влияние ошибок измерений координат Δx , Δy , Δz практически отсутствует.

Характеристики, приведенные на рис. 12.1, а также анализ большой совокупности аналогичных зависимостей показывают, что для получения достаточно точных оценок координат и скоростей ($\Delta r_0 \approx 100 \div 200$ м, $\Delta v_0 \approx \approx 1$ м/сек) в широком диапазоне изменений интервала движения аппаратов необходимо обеспечить следующую точность задания векторов r_0^0 и v_0^0 , вводимых в процедуру численного интегрирования уравнений относительного движения:

$$\Delta r_0^0 < 1 \text{ км}, \quad \Delta v_0^0 < 3 \div 5 \text{ м/сек.}$$

Эта точность может быть обеспечена каким-либо методом оценки, рассмотренным ранее, например методом линеаризации в одной точке. Этот метод следует включить в общий алгоритм оценки в качестве подпрограммы получения начальных приближений r_0^0 и v_0^0 . С учетом сделанных замечаний сформулируем алгоритм оценки вектора $x_0 = (x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ по измерениям $\tilde{r}$, $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, использующий модель движения, рассмотренную выше.

Алгоритм.

Шаг 0. По измерениям r_n , $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, реализованным в моменты $\theta_n = \theta_0 + n\delta\theta$ ($n = 1, 2, \dots, 50$), определить координаты

$$\tilde{x}_n = \tilde{r}_n \cos \tilde{\beta}_n \cos \tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{y}_n = \tilde{r}_n \cos \tilde{\beta}_n \sin \tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{z}_n = \tilde{r}_n \sin \tilde{\beta}_n.$$

Шаг 1. Используя значения $\tilde{r}_n$, $\tilde{y}_n$ и $\tilde{z}_n$, определенные шагом 0, вычислить оценки координат и скоростей по формулам (12.2.7) и им аналогичным.

Шаг 2. Интегрировать уравнения относительного движения аппаратов на интервале $[\theta_0, \theta_N]$ при начальных условиях $x_0 = \hat{x}_0$, $y_0 = \hat{y}_0, \dots, v_{z0} = \hat{v}_{z0}$, определенных на предыдущем шаге, найти координаты x_n^0 , y_n^0 и z_n^0 в моменты θ_n и вычислить коэффициенты c_{xn} , c_{yn} , c_{zn} по формулам (12.3.3), заменив в них x_0^0 , $y_0^0, \dots, v_{z0}^0$ на $\hat{x}_0$, $\hat{y}_0, \dots, \hat{v}_{z0}$.

Шаг 3. По измерениям $\tilde{r}_n$, $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, реализованным в моменты $\theta_n = \theta_0 + n\delta\theta$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$), определить координаты $\tilde{x}_n$, $\tilde{y}_n$, $\tilde{z}_n$ по формулам, приведенным в шаге 0,

а затем вычислить оценки координат и скоростей $\hat{x}_0, \hat{y}_0, \dots, \hat{v}_{z0}$ в момент $\hat{\phi}_0$ по формулам (12.3.5)–(12.3.7).

Сделаем одно дополнение к приведенному алгоритму. Результаты измерений координат $\tilde{x}_n, \tilde{y}_n$ и $\tilde{z}_n$ используются дважды: на шаге 1 — выборка из $N_1 = 50$ измерений, на шаге 3 — выборка из N измерений. Рекомендации по выбору числа N будут сделаны ниже, после рассмотрения результатов расчета оценок изложенным методом на ЭВМ. Выбор числа $N_1 = 50$ сделан с учетом характеристик метода линейной аппроксимации в одной точке (см. § 12.2 и 11.3), который, как было показано, обеспечивает наибольшую точность оценок при использовании выборки из пятидесяти измерений при интервале между измерениями $\delta\theta = 0,1^\circ \div 0,3^\circ$.

Приведем результаты моделирования на ЭВМ рассмотренного алгоритма оценки при произвольном задании начальных приближений координат и скоростей $x_0^0, y_0^0, \dots, v_{z0}^0$.

Измерения параметров r, α и β реализуются автономной радиотехнической системой, характеристики которой приведены в приложении 2; ошибки измерений считаются случайными нормально распределенными величинами с равными нулю математическими ожиданиями и среднеквадратичными отклонениями

$$\sigma_{\Delta r} = 4 \cdot 10^{-3} r, \quad \sigma_{\Delta \alpha} = \sigma_{\Delta \beta} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

В момент начала измерений один аппарат (цель) находится в перигентре своей орбиты, второй смещен относительно него на расстояние 200 км вдоль орбиты цели, которая характеризуется следующими величинами: фокальный параметр p равен удвоенному радиусу планеты, эксцентриситет $e = 0,8$.

Зависимости ошибок оценок $\Delta \hat{r}_0$ и $\Delta \hat{v}_0$ от числа измерений при постоянном шаге измерений $\delta\theta = 0,1^\circ$ приведены на рис. 12.2. Они получены для различных значений ошибки начального приближения вектора v_0^0 ($\Delta v_0^0 = 10 \text{ м/сек}, 30 \text{ м/сек}, 60 \text{ м/сек}$: кривые 1, 2 и 3 соответственно), которые охватывают практически весь диапазон возможного разброса величины скорости на этапе выведения управляемого аппарата на орбиту цели.

Характеристики показывают, что даже в случае использования в расчетных формулах грубого прибли-

жения ($\Delta v_0^0 = 60$ м/сек) вектора v_0^0 ошибки оценки скорости — наиболее важной составляющей вектора $x_0 = (r_0, v_0)$ — более чем на порядок ниже ошибок начального приближения Δv_0 . Важным свойством алгоритма является стабильность точности оценок в широком диапазоне интервала измерений, что коренным образом отличает его от других рассмотренных в этой главе методов,

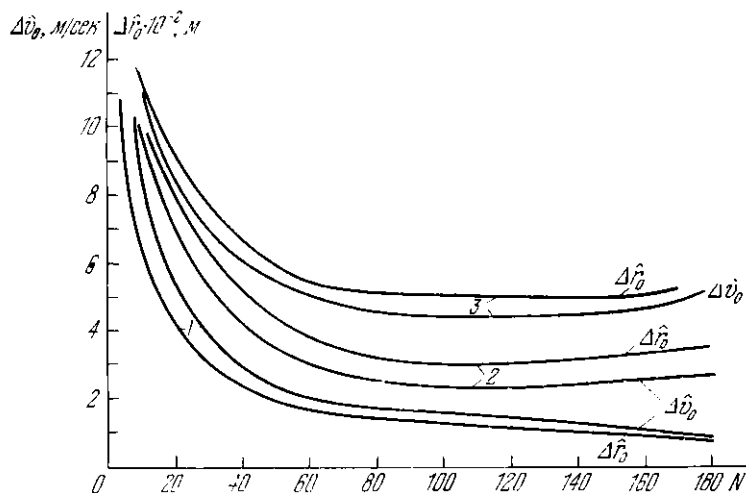


Рис. 12.2.

ошибки оценок которых $\Delta \hat{r}(N)$ и $\Delta \hat{v}(N)$ имеют явно выраженный минимум при некотором вполне определенном значении числа измерений $N_{\text{опт}}$, что является в ряде случаев существенным ограничивающим фактором. Зависимости $\Delta \hat{r}(N)$ и $\Delta \hat{v}(N)$, полученные для тех же начальных условий маневра, но при других значениях эксцентриситета опорной орбиты ($e = 0$ и $e = 0,3$), показывают, как и следовало ожидать, слабую зависимость ошибок оценок от этого параметра, поэтому сделанные выше замечания можно отнести к эллиптическим орбитам произвольного эксцентриситета.

Для распространения полученных характеристик на случаи других значений ошибок измерений Δr_j , $\Delta \alpha_j$, $\Delta \beta_j$ масштаб этих характеристик по осям $\Delta \hat{r}$ и $\Delta \hat{v}$ следует

изменить пропорционально коэффициенту

$$k_{\alpha, \beta} = \frac{\Delta \alpha_j}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{\Delta \beta_j}{4 \cdot 10^{-3}},$$

равному отношению ошибки измерений углов α_j или β_j к величине $\Delta \alpha = \Delta \beta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$, использованной при расчете характеристик, построенных на рис. 12.2. Такой метод пересчета справедлив в предположении, что $\Delta \alpha_j = \Delta \beta_j$ и ошибки Δr_j имеют относительно небольшое влияние на точность оценок по сравнению с ошибками $\Delta \alpha_j$ и $\Delta \beta_j$ и поэтому могут во внимание не приниматься. Для пересчета полученных результатов на случаи различных значений расстояния r_0 между аппаратами также может быть применена линейная экстраполяция с коэффициентом

$$k_r = \frac{r_0}{200},$$

где r_0 берется в километрах.

Используя пропорциональную экстраполяцию, следует иметь в виду, что характеристики, приведенные на рис. 12.2, получены для значений скорости v_0 , не превышающих 60 м/сек , поэтому экстраполяция этих результатов даст высокую для практических расчетов точность только при скоростях относительного движения $v_0 \ll 60 \text{ м/сек}$.

Отметив ряд общих и наиболее важных свойств характеристик, приведенных на рис. 12.2, можно сформулировать некоторые требования к интервалу и числу измерений алгоритма оценки. Выше уже отмечалось, что шаг 0 требует реализации $N_1 = 50$ измерений с шагом $\delta \theta = 0,1^\circ$. Минимально возможная величина интервала Δt выдачи информации может иметь порядок нескольких секунд, ей соответствует угловая величина шага $\delta \theta \approx 0,1^\circ$. Таким образом, интервал измерений, реализуемых на шаге 0, составляет 5° . Шаг 3 алгоритма оценки требует реализации такого числа измерений, при котором ошибки оценок минимальны и мало изменяются с ростом N . Из графиков $\Delta \hat{r}_0(N)$ и $\Delta \hat{v}_0(N)$ (см. рис. 12.2) видно, что независимо от точности задания величины v_0^0 ошибки оценок стабилизируются при $N \gtrsim 100$, поэтому в шаге 3 алгоритма оценки следует принять $N = 100$. Поскольку

$N > N_1$, общий интервал измерений будет равен $\Delta\theta_N = N\delta\theta = 10^\circ$. Эта величина получена в предположении, что шаг измерений равен минимально возможному значению ($\delta\theta = 0,1^\circ$), поэтому $\Delta\theta = 10^\circ$ следует считать

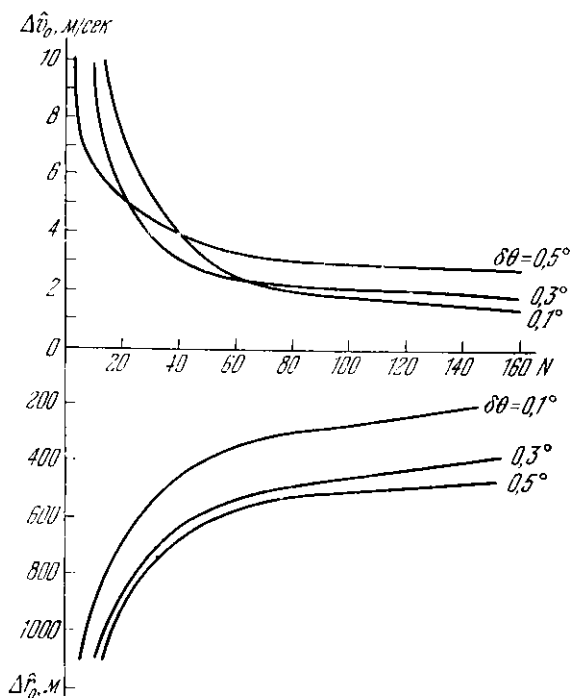


Рис. 12.3.

нижней границей возможного на практике интервала измерений.

Для определения верхней границы целесообразного интервала измерений определим (рис. 12.3) зависимость ошибок оценок координат и скоростей от числа и шага измерений для начальных условий маневра и параметров орбит, для которых были получены характеристики $\Delta\hat{r}_0(N)$, $\Delta\hat{v}_0(N)$ (см. рис. 12.2). Из рассмотрения рис. 12.3 можно сделать два вывода: 1) увеличение шага $\delta\theta$ существенно снижает ошибки оценки скорости при малом числе

измерений ($N \leq 60$) и сравнительно мало влияет на точность оценки скорости при $N > 100$; 2) увеличение шага с $0,1^\circ$ до $0,3^\circ \div 0,5^\circ$ приводит к увеличению ошибок оценки координат примерно на 200 м практически при любых значениях N рассмотренного диапазона. Таким образом, для получения достаточно точных оценок скоростей при малом числе измерений следует проводить измерения параметров r , α , β с шагом, определяемым приближенным неравенством

$$0,1^\circ \leq \delta\theta \leq 0,3^\circ,$$

в то время как для оценки координат величину $\delta\theta$ следует брать возможно меньшей.

С учетом этого вывода можно записать максимальную величину общего интервала измерений $\Delta\theta$ (приняв $N = 180$), обеспечивающего достаточно точные оценки координат и скоростей, в виде приближенных неравенств

$$18^\circ \leq \Delta\theta \leq 54^\circ.$$

Аналогичные рекомендации можно дать и для эллиптических орбит малого эксцентриситета.

Чтобы полнее охарактеризовать рассматриваемый метод оценки, проведем анализ типовых вычислительных операций, необходимых для реализации алгоритма в БЦВМ. Расчетная процедура алгоритма оценки, соответствующая одному шагу измерений, характеризуется следующими значениями вычислительных операций:

$$N(+)=67, \quad N(\times)=108, \quad N(:)=21, \quad N(\sqrt{})=3, \\ N(\text{trig})=4.$$

При использовании в алгоритме оценки выборки из N измерений общее число типовых операций выражается в виде

$$N(+)=79N-12, \quad N(\times)=90N+18, \\ N(:)=15N+6, \\ N(\sqrt{})=3N, \quad N(\text{trig})=4N.$$

Следует отметить, что наиболее сложные операции извлечения корня и вычисления тригонометрических функций относятся к процедуре интегрирования уравнений относительного движения, необходимой для расчета ко-

коэффициентов c_{xni} , c_{yni} , c_{zni} , в то время как собственно процедура расчета МНК-оценок характеризуется лишь простейшими вычислительными операциями типа операций сложения, умножения, деления.

Таким образом, к достоинствам метода оценки, использующего модель движения (12.3.4), следует отнести также простоту его реализации в БЦВМ за счет малого числа типовых вычислительных операций, повторяемых на каждом шаге расчетной процедуры.

В заключение укажем, что условно линейная модель движения, рассмотренная в этом параграфе, может быть использована и в других схемах оценки параметров движения [21].

§ 12.4. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В предыдущих параграфах были рассмотрены различные методы оценки параметров движения космических аппаратов с использованием аналитических решений приближенных уравнений относительного движения. Аналогичные методы можно применить и в тех случаях, когда уравнения движения аппаратов неизвестны. Важной группой методов оценки, в которых уравнения движения не используются, являются методы полиномиальной аппроксимации параметров движения. Рассмотрим один из наиболее простых методов этой группы — временные полиномы, коэффициенты которых находятся с помощью метода наименьших квадратов. Представим один из измеряемых параметров движения, например дальность r , в виде

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m. \quad (12.4.1)$$

Тогда в соответствии с методом наименьших квадратов для минимизации суммы квадратов невязок

$$\delta_n = \sum_{n=1}^N [r(t_n) - (a_0 + a_1 t_n + a_2 t_n^2 + \dots + a_m t_n^m)]^2 \quad (12.4.2)$$

коэффициенты ряда (12.4.1) необходимо определять из

высоким уровнем ошибок измерений параметров $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, вследствие чего использование измерений $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ дополнительно к измерениям α и β становится малоцелесообразным.

Общий подход к использованию высокоточных измерений $\tilde{r}$ и $\tilde{r}$ состоит в определении оценок коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m$ полинома (12.4.1) исходя из условия минимума суммы квадратов невязок

$$\delta_n^{(r, \tilde{r})} = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{\sigma_r^2} [\tilde{r}(t_n) - (a_0 + a_1 t_n + \dots + a_m t_n^m)]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}}^2} [\tilde{r}(t_n) - (a_1 + 2a_2 t_n + \dots + m a_m t_n^{m-1})]^2 \right\}, \quad (12.4.8)$$

составленной с учетом удельных весов каждого измерения из совокупности $\tilde{r}$ и $\tilde{r}$, обратно пропорциональных дисперсиям ошибок σ_r^2 и $\sigma_{\tilde{r}}^2$.

При $m = 2$ из (12.4.8) получаем следующие соотношения для расчета оценок коэффициентов a_0, a_1, a_2 :

$$\hat{a}_0 N + \hat{a}_1 [t_n] + \hat{a}_2 [t_n^2] = [\tilde{r}(t_n)],$$

$$\frac{\hat{a}_0}{\sigma_r^2} [t_n] + \hat{a}_1 \left(\frac{[t_n^2]}{\sigma_r^2} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}}^2} \right) + \hat{a}_2 \left(\frac{[t_n^3]}{\sigma_r^2} + \frac{2[t_n]}{\sigma_{\tilde{r}}^2} \right) = \\ = \frac{1}{\sigma_r^2} [\tilde{r}(t_n) t_n] + \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}}^2} [\tilde{r}(t_n)],$$

$$\frac{\hat{a}_0}{\sigma_r^2} [t_n^2] + \hat{a}_1 \left(\frac{[t_n^3]}{\sigma_r^2} + \frac{2[t_n]}{\sigma_{\tilde{r}}^2} \right) + \hat{a}_2 \left(\frac{[t_n^4]}{\sigma_r^2} + \frac{4[t_n^2]}{\sigma_{\tilde{r}}^2} \right) = \\ = \frac{1}{\sigma_r^2} [\tilde{r}(t_n) t_n^2] + \frac{2}{\sigma_{\tilde{r}}^2} [\tilde{r}(t_n) t_n].$$

Аналогичные соотношения могут быть записаны и для других значений степени m полинома.

В расчете на одно измерение параметров r и $\tilde{r}$ количество типовых вычислительных операций, необходимых для расчета оценок $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ по критерию (12.4.8), по сравнению с расчетом тех же оценок по критерию (12.4.2)

увеличивается на $3(m - 1)$ операций сложения и $6(m - 1)$ операций умножения.

Метод оценки, использующий полиномиальную аппроксимацию параметров движения, очень просто реализуется в БЦВМ. Для иллюстрации приведем результаты расчета типовых вычислительных операций, необходимых для реализации в БЦВМ алгоритма оценки параметров r и $\dot{r}$ в случае полиномов различных степеней (табл. 12.2, где N — число измерений, использованных в процедуре оценки).

Таблица 12.2

Степень полинома m	Число операций			
	$N (+)$	$N (\times)$	$N (:) $	$N (\sqrt{}),$ $N (\text{trig})$
2	$5N + 19$	$5N + 48$	4	0
3	$7N + 133$	$9N + 260$	5	0
4	$9N + 741$	$14N + 1470$	6	0
5	$11N + 5071$	$20N + 10\,122$	7	0
6	$13N + 40\,307$	$27N + 80\,640$	8	0

Результаты, приведенные в таблице, характеризуют не только относительно небольшое число простейших операций (сложение, деление, умножение), но и отсутствие сложных вычислительных операций типа операций извлечения корня и расчета тригонометрических функций, что имеет существенное значение при реализации алгоритма в БЦВМ. К этому следует добавить еще одно обстоятельство: процедуры получения оценок $\hat{r}(t)$, $\hat{\dot{r}}(t)$ и $\hat{\alpha}(t)$, $\hat{\dot{\alpha}}(t)$, а также $\hat{\beta}(t)$, $\hat{\dot{\beta}}(t)$ полностью тождественны, поэтому программирование, отладка программы и решение задачи оценки шестипараметрического вектора $(r, \dot{r}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})$ практически эквивалентны программированию, отладке и решению задачи оценки двумерного вектора $(r, \dot{r})$.

Рассмотрим характеристики точности полиномиальной аппроксимации параметров движения. Среди этих характеристик важное место имеют зависимости методических (собственных) погрешностей от шага и числа измерений.

Под методическими погрешностями подразумеваются ошибки оценок параметров движения, полученные по формулам (12.4.3) и (12.4.4) при нулевых ошибках измерений. Численный анализ показывает, что при фиксированном интервале измерений $\Delta\theta$ величины методических погрешностей практически не зависят от числа (и шага) измерений, поэтому универсальными характеристиками методических погрешностей могут быть зависимости ошибок Δr , $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\dot{r}$, $\Delta\dot{\alpha}$, $\Delta\dot{\beta}$ (или Δx , Δy , Δz , Δv_x , Δv_y , Δv_z) от интервала $\Delta\theta$.

Эти зависимости могут быть использованы на этапе предварительного выбора шага и числа измерений исходя из принятой точности оценок и степени полинома. Исследование методических ошибок полиномов третьего, четвертого и пятого порядков ($m = 3, 4, 5$), проведенное в работе [18], показало, что ошибки по скорости (Δv) и по положению (Δr) не превышают значений $\Delta v \approx 1$ м/сек, $\Delta r \approx 100$ м, если интервалы измерений $\Delta\theta$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Delta\theta \leq 40^\circ \quad (m = 3),$$

$$\Delta\theta \leq 65^\circ \quad (m = 4),$$

$$\Delta\theta \leq 75^\circ \quad (m = 5).$$

Эти соотношения верны для случаев, когда расстояние между аппаратами не превышает 100 км, а их относительная скорость составляет не более 100 м/сек.

Численные характеристики ошибок оценок вектора дальности и вектора скорости от числа измерений для полиномов различных степеней приведены в [18]. Они позволяют определить как допустимый интервал измерений исходя из требуемой точности оценок координат и скоростей, так и предельную точность метода полиномиальной аппроксимации при различных интервалах измерений.

Рассмотрев метод полиномиальной аппроксимации параметров движения космических аппаратов в задаче оценки, отметим возможности полиномиальной аппроксимации в задаче прогнозирования параметров движения. Погрешность прогнозирования определяется следующим образом. Сначала по измерениям $\tilde{r}_n$, $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$,

реализованным в моменты $\vartheta_n = \vartheta_0 + n\delta\vartheta$ ($n = 0, 1, \dots, N$) интервала $[\vartheta_0, \vartheta_N]$, определяют оценки $\hat{r}_N, \hat{\dot{r}}_N, \dots, \hat{\beta}_N$ (или $\hat{x}_N, \dots, \hat{v}_{zN}$) в момент ϑ_N . Затем, задавая значения $\vartheta > \vartheta_N$, вычисляют $r(\vartheta), \dot{r}(\vartheta), \dots, \beta(\vartheta)$ и соответствующие им значения координат и скоростей

$$x(\vartheta), y(\vartheta), z(\vartheta), v_x(\vartheta), v_y(\vartheta), v_z(\vartheta). \quad (12.4.9)$$

После этого определяют невязки координат и скоростей (12.4.9) и невязки решений уравнений относительного движения аппаратов при начальных условиях

$$\vartheta = \vartheta_N, \quad x = \hat{x}_N, \quad y = \hat{y}_N, \dots, \quad v_z = \hat{v}_{zN}.$$

Результаты численных расчетов ошибок прогнозирования, полученные в работе [18], позволяют определить интервал прогнозирования $\Delta\vartheta_{\text{пр}}$ (на котором удовлетворяется принятая точность прогноза по положению $\delta r \approx 300$ м и по скорости $\delta v \approx 1,5$ м/сек) через степень m полинома:

$$\Delta\vartheta_{\text{пр}} \approx (10m - 5) \text{ град.}$$

Отсюда следует, что для принятой точности оценок координат и скоростей одновременное повышение порядка полиномов $r(t)$ и $\alpha(t)$ на единицу дает расширение интервала прогноза параметров движения на величину $\Delta\vartheta_{m/m+1} \approx 10^\circ$ [18].

Тот факт, что полиномы пятого и шестого порядков обеспечивают прогнозирование параметров движения на значительных интервалах ($\Delta\vartheta_{\text{пр}} \approx 45^\circ \div 55^\circ$), позволяет использовать полиномиальную аппроксимацию для комплексного решения задач оценки и прогнозирования движения без разделения их на самостоятельные вычислительные процедуры [18]. Эффективность ее использования будет тем выше, чем меньше интервал движения.

Заканчивая рассмотрение методов оценки параметров движения космических аппаратов по измерениям, реализуемым автономными средствами одного из аппаратов, следует хотя бы кратко остановиться на способах повышения надежности получаемых оценок. Одним из возможных решений этой задачи является одновременное использование двух или нескольких алгоритмов оценки, обладающих различной реакцией на ошибки измерений опре-

деленного типа. Рассмотрим распространенный и неблагоприятный с точки зрения возможностей распознавания случай наличия в ошибках измерений постоянной систематической составляющей. Предположим для определенности, что систематическая ошибка присутствует в измерениях углов α и β наклона вектора дальности относительно фиксированных направлений. Выберем два метода оценки, по-разному фильтрующих эту ошибку. В качестве первого используем метод оценки с условно линейной моделью движения (см. § 12.3), дающий в этом случае несмещенные оценки скоростей и смещенные оценки координат; в качестве второго — метод оценки координат по измерениям скоростей или по оценкам скоростей в двух точках пространства (см. § 11.5), дающий несмещенную оценку координат. Из сопоставления оценок координат, полученных по обоим методам, следует: 1) если оценки существенно отличны, то измерения координат (или, что эквивалентно, углов α , β) содержат систематические ошибки; 2) если оценки близки, то систематические ошибки отсутствуют. В первом случае оценками координат следует считать результаты, полученные вторым методом. Таким образом, изложенная процедура, с одной стороны, позволяет выявить наличие систематической ошибки одного знака в измерениях координат, с другой стороны, повышает достоверность полученных оценок.

Существуют способы повышения точности и достоверности алгоритмов оценки параметров движения, основанные на иных принципах, однако их рассмотрение не входит в задачу настоящей книги.

§ 12.5. ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ И МНОГОИМПУЛЬСНЫЕ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ

Рассмотрим кратко влияние алгоритма оценки параметров движения космических аппаратов на некоторые характеристики маневра сближения. В главе 10, посвященной программам управления, учитывающим погрешности измерений и исполнения, было показано, что в реальных условиях проведения маневра сближения двухимпульсные, а во многих случаях трех- и четырехимпульсные маневры не могут обеспечить необходимую точность

встречи в расчетный момент времени. Этот вывод следует отнести главным образом к случаям дальнего наведения, когда расстояние между аппаратами в момент выдачи начального импульса скорости составляет сотни километров, а длительность маневра превышает время прохождения полвитка.

Для компенсации возмущающего влияния ошибок измерений и исполнения на траектории сближения необходимо реализовать дополнительные коррекции, число и моменты приложения которых определяют точность и энергетические затраты маневра. Сравнение идеальных двухимпульсных маневров и многоимпульсных маневров, учитывающих ошибки измерений и исполнений, показывает, что энергетические затраты последних существенно выше, в связи с чем вопросы оптимизации управления путем соответствующего выбора числа коррекций и моментов их приложения представляют большой интерес на всех этапах разработки общего алгоритма управления сближением.

Рассмотренная в главе 10 методика оптимизации соответствовала детерминированному подходу к задаче, когда ошибки измерений параметров $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ считались постоянными величинами, равными своим максимальным значениям. При статистическом подходе к анализу влияния ошибок измерений на основные характеристики маневра (энергетические затраты J , число коррекций N и оптимальная угловая дальность $\theta_{\text{опт}}$) ошибки измерений $\Delta r, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \dot{r}, \Delta \dot{\alpha}, \Delta \dot{\beta}$ можно считать случайными нормально распределенными величинами, статистические характеристики которых известны.

Совершенно очевидно, что обработка серии измерений параметров движения, реализуемых между двумя соседними коррекциями, уменьшая ошибки оценок этих параметров, позволяет тем самым снизить энергетические затраты на коррекции возмущений, вызванные этими ошибками. В связи с этим целесообразно напомнить некоторые результаты, полученные в главах 11 и 12, посвященных оценкам параметров движения, имеющие непосредственное отношение к рассматриваемому вопросу. Прежде всего отметим высокую точность оценки скорости относительного движения аппаратов. Для состава измерений r, α и β (см. гл. 11) можно было снизить ошибки оценки моду-

для скорости в 10 ÷ 50 раз по сравнению с величиной наибольшей составляющей ошибки скорости $\Delta v_a = r \Delta \dot{\alpha}$. Аналогичные или близкие к этому результаты имеют место и при составах измерений $(r, \dot{r})$ и $(r, \dot{r}, \alpha, \beta)$.

Рассчитав для рассматриваемой совокупности маневров и фиксированного числа коррекций зависимости вида

$$\left. \begin{aligned} J &= f_r(\Delta r) && \text{при } \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \dot{r}, \Delta \dot{\alpha}, \Delta \dot{\beta} = \text{const}, \\ J &= f_{\dot{r}}(\Delta \dot{r}) && \text{при } \Delta r, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \dot{\alpha}, \Delta \dot{\beta} = \text{const}, \\ J &= f_{\alpha}(\Delta \alpha) && \text{при } \Delta r, \Delta \beta, \Delta \dot{r}, \Delta \dot{\alpha}, \Delta \dot{\beta} = \text{const}, \\ J &= f_{\beta}(\Delta \beta) && \text{при } \Delta r, \Delta \alpha, \Delta \dot{r}, \Delta \dot{\alpha}, \Delta \dot{\beta} = \text{const}, \\ J &= f_{\dot{\alpha}}(\Delta \dot{\alpha}) && \text{при } \Delta r, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \dot{r}, \Delta \dot{\beta} = \text{const}, \\ J &= f_{\dot{\beta}}(\Delta \dot{\beta}) && \text{при } \Delta r, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \dot{r}, \Delta \dot{\alpha} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (12.5.1)$$

можно определить по ним как удельное влияние каждой из перечисленных ошибок на энергетические затраты маневра J , так и эффект снижения ошибок оценок вектора v_0 за счет обработки измерений, о котором говорилось выше. Анализ большого числа расчетов, проведенных для широкого класса маневров на эллиптических орбитах с различными значениями параметров p и e , показывает, что наибольшее влияние на величину J имеют ошибки измерений угловых скоростей ($\Delta \dot{\alpha}$, $\Delta \dot{\beta}$) и углов ($\Delta \alpha$, $\Delta \beta$), в то время как влияние ошибок Δr и $\Delta \dot{r}$ на величину J весьма незначительно.

Характеристики (12.5.1) позволяют построить весьма простые зависимости энергетических затрат от ошибок измерений для маневров различной длительности. Для упрощения этих зависимостей можно принять $\Delta \dot{\alpha} = \Delta \dot{\beta} = \Delta_1$, $\Delta \alpha = \Delta \beta = \Delta_2$ и ограничиться в практических исследованиях семействами характеристик

$$\left. \begin{aligned} J &= f_1(\Delta_1, \theta), && e = \text{const}, \quad N = \text{const}, \\ J &= f_2(\Delta_2, \theta), && e = \text{const}, \quad N = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (12.5.2)$$

полученных для различных значений эксцентриситета опорной орбиты $0 \leq e < 1$.

Следует заметить, что зависимости (12.5.1) и (12.5.2) дают неявную связь энергетических затрат J с числом измерений N , реализованных для оценки параметров

движения между коррекциями скорости и поэтому могут быть использованы при оптимизации числа измерений.

Рассмотрим вопрос об ограничениях, налагаемых на многоимпульсные программы коррекций алгоритмами оценки параметров движения сближаемых аппаратов, использующими различные составы измерений. При измерениях параметров r , α и β для получения достаточно точных оценок скорости с помощью итерационного метода было необходимо реализовать две серии измерений по сорок в каждой в окрестностях двух точек Φ_1 и Φ_2 (см. § 11.5), разнесенных на интервал $\theta \gtrsim 30^\circ$. С учетом длительности серии измерений получаем следующее неравенство, определяющее минимальный интервал между коррекциями:

$$\Delta\vartheta_{(i+1)i}^{\min} \gtrsim 34^\circ. \quad (12.5.3)$$

Если при составе измерений r , α , β для оценки координат и скоростей используется метод наименьших квадратов (см. § 12.2—12.4), то минимальный интервал между коррекциями следует выбирать из условия

$$\Delta\vartheta_{(i+1)i}^{\min} > 10^\circ \div 15^\circ. \quad (12.5.4)$$

Следует подчеркнуть, что неравенство (12.5.3) не учитывает таких важных факторов, как время, необходимое для выполнения соответствующих расчетов с помощью БЦВМ, время разворота аппарата и время отработки расчетной коррекции.

Указав на ограничение, налагаемое на интервалы между двумя соседними коррекциями алгоритмом оценки параметров движения, остановимся на вопросе о выборе моментов коррекций с целью минимизации величины J . В главе 10 было показано, что моменты коррекций, обеспечивающие минимум величины J , должны выбираться по закону, близкому к геометрической прогрессии; при этом даже небольшие отклонения этих моментов от оптимальных приводили к существенному ухудшению показателя J . Кроме того, величина J оказалась очень чувствительной к числу коррекций $N_{\text{корр}}$.

При использовании алгоритма оценки координат и скоростей в интервалах между коррекциями основные характеристики оптимального по энергетическим затратам маневра существенно изменяются. Во-первых, суще-

ственно снижается показатель J , приближаясь к соответствующей величине идеального двухимпульсного маневра; во-вторых, он становится мало чувствителен к закону распределения моментов коррекций и слабо зависит от их числа, если выбрать $N_{\text{корр}} > 3$.

Рассмотрим численный пример, характеризующий влияние обработки измерений на энергетические затраты маневра, начальные условия и параметры которого приведены ниже: сближаемые аппараты находятся на низкой, близкой к круговой эллиптической орбите и смещены вдоль нее так, что в момент $t = t_0$ $x_0 = 100$ км, $y_0 = 10$ км; длительность маневра соответствует времени прохождения полвитка ($\theta = 180^\circ$). Пусть реализуется пятиимпульсная схема сближения. Каждому импульсу предшествует сеанс измерений длительностью $T_{\text{изм}}$. Начальный разгонный импульс выполняется в момент $t_0 + T_{\text{изм}}$, три коррекции — в моменты t_1, t_2, t_3 , тормозной импульс в момент t_k . Обработка измерений параметров r и α , реализуемых автономной радиолокационной системой, проводится методом наименьших квадратов с использованием разложений дальности r и угла наклона вектора дальности α относительно местной горизонтали в виде полиномов третьей степени (см. § 12.4)

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

$$\alpha(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3.$$

Число измерений в каждой из трех серий принято равным $N = 200$, при этом интервал измерений $T_{\text{изм}}$ соответствовал угловой величине $\Delta\theta = 14^\circ$. Момент реализации третьей коррекции t_3 был выбран исходя из условия необходимости достижения промаха $r(t_k) \leq 0,5$ км. В табл. 12.3 приведены основные характеристики маневра сближения при $\vartheta_1 = 84^\circ$ и $\vartheta_2 = 134^\circ$.

Аналогичные расчеты были проведены для следующей совокупности моментов ϑ_1 и ϑ_2 (табл. 12.4):

$$\vartheta_1 = 99^\circ, \quad \vartheta_2 = 154^\circ;$$

$$\vartheta_1 = 94^\circ, \quad \vartheta_2 = 154^\circ;$$

$$\vartheta_1 = 84^\circ, \quad \vartheta_2 = 154^\circ;$$

$$\vartheta_1 = 104^\circ, \quad \vartheta_2 = 154^\circ;$$

$$\vartheta_1 = 84^\circ, \quad \vartheta_2 = 144^\circ.$$

Таблица 12.3

[illegible]

Таблица 12.4

θ_1/θ_2	99/154	94/154	84/154	104/154	84/144
$J, \text{ м/сек}$	80,21	91,34	85,78	90,01	80,85

Данные табл. 12.3 и 12.4, во-первых, характеризуют точность получаемых в ходе выполнения маневра оценок координат и скоростей относительного движения аппаратов, во-вторых, показывают влияние моментов приложения коррекций на энергетические затраты маневра. Из табл. 12.3, в частности, видно, что основным фактором, оказывающим возмущающее влияние на выполнение маневра, являются ошибки оценок скорости Δv_{ij} , полученные в моменты реализации начального импульса скорости и первой коррекции, когда расстояния между сближенными аппаратами составляют значительные величины: 100 км и 44 км соответственно. В эти моменты величина Δv_{ij} составляет около 3 м/сек, в то время как другие составляющие скорости существенно меньше.

Отметим также, что средние значения ошибок оценки координат в моменты коррекций $t_0 + T_{изм}, t_1, t_2, t_3$ составляли $\Delta x = 9 \text{ м}, \Delta y = 36 \text{ м}, \Delta z = 28 \text{ м}$. Их влияние на ошибки скорости при расчете коррекций скоростей невелико — оно может быть косвенно оценено по величине относительных ошибок

$$\frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad \frac{\Delta y_i}{y_i}, \quad \frac{\Delta z_i}{z_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Из табл. 12.4 видно, что основной показатель оптимальности маневра J очень слабо зависит от моментов приложения первой и второй коррекций, несмотря на весьма значительный диапазон их изменений относительно двух произвольно выбранных значений. Этот вывод сохраняет свою силу и в случае, когда число коррекций превышает $N_{\text{корр}} = 3$, и, наоборот, в известной степени теряет свою силу при $N_{\text{корр}} < 3$.

Здесь же заметим, что полученные результаты соответствовали вполне определенному способу расчета оценок

координат и скоростей через оценки полиномов $r(t)$ и $\alpha(t)$ третьей степени, получаемые методом наименьших квадратов по совокупности из двухсот измерений. Применение других методов получения оценок координат и скоростей, рассмотренных в главах 11 и 12, в частности методов, использующих для расчета оценок скорости решения краевых задач, дает результаты, близкие к приведенным в табл. 12.4. Их отличие состоит в том, что диапазон изменений J при вариациях моментов коррекций в два-три раза меньше за счет более точных (по сравнению с рассмотренным случаем) оценок скорости в моменты $t_0 + T_{\text{изм}}, t_1, t_2, t_3$.

Анализ численных результатов, аналогичных приведенным в табл. 12.3 и 12.4 и полученных для различных многоимпульсных программ управления сближением с учетом обработки измерений, показывает, что для случая сближения на эллиптических орбитах произвольного эксцентриситета ($0 \leq e \leq 1$) можно сделать следующие выводы:

1. С расстояний $r_0 \leq 200$ км современные автономные измерительные системы, характеристики которых приведены в приложении 2, обеспечивают точность наведения порядка $r_k \leq 0,5$ км при использовании двух-трех коррекций, если угловая дальность маневра не превышает величины 180° .

2. Энергетические затраты, необходимые для реализации многоимпульсных программ управления сближением, практически не зависят от числа коррекций $N_{\text{корр}}$, если $N_{\text{корр}} > 3$.

3. Характеристическая скорость многоимпульсного маневра сближения отличается от характеристической скорости идеального двухимпульсного маневра той же длительности не более чем на $5 \div 15\%$ для широкого диапазона начальных условий и параметров орбит, поэтому оптимальная угловая дальность многоимпульсного маневра $\theta_{\text{опт}}$ практически совпадает с величиной $\theta_{\text{опт}2}$ двухимпульсного маневра.

4. Характеристическая скорость многоимпульсного маневра (при $N_{\text{корр}} > 3$) практически не зависит от моментов приложения коррекций Φ_i , выбор которых определяется лишь ограничениями, налагаемыми неравенствами (12.5.3) и (12.5.4).

Таким образом, при использовании в алгоритме управления статистической обработки измерений для оптимизации энергетических затрат на коррекции необходимо соблюдение следующих условий: $N_{\text{корр}} \geq 3$; $\Delta\vartheta_{(i+1)/i} > \Delta\vartheta_{(i+1)/i}^{\min}$, причем $\Delta\vartheta_{(i+1)/i}^{\min}$ определяются формулами (12.5.3) или (12.5.4); $\vartheta_K - \vartheta_N \geq 15^\circ$, где ϑ_N — момент приложения последней коррекции, ϑ_K — момент встречи.

Очевидно, что оптимизация многоимпульсных программ управления сближением с учетом обработки измерений между коррекциями может иметь и другие, не энергетические аспекты [71]; о некоторых из них будет сказано в следующей главе.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ

§ 13.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Алгоритм оценки параметров движения является частью общего алгоритма управления маневром сближения космических аппаратов, поэтому оптимизация оценок представляет собой важный элемент оптимизации управления этим маневром. Существует несколько подходов к оптимизации оценок: одни критерии учитывают показатели точности и требуют минимизации дисперсии оценки или ошибки оценки, другие критерии носят вероятностный характер и требуют максимизации вероятности того, что точность оценки будет не ниже заданной. Отличный от указанных выше подход к оптимизации оценок может содержать требование достижения необходимой точности за минимальное число измерений или требование минимизации интервала измерений, обеспечивающего необходимую точность оценок. Задачу оптимизации оценок можно ставить и с иных позиций, например как оптимизацию программы (моментов) измерений при заданной совокупности измеряемых параметров или как оптимизацию выбора из заданной совокупности измеряемых параметров тех из них, которые обеспечивают максимальную точность оценок. Наконец, можно рассматривать задачу оптимизации оценок при фиксированных составах измерений. Этот подход, основанный на теории оптимальной фильтрации Калмана, является основным предметом рассмотрения в настоящей главе. Он позволяет получить оценки параметров движения с минимальной дисперсией на каждом шаге интервала измерений. Рассмотрение различных вариантов оценки по Калману проводится для двух принципиально различных подходов: с использованием уравнений движения аппаратов и для полиномиальной аппроксимации параметров движения.

Приведем основные соотношения рекуррентной процедуры оптимальной оценки вектора состояния линейной системы по результатам независимых измерений.

Пусть уравнение системы для дискретного времени имеет вид

$$x_{n+1} = \Phi_n x_n + \Gamma_n w_n^x, \quad n = 0, 1, \dots, l, \quad (13.1.1)$$

где Φ_n — переходная матрица размера $m \times m$, Γ_n — матрица влияния возмущений размера $m \times m_1$. Пусть известны также статистические характеристики вектора состояния x_n и вектора возмущений w_n^x :

$$\left. \begin{aligned} M[x_n] &= \bar{x}_n, & M[(x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)^T] &= P_n, \\ M[w_n^x] &= \bar{w}_n^x, & M[(w_n^x - \bar{w}_n^x)(w_n^x - \bar{w}_n^x)^T] &= Q_n \delta_{nk}, \\ & & M[(w_n^x - \bar{w}_n^x)(x_n - \bar{x}_n)^T] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.1.2)$$

где Q_n — известная матрица;

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases} \quad (13.1.3)$$

Кроме того, вектор w_n^x предполагается нормально распределенным.

Пусть уравнения измерений системы (13.1.1) имеют вид

$$\hat{u}_n = H_n x_n + w_n^u, \quad n = 0, 1, \dots, l, \quad (13.1.4)$$

где H_n — известная матрица, а шум (помеха) измерений w_n^u имеет характеристики

$$M[w_n^u (w_n^u)^T] = \tilde{R}_n \delta_{nk}, \quad M[w^u] = 0, \quad (13.1.5)$$

$$M[(w_n^x - \bar{w}_n^x)(w_k^u)^T] = 0, \quad M[(x_n - \bar{x}_n)(w_k^u)^T] = 0 \quad (13.1.6)$$

и является нормально распределенным.

Формулам (13.1.1)–(13.1.6) соответствует рекуррентная процедура оптимальной (в смысле минимума дисперсии) оценки вектора x по измерениям $\hat{u}$, реализованным в моменты $t_n = t_0 + n\Delta t$ ($n = 0, 1, \dots, l$), известная

под названием фильтра Калмана [5, 12, 15, 49]:

$$\hat{x}_n = \bar{x}_n + K_n(\tilde{u}_n - H_n \bar{x}_n), \quad (13.1.7)$$

$$\bar{x}_{n+1} = \Phi_n \hat{x}_n + \Gamma_n \bar{w}_n, \quad (13.1.8)$$

$$K_n = P_n H_n^T \tilde{R}_n^{-1}, \quad (13.1.9)$$

$$P_n = (\tilde{N}_n^{-1} + H_n^T \tilde{R}_n^{-1} H_n)^{-1}, \quad (13.1.10)$$

$$\tilde{N}_{n+1} = \Phi_n P_n \Phi_n^T + \Gamma_n Q_n \Gamma_n^T, \quad n = 0, 1, \dots, l \quad (13.1.11)$$

при начальных условиях x_0, P_0 .

Здесь $\bar{x}_n, \hat{x}_n$ — оценки вектора x в момент t_n соответственно до и после измерений; $\tilde{N}_n, P_n$ — матрицы ковариаций этих оценок.

Интересна форма, характеризующая процесс улучшения оценок [см. (13.1.7)]: оценка $\hat{x}_n$ после измерения равна оценке $\bar{x}_n$ до измерения плюс ошибка измерений, умноженная на коэффициент усиления, определяемый формулой (13.1.9) и учитывающий дисперсии ошибок w_n^u и w_n^x . Экстраполяция оценки проводится в соответствии с формулой (13.1.8). Формулы (13.1.10) и (13.1.11) определяют изменения матриц ковариаций ошибок оценок.

Используем приведенные соотношения для получения оценок координат и скоростей космических аппаратов и констант интегрирования по измерениям различных параметров из совокупности $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ (дальность, углы наклона вектора дальности относительно фиксированных направлений и их производные).

Случай измерений r, α, β . Предположим, что случайные возмущения траекторий движения аппаратов малы и уравнения движения могут быть представлены в виде, соответствующем (13.1.1) при $w_n^x = 0$:

$$x_{n+1} = \Phi_n x_n, \quad (13.1.12)$$

где

$$x_n = (x_n, y_n, z_n, v_{xn}, v_{yn}, v_{zn})^T.$$

Для состава параметров r, α, β получим приближенные выражения матриц H и $\tilde{R}$, соответствующих уравнениям измерений (13.1.4) и (13.1.5). Выразим составляющие x, y, z вектора x через измерения параметров r, α, β

с учетом ошибок Δr , $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$:

$$\left. \begin{aligned} x &= (r + \Delta r) \cos(\beta + \Delta \beta) \cos(\alpha + \Delta \alpha), \\ y &= (r + \Delta r) \cos(\beta + \Delta \beta) \sin(\alpha + \Delta \alpha), \\ z &= (r + \Delta r) \sin(\beta + \Delta \beta). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.13)$$

После преобразований равенств (13.1.13) и отбрасывания малых величин второго порядка малости (Δr , $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$) получаем, опуская промежуточные выкладки,

$$H \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R \approx \begin{pmatrix} D_x & K_{xy} & K_{xz} \\ & D_y & K_{yz} \\ & & D_z \end{pmatrix}. \quad (13.1.14)$$

В формуле (13.1.14) D_x , D_y , D_z — дисперсии координат, определяемые через дисперсии измеряемых параметров равенствами

$$\left. \begin{aligned} D_x &= D_r (\cos \beta \cos \alpha)^2 + \\ &\quad + D_\alpha (r \cos \beta \sin \alpha)^2 + D_\beta (r \sin \beta \cos \alpha)^2, \\ D_y &= D_r (\cos \beta \sin \alpha)^2 + \\ &\quad + D_\alpha (r \cos \beta \cos \alpha)^2 + D_\beta (r \sin \beta \sin \alpha)^2, \\ D_z &= D_r \sin^2 \beta + D_\beta (r \cos \beta)^2, \end{aligned} \right\} \quad (13.1.15)$$

а коэффициенты взаимной корреляции выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} K_{xy} &= \frac{1}{2} D_r \cos^2 \beta \sin 2\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{2} D_\alpha r^2 \sin 2\alpha \cos^2 \beta - D_\beta r^2 \sin^2 \beta \sin 2\alpha, \\ K_{xz} &= \frac{1}{2} D_r \cos \alpha \sin 2\beta - \frac{1}{2} D_\beta r^2 \cos \alpha \sin 2\beta, \\ K_{yz} &= \frac{1}{2} D_r \sin \alpha \sin 2\beta - D_\beta r^2 \sin \alpha \sin 2\beta. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.16)$$

Отсюда видно, что для полученной модели измерений между измеряемыми величинами существуют сильные корреляционные связи, приводящие к дополнительным погрешностям при использовании уравнений фильтра (13.1.7)–(13.1.11), справедливых для случая, когда корреляция между измерениями отсутствует и в расчете

должна быть использована матрица $\tilde{R}$ диагонального вида

$$\tilde{R} \approx \begin{pmatrix} D_x & 0 & 0 \\ & D_v & 0 \\ & & D_z \end{pmatrix}.$$

Получив приближенные матрицы H и $\tilde{R}$ для случая измерений r , α и β , перейдем к рассмотрению случая использования полного состава измеряемых параметров.

Случай измерений r , α , β , $\dot{r}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$. Используя вектор состояния $x = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)^T$, сохраним уравнение движения (13.1.12).

Матрицы H и $\tilde{R}$ в этом случае принимают вид

$$H = E,$$

где E — единичная матрица,

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} D_x & K_{xy} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{xvz} \\ & D_y & \cdot & \cdot & \cdot & K_{yvz} \\ & & D_z & \cdot & \cdot & K_{zvz} \\ & & & D_{vx} & \cdot & K_{vxxz} \\ & & & & D_{vy} & K_{vyvz} \\ & & & & & D_{vz} \end{pmatrix}. \quad (13.1.17)$$

Элементы матрицы (13.1.17) могут быть выражены через известные дисперсии измеряемых параметров D_r , D_α , ..., D_β . Необходимые для расчета формулы приведены в приложении 3, поэтому здесь запишем лишь окончательные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} D_{vx} &= \gamma_1^2 D_r + (r\gamma_3)^2 D_\beta + \\ &\quad + (r\gamma_2)^2 D_\alpha + f_1^2 D_r + f_2^2 D_\alpha + f_3^2 D_\beta, \\ D_{vy} &= \gamma_2^2 D_r + (rf_4)^2 D_r + \\ &\quad + (r\gamma_1)^2 D_\alpha + f_5^2 D_\alpha + f_6^2 D_\beta + (r\gamma_4)^2 D_\beta, \\ D_{vz} &= (\sin \beta)^2 D_r + (\beta \cos \beta) D_r + \\ &\quad + (r \cos \beta)^2 D_\beta + f_7^2 D_\beta, \end{aligned} \right\} \quad (13.1.18)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \cos \alpha \cos \beta, & \gamma_2 &= \sin \alpha \cos \beta, \\ \gamma_3 &= \sin \beta \cos \alpha, & \gamma_4 &= \sin \beta \sin \alpha, \\ f_1 &= -\dot{\beta}\gamma_3 - \dot{\alpha}\gamma_2, \\ f_2 &= -\dot{r}\gamma_2 + r\dot{\beta}\gamma_4 - r\dot{\alpha}\gamma_1, \\ f_3 &= -\dot{r}\gamma_3 - r\dot{\beta}\gamma_1 + r\dot{\alpha}\gamma_4, \\ f_4 &= \dot{\alpha}\gamma_1 - \dot{\beta}\gamma_4, \\ f_5 &= -r\dot{\alpha}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_1 - r\dot{\beta}\gamma_3, \\ f_6 &= -\dot{r}\gamma_4 - r\dot{\beta}\gamma_2 - r\dot{\alpha}\gamma_3, \\ f_7 &= \dot{r} \cos \beta - r\dot{\beta} \sin \beta.\end{aligned}$$

Дисперсии D_x, D_y, D_z определяются равенствами (13.1.15). При использовании формул (13.1.7)–(13.1.11) матрицу (13.1.17) следует записать как диагональную, положив в ней

$$K_{xy} = 0, \dots, \quad K_{xz} = 0, \dots, \quad K_{yyz} = 0.$$

Выше уже отмечалось, что рассматриваемая модель измерений обладает методической погрешностью, связанной с учетом членов второго порядка малости (Δr $\Delta \alpha$ и Δr $\Delta \beta$) при линеаризации соотношений (13.1.13). Однако эта погрешность весьма незначительна, если иметь в виду, что современные радиотехнические измерительные системы [20] имеют ошибки Δr , лежащие в пределах

$$3 \cdot 10^{-4} r \leq \Delta r \leq 10^{-2} r, \quad (13.1.19)$$

поэтому относительные ошибки элементов матрицы (13.1.14) составляют величину, близкую к отношению $\Delta r/r$, определяемому из неравенства (13.1.19).

Конкретизировав методику линеаризации уравнения измерений для состава $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$, запишем выражения переходных матриц Φ_n для случаев, когда удовлетворяется условие линейности уравнения (13.1.12). При круговых опорных орбитах и малых расстояниях между аппаратами переходную матрицу можно получить из соотношений (11.4.2), приведенных при рассмотрении метода эквивалентных круговых орбит.

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательный результат в виде

$$\Phi^{кр} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\Delta\theta}{\omega_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\Delta\theta}{\omega_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\Delta\theta}{\omega_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\Delta\theta & 0 \\ 0 & 3\omega_0\Delta\theta & 0 & -2\Delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0\Delta\theta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13.1.20)$$

где $\omega_0 = \left(\frac{\mu}{R_0^3}\right)^{1/2}$; $\Delta\theta = \omega_0\Delta t$; Δt — интервал дискретности.

Для эллиптической опорной орбиты можно получить выражение переходной матрицы системы $\Phi_n^{элл}$, исходя из простой формы линеаризованных уравнений относительного движения аппаратов, приводимой ниже без вывода:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= \lambda^{-2}v_x, & \frac{dy}{d\vartheta} &= \lambda^{-2}v_y, & \frac{dz}{d\vartheta} &= \lambda^{-2}v_z, \\ \frac{dv_x}{d\vartheta} &= (\lambda^2 - \lambda)x - 2e\lambda \sin\vartheta y + 2v_y, \\ \frac{dv_y}{d\vartheta} &= 2e\lambda \sin\vartheta x - 2v_x + (\lambda^2 + 2\lambda)y, \\ \frac{dv_z}{d\vartheta} &= -\lambda z, & \lambda &= 1 + e \cos\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (13.1.21)$$

где ϑ отсчитывается от перицентра опорной орбиты.

Введем обозначения коэффициентов

$$a_{1n} = \lambda_n^{-2}\Delta\vartheta, \quad a_{2n} = (\lambda_n^2 - \lambda_n)\Delta\vartheta, \quad a_{3n} = -2e\lambda_n \sin\vartheta_n\Delta\vartheta,$$

$$a_{4n} = (\lambda_n^2 + 2\lambda_n)\Delta\vartheta, \quad a_{5n} = -\lambda_n\Delta\vartheta,$$

где $\lambda_n = 1 + e \cos\vartheta_n$, $\vartheta_n = \vartheta_0 + n\Delta\vartheta$, $n = 1, 2, \dots, l$, и запишем переходную матрицу в виде

$$\Phi_n^{элл} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{3n} & 0 & 1 & 2\Delta\vartheta & 0 \\ -a_{3n} & a_{4n} & 0 & -2\Delta\vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{5n} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.1.22)$$

Большим достоинством матриц (13.1.20) и (13.1.22) является простота расчета их элементов. Однако они получены в предположении линейности уравнений относительного движения аппаратов и в связи с этим обеспечивают необходимую точность аппроксимации на сравнительно малом диапазоне изменений угла ϑ . Важно отметить, что величина этого диапазона существенным образом зависит от начальных условий задачи и параметров орбит.

Об оценках констант интегрирования. В главе 11 отмечалось, что относительное движение космических аппаратов может быть определено не только через вектор $x_i = (x_i, y_i, z_i, v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$, $\vartheta = \vartheta_i$, но и через вектор констант интегрирования $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$.

Особенно просто решение уравнений относительного движения записывается через константы интегрирования в случае линеаризованного разностного гравитационного ускорения (см. § 11.4):

$$\dot{x} = \Phi^k k, \quad (13.1.23)$$

где

$$\Phi^k = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & b_7 & 0 & 0 & b_8 \\ 0 & b_9 & 0 & b_{10} & b_{11} & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & b_{13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b_8 & 0 & 0 & b_7 \end{pmatrix} \quad (13.1.24)$$

[элементы матрицы (13.1.24) определяются равенствами вида (11.4.12)]. Удобство выбора в качестве параметров движения констант $k_1, \dots, k_6$ состоит в том, что они не зависят от времени, поэтому уравнения измерений имеют очень простой вид.

Введем вектор состояния системы в виде

$$x^{xz} = (x, z)^T, \quad (13.1.25)$$

где составляющая x зависит от констант k_1, k_2, k_4, k_5 , а составляющая z — от k_3 и k_6 . С учетом первой и третьей строк матрицы (13.1.24) можно записать

$$x = k_1 + b_1 k_2 + b_2 k_4 + b_3 k_5, \quad (13.1.26)$$

$$z = b_7 k_3 + b_8 k_6 \quad (13.1.27)$$

или

$$x = k_1 + k_2^* + k_4^* + k_5^*, \quad (13.1.28)$$

$$z = k_3^* + k_6^*, \quad (13.1.29)$$

где $k_2^* = b_1 k_2$, $k_3^* = b_7 k_3$, $k_4^* = b_2 k_4$, $k_5^* = b_3 k_5$, $k_6^* = b_8 k_6$.

Так как движения аппаратов в плоскости орбиты цели и в боковой плоскости взаимно независимы [см. (13.1.23) и (13.1.24)], то процедуры оценки констант k_1, k_2, k_4, k_5 и k_3, k_6 реализуются независимо друг от друга и вместо вектора (13.1.25) целесообразно ввести векторы констант

$$x^{kx} = (k_1^*, k_2^*, k_4^*, k_5^*)^T, \quad (13.1.30)$$

$$x^{kz} = (k_3^*, k_6^*)^T. \quad (13.1.31)$$

С учетом равенств (13.1.30), (13.1.31) и (13.1.26) — (13.1.29) запишем переходные матрицы

$$\Phi_n^{kx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{1(n+1)}}{b_{1n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_{2(n+1)}}{b_{2n}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_{3(n+1)}}{b_{3n}} \end{pmatrix}, \quad (13.1.32)$$

$$\Phi_n^{kz} = \begin{pmatrix} \frac{b_{7(n+1)}}{b_{7n}} & 0 \\ 0 & \frac{b_{8(n+1)}}{b_{8n}} \end{pmatrix}. \quad (13.1.33)$$

Коэффициенты $b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{7n}, b_{8n}$ матриц Φ_n^{kx} и Φ_n^{kz} определяются по (11.4.12), где θ_n — моменты измерений.

При использовании состава измерений $\tilde{r}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, однозначно определяющего координаты

$$\tilde{x} = \tilde{r} \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\alpha}, \quad \tilde{z} = \tilde{r} \sin \tilde{\beta}, \quad (13.1.34)$$

вводятся векторы измерений

$$\tilde{u}^x = \tilde{x}, \quad \tilde{u}^z = \tilde{z} \quad (13.1.35)$$

и соответствующие матрицы измерений записываются в виде

$$H^x = (1, 1, 1, 1), \quad (13.1.36)$$

$$H^z = (1, 1). \quad (13.1.37)$$

Матрицы ковариаций ошибок измерений имеют вид

$$R^x = D_x, \quad R^z = D_z, \quad (13.1.38)$$

где D_x и D_z определяются формулами (13.1.15) через известные дисперсии ошибок измерений D_r , D_α , D_β и текущие значения параметров r , α , β .

Таким образом, соотношения (13.1.23) — (13.1.38) вместе с равенствами (13.1.15), (13.1.16) определяют все элементы рекуррентной процедуры (13.1.7) — (13.1.11) для оценки констант интегрирования $k_1, \dots, k_6$. После расчета оценок $\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_6$ оценка вектора x в момент θ_i может быть определена в соответствии с равенством (13.1.23):

$$\hat{x}_i = \hat{x}(\theta_i) = \Phi_i^k \hat{k},$$

где

$$\hat{k} = (\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3, \hat{k}_4, \hat{k}_5, \hat{k}_6)^T;$$

Φ_i^k — матрица (13.1.24) для момента $\theta = \theta_i$.

Показав возможности использования линеаризованных уравнений относительного движения аппаратов в задаче оптимальной оценки вектора состояния $x = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ или вектора констант $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$, уточним вопрос о выборе начальных условий x_0 и P_0 (или k_0 и P_0^k), вводимых в расчетную процедуру оценки.

Если используется полный состав измерений параметров $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$, дисперсии ошибок которых $D_{\tilde{u}} = D_r, \dots, D_{\dot{\beta}}$ известны, расчет x_0 проводится по результату однократного измерения $\tilde{u}_0 = (\tilde{r}_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\dot{r}}_0, \tilde{\dot{\alpha}}_0, \tilde{\dot{\beta}}_0)$, а расчет дисперсий $D_{x_0}, \dots, D_{x_{20}}$ — по формулам (13.1.15) и (13.1.18).

Для повышения точности задания x_0 и P_0 можно использовать какой-либо простой алгоритм оценки, рассмотренный в главе 12, например метод линеаризации в одной точке или метод линейной аппроксимации. Некоторое усложнение вычислительного алгоритма, связанное с введением процедуры расчета начальных значений x_0 и P_0 , в большинстве случаев оказывается оправданным, так как при этом существенно улучшается сходимость оценок к их истинным значениям и снижается веро-

ятность возникновения явления расходимости, о котором будет сказано ниже.

Чтобы спизить ограничения, налагаемые на метод оценки свойствами модели измерений и модели движения, рассмотренных выше, необходимо использовать другие, более универсальные способы описания движения сближаемых аппаратов. Одним из таких способов может быть использование условно линейных моделей движения, некоторые из которых были использованы ранее (см. § 12.3) и позволили получить эффективные процедуры оценки координат и скоростей.

Условная линеаризация движения. В § 12.3 была введена следующая модель относительного движения аппаратов:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + c_{xn}v_{x0}, & y_n &= y_0 + c_{yn}v_{y0}, & z_n &= z_0 + c_{zn}v_{z0}, \\ n &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (13.1.39)$$

Здесь

$$c_{xn} = \frac{x_n^0 - x_0^0}{v_{x0}^0}, \quad c_{yn} = \frac{y_n^0 - y_0^0}{v_{y0}^0}, \quad c_{zn} = \frac{z_n^0 - z_0^0}{v_{z0}^0},$$

где x_n^0, y_n^0, z_n^0 — значения координат, полученные путем численного интегрирования уравнений относительного движения аппаратов при произвольно выбранных начальных условиях

$$x_0^0 = (x_0^0, y_0^0, z_0^0, v_{x0}^0, v_{y0}^0, v_{z0}^0). \quad (13.1.40)$$

Введем векторы

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)} &= (x_0, c_{xn}, v_{x0}), & x^{(4)} &= (y_0, c_{yn}, v_{y0}), \\ x^{(6)} &= (z_0, c_{zn}, v_{z0}). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.41)$$

При составе параметров r, α, β , определяющем координаты x, y, z , имеем следующие матрицы ошибок измерений $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}^{(2)} = D_x, \quad \tilde{R}^{(4)} = D_y, \quad \tilde{R}^{(6)} = D_z, \quad (13.1.42)$$

где D_x, D_y, D_z определяются через известные дисперсии измеряемых параметров D_r, D_x, D_z с помощью равенств (13.1.15). Матрицы измерений в рассматриваемом случае записываются в виде

$$H^{(2)} = (1, 1), \quad H^{(4)} = (1, 1), \quad H^{(6)} = (1, 1). \quad (13.1.43)$$

Из формул (13.1.39) с учетом обозначений (13.1.41) получаем переходные матрицы

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{c_{x(n+1)}}{c_{xn}} \end{pmatrix}, \quad \Phi_n^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{c_{y(n+1)}}{c_{yn}} \end{pmatrix}, \\ \Phi_n^{(6)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{c_{z(n+1)}}{c_{zn}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.44)$$

Таким образом, формулы (13.1.39) — (13.1.44) вместе с равенствами (13.1.15) определяют все элементы рекуррентных соотношений (13.1.7) — (13.1.11) оптимальных оценок параметров $x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}$, т. е. координат и скоростей относительного движения аппаратов.

Важным отличием полученных соотношений и в целом метода, использующего модель движения (13.1.39), от рассмотренных ранее является то, что решение шестимерной задачи заменяется в нем решением трех двумерных задач — это сопровождается существенным упрощением основных вычислительных процедур и снижает взаимное влияние ошибок измерений координат x, y, z .

Анализ типовых вычислительных операций, необходимых для реализации одного шага рекуррентной процедуры оценки, использующей приведенную выше модель движения, дает следующие результаты:

$$\left. \begin{aligned} N(+) &= 85, \quad N(\times) = 126, \quad N(:) = 28, \\ N(\sqrt{}) &= 3, \quad N(\text{trig}) = 6. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.45)$$

Основная часть всех операций (13.1.45) приходится на процедуру интегрирования уравнений относительного движения аппаратов методом Рунге — Кутты и сравнительно небольшая часть операций — на реализацию рекуррентных формул (13.1.7) — (13.1.11).

Соотношения (13.1.45) показывают простоту реализации рассмотренного метода в БЦВМ, обусловленную как малым числом типовых операций, так и малым числом сложных операций типа извлечения корня и расчета тригонометрических функций.

Необходимо отметить, что процедура рекуррентной оценки, использующая условно линейную модель относительного движения аппаратов (13.1.39), в общем случае

может иметь итеративный характер, т. е. повторяться несколько раз для различных начальных условий x_0 , вводимых в численное решение уравнений движения с целью расчета коэффициентов c_{xn} , c_{yn} , c_{zn} . Однако на практике необходимость в итерациях по вектору x_0 отсутствует, если обеспечивается точность задания составляющей n_0 вектора x_0 порядка 3 м/сек. Подробное исследование влияния ошибок задания начального приближения x_0^0 на точность модели (13.1.39) было проведено в § 12.3 и его повторение здесь нецелесообразно.

§ 13.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНУЮ АППРОКСИМАЦИЮ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

В предыдущем параграфе были получены рабочие формулы рекуррентной процедуры оптимальной оценки параметров движения космических аппаратов, использующие различные формы уравнений относительного движения. Рассмотрим иной подход к задаче оптимизации оценок, основанный на использовании полиномиальной аппроксимации измеряемых величин.

В § 12.4 было показано, что, представив параметры r , α , β в виде временных полиномов

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m, \\ \alpha(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_m t^m, \\ \beta(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_m t^m \end{aligned} \right\} \quad (13.2.1)$$

и определив по измерениям $\hat{r}_i$, $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) с помощью метода наименьших квадратов оценки коэффициентов $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_m$, $\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_m$, $\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_m$, можно записать оценки координат и скоростей в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{r} \cos \hat{\beta} \cos \hat{\alpha}, \quad \hat{y} = \hat{r} \cos \hat{\beta} \sin \hat{\alpha}, \quad \hat{z} = \hat{r} \sin \hat{\beta}, \\ \hat{v}_x &= \dot{\hat{r}} \cos \hat{\beta} \cos \hat{\alpha} - \hat{r} \dot{\hat{\beta}} \sin \hat{\beta} - \hat{r} \dot{\hat{\alpha}} \cos \hat{\beta} \sin \hat{\alpha}, \\ \hat{v}_y &= \dot{\hat{r}} \cos \hat{\beta} \sin \hat{\alpha} - \hat{r} \dot{\hat{\beta}} \sin \hat{\alpha} \sin \hat{\beta} + \hat{r} \dot{\hat{\alpha}} \cos \hat{\beta} \cos \hat{\alpha}, \\ \hat{v}_z &= \dot{\hat{r}} \sin \hat{\beta} + \hat{r} \dot{\hat{\beta}} \cos \hat{\beta}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнение измерений

$$\tilde{u}_n^{(r)} = H_n x_n^{(r)} + \tilde{v}_n. \quad (13.2.7)$$

Вектор измерений $\tilde{u}_n^{(r)}$ имеет одну компоненту $\hat{r}_n$, а шум измерений $\tilde{v}_n$ совпадает с шумом Δr :

$$\tilde{v}_n = \Delta r_n = \Delta \tilde{u}_n.$$

При известных статистических характеристиках ошибок измерений параметра r

$$M[\Delta r] = 0, \quad M[\Delta r]^2 = \sigma_{r_n}^2$$

известна и дисперсия шума измерений $\tilde{v}_n$:

$$\tilde{R}_{\tilde{v}_n} = \sigma_{r_n}^2. \quad (13.2.8)$$

На основании соотношений (13.2.4), (13.2.5) и уравнения (13.2.7) матрицу измерений можно записать в виде

$$H_n^{(r)} = (1, 1, 1).$$

Выше были определены все матрицы рекуррентной процедуры (13.1.7) — (13.1.11) для расчета оценок коэффициентов полинома $r_n = r(n\Delta t)$. Для полиномов $\alpha(n\Delta t)$ и $\beta(n\Delta t)$ матрицы Φ_n^α , H_n^α , $\tilde{R}_{x_n}$ и Φ_n^β , H_n^β , $\tilde{R}_{\beta_n}$ аналогичны матрицам $\Phi_n^{(r)}$, $H_n^{(r)}$, $\tilde{R}_{r_n}$, записанным выше, и поэтому здесь не приводятся.

Получим теперь соотношения, определяющие оценки коэффициентов полиномов (13.2.1) по измерениям r , $\dot{r}$, α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$. Как и ранее, рассмотрим процедуру получения оценок коэффициентов только одного полинома $r(t)$. Будем считать вектором состояния системы вектор $x_n^{(r)}$, определенный равенством (13.2.5). Тогда переходная матрица системы совпадает с матрицей (13.2.6).

При составе измерений r и $\dot{r}$ вектор измерений становится двухкомпонентным

$$\tilde{u}_n^{r, \dot{r}} = (r_n, \dot{r}_n)^T,$$

как и вектор помех

$$\tilde{v}_n^{r, \dot{r}} = (\tilde{v}_{r_n}, \tilde{v}_{\dot{r}_n})^T.$$

Получим матрицы $H_n^{r,\dot{r}}$ и $\hat{R}_n^{r,\dot{r}}$. Продифференцируем полином (13.2.2) и с учетом обозначений (13.2.3) запишем

$$\dot{r}_n = \frac{1}{n \Delta t} A_{1n} + \frac{2}{n \Delta t} A_{2n}.$$

Уравнение измерений системы имеет вид

$$(r_n, \dot{r}_n)^T = H_n^{r,\dot{r}} (A_{0n}, A_{1n}, A_{2n})^T,$$

из которого следует, что

$$H_n^{r,\dot{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{n \Delta t} & \frac{2}{n \Delta t} \end{pmatrix}.$$

Матрица ковариаций помехи $\hat{R}_n^{r,\dot{r}}$ имеет размер 2×2 и записывается в виде

$$\hat{R}_n^{r,\dot{r}} = \begin{pmatrix} D_{r_n} & 0 \\ 0 & D_{\dot{r}_n} \end{pmatrix}.$$

Вследствие того, что матрицы $\Phi_n^{\alpha,\dot{\alpha}}$, $H_n^{\alpha,\dot{\alpha}}$, $\hat{R}_n^{\alpha,\dot{\alpha}}$ и $\Phi_n^{\beta,\dot{\beta}}$, $H_n^{\beta,\dot{\beta}}$, $\hat{R}_n^{\beta,\dot{\beta}}$, используемые при оценке $\alpha(t)$, $\beta(t)$, аналогичны матрицам $\Phi_n^{r,\dot{r}}$, $H_n^{r,\dot{r}}$, $\hat{R}_n^{r,\dot{r}}$, полученным выше, они здесь не приводятся.

Говоря о преимуществах и недостатках методов оценки по измерениям r , α , β и по измерениям r , α , β , $\dot{r}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, следует отметить, что увеличение размерности вектора измерений, как правило, повышает скорость сходимости оценок к истинным значениям оцениваемых величин, но одновременно с этим повышает и чувствительность всей процедуры расчета к неточности априорной информации об ошибках измерений.

Рассмотренная методика относилась к случаю полиномов $r(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ второго порядка, но может быть распространена и на полиномы более высоких степеней. В частности, нетрудно показать, что для полиномов степени m при составе измерений r , α , β матрицы измерений H_n^r , H_n^α , H_n^β являются матрицами размера $1 \times (m+1)$ и имеют вид

$$H_n^r = H_n^\alpha = H_n^\beta = (1, 1, 1, \dots, 1). \quad (13.2.9)$$

Переходные матрицы системы для различных значений m записываются следующим образом:

$$m = 1: \quad \Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

$$m = 2: \quad \Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix},$$

$$m = 3: \quad \Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \end{pmatrix}$$

и т. д. Из этих формул видно, что матрицы Φ_n для полиномов различных степеней имеют размер $(m + 1) \times (m + 1)$, а их диагональные элементы равны

$$f_{m+1, m+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

Важной особенностью рассмотренного метода оценки коэффициентов полиномов для состава измерений r, α, β является то, что модель измерений линейна относительно выбранного вектора состояния, а шум измерений аддитивен, в то время как ранее (см. § 13.1) для состава измерений r, α, β модель измерений для оценки координат x, y, z была приближенной из-за пренебрежения величинами второго порядка малости при линеаризации уравнения измерений [56].

Оценки параметров r, α, β могут быть получены также с использованием разложений вида

$$r(\theta) = a_0 + a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta,$$

$$\alpha(\theta) = b_0 + b_1 \sin \theta + b_2 \cos \theta,$$

$$\beta(\theta) = c_0 + c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta,$$

где $\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} t$. Введя обозначения

$$B_{0n} = a_0, \quad B_{1n} = a_{1n} \sin(n\delta\theta), \quad B_{2n} = a_2 \cos(n\delta\theta)$$

и

$$x_{B_n}^{(r)} = (B_{0n}, B_{1n}, B_{2n})^r,$$

получим ту же, что и ранее, модель измерений (13.2.8) и (13.2.9) для матриц R_n и H_n . Переходная матрица системы в этом случае запишется в виде

$$\Phi_{B_n}^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta\theta \operatorname{ctg}(n\delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta\theta \operatorname{tg}(n\delta\theta) \end{pmatrix}. \quad (13.2.10)$$

В целях упрощения расчетов на ЭВМ из матрицы (13.2.10) можно исключить тригонометрические функции, заменив их степенными рядами аргумента низких порядков. В результате этих преобразований получим матрицу $\Phi_{B_n}^{(r)}$ в виде

$$\Phi_{B_n}^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} - \frac{n(\delta\theta)^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - n(\delta\theta)^2 \end{pmatrix}.$$

Точность полученной формулы существенно зависит от шага и интервала измерений, поэтому к выбору этих параметров следует подходить с большой осторожностью.

При использовании аппроксимации параметров движения вида

$$r(\theta) = a_0 + a_1 \sin \theta + a_2 \sin 2\theta$$

переходная матрица системы отличается от матрицы (13.2.10) лишь одним элементом:

$$\Phi_{B_n}^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta\theta \operatorname{ctg}(n\delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\delta\theta \operatorname{ctg}(2\delta\theta) \end{pmatrix}.$$

Остальные матрицы рекуррентных формул (13.1.7)–(13.1.11) остаются неизменными.

Отличительной особенностью всех рассмотренных вариантов полиномиальной аппроксимации является простота расчетных формул, определяемая в основном тем об-

Таблица 13.1

Степень полинома m	Число типовых операций			Метод оценки
	$N(+)$	$N(\times)$	$N(:)$	
1	41	73	12	Фильтр Калмана
2	168	207	27	
3	655	1056	48	
1	4	6	1	Метод наименьших квадратов
2	24	53	4	
3	140	269	5	

стоятельством, что оценки параметров r , α , β находятся независимо друг от друга.

Определим число типовых операций, необходимое для реализации метода полиномиальной оценки одного параметра при использовании временных полиномов вида (13.2.1) разных степеней ($m = 1, 2, 3$). Расчет числа операций отнесем к одному шагу рекуррентной процедуры, что позволит определить общее число операций путем умножения полученных результатов на число измерений, использованных при обработке. Результаты расчета сведены в табл. 13.1. В ней же приведены аналогичные характеристики метода наименьших квадратов, использующего полиномиальную аппроксимацию параметров движения (§ 12.4).

Сравнение полученных результатов показывает, что процедура МНК-оценки параметров движения существенно экономичней процедуры с использованием фильтра Калмана. Это объясняется в основном двумя причинами: 1) МНК-оценки, рассмотренные в § 12.4, характеризуют метод групповой обработки, фильтрация ошибок измерений по Калману — рекуррентный метод; 2) в фильтре Калмана на каждом шаге проводится взвешивание ошибок измерений, в МНК-оценках эта процедура отсутствует.

Сравнение программ, реализующих сопоставляемые методы, показывает, что у метода наименьших квадратов она

значительно проще и компактнее за счет отсутствия операций обращения матриц, повторяемых на каждом шаге в рекуррентной процедуре с использованием фильтра Калмана.

В заключение рассмотрения оптимальных по точности оценок, основанных на теории оптимальной фильтрации Калмана, сделаем ряд дополнительных замечаний.

Во-первых, отметим, что независимо от принятой модели движения аппаратов и модели измерений точная реализация уравнений (13.1.7) — (13.1.11) оказывается невозможной. Это объясняется тем, что оценки ковариационных матриц, в частности матрицы $\hat{R}_n$, используют истинные значения составляющих вектора x_n , нам неизвестные, а требования практической реализации уравнений фильтра приводят к замене x_n на $\hat{x}_n$.

Второе замечание относится к методике определения точности оценок и рациональному выбору числа измерений, используемых при обработке. В целом точность оценок можно определить следом матрицы ковариаций P_n : $\text{Tr}(P_n)$. Имея ряд значений $\text{Tr}(P_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), можно определить эффективность фильтрации ошибок: если на интервале $n_1 < n < n_2$ величина $\text{Tr}(P_n)$ меняется очень мало, то это означает неэффективность проводимых измерений и их следует прекратить, в противном случае измерения надо продолжать до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность.

Важно отметить также, что скорость сходимости оценок к истинным значениям оцениваемых параметров существенно зависит от частоты и интервала измерений. Это обусловлено тем, что уменьшение интервалов измерений (повышение их частоты) приводит к снижению информативности новых измерений и сопровождается снижением скорости сходимости оценок. Анализ зависимости скорости сходимости оценок от шага измерений $\delta\theta$ показывает, что для эллиптических орбит произвольного эксцентриситета величину $\delta\theta$ целесообразно выбирать в интервале $0,1^\circ \leq \delta\theta \leq 0,5^\circ$; в этом случае при использовании современных радиотехнических измерительных систем [20] для получения достаточно точных оценок координат и скоростей достаточно реализовать всего лишь несколько десятков измерений.

Наконец, необходимо указать еще на одно важное свойство рекуррентной процедуры (13.1.7) — (13.1.11),

использующей приближенные модели движения аппаратов и измерений. Наличие погрешностей в аппроксимации уравнений движения и измерений определяет методические погрешности формул (13.1.7) — (13.1.11), которые зависят от интервала движения и начальных условий задачи. Как правило, эти погрешности возрастают с увеличением интервала движения, поэтому выбор интервала измерений, обеспечивающего достаточно точные оценки параметров, должен проводиться с учетом этой зависимости. Ввиду того, что с ростом числа измерений n , с одной стороны, дисперсии оценок уменьшаются, с другой, методические погрешности формул (13.1.7) — (13.1.11) возрастают, зависимость дисперсий оценок от числа измерений имеет вид кривой с явно выраженным минимумом при некотором значении $n = N_{\text{опт}}$. Увеличение дисперсии оценок при $n > N_{\text{опт}}$, эквивалентное снижению их точности, может служить препятствием к применению различных моделей фильтра в ряде важных практических случаев. Для предотвращения этого явления, известного под названием *расходимости*, необходимо использовать более точные модели движения аппаратов и модели измерений параметров движения. Этот путь может существенно снизить методические погрешности фильтра и расширить временной диапазон измерений, на котором можно получить достаточно точные оценки, однако он сопровождается существенным усложнением вычислительного алгоритма, реализующего процедуру фильтрации ошибок.

Существуют и другие методы борьбы с расходимостью фильтра, основанные на различных модификациях уравнений (13.1.7) — (13.1.11) или на специальных приемах учета методических ошибок. Наиболее простым в реализации является способ модификации уравнений (13.1.7) — (13.1.11), основанный на предположении, что ковариационная матрица каждого прошлого наблюдения возрастает экспоненциально во времени, т. е. прошлым наблюдениям придается меньший вес [115, 126]. Этот способ приводит к изменению уравнения фильтра (13.1.11) путем введения в него скалярного весового множителя a_Φ :

$$N_{n+1} := a_\Phi \Phi_n P_n \Phi_n^T.$$

Множитель a_Φ определяется эмпирически в зависимости от числа случайных переменных, их изменений во времени и

других факторов. При $a_\Phi = 1$ модифицированный фильтр совпадает с основным вариантом, определенным уравнениями (13.1.7) — (13.1.11).

Заметим, что оптимизация оценок параметров движения имеет важное значение в общей задаче оптимального управления сближением космических аппаратов.

§ 13.3. ОБ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ ПО ОЦЕНКАМ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

Как уже отмечалось, связь точности оценок параметров движения с оптимизацией управления сближением по энергетическим затратам определяется ясными физическими соображениями: малые ошибки оценок вызывают малые возмущения траекторий, для компенсации которых необходимы малые коррекции скорости, т. е. малые дополнительные энергетические затраты.

В общем случае оптимизация управления сближением с учетом случайных ошибок измерений параметров движения и исполнения представляет сложную стохастическую задачу со многими переменными, подлежащими оптимизации: длительность маневра, число коррекций, моменты приложений коррекций, число измерений для оценки параметров движения перед каждой коррекцией скорости и т. д.

Наиболее простым решением этой задачи является локальная оптимизация управления, предлагаемая ниже. Введем критерий оптимальности управления

$$J_{\Delta\sigma} = J - J_{2\text{ опт}}, \quad (13.3.1)$$

представляющий собой разность энергетических затрат при маневре сближения с учетом названных выше ошибок измерений и исполнения и энергетических затрат при идеальном (без учета ошибок) двухимпульсном маневре $J_{2\text{ опт}}$, длительность которого соответствует минимуму величины J_2 , т. е. величине $J_{2\text{ мин}}$.

Сформулируем принципиальный алгоритм локальной оптимизации управления сближением по критерию (13.3.1), соответствующий ряду упрощающих предположений, о которых будет сказано ниже.

Алгоритм локальной оптимизации А1.

Шаг 1. Рассчитать оценки $\hat{x}_0$, $\hat{\sigma}_{x_0}^2$ вектора $x_0 = (x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$, соответствующего моменту $\hat{\theta}_0$, принятому за начало маневра, с помощью рекуррентной процедуры (13.1.7) — (13.1.11) для принятых моделей движения и измерений [например, с использованием формул (13.1.42) — (13.1.44)].

Шаг 2. Рассчитать оптимальный угол перехода $\theta_{2\text{ опт}}$ двухимпульсного маневра сближения, соответствующего минимуму энергетических затрат $J_{2\text{ min}}$, для начальных условий $x_0 = \hat{x}_0$, определенных шагом 1.

Для определения $\theta_{2\text{ опт}}$ вычислить характеристические скорости J_i двухимпульсных маневров сближения различной длительности

$$\theta_i = i \cdot 30^\circ, \quad i = 1, 2, \dots,$$

и определить угол $\theta_{k\text{ опт}}$, соответствующий минимальному значению J_i .

Шаг 3. Принять число коррекций $N = 3$ и рассчитать моменты их приложения на интервале $[\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_{k\text{ опт}}]$, приняв, что они распределены по геометрической прогрессии (см. гл. 10) или равномерно.

Шаг 4. С учетом ошибок измерений и исполнения рассчитать энергетические затраты на управление сближением для пятиимпульсной схемы (моменты коррекций $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_k$):

$$J = \sum \Delta v_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, k.$$

Корректирующий импульс Δv_0 определяется в процессе выполнения шага 2. Импульсы $\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3, \Delta v_k$ рассчитываются следующим образом:

$$\Delta v_j = |v_{cj} - \hat{v}_j|, \quad j = 1, 2, 3, k.$$

Здесь $\hat{v}_j$ — оценки скоростей в моменты $\hat{\theta}_j$, полученные с помощью процедуры, аналогичной процедуре шага 1, по измерениям между коррекциями; v_{cj} — скорости сближения, определяемые из решения краевых задач:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_1, \quad r = \hat{r}_1; \quad \hat{\theta} = \hat{\theta}_k, \quad r = 0;$$

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_2, \quad r = \hat{r}_2; \quad \hat{\theta} = \hat{\theta}_k, \quad r = 0;$$

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_3, \quad r = \hat{r}_3; \quad \hat{\theta} = \hat{\theta}_k, \quad r = 0;$$

где $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3$ — оценки векторов положения r_1, r_2, r_3 в моменты $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, полученные одновременно с оценками $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$.

Шаг 5. Вернуться к шагам 3 и 4 при $N = 4, 5, 6, \dots$ и определить минимальное число коррекций на основании анализа неравенств типа

$$J_{(N+1)/N} = J_{N+1} - J_N < 2 \div 5 \text{ м/сек.}$$

Шаг 6. Определить критерий оптимальности (13.3.1) для трех вариантов начальных условий маневра ($\hat{x}_0, \hat{x}_0 + 3\sigma_{\hat{x}_0}, \hat{x}_0 - 3\sigma_{\hat{x}_0}$), а также диапазон его изменения $\Delta J_{\Delta v}$.

Рассмотренный алгоритм дает достаточно точные для практических применений результаты и отвечает возможностям современных БЦВМ, поскольку его основные вычислительные процедуры включают решение сравнительно небольшого числа однотипных двухточечных краевых задач, весьма просто решаемых каким-либо численным методом, например методом Ньютона [55].

Следует отметить, что алгоритм А1 оптимизации энергетических затрат основан на ряде допущений, которые, с одной стороны, позволяют существенно упростить его основные вычислительные процедуры, а с другой, — налагают на него определенные ограничения. Первое допущение состоит в предположении, что моменты оптимального распределения коррекций подчиняются закону геометрической прогрессии, а малые отклонения от него приводят к малым изменениям энергетических затрат. Это допущение справедливо при условии, что коррекции скорости вызываются в основном ошибками измерений, а не ошибками исполнения. Второе допущение связано с предположением о том, что вариации критерия оптимальности $\Delta J_{\Delta v}$ определяются лишь ошибками оценки вектора x_0 в момент начала маневра θ_0 . Это предположение связано с тем, что в момент θ_0 расстояние r_0 между сближаемыми аппаратами наибольшее и ему соответствует наибольшая по сравнению с другими коррекция скорости Δv_0 , содержащая составляющую ошибки, пропорциональную r_0 . Третье допущение связано с тем, что длительность многоимпульсного маневра принята равной оптимальной длительности идеального двухимпульсного маневра, поэтому вся процедура оптимизации, названная локальной, пред-

ставляет собой лишь приближение энергетических затрат с учетом ошибок измерений и исполнения к энергетическим затратам оптимального двухимпульсного маневра.

Путем усложнения алгоритма А1 можно получить, с одной стороны, более экономичные по энергетическим затратам программы управления, а с другой, более гибкие схемы управления с меньшим числом ограничений, налагаемых на основные характеристики маневра и собственно процесс управления. И наоборот, для сокращения объема вычислений, реализуемых с помощью БЦВМ, и упрощения общего алгоритма управления можно осуществить тщательное моделирование всех элементов маневра сближения и схемы управления на наземном аналого-цифровом комплексе и его результаты ввести в алгоритм управления в виде набора констант, вспомогательных формул или отдельных подпрограмм.

Приведем пример возможного способа упрощения алгоритма А1 локальной оптимизации. Результаты моделирования многоимпульсных программ управления сближением для широкой совокупности маневров (см. § 12.5), углы перехода которых менялись в пределах $90^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, позволили получить зависимости энергетических затрат от числа коррекций и длительности маневра. Эти зависимости показали, что для эллиптических орбит, эксцентриситет которых лежит в пределах $e = 0 \div 0,2$, число коррекций, обеспечивающих точность сближения порядка 0,5 км с расстояний до 200 км, можно выбрать из условия $N > 3$. Эта рекомендация очень показательна, поскольку она относится к равномерному закону распределения моментов коррекций, соответствующему неминимальным энергетическим затратам.

Используя приведенные выше результаты в алгоритме А1 в виде совокупности констант и логических условий, получим существенное сокращение расчетов на шагах 3 и 4.

Рассмотрим другой алгоритм оптимального по энергетическим затратам управления сближением. Он использует то обстоятельство, что при фиксированной длительности маневра и принятом числе коррекций зависимость $J = J(\vartheta_1)$ (зависимость энергетических затрат от момента приложения первой после начального импульса скорости коррекции) имеет минимум, близкий к глобальному минимуму энергетических затрат оптимального двухимпульсного

маневра. Этот факт, установленный путем анализа большого числа зависимостей $J = J(\vartheta_1)$, полученных для широкой совокупности начальных условий маневра и параметров орбит, позволяет существенно упростить вычислительную схему алгоритма, который в этом случае сводится к алгоритму одномерной оптимизации.

Алгоритм локальной оптимизации А2.

Шаг 1. По измерениям параметров r, α, β , проведенным в момент ϑ_0 , принятый за начало маневра, и в момент

$$\vartheta_{01} = \vartheta_0 + \Delta\vartheta_0, \quad \Delta\vartheta_0 \geq 20^\circ \quad \text{при} \quad e \leq 0,3,$$

вычислить значения координат $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0$ и $\tilde{x}_{01}, \tilde{y}_{01}, \tilde{z}_{01}$.

Шаг 2. Решить краевую двухточечную задачу с граничными условиями

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad x = \tilde{x}_0, \quad y = \tilde{y}_0, \quad z = \tilde{z}_0,$$

$$\vartheta = \vartheta_{01}, \quad x = \tilde{x}_{01}, \quad y = \tilde{y}_{01}, \quad z = \tilde{z}_{01}$$

и определить скорость $v_{01} = (\dot{x}_{01}, \dot{y}_{01}, \dot{z}_{01})$ в момент ϑ_{01} .

Шаг 3. Для начальных условий $\tilde{x}_{01}, \tilde{y}_{01}, \tilde{z}_{01}, \dot{x}_{01}, \dot{y}_{01}, \dot{z}_{01}$, определенных шагами 1 и 2, найти оптимальный угол перехода θ двухимпульсного маневра с помощью методики, соответствующей шагу 2 алгоритма А1.

Шаг 4. На интервале движения $[\vartheta_{01}, \vartheta_k]$, определенном шагами 1 и 3, задать моменты коррекций $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ($N = 3$) исходя из соотношений

$$\vartheta_1 - \vartheta_{01} = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \vartheta_3 - \vartheta_2 = \vartheta_k - \vartheta_3 = \frac{\vartheta_k - \vartheta_{01}}{3}.$$

Шаг 5. Рассчитать энергетические затраты пятиимпульсной программы управления с учетом ошибок измерений и исполнения (моменты коррекций скорости определены шагами 1 и 4).

Шаг 6. Вернуться к шагу 5 и для значений моментов $\vartheta_{i1} \leq \vartheta_{01}$ ($i = 1, 2, \dots$) определить оптимальную величину $\vartheta_{\text{опт}}$, соответствующую минимуму характеристической скорости. Если

$$\vartheta_2 - \vartheta_{\text{опт}} \leq 5^\circ \div 10^\circ \quad (13.3.2)$$

и $\vartheta_3 - \vartheta_2 \leq 30^\circ$, то коррекцию в момент ϑ_2 следует отменить.

При выполнении условия (13.3.2) и условия $\vartheta_3 - \vartheta_2 > 30^\circ$ коррекцию, соответствующую моменту ϑ_2 , следует перенести на момент $\vartheta_2 + 30^\circ$. Аналогичное правило отмены или переноса коррекций следует использовать и для анализа целесообразности реализации коррекции в момент ϑ_3 .

Шаг 7. Вернуться к шагам 4—6 при $N = 2, 4, 5, \dots$ и определить минимальное число коррекций, при котором достигается необходимая точность сближения, а энергетические затраты удовлетворяют соотношению

$$|J_{N+1} - J_N| \leq 2 \div 5 \text{ м/сек.}$$

Таким образом, алгоритм А2 определяет минимальное число и моменты приложения коррекций, а также энергетические затраты. Для расчета минимальных потребных энергетических затрат на маневр сближения следует на шаге 1 алгоритма А2 ввести в рассмотрение величины

$$x_0^\delta = \tilde{x}_0 + \Delta x_{0 \max}, \quad y_0^\delta = \tilde{y}_0 + \Delta y_{0 \max}, \quad z_0^\delta = \tilde{z}_0 + \Delta z_{0 \max}$$

и

$$\begin{aligned} x_{01}^\delta &= \tilde{x}_{01} + \Delta x_{01 \max}, \\ y_{01}^\delta &= \tilde{y}_{01} + \Delta y_{01 \max}, \\ z_{01}^\delta &= \tilde{z}_{01} + \Delta z_{01 \max}, \end{aligned}$$

где $\Delta x_{0 \max}, \dots, \Delta z_{01 \max}$ — максимальные ошибки определения координат в моменты ϑ_0 и ϑ_{01} , вычисляемые через ошибки измерений параметров r, α, β (см. гл. 10).

Алгоритм А2 существенно проще, чем алгоритмы, в которых используется статистическая обработка измерений.

В заключение подчеркнем, что, говоря о статистическом подходе к задаче оптимального управления сближением в ее простейшей постановке, следует подразумевать справедливый принцип разделения [12, 49], позволяющий использовать для расчета коррекций скорости обычные детерминированные методы, исходными данными в которых являются статистические оценки параметров движения, полученные к моменту расчета.

§ 13.4. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА СВОБОДНЫХ ТРАЕКТОРИЙ С ПОМОЩЬЮ БЦВМ

При использовании БЦВМ в схемах управления сближением космических аппаратов по методу свободных траекторий входными данными для вычислительной программы, реализующей алгоритм управления, служат бортовое время и измерения параметров относительного движения в некоторой известной (инерциальной или орбитальной) системе координат. Кроме того, в памяти БЦВМ должны храниться необходимые для расчетов константы: элементы опорной орбиты, номинальные значения ускорений, создаваемых отдельными двигателями маневрирования, ресурс топлива на сближение, априорные характеристики ошибок измерений, показатели требуемой конечной точности сближения и т. д.

Выходными данными этой программы являются задающие воздействия (параметры настройки) для системы управления ориентацией, программных счетчиков времени, вырабатывающих при их переполнении сигналы включения, и программных счетчиков времени или приращений скорости (интегрирующих показания акселерометров), которые вырабатывают сигналы выключения двигателей маневрирования.

Работа алгоритма управления начинается после обнаружения цели бортовой измерительной системой, когда в БЦВМ поступает соответствующий сигнал. Ввод в БЦВМ данных измерений, а также информации об угловом положении аппарата иницируется с помощью вызова подпрограммы обмена с измерительными устройствами на тех или иных стадиях вычислительного процесса.

Первый этап вычислений состоит в получении информации об относительном движении, необходимой для определения корректирующих импульсов. При этом первоначальная обработка результатов измерений может состоять в их преобразовании в орбитальную систему координат и нахождении оценок требуемых параметров (координат и скоростей или постоянных интегрирования) детерминированными методами. Далее по мере появления (или накопления) избыточных измерений могут быть применены статистические алгоритмы обработки информации, позволяющие отфильтровать флуктуационные и некоторые сис-

тематические ошибки измерений. Отдельный цикл обработки измерительной информации перед расчетом корректирующего импульса может заканчиваться либо при фиксированном числе измерений, либо по достижении заданной точности. В последнем случае вместе с оценками параметров движения должны вычисляться также ожидаемые ошибки этих оценок.

Следующий этап работы алгоритма управления связан с определением корректирующего импульса и принятием решения о коррекции. При этом уточнение оценок параметров движения по измерениям может быть продолжено и проводится в одних и тех же тактах работы БЦВМ параллельно с другими вычислениями. Однако определение корректирующего импульса, требующее сравнительно продолжительного вычислительного времени, должно основываться в этом случае не на постоянно обновляемых, а на тех оценках параметров движения, которые были получены на момент перехода к данному этапу.

Для вычисления очередного корректирующего импульса кроме оценок параметров относительного движения в орбитальной системе координат, полученных в результате обработки измерительной информации, необходимо задать расчетный момент приложения импульса и расчетный момент встречи (или время сближения). Вследствие того, что для проведения всех требуемых расчетов и возможного последующего разворота аппарата для совмещения линии действия тяги с расчетным направлением коррекции нужно время, то расчетный момент коррекции должен быть сдвинут вперед на некоторый интервал. Величину этого интервала удобно задавать постоянной исходя из наибольшей возможной длительности разворота аппарата и длительности включения двигательной установки, необходимой для отработки максимально возможного корректирующего импульса.

Расчетное время встречи может выбираться для всех коррекций либо одним и тем же, либо различным. В первом случае общее время сближения может либо определяться в зависимости от начальных условий (например, так, чтобы получить наименьший расход топлива), либо устанавливаться фиксированным независимо от начальных условий. Тогда текущее время сближения будет отсчитываться как время, оставшееся до встречи.

Во втором случае время сближения может выбираться оптимальным для каждой коррекции либо определяться из каких-либо других условий, например из условия приложения корректирующего импульса в заданном направлении. Заметим, что если время сближения для коррекции определяется каждый раз заново, то момент встречи может отдаляться и вследствие перераспределения топлива между очередным корректирующим импульсом и расчетным тормозным импульсом перехват будет «затухать». Иными словами, конечная относительная скорость, которая должна сводиться к нулю тормозным импульсом, будет постепенно уменьшаться по величине.

При выборе времени сближения могут учитываться также физические ограничения, например ограничение на высоту перицентра переходной орбиты. Как уже упоминалось ранее, сами корректирующие импульсы вычисляются в методе свободных траекторий (независимо от их номера) вместе с оценкой тормозного импульса в результате решения краевой задачи в предположении двухимпульсного маневра сближения.

Далее должен быть решен вопрос, следует или не следует реализовывать вычисленный корректирующий импульс. При этом могут использоваться различные критерии и в первую очередь критерии, связанные с оценкой точности сближения при отсутствии управления.

В методе свободных траекторий конечный промах, характеризующий точность сближения, может быть отнесен, вообще говоря, к различным моментам времени. Несомненно, наилучшей мерой точности была бы оценка расстояния наибольшего сближения с целью. Однако даже при прогнозировании относительного движения с помощью линеаризованных уравнений для нахождения этой величины нужно достаточно большое количество итерационных вычислений. Поэтому в целях сокращения вычислительного времени без больших потерь точности прогнозируемый промах, сравниваемый с некоторой допустимой величиной, уместно определять для расчетного времени встречи. При сравнении могут учитываться также ошибки промаха, зависящие от времени прогнозирования и ошибок оценки текущих параметров относительного движения.

В качестве косвенной меры конечного промаха может служить также и сама величина корректирующего

импульса. Благодаря этому решение о коррекции можно принимать, не прибегая к вычислению промаха в явном виде. В частности, коррекцию проводить бесполезно, если величина корректирующего импульса не превосходит заметно величину ошибки его исполнения.

При определении необходимости коррекции может учитываться также величина ошибки корректирующего импульса, зависящая от ошибок оценки параметров относительного движения. Например, если эта погрешность больше некоторой доли от величины импульса, сложенной с предполагаемой ошибкой исполнения, то вычисленный корректирующий импульс будет малоэффективен и не должен быть реализован. Заметим, что критерии коррекции, основанные только на оценке промаха, могут проверяться еще до расчета корректирующего импульса.

В целях экономии топлива окончательное решение о коррекции можно основывать на определении знака производной от суммы величин корректирующего и тормозного импульсов по времени приложения коррекций. Если эта сумма убывает, то коррекция откладывается на более поздний срок. В противном случае вычисленный корректирующий импульс должен быть реализован. Определить знак производной можно достаточно просто, сравнивая значения суммарного приращения скорости, соответствующие двум близким моментам приложения корректирующего импульса.

Очевидно, такой критерий выбора моментов коррекции совместно с оптимизацией времени сближения позволяет в некоторых случаях достигать существенной экономии топлива по сравнению с жесткими программами коррекции. Однако коррекции будут оптимальными лишь в локальном смысле. То, что данный момент более выгоден для проведения коррекции, чем близкие к нему моменты, вовсе не означает, что он будет более выгодным и по сравнению со всеми будущими моментами времени.

Если принято решение выполнить коррекцию, то следующим шагом работы алгоритма может быть выбор двигателей для отработки расчетного приращения скорости. В основу выбора может быть положена оценка расхода топлива на реализацию корректирующего импульса по декартовой или полярной схеме с учетом разницы расходов

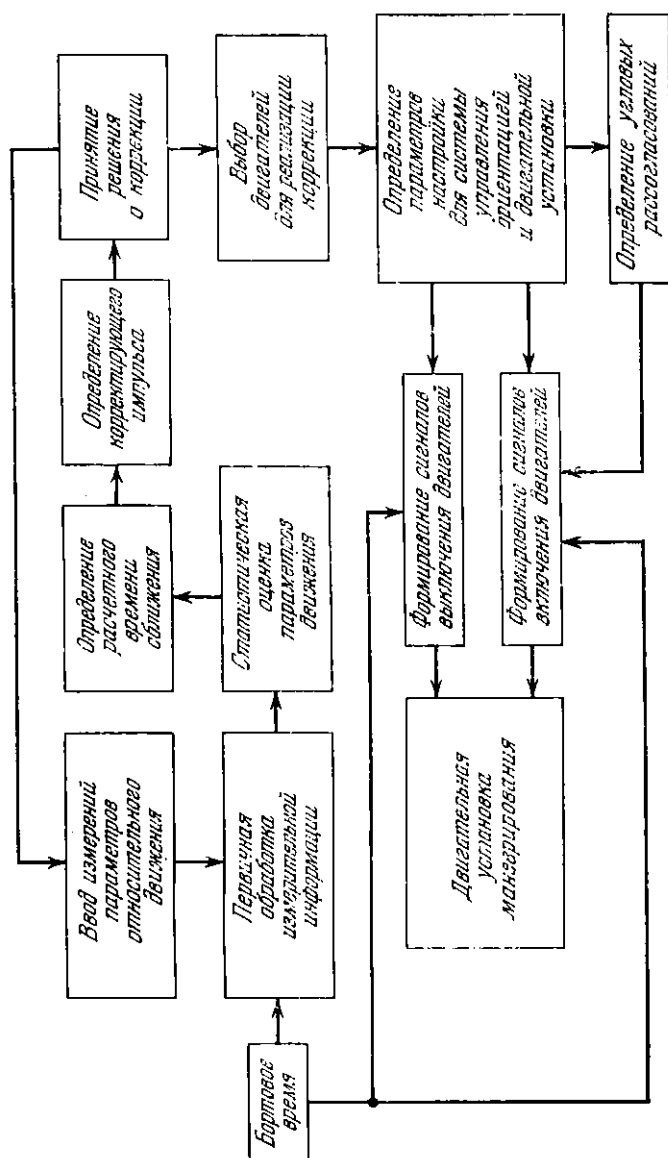


Рис. 13.1.

топлива на управление ориентацией. Более простым критерием будет величина приращения скорости, сравниваемая с некоторой пороговой величиной.

Далее, в соответствии с выбранной схемой управления вектором тяги производится расчет задающих воздействий (параметров настройки) и формируются сигналы, управляющие ориентацией и включением и выключением двигателей маневрирования.

Поскольку расчет коррекций основывается на импульсной аппроксимации, то при их реализации с помощью ограниченной по величине тяги будут возникать некоторые промахи.

Для уменьшения влияния ограниченности тяги двигатели можно включать не в расчетные моменты коррекции, а с опережением на половину периодов их работы, вычисляемых по приращениям скорости и номинальным значениям управляющих ускорений [86]. Более точные поправки к моментам включения двигателей и длительности их работы могут быть вычислены в результате решения краевой задачи итерационным методом Ньютона, если в качестве начального приближения использовать импульсную траекторию сближения [31, 88]. Для многих случаев достаточно хорошую точность обеспечивает уже первая итерация.

После реализации коррекции должно быть установлено начало нового цикла осреднения параметров относительного движения. Статистическая обработка информации может возобновляться либо сразу же после исполнения коррекции и повторного поиска и захвата цели (в случае ее потери при разворотах аппарата), либо спустя некоторое время, в течение которого часть приборов может отключаться в целях экономии электроэнергии. При этом новые оценки параметров движения могут включать в себя старые оценки, исправленные с учетом влияния корректирующего импульса на относительное движение аппаратов на рассматриваемом интервале времени.

Процедуры, сопутствующие расчету импульсных коррекций, должны заканчиваться проверкой условий перехода к участку причаливания и стыковки.

Общая блок-схема одного из возможных алгоритмов автономного управления сближением по методу свободных траекторий представлена на рис. 13.1.

В заключение отметим, что перечисленные выше возможные процедуры и логические критерии дают в различных комбинациях весьма большое количество вариантов алгоритма управления сближением. Выбор наиболее рациональных вычислительных и логических схем, отвечающих возможностям реального приборного оборудования и БЦВМ, должен производиться в результате тщательного статистического моделирования процесса сближения на ЭВМ исходя из априорных вероятностных характеристик начальных условий и ошибок бортовой системы управления.

ОЦЕНКИ КОНСТАНТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Измерения $\tilde{r}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ параметров r , α , β определяют координаты относительного движения аппаратов

$$\tilde{x}_n = \tilde{r}_n \cos \tilde{\beta}_n \cos \tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{y}_n = \tilde{r}_n \cos \tilde{\beta}_n \sin \tilde{\alpha}_n, \quad \tilde{z}_n = \tilde{r}_n \sin \tilde{\beta}_n$$

в моменты $\theta_n = \theta_0 + n\delta\theta$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Оценки констант интегрирования $k_1, \dots, k_6$ методом наименьших квадратов определяются уравнениями

$$\begin{aligned} [\tilde{x}_n] &= N\hat{k}_1 + \hat{k}_2 [b_{1n}] + \hat{k}_4 [b_{2n}] + \hat{k}_5 [b_{3n}], \\ [\tilde{x}_n b_{1n}] &= \hat{k}_1 [b_{1n}] + \hat{k}_2 [b_{1n}^2] + \hat{k}_4 [b_{1n} b_{2n}] + \hat{k}_5 [b_{3n} b_{1n}], \\ [\tilde{x}_n b_{2n}] &= \hat{k}_1 [b_{2n}] + \hat{k}_2 [b_{1n} b_{2n}] + \hat{k}_4 [b_{2n}^2] + \hat{k}_5 [b_{2n} b_{3n}], \\ [\tilde{x}_n b_{3n}] &= \hat{k}_1 [b_{3n}] + \hat{k}_2 [b_{1n} b_{3n}] + \hat{k}_4 [b_{2n} b_{3n}] + \hat{k}_5 [b_{3n}^2]; \\ [\tilde{z}_n b_{7n}] &= \hat{k}_3 [b_{7n}^2] + \hat{k}_6 [b_{7n} b_{8n}], \\ [\tilde{z}_n b_{8n}] &= \hat{k}_3 [b_{7n} b_{8n}] + \hat{k}_6 [b_{8n}^2], \end{aligned}$$

где $[\tilde{x}_n] = \sum_{n=1}^N \tilde{x}_n$, $[\tilde{x}_n b_{1n}] = \sum_{n=1}^N (\tilde{x}_n b_{1n})$ и т. д.

Коэффициенты b_{1n} , b_{2n} , b_{3n} , b_{7n} , b_{8n} в этих формулах определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} b_{1n} &= 3\theta_n \lambda_n^2, \quad b_{2n} = (1 + \lambda_n) \sin \vartheta_n, \quad b_{3n} = -(1 + \lambda_n) \cos \vartheta_n, \\ b_{7n} &= \cos \vartheta_n, \quad b_{8n} = \sin \vartheta_n, \quad \lambda_n = 1 + e \cos \vartheta_n, \end{aligned}$$

$$\theta_n = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_n} \frac{d\vartheta}{\lambda^3}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**ОСНОВНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ
БОРТОВЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ [20]**

Тип	Измеряе- мые па- раметры	Даль- ность действия	Характеристика точности	Вес	Приме- ча- ние
Gemini	r	100 км	$\Delta r = \begin{cases} 1\% \text{ от } r \text{ при} \\ \text{больших } r; 6 \text{ м} \\ \text{при малых } r \end{cases}$	7,2 кг	Работает с ответчи- ком весом 5,6 кг
Stelatal	r $\dot{r}$ α $\dot{\alpha}$	1600 км	$\Delta r = \begin{cases} 0,004 \text{ м} \pm 10 \text{ м} \\ \text{при больших } r; \\ 0,0003 \text{ м} \pm 6 \text{ м} \\ \text{при малых } r \end{cases}$ $\Delta \dot{r} = 0,06 \text{ м/сек}$ $\Delta \alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$ $\Delta \dot{\alpha} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек}$	21,2 кг	Работает с ответчи- ком весом 20 кг

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МОМЕНТЫ ОШИБОК ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТ И СКОРОСТЕЙ ПО ЕДИНИЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Обозначения:

r — расстояние между аппаратами;

α — угол наклона проекции вектора $\mathbf{r}$ на плоскость орбиты относительно местного горизонта;

β — угол наклона вектора $\mathbf{r}$ относительно плоскости орбиты аппарата-цели.

Вспомогательные переменные:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \cos \alpha \cos \beta, & \gamma_2 &= \sin \alpha \cos \beta, \\ \gamma_3 &= \sin \beta \cos \alpha, & \gamma_4 &= \sin \alpha \sin \beta;\end{aligned}$$

$$f_1 = -\dot{\beta}\gamma_3 - \dot{\alpha}\gamma_2, \quad f_2 = -\dot{r}\gamma_2 + r\dot{\beta}\gamma_4 - r\dot{\alpha}\gamma_1,$$

$$f_3 = -\dot{r}\gamma_3 - r\dot{\beta}\gamma_1 + r\dot{\alpha}\gamma_4, \quad f_4 = \dot{\alpha}\gamma_1 - \dot{\beta}\gamma_4,$$

$$f_5 = -r\dot{\alpha}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_1 - r\dot{\beta}\gamma_3, \quad f_6 = -\dot{r}\gamma_4 - r\dot{\beta}\gamma_2 - r\dot{\alpha}\gamma_3,$$

$$f_7 = \dot{r} \cos \beta - r\dot{\beta} \sin \beta.$$

В этих формулах значения r , $\dot{r}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ выражаются через координаты и скорости относительного движения аппаратов следующими равенствами:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r} (xv_x + yv_y + zv_z),$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{r}y}{rx} - \frac{zx\dot{\beta}}{y(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

$$\dot{\beta} = \frac{rv_x - \dot{r}z}{r(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Известные дисперсии ошибок измерений параметров r , α , β , $\dot{r}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ обозначим через $D_r, D_\alpha, \dots, D_{\dot{\beta}}$. Тогда корреляционные моменты ошибок оценок определяются следующими соотношениями, если считать ошибки

измерений независимыми:

$$D_{xx} = \gamma_1^2 D_r + r^2 \gamma_2^2 D_\alpha + r^2 \gamma_3^2 D_\beta,$$

$$D_{yy} = \gamma_2^2 D_r + r^2 \gamma_1^2 D_\alpha + r^2 \gamma_4^2 D_\beta,$$

$$D_z = \sin^2 \beta D_r + (r \cos \beta)^2 D_\beta;$$

$$D_{ox} = \gamma_1^2 D_r + r^2 \gamma_3^2 D_\beta + r^2 \gamma_2^2 D_\alpha + f_1^2 D_r + f_2^2 D_\alpha + f_3^2 D_\beta,$$

$$D_{oy} = \gamma_2^2 D_r + r^2 \gamma_4^2 D_\beta + f_5^2 D_\alpha + f_6^2 D_\beta + r^2 \gamma_1^2 D_\alpha + r^2 \gamma_4^2 D_\beta,$$

$$D_{oz} = \sin^2 \beta D_r + (\beta \cos \beta)^2 D_r + (r \cos \beta)^2 D_\beta + f_7^2 D_\beta;$$

$$K_{xy} = \gamma_1 \gamma_2 D_r - \gamma_1 \gamma_2 D_\alpha + \gamma_3 \gamma_4 D_\beta,$$

$$K_{xz} = \gamma_1 \sin \beta D_r - r^2 \gamma_3 \cos \beta D_\beta,$$

$$K_{yz} = \gamma_2 \sin \beta D_r - r^2 \gamma_4 \cos \beta D_\beta;$$

$$K_{xvx} = \gamma_1 f_1 D_r - r \gamma_2 f_2 D_\alpha - r \gamma_3 f_3 D_\beta,$$

$$K_{xvy} = \gamma_1 f_4 D_r - r \gamma_2 f_5 D_\alpha - r \gamma_3 f_6 D_\beta,$$

$$K_{xvz} = \gamma_1 \beta \cos \beta D_r - r \gamma_3 f_7 D_\beta,$$

$$K_{yvx} = \gamma_2 f_1 D_r + r \gamma_1 f_2 D_\alpha + r \gamma_4 f_3 D_\beta,$$

$$K_{yvy} = \gamma_2 f_4 D_r + r \gamma_1 f_5 D_\alpha - r \gamma_4 f_6 D_\beta,$$

$$K_{yvz} = \gamma_2 \beta \cos \beta D_r - r \gamma_4 f_7 D_\beta,$$

$$K_{zvx} = f_1 \sin \beta D_r + f_3 r \cos \beta D_\beta,$$

$$K_{zvy} = f_4 \sin \beta D_r + f_6 r \cos \beta D_\beta,$$

$$K_{zvx} = \sin \beta \beta \cos \beta D_r + f_7 r \cos \beta D_\beta;$$

$$K_{vxvx} = f_1 \sin \beta D_r + \beta \cos \beta f_1 D_r + f_3 f_7 D_\beta - r^2 \gamma_3 \cos \beta D_\beta,$$

$$K_{vyvy} = \gamma_2 \sin \beta D_r + f \beta \cos \beta D_r + f_6 f_7 D_\beta - f_4 r^2 \cos \beta D_\beta,$$

$$K_{vxyy} = f_1 \gamma_2 D_r + f_4 f_1 D_r + f_2 f_5 D_\alpha + f_3 f_6 D_\beta - r^2 \gamma_1 \gamma_2 D_\alpha + f_2 f_6 D_\beta.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизация обработки, передачи и отображения радиолокационной информации, под ред. В. Г. Корякова. «Советское радио», 1975.
2. Аким Э. Л., Энесов Т. М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. Космические исследования, I, вып. 1, 1963.
3. Алабушев П. М., Еронимус В. Б., Минкевич Л. М., Шеховцов Б. А. Теория подобия и размерностей. Моделирование. «Высшая школа», 1968.
4. Аншаков Г. П., Кудюров Л. В. Об одном методе управления при «мягкой» встрече космических аппаратов на орбите. Космические исследования, IX, вып. 6, 1971.
5. Аоки М. Оптимизация стохастических систем, перев. с англ. «Наука», 1971.
6. Бажинов И. К., Алешин В. И., Почукаев В. Н., Поляков В. С. Космическая навигация. «Машиностроение», 1975.
7. Балахонцев В. Г., Иванов В. А., Шабанов В. И. Сближение в космосе. Воениздат, 1973.
8. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства, перев. с англ. «Мир», 1965.
9. Беллман Р. Динамическое программирование, перев. с англ. ИЛ, 1960.
10. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования, перев. с англ. «Наука», 1965.
11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, II. Физматгиз, 1960.
12. Богуславский И. А. Методы навигации и управления по неполной информации. «Машиностроение», 1970.
13. Болтянский В. Г. Математические методы оптимизации. «Наука», 1966.
14. Брагазин А. Ф., Ермилов Ю. А. Оптимальные энергетические характеристики метода параллельного наведения при сближении спутников. Космические исследования, X, вып. 5, 1972.
15. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления, перев. с англ. «Мир», 1972.
16. Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т. Основы экспериментальной космической баллистики. «Машиностроение», 1974.
17. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. «Наука», 1973.
18. Бурцев А. А. Полиномиальный метод оценки и прогноза параметров движения. В сб. «Техника преобразования инфор

- мации», Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики, вып. 83, 1975.
19. Бэттин Р. Наведение в космосе, перев. с англ. «Машиностроение», 1966.
 20. Волковский С. Т., Оноприенко Е. Ф., Савинов В. А. Радиоустройства систем управления летательными аппаратами. «Машиностроение», 1972.
 21. Герасимов В. В. Оценка вектора состояния динамической системы по результатам независимых измерений, В сб.: «Техника преобразования информации», Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики, вып. 83, 1975.
 22. Голубев Ю. Ф., Филипович И. В. Моделирование управления входом в атмосферу для ЦВМ с ограниченными возможностями. Препринт Института прикладной математики АН СССР, № 115, 1974.
 23. Горбунов А. Д., Шахов Ю. А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. Журнал вычислительной математики и математической физики, 3, № 2, 1963; 4, № 3, 1964.
 24. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. «Наука», 1975.
 25. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. «Наука», 1972.
 26. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. «Наука», 1966.
 27. Динамика управления ракет с БЦВМ, под ред. М. С. Хитрика и С. М. Федорова. «Машиностроение», 1972.
 28. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. Физматгиз, 1961.
 29. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Физматгиз, 1963.
 30. Ерилов Ю. А. О расчете импульсов для сближения спутников в центральном ньютоновском поле тяготения. Космические исследования, VI, вып. 6, 1968.
 31. Ерилов Ю. А. Программирование управления с учетом ограниченности тяги для сближения спутников по методу свободных траекторий. Космические исследования, VIII, вып. 2, 1970.
 32. Ерилов Ю. А. Общее решение уравнений относительного движения спутников во втором приближении. Космические исследования, X, вып. 6, 1972.
 33. Ерилов Ю. А. Определение орбитальной системы координат при сближении спутников. Космические исследования, XII, вып. 2, 1974.
 34. Ерилов Ю. А. Решение задачи Ламберта в относительной системе координат. Космические исследования, XV, вып. 3, 1977.
 35. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Физматгиз, 1960.

36. И в а н о в а Е. Е. Исследования движения космических аппаратов методами теории подобия. Прикладная математика и механика, 35, вып. 5, 1971.
37. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа, изд. 4-е. Гостехиздат, 1952.
38. К о т е л е в с к и й А. Н. Рекуррентные методы Рунге — Кутты численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Труды семинара «Основные и типовые программы для вычислительных машин и систем», вып. 2, Изд-во АН СССР, Киев, 1969.
39. К р о т о в В. Ф., Г у р м а н В. И. Методы и задачи оптимального управления. «Наука», 1973.
40. К у з м а к Г. Е. Линейризованная теория оптимальных перелетов. Космические исследования, III, вып. 1, 1965.
41. К у з ь м и н С. З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. «Советское радио», 1974.
42. Л е б е д е в А. А., С о к о л о в В. Б. Встреча на орбите. Динамика полета и управление космическими аппаратами. «Машиностроение», 1969.
43. Л е г о с т а е в В. П., Р а у ш е н б а х Б. В. Автоматическая сборка в космосе. Космические исследования, VII, вып. 6, 1969.
44. Л и Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление, перев. с англ. «Наука», 1966.
45. Л и д о в М. Л. Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траекторий и выборе системы измерений и алгоритмы их решений. Космические исследования, IX, вып. 5, 1971.
46. Л и н н и к Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1962.
47. Л о у д е н Ф. Оптимальные траектории для космической навигации, перев. с англ. «Мир», 1966.
48. Л у р ь е А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
49. М е д и ч Д. Ж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление, перев. с англ. «Энергия», 1973.
50. М и е л е А. Механика полета, I. Теория траекторий полета, перев. с англ. «Наука», 1965.
51. Операция встречи. Экспресс-информация, серия «Астронавтика и ракетодинамика», № 24, изд. ВИНТИ, 1970.
52. Основы теории полета космических аппаратов, под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. «Машиностроение», 1972.
53. О х о ц и м с к и й Д. Е., Г о л у б е в Ю. Ф., С и х а р у л и д з е Ю. Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. «Наука», 1975.
54. П а н к р а т ь е в В. Г. Об эффективности методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. «Наука», 1971.
55. П а н т ю ш и н С. В. Итерационный метод расчета двухимпульсных маневров сближения космических аппаратов. Космические исследования, X, вып. 3, 1972.
56. П а н т ю ш и н С. В. Полиномиальный метод оптимальной оценки. В сб.: «Теория автоматического регулирования и уп-

- равления», Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики, вып. 81, 1975.
57. Платонов А. К. Исследование свойств корректирующих маневров в космическом полете. Космические исследования, IV, вып. 5, 1966.
 58. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход, перев. с англ. «Мир», 1974.
 59. Пономарев В. М. Теория управления движением космических аппаратов. «Наука», 1965.
 60. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
 61. Порфирьев Л. В., Смирнов В. В., Середа Ю. А. Аналитические оценки точности определения параметров движения ИСЗ по измерениям положения звезд относительно запущенного со спутника зонда. Космические исследования, IX, вып. 6, 1971.
 62. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли, под ред. С. Ф. Сингера, перев. с англ. «Наука», 1966.
 63. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. «Наука», 1975.
 64. Радиоуправление реактивными снарядами и космическими аппаратами, под ред. Л. С. Гуткина. «Советское радио», 1968.
 65. Расстригин Л. А. Системы экстремального управления. «Наука», 1974.
 66. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. «Наука», 1974.
 67. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. «Наука», 1967.
 68. Сихарулидзе Ю. Г. Оптимальное сближение на орбите. Известия высших учебных заведений, серия «Авиационная техника», 11, № 1, 1968.
 69. Сихарулидзе Ю. Г. Исследование оптимальных режимов сближения космических аппаратов. Космические исследования, VII, вып. 1, 1969.
 70. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. «Наука», 1968.
 71. Терентьева Г. Г. Оптимизация управления движением в центральном поле тяготения. В сб.: «Техника преобразования информации», Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики, вып. 83, 1975.
 72. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума, перев. с англ. «Наука», 1967.
 73. Управление космическими летательными аппаратами, под ред. К. Леондеса, перев. с англ. «Машиностроение», 1967.
 74. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. «Наука», 1966.
 75. Худсон Д. Статистика для физиков, перев. с англ. «Мир», 1970.
 76. Чарный В. И. Об изохронных производных. В сб.: «Искусственные спутники Земли», вып. 16, Изд-во АН СССР, 1963.

77. Ч а р н ы й В. И. О вторых производных параметров движения по начальным условиям. *Космические исследования*, VI, вып. 2, 1968.
78. Ш е с т а к о в И. Н. К задаче оптимального управления движением космического аппарата вдоль бинормали к опорной орбите. *Космические исследования*, VI, вып. 3, 1967.
79. Э л ь с б е р г П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. «Наука», 1965.
80. Э с к о б а л П. Определение орбит, перев. с англ. «Мир», 1970.
81. Я б л о н ь к о Ю. П. Исследование метода экспоненциального управления сближением космических аппаратов. *Космические исследования*, XI, вып. 4, 1973.
82. A l f r i e n d K. T., K a s h i w a g i Y. Minimum-time orbital rendezvous between neighbouring elliptic orbits. *J. Optimiz. Theory and Applications*, 4, No. 4, 1969. (См. также: Оптимальный по быстродействию маневр встречи на близких эллиптических орбитах. Экспресс-информация, серия «Астронавтика и ракетодинамика», № 21, изд. ВИНТИ, 1970).
83. A n t h o n y M. L., S a z a k i F. T. Rendezvous problem for nearly circular orbits. *AIAA J.*, 3, No. 9, 1965. (Имеется русский перевод: А н т о н и, С а з а к и. Проблема встречи на близких к круговым орбитах. Ракетная техника и космонавтика, № 9, 1965).
84. B e n d e r D. F. Rendezvous possibilities with the impulse of the optimum two-impulse transfer. *Advances in the Astronautical Sciences*, Pt. I — Space Rendezvous, Rescue and Recovery, 16, 1963.
85. B o r n D. C. Control criteria for manual orbital rendezvous. *Advances in the Astronautical Sciences*, Pt. I — Space Rendezvous, Rescue and Recovery, 16, 1963. (Имеется русский перевод: Б о р н Д. С. Критерии качества ручного управления орбитальной встречей. Вопросы ракетной техники, № 9, 1965).
86. B u r t o n J. R., H a y e s W. E. Gemini rendezvous. *J. of Spacecraft and Rockets*, 3, No. 1, 1966. (Имеется русский перевод: Б а р т о н, Х е й е с. Встреча и стыковка космического аппарата «Джеминай». Ракетная техника и космонавтика, № 2, 1966).
87. B y r n e I. D., L a m b e r t R. J. Pseudo-Runge — Kutta methods involving two points. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 13, No. 1, 1966.
88. C h o n g H u n g - Z e e. Finite-thrust explicit guidance law for nearly circular orbital rendezvous. *J. of Spacecraft and Rockets*, 4, No. 1, 1967. (Имеется русский перевод: Ч о н Х у н ь - ц и. Закон управления для встречи с конечной тягой на около-круговой орбите. Ракетная техника и космонавтика, № 2, 1967).
89. C o c c h i K. C. Exact first-order solution of navigation-guidance mechanization and error propagation equations for two-body reference orbits. *AIAA J.*, 2, No. 2, 1964. (Имеется русский перевод: К о ш и. Точные линеаризованные уравнения для оп-

- ределения закона наведения и изменения ошибок в координатах и скоростях для номинальных орбит в задаче двух тел. Ракетная техника и космонавтика, № 2, 1964).
90. Contensou P. Etude théorique des trajectoires optimales dans in champ de gravitation, application au cas d'un center d'attraction unique. *Astronautica Acta*, 8, 1962.
 91. Danby J. M. A. The matrizant of Keplerian motion. *AIAA J.*, 2, No. 1, 1964). (Имеется русский перевод: Дэ н б и. Матризант кеплеровского движения. Ракетная техника и космонавтика, № 1, 1964).
 92. Eckel K. G. Expense versus time in orbital transfer to rendezvous. *Proceedings of the 17th International Astronautical Congress*, Madrid, 1966.
 93. Edelbaum T. N. Minimum impulse transfer in the near vicinity of a circular orbit. *J. of the Astronautical Sciences*, 14, No.2, 1967.
 94. Elmer E. G., Harasty G. A. A class of fixed-time fuel-optimal impulsive control problems and an efficient algorithm for their solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16, No. 1, 1971. (См. также: Алгоритм импульсного управления с минимальным расходом топлива на фиксированном интервале. Экспресс-информация, серия «Системы автоматического управления», № 41, изд. ВИНТИ, 1971).
 95. Euler E. A., Shulman Y. Second approximation to the elliptical rendezvous problem. *AIAA J.*, 5., No. 5 1967. (Имеется русский перевод: Эйлер, Шульман. Решение задачи встречи на эллиптической орбите во втором приближении. Ракетная техника и космонавтика, № 5, 1967.)
 96. Gobetz F. W., Doll J. R. A survey of impulsive trajectories. *AIAA J.*, 7, No. 5, 1969). (Имеется русский перевод: Гобец, Долл. Обзор импульсных траекторий. Ракетная техника и космонавтика, № 5, 1969).
 97. Goldstein A. A., Greene A. H., Johnson A. T., Seidman T. J. Fuel optimization in orbital rendezvous. *AIAA Progress in the Astronautics and Aeronautics: Guidance and Control-II*, 13, 1964.
 98. Goodyear W. H. Completely general closed-form solution for coordinates and partial derivatives of two-body problem. *The Astronomical J.*, 70, No. 3, 1965.
 99. Green W. G. Logarithmic navigation for precise guidance of space vehicles. *IRE Transactions*, ANE-8, No. 2, 1961.
 100. Harrison E. Rendezvous energy requirement for collision and pursuit course guidance. *Advances in the Astronautical Sciences*, Pt. I — Space Rendezvous, Rescue and Recovery, 16, 1963. (Имеется русский перевод: Харрисон. Энергия, требуемая для встречи при инерциальном и орбитальном параллельных сближениях. Вопросы ракетной техники, № 7, 1965).
 101. Herrie S. Positions, velocities, ephemerides referred to the dynamical center. University of California at Los Angeles, *Astrodynamic lecture note*, Chapter 6. Air Force Office of Scientific Research, TN 60-733, 1960.

102. H u a n g H. Y. Unified approach to quadratically convergent algorithms for function minimization. *J. of Optimization Theory and Applications*, 5, No. 1—6, 1970. (см. также: Унифицированный алгоритм минимизации функций с квадратичной сходимостью. Экспресс-информация, серия «Техническая кибернетика», № 21, изд. ВИНТИ, 1971.)
103. J e z e w s k i D. J., R o s e n d a a l H. L. An efficient method for calculating optimal free-space N -impulsive trajectories. *AIAA J.*, 6, No. 11, 1968. (Имеется русский перевод: Е ж е в с к и, Р о з е н д а а л. Эффективный метод расчета N -импульсных траекторий полета в космическом пространстве. Ракетная техника и космонавтика, № 11, 1968).
104. K o l b e O., S a g i r o w P. Die strenge optimale Lösung eines speziellen Rendezvousproblemes. *Zeitschrift für Flugwissenschaft*, 19, Nr. 4, 1968. (См., также: Строго оптимальное решение одной специальной задачи встречи. Экспресс-информация, серия «Астронавтика и ракетодинамика», № 31, изд. ВИНТИ, 1968.)
105. K r i e g s m a n B. A., R e i s s M. H. Terminal guidance and control techniques for soft lunar landing. *ARS J.*, 32, No. 3, 1962. (Имеется русский перевод: К р и г с м а н, Р а й с. Методы наведения и управления на конечном участке для мягкой посадки на Луну. Ракетная техника, № 3, 1962.)
106. L a w d e n D. F. Optimal program for correctional maneuvers. *Astronautica Acta*, 6, No. 1, 1960.
107. L i o n P. M., H a n d e l s m a n M. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. *AIAA J.*, 6, No. 1, 1968. (Имеется русский перевод: Л а й о н, Х э н д е л с м е н. Базис-вектор для импульсных траекторий с закрепленным временем. Ракетная техника и космонавтика, № 1, 1968.)
108. L o g s d o n T. S., A f r i c a n o R. C. A modified Monte Carlo procedure. *AIAA J.*, 6, No. 6, 1968. (Имеется русский перевод: Л о г с д о н, А ф р и к а н о. Об одной модификации метода Монте-Карло. Ракетная техника и космонавтика, № 6, 1968.)
109. L o n d o n H. Second approximation to the solution of the rendezvous equations. *AIAA J.*, 1, No. 7, 1963. (Имеется русский перевод: Л о н д о н. Второе приближение решения уравнений встречи. Ракетная техника и космонавтика, № 7, 1963.)
110. M a r e s J. P. Transferts economique entre orbits infinitement proches. *Proceedings of the 16th Congress of the International Astronautical Federation*.
111. M i n k o f f M., L i o n P. M. Orbital multi-impulse rendezvous trajectories. *IAE Paper No. AD 143*, 1968. (См. также: Оптимальные многоимпульсные траектории встречи. Экспресс-информация, серия «Астронавтика и ракетодинамика», № 21, изд. ВИНТИ, 1969).
112. N e u s t a d t L. W. A general theory of minimum fuel space trajectories. *SIAM J. on Control*, series A, 3, No. 2, 1965.
113. N i e m i N. J. An investigation of a terminal guidance system for a satellite rendezvous. *AIAA J.*, 1, No. 2, 1963. (Имеется русский перевод: Н а й м и. Исследование системы наведения

- для конечного участка орбитальной встречи. Ракетная техника и космонавтика, № 2, 1963.)
114. P a i e w o n s k y В. Н., W o o d r o w Р. J. Three-dimensional time optimal rendezvous. J. of Spacecraft and Rockets, 3, No. 11, 1966. (Имеется русский перевод: П а в о н с к и й, В у д р о у. Задача пространственной оптимальной по быстродействию встречи. Ракетная техника и космонавтика, № 12, 1966).
 115. P i n e s S. Modifications of the Goddard minimum variance program for the processing of real data. Analitical Mechanics Associates, JTR Nas 5-2535, Oct. 1964.
 116. P i t k i n E. T. Second transitions partical derivatives via universal variables. The J. of the Astronautical Sciences, 13, No. 5, 1966
 117. P i t k i n E. T. A general solution of the Lamberts problem. The J. of the Astronautical Sciences, 15,, No. 5, 1968. (См. также: Общее решение задачи Ламберта. Экспресс-информация, серия «Астронавтика и ракетодинамика», № 32, изд. ВИНТИ, 1970).
 118. P r u s s i n g J. E. Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. AIAA J., 7, No. 5, 1969. (Имеется русский перевод: П р а с с и н г. Оптимальная четырехимпульсная встреча в фиксированной момент времени в окрестности круговой орбиты. Ракетная техника и космонавтика, № 5, 1969).
 119. P r u s s i n g J. E. Optimal two- and three-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. AIAA J., 8, No 7, 1970. (Имеется русский перевод: П р а с с и н г. Оптимальные двух и трехимпульсные встречи в окрестности круговой орбиты при фиксированном времени перехода. Ракетная техника и космонавтика, № 7, 1970.)
 120. R o b b i n s Н. М. An analytical study of impulsive approximation. AIAA J., 4, No. 8, 1966. (Имеется русский перевод: Р о б б и н с. Аналитическое исследование импульсной аппроксимации. Ракетная техника и космонавтика, № 8, 1966).
 121. S c h n e i d e r А. М., P r u s s i n g J. E., T i m i n М. Е. A manuel method for space rendezvous navigation and guidance. AIAA Paper No. 859, 1968. (См. также: Ручной метод навигации и управления для встречи в космосе. Экспресс-информация, серия «Астронавтика и ракетодинамика», № 13, изд. ВИНТИ, 1969.)
 122. S h a p i r o М. An attenuated intercept satellite rendezvous system. ARS J., 31, No. 12, 1961. (Имеется русский перевод: Ш а п и р о. Система наведения для выполнения встречи спутников, основанная на принципе «затухающего перехвата». Ракетная техника, № 12, 1961.)
 123. S t a p l e f o r d R. L. An automatic flight path control system for the terminal phase of orbital rendezvous. AAS Preprint 62-10, 1962.
 124. S t e f f a n K. F. A satellite rendezvous terminal guidance system. ARS J., 31, No. 11, 1961. (Имеется русский перевод:

- С т е ф а н. Система наведения на конечном участке для встречи спутников. Ракетная техника, № 11, 1961).
125. S t u m p f K. Neue Formeln und Hilfstafeln zur Ephemeridenrechnung. Astronomische Nachrichten, 275, Nr. 9, 1947.
 126. T a r n T z y n Y o n g, Z a b o r s k y Y. A practical, non-diverging filter. AIAA J., 8, No. 6, 1970. (Имеется русский перевод: Т а р н Ц и - и о н г, З а б о р ш с к и й. Практически нерасходящийся фильтр. Ракетная техника и космонавтика, № 6, 1970.)
 127. T s c h a u n e r J. F. A., H e m p e l P. R. Minimum-fuel rendezvous techniques. J. of Spacecraft and Rockets, 2, No. 5, 1965.
 128. T s c h a u n e r J. Elliptic orbit rendezvous. AIAA J., 5, No. 6, 1967. (Имеется русский перевод: Ч а у н е р. Встреча на эллиптической орбите. Ракетная техника и космонавтика, № 6, 1967.)
 129. V a n G e l d e r A., B e t r a m i E., M u n i c k H. On minimum time minimum fuel rendezvous. SIAM J., 9, No. 3, 1961.

