

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

---

Под редакцией Л. К. ПАРШИНА

Издание пятое,  
стереотипное

*РЕКОМЕНДОВАНО Учебно-методическим объединением  
по университетскому политехническому образованию  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по направлениям и специальностям  
в области техники и технологий*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2022

ББК 30.121я73

С 23

**С 23** Сборник задач по сопротивлению материалов: Учебное пособие / Под ред. Л. К. Паршина. — 5-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2022. — 432 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-0865-8**

В сборнике представлены задачи по основным разделам современного курса сопротивления материалов. Наиболее характерные задачи в каждой из глав сборника даны с решениями или указаниями.

Содержание сборника соответствует современной программе по сопротивлению материалов в высших технических образовательных учреждениях и предназначен для студентов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям.

**ББК 30.121я73**

**Коллектив авторов:**

*Николай Михайлович БЕЛЯЕВ, Лев Константинович ПАРШИН,  
Борис Евгеньевич МЕЛЬНИКОВ, Владимир Алексеевич ШЕРСТНЕВ,  
Наталья Вячеславовна ЧЕРНЫШЕВА*

Обложка  
*А. Ю. ЛАПШИН*

© Издательство «Лань», 2022

© Коллектив авторов, 2022

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2022

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Прошло более 30 лет с момента выхода в свет (1972) популярного Сборника задач по сопротивлению материалов под ред. В. К. Качурина. В авторском коллективе — преподаватели двух крупнейших Ленинградских институтов — политехнического и инженеров железнодорожного транспорта. Эта группа (Н. М. Беляев, Л. А. Белявский, В. К. Качурин, Я. И. Кишнис, Н. Ю. Куселев, А. К. Синицкий) удачно подытожила опыт преподавания сопротивления материалов студентам массовых инженерных специальностей середины XX века.

С тех пор заметно изменились условия преподавания сопротивления материалов в технических вузах. Потребовалось не только опустить часть традиционных разделов, но также изменить структуру курса. Предлагаемый Сборник задач отражает подобные изменения, произошедшие, в частности, в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете. Вместе с этим многие задачи из багажа предыдущих поколений стали общепринятыми, отказываться от которых просто нерационально. Разбивка по главам всего массива отобранных задач соответствует учебному пособию «Сопротивление материалов» под ред. Б. Е. Мельникова. — СПб.: Издательство «Лань», 2007. Авторы сочли своим долгом поставить во главе списка имя Н. М. Беляева, заведующего кафедрами сопротивления материалов в предвоенные годы в ЛПИ и ЛИИЖТ, одного из основателей отечественной школы преподавания инженерного направления в этой дисциплине.

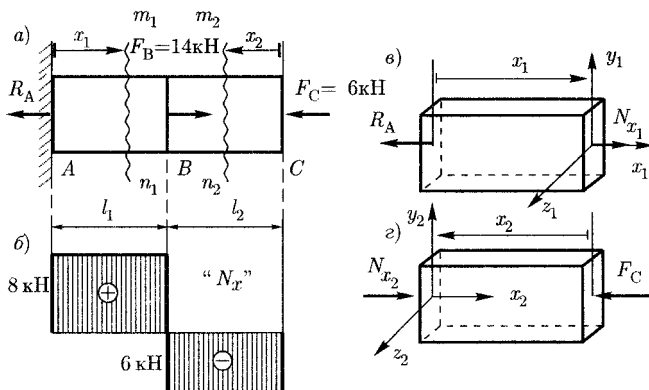
Авторы признательны сотрудникам кафедры «Сопротивление материалов» СПбГПУ И. Н. Изотову и В. Н. Селюкову за конструктивную критику при подготовке рукописи к изданию. Авторы благодарят Е. К. Ковалова и М. Ю. Горохова за техническую помощь.

В тексте исправлены опечатки, замеченные в предыдущем издании.

# Г Л А В А 1

## ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В СТЕРЖНЕ

**1.1.** Прямой стержень, закрепленный одним концом, нагружен по схеме, изображенной на рис. а. Определить реакцию в закреплении, найти внутренние усилия и построить график (эпюру) их изменения по длине стержня.



К задаче 1.1

*Решение.* Предположим, что реакция  $R_A$  направлена справа-налево. Тогда условие равновесия для всего стержня принимает вид

$$\sum F_x = -R_A + F_B - F_C = 0,$$

откуда получаем

$$R_A = F_B - F_C = 14 - 6 = 8 \text{ кН.}$$

Сечением  $B$ , в котором приложена сила  $F_B$ , стержень подразделяется на два участка длиной  $l_1$  и  $l_2$ , рис. а. В пределах первого участка проведем произвольное сечение  $m_1n_1$ . На рис. в изображена левая отсеченная часть стержня длиной  $x_1$ . Чтобы соблюдалось условие равновесия  $\sum F_x = 0$  для этого тела, необходимо приложить внутреннюю силу  $N_{x_1}$  так, как показано на рис. в. Из этого условия получаем модуль внутреннего усилия  $|N_{x_1}| = |R_A| = 8 \text{ кН}$ . Направление усилия  $N_{x_1}$  совпадает с положительным направлением оси  $x$ , поэтому приписываем ему положительный знак

$$N_{x_1} = +8 \text{ кН.}$$

Проведем произвольное сечение  $m_2n_2$  в пределах второго участка стержня. Обозначим через  $x_2$  расстояние от правого конца до сечения



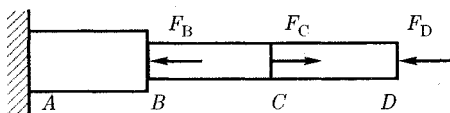
$m_2 n_2$  и изобразим правую отсеченную часть стержня (не путать с обозначением оси  $x_2$ ), см. рис. 2. Из условия равновесия имеем  $|N_{x_2}| = |F'_C| = = 6 \text{ кН}$ . Так как  $N_{x_2}$  ориентирована в положительном направлении внутренней нормали  $x$ , то приходится принимать

$$N_{x_2} = -6 \text{ кН}.$$

Мы получили, что положительная нормальная сила соответствует растяжению стержня, см. рис. 6, а отрицательная – сжатию, см. рис. 2. Так получается всегда, если подвижная система координат  $x y z$ , связанная с произвольным сечением, перемещается поступательно от одного конца стержня до другого.

Имея данные о  $N_{x_1}$  и  $N_{x_2}$ , можно переходить к построению графика (эпюры)  $N_x = N_x(x)$  изменения нормальных сил по длине стержня, рис. 6. Обращаем внимание на скачки, которые отвечают сосредоточенным силам. Численное значение скачка равно модулю силы.

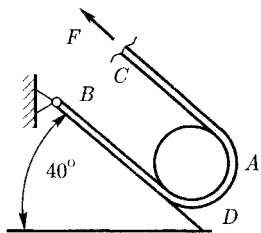
**1.2.** Стержень  $ABCD$ , закрепленный на конце  $A$ , нагружен силами  $F_B = = 120 \text{ кН}$ ,  $F_C = 60 \text{ кН}$ ,  $F_D = 20 \text{ кН}$ , направленными вдоль его оси. Найти реакцию в закреплении  $A$ , а также построить эпюру внутренних усилий.



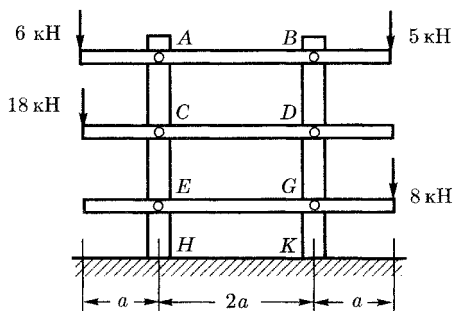
К задаче 1.2

**1.3.** Бревно  $A$  при помощи двух канатов  $BAC$ , расположенных по его концам, поднимается по наклонной плоскости  $DB$ , см. рис. Определить усилия  $F$  в каждом из канатов, если вес бревна  $3 \text{ кН}$ .

Ответ:  $F = 0, 48 \text{ кН}$ .



К задаче 1.3



К задаче 1.4

**1.4.** Две стойки  $A$  и  $B$  нагружены, как указано на рис. Соединения горизонтальных элементов со стойками принять шарнирными.

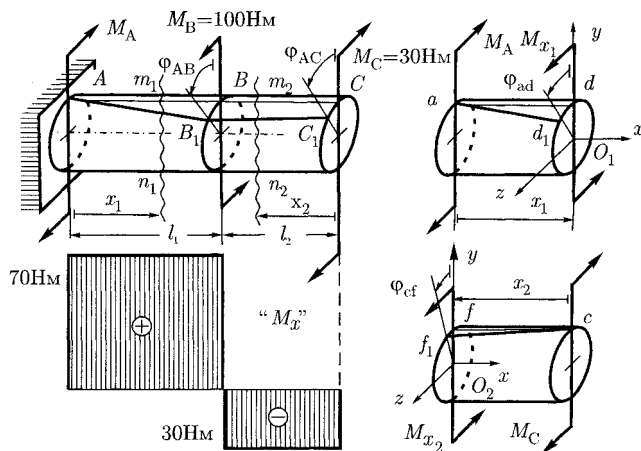
Определить внутренние усилия в сечениях верхней, средней и нижней частей обеих стоек.

Ответ:

$$N_{AC} = -6,5 \text{ кН}, N_{CE} = -33,5 \text{ кН}, N_{EH} = -29,5 \text{ кН},$$

$$N_{BD} = -4,5 \text{ кН}, N_{DG} = +4,5 \text{ кН}, N_{GK} = -7,5 \text{ кН}.$$

**1.5.** Стержень, закрепленный одним концом, нагружен двумя парами сил, см. рис. *a*. Плоскости пар перпендикулярны продольной оси стержня, а сами пары направлены в противоположные стороны. Определить реактивный момент в заделке, построить эпюру внутренних усилий (крутящих моментов)  $M_x = M_x(x)$ , изобразить примерный вид искажения продольной образующей.



К задаче 1.5

*Решение.* Зададимся направлением реактивного момента  $M_A$  и составим условие равновесия стержня (сумму моментов вокруг продольной оси):

$$\sum m_x = -M_A + M_B - M_C = 0.$$

Отсюда получаем

$$M_A = M_B - M_C = 100 - 30 = 70 \text{ Нм}.$$

Сечение  $B$  разделяет стержень на два участка длиной  $l_1$  и  $l_2$ . В пределах первого участка проведем сечение  $m_1n_1$ , а затем изобразим левую отсеченную часть (рис. *б*). В сечении  $m_1n_1$  надлежит приложить внутренний крутящий момент  $M_x$ , с тем, чтобы эта часть обрела равновесие.

Из условия статики получаем  $|M_{x_1}| = |M_A| = 70 \text{ Нм}$ . Так как момент  $M_{x_1}$  направлен вокруг оси  $x$  против часовой стрелки, то имеем

$$M_{x_1} = +70 \text{ Нм.}$$

Проведем сечение  $m_2n_2$  в пределах второго участка, а затем выделим правую отсеченную часть (рис. 2.). В сечении возникает крутящий момент  $M_{x_2}$ , для которого получаем из условия равновесия  $|M_{x_2}| = |M_C|$ . Так как момент  $M_{x_2}$  ориентирован вокруг внутренней нормали  $x$  против часовой стрелки, то окончательно запишем

$$M_{x_2} = M_C = -30 \text{ Нм.}$$

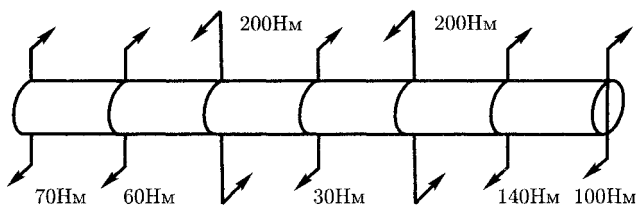
Имея значения  $M_{x_1}$  и  $M_{x_2}$ , строим эпюру крутящих моментов  $M_x = M_x(x)$ , рис. 6. Скачки на эпюре определяются сосредоточенными моментами  $M_A$ ,  $M_B$  и  $M_C$ .

Вернемся к левой отсеченной части (рис. 6). Здесь стержень закручивается. При этом продольная образующая  $ad$  обращается в винтовую линию  $ad_1$ , а радиус  $O_1d$  в сечении  $m_1n_1$  поворачивается в положение  $O_1d_1$  на угол  $\varphi_{ad}$  (угол закручивания). Аналогично выглядит винтовая линия  $AB_1$  на длине всего первого участка (рис. а). Здесь через  $\varphi_{AB}$  обозначен угол закручивания между сечениями  $A$  и  $B$ .

На правой отсеченной части получаем винтовую линию  $cf_1$  и угол закручивания  $\varphi_{cf}$ . Это позволяет построить винтовую линию  $B_1C_1$  на рис. а. Здесь угол поворота сечения  $C$  относительно заделки  $A$  обозначен  $\varphi_{AC}$ .

Обращаем внимание на неразрывность линии  $AB_1C_1$ , а также на следующее обстоятельство: при  $M_x > 0$  получаем правую винтовую линию, а при  $M_x < 0$  – левую.

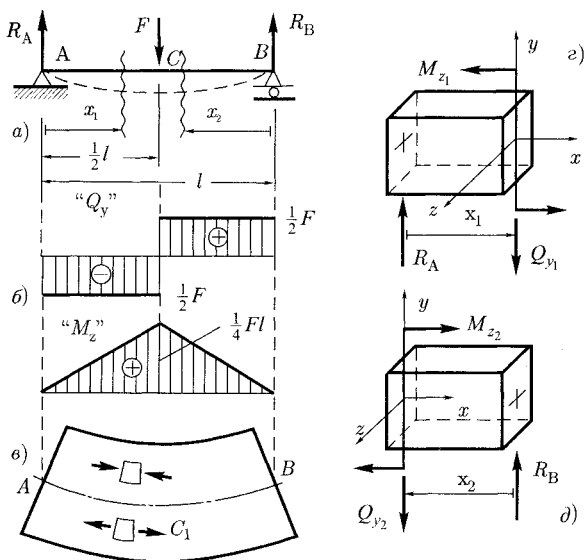
**1.6.** Стержень нагружен внешними моментами так, как показано на рис. Построить эпюру крутящих моментов, изобразить примерный вид искаженной боковой образующей.



К задаче 1.6

**1.7.** Стержень, опирающийся своими концами на шарнирные опоры, нагружен в середине силой. см. рис. а. Найти реакции в опорах.

рах, определить внутренние усилия и построить соответствующие эпюры, изобразить примерный вид изогнутой оси стержня.



К задаче 1.7

*Решение.* В данном случае обе вертикальные реакции  $R_A$  и  $R_B$  направлены вверх, а уравнения равновесия принимают вид

$$\sum m_{z(A)} = -F \frac{l}{2} + R_B l = 0, \quad \sum m_{z(B)} = +F \frac{l}{2} - R_A l = 0,$$

откуда имеем

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}F.$$

В пределах первого участка  $AC$  проведем сечение на расстоянии  $x_1$  от левого конца, рис. а. На рис. г изображена левая отсеченная часть с внешней силой  $R_A$  и внутренними усилиями  $Q_{y_1}$  и  $M_{z_1}$  (поперечной силой и изгибающим моментом). Из уравнений равновесия

$$\sum F_y = R_A - Q_{y_1} = 0, \quad \sum m_z = R_A x + M_{z_1} = 0$$

получаем

$$|Q_{y_1}| = R_A = 0,5F, \quad |M_{z_1}| = R_A x = 0,5Fx.$$

Так как сила  $Q_{y_1}$  направлена в отрицательном направлении оси  $y$ , а момент  $M_{z_1}$  – против часовой стрелки вокруг оси  $z$ , то окончательно имеем

$$Q_{y_1} = -0,5F, \quad M_{z_1} = +0,5Fx,$$

что позволяет построить эпюры  $Q_y = Q_y(x)$  и  $M_z = M_z(x)$  на первом участке, рис. б.

Заметим, что во многих руководствах по сопротивлению материалов используется другое правило знаков для поперечной силы  $Q_y$ .

Далее в пределах второго участка  $CB$  проведем сечение на расстоянии  $x_2$  от правого конца и выделим правую отсеченную часть со всеми приложенными к ней усилиями (рис. а и в). Из уравнений равновесия имеем  $|Q_{y_2}| = 0,5F$ ,  $|M_{z_2}| = 0,5Fx$ . Сила  $Q_{y_2}$  направлена в отрицательном направлении оси  $y$ , а момент  $M_{z_2}$  – по часовой стрелке вокруг оси  $z$ . В данном случае ось  $x$  является внутренней нормалью, поэтому запишем окончательно

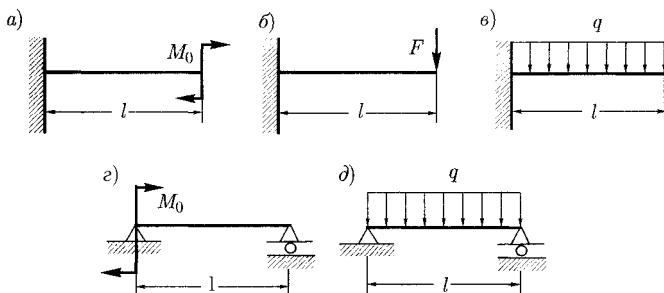
$$Q_{y_2} = +0,5F, \quad M_{z_2} = +0,5Fx.$$

Эти соотношения позволяют закончить построение эпюр  $Q_y$  и  $M_z$ , рис. б.

Очевидно, что рассматриваемый стержень изогнется так, как показано на рис. а. Подобная линия в принятых здесь координатах  $xyz$  имеет положительную кривизну ( $k_z > 0$ ) при положительном изгибающем моменте ( $M_z > 0$ ).

На рис. в изображена несколько утрированная модель изгиба данного стержня. Здесь через  $AC_1B$  по-прежнему обозначена изогнутая ось. Выше нее элементы материала стержня сжаты, ниже – растянуты. Эпюра изгибающих моментов оказалась расположенной на сжатой стороне изогнутого стержня. Такая связь характера изогнутой оси и расположения эпюры моментов служит нередко правилом при построении последней.

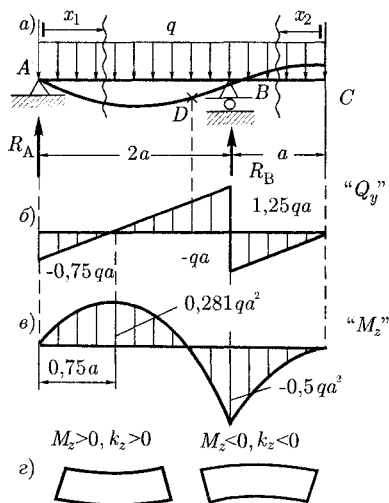
Следует отметить, что инженеры-строители используют другое правило построения эпюры изгибающих моментов: эпюра  $M_z$  располагается на растянутой стороне изогнутого стержня, называемого также балкой.



К задаче 1.8

**1.8.** Для заданных на рисунках балок найти реакции в опорах, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, изобразить примерный вид изогнутой оси.

**1.9.** Найти реакции, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , изобразить примерный вид изогнутой оси балки, схема которой дана на рис. а.



К задаче 1.9

*Решение.* Из условий равновесия получаем, что реакции в опорах направлены вверх и составляют  $R_A = 0,75qa$  и  $R_B = 2,25qa$ .

Выражения для поперечной силы на первом и втором участках имеют вид

$$Q_{y_1} = -R_A + qx = -0,75qa + qx, \quad (0 \leq x_1 \leq 2a)$$

$$Q_{y_2} = -qx, \quad (0 \leq x_2 \leq a),$$

а для изгибающего момента

$$M_{z_1} = R_A x - \frac{1}{2}qx^2 = 0,75qax - 0,5qx^2, \quad (0 \leq x_1 \leq 2a)$$

$$M_{z_2} = -0,5qx^2. \quad (0 \leq x_2 \leq a).$$

В соответствии с этими соотношениями построены эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , см. рис. б и в.

Ввиду наличия дифференциальной зависимости

$$Q_y = -\frac{dM_z}{dx}$$

устанавливаем, что при переходе эпюры  $Q_y$  через нуль со сменой знака при  $x = x_*$  имеем экстремум функции  $M_z = M_z(x)$ , в данном случае

максимум. Координату  $x_*$  отыскиваем из равенства

$$Q_{y_1} = -0,75qa + qx_* = 0,$$

откуда

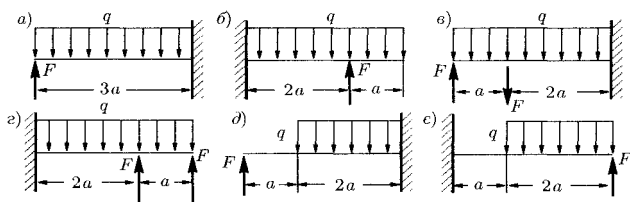
$$x_* = 0,75a,$$

что позволяет отыскать максимальное значение изгибающего момента

$$M_{\max} = M_{z_1} |_{x=x_*} = 0,281qa^2.$$

Точка, в которой эпюра  $M_z$  меняет знак, отвечает точке перегиба  $D$  на упругой линии. В данном случае на участке  $AD$  балка имеет положительную кривизну ( $k_z > 0$ ), а на участке  $DC$  – отрицательную ( $k_z < 0$ ), что дополнительно иллюстрируется схемой на рис. 2. Эта схема полностью согласуется с правилом, по которому эпюра изгибающего момента всегда располагается на сжатой стороне изогнутого стержня.

**1.10.** Консоль длиной  $l = 3a$  нагружена равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенными силами (см. рис.). Установить, при каких значениях сил  $F$  момент в заделке обратится в нуль. Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  при найденных значениях сил.

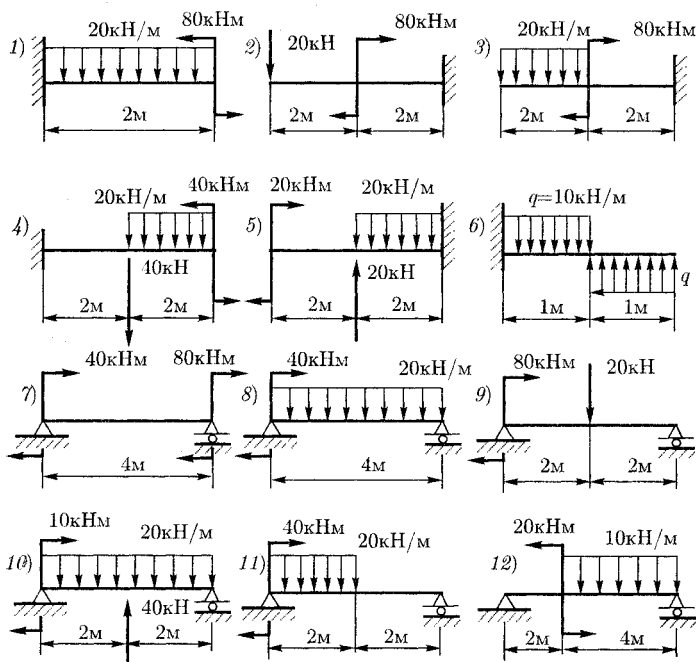


К задаче 1.10

Ответ:

| Схема      | а                  | б                    | в                  | г          | д                   | е                   |
|------------|--------------------|----------------------|--------------------|------------|---------------------|---------------------|
| Сила $F$   | $\frac{1}{2} ql$   | $\frac{3}{4} ql$     | $\frac{3}{2} ql$   | $0,3ql$    | $\frac{2}{9} ql$    | $\frac{4}{9} ql$    |
| $M_{\max}$ | $\frac{1}{8} ql^2$ | $-\frac{1}{18} ql^2$ | $\frac{4}{9} ql^2$ | $0,08ql^2$ | $\frac{8}{81} ql^2$ | $\frac{8}{81} ql^2$ |

**1.11.** Для каждой из балок, схемы которых приведены на рис., построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, изобразить примерный вид изогнутой оси.



К задаче 1.11

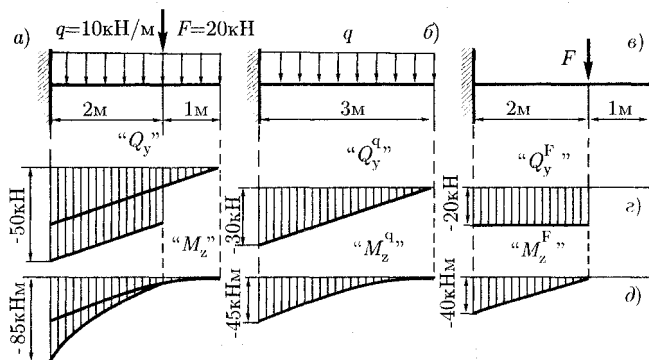
Ответ:

| Схема       | 1   | 2    | 3  | 4     | 5   | 6    |
|-------------|-----|------|----|-------|-----|------|
| $Q_y$ , кН  | -40 | 20   | 40 | -80   | -20 | 10   |
| $M_z$ , кНм | 80  | 40   | 40 | -160  | 30  | 10   |
| Схема       | 7   | 8    | 9  | 10    | 11  | 12   |
| $Q_y$ , кН  | 30  | 50   | 30 | 22,5  | 20  | 23,3 |
| $M_z$ , кНм | -80 | 62,5 | 80 | 17,65 | 50  | 33,4 |

**1.12.** Пользуясь принципом независимости и сложения действия сил, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, схема которой изображена на рис. а.

*Решение.* Рассмотрим балку дважды: сначала только под равномерно распределенной нагрузкой (рис. б), а затем – под сосредоточенной силой (рис. в). В данном случае частные эпюры  $Q_y^{(q)}$  и  $Q_y^{(F)}$  имеют одинаковые знаки. Поэтому для построения суммарной эпюры  $Q_y$  достаточно просто приложить друг к другу частные (рис. г). Аналогичная ситуация наблюдается здесь с эпюрами изгибающих моментов (рис. б, в, д).

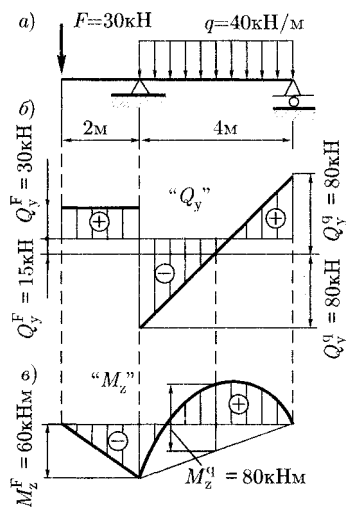




К задаче 1.12

Если частные эпюры имеют разные знаки, то их следует наложить одну на другую, см. следующую задачу 1.13.

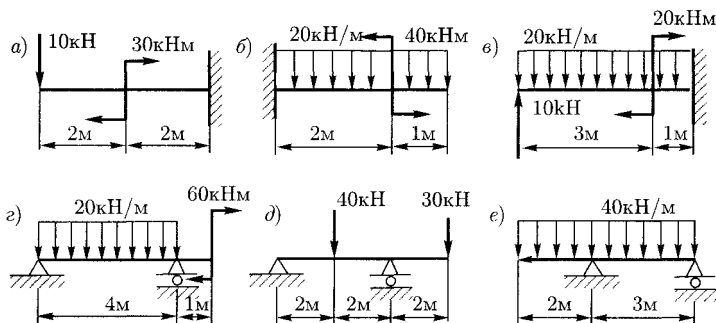
**1.13.** Пользуясь методом сложения действия сил, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, схема которой приведена на рис. *a*.



К задаче 1.13

*Ответ:* Решение задачи дано на рис. *б* и *в*.

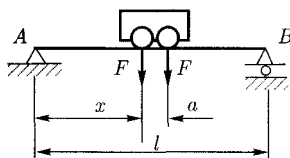
**1.14.** Применяя метод сложения действия сил, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, схемы которых приведены на рис.



К задаче 1.14

Ответ:

| Схема       | а  | б   | в    | г   | д  | е     |
|-------------|----|-----|------|-----|----|-------|
| $Q_y$ , кН  | 10 | -60 | 70   | 55  | 35 | -86,7 |
| $M_z$ , кНм | 20 | -50 | -100 | -60 | 60 | -80   |



К задаче 1.15

чание, подсчитать величину  $M_{\max}$ .

*Указание.* Обозначив расстояние от левой опоры  $A$  до первой силы  $F$  через  $x$ , выразить опорные реакции в виде функций от  $x$ , составить выражение для изгибающего момента в сечении под первой силой  $F$  и исследовать его на экстремум.

Ответ:  $x = \frac{l}{2} - \frac{a}{4} = 4,7$  м,  $M_{\max} = 88,4$  кНм.

**1.16.** Найти реакции в балке с шарниром (см. рис.  $a$ ), построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , изобразить примерный вид изогнутой оси.

*Решение.* В балке с шарниром к стандартной системе уравнений равновесия добавляется равенство нулю суммы моментов всех сил, распо-

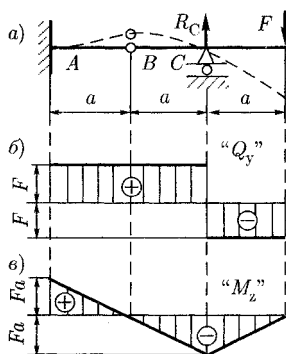
**1.15.** Двухосная тележка подъемного крана перемещается по двум подкрановым балкам пролетом  $l = 10$  м. Расстояние между осями тележки  $a = 1,2$  м, усилие под каждым из колес составляет  $F = 20$  кН, см. рис. Найти опасное положение тележки, при котором изгибающий момент будет иметь наибольшее значение.

ложенных по одну сторону от шарнира, составленной относительно оси, проходящей через этот шарнир:

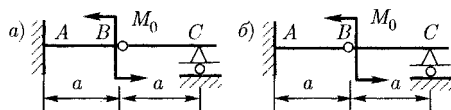
$$\sum m_{z(B)}^{\text{справа}} = -2aF + aR_c = 0.$$

Отсюда находим  $R_c = 2F$ . Далее нетрудно получить обычным путем  $R_A = F$ ,  $M_A = Fa$ , см. рис. а. Затем изображаем эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  (рис. б и в), а также примерный вид изогнутой оси (рис. а).

**1.17.** Балка из предыдущего примера нагружается двумя способами: по первому внешний момент  $M_0$  приложен слева от шарнира  $B$ , по второму – справа, см. рис. а и б. В каждом из этих случаев найти реакции, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , изобразить примерный вид изогнутой оси.



К задаче 1.16



К задаче 1.17

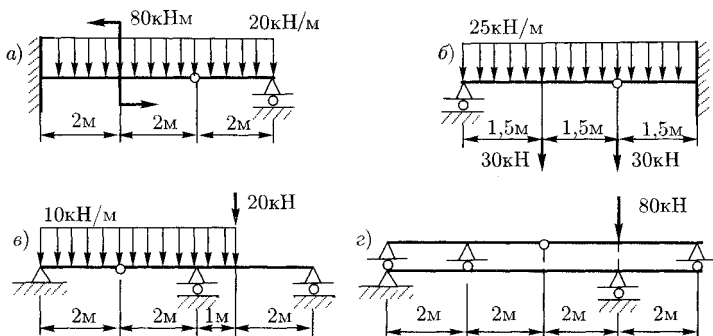
*Ответ:* В первой балке шарнир перемещается вверх, во второй – вниз.

**1.18.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балок с шарнирами, схемы которых приведены на рис. Вычислить наибольшие по модулю значения поперечной силы и изгибающего момента, изобразить примерный вид изогнутой оси.

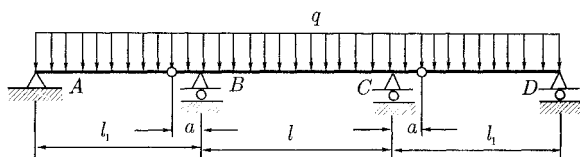
*Ответ:*

- а)  $Q_y = 100$  кН,  $M_z = -160$  кНм, б)  $Q_y = 120$  кН,  $M_z = -152$  кНм, в)  $Q_y = -35$  кН,  $M_z = -40$  кНм, г)  $Q_y = 40$  кН,  $M_z = 80$  кНм.

**1.19.** При проектировании консольных мостов с подвесными пролетами приходится решать задачу о наивыгоднейшей их разбивке. Для балки, изображенной на рис., установить, при каком соотношении размеров  $a : l : l_1$  значения изгибающих моментов в опасных сечениях подвесных и основной балки (в середине пролетов и над опорами  $B$  и  $C$ ) будут по абсолютной величине одинаковы. Определить также наибольший изгибающий момент.

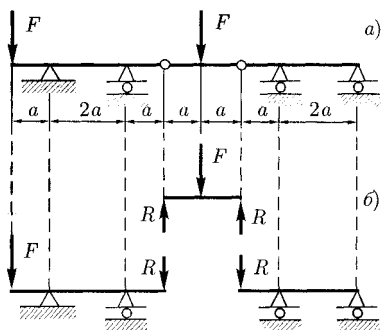


К задаче 1.18



К задаче 1.19

Ответ:  $a = 0,146l$ ,  $l_1 = 0,853l$ ,  $M_{\max} = ql^2/16$ .



К задаче 1.20

**1.20.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для четырехопорной балки с двумя промежуточными шарнирами, изображенной на схеме. Вычислить наибольшие ординаты эпюр  $Q_y$  и  $M_z$ .

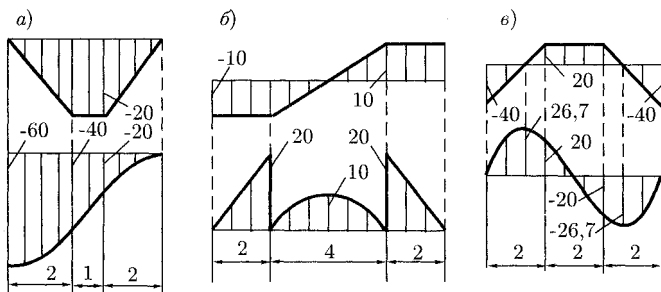
*Указание.* Проще всего расчленить балку на подвесную и две основные, как показано на рис. б. Сначала вычисляются реакции и строятся эпюры для подвесной балки. Затем принимают во внимание усилия, с

которыми подвесная балка действует на основные балки, после чего определяют реакции и внутренние усилия с соответствующими эпюрами в этих последних.

Можно поступить иначе. Так как изгибающий момент в шарнире равен нулю, то в дополнение к стандартным уравнениям статики для всей системы можно составить уравнения моментов относительно каждого из шарниров (рассматривая силы, расположенные слева или справа от них) и приравнять их нулю. Это позволит определить все опорные реакции и строить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  обычным путем, как для бесшарнирной балки.

*Ответ:*  $Q_y = F$ ,  $M = -Fa$ .

**1.21.** По заданным эпюрам поперечных сил и изгибающих моментов изобразить схемы закрепления и нагружения балок и определить величины приложенных к ним сил. Ординаты эпюр  $Q_y$  даны в кН, эпюр  $M_z$  – в кНм, а длины – в м (см. рис.). Криволинейные участки эпюр очерчены по квадратной параболе.



К задаче 1.21

*Ответ:*

а)  $q = \pm 10$  кН/м, б)  $q = 5$  кН/м,  $M = 20$  кНм, в)  $q = \pm 30$  кН/м.

**1.22.** Балка на двух шарнирных опорах загружена нагрузкой, неравномерно распределенной вдоль нее по линейному закону (см. рис. а). В частности, таким образом изменяется с глубиной давление воды на обшивку корпуса корабля. Определить реакции, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , дать схему изогнутой оси.

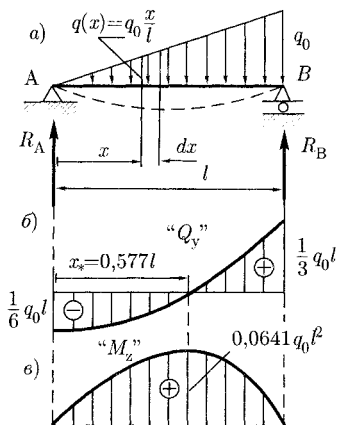
*Решение.* Нетрудно установить, что интенсивность распределенной "по треугольнику" нагрузки в зависимости от координаты выглядит так

$$q(x) = q_0 \frac{x}{l}.$$

Элементарная нагрузка, приходящаяся на отрезок балки длиной  $dx$ , равна  $dw = q(x)dx = q_0 \frac{x}{l} dx$ . Вся активная нагрузка на балку составляет

$$\omega = \int_l dw = \int_0^l q_0 \frac{x}{l} dx = \frac{q_0}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{2} q_0 l.$$

Так как величина  $\omega$  пропорциональна площади между осью  $x$  и графиком функции  $q(x)$ , то ее называют "грузовой площадью". В данном случае — это площадь треугольника со сторонами  $l$  и  $q_0$ , см. рис. а.



К задаче 1.22

При составлении условий равновесия воспользуемся известным из курса теоретической механики понятием равнодействующей параллельных сил. В данном случае равнодействующая равна "грузовой площади"  $\omega$ , а линия ее действия проходит через центр тяжести этой площади, т.е. на расстоянии  $\frac{2}{3}l$  от точки A. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \sum F_y &= R_A + R_B - \omega = \\ &= R_A + R_B - \frac{1}{2}q_0 l = 0, \\ \sum m_z(A) &= R_B l - \frac{2}{3}l\omega = \\ &= R_B l - \frac{1}{3}q_0 l^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$R_B = \frac{1}{3}q_0 l, \quad R_A = \frac{1}{6}q_0 l.$$

При составлении выражений для  $Q_y$  и  $M_z$  будем использовать понятие "грузовой площади" в следующем виде:

$$\omega(x) = \frac{1}{2}q(x)x = \frac{1}{2}q_0 \frac{x^2}{l}.$$

Благодаря этому можно записать

$$\begin{aligned} Q_y &= -R_A + \omega(x) = -\frac{1}{6}q_0 l + \frac{1}{2}q_0 \frac{x^2}{l}, \\ M_z &= R_A x - \omega(x) \frac{x}{3} = \frac{1}{6}q_0 l x - \frac{1}{6}q_0 \frac{x^3}{l}, \end{aligned}$$

см. соответствующие построения на рис. б и а.

Положение сечения с максимальным изгибающим моментом определим из условия равенства нулю поперечной силы

$$Q_y = -\frac{1}{6}q_0 l + \frac{1}{2}q_0 \frac{x_*^2}{l} = 0,$$

откуда

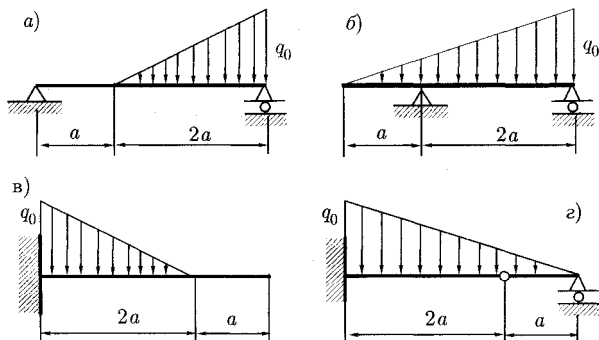
$$x_* = 0,577 l,$$

что позволяет найти

$$M_{\max}|_{x=0,577 l} = 0,0641 q_0 l^2.$$

Примерный вид изогнутой оси показан на рис. а.

**1.23.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балок, несущих нагрузку, распределенную по треугольнику.



К задаче 1.23

**1.24.** Балка пролетом  $l$  опирается концами на шарнирные опоры и несет неравномерно распределенную нагрузку, изменяющуюся по параболическому закону  $q(x) = \frac{4q_0}{l^2}(lx - x^2)$ , см. рис. а. Построить эпюры.

*Решение.* Равнодействующая активной нагрузки равна "грузовой" площади, см. задачу 1.22. В данном случае получаем

$$\omega = \int_l d\omega(x) = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l \frac{4q_0}{l^2}(lx - x^2)dx = \frac{2}{3}q_0l.$$

Ввиду симметрии балки имеем

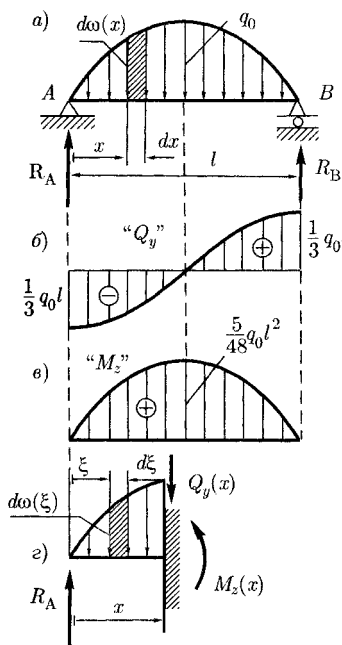
$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{3}q_0l.$$

Поперечная сила в сечении с абсциссой  $x$  находится с введением понятия "грузовой площади"  $\omega(x)$ :

$$Q_y = -R_A + \omega(x) = -\frac{1}{3}q_0l + \int_0^x \frac{4q_0}{l^2}(lx - x^2)dx = \frac{q_0l}{3} \left( -1 + \frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} \right).$$

Для определения изгибающего момента в произвольном сечении сделаем дополнительное построение. Выделим левую отсеченную часть

(рис. 2.). Затем на расстоянии  $\xi$  от левого конца выделим элементарный участок балки длиной  $d\xi$  и соответствующую элементарную "грузовую площадь"



К задаче 1.24

$$d\omega(\xi) = q(\xi)d\xi = \frac{4q_0}{l^2}(l\xi - \xi^2)d\xi.$$

Элементарный момент  $dM_z$  от элементарной нагрузки  $d\omega(\xi)$  вычисляется следующим образом:

$$dM_z = -(x - \xi)d\omega(\xi).$$

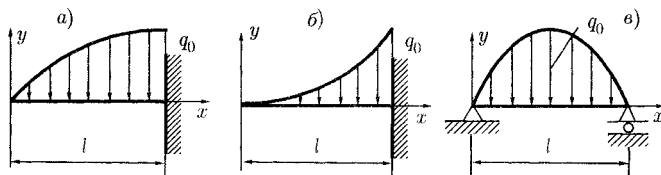
Полный же изгибающий момент равен сумме

$$\begin{aligned} M_z &= R_A x - \int_0^x (x - \xi)d\omega(\xi) = \\ &= \frac{1}{3}q_0 l x - \int_0^x \frac{4q_0}{l^2}(l\xi - \xi^2)(x - \xi)d\xi. \end{aligned}$$

После интегрирования имеем окончательно

$$M_z = \frac{1}{3}q_0 l \left( x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right).$$

Наконец, строим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  по точкам, рис. б и в.



К задаче 1.25

**1.25.** Для балок, несущих сплошную нагрузку, распределенную по нелинейному закону, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , а также вычислить наибольшие по модулю значения поперечной силы и изгибающего момента, если:

а)  $q(x) = \frac{q_0 x}{l^2}(2l - x)$ , б)  $q(x) = \frac{q_0 x^2}{l^2}$ ,



в)  $q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{l}$  (см. рис.).

Ответ:

а)  $Q_y = \frac{2}{3}q_0l$ ,  $M_z = -\frac{q_0l^2}{4}$ ; б)  $Q_y = \frac{q_0l}{3}$ ,  $M_z = -\frac{q_0l^2}{12}$ ;

в)  $Q_y = -\frac{q_0l}{\pi}$ ,  $M_z = \frac{q_0l^2}{\pi^2}$ .

**1.26.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки пролетом  $l$ , нагруженной по всей длине равномерно распределенной моментной нагрузкой интенсивности  $m$  (см. рис. а).

Решение. В данной балке опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  направлены так, как показано на схеме. Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}\sum F_y &= -R_A + R_B = 0, \\ \sum m_{z(B)} &= R_A a - m a = 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$R_A = R_B = m.$$

Поперечная сила и изгибающий момент в произвольном сечении находятся так:

$$\begin{aligned}Q_y &= R_A = m, \\ M_z &= -R_A x + m x = -m x + m x = 0,\end{aligned}$$

см. также эпюры на рис. б и в. Так как изгибающий момент оказался равным нулю по всей длине балки, то она не изгибается.

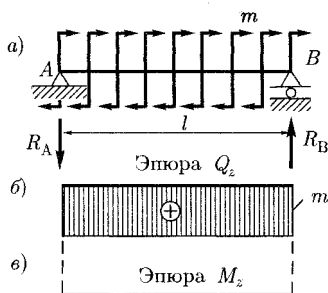
Отметим, что в подобных задачах известная дифференциальная зависимость  $Q_y = -dM_z/dx$  должна быть обобщена следующим образом:

$$Q_y = -\frac{dM_z}{dx} - m.$$

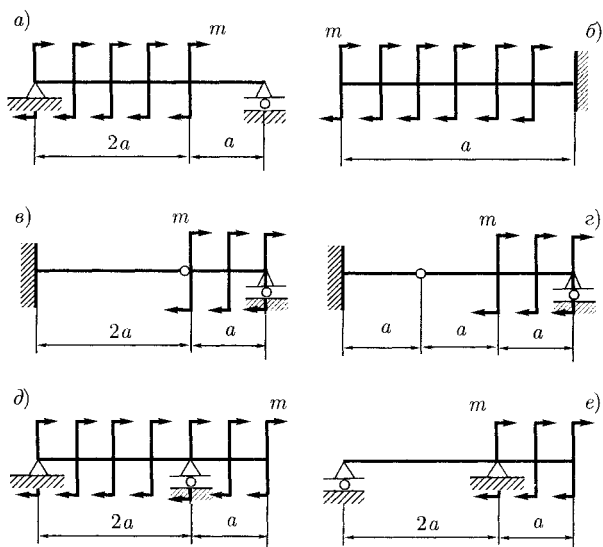
**1.27.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для каждой из балок, нагруженных равномерно распределенной моментной нагрузкой, см. рис., если  $a = 2$  м,  $m = 30$  кНм/м.

Ответ:

| Схема       | а  | б  | в   | г  | д   | е   |
|-------------|----|----|-----|----|-----|-----|
| $Q_y$ , кН  | 20 | 0  | 30  | 15 | 45  | 15  |
| $M_z$ , кНм | 40 | 60 | 120 | 30 | -60 | -60 |



К задаче 1.26



К задаче 1.27

**1.28.** В Г-образной раме по рис. а найти реакции, определить внутренние усилия  $M_z, Q_y, N_x$  с построением эпюр, изобразить примерный вид изогнутой оси.

*Решение.* Направления реакций указаны на схеме. Уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F + H_A = 0, \\ \sum F_y &= -R_A + R_B = 0, \\ \sum m_{z(A)} &= -2aF + aR_B = 0,\end{aligned}$$

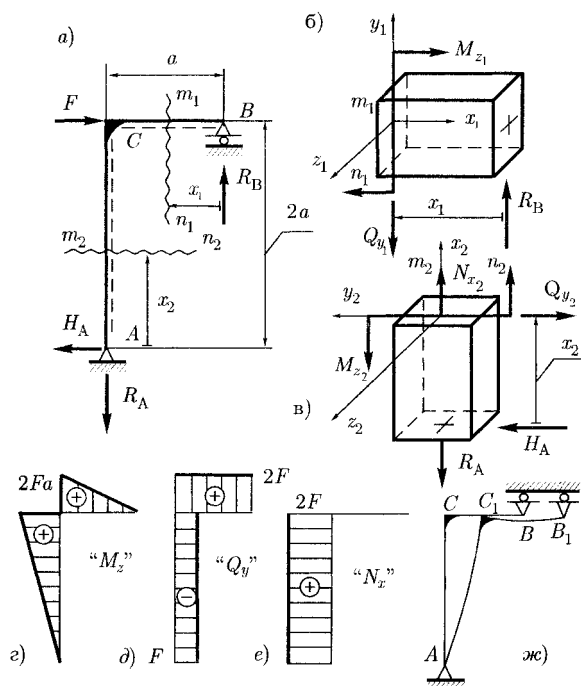
откуда находим

$$R_A = 2F, \quad R_B = 2F, \quad H_A = F.$$

В пределах горизонтального стержня  $CB$  проведем поперечное сечение  $m_1n_1$ , отбрасываем левую отсеченную часть, а правую изобразим на рис. б. Отсюда видно, что

$$M_{z_1} = R_B x = 2Fx, \quad Q_{y_1} = R_B = 2F, \quad N_{x_1} = 0.$$

Соответствующие эпюры строим, как в обычной горизонтальной балке, рис. г, д, е.



К задаче 1.28

Затем сечением  $m_2n_2$  отсекаем нижнюю часть вертикального стержня  $AC$ , см. рис. а и в. Из условий равновесия этой части получаем для внутренних усилий

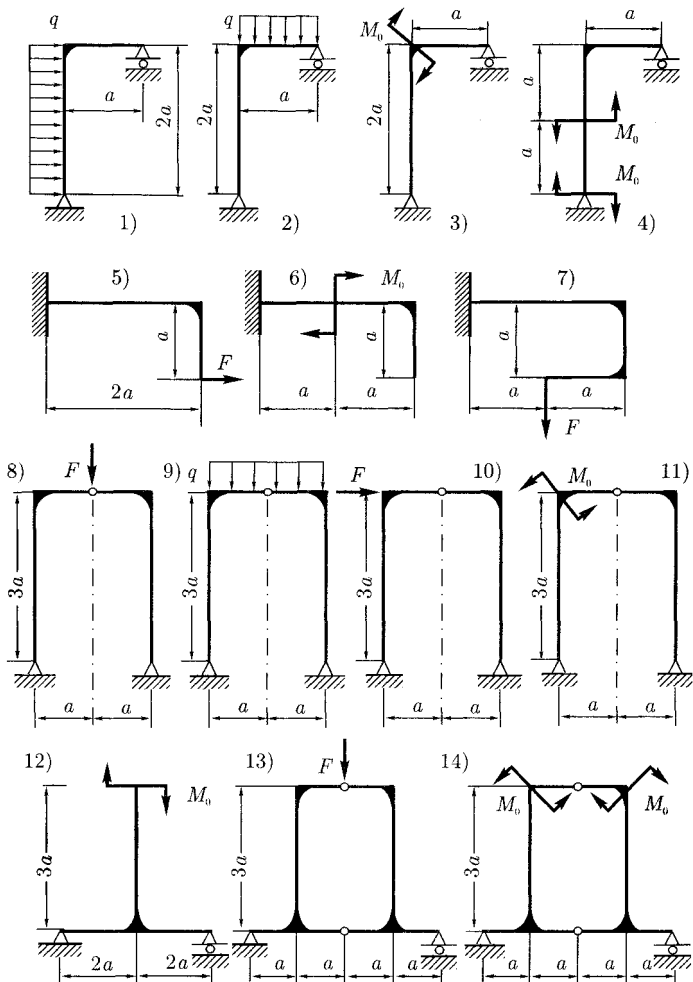
$$M_{z_2} = H_A x = Fx, \quad Q_{y_2} = -H_A = -F, \quad N_{x_2} = R_A = 2F,$$

что затем отражено в эпюрах (рис. г, д, е).

Здесь отметим, что подвижная система координат  $xuz$ , связанная с поперечными сечениями, ориентируется так, чтобы при обходе контура рамы от одного конца до другого ось  $x$  была бы направлена всегда по направлению этого перемещения, а ось  $z$  оставалась бы перпендикулярной плоскости чертежа. Укажем также еще на один вспомогательный прием: штриховой линией отмечают так называемую "внутреннюю" сторону рамы, куда затем откладываются отрицательные ординаты эпюр  $M_z, Q_y, N_x$ , см. рис. а, г, д, е. Добавим, что эпюра  $M_z$  должна всегда располагаться на сжатой стороне изогнутого стержня.

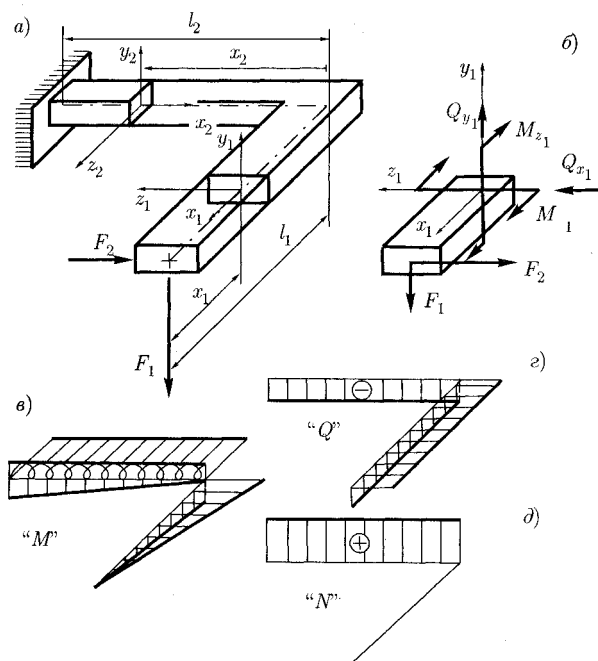
Примерный вид изогнутой оси рамы иллюстрируется схемой на рис. ж.

**1.29.** Для каждой из приведенных на рис. рам найти реакции, построить эпюры  $M_z$ ,  $Q_y$ ,  $N_x$ , изобразить примерный вид изогнутой оси.



К задаче 1.29

**1.30.** Г-образная рама, заделанная одним концом, нагружена на свободном конце двумя силами так, как показано на рис.  $a$ . Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов, поперечных и нормальных сил.



К задаче 1.30

*Решение.* Разделим раму на две части поперечным сечением в пределах первого ее стержня и выделим переднюю отсеченную часть, рис. б. Свяжем с сечением подвижную систему координат  $x_1, y_1, z_1$  и найдем внутренние усилия

$$\begin{aligned} M_{y_1} &= F_2 x_1, \quad M_{z_1} = -F_1 x_1, \quad M_{x_1} = 0, \\ Q_{y_1} &= -F_1, \quad Q_{z_1} = -F_2, \quad N_{x_1} = 0. \end{aligned}$$

Соответствующие эпюры даны на рис. в, г, д в аксонометрии. Отметим, что эпюры изгибающих моментов построены на сжатых сторонах изгибаемого стержня, плоскости этих эпюр совпадают с плоскостями действия соответствующих моментов  $M_{y_1}$  и  $M_{z_1}$ .

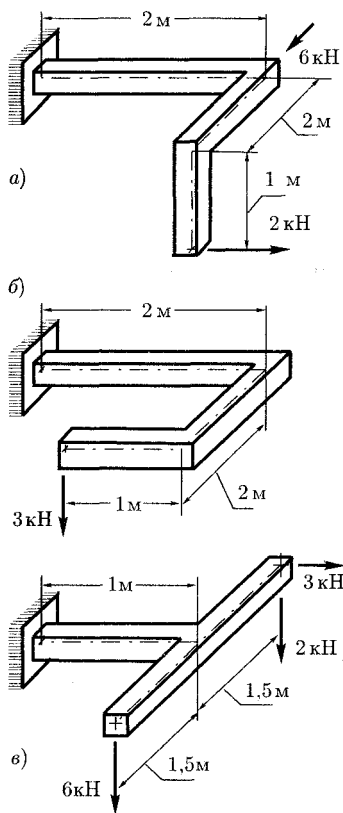
Проведем поперечное сечение на втором участке рамы. Выражения для внутренних усилий имеют вид

$$\begin{aligned} M_{y_2} &= F_2 l_1, \\ M_{z_2} &= -F_1 x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{x_2} &= F_1 l_1, \\
 Q_{y_2} &= -F_1, \\
 Q_{z_2} &= 0, \\
 N_{x_2} &= F_2,
 \end{aligned}$$

что позволяет закончить построение эюр (рис. в, г, д). Обращаем внимание на то, что плоскость эюры крутящих моментов  $M_{x_2}$  ориентирована произвольным образом.

**1.31.** Для рам (коленчатых стержней), изображенных на рис., построить эюры внутренних усилий.

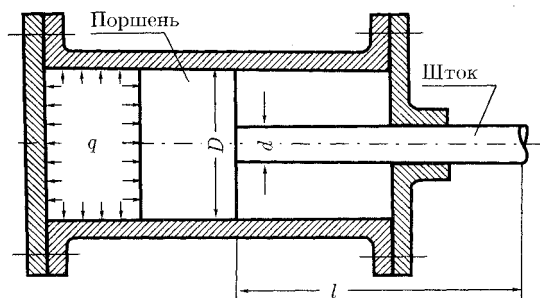


К задаче 1.31

## Г Л А В А 2

### РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ И ДОПУСКАЕМЫЕ СОСТОЯНИЯ

**2.1.** Исполнительный гидроцилиндр некоторой машины имеет конструкцию, поясняемую схемой на рис. Диаметр поршня  $D = 200$  мм, диаметр штока  $d = 40$  мм, удельное давление масла в рабочей полости  $q = 10$  МПа. Найти нормальное напряжение  $\sigma$  в поперечном сечении штока, а также изменение его продольных размеров, если длина штока  $l = 800$  мм. Материал штока – сталь.



К задаче 2.1

*Решение.* Рабочая площадь поршня составляет

$$A = \pi (D/2)^2 = 3,14 (200/2)^2 = 31400 \text{ мм}^2 = 0,0314 \text{ м}^2.$$

Усилие, передаваемое с поршня на шток, находится так

$$N = Aq = 0,0314 \cdot 10 \cdot 10^6 = 314 \cdot 10^3 \text{ Н} = 314 \text{ кН}.$$

Площадь сечения штока

$$A_1 = \pi (d/2)^2 = 3,14 (40/2)^2 = 1257 \text{ мм}^2 = 1257 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

а нормальное напряжение в этом сечении

$$\sigma = \frac{N}{A_1} = 314 \cdot 10^3 / 1257 \cdot 10^{-6} = 250 \cdot 10^6 \text{ Па} = 250 \text{ МПа}.$$

Шток находится в условиях сжатия, поэтому, строго говоря, необходимо принять

$$\sigma = -250 \text{ МПа}.$$

Относительная деформация укорочения штока подсчитывается по закону Гука

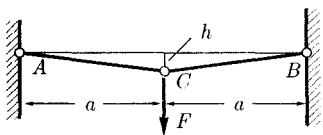
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = (-250 \cdot 10^6) / 2 \cdot 10^{11} = -0,00125,$$

тогда полное изменение длины найдется следующим образом:

$$\Delta l = \varepsilon l = -0,00125 \cdot 0,8 = -0,001 \text{ м} = -1 \text{ мм}.$$

**2.2.** В качестве строительной колонны использована стальная труба с размерами: длина  $l = 3$  м, наружный диаметр  $D = 250$  мм, толщина стенки  $t = 25$  мм. Колонна нагружена усилием  $N = 500$  кН. Найти напряжение в поперечном сечении, относительное и абсолютное укорочение колонны.

Ответ:  $\sigma = -28,3$  МПа,  $\varepsilon = -0,000142$ ,  $\Delta l = -0,42$  мм.



К задаче 2.3

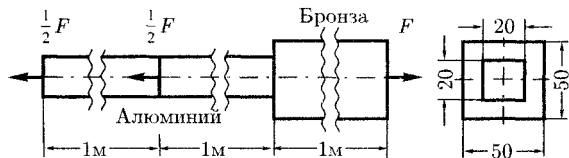
**2.3.** Уличный фонарь веса  $P = 120$  Н (массы около 12 кг) надлежит повесить на середине стального троса длиной  $l = 2a = 30$  м, протянутого между двумя домами, см. рис. Определить силу натяжения троса  $N$ , а также его удлинение  $\Delta l$ , если высота провисания  $h = 1$  м, а диаметр троса

$d = 5$  мм. Найти также нормальное напряжение  $\sigma$ .

Указание. Здесь можно пренебречь жесткостью троса на изгиб, что позволяет принять в качестве расчетной схемы систему из двух прямых стержней  $AC$  и  $BC$ , соединенных шарниром в точке приложения силы, см. рис.

Ответ:  $N = 902$  Н,  $\sigma = 45,9$  МПа,  $\Delta l = 6,9$  мм.

**2.4.** Под действием приложенной нагрузки, изображенный на рис., стержень удлиняется на 2 мм. Модуль упругости алюминия принять равным  $0,75 \cdot 10^{11}$  Па, а бронзы  $1,1 \cdot 10^{11}$  Па. Определить значение нагрузки.



К задаче 2.4

Ответ:  $F = 36,7$  кН.



**2.5.** В крупных железобетонных балках используется особый инженерный прием: вдоль всей конструкции натягивают тросы. Материал тросов – высококачественная термически обработанная сталь с пределом прочности  $\sigma_u > 1600$  МПа. Каждый трос натягивают до напряжения  $\sigma = 0,6\sigma_u = 960$  МПа. Оценить относительную  $\varepsilon$  и абсолютную  $\Delta l$  деформации троса, если его длина  $l = 300$  м.

*Ответ:*  $\varepsilon = 0,0048$ ,  $\Delta l = 1,44$  м.

**2.6.** Стальная ферма моста испытывается пробным нагружением. На одном из растянутых элементов фермы был установлен тензометр с базой  $l = 20$  мм и коэффициентом увеличения  $K = 1000$ . Приращение показания тензометра оказалось равным  $\Delta t = 12$  мм. Определить нормальные напряжения в исследуемом элементе.

*Решение.* По показанию тензометра находим изменение его базы

$$\Delta l = \frac{\Delta t}{K} = 12/1000 = 0,012 \text{ мм.}$$

Соответствующая относительная деформация составляет

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 0,012/20 = 0,0006,$$

после чего по закону Гука определяем напряжения

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,0006 = 120 \cdot 10^6 \text{ Па} = 120 \text{ МПа.}$$

**2.7.** Во время испытания образца на растяжение при некоторой нагрузке разности отсчетов по тензометрам № 1 и № 2 оказались равными 10,4 мм и -7,8 мм. Первый был установлен в продольном направлении, второй – в поперечном, у первого база составляла 20 мм, у второго – 60 мм. Коэффициенты увеличения тензометров одинаковы. Найти коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

*Ответ:*  $\nu = 0,25$ .

**2.8.** Оценить относительную погрешность  $\delta$  экспериментального определения модуля упругости в опыте на растяжение, если погрешность силоизмерителя испытательной машины составляет  $\delta_c = \pm 1\%$ , погрешность измерения удлинения образца тензометром  $\delta_m = \pm 1\%$ , погрешность установки базы тензометра  $\delta_b = \pm 2\%$ , погрешность измерения диаметра образца  $\delta_{об} = \pm 0,5\%$ .

*Решение.* Для определения наибольшей ошибки можно взять наибольшие значения величин, стоящих в числителе формулы закона Гука, и наименьшие значения величин, находящихся в знаменателе:

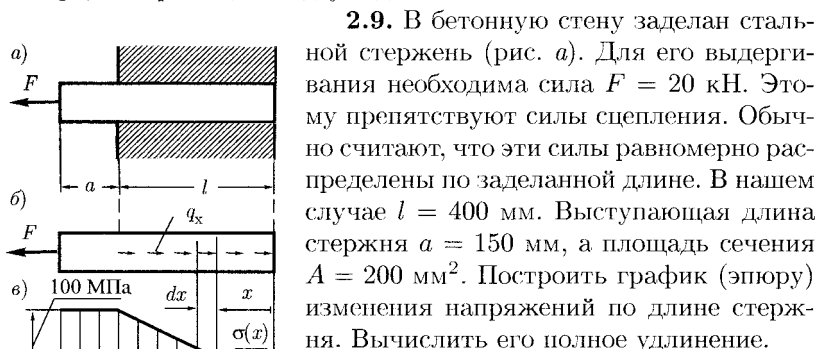
$$E_{\max} = 1,01F \cdot 1,02l / (0,99\Delta l \cdot 0,995^2 A) = 1,051E_{\text{средн}}$$

Таким образом, искомая погрешность оценивается значением  $\delta = \pm 5\%$ .

Имеется другая методика, согласно которой малые относительные погрешности просто складываются, потому что все соответствующие члены в рабочей формуле являются множителями:

$$\delta = \delta_c + \delta_m + \delta_b + 2\delta_{об} = 1 + 1 + 2 + 2 \cdot 0,5 = 5\%.$$

Здесь погрешность  $\delta_{об}$  удваивается. Дело в том, что в формулу закона Гука входит площадь сечения образца, которая выражается через квадрат диаметра, т.е. произведение двух одинаковых множителей.



К задаче 2.9

$$\sigma = \frac{F}{A} = 20 \cdot 10^3 / (200 \cdot 10^{-6}) = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}.$$

Удлинение этой части стержня составляет

$$\begin{aligned} \Delta l_a &= \frac{Fa}{EA} = 20 \cdot 10^3 \cdot 0,15 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 200 \cdot 10^{-6}) = \\ &= 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,075 \text{ мм}. \end{aligned}$$

На части стержня длиной  $l$  равнодействующая сил сцепления равна силе  $F$  из условия равновесия. Так как эта сила распределена по длине  $l$  равномерно, то на единицу этой длины придется сила (погонная нагрузка, интенсивность нагрузки)

$$q_x = \frac{F}{l},$$

см. рис. б. В этой ситуации нормальная сила в сечении на расстоянии  $x$  от свободного правого конца найдется так

$$N_x(x) = q_x x = F \frac{x}{l},$$

а напряжение

$$\sigma(x) = \frac{N_x(x)}{A} = \frac{Fx}{Al}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma|_{x=0} = 0, \quad \sigma|_{x=l} = \frac{F}{A} = 100 \text{ МПа.}$$

Эти данные позволяют построить эпюру напряжений по длине стержня, см. рис. в.

Далее выделим на расстоянии  $x$  от правого конца стержня длины бесконечно короткую его часть размером  $dx$  (рис. б). Формула закона Гука для подсчета удлинения такой части стержня приобретает вид

$$\delta dx = \frac{N dx}{EA} = \frac{F x dx}{EA l}.$$

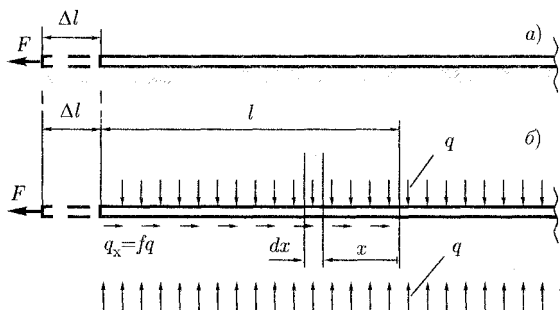
Удлинение стержня  $l$  найдется интегрированием:

$$\begin{aligned} \Delta l_l &= \int_l \delta dx = \int_0^l \frac{F x dx}{EA l} = \frac{F l}{2EA} = \\ &= 20 \cdot 10^3 \cdot 0,4 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 200 \cdot 10^{-6}) = 10^{-4} \text{ м} = 0,1 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Полное удлинение всего стержня будет равно

$$\Delta l = \Delta l_a + \Delta l_l = 0,075 + 0,100 = 0,175 \text{ мм.}$$

**2.10.** Тонкая, весьма длинная упругая лента свободно лежит на шероховатой поверхности. Определить силу  $F$ , необходимую для смещения конца ленты на  $\Delta l$  (рис. а), если даны коэффициент трения  $f$ , модуль  $E$  и плотность  $\rho$  материала ленты, площадь  $A$  ее поперечного сечения.



К задаче 2.10

*Решение.* Вес ленты длиной  $L$  составляет

$$P = V\gamma = AL\gamma = AL\rho g,$$

где  $V$  – объем ленты,  $\gamma$  – удельный вес материала ленты,  $g$  – ускорение свободного падения. Вес ленты единичной длины (погонная нагрузка, интенсивность нагрузки) определяется так:

$$q = \frac{P}{L} = A\rho g.$$

Под действием силы  $F$  приходит в движение только часть ленты, длину которой обозначим  $l$ , рис. 6. Именно на этой длине проявляются силы трения. Находим интенсивность этих сил:

$$q_x = fq = A f \rho g.$$

Условие равновесия ленты имеет вид

$$\sum F_x = -F + q_x l = 0,$$

откуда

$$l = \frac{F}{q_x} = \frac{F}{A f \rho g}.$$

Выделим бесконечно короткий участок ленты на расстоянии  $x$  слева от крайнего неподвижного сечения, рис. 6. Удлинение этого участка составляет по закону Гука

$$\delta dx = \frac{N(x)dx}{EA},$$

где сила  $N(x)$  находится следующим образом:

$$N(x) = q_x x = A f \rho g x.$$

Полное удлинение участка ленты длиной  $l$  найдется интегрированием:

$$\Delta l = \int_l \delta dx = \int_0^l \frac{f \rho g x dx}{E} = \frac{f \rho g l^2}{2E}.$$

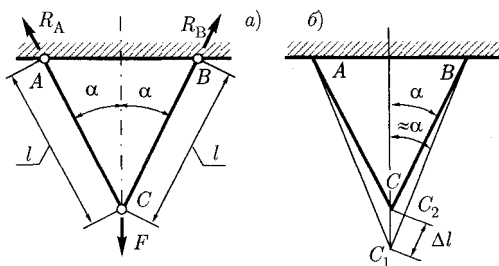
Заменим величину  $l$  через  $F$ . Получим

$$\Delta l = \frac{f \rho g}{2E} \left( \frac{F}{A f \rho g} \right)^2 = \frac{F^2}{2EA^2 f \rho g}$$

или

$$F = A \sqrt{2E f \rho g \Delta l},$$

что и является ответом на поставленный в задаче вопрос.



К задаче 2.11

**2.11.** Стержневая симметричная конструкция предназначена для удержания груза весом  $F$ , см. рис. *а*. Найти усилия в стержнях, а также вертикальное перемещение точки приложения силы.

*Решение.* В опорных шарнирных закреплениях  $A$  и  $B$  возникнут усилия  $R_A$  и  $R_B$ , растягивающие стержни  $AC$  и  $BC$ , см. рис. *а*. Условия равновесия этой стержневой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -R_A \sin \alpha + R_B \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= R_A \cos \alpha + R_B \cos \alpha - F = 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$R_A = R_B = R = \frac{F}{2 \cos \alpha}.$$

Ввиду симметрии получаем перемещение точки  $C$  в положение  $C_1$ , направленное строго по вертикали, рис. *б*. Для того чтобы определить удлинение, скажем, стержня  $BC$ , нужно через точку  $C$  провести окружность радиуса  $BC = l$  с центром в точке  $B$  и сделать засечку  $C_2$  на прямой  $BC_1$ . Отрезок  $C_2C_1$  как раз и представляет собой удлинение  $\Delta l$  стержня  $BC$ . Однако вместо окружности обычно проводят касательную к ней. Погрешность такой замены окружности на касательную оказывается пренебрежимо малой вследствие малости величины  $\Delta l$  по сравнению с длиной  $l$ .

Чертеж, изображенный на рис. *б*, нередко называют *схемой перемещений* в отличие от схемы усилий, данной на рис. *а*. Из схемы перемещений устанавливаем связь между вертикальным перемещением  $CC_1$  и удлинением  $\Delta l$ :

$$\cos \alpha = \frac{\Delta l}{CC_1}. \quad (a)$$

Далее удлинение  $\Delta l$  свяжем с усилием  $R$  с помощью закона Гука:

$$\Delta l = \frac{Rl}{EA},$$

а затем заменим  $R$  на  $F$  с привлечением условий равновесия:

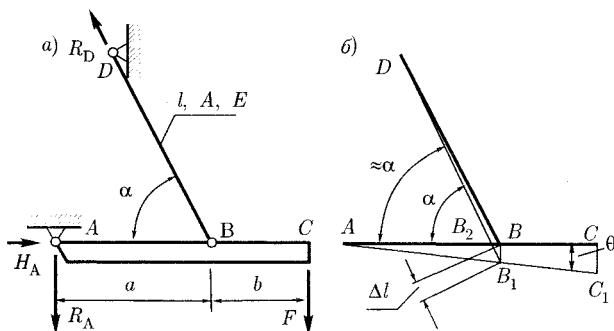
$$\Delta l = \frac{Fl}{2EA \cos \alpha}. \quad (6)$$

Наконец, исключим из уравнений (а) и (б) величину  $\Delta l$ . Получим

$$CC_1 = \frac{Fl}{2EA \cos^2 \alpha},$$

что и представляет искомый результат.

**2.12.** Жесткая балка  $ABC$  шарнирно опирается левым концом  $A$ , а в точке  $B$  подвешена на податливый стержень  $BD$ , см. рис. а. К правому свободному концу  $C$  приложена сила  $F$ . Найти усилие в стержне и определить перемещение точки  $C$ .



К задаче 2.12

*Решение.* Схема усилий дана на рис. а. Из уравнений равновесия получаем

$$R_D = F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, \quad R_A = F \frac{b}{a}, \quad H_A = F \frac{a+b}{a} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (a)$$

Схема перемещений приведена на рис. б. Балка под действием силы  $F$  поворачивается вокруг шарнира  $A$  в положение  $AB_1C_1$ . В качестве перемещений точек  $B$  и  $C$  приняты не дуги окружностей, а отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  соответствующих касательных. Такая замена не приносит существенных погрешностей в последующие расчеты ввиду малости угла  $\theta$  поворота балки. Из рис. б следует, что

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{a+b}{a}. \quad (6)$$

При нахождении удлинения  $\Delta l$  стержня  $BD$  воспользуемся приемом, изложенным в решении задачи 2.11: из точки  $B$  опустим перпендикуляр

$BB_2$  на новое положение  $B_1D$  поддерживающего стержня. Тогда отрезок  $B_2B_1$  будет практически равен удлинению  $\Delta l$ , см. рис. б. Из этой схемы нетрудно получить

$$\sin \alpha = \frac{\Delta l}{BB_1}. \quad (в)$$

По закону Гука имеем

$$\Delta l = \frac{R_D l}{EA}. \quad (г)$$

Исключим величину  $\Delta l$  из (в) и (г)

$$\frac{R_D l}{EA} = BB_1 \sin \alpha,$$

а затем выразим величину  $R_D$  через  $F$  из (а)

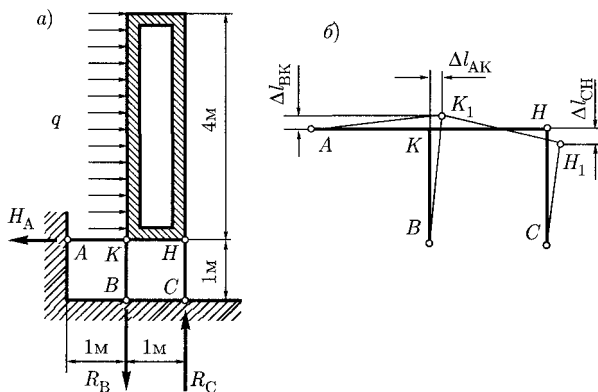
$$F \frac{a+b}{a \sin \alpha} \cdot \frac{l}{EA} = BB_1 \sin \alpha.$$

Наконец, освободимся от  $BB_1$  с помощью (б). Найдем

$$CC_1 = \frac{Fl}{EA} \left( \frac{a+b}{a \sin \alpha} \right)^2,$$

что и является ответом на поставленный в задаче вопрос.

**2.13.** Жесткая конструкция прикреплена к фундаменту тремя стальными стержнями  $AK$ ,  $BK$  и  $CH$ , см. рис. а. Концевые закрепления считать шарнирными. Конструкция испытывает боковое силовое воздействие с интенсивностью  $q = 25$  кН/м. Определить



К задаче 2.13

усилия в стержнях и полное перемещение шарнира  $K$ , если стержень  $AK$  выполнен из четырех равнополочных уголков  $50 \times 50 \times 5$ , стержень  $BK$  – из двух швеллеров № 12, стержень  $CH$  – из одного двутавра № 20.

*Решение.* Схема усилий воспроизведена на рис. а. Из уравнений равновесия находим реакции

$$H_A = 100 \text{ кН}, R_B = 200 \text{ кН}, R_C = 200 \text{ кН}.$$

Стержни  $AK$  и  $BK$  растянуты, стержень  $CH$  сжат. Соответствующая схема перемещений изображена на рис.б. Деформации  $\Delta l_{AK}$ ,  $\Delta l_{BK}$  и  $\Delta l_{CH}$  указаны в соответствии с правилами приближенных построений, изложенных при решении задач 2.11 и 2.12. Из схемы на рис.б следует

$$\Delta l_{AK} = \frac{H_A l_{AK}}{E A_A}, \quad \Delta l_{BK} = \frac{H_B l_{BK}}{E A_B}, \quad \Delta l_{CH} = \frac{H_C l_{CH}}{E A_C}.$$

С помощью сортамента горячекатанной стали устанавливаем

$$\begin{aligned} A_A &= 4 \cdot 4,8 = 19,2 \text{ см}^2, \\ A_B &= 2 \cdot 13,3 = 26,6 \text{ см}^2, \\ A_C &= 26,8 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Переходим к вычислению перемещений. Подставляя соответствующие значения параметров, находим

$$\begin{aligned} \Delta l_{AK} &= 100 \cdot 10^3 \cdot 1/2 \cdot 10^{11} \cdot 19,2 \cdot 10^{-4} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,26 \text{ мм}, \\ \Delta l_{BK} &= 200 \cdot 10^3 \cdot 1/2 \cdot 10^{11} \cdot 26,6 \cdot 10^{-4} = 0,38 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,38 \text{ мм}, \\ \Delta l_{CH} &= 200 \cdot 10^3 \cdot 1/2 \cdot 10^{11} \cdot 26,8 \cdot 10^{-4} = 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,37 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Полное перемещение шарнира  $K$  определим геометрическим суммированием горизонтального и вертикального перемещений:

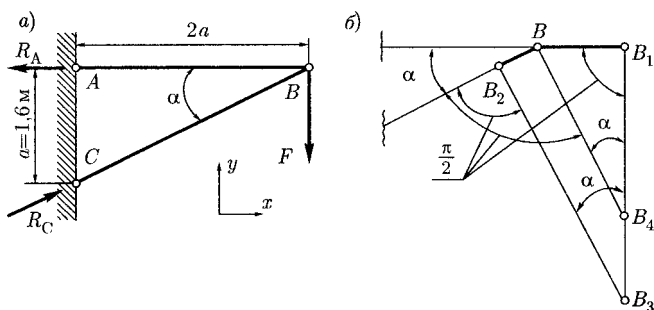
$$KK_1 = \sqrt{\Delta l_{AK}^2 + \Delta l_{BK}^2} = \sqrt{0,26^2 + 0,38^2} = 0,46 \text{ мм}.$$

**2.14.** Кронштейн  $ABC$  собран из двух стержней – стального  $BA$  и деревянного  $BC$ , рис. а. Сечение первого круглое ( $d = 30$  мм), второго – прямоугольное  $150 \times 260$  мм. В узле  $B$  приложена вертикальная сила  $F = 50$  кН, вылет кронштейна  $2a = 3,2$  м. Найти усилия в стержнях и перемещение узла  $B$ .

*Решение.* На рис. а указаны направления реакций в опорных креплениях. Из условий равновесия получаем

$$R_A = 2F, \quad R_C = \frac{F}{\sin \alpha}.$$





К задаче 2.14

Так как

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,56^\circ,$$

то

$$\sin \alpha = 0,4472.$$

Поэтому имеем

$$R_A = 100 \text{ кН}, \quad R_C = 111,8 \text{ кН}.$$

Отыщем длины и площади сечения стержней:

$$l_{BA} = 2a = 3,2 \text{ м},$$

$$l_{BA} = \frac{a}{\sin \alpha} = 1,6 / 0,4472 = 3,58 \text{ м},$$

$$A_{BA} = \pi (d/2)^2 = 3,14 (30/2)^2 = 707 \text{ мм}^2 = 707 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$A_{BC} = 150 \cdot 260 = 39000 \text{ мм}^2 = 39 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Переходим к схеме перемещений, рис. б. Она изображена в соответствии с тем, что стержень  $BA$  растянут, а стержень  $BC$  сжат, причем отрезок  $BB_1$  отвечает удлинению первого, а  $BB_2$  – укорочению второго. Каждое из этих перемещений отложено по первоначальному направлению соответствующего стержня. Точки  $B_1$  и  $B_2$  – это концы мысленно разъединенных стержней. Соединение этих концов произойдет в точке  $B_3$ . Обоснование методики построения данной схемы перемещений дано в решениях задач 2.11...2.13.

Горизонтальное перемещение точки  $B$  (вдоль оси  $x$ ) подсчитывается так:

$$u_B = BB_1 = \Delta l_{BA} = \frac{R_A l_{BA}}{E_{BA} A_{BA}}.$$

Для определения вертикального (вдоль оси  $y$ ) перемещения  $v_B$  точки  $B$  продelaем дополнительное построение: проведем линию  $BB_4$ , рис. б. То-

гда нетрудно найти

$$v_B = B_1 B_3 = B_1 B_4 + B_4 B_3 = \frac{u_B}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\Delta l_{BC}}{\sin \alpha}$$

или

$$v_B = \frac{u_B}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{R_C l_{BC}}{E_{BC} A_{BC} \sin \alpha}.$$

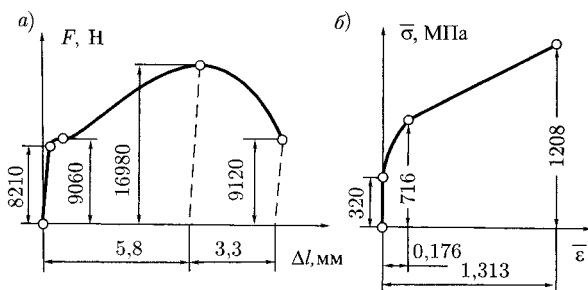
Соответствующие числовые подстановки дают

$$\begin{aligned} u_B &= 100 \cdot 10^3 \cdot 3,2/2 \cdot 10^{11} \cdot 707 \cdot 10^{-6} = 2,26 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,26 \text{ мм}, \\ v_B &= 2,26 \cdot 10^{-3}/0,5 + 111,8 \cdot 10^3 \cdot 3,58/0,1 \cdot 10^{11} \cdot 39 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4472 = \\ &= (4,52 + 2,29) \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6,81 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Наконец, находим полное перемещение узла  $B$ :

$$f_B = BB_3 = \sqrt{u_B^2 + v_B^2} = \sqrt{2,26^2 + 6,81^2} = 7,18 \text{ мм}.$$

**2.15.** При испытании на растяжение стального стержневого образца диаметром  $d_0 = 6$  мм и длиной между головками  $l_0 = 30$  мм была получена представленная на рис.  $a$  диаграмма. Диаметр шейки в месте разрыва оказался равным  $d_\delta = 3,1$  мм. Определить условные и истинные характеристики прочности и пластичности материала.



К задаче 2.15

*Решение.* Из диаграммы на рис.  $a$  следует, что закон Гука соблюдается до нагрузки  $F_{pr} = 8210$  Н, площадке текучести отвечает нагрузка  $F_y = 9060$  Н, максимальная нагрузка при испытании достигает  $F_{\max} = F_u = 16980$  Н, нагрузка в момент разрыва образца оказалась равной  $F_\delta = 9120$  Н.

Первоначальная площадь поперечного сечения и площадь сечения к моменту разрыва находится следующим образом:

$$A_o = \pi (d_o/2)^2 = 3,14 (6/2)^2 = 28,3 \text{ мм}^2 = 28,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$A_\delta = \pi (d_\delta/2)^2 = 3,14 (3,1/2)^2 = 7,55 \text{ мм}^2 = 7,55 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Условные (отнесенные к начальной площади  $A_o$ ) характеристики прочности составляют:

предел пропорциональности

$$\sigma_{pr} = \frac{F_{pr}}{A_o} = 8210/28,3 \cdot 10^{-6} = 290 \cdot 10^6 \text{ Па} = 290 \text{ МПа},$$

предел текучести

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_o} = 9060/28,3 \cdot 10^{-6} = 320 \cdot 10^6 \text{ Па} = 320 \text{ МПа},$$

предел прочности (временное сопротивление)

$$\sigma_u = \frac{F_u}{A_o} = 16980/28,3 \cdot 10^{-6} = 600 \cdot 10^6 \text{ Па} = 600 \text{ МПа}.$$

Займемся характеристиками пластичности. Исходя из диаграммы, вычислим относительное остаточное удлинение при разрыве

$$\delta = \frac{\Delta l_\delta}{l_o} = (5,8 + 3,3)/30 = 0,303 = 30,3\%,$$

а также предельное равномерное относительное удлинение

$$\varepsilon_{\text{равн}} = \frac{\Delta l_{\text{равн}}}{l_o} = 5,8/30 = 0,193 = 19,3\%.$$

Далее определяем относительное остаточное сужение площади сечения к моменту разрыва

$$\psi_\delta = \frac{A_o - A_\delta}{A_o} = (28,3 - 7,55)/28,3 = 0,731 = 73,1\%.$$

Переходим к определению истинных характеристик прочности и пластичности по известным формулам:

истинное напряжение, соответствующее пределу прочности

$$\bar{\sigma}_u = \sigma_u (1 + \varepsilon_{\text{равн}}) = 600 (1 + 0,193) = 716 \text{ МПа},$$

истинное напряжение к моменту разрыва

$$\bar{\sigma}_\delta = \frac{F_\delta}{A_\delta} = 9120/7,55 \cdot 10^{-6} = 1208 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1208 \text{ МПа},$$

истинное относительное предельное равномерное остаточное удлинение

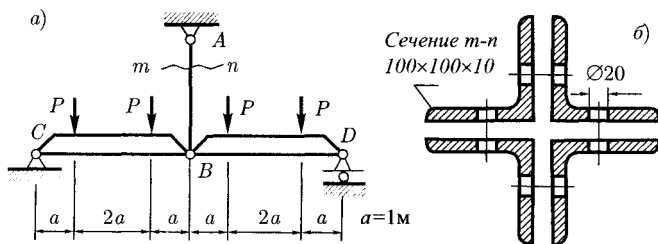
$$\bar{\varepsilon}_{\text{равн}} = \ln(1 + \varepsilon_{\text{равн}}) = \ln(1 + 0,193) = 0,1765,$$

истинное относительное остаточное удлинение к моменту разрыва

$$\bar{\varepsilon}_{\delta} = \ln \frac{1}{1 - \psi_{\delta}} = \ln(1 / (1 - 0,731)) = 1,313.$$

Полученные здесь числа позволяют построить истинную диаграмму деформирования, рис. б.

**2.16.** Конструкция включает две жесткие балки  $CB$  и  $BD$  и подвеску  $AB$ , с которой они соединены при помощи шарнира  $B$ , см. рис. а. Балки предназначены для установки четырех комплектов оборудования весом  $P$  каждый. Подвеска выполнена в виде четырех равнополочных уголков  $100 \times 100 \times 10$ , ослабленных отверстиями  $\varnothing 20$  под болты, см. рис. б. Материал уголков – сталь из предыдущего примера 2.15. Определить допустимый вес каждого из комплектов, если нормативный коэффициент запаса предписывается в данных обстоятельствах принять равным  $[s] = 2$ .



К задаче 2.16

*Решение.* Конструкция предназначена для длительной работы под неизменной нагрузкой типа собственного веса. В подобной ситуации выход из строя определяется состоянием предельной упругости, когда напряжения в конструкционном элементе становятся равными пределу текучести  $\sigma_y$ , т.е.

$$\sigma = \sigma_y.$$

Допускаемого состояния конструкция достигает при

$$\sigma = [\sigma] = \frac{\sigma_y}{[s]}.$$

В данном случае допускаемое напряжение составляет

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{[s]} = 320/2 = 160 \text{ МПа.}$$

Подвеска  $AB$  растягивается нормальным усилием  $N$ . Условие прочности для нее выглядит так:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

или

$$N \geq A[\sigma].$$

Ослабленную площадь сечения подвески надлежит вычислять следующим образом:

$$A = 4(A_{\text{уг}} - 2A_{\text{отв}}),$$

где  $A_{\text{уг}}$  – площадь сечения уголка по сортаменту,  $A_{\text{отв}}$  – площадь отверстия под болт.

В данной задаче имеем

$$A = 4(19,24 - 2 \cdot 0,5 \cdot 2) = 69 \text{ см}^2 = 69 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Это позволяет вычислить допускаемое значение нормального усилия в подвеске:

$$[N] = A[\sigma] = 69 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 1104 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1104 \text{ кН.}$$

Так как из условия равновесия балок имеем

$$P = 0,5N,$$

то допускаемое значение веса одного комплекта оборудования составляет

$$[P] = 0,5[N] = 0,5 \cdot 1104 = 552 \text{ кН.}$$

**2.17.** Решить предыдущую задачу в следующей постановке: определить допускаемое значение силы  $P$  для случая однократного нагружения в аварийной обстановке.

*Решение.* Конструкция должна лишь уцелеть после аварии. Дальнейшая ее эксплуатация возможна лишь после ремонтных работ, в ходе которых устраняются все повреждения. Под предельным здесь подразумевается состояние разрушения, а в качестве предельного напряжения принимают предел прочности  $\sigma_u$ . В этом случае условие возникновения предельного состояния, а также соответствующее условие прочности записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_u, \\ \sigma &\leq [\sigma_u] = \frac{\sigma_u}{[s_u]}. \end{aligned}$$

В описываемых обстоятельствах нормативный коэффициент запаса назначают несколько меньше, чем  $[s]$ . Примем в данном случае  $[s_u] = 1,8$ , тогда

$$[\sigma_u] = 600/1,8 = 333 \text{ МПа.}$$

Далее воспользуемся формулами из предыдущей задачи:

$$[N_u] = A[\sigma_u] = 69 \cdot 10^{-4} \cdot 333 \cdot 10^6 = 2300 \cdot 10^3 \text{ Н} = 2300 \text{ кН,}$$

$$[P_u] = 0,5[N_u] = 0,5 \cdot 2300 = 1150 \text{ кН.}$$

**2.18.** В течение года на одном из металлургических заводов было произведено четыре партии стали одной марки. Из материала каждой партии изготавливали по пять образцов для определения предела текучести  $\sigma_y$ . Полученные результаты образуют вариационный ряд, состоящий из  $n = 20$  членов, МПа:

434, 436, 443, 445, 445, 446, 447, 447, 448, 451, 452, 453,  
456, 458, 458, 462, 462, 468, 472, 477.

Определить выборочное среднее предела текучести, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, выборочный коэффициент вариации.

*Решение.* Выборочное среднее значение предела текучести определяем очевидным образом

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{n} \sum \sigma_{yi} = 9060/20 = 453 \text{ МПа.}$$

Выборочную дисперсию можно вычислить по следующей формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (\sigma_{yi} - \bar{\sigma}_y)^2 = 126,9 \text{ МПа}^2.$$

Далее находим выборочное среднее квадратическое отклонение и выборочный коэффициент вариации:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{126,9} = 11,26 \text{ МПа,}$$

$$v = \frac{s}{\bar{\sigma}_y} = 11,26/453 = 0,0248.$$

Следует заметить, что найденная здесь величина  $s$  является так называемой смещенной оценкой среднего квадратического отклонения. Более строгой следует признать несмещенную оценку  $s_1$ , которая получается умножением величины  $s$  на поправочный коэффициент, зависящий от числа  $n$ . Аналогичное замечание относится и к величине  $v$ .

Разработчики технических норм расчетов на прочность конструктивных элементов в различных отраслях народного хозяйства все более склоняются к тому, чтобы коэффициенты запаса вычислять не по отношению к среднему значению предельного напряжения (здесь это  $\bar{\sigma}_y$ ), а по

отношению к минимальному значению такого напряжения. Эту величину прогнозируют обычно следующим образом:

$$\sigma_{y,\min} = \sigma_* = \bar{\sigma}_y - 2s.$$

В данной задаче имеем

$$\sigma_* = 453 - 2 \cdot 11,26 = 430,48 \text{ МПа.}$$

Методами математической статистики установлено, что вероятность выхода за ворота металлургического завода стали заданной марки с пределом текучести, превосходящим или равным  $\sigma_*$ , составляет 0,977 или 97,7%. О величине  $\sigma_*$  иногда говорят как о пределе текучести с 97,7%-ым обеспечением. Такой уровень "обеспеченности" во многих случаях считается достаточным.

Для высокоответственных конструкций предельное напряжение еще раз понижают, принимая

$$\sigma_{y,\min} = \sigma_{**} = \bar{\sigma}_y - 3s$$

или

$$\sigma_{**} = 453 - 3 \cdot 11,26 = 419,22 \text{ МПа.}$$

В этом случае "обеспеченность" величины  $\sigma_{**}$  достигает значения 99,9%.

Однако выясняется, что представленная в условии задачи выборка случайных значений предела текучести  $\sigma_{yi}$  недостаточна, она не обеспечивает надлежащую точность прогноза величины  $\sigma_{**}$ . Нужно иметь более обширную (более представительную) выборку. Во-первых, следует подвергнуть испытаниям образцы данной марки стали из партий, выпускаемых всеми металлическими заводами страны (группы стран). Во-вторых, должно быть существенно увеличено количество  $n$  самих испытаний. В зависимости от тех или иных обстоятельств минимальное число  $n$  должно превышать несколько сотен. Подробнее см. литературу по математической статистике.

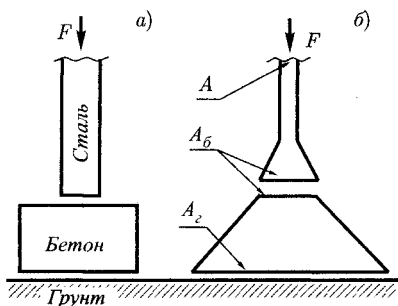
**2.19.** При постройке ангара были использованы стальные колонны, которые через бетонные блоки опирались на грунт, рис. а. Сжимающая нагрузка на колонну предусматривается  $F = 1000 \text{ кН}$ . Подобрать поперечные размеры упомянутых конструктивных элементов, если допускаемое напряжение для стали  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ , для бетона  $[\sigma]_б = 20 \text{ МПа}$ , для грунта  $[\sigma]_г = 0,4 \text{ МПа}$ . Собственным весом пренебречь.

*Решение.* Площадь подошвы бетонного блока, которой он опирается на грунт, определяется так:

$$A_{\Gamma} \geq \frac{N}{[\sigma]_{\Gamma}} = 1000 \cdot 10^3 / 0,4 \cdot 10^6 = 2,5 \text{ м}^2 = 25000 \text{ см}^2.$$

Площадь поперечного сечения колонны находится аналогично

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = 1000 \cdot 10^3 / 160 \cdot 10^6 = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 62,5 \text{ см}^2.$$



Наконец, определяем площадь  $A_6$ , по которой соприкасаются колонна и бетонный блок:

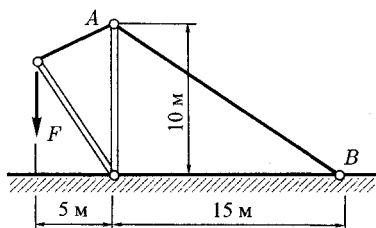
$$A_6 \geq \frac{N}{[\sigma]_6} = 1000 \cdot 10^3 / 20 \cdot 10^6 = 500 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 500 \text{ см}^2.$$

Полученные здесь результаты дополнительно иллюстрируются схемой на рис. 6. Эта же схема указывает на конструктивные особенности применяемых здесь элементов.

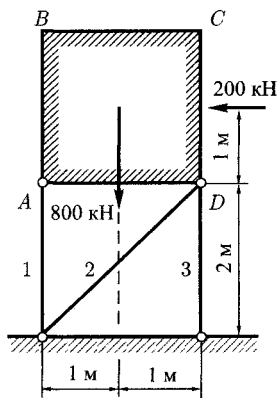
К задаче 2.19

**2.20.** На рис. представлена схема подъемного крана. Его оттяжка  $AB$  является тросом с поперечным сечением  $500 \text{ мм}^2$ . Допускаемое напряжение для троса равно  $80 \text{ МПа}$ . Какова грузоподъемность крана (значение максимального груза  $F$ ) из условия прочности оттяжки?

Ответ:  $F = 66,7 \text{ кН}$ .



К задаче 2.20



К задаче 2.21

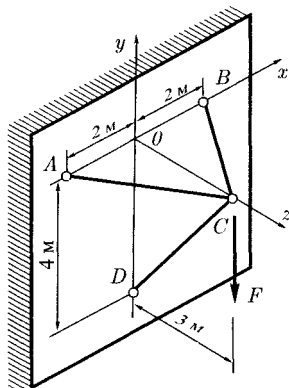
**2.21.** Конструкция  $ABCD$ , деформацией которой пренебрегаем, прикреплена к фундаменту при помощи стержней 1, 2 и 3. Вес кон-



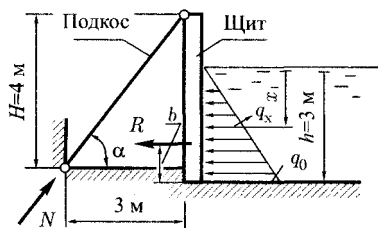
струкции и боковое давление на нее указаны на рис. Подобрать сечение стоек 1 и 3 и раскоса 2 из четырех равнополочных уголков каждое, если  $[\sigma] = 100$  МПа.

*Ответ:* Сечение стойки 1 – из уголков  $80 \times 80 \times 8$ , раскоса 2 – из уголков  $63 \times 63 \times 6$  и стойки 3 – из уголков  $32 \times 32 \times 4$ .

**2.22.** К кронштейну  $ABCD$  подвешен груз  $F = 150$  кН. Подобрать площади сечений стальных стержней кронштейна, если допустимое напряжение материала растянутых стержней  $[\sigma] = 120$  МПа, сжатого –  $[\sigma]_c = 60$  МПа.



К задаче 2.22



К задаче 2.23

**2.23.** Водонепроницаемый щит предназначен для удержания воды, см. рис. От опрокидывания он удерживается подкосами, установленными через каждые 2 м. Подкосы деревянные, круглого поперечного сечения. Допускаемое напряжение для материала подкоса принять  $[\sigma] = 2$  МПа. Подобрать сечение подкоса.

*Решение.* Гидростатическое давление жидкости на глубине  $x$  равно

$$q(x) = \gamma x = \rho g x,$$

см. эпюру на рис. На глубине  $h$  имеем

$$q_0 = \rho g h = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3 = 29,4 \cdot 10^3 \text{ Па} = 0,0294 \text{ МПа}.$$

Выделим часть щита длиной (перпендикулярно плоскости чертежа), равной 2 м. На эту длину приходится один подкос. Сила гидростатического давления воды на эту площадь  $A = 2 \cdot 3 = 6 \text{ м}^2$  равна

$$R = \frac{1}{2} q_0 A = 0,0294 \cdot 10^6 \cdot 6/2 = 88,2 \cdot 10^3 \text{ кН}.$$

Равнодействующая всей этой нагрузки приложена на расстоянии  $\frac{2}{3}h$  от свободной поверхности жидкости, т.е. на расстоянии

$$b = 1 \text{ м}$$

от дна. Подкос находится в условиях сжатия. Реакцию со стороны опоры обозначим через  $N$ , см. рис. Составим уравнение равновесия упомянутой части щита

$$\sum m_{z(A)} = -HN \cos \alpha + Rb = 0,$$

откуда

$$N = \frac{Rb}{H \cos \alpha}.$$

Так как  $\operatorname{tg} \alpha = 4/3 = 1,333$ , то  $\alpha = 53,1^\circ$  и  $\cos \alpha = 0,600$ , поэтому имеем

$$N = 88,2 \cdot 10^3 / (4 \cdot 0,6) = 36,7 \cdot 10^3 \text{ кН}.$$

Из условия прочности определяем требуемую площадь сечения подкоса

$$A_{\Pi} \geq \frac{N}{[\sigma]} = 36,7 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^6 = 18,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Соответствующий радиус поперечного сечения составляет

$$r \geq \sqrt{\frac{A_{\Pi}}{\pi}} = \sqrt{0,0183/3,14} = 0,076 \text{ м} = 76 \text{ мм}.$$

**2.24.** Определить наибольшее сжимающее напряжение в бетонной колонне постоянного сечения высотой 10 м, если плотность бетона  $2400 \text{ кг/м}^3$ .

*Ответ:* 0,24 МПа.

**2.25.** При какой длине разорвется только от собственного веса стальной стержень, вертикально подвешенный за верхний конец? Предел прочности стали принять 500 МПа.

*Ответ:* 6,41 км.

**2.26.** Определить допускаемую длину  $l$  шахтного стального каната (в вертикальном шахтном стволе), если предел прочности материала проволок, из которых свит канат,  $\sigma_u = 2800 \text{ МПа}$ , нормативный коэффициент запаса  $[s] = 8$ , а 25% несущей способности каната зарезервировано на расчетную нагрузку (вес клетки, вес полезного груза, силы инерции и др.), в которую не входит собственный вес каната. Плотность материала каната  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ .

*Ответ:*  $l = 3345 \text{ м}$ .

**2.27.** Определить площади поперечных сечений ступенчатой кирпичной стойки высотой  $h = 40 \text{ м}$ , сжатой силой  $F = 1000 \text{ кН}$ ,

имеющей четыре участка одинаковой длины. Плотность кирпичной кладки  $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$ , допускаемое напряжение  $[\sigma] = 0,8 \text{ МПа}$ . Построить энюру распределения напряжений по длине стойки.

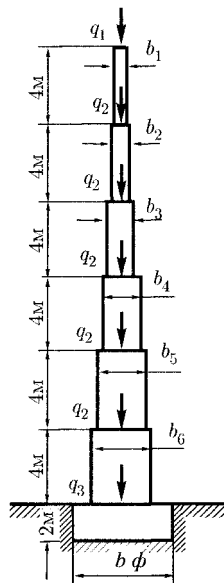
*Ответ:*  $1,67 \text{ м}^2, 2,23 \text{ м}^2, 2,97 \text{ м}^2, 3,95 \text{ м}^2$ .

**2.28.** Определить объем кладки мостовой опоры высотой  $h = 42 \text{ м}$ , нагруженной сжимающей силой  $F = 1000 \text{ кН}$  в трех случаях:

- опора постоянного сечения,
- ступенчатая опора из трех частей по  $14 \text{ м}$  каждая,
- опора в виде бруса равного сопротивления. Материал кладки имеет плотность  $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$ , допускаемое напряжение  $[\sigma] = 1,2 \text{ МПа}$ .

*Ответ:*  $V_1 = 610 \text{ м}^3, V_2 = 261 \text{ м}^3, V_3 = 209 \text{ м}^3$ .

**2.29.** На рис. представлен поперечный разрез кирпичной стены шестиэтажного здания. От чердачного перекрытия и кровли на погонный метр стены действует нагрузка  $q_1 = 60 \text{ кН/м}$ , от междуэтажных перекрытий  $q_2 = 40 \text{ кН/м}$  и от нижнего этажа  $q_3 = 30 \text{ кН/м}$ . Эти нагрузки равномерно распределены вдоль оси стены. Плотность материала стены и фундамента равен  $2000 \text{ кг/м}^3$ . Определить наименьшие толщины стен в каждом этаже при допускаемом напряжении  $[\sigma] = 0,6 \text{ МПа}$  и ширину фундамента при допускаемом давлении на грунт  $[\sigma]_r = 0,5 \text{ МПа}$ .



К задаче 2.29

*Ответ:*

$b_1 = 115 \text{ мм}, b_2 = 210 \text{ мм}, b_3 = 320 \text{ мм}, b_4 = 445 \text{ мм},$   
 $b_5 = 590 \text{ мм}, b_6 = 760 \text{ мм}, b_\phi = 1250 \text{ мм}.$

*Примечание.* На основании теплотехнических расчетов полученные минимальные размеры толщин стен верхних этажей несколько увеличиваются. Кроме того, все размеры должны быть приведены в соответствии со стандартными размерами кирпичей.

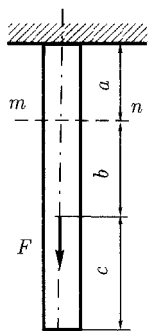
**2.30.** Стальная буровая штанга длиной  $l = 1200 \text{ м}$ , квадратного сечения  $125 \times 125 \text{ мм}$ , с внутренним отверстием  $d = 50 \text{ мм}$  погружена в скважину и заполнена глиняным жидким раствором, плотность которого  $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$ . На нижний конец штанги при ее подъеме из скважины действует растягивающая нагрузка  $F = 60 \text{ кН}$ . Опре-

делить максимальное напряжение в штанге и ее абсолютное удлинение.

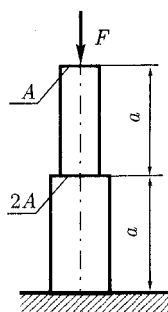
Ответ:  $\sigma = 88,7$  МПа,  $\Delta l = 280$  мм.

**2.31.** Определить с учетом собственного веса перемещение сечения  $m - n$  приведенного на рис. стержня с поперечным сечением  $A$ , модулем упругости  $E$  и плотностью материала  $\rho$ .

Ответ:  $\frac{Fa}{EA} + \frac{\rho g(b+c)a}{E} + \frac{\rho ga^2}{2E}$ .



К задаче 2.31



К задаче 2.32

**2.32.** Определить полное укорочение представленного на рис. стержня с учетом его собственного веса, если известны плотность материала  $\rho$  и модуль упругости  $E$ .

Ответ:  $\frac{3Fa}{2EA} + \frac{3\rho ga^2}{2E}$ .

## ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

**3.1.** Короткая железобетонная колонна имеет квадратное сечение со стороной  $a = 240$  мм. Колонна армирована на всю длину четырьмя продольными стальными стержнями диаметром  $d = 2R = 20$  мм. Стержни по сечению колонны расположены симметрично. Колонна нагружена продольной сжимающей силой  $F = 500$  кН. Модуль упругости  $E_b$  использованного здесь бетона в 10 раз меньше модуля упругости стали  $E_c$ . Найти распределение внутренних усилий между арматурой и бетоном, а также вычислить соответствующие напряжения.

*Решение.* Мысленно рассечем колонну поперечным сечением, отбросим верхнюю часть, а нижнюю изобразим на рис. б. Далее предположим, что и стальная арматура, и бетонный массив колонны находятся в условиях растяжения. На рис. б показаны соответствующие равнодействующие: нормальные силы  $N_c$  и  $N_b$ . Составим условие равновесия этой нижней части колонны

$$N_c + N_b + F = 0. \quad (1)$$

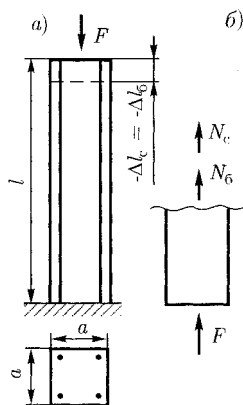
Остальные условия равновесия обращаются в тождества вида  $0 \equiv 0$ . Таким образом, имеем два неизвестных усилия  $N_c$  и  $N_b$  и одно уравнение равновесия. Следовательно, система статически неопределима.

Колонна под нагрузкой укоротится, причем стальная арматура и бетонный массив деформируются совместно. Деформации укорочения принято предписывать отрицательный знак. Поэтому упомянутое условие совместности перемещений запишем так:

$$-\Delta l_c = -\Delta l_b, \quad (2)$$

см. также рис. а. Уравнение (2) имеет чисто геометрический смысл и не связано с вышеприведенным предположением о растягивающих силах  $N_c$  и  $N_b$ .

Между деформациями  $\Delta l_c$  и  $\Delta l_b$ , с одной стороны, и усилиями  $N_c$  и  $N_b$ , с другой, существуют физические соотношения. В данном случае — это уравнения закона Гука



К задаче 3.1

$$\Delta l_c = \frac{N_c l}{E_c A_c}, \quad \Delta l_6 = \frac{N_6 l}{E_6 A_6}, \quad (3)$$

где  $A_c$  и  $A_6$  – суммарные площади сечения стальной арматуры и бетонного массива. Подставим уравнения (3) в условие (2). Найдем

$$\frac{N_c}{N_6} = \frac{E_c}{E_6} \cdot \frac{A_c}{A_6}. \quad (4)$$

Суммарная площадь сечения арматуры и площадь сечения собственно бетонной части колонны находятся так:

$$\begin{aligned} A_c &= 4\pi R^2 = \pi d^2 = 3,14 \cdot 20^2 = 1257 \text{ мм}^2 = 1257 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \\ A_6 &= a^2 - A_c = 240^2 - 1257 = 56300 \text{ мм}^2 = 56300 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Подсчитаем отношение этих площадей

$$\frac{A_c}{A_6} = 1257/56300 = 0,0223.$$

С учетом этого, а также условия задачи

$$\frac{E_c}{E_6} = 10$$

уравнению (4) можно придать вид

$$\frac{N_c}{N_6} = 10 \cdot 0,0223 = 0,223. \quad (5)$$

Из совместного решения уравнений (1) и (5) находим усилия в стальной арматуре и бетонном массиве

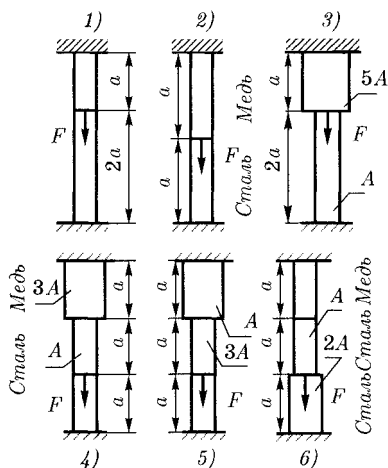
$$\begin{aligned} N_c &= -0,182F = -91 \text{ кН}, \\ N_6 &= -0,818F = -409 \text{ кН}, \end{aligned}$$

а затем и нормальные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{N_c}{A_c} = -91000/(1257 \cdot 10^{-6}) = -72,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = -72,4 \text{ МПа}, \\ \sigma_6 &= \frac{N_6}{A_6} = -409000/(0,0563) = -7,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = -7,3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Полученные здесь отрицательные знаки величин  $N_c$  и  $N_6$  (а также  $\sigma_c$  и  $\sigma_6$ ) указывают на ошибочность первоначального предположения о растяжении всех элементов колонны. Однако использованный здесь прием позволяет всегда правильно найти знаки усилий и напряжений в тех статически неопределимых системах, в которых заранее нельзя однозначно догадаться, будут ли те или иные стержни растянуты или сжаты.

**3.2.** Определить нормальные усилия в поперечных сечениях на каждом из участков стержня, см. рис.



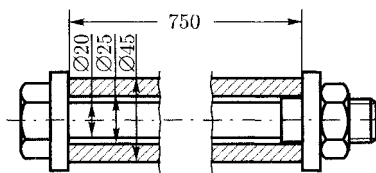
К задаче 3.2

Ответ:

| Усилия  | Схемы          |                |                 |                |                |                |
|---------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
|         | 1              | 2              | 3               | 4              | 5              | 6              |
| $N_1/F$ | $\frac{3}{5}$  | $\frac{1}{3}$  | $\frac{10}{11}$ | $\frac{2}{3}$  | $\frac{3}{7}$  | $\frac{1}{7}$  |
| $N_2/F$ | $-\frac{2}{5}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{11}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{7}$  | $\frac{1}{7}$  |
| $N_3/F$ |                |                |                 |                | $-\frac{4}{7}$ | $-\frac{6}{7}$ |

**3.3.** Стальной болт пропущен сквозь медную трубку (см. рис.). Шаг резьбы болта 3 мм. Какие напряжения возникают в болте и трубке при закручивании гайки на четверть оборота?

Ответ:  $\sigma_c = 127$  МПа,  
 $\sigma_m = -36$  МПа.



К задаче 3.3

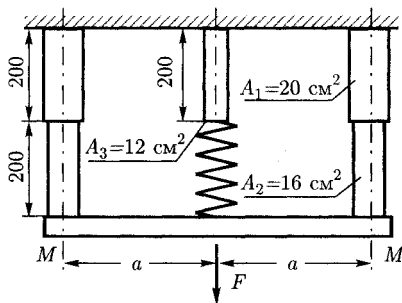
**3.4.** Жесткий брус  $MM$  присоединен к жесткому основанию тремя стержнями и нагружен силой  $F$ , см. рис. Конструкция симмет-

рична. Крайние стержни имеют переменное сечение по своей длине, средний – составной, включающий пружину с коэффициентом податливости  $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-9}$  м/Н (осадка пружины на 1 Н нагрузки). Определить усилия и напряжения в соединительных стержнях. Материал стержней – сталь.

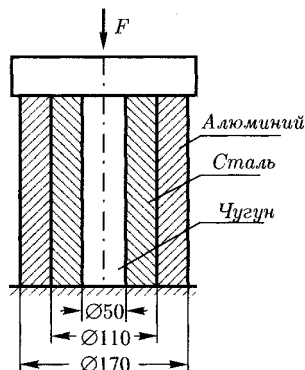
Ответ:  $N_1 = N_2 = 0,392F = 117,6$  кН,

$N_3 = N_{\text{II}} = 0,216F = 64,8$  кН,

$\sigma_{(1)} = 58$  МПа,  $\sigma_{(2)} = 74$  МПа,  $\sigma_{(3)} = 54$  МПа.



К задаче 3.4



К задаче 3.5

**3.5.** Короткий чугунный стержень свободно вставлен в стальную трубку, которая, в свою очередь, находится внутри алюминиевой трубки, см. рис. Определить напряжения в стержне и трубках (поперечными деформациями пренебречь) при действии силы  $F$ , сжимающей систему с помощью жесткой плиты.

Указание. В задаче 3.1 изложена общая методика решения подобных задач, когда во всех элементах конструкции усилия предполагаются растягивающими. В данном случае уравнение равновесия плиты принимает вид

$$\sum F_y = N_{\text{ч}} + N_{\text{с}} + N_{\text{а}} + F = 0,$$

где фигурируют три неизвестных усилия. Таким образом, система является дважды статически неопределимой.

Условия совместности перемещений составляем, принимая, что все стержни укорачиваются:

$$-\Delta l_{\text{ч}} = -\Delta l_{\text{с}} = -\Delta l_{\text{а}}.$$



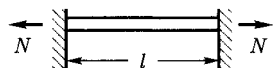
Усилия и деформации связаны соотношениями закона Гука:

$$\Delta l_q = \frac{N_q l}{E_q A_q}, \quad \Delta l_c = \frac{N_c l}{E_c A_c}, \quad \Delta l_a = \frac{N_a l}{E_a A_a}.$$

В итоге можно прийти к системе трех уравнений с тремя неизвестными реакциями.

*Ответ:*  $\sigma_q = -18$  МПа,  $\sigma_c = -30$  МПа,  $\sigma_a = -10,5$  МПа.

**3.6.** Стальные рельсы укладываются, а затем свариваются в единую плетть летом при температуре  $T_1 = 30^\circ \text{C}$ . Каковы будут растягивающие напряжения в этих рельсах зимой при  $T_2 = -70^\circ \text{C}$ ?



К задаче 3.6

*Решение.* Географические координаты между железнодорожными станциями не зависят от температуры атмосферы. Поэтому расчетная схема одного упомянутого в задаче рельса выглядит так, как показано на рис., т. е. изменения его длины не происходит. Поэтому уравнение совместности перемещений принимает вид

$$\Delta l = 0. \quad (1)$$

На этом же рис. показана схема усилий, действующих на рельс по его концам. Направления усилий приняты в соответствии с общей методикой, изложенной в задаче 3.1. Тогда уравнение равновесия рельса придется записать следующим образом:

$$N = N. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2) не вносит в решение задачи позитивной информации.

Физическое уравнение, учитывающее изменение длины при одновременном учете воздействия внешней силы и изменения температуры, записывается так:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} + \alpha l \Delta T$$

или:

$$\Delta l = l \left( \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \right), \quad (3)$$

где изменение температуры в ходе процесса определяется как обычно:

$$\Delta T = T_2 - T_1. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (1), можно найти

$$\sigma = -\alpha E(T_2 - T_1), \quad (5)$$

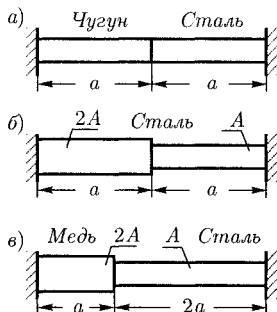
Осуществляя числовые подстановки, получаем

$$\sigma = -12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot (-70 - 30) = +240 \cdot 10^6 \text{ Па} = 240 \text{ МПа}.$$

Таким образом, первоначальное предположение о растяжении рельса при его охлаждении подтвердилось.

**3.7.** Изображенные на рис. стержни нагреваются. Определить наибольшее по абсолютной величине напряжение, если стенки, между которыми расположены стержни, абсолютно неподатливы. Принять  $\Delta T = 100^\circ$ ,  $E_{\text{ч}} = 1 \cdot 10^{11}$  Па,  $E_{\text{м}} = 0,8 \cdot 10^{11}$  Па.

Ответ:



| Схема          | а   | б   | в   |
|----------------|-----|-----|-----|
| $\sigma$ , МПа | 167 | 333 | 255 |

К задаче 3.7

**3.8.** Груз весом  $F = 100$  кН подвешен на трех стальных стержнях, рис. а. Система симметрична относительно оси  $y$ . Наклонные стержни имеют длину  $l_1$  и площадь сечения  $A_1$ , вертикальный —  $l_2$  и  $A_2$ . Принимая угол наклона  $\alpha = 33^\circ$ , а также  $l_1 = 4$  м,  $l_2 = 2$  м,  $A_1/A_2 = \gamma = 0,9$ , подобрать сечения стержней при допустимом напряжении  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Решение.* Под действием силы  $F$  узел  $B$  опускается строго вниз, все три стержня будут растянуты, см. схему перемещений на рис. б. Соответствующие реакции в закреплениях показаны на схеме усилий (рис. а). Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha + N_2 - F = 0. \end{aligned}$$

Из них получаем

$$N_1 = N_3, \quad (1)$$

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = F. \quad (2)$$

На рис. в дается схема деформаций, которая среди инженеров получила большее распространение нежели схема на рис. б. Здесь стержень № 1 мысленно удлиняют на величину  $\Delta l_1$  вдоль своего первоначального направления. Конец  $B$  займет положение  $B_3$ . Затем стержень следует повернуть так, чтобы точка  $B_3$  совпала с точкой  $B_1$ . На схеме же движение

точки  $B_3$  по дуге заменено перемещением по перпендикуляру к отрезку  $BB_3$ . Ввиду малости удлинений  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  по сравнению с длинами  $l_1$  и  $l_2$  можно пренебречь погрешностями, возникающими при такой замене. Таким образом, получаем

$$BB_3 = \Delta l_1, \quad BB_1 = \Delta l_2.$$

Из треугольника  $BB_3B_1$  устанавливаем, что

$$\frac{BB_3}{BB_1} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \cos \alpha. \quad (3)$$

Впрочем, из треугольника  $BB_2B_1$  на рис. 6 получается точно такое же условие совместности перемещений.

Между удлинениями и усилиями существует связь, описываемая законом Гука,

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), можно записать

$$\cos \alpha = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{E_2 A_2}{N_2 l_2}.$$

Так как  $E_1 = E_2 = E$ , то предыдущему выражению придадим вид

$$N_2 = N_1 \frac{l_1 A_2}{l_2 A_1 \cos \alpha}. \quad (5)$$

Далее подставим числа из условий задачи

$$N_2 = N_1 ((4/2)(1/0,9)(1/0,839)) = 2,65 N_1. \quad (6)$$

Совместное решение уравнений (2) и (6) позволяет найти

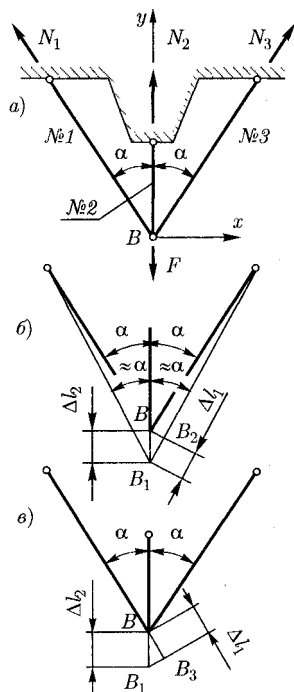
$$\begin{cases} N_1 = 0,231F = 23,1 \text{ кН}, \\ N_2 = 0,612F = 61,2 \text{ кН}. \end{cases} \quad (7)$$

Из выражения (4) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{(2)}}{\sigma_{(1)}} &= \frac{l_1}{l_2 \cos \alpha} = \\ &= 4/(2 \cdot 0,839) = 2,38 > 1. \end{aligned}$$

Это означает большую степень нагруженности стержня 2 по сравнению со стержнем 1. Поэтому условие прочности записываем именно для второго стержня:

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma],$$



К задаче 3.8

откуда

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = 61200 / (160 \cdot 10^6) = 382 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 382 \text{ мм}^2.$$

Площадь же сечения первого стержня определим из соотношения между  $A_1$  и  $A_2$ , заданного в условии задачи

Проверкой  $A_1 = \gamma A_2 = 0,9 A_2 = 0,9 \cdot 382 = 295 \text{ мм}^2.$

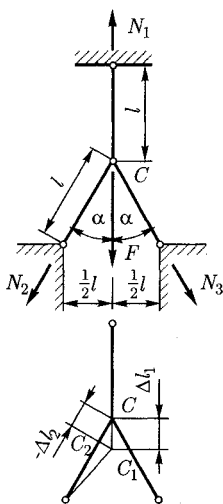
$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = 23100 / (295 \cdot 10^{-6}) = 78 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = 61200 / (382 \cdot 10^{-6}) = 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа}$$

убеждаемся, что во втором стержне напряжение равно допускаемому напряжению, а в первом – существенно меньше этого значения. В статически неопределимых конструкциях так бывает практически всегда.

**3.9.** Три стержня, шарнирно скрепленные в одной точке (см. рис.), имеют одинаковые поперечные сечения. Подобрать площадь такого сечения при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ , считая нагрузку  $F = 120 \text{ кН}$ .

*Указание.* В соответствии с описанной выше методикой предполагаем растянутыми все три стержня. В этом случае реакции  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  со стороны связей будут направлены так, как показано на рис. а. Уравнения равновесия принимают вид



$$\begin{aligned} \sum F_x &= -N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= N_1 - 2N_2 \cos \alpha - F = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для схемы деформаций сделаем предположение, что точка  $C$  перемещается по оси симметрии вниз в положение  $C_1$ , см. рис. б. Тогда отрезок  $CC_1$  отвечает деформации растяжения  $\Delta l_1$  стержня 1, а отрезок  $CC_2$  – деформации сжатия  $\Delta l_2$  стержня 2. Поэтому уравнение совместности перемещений придется записать так:

$$-\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha. \quad (2)$$

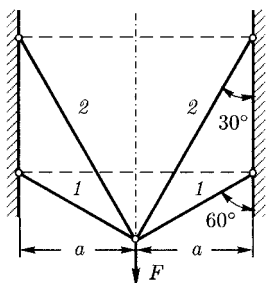
Кроме того, надлежит учесть уравнения закона Гука, связывающие между собой усилия и перемещения:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}. \quad (3)$$

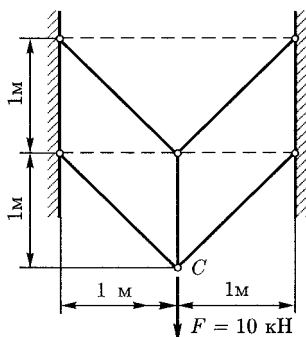
Ответ:  $A = 3 \text{ см}^2$ .

**3.10.** В изображенной на рис. симметричной конструкции стержни 1 стальные с площадями сечений  $A_c = 10 \text{ см}^2$ , а стержни 2 медные с площадями сечений  $A_m = 20 \text{ см}^2$ . Допускаемые напряжения: для стали  $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$ , для меди  $[\sigma_m] = 60 \text{ МПа}$ . Определить наибольшую возможную нагрузку  $F$ .

Ответ:  $F = 328 \text{ кН}$ .



К задаче 3.10



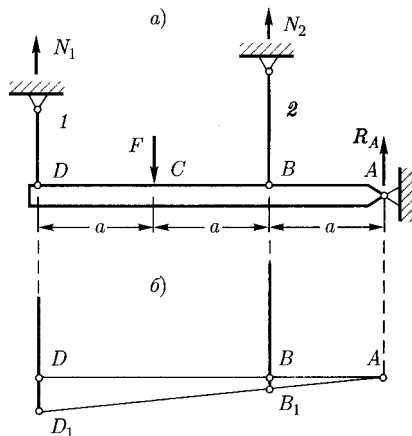
К задаче 3.11

**3.11.** Определить опускание точки  $C$  системы из пяти стальных стержней одинакового поперечного сечения площадью  $A = 5 \text{ см}^2$ , см. рис.

Ответ:  $v_c = 0,895 \text{ мм}$ .

**3.12.** Жесткая балка  $ABCD$ , закрепленная концом  $A$  в неподвижном шарнире, подвешена на двух стальных стержнях длиной и сечением  $l_1, A_1$  и  $l_2, A_2$  соответственно (рис. а). К балке приложена сила  $F = 100 \text{ кН}$ . Определить усилия в стержнях, если  $A_1 = 0,8A_2, l_1 = 2 \text{ м}, l_2 = 3 \text{ м}$ .

*Решение.* Как и выше, предположим, что стержни 1 и 2 растянуты. Предположим также, что реакция



К задаче 3.12

в опоре  $A$  направлена вверх. В итоге схема внешних сил, действующих на балку  $ABCD$ , принимает вид, показанный на рис.  $a$ . Составим условия статики:

$$\sum F_y = N_1 + N_2 + R_A - F = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_{z(A)} = 2aF - 3aN_1 - aN_2 = 0. \quad (2)$$

Имеем два уравнения равновесия и три неизвестных реакции. Таким образом, система статически неопределима. Отметим, что третье уравнение равновесия  $\sum F_x = 0$  не вносит никакой новой информации.

Рассмотрим условия деформирования элементов системы. Придадим балке возможное перемещение: поворот вокруг шарнира  $A$  против часовой стрелки на малый угол. Стержни 1 и 2 оказываются растянутыми, причем  $\Delta l_1 = DD_1$  и  $\Delta l_2 = BB_1$ . Уравнение совместности перемещений найдем из условия подобия треугольников  $ABB_1$  и  $ADD_1$ :

$$\frac{BB_1}{DD_1} = \frac{1}{3}$$

или

$$3\Delta l_2 = \Delta l_1. \quad (3)$$

Заменим деформации соответствующими выражениями закона Гука:

$$\frac{3N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_1 l_1}{EA_1}.$$

Отсюда нетрудно получить

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{3A_1}{A_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} = 3 \cdot 0,8(3/2) = 3,6. \quad (4)$$

Из совместного решения уравнений (2) и (4) находим окончательно

$$N_1 = 0,61F = 61 \text{ кН},$$

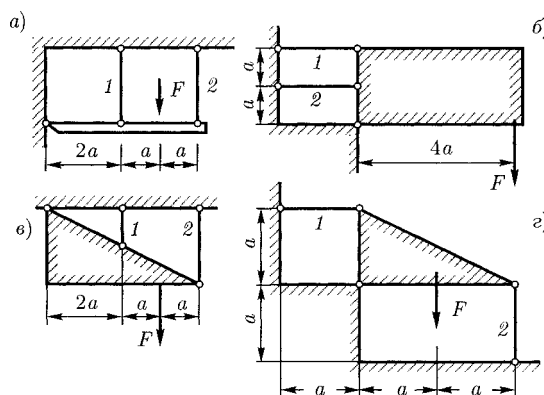
$$N_2 = 0,17F = 17 \text{ кН}.$$

В ходе решения осталась найденной реакция  $R_A$  в шарнире  $A$ . Ее можно отыскать из уравнения (1).

**3.13.** Поворот жесткой конструкции вокруг неподвижного шарнира предотвращается путем установки двух стержней одинакового поперечного сечения и одного материала (см. рис.). Определить усилия в стержнях.

*Ответ:*

| Схема   | $a$            | $b$           | $c$           | $z$            |
|---------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| $N_1/F$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$  |
| $N_2/F$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{5}$ |



К задаче 3.13

**3.14.** Жесткая балка, опирающаяся на неподвижный шарнир  $A$  и подвешенная на двух стальных податливых стержнях 1 и 2, несет нагрузку  $F = 100$  кН, см. рис. *a*. Принимая  $\alpha_1 = 18^\circ$ ,  $\alpha_2 = 49^\circ$ ,  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = 3$  м,  $a_1 = 3$  м,  $a_2 = 2$  м,  $a = 1$  и  $A_1/A_2 = \gamma = 0,6$ , подобрать сечения стержней при допуске напряжении  $|\sigma| = 160$  МПа.

*Решение.* Принимаем стержни 1 и 2 находящимися под действием растягивающих сил  $N_1$  и  $N_2$ , а реакции в опоре  $A$  предполагаем направленными вверх и вправо, см. рис. *a*. Далее записываем стандартные условия статики:

$$\sum F_x = -N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + H_A = 0, \quad (1)$$

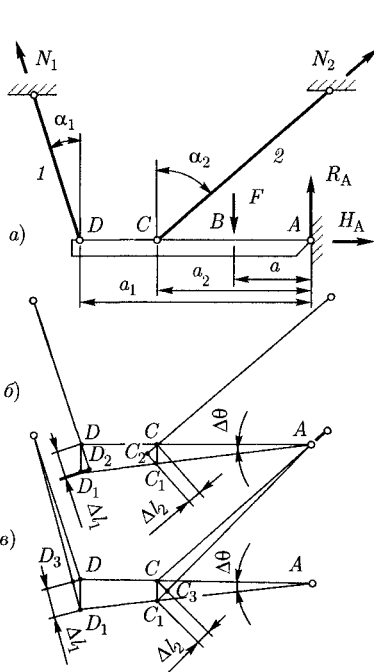
$$\sum F_y = N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + R_A - F = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_{z(A)} = Fa - N_1 a_1 \cos \alpha_1 - N_2 a_2 \cos \alpha_2 = 0. \quad (3)$$

Имеем три уравнения равновесия и четыре неизвестных реакции. Следовательно, система статически неопределима.

Рассмотрим деформации элементов системы при возможном повороте балки  $ABCD$  вокруг шарнира  $A$  против часовой стрелки на малый угол  $\Delta\theta$ . Стержни 1 и 2 будут растянуты на  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  соответственно. Эти деформации можно показать двумя способами. В первом (см. рис. б) откладываем удлинения  $\Delta l_1 = DD_2$  и  $\Delta l_2 = CC_2$  вдоль первоначального направления стержней. Далее каждый из стержней предполагается повернуть в свое окончательное положение вокруг опорного шарнира. Тогда точка  $D_2$  переходит в положение  $D_1$ , точка  $C_2$  — в положение  $C_1$ .

Второй способ изображения деформирования элементов системы дается на рис. 6. Здесь на чертеж наносятся начальное и конечное положения каждого стержня. Затем из точки  $D$  опускается перпендикуляр  $DD_3$  на конечное направление стержня. Отрезок  $D_1D_3$  будет приблизительно равен удлинению  $\Delta l_1$ . Аналогичные построения осуществляются около точки  $C$ .



Далее записываем условие подобия треугольников  $ACC_1$  и  $ADD_1$  (см. рис. 6 или в)

$$\frac{DD_1}{CC_1} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (4)$$

Затем из рис. 6 (или в) находим

$$DD_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha_1}, \quad CC_1 = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha_2}$$

и производим подстановки в условие (4). Получаем уравнение совместности перемещений

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (5)$$

Деформации и усилия связаны формулами закона Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}. \quad (6)$$

Исключим из (5) деформации с помощью (6)

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}. \quad (7)$$

Далее воспользуемся числовыми значениями всех входящих сюда параметров. Найдем

$$N_1 = 1,957 N_2. \quad (8)$$

Затем уравнения (3) и (8) решаем совместно:

$$\begin{cases} N_1 = 0,284F = 28400 \text{ Н}, \\ N_2 = 0,145F = 14500 \text{ Н}. \end{cases} \quad (9)$$

Из (7) можно установить, что

$$\frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(2)}} = \frac{N_1}{A_1} \cdot \frac{A_2}{N_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} = 3,26,$$



т.е.  $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)}$ . Поэтому подбор сечений начинаем со стержня 1:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = 28400 / (160 \cdot 10^6) = 177 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 177 \text{ мм}^2.$$

Сечение стержня 2 отыщем из соотношения площадей, заданных в условии задачи

$$A_2 = \frac{N_1}{\gamma} = 177 / 0,6 = 295 \text{ мм}^2 = 295 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

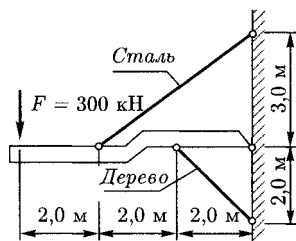
Заканчиваем решение задачи проверкой условий прочности

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = 28400 / (177 \cdot 10^{-6}) = 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа} = [\sigma],$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = 14500 / (295 \cdot 10^{-6}) = 49 \cdot 10^6 \text{ Па} = 49 \text{ МПа} < [\sigma].$$

**3.15.** Жесткий стержень прикреплен к стене при помощи шарнира, стальной тяги и деревянного подкоса. Подобрать сечение тяги и подкоса, если площадь сечения подкоса должна быть в десять раз больше площади сечения тяги, допускаемые напряжения составляют: для стали  $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$ , для дерева  $[\sigma_d] = 6 \text{ МПа}$ .

Ответ:  $A_c = 50 \text{ см}^2$ ,  $A_d = 500 \text{ см}^2$ .



К задаче 3.15

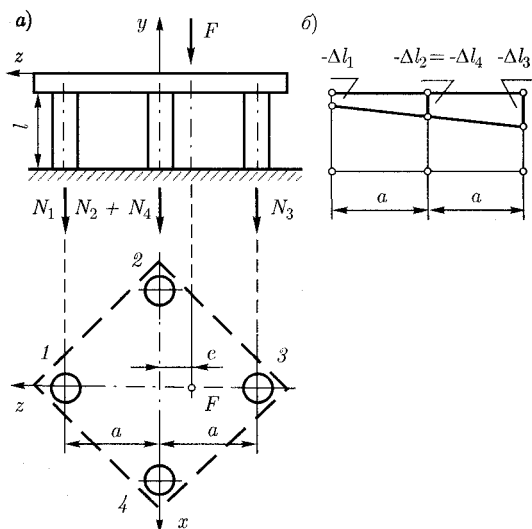
**3.16.** Квадратная плита опирается на четыре симметрично расположенные стойки одинакового поперечного сечения равной длины  $l$ , изготовленные из одного и того же материала. Сила  $F$  приложена с некоторым эксцентриситетом  $e$  относительно центра симметрии системы (см. рис. а). Определить усилия в каждой стойке, считая плиту абсолютно жесткой.

*Решение.* Система сохраняет симметрию относительно плоскости  $yz$  (см. рис. а). Поэтому напряженно-деформированные состояния стоек 2 и 4 будут одинаковы.

В соответствии с вышеизложенной методикой примем растягивающими усилия во всех стойках, см. рис. а. Условия статики в этом случае запишутся для плиты следующим образом:

$$\sum F_y = N_1 + 2N_2 + N_3 + F = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_x = -Fe + N_1 a - N_3 a = 0. \quad (2)$$



К задаче 3.16

Здесь учтено условие симметрии

$$N_2 = N_4.$$

Придадим плите возможное отклонение от начального положения: пусть центр плиты несколько опустится с одновременным ее поворотом вокруг оси  $x$  по часовой стрелке на малый угол, см. рис. б. В результате все стойки окажутся сжатыми, а условие совместности перемещений примет вид

$$-\Delta l_2 = \frac{1}{2}(-\Delta l_1 - \Delta l_3). \quad (3)$$

Усилия и деформации связаны соотношениями закона Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA}.$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$2N_2 = N_1 + N_3. \quad (4)$$

Уравнения (1), (2) и (5) образуют систему, из решения которой имеем

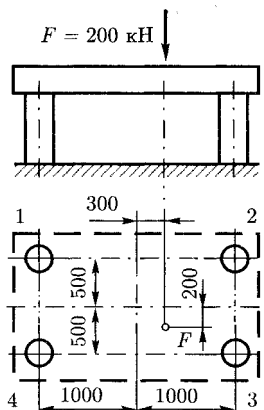
$$N_1 = -F \frac{a - 2e}{4a}, \quad N_2 = N_4 = -\frac{1}{4}F, \quad N_3 = -F \frac{a + 2e}{4a}.$$

Таким образом, получили для всех стоек сжимающие усилия.

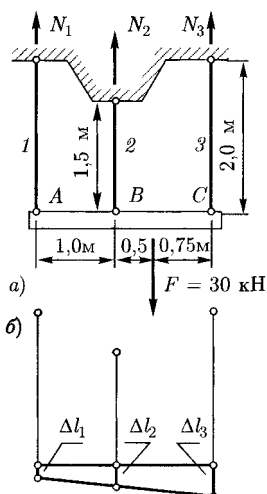
*Примечание.* При  $e = 0,5a$  имеем  $N_1 = 0$ , а при  $e > 0,5a$  односторонняя связь между стержнем 1 и верхней плитой нарушается, нагрузку берут на себя стержни 2, 3 и 4, причем система становится статически определимой.

**3.17.** Жесткая прямоугольная плита опирается на четыре одинакового сечения, длины и материала стойки, расположенные в ее углах, как показано на рис. Определить усилие в каждой стойке от нагрузки силой  $F$ , приложенной в точке  $B$ , см. рис.

*Ответ:*  $N_1 = -15$  кН,  $N_2 = -55$  кН,  $N_3 = -85$  кН,  $N_4 = -45$  кН.



К задаче 3.17



К задаче 3.18

**3.18.** Жесткий брус подвешен на трех стержнях и нагружен, как указано на рис. *а*. Стержень 1 медный (сечением  $1 \text{ см}^2$ ), стержень 2 стальной (сечением  $1,5 \text{ см}^2$ ), стержень 3 алюминиевый (сечением  $2 \text{ см}^2$ ). Определить напряжения в стержнях.

*Указание.* Схема усилий на рис. *а* отвечает схеме перемещений на рис. *б*. Уравнения равновесия записываются так:

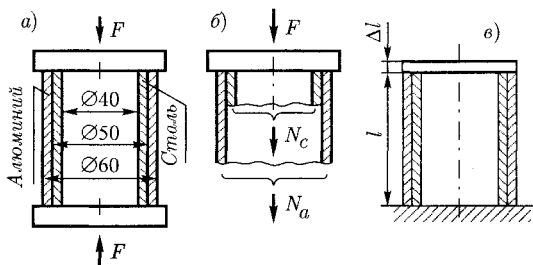
$$\begin{aligned}\sum F_y &= N_1 + N_2 + N_3 - F = 0, \\ \sum m_{z(B)} &= -N_1 + 1,25N_3 - 0,50F = 0,\end{aligned}$$

а уравнение совместности перемещений имеет вид

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{1,00} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{2,25}.$$

Ответ:  $\sigma_{(1)} = 5,5$  МПа,  $\sigma_{(2)} = 113,5$  МПа,  $\sigma_{(3)} = 62$  МПа.

**3.19.** Вставленные одна в другую стальная и алюминиевая трубки приварены торцами к жестким дискам (см. рис. а). Сварка осуществлена при температуре  $T_1 = 20^\circ \text{C}$ , а температура эксплуатации  $T_2 = 60^\circ \text{C}$ . В ходе рабочего процесса происходит воздействие на конструкцию силой  $F$  (см. рис. а). Найти напряжения в одной и другой трубке при трех значениях силы:  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 20$  кН,  $F_3 = 40$  кН.



К задаче 3.19

*Решение.* В данной задаче нельзя заранее указать, будет ли в стальной трубке растяжение или сжатие. Поэтому воспользуемся более общим методом решения нежели в предыдущих задачах. Предположим, что каждая из трубок находится под действием растягивающей нормальной силы. Тогда схема усилий, приложенных к верхнему диску, может быть представлена так, как показано на рис. б, а уравнение равновесия этого диска принимает вид

$$\sum F_x = -F - N_c - N_a = 0. \quad (1)$$

Схема перемещений изображена на рис. в. Здесь верхнему торцу обеих трубок дано некоторое возможное перемещение  $\Delta l$  по отношению к нижнему торцу. Согласно этой схеме, обе трубки оказались растянутыми, причем

$$\Delta l_c = \Delta l_a.$$

Каждая из этих деформаций может быть представлена как алгебраическая сумма механической и температурной деформаций

$$\Delta_c^{\text{мех}} + \Delta_c^{\text{тем}} = \Delta_a^{\text{мех}} + \Delta_a^{\text{тем}}$$

Затем  $\Delta^{\text{мех}}$  и  $\Delta^{\text{тем}}$  заменим соответствующими "физическими" соотношениями

$$\frac{N_c l}{E_c A_c} + \alpha_c l \Delta T = \frac{N_a l}{E_a A_a} + \alpha_a l \Delta T,$$

откуда

$$N_c - N_a \frac{E_c A_c}{E_a A_a} = (\alpha_a - \alpha_c) E_c A_c \Delta T. \quad (4)$$

Прежде чем приступить к дальнейшему, вычислим площади сечения трубок:

$$\begin{aligned} A_c &= 3,14 (25^2 - 20^2) = 707 \text{ мм}^2 = 707 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \\ A_a &= 3,14 (30^2 - 25^2) = 864 \text{ мм}^2 = 864 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Далее подставим числа в (4)

$$N_c - N_a (2/0,7) \cdot (707/864) = (24 - 12) \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 707 \cdot 10^{-6} \cdot 40,$$

откуда

$$N_c - 2,34 N_a = 67900 \text{ Н}. \quad (5)$$

Затем решаем совместно уравнения (1) и (5). Находим

$$\begin{aligned} N_a &= -0,299F - 20300, \\ N_c &= -0,701F + 20300, \end{aligned}$$

после чего последующее решение задачи не представляет труда.

*Ответ:*

| Вариант                 | $F = 0 \text{ кН}$ | $F = 20 \text{ кН}$ | $F = 40 \text{ кН}$ |
|-------------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| $N_a, \text{ Н}$        | -20300             | -26300              | -32300              |
| $N_c, \text{ Н}$        | 20300              | 6300                | -7700               |
| $\sigma_a, \text{ МПа}$ | -23,5              | -30,4               | -37,4               |
| $\sigma_c, \text{ МПа}$ | 28,7               | 8,9                 | -10,9               |

**3.20.** Жесткий брус одним концом прикреплен к стене через неподвижный шарнир, а затем вывешен на трех стержнях одинакового поперечного сечения площадью  $A = 10 \text{ см}^2$ , но выполненных из разных материалов (см. рис. *а*). Найти усилия и напряжения в стержнях после повышения температуры на  $\Delta T = 30^\circ$ . Для инвара  $\alpha_{\text{и}} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$  и  $E_{\text{и}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

*Решение.* Предположим, что в каждом из трех стержней возникают лишь растягивающие усилия, см. рис. *а*. Уравнение равновесия принимает вид

$$\sum m_{z(A)} = -3N_c \sin \varphi_c - 2N_m \sin \varphi_m - N_{\text{и}} \sin \varphi_{\text{и}} = 0. \quad (1)$$

Придадим брусу возможное перемещение, см. рис. *б*. Согласно этой схеме, каждый из трех стержней удлиняется. С помощью этой схемы можно составить следующее соотношение:

$$\frac{\Delta l_c}{\sin \varphi_c} : \frac{\Delta l_m}{\sin \varphi_m} : \frac{\Delta l_{\text{и}}}{\sin \varphi_{\text{и}}} = 3 : 2 : 1. \quad (2)$$

Представим использованные здесь деформации в следующем виде

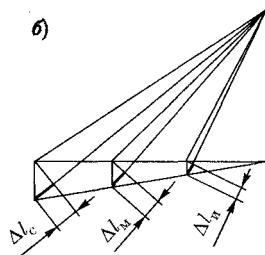
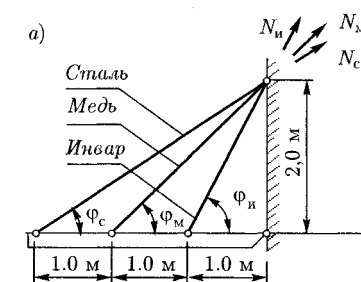
$$\Delta l_c = \frac{N_c l_c}{E_c A} + \alpha_c l_c \Delta T, \quad (3)$$

$$\Delta l_m = \frac{N_m l_m}{E_m A} + \alpha_m l_m \Delta T, \quad (4)$$

$$\Delta l_n = \frac{N_n l_n}{E_n A} + \alpha_n l_n \Delta T. \quad (5)$$

Кроме того, из чертежа имеем

$$\sin \varphi_c = 0,555, \quad \sin \varphi_m = 0,707, \quad \sin \varphi_n = 0,894, \\ l_c = 3,60 \text{ м}, \quad l_m = 2,84, \quad l_n = 2,24 \text{ м}.$$



К задаче 3.20

Эти числовые значения позволяют из соотношений (2) с помощью выражений (3), (4) и (5) сформировать два уравнения совместности перемещений

$$N_c = 1,857 N_m + 17140, \quad (6)$$

$$N_m = 0,780 N_n + 55100. \quad (7)$$

Совместное решение уравнений (1), (6) и (7) дает

$$N_c = -13100 \text{ Н},$$

$$N_m = -16300 \text{ Н},$$

$$N_n = 49800 \text{ Н},$$

после чего отыскание напряжений не представляет труда:

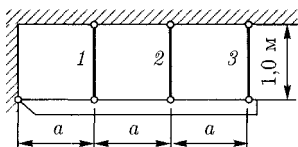
$$\sigma_c = -13,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_m = -16,3 \text{ МПа},$$

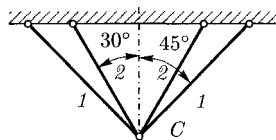
$$\sigma_n = 49,8 \text{ МПа}.$$

**3.21.** Закрепление в пространстве жесткого бруса запроектировано так, как показано на рис. В процессе сборки выяснилось, что средний стержень изготовлен короче проектного размера на  $\delta = 0,5 \text{ мм}$ . Определить напряжения в каждом из стержней после сборки всей конструкции, если сечения стержней одинаковы. Материал стержней – сталь.

Ответ:  $\sigma_{(1)} = -14,3 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{(2)} = 71,5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{(3)} = -42,9 \text{ МПа}$ .



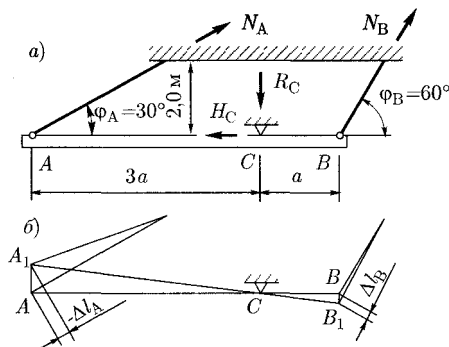
К задаче 3.21



К задаче 3.22

**3.22.** Стальные стержни 1 с поперечным сечением площадью  $20 \text{ см}^2$  и медные стержни 2 с поперечным сечением площадью  $30 \text{ см}^2$  шарнирно соединены в точке  $C$  (см. рис.) при температуре  $T_1 = 15^\circ \text{ С}$ . Определить напряжения в каждом из стержней при понижении температуры конструкции до  $T_2 = -45^\circ \text{ С}$ .

Ответ:  $\sigma_c = 10,4 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_m = -5,7 \text{ МПа}$ .



К задаче 3.23

**3.23.** Жесткий брус  $ACB$  закреплен в пространстве с помощью шарнирной неподвижной опоры  $C$  и двух стальных тяг  $A$  и  $B$  одинакового поперечного сечения. Тяга  $A$  оказалась короче проектного размера на величину  $\delta = 5 \text{ мм}$ . Определить напряжения в каждой из тяг после сборки всей конструкции.

Указание. Предполагаем оба стержня нагруженными растягивающими силами  $N_A$  и  $N_B$  (рис. а). Уравнение равновесия бруса запишем в виде

$$\sum m_{z(C)} = -3aN_A \sin \varphi_A + aN_B \sin \varphi_B = 0,$$

а затем заменим усилия  $N_A$  и  $N_B$  на произведения  $\sigma_A A$  и  $\sigma_B A$ . После сокращений останется

$$3\sigma_A \sin \varphi_A - \sigma_B \sin \varphi_B = 0.$$

Возможное перемещение бруса из положения  $ACB$  в положение  $A_1CB_1$  иллюстрируется схемой на рис. б. Нетрудно видеть, что

$$\frac{AA_1}{BB_1} = 3.$$

Далее вместо  $AA_1$  и  $BB_1$  подставим соответствующие деформации  $\Delta l_A$  и  $\Delta l_B$

$$-\frac{\Delta l_A \sin \varphi_B}{\Delta l_B \sin \varphi_A} = 3.$$

Здесь учтено, что деформация  $\Delta l_A$  отрицательна, потому что она предполагает укорочение стержня  $A$ . После этого вместо деформаций вписываем соответствующие "физические" соотношения

$$-\left(\frac{N_A l_A}{EA} + \delta\right) \sin \varphi_B = \frac{3N_B l_B}{EA} \sin \varphi_A.$$

Полученное выражение можно переписать в виде

$$\sigma_A l_A \sin \varphi_B = -E\delta \sin \varphi_B - 3\sigma_B l_B \sin \varphi_A, \quad (3)$$

если сделать еще две замены

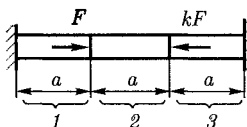
$$\sigma_A = \frac{N_A}{A}, \quad \sigma_B = \frac{N_B}{A}.$$

При подстановке в (3) численных значений необходимо учесть, что  $\delta = -5$  мм, потому что стержень  $A$  короче проектного значения.

В заключение остается решить совместно уравнения (1) и (3).

Ответ:  $\sigma_A = 92$  МПа,  $\sigma_B = 168$  МПа.

### 3.24. Заделанный с двух концов стержень



подвергается воздействию двух сил  $F$  и  $kF$  (см. рис.). Найти внутренние усилия в каждом из трех составляющих стержень участков для следующих вариантов значений  $k$ : 0,1, 0,5, 1,0, 2,0, 10,0.

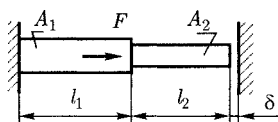
К задаче 3.24

Ответ:

| $k$     | 0,1    | 0,5    | 1,0    | 2,0  | 10,0  |
|---------|--------|--------|--------|------|-------|
| $N_1/F$ | 0,633  | 0,500  | 0,333  | 0    | -2,67 |
| $N_2/F$ | -0,367 | -0,500 | -0,667 | -1,0 | -3,67 |
| $N_3/F$ | -0,267 | 0      | 0,333  | 1,0  | 6,33  |



**3.25.** Определить внутренние усилия на первом и втором участках стержня переменного сечения, заделанного левым концом, если между ним и правой стенкой задан малый зазор  $\delta$  (см. рис.).



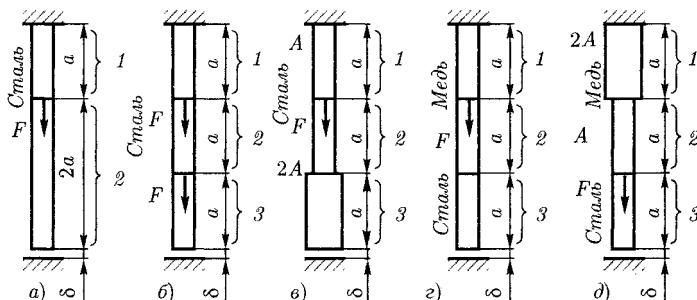
К задаче 3.25

Ответ:

$$N_1 = \frac{EA_1\delta}{(1+k)l_1} + \frac{Fk}{1+k},$$

$$N_2 = \frac{EA_1\delta}{(1+k)l_1} - \frac{Fk}{1+k},$$

где  $k = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{A_1}{A_2}$ . Зазор не закрывается при  $\delta > \frac{Fl_1}{EA_1}$ .



К задаче 3.26

**3.26.** Определить напряжения в сечениях на каждом из участков стержней, показанных на рис. Принять  $a = 0,5$  м,  $A = 100$  см<sup>2</sup>,  $F = 1500$  кН,  $\delta = 0,1$  мм. Зазоры имеют указанный размер до приложения нагрузки  $F$ . После ее приложения они закрываются.

Ответ:

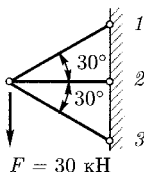
| Напряжения,<br>МПа | Схемы    |          |          |          |          |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                    | <i>a</i> | <i>б</i> | <i>в</i> | <i>г</i> | <i>д</i> |
| $\sigma_{(1)}$     | 113      | 163      | 116      | 98       | 24       |
| $\sigma_{(2)}$     | -37      | 13       | -34      | -52      | 48       |
| $\sigma_{(3)}$     |          | -137     | -17      | -52      | -102     |

**3.27.** Стальные рельсы, длина которых составляет 12,5 м, укладываются при температуре  $T_1 = +10^\circ \text{C}$ . Между рельсами оставляется зазор  $\delta_1 = 4 \text{ мм}$ . При какой температуре  $T_2$  зазор исчезнет? Каков будет зазор зимой при температуре  $T_3 = -40^\circ \text{C}$ ? Какие напряжения будут летом на солнцепеке при температуре  $T_4 = +50^\circ \text{C}$ ?

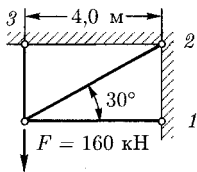
Ответ:  $T_2 = +35,6^\circ \text{C}$ ,  $\delta_3 = 11,8 \text{ мм}$ ,  $\sigma_{(4)} = -36 \text{ МПа}$ .

**3.28.** Три стержня кронштейна выполнены из одного материала (см. рис.). Площади поперечного сечения стержней:  $A_1 = 2 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 3 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 4 \text{ см}^2$ . Определить напряжения в стержнях.

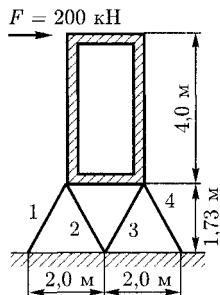
Ответ:  $\sigma_{(1)} = 127 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{(2)} = 27 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{(3)} = -86 \text{ МПа}$ .



К задаче 3.28



К задаче 3.29



К задаче 3.30

**3.29.** В изображенной на рис. конструкции стержень 1 чугунный, стержень 2 медный, стержень 3 стальной. Площади поперечных сечений стержней 1 и 2 одинаковы, сечение же стержня 3 вдвое меньше. Подобрать сечения стержней при  $[\sigma_{\text{ч}}] = 80 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma_{\text{м}}] = 60 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma_{\text{с}}] = 120 \text{ МПа}$ .

Ответ:  $A_1 = A_2 = 24,6 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 12,3 \text{ см}^2$ .

**3.30.** Четыре стальных стержня, поддерживающие жесткую конструкцию (см. рис.), имеют равные поперечные сечения  $A = 25 \text{ см}^2$ . Определить напряжения в каждом из них.

*Ответ:*  $\sigma_{(1)} = 133$  МПа,  $\sigma_{(2)} = 52$  МПа,  $\sigma_{(3)} = -52$  МПа,  $\sigma_{(4)} = -133$  МПа.

**3.31.** В стержневой системе, описанной в задаче 3.8, определить допускаемую нагрузку  $[F^*]$  по так называемому методу допускаемых нагрузок. Предел текучести стали принять  $\sigma_y = 320$  МПа, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 2$ .

*Решение.* Для начала определим допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{[s]} = 320/2 = 160 \text{ МПа.}$$

Таким образом, можно считать, что в обеих задачах используется один и тот же материал.

В задаче 3.8. были подобраны сечения стержней  $A_1 = 295 \text{ мм}^2$ ,  $A_2 = 382 \text{ мм}^2$  по так называемому методу допускаемых напряжений. Заданная в условии нагрузка в 100 кН являлась при этом подборе по существу допускаемой, т.е.

$$[F] = 100 \text{ кН.}$$

Предельная же нагрузка, соответствующая условиям задачи 3.8, определяется обычным образом:

$$F_{\text{пред}} = [F] \cdot [s] = 100 \cdot 2 = 200 \text{ кН.}$$

Такое усилие отвечает так называемому состоянию предельной упругости, при котором в стержне 2 напряжение достигает предела текучести  $\sigma_y$ , а в стержнях 1 и 3 – меньше этого значения.

В расчетах по методу допускаемых нагрузок принимается в качестве предельного такое усилие  $F_{\text{пред}}^*$ , при котором конструкция переходит в состояние предельной пластичности. В этой ситуации напряжение в каждом из стержней достигает предела текучести  $\sigma_y$ , а уравнение равновесия принимает вид

$$\sum F_y = 2\sigma_y A_1 \cos \alpha + \sigma_y A_2 - F_{\text{пред}}^* = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} F_{\text{пред}}^* &= \sigma_y A_2 (1 + 2 \cos \alpha \cdot (A_1/A_2)) = \\ &= 320 \cdot 10^6 \cdot 382 \cdot 10^{-6} (1 + 2 \cdot 0,839 \cdot 0,9) \approx 307000 \text{ Н} = 307 \text{ кН.} \end{aligned}$$

После этого определение допускаемой нагрузки не представляет труда:

$$[F^*] = \frac{F_{\text{пред}}^*}{[s]} = 307/2 = 153,5 \text{ кН.}$$

Полученное значение  $[F^*]$  несколько превышает величину  $[F]$ .

При решении задачи оказалось неустраиваемым условие совместности перемещений, т.е. система в состоянии предельной пластичности оказалась статически определимой.

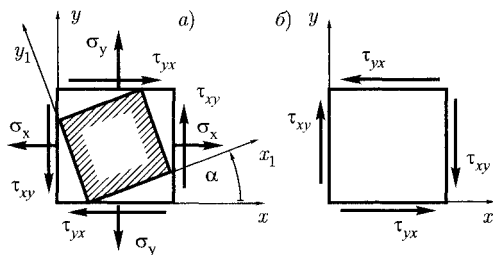
**3.32.** В стержневых системах, схемы которых рассматриваются в задачах 3.9, 3.10, 3.14, найти допускаемую нагрузку  $[F^*]$  по методу допускаемых нагрузок. Принять для стали  $\sigma_y = 320$  МПа, для меди  $\sigma_y = 120$  МПа, а также  $[s] = 2$  для обоих материалов.

*Ответ:*

| Задача       | 3.9 | 3.10 | 3.14 |
|--------------|-----|------|------|
| $[F^*]$ , кН | 131 | 368  | 143  |

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТА МАТЕРИАЛА

**4.1.** С гранями прямоугольного элемента материала связаны оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ , см. рис. *а*. По этим граням заданы напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Определить напряжения  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{y_1}$  и  $\tau_{x_1y_1}$  по граням другого элемента, повернутого относительно первого на угол  $\alpha$ , см. рис. *а*. Изобразить направления всех напряжений, возникающих по граням нового элемента.



К задаче 4.1

*Указание.* Преобразование напряжений следует осуществлять по формулам

$$\begin{cases} \sigma_{x_1} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \sigma_{y_1} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{x_1y_1} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Здесь растягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным. Касательное напряжение  $\tau_{xy}$  принимается положительным в случае совпадения его направления с положительным направлением оси  $y$ , если ось  $x$  является внешней нормалью к площадке с рассматриваемым напряжением. Если ось  $x$  представляет собой внутреннюю нормаль, то касательное напряжение  $\tau_{xy}$  считается положительным при его совпадении с отрицательным направлением оси  $y$ . На рис. *а* касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  положительны. В противоположность этому рис. *б* иллюстрирует случай, когда все касательные напряжения отрицательны. Таким образом, напряжение  $\tau_{xy}$  на площадке с внешней нормалью  $x$  принимается отрицательным при совпадении его направления с

отрицательным направлением оси  $y$ . Если же рассматривается площадка с внутренней нормалью  $x$ , то напряжение  $\tau_{xy}$  считается отрицательным при совпадении его с положительным направлением оси  $y$ .

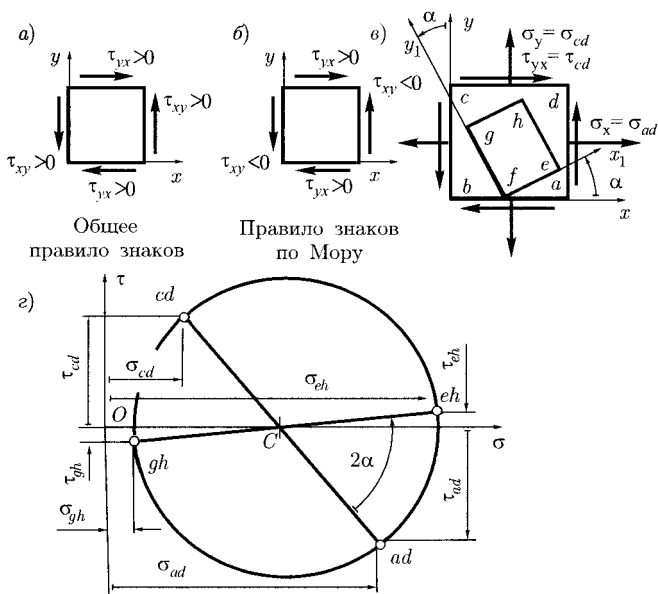
Ответ:

| №№ | Заданные величины |            |             |          | Искомые величины |                |                  |
|----|-------------------|------------|-------------|----------|------------------|----------------|------------------|
|    | $\sigma_x$        | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | $\alpha$ | $\sigma_{x_1}$   | $\sigma_{y_1}$ | $\tau_{x_1 y_1}$ |
|    | МПа               | МПа        | МПа         | град     | МПа              | МПа            | МПа              |
| 1  | 70                | 20         | 30          | 28       | 83,9             | 6,1            | -3,9             |
| 2  | 60                | 40         | 20          | 49       | 68,4             | 31,6           | -7,2             |
| 3  | 50                | 30         | 10          | 57       | 45,0             | 35,0           | -13,2            |
| 4  | 40                | 20         | -40         | -17      | 60,7             | -0,7           | -27,6            |
| 5  | 40                | -60        | -20         | -22      | 39,9             | -59,9          | 20,3             |
| 6  | 50                | -30        | -20         | -39      | 37,9             | -17,9          | 34,9             |
| 7  | 30                | -50        | 20          | 14       | 34,7             | -54,7          | -1,1             |
| 8  | 20                | -50        | 20          | 76       | -36,5            | 6,5            | -34,1            |
| 9  | -10               | -40        | -20         | 52       | -47,4            | -1,6           | -9,8             |
| 10 | -20               | -50        | -20         | -20      | -10,6            | -59,4          | -5,7             |
| 11 | -30               | -50        | 30          | -40      | -67,8            | -12,2          | 15,0             |
| 12 | -40               | -60        | 30          | -50      | -81,2            | -18,8          | 4,6              |
| 13 | 0                 | 0          | 60          | 33       | 54,8             | -54,8          | 24,4             |
| 14 | 0                 | 0          | -70         | 37       | -67,3            | 67,3           | -19,3            |

**4.2.** Решить предыдущую задачу с использованием кругов Мора.

*Решение.* В качестве примера рассмотрим последовательность действий, отвечающих первому варианту, когда  $\sigma_x = 70$  МПа,  $\sigma_y = 20$  МПа. Для касательных напряжений при использовании кругов Мора действует другое правило знаков, а именно: касательное напряжение считается положительным, если соответствующее усилие вращает элемент материала по часовой стрелке, и отрицательным, если – против часовой стрелки, ср. рис. а и б. Рис.б иллюстрирует исходные данные рассматриваемой задачи с учетом правила знаков по Мору. Обращаем также внимание, что в дальнейших построениях изменена индексация нормальных и касательных напряжений: вместо индексов, соответствующим осям  $x$  и  $y$ , ставятся индексы, отвечающие обозначению той площадки, по которой данное напряжение действует.

Круг Мора строится в прямоугольной системе осей  $\sigma$  и  $\tau$  (при одинаковых масштабных коэффициентах), рис. г. Вначале по координатам  $\sigma_{ad} = 70$  МПа и  $\tau_{ad} = -30$  МПа ставится точка  $ad$ . Аналогично отме-



К задаче 4.2

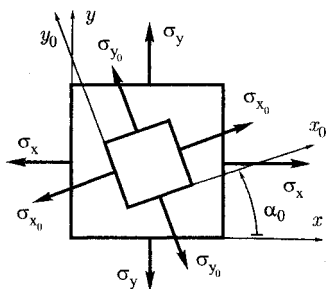
чается точка  $cd$  ( $\sigma_{cd} = 20$  МПа,  $\tau_{cd} = 30$  МПа). Затем точки  $ad$  и  $cd$  соединяются прямой линией, которая пересекает ось абсцисс в точке  $C$ . Последняя принимается за центр окружности, которая проводится через точки  $ad$  и  $cd$  и носит название круга Мора, рис. 2.

Далее от радиуса, соединяющего точки  $C$  и  $ad$ , откладывается угол  $2\alpha = 56^\circ$  в положительном (против часовой стрелки) направлении, как указано в условии задачи, рис. 2. Вновь полученный радиус дает положение точки  $eh$ , координаты которой  $\sigma_{eh} \approx 84$  МПа и  $\tau_{eh} \approx 4$  МПа полностью соответствуют напряжениям по площадке  $eh$ , заданной в условии, см. ответ на задачу 4.1.

Наконец, радиус, упомянутый последним, продлевается за центр  $C$  с тем, чтобы получить точку  $gh$ , которая отвечает площадке  $gh$  элемента материала ( $\sigma_{gh} \approx 6$  МПа,  $\tau_{gh} \approx -4$  МПа), ср. рис. 6 и 2.

**4.3.** По площадкам прямоугольного элемента материала заданы напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Найти положения главных площадок и значения главных нормальных напряжений, изобразить элемент материала, находящийся под действием только главных напряжений. При изображении векторов главных напряжений воспользоваться еще одним их обозначением по правилу  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Указание. Угол между осью  $x$  и осью  $x_0$ , являющейся одной из двух главных осей, определяется следующим образом:



К задаче 4.3

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Главные нормальные напряжения вычисляются либо по формулам

$$\begin{cases} \sigma_{x_0} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \\ + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_0 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_0, \\ \sigma_{y_0} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \\ - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_0 - \tau_{xy} \sin 2\alpha_0, \end{cases}$$

либо по соотношениям

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{1}{2} \left( \sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right).$$

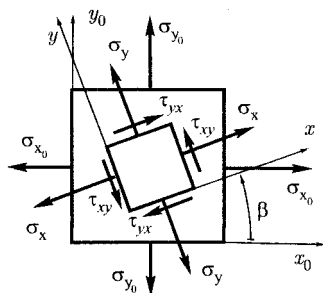
Ответ:

| №№ | Заданные величины |            |             | Искомые величины |                |                |
|----|-------------------|------------|-------------|------------------|----------------|----------------|
|    | $\sigma_x$        | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | $\alpha_0$       | $\sigma_{x_0}$ | $\sigma_{y_0}$ |
|    | МПа               | МПа        | МПа         | град             | МПа            | МПа            |
| 1  | 70                | 20         | 30          | 25,09            | 84,0           | 6,0            |
| 2  | 40                | 20         | -40         | -37,98           | 71,2           | -11,2          |
| 3  | 20                | -50        | 20          | 14,87            | 25,3           | -55,3          |
| 4  | 50                | -30        | -20         | -13,30           | 54,7           | -34,7          |
| 5  | -10               | -40        | -20         | -26,56           | 0              | -50,0          |
| 6  | -30               | -50        | 30          | 35,78            | -8,2           | -71,8          |
| 7  | 0                 | 0          | 60          | 45               | 60,0           | -60,0          |
| 8  | 0                 | 0          | -40         | -45              | 40,0           | -40,0          |

4.4. Решить предыдущую задачу с применением кругов Мора.

4.5. По граням прямоугольного элемента материала заданы главные нормальные напряжения  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ . Определить напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  по граням другого элемента, который повернут относительно первого на угол  $\beta$ , см. рис. Указать направления всех напряжений, действующих по граням нового элемента.





К задаче 4.5

**Указание.** Преобразование напряжений следует осуществлять по формулам

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0}) + \frac{1}{2}(\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}) \cos 2\beta, \\ \sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0}) - \frac{1}{2}(\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}) \cos 2\beta, \\ \tau_{xy} = -\frac{1}{2}(\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}) \sin 2\beta. \end{cases}$$

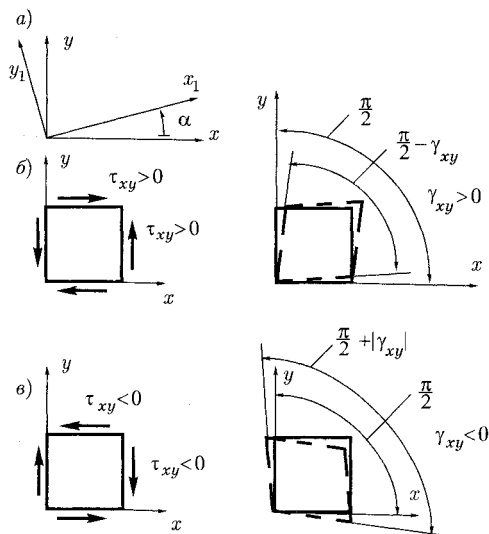
**Ответ:**

| №№ | Заданные величины |                |         | Искомые величины |            |             |
|----|-------------------|----------------|---------|------------------|------------|-------------|
|    | $\sigma_{x_0}$    | $\sigma_{y_0}$ | $\beta$ | $\sigma_x$       | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ |
|    | МПа               | МПа            | град    | МПа              | МПа        | МПа         |
| 1  | 80                | 40             | 41      | 62,8             | 57,2       | -19,8       |
| 2  | 50                | 70             | 37      | 57,2             | 62,8       | 9,6         |
| 3  | 60                | 20             | -24     | 46,7             | 33,3       | 14,9        |
| 4  | 30                | 50             | -63     | 34,1             | 45,9       | -8,1        |
| 5  | 30                | -50            | 18      | 22,4             | -42,4      | -23,5       |
| 6  | 60                | -40            | -33     | 30,3             | -10,3      | 41,7        |
| 7  | 40                | -40            | 25      | 25,7             | -25,7      | -38,8       |
| 8  | -20               | -60            | 52      | -35,2            | -44,8      | -19,4       |
| 9  | 100               | 0              | 27      | 79,4             | -20,6      | -40,4       |
| 10 | 80                | 0              | -48     | 35,8             | 44,2       | 39,8        |
| 11 | 0                 | -40            | 13      | -2,0             | -38,0      | -8,8        |
| 12 | 0                 | -60            | -23     | -9,2             | -50,8      | 21,6        |

**4.6.** Решить предыдущую задачу с построением кругов Мора.

# ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТА МАТЕРИАЛА. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

**5.1.** Вблизи некоторой точки  $O$  на поверхности нагруженного конструкционного элемента известны деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  в ортогональной системе координат  $xOy$ . Найти деформации  $\varepsilon_{x_1}$ ,  $\varepsilon_{y_1}$ ,  $\gamma_{x_1 y_1}$  в другой системе координат  $x_1 O y_1$ , повернутой относительно первой на угол  $\alpha$ , рис. а.



К задаче 5.1

**Указание.** Преобразование деформаций осуществляется в соответствии с формулами

$$\begin{cases} \varepsilon_{x_1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\alpha, \\ \varepsilon_{y_1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\alpha, \\ \gamma_{x_1 y_1} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Относительные линейные деформации удлинения считаются положительными, а деформации укорочения – отрицательными. Относительные угловые деформации (углы сдвига) принимаются положительными, если они соответствуют положительным касательным напряжениям. Если же углы сдвига отвечают отрицательным касательным напряжениям, то их следует принимать отрицательными. На рис. 6 дается иллюстрация положительного угла сдвига  $\gamma_{xy}$ , а на рис. 6 – отрицательного.

Ответ:

| №№ | Заданные величины    |                      |                      |                 | Искомые величины     |                      |                      |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|    | $\varepsilon_x$      | $\varepsilon_y$      | $\gamma_{xy}$        | $\alpha$ , град | $\varepsilon_{x_1}$  | $\varepsilon_{y_1}$  | $\gamma_{x_1 y_1}$   |
| 1  | $300 \cdot 10^{-6}$  | $100 \cdot 10^{-6}$  | $150 \cdot 10^{-6}$  | 27              | $320 \cdot 10^{-6}$  | $80 \cdot 10^{-6}$   | $-74 \cdot 10^{-6}$  |
| 2  | $200 \cdot 10^{-6}$  | $-100 \cdot 10^{-6}$ | $-200 \cdot 10^{-6}$ | 19              | $106 \cdot 10^{-6}$  | $-6 \cdot 10^{-6}$   | $-218 \cdot 10^{-6}$ |
| 3  | $-400 \cdot 10^{-6}$ | $-100 \cdot 10^{-6}$ | $200 \cdot 10^{-6}$  | -52             | $-311 \cdot 10^{-6}$ | $-189 \cdot 10^{-6}$ | $339 \cdot 10^{-6}$  |
| 4  | $-300 \cdot 10^{-6}$ | $-200 \cdot 10^{-6}$ | $-400 \cdot 10^{-6}$ | 61              | $-394 \cdot 10^{-6}$ | $-106 \cdot 10^{-6}$ | $297 \cdot 10^{-6}$  |

**5.2.** В окрестности точки  $O$  на поверхности деформируемой детали машины найдены деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  в прямоугольной системе координат  $xOy$ . Найти направления главных осей деформации  $x_0$  и  $y_0$ , определить главные относительные деформации  $\varepsilon_{x_0}$  и  $\varepsilon_{y_0}$ .

Указание. Угол между осью  $x$  и осью  $x_0$ , являющейся одной из двух главных осей, определяется с помощью выражения

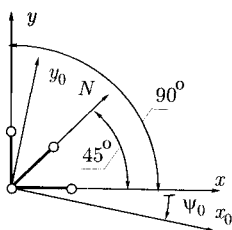
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}.$$

Главные относительные деформации вычисляются по формулам

$$\begin{cases} \varepsilon_{x_0} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\alpha_0 + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\alpha_0, \\ \varepsilon_{y_0} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\alpha_0 - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{cases}$$

Ответ:

| №№ | Заданные величины    |                      |                      | Искомые величины     |                      |                      |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|    | $\varepsilon_x$      | $\varepsilon_y$      | $\gamma_{xy}$        | $\alpha_0$ ,<br>град | $\varepsilon_{x_0}$  | $\varepsilon_{y_0}$  |
| 1  | $300 \cdot 10^{-6}$  | $100 \cdot 10^{-6}$  | $150 \cdot 10^{-6}$  | 18,4                 | $325 \cdot 10^{-6}$  | $75 \cdot 10^{-6}$   |
| 2  | $200 \cdot 10^{-6}$  | $-100 \cdot 10^{-6}$ | $-200 \cdot 10^{-6}$ | -16,8                | $235 \cdot 10^{-6}$  | $-130 \cdot 10^{-6}$ |
| 3  | $-400 \cdot 10^{-6}$ | $-100 \cdot 10^{-6}$ | $200 \cdot 10^{-6}$  | -16,8                | $-430 \cdot 10^{-6}$ | $-70 \cdot 10^{-6}$  |
| 4  | $-300 \cdot 10^{-6}$ | $-200 \cdot 10^{-6}$ | $-400 \cdot 10^{-6}$ | 38,0                 | $-456 \cdot 10^{-6}$ | $-44 \cdot 10^{-6}$  |



К задаче 5.3

**5.3.** В окрестности точки  $O$  на поверхности некоторой детали установлены три тензорметра. Два из них ориентированы перпендикулярно друг другу вдоль осей  $x$  и  $y$ , а третий направлен вдоль оси  $N$ , которая наклонена к оси  $x$  под углом  $45^\circ$ , см. рис. По показаниям этих тензометров найдены деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_N$ . Определить:

- угол сдвига  $\gamma_{xy}$ ,
- положение взаимно перпендикулярных главных осей деформации  $x_0$  и  $y_0$ ,
- главные деформации  $\varepsilon_{x_0}$  и  $\varepsilon_{y_0}$ .

*Указание.* Угол сдвига в начальных осях  $x$  и  $y$  определяется следующим образом:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_N - \varepsilon_x - \varepsilon_y,$$

а угол  $\psi_0$  между осью  $x$  и главной осью  $x_0$  – по формуле

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{2\varepsilon_N - \varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}.$$

Для отыскания главных деформаций  $\varepsilon_{x_0}$  и  $\varepsilon_{y_0}$  можно воспользоваться либо формулами из задачи 5.2, либо следующими выражениями:

$$\varepsilon_{\max, \min} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_x + \varepsilon_y \pm \sqrt{2((\varepsilon_x - \varepsilon_N)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_N)^2)} \right).$$

Ответ:

| №№ | Заданные величины    |                      |                      |                   | Искомые величины     |                      |                      |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|    | $\varepsilon_x$      | $\varepsilon_y$      | $\varepsilon_N$      | $\alpha_0$ , град | $\varepsilon_{x_0}$  | $\varepsilon_{y_0}$  | $\varepsilon_{xy}$   |
| 1  | $200 \cdot 10^{-6}$  | $100 \cdot 10^{-6}$  | $300 \cdot 10^{-6}$  | 35,8              | $308 \cdot 10^{-6}$  | $-8 \cdot 10^{-6}$   | $300 \cdot 10^{-6}$  |
| 2  | $200 \cdot 10^{-6}$  | $100 \cdot 10^{-6}$  | $-200 \cdot 10^{-6}$ | -41,0             | $504 \cdot 10^{-6}$  | $-204 \cdot 10^{-6}$ | $-700 \cdot 10^{-6}$ |
| 3  | $200 \cdot 10^{-6}$  | $-100 \cdot 10^{-6}$ | $100 \cdot 10^{-6}$  | 9,2               | $208 \cdot 10^{-6}$  | $-108 \cdot 10^{-6}$ | $100 \cdot 10^{-6}$  |
| 4  | $-300 \cdot 10^{-6}$ | $-100 \cdot 10^{-6}$ | $-150 \cdot 10^{-6}$ | -13,3             | $-312 \cdot 10^{-6}$ | $-88 \cdot 10^{-6}$  | $100 \cdot 10^{-6}$  |

**5.4.** По условиям задачи 5.3 вычислить напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ . Принять  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0,8 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0,3$ .

Указание. Искомые напряжения определяются по следующим формулам:

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} G$$

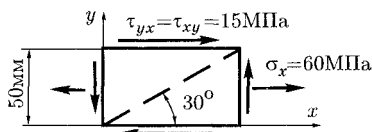
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x),$$

$$\sigma_{x_0} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x_0} + \nu \varepsilon_{y_0}), \quad \sigma_{y_0} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{y_0} + \nu \varepsilon_{x_0}).$$

Ответ:

| №№ | Искомые величины |            |             |                |                |
|----|------------------|------------|-------------|----------------|----------------|
|    | $\sigma_x$       | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | $\sigma_{x_0}$ | $\sigma_{y_0}$ |
|    | МПа              | МПа        | МПа         | МПа            | МПа            |
| 1  | 50,5             | 35,1       | 24,0        | 67,2           | 18,5           |
| 2  | 50,5             | 35,1       | -56,0       | 97,3           | -11,6          |
| 3  | 37,4             | -8,80      | 8,00        | 38,6           | -10,0          |
| 4  | -72,5            | -41,8      | 8,00        | -74,4          | -39,9          |

**5.5.** На поверхности стальной детали, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, выделен прямоугольник, см. рис. Определить удлинение его диагонали.



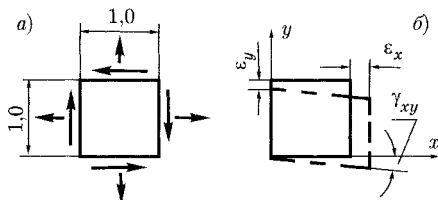
К задаче 5.5

Ответ: 0,037 мм.

**5.6.** При прохождении поезда через мост были измерены удлинения в горизонтальном и вертикальном направлениях в одной из

точек стальной балки. В горизонтальном направлении разность отсчетов тензометра оказалась равной +8 мм при его базе 20 мм и увеличении 1000; в вертикальном направлении разность отсчетов тензометра оказалась равной -12 мм при его базе 100 мм и том же увеличении. Определить нормальные напряжения в горизонтальном и вертикальном направлениях.

*Ответ:* В горизонтальном направлении  $\sigma_x = 80$  МПа, в вертикальном  $\sigma_y = 0$ .



К задаче 5.7

**5.7.** Напряженное состояние элемента, выделенного из стальной детали, иллюстрируется схемой на рис. а. Его относительные деформации равны:  $\varepsilon_x = 5,32 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_y = -1,82 \cdot 10^{-4}$ ,  $\gamma_{xy} = -0,199 \cdot 10^{-4}$ , рис.б. Опре-

делить значения и направления главных напряжений.

*Ответ:*  $\sigma_1 = 160$  МПа,  $\sigma_3 = -60$  МПа; напряжение  $\sigma_1$  повернуто относительно горизонтали на  $30^\circ$  по часовой стрелке.

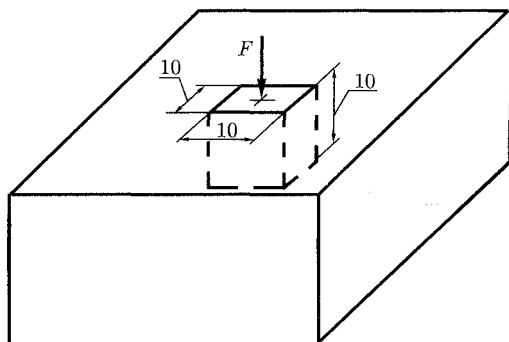
**5.8.** Определить наибольшие по абсолютной величине относительные линейные деформации для стального элемента, находящегося в объемном напряженном состоянии, при указанной величине главных напряжений.

*Ответ:*

| №№ | Заданные значения<br>главных напряжений,<br>МПа |      |     | Искомые величины<br>деформаций       |
|----|-------------------------------------------------|------|-----|--------------------------------------|
| 1  | +15,                                            | +30, | +45 | $\varepsilon_1 = 157 \cdot 10^{-6}$  |
| 2  | +15,                                            | +30, | -45 | $\varepsilon_3 = -293 \cdot 10^{-6}$ |
| 3  | +15,                                            | -30, | -45 | $\varepsilon_3 = -202 \cdot 10^{-6}$ |
| 4  | +15,                                            | -30, | +45 | $\varepsilon_3 = -240 \cdot 10^{-6}$ |
| 5  | -15,                                            | -30, | -45 | $\varepsilon_3 = -157 \cdot 10^{-6}$ |
| 6  | -15,                                            | +30, | -45 | $\varepsilon_1 = 240 \cdot 10^{-6}$  |
| 7  | -15,                                            | -30, | +45 | $\varepsilon_1 = 293 \cdot 10^{-6}$  |
| 8  | -15,                                            | +30, | +45 | $\varepsilon_1 = 202 \cdot 10^{-6}$  |

**5.9.** По данным предыдущей задачи определить модуль объемной деформации. *Ответ:*  $K = 1,667 \cdot 10^{11}$  Па.

**5.10.** Толстая плита имеет квадратное в плане гнездо глубиной 10 мм и с поперечными размерами  $10 \times 10$  мм. В это гнездо вставлен медный кубик размерами  $10 \times 10 \times 10$  мм, который затем нагружается сверху равномерно распределенной нагрузкой, равнодействующая которой  $F = 10$  кН. Полагая плиту недеформируемой, принимая сопряжение кубика с плитой беззазорным и пренебрегая силами трения, определить все три главных напряжения в кубике. Коэффициент поперечной деформации для меди принять  $\nu = 0,32$ .



К задаче 5.10

*Указание.* Задача решается в предположении равенства нулю поперечных деформаций кубика.

*Ответ:*  $\sigma_1 = -100$  МПа,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -147$  МПа.

**5.11.** Решить предыдущую задачу при условии, что между кубиком и плитой имеются зазоры в обоих поперечных направлениях, которые составляют по 0,001 мм каждый.

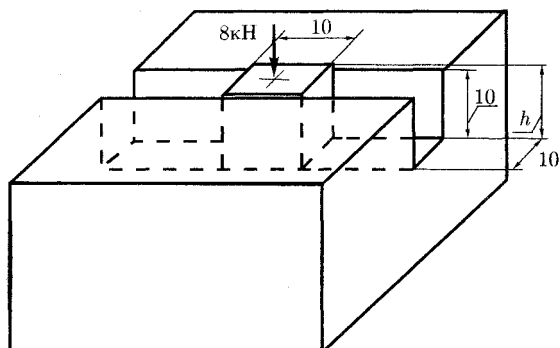
*Ответ:*  $\sigma_1 = \sigma_2 = -32$  МПа,  $\sigma_3 = -100$  МПа.

**5.12.** В толстой плите, деформацией которой пренебрегаем, высверлено на некоторую глубину цилиндрическое глухое отверстие диаметром  $d = 20$  мм, в которое плотно, без зазоров вставлен алюминиевый цилиндрический стержень. Затем этот стержень нагружается сжимающей силой  $F = 20$  кН. Определить все три главных напряжения в стержне. Коэффициент поперечной деформации алюминия принять  $\nu = 0,33$ .

*Ответ:*  $\sigma_1 = -64$  МПа,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -95$  МПа.

**5.13.** В толстой недеформируемой плите профрезерован сквозной паз шириной и глубиной по 10 мм. В этот паз плотно, без зазора вставлен дюралюминиевый параллелепипед размером в плане  $10 \times 10$  мм, который затем нагружается так, как указано на рис. Определить

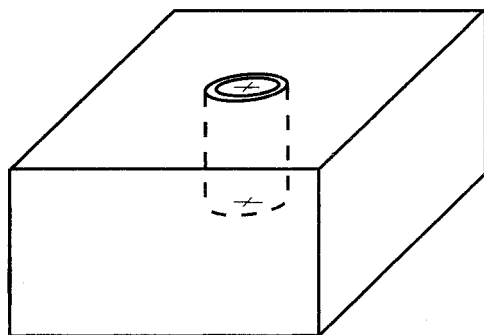
главные напряжения в параллелепипеде. Какая должна быть его высота до нагружения, чтобы после деформирования его верхняя грань была заподлицо с верхней поверхностью плиты? Для дюралюминия  $\nu = 0,33$ .



К задаче 5.13

Ответ:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = -24$  МПа,  $\sigma_3 = -80$  МПа,  $h = 10,013$  мм.

**5.14.** В толстой жесткой плите высверлено глухое цилиндрическое отверстие. В него плотно, без зазора вставлена медная трубка, см. рис. Затем внутрь патрона наливается жидкость, которая затем сжимается с помощью поршня до давления  $q = 10$  МПа (около 100 технических атмосфер). Определить главные напряжения в материале патрона. Трением между трубкой и плитой пренебречь. Увеличением среднего диаметра трубки в связи с малой толщиной ее стенки пренебречь. Для меди  $\nu = 0,32$ .



К задаче 5.14

Ответ:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = -3,2$  МПа,  $\sigma_3 = -10$  МПа.



**5.15.** Стальная трубка диаметром  $d = 300$  мм с толщиной стенки  $t = 1$  мм заполнена бетоном (так называемый "бетон в обойме"). Сформированный трубкой бетонный стержень сжат в продольном направлении силой  $F = 600$  кН, рис. *a*. Найти главные напряжения в бетонном массиве и растягивающие напряжения в стенке трубки, пренебрегая трением между стержнем и трубкой. Для бетона принять  $E_b = 0,14 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_b = 0,18$ .

*Решение.* Напряжение  $\sigma_x$  (см. рис. *a*) в поперечном сечении бетонного стержня вычисляется очевидным способом:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{F}{A} = -\frac{F}{\pi r^2} = \\ &= -600000 / (3,14 \cdot 0,15^2) = \\ &= -8,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -8,5 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Сжатый в продольном направлении стержень будет увеличивать свои поперечные размеры, распирая изнутри трубку. Между стержнем и трубкой возникает силовое взаимодействие, характеризующееся удельным давлением  $q$ , ср. рис. *b* и *в*. Под действием этого давления трубка несколько увеличит свой диаметр, благодаря чему она будет растянута в окружном направлении. Соответствующие окружные нормальные напряжения определяем по одной из "котельных" формул

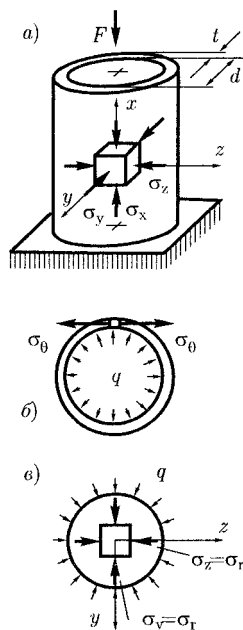
$$\sigma_\theta = q \frac{r}{t} = q \frac{d}{2t}.$$

Силы трения между стержнем и трубкой были приняты отсутствующими. Других продольных сил, действующих на трубку, нет. Поэтому продольные нормальные напряжения в трубке следует считать нулевыми. Следовательно, материал трубки находится в линейном напряженном состоянии, причем относительная деформация удлинения вдоль периметра поперечного сечения трубки (относительная окружная деформация) составляет

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} = \frac{qd}{2Et}.$$

Относительное изменение диаметра трубки равно относительной окружной деформации

$$\varepsilon_d = \varepsilon_\theta.$$



К задаче 5.15

В результате упомянутого выше силового взаимодействия между трубкой и стержнем возникает сжимающее давление на боковую поверхность последнего. Поэтому радиальное нормальное напряжение в стержне равно

$$\sigma_r = -q.$$

Внутри стержня на его оси выделим малый единичный кубик, четыре ребра которого ориентированы в продольном направлении, рис. а. Свяжем с кубиком прямоугольную систему координат  $x y z$ , причем ось  $x$  направим вдоль оси стержня. Ввиду осевой симметрии грани кубика являются главными площадками, по которым действуют сжимающие главные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . Кроме того из того же условия следует

$$\sigma_y = \sigma_z,$$

поэтому можно записать

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_r = -q.$$

В соответствии с обобщенным законом Гука имеем для радиальной относительной деформации стержня

$$\varepsilon_r = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{E_6}(\sigma_y - \nu_6(\sigma_z + \sigma_x))$$

или

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_6}(\sigma_y(1 - \nu_6) - \nu_6\sigma_x).$$

Так как стержень и трубка деформируются совместно, то относительное изменение поперечных размеров стержня равно относительному изменению диаметра трубки

$$\varepsilon_r = \varepsilon_d$$

или

$$\frac{1}{E_6}(\sigma_y(1 - \nu_6) - \nu_6\sigma_x) = \frac{qd}{2Et} = -\frac{\sigma_y d}{2Et},$$

откуда

$$\sigma_y = \nu_6\sigma_x \left(1 - \nu_6 + \frac{d}{2t} \cdot \frac{E_6}{E}\right)^{-1}.$$

Подстановка чисел дает

$$\sigma_y = 0,18(-8,5)(1 - 0,18 + (300/2 \cdot 1)(0,14/2))^{-1} = -0,135 \text{ МПа}.$$

С учетом правила нумерации главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  имеем в данной задаче

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y = -0,135 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = \sigma_x = -8,5 \text{ МПа}.$$

Наконец, можно определить растягивающие напряжения в трубке

$$\sigma_{\theta} = q \frac{d}{2t} = -\sigma_y \frac{d}{2t} = -(-0,135)(300/2 \cdot 1) = 20,2 \text{ МПа.}$$

**5.16.** Решить предыдущую задачу в предположении, что толщина стенки трубки достаточна велика и ее деформацией можно пренебречь.

*Ответ:*  $\sigma_1 = \sigma_2 = -1,87 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_3 = -8,5 \text{ МПа}$ .

**5.17.** Цилиндр из алюминиевого сплава диаметром  $d = 300 \text{ мм}$  и толщиной стенки  $t_{\text{ц}} = 2 \text{ мм}$  заключен в чугунную рубашку с толщиной стенки  $t_p = 5 \text{ мм}$ . Давление газа внутри составного цилиндра равно  $q = 3 \text{ МПа}$  (около 30 технических атмосфер). Определить окружные нормальные напряжения  $\sigma_{\theta}$ , растягивающие стенки цилиндра и рубашки. Продольными напряжениями  $\sigma_x$  пренебречь.

*Решение.* Между цилиндром и рубашкой возникает силовое взаимодействие, характеризуемое удельным контактным давлением  $q_k$ , причем  $q_k < q$ . В итоге рубашка работает как труба под действием давления  $q_k$  изнутри; цилиндр также можно считать трубой, но давление в его внутренней полости придется принимать равным разности  $q - q_k$ . Таким образом, окружные нормальные растягивающие напряжения в рубашке и цилиндре могут быть найдены по "котельной" формуле:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^p &= q_k \frac{r}{t_p} = q_k \frac{d}{2t_p}, \\ \sigma_{\theta}^{\text{ц}} &= (q - q_k) \frac{r}{t_{\text{ц}}} = (q - q_k) \frac{d}{2t_{\text{ц}}}.\end{aligned}$$

В условии задачи указано, что продольными напряжениями  $\sigma_x$  можно пренебречь. Из этого следует, что материал в обоих конструктивных элементах находится в линейном напряженном состоянии. Поэтому окружные относительные деформации в каждом из них подсчитываются так

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta}^p &= \frac{\sigma_{\theta}^p}{E_p} = \frac{q_k d}{2E_p t_p}, \\ \varepsilon_{\theta}^{\text{ц}} &= \frac{\sigma_{\theta}^{\text{ц}}}{E_{\text{ц}}} = \frac{(q - q_k) d}{2E_{\text{ц}} t_{\text{ц}}}.\end{aligned}$$

Относительные изменения диаметров рубашки  $\varepsilon_d^p$  и цилиндра  $\varepsilon_d^{\text{ц}}$  равны соответствующим относительным окружным деформациям

$$\begin{aligned}\varepsilon_d^p &= \varepsilon_{\theta}^p, \\ \varepsilon_d^{\text{ц}} &= \varepsilon_{\theta}^{\text{ц}}.\end{aligned}$$

Кроме того отметим, что рубашка и цилиндр деформируются совместно, т.е. имеем

$$\varepsilon_d^p = \varepsilon_d^{\text{ц}}$$

или

$$\frac{q_{\kappa} d}{2E_p t_p} = \frac{(q - q_{\kappa})d}{2E_{\text{ц}} t_{\text{ц}}},$$

откуда

$$q_{\kappa} = q \left( 1 + \frac{E_{\text{ц}} t_{\text{ц}}}{E_p t_p} \right)^{-1}$$

В результате числовых подстановок получаем

$$q_{\kappa} = 3(1 + (0,7/1,2)(2/5))^{-1} = 2,43 \text{ МПа.}$$

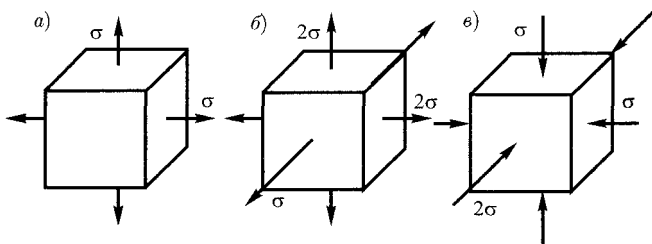
Заканчиваем решение задачи определением окружных нормальных напряжений

$$\sigma_{\theta}^p = q_{\kappa} \frac{d}{2 t_p} = 2,43 (300/2 \cdot 5) = 75,9 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{\theta}^{\text{ц}} = (q - q_{\kappa}) \frac{d}{2 t_{\text{ц}}} = (3 - 2,43)(300/2 \cdot 2) = 42,7 \text{ МПа.}$$

## МЕХАНИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

**6.1.** Представленные на рис. а, б и в три схемы различных видов сложного напряженного состояния сопоставить по обоим критериям пластичности (Треска–Сен–Венана и Губера–Мизеса).



К задаче 6.1

*Решение.* Для начала перенумеруем главные напряжения в соответствии с правилом  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Запишем

– в случае а:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\sigma_3 = 0$ ;

– в случае б:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 2\sigma$ ,  $\sigma_3 = \sigma$ ;

– в случае в:  $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma$ ,  $\sigma_3 = -2\sigma$ . Соответственно по Треска–Сен–Венану (по критерию постоянства максимальных касательных напряжений) имеем

$$\sigma_{\text{экв}}^a = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma - 0 = \sigma;$$

$$\sigma_{\text{экв}}^b = 2\sigma - \sigma = \sigma;$$

$$\sigma_{\text{экв}}^в = -\sigma - (-\sigma) = \sigma;$$

а также по Губеру–Мизесу (по критерию постоянства интенсивности напряжений  $\sigma_i$ )

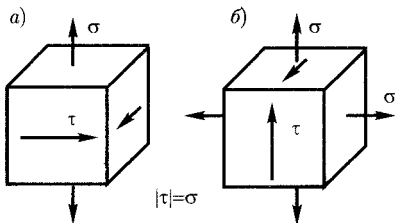
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}}^a = \sigma_i^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma - \sigma)^2 + (\sigma - 0)^2 + (0 - \sigma)^2} = \sigma; \\ \sigma_{\text{экв}}^b = \sigma_i^b &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\sigma - 2\sigma)^2 + (2\sigma - \sigma)^2 + (\sigma - 2\sigma)^2} = \sigma; \\ \sigma_{\text{экв}}^в = \sigma_i^в &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-\sigma - (-\sigma))^2 + (-\sigma - (-2\sigma))^2 + (-2\sigma - (-\sigma))^2} = \sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, все три иллюстрируемые на рис. а, б и в напряженные состояния имеют по обоим критериям равные эквивалентные напряжения

$\sigma_{\text{экв}} = \sigma$ . С ростом параметра  $\sigma$  во всех случаях одновременно получаем переход материала в состояние пластического деформирования, которому отвечает условие

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma = \sigma_y,$$

где  $\sigma_y$  – предел текучести. Следовательно, все рассматриваемые напряженные состояния можно считать равноопасными.



К задаче 6.2

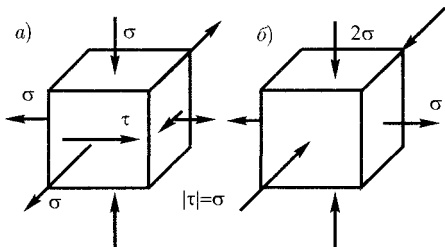
**6.2.** Какой из двух, изображенных на *a* и *b* элементов, находится в более опасном напряженном состоянии с точки зрения критерия максимальных касательных напряжений?

*Указание.* Вначале надлежит определить два неизвестных главных напряжения из трех как в первом, так и во втором случаях. Затем следует дважды применить форму-

лу для эквивалентного напряжения.

*Ответ:*  $\sigma_{\text{экв}}^a : \sigma_{\text{экв}}^b = (\sigma - (-\sigma)) : (1,62\sigma - (-0,62\sigma)) = 2 : 2,24$ ,

т.е. элемент по схеме *b* более опасен.



К задаче 6.3

**6.3.** Напряженное состояние какого из двух элементов более опасно с точки зрения критерия постоянства интенсивности напряжений?

*Ответ:*  $\sigma_{\text{экв}}^a : \sigma_{\text{экв}}^b = \sigma\sqrt{7} : \sigma\sqrt{7} = 1 : 1$ , т.е. элементы равноопасны.

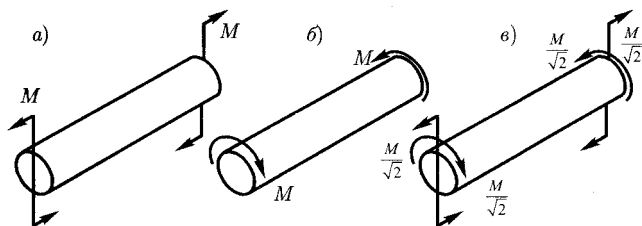
**6.4.** Прямой стержень круглого поперечного сечения может быть нагружен по одному из представленных на рис. вариантов.

Какой из этих вариантов более опасен?

*Решение.* Здесь имеем либо изгиб стержня, либо его кручение, либо комбинацию изгиба и кручения. При изгибе в поперечном сечении стержня возникают только нормальные напряжения. Максимальное значение этих напряжений обозначим через  $\sigma$ . Тогда

$$\sigma = \sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{изг}}}{W},$$

где  $W$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения стержня. При кручении в поперечном сечении стержня возникают лишь касательные



К задаче 6.4

напряжения, для которых по аналогии с предыдущим можно записать

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p},$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения стержня, причем

$$W_p = 2W.$$

При одновременном изгибе с кручением в поперечном сечении возникают как нормальные, так и касательные напряжения.

Напряженное состояние в опасном объеме стержня при его кручении (а также при наложении изгиба на кручение) является плоским. В подобных обстоятельствах формулы для эквивалентных напряжений по критериям постоянства максимальных касательных напряжений и постоянства интенсивности напряжений могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ЭКВ}} &= 2\tau_{\max} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_{\text{ЭКВ}} &= \sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.\end{aligned}$$

Применяя первое из этих выражений по очереди к каждому из указанных в задаче вариантов, получаем

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^a : \sigma_{\text{ЭКВ}}^б : \sigma_{\text{ЭКВ}}^в = \frac{M}{W} : \frac{M}{W} : \frac{M}{W} = 1 : 1 : 1,$$

что указывает на их равноопасность. Если же воспользоваться выражением для  $\sigma_i$ , то оказывается, что

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^a : \sigma_{\text{ЭКВ}}^б : \sigma_{\text{ЭКВ}}^в = 1 : 0,87 : 0,93.$$

Таким образом, с точки зрения критерия Губера–Мизеса первый вариант наиболее, а второй наименее опасен. Однако следует отметить, что различие не превосходит 15%.

**6.5.** Проверить прочность стенки цилиндрического котла диаметром  $d = 2,5$  м, находящегося под рабочим давлением  $q = 1$  МПа

(около 10 технических атмосфер). Толщина стенки  $t = 12$  мм, допускаемое напряжение  $[\sigma] = 90$  МПа. Расчет произвести по критерию постоянства интенсивности напряжений.

*Решение.* В инженерных расчетах котлов пренебрегают влиянием радиального нормального напряжения  $\sigma_r$  и учитывают лишь окружное и продольное нормальные напряжения, которые определяются по "котельным" формулам

$$\sigma_\theta = q \frac{R}{t} = q \frac{d}{2t},$$

$$\sigma_x = q \frac{R}{2t} = q \frac{d}{4t}.$$

Напряжения  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_x$  и  $\sigma_r$  — главные, которые надлежит перенумеровать так:

$$\sigma_\theta = \sigma_1, \sigma_x = \sigma_2, \sigma_r = \sigma_3 = 0.$$

Общая формула для вычисления эквивалентного напряжения приведена в решении задачи 6.1. В данном случае она упрощается:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2},$$

а условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq [\sigma]$$

или

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_i = 0,433 \frac{qd}{t} \leq [\sigma],$$

если воспользоваться "котельными" формулами. Числовые подстановки дают

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_i = 0,433 \cdot 1 \cdot 2,5/0,012 = 90,2 \text{ МПа},$$

что указывает на практическое выполнение условия прочности.

**6.6.** Котел имеет диаметр цилиндрической части  $d = 2$  м. Он находится под рабочим давлением  $q = 1,6$  МПа (около 16 технических атмосфер). Подобрать толщину стенки  $t$  при допускаемом напряжении  $[\sigma] = 100$  МПа, основываясь на критерии постоянства максимальных касательных напряжений.

*Решение.* Условие прочности по критерию Треска-Сен-Венана имеет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

С учетом "котельных" формул из предыдущей задачи получаем

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{qd}{2t} \leq [\sigma],$$

откуда

$$t \geq \frac{qd}{2[\sigma]}.$$



С учетом заданных в условии значений всех параметров находим

$$t \geq 1,6 \cdot 2 / (2 \cdot 100) = 0,016 \text{ м} = 16 \text{ мм.}$$

**6.7.** Кислородные баллоны представляют собой цилиндрические сосуды с наружным диаметром  $d = 250$  мм и толщиной стенки  $t = 10$  мм. Каков будет коэффициент запаса  $s$  для стенки баллона, если рабочее давление в нем достигает  $q = 3$  МПа (около 30 технических атмосфер)? Предел текучести принять  $\sigma_y = 510$  МПа. Расчет вести по критерию постоянства интенсивности напряжений.

*Ответ:*  $s = 15,7$ .

**6.8.** Проверить прочность вновь проектируемой чугуновой детали, если в одном из ее объемов прогнозируются следующие главные напряжения:  $\sigma_1 = 15$  МПа,  $\sigma_2 = -40$  МПа,  $\sigma_3 = -60$  МПа. Допускаемые напряжения для данной марки чугуна: на растяжение  $[\sigma_{u,t}] = 30$  МПа, на сжатие  $[\sigma_{u,c}] = 100$  МПа. Руководствоваться условием прочности, соответствующим критерию разрушения Мора.

*Решение.* Условие прочности по Мору выглядит следующим образом:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - k \sigma_3 \leq [\sigma_{u,t}],$$

где  $k$  – отношение предела прочности на растяжение к пределу прочности на сжатие. В нашем распоряжении нет таких данных, поэтому примем в первом приближении

$$k = \frac{[\sigma_{u,t}]}{[\sigma_{u,c}]} = 30/100 = 0,3.$$

В этом случае имеем для эквивалентного напряжения

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 15 - 0,3(-60) = 33 \text{ МПа,}$$

что на 10% превосходит допускаемое напряжение  $[\sigma_{u,t}]$ , стоящее в условии прочности. Таким образом, условие прочности не удовлетворяется.

**6.9.** Решить предыдущую задачу, руководствуясь условием прочности, отвечающим критерию разрушения Писаренко–Лебедева.

*Решение.* Условие прочности по Писаренко–Лебедеву записывается так

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 \leq [\sigma_{u,t}],$$

где  $\chi$  – отношение предела прочности на растяжение к пределу прочности на сжатие. Как и выше, воспользуемся приближенной оценкой этого параметра:

$$\chi = \frac{[\sigma_{u,t}]}{[\sigma_{u,c}]} = 30/100 = 0,3.$$

Затем вычисляем интенсивность напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(15 - (-40))^2 + (-40 - (-60))^2 + (-60 - 15)^2} = \\ &= 67,3 \text{ МПа},\end{aligned}$$

после чего нетрудно найти эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = 0,3 \cdot 67,3 + (1 - 0,3) \cdot 15 = 30,7 \text{ МПа},$$

что лишь на 2,5% больше допускаемого напряжения. Следовательно, условие прочности практически удовлетворяется.

## КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

**7.1.** Напряжения у поверхности скручиваемого вала  $\tau_{\max} = 80$  МПа. Чему равны касательные напряжения в том же поперечном сечении на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала ?

*Ответ:* 60 МПа.

**7.2.** Стальной стержень диаметром 10 мм закручивается на испытательной установке. Крутящий момент увеличивается ступенями по 1,5 Нм. Среднее значение разности приращения показаний приборов, измеряющих углы поворота двух сечений, равно 3,8 мм. Расстояние между сечениями 100 мм, а 1 мм показания по шкале прибора соответствуют углу поворота 0,0005 рад. Чему равен модуль сдвига ?

*Ответ:*  $0,805 \cdot 10^{11}$  Па.

**7.3.** Стальной стержень удлиняется на 0,122 мм при растяжении силой 60 кН. Этот же стержень закручивается на угол  $0,75^\circ$  при нагружении крутящим моментом 200 Нм. Стержень круглого поперечного сечения диаметром 25 мм и длиной 200 мм. Определить величины  $E$ ,  $G$  и  $\nu$ .

*Ответ:*  $2 \cdot 10^{11}$  Па;  $0,8 \cdot 10^{11}$  Па; 0,25.

**7.4.** При испытании на кручение стального образца диаметром 20 мм и длиной 200 мм установлено, что при крутящем моменте 163 Нм угол закручивания равен 0,026 рад. Предел пропорциональности достигнут при крутящем моменте 270 Нм. Определить модуль сдвига и предел пропорциональности при сдвиге для данной марки стали.

*Ответ:*  $G = 0,8 \cdot 10^{11}$  Па,  $\tau_{pr} = 172$  МПа.

**7.5.** Стальной вал диаметром 100 мм и длиной 6 м закручен на угол  $4^\circ$ . Чему равно наибольшее касательное напряжение ?

*Ответ:* 46 МПа.

**7.6.** Подобрать диаметр стального вала, передающего крутящий момент  $M = 16$  кНм. Предел текучести на сдвиг  $\tau_y = 144$  МПа, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,8$ , допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 0,6$  град/м.

*Решение.* Сначала установим значение допускаемого касательного напряжения

$$[\tau] = \frac{\tau_y}{[s]} = 144/1,8 = 80 \text{ МПа.}$$

Условие прочности, соответствующее условию предельной упругости, выглядит так:

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_p} \leq [\tau]$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления, причем

$$W_p = \frac{1}{2} \pi r^3,$$

где  $r$  – радиус сечения вала. Подставим в условие прочности выражение для  $W_p$  и разрешим полученное неравенство относительно радиуса:

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2M}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{2 \cdot 16000 / (3,14 \cdot 80 \cdot 10^6)} = 0,050 \text{ м} = 50 \text{ мм}.$$

Условие жесткости в данном случае записывается таким образом:

$$\theta = \frac{M}{GI_p} \leq [\theta],$$

где  $\theta$  – относительный угол закручивания,  $I_p$  – полярный момент инерции сечения вала, для которого имеем

$$I_p = \frac{1}{2} \pi r^4.$$

Исключим из двух последних выражений величину  $I_p$  и запишем полученное условие жесткости в следующей форме:

$$r \geq \sqrt[4]{\frac{2M}{\pi G[\theta]}}.$$

Допускаемое значение относительного угла закручивания в СИ-системе единиц имеет значение

$$[\theta] = (0,6 \text{ град/м}) \frac{\pi}{180} = 0,6 \cdot 3,14 / 180 = 0,01047 \text{ рад/м}.$$

Числовые подстановки в условие жесткости позволяют получить

$$r \geq \sqrt[4]{2 \cdot 16000 / (3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,01047)} = 0,059 \text{ м} = 59 \text{ мм}.$$

Из двух полученных значений  $r$  надлежит принять наибольшее. Поэтому в качестве окончательного ответа имеем

$$d = 2r \geq 2 \cdot 59 = 118 \text{ мм}.$$

**7.7.** В целях экономии веса предлагается изготавливать вал не из стали, а из алюминиевого сплава, причем оба вала удовлетворяют

одному и тому же условию жесткости при одной и той же длине. Для алюминиевого сплава модуль сдвига  $G = 0,27 \cdot 10^{11}$  Па и плотность  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup>.

*Ответ:* Стальной вал в 1,74 раза тяжелее алюминиевого.

**7.8.** По условиям задачи 7.6 подобрать сечение вала в виде трубы, причем отношение ее внутреннего радиуса к наружному составляет 0,8. Оценить экономию материала при замене сплошного вала на полый.

*Решение.* Выражения для полярного момента сопротивления и полярного момента инерции в случае полого вала имеют вид

$$W_p = \frac{1}{2} \pi r_*^3 (1 - \alpha^4),$$

$$I_p = \frac{1}{2} \pi r_*^4 (1 - \alpha^4),$$

где  $r_*$  – радиус наружной поверхности вала,  $\alpha$  – отношение внутреннего радиуса к наружному. С учетом упомянутых формул запишем условия прочности и жесткости

$$r_* \geq \sqrt[3]{\frac{2M}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}},$$

$$r_* \geq \sqrt[4]{\frac{2M}{\pi G[\theta](1 - \alpha^4)}}.$$

После числовых подстановок получаем

$$r_* \geq 67,3 \text{ мм}$$

или

$$d_* \geq 134,6 \text{ мм.}$$

Внутренний диаметр трубы

$$d_{\text{внут}} = \alpha d_* = 0,8 \cdot 134,6 = 107,7 \text{ мм.}$$

Отношение масс валов  $m_1/m_2$  по первому и второму вариантам равно отношению объемов  $V_1/V_2$  при равных плотностях материала. Так как длины валов предполагаются одинаковыми, то отношение объемов заменим отношением площадей поперечных сечений

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2 (1 - \alpha^2)} = (59/63,7)^2 / (1 - 0,8^2) = 2,13.$$

Таким образом, в данном случае имеем более чем двукратную экономию по расходу материала.

**7.9.** Определить диаметр сплошного стального вала, передающего мощность  $N = 58,8$  кВт (около 80 л.с.) при частоте вращения

$n = 180$  об/мин, при допускаемом напряжении  $[\tau] = 48$  МПа и допускаемом относительном угле закручивания  $[\theta] = 1$  град/м.

*Указание.* Сначала следует вычислить угловую скорость вращения

$$\omega = \frac{n\pi}{30} = 180 \cdot 3,14/30 = 18,8 \text{ рад/с}$$

и крутящий момент

$$M = \frac{N}{\omega} = 58,8 \cdot 10^3/18,8 = 3130 \text{ Нм.}$$

Затем из условия прочности и условия жесткости можно найти минимально необходимый диаметр вала.

*Ответ:*  $d \geq 70$  мм.

**7.10.** Вал диаметром 90 мм передает мощность 66,2 кВт (около 90 л.с.). Определить допускаемое значение минимальной угловой скорости при допускаемом напряжении на сдвиг 60 МПа.

*Ответ:* Не менее 7,85 рад/с (75 об/мин).

**7.11.** Лебедка поднимает груз  $P = 16$  кН (около 1,6 тонны) со скоростью  $v = 0,6$  м/с. Считая, что вал лебедки работает только на кручение, подобрать диаметр сплошного вала лебедки, вращаемого с угловой скоростью  $\omega = 20,9$  рад/с (200 об/мин), при допускаемом напряжении  $[\tau] = 45$  МПа. Силами трения пренебречь.

*Указание.* Мощность, передаваемая валом,

$$N = Pv = 16 \cdot 1,6 = 9,6 \text{ кВт,}$$

а также крутящий момент

$$M = N/\omega = 9600/20,9 = 459 \text{ Нм.}$$

Далее производится определение диаметра из условия прочности.

*Ответ:*  $d \geq 37$  мм.

**7.12.** При определении мощности турбины был измерен угол закручивания вращаемого ею стального вала, который на длине 6 м оказался равным 1,2 град. Наружный и внутренний диаметры вала равны 250 и 170 мм. Угловая скорость вращения 26,2 рад/с (250 об/мин). Определить мощность, передаваемую валом, и возникающие в нем наибольшие касательные напряжения.

*Ответ:*  $N = 21600$  кВт,  $\tau_{\max} = 35$  МПа.

**7.13.** Карданный вал автомобиля при двух режимах работы передает одну и ту же мощность  $N = 16,9$  кВт (около 23 л.с.). Угловая скорость вращения вала в одном случае  $\omega_1 = 11,3$  рад/с, а в другом  $\omega_2 = 6,28$  рад/с. Определить наружный диаметр полого вала, если отношение внутреннего диаметра к наружному составляет 0,9, а

допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 40$  МПа. Как изменится значение  $\tau_{\max}$  при переходе от большей скорости к меньшей?

*Ответ:*  $d \geq 100$  мм. Увеличится в 1,8 раза и достигнет допускаемого значения.

**7.14.** Труба наружным диаметром  $d = 300$  мм и толщиной стенки  $t = 8$  мм скручивается моментом  $M = 11,5$  кНм. Оценить значение  $\tau_{\max}$  двумя способами: с использованием как точной формулы для полярного момента инерции сечения  $I_p$ , так и приближенной.

*Решение.* Точное значение полярного момента инерции составляет

$$I_p = \frac{1}{2} \pi r^4 (1 - \alpha^4) = 3,14 \cdot 0,15^4 (1 - (0,142/0,150)^4) / 2 = 1,5655 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4,$$

а приближенное

$$\begin{aligned} I_p^* &= \int_A \rho^2 dA \approx \int_A r_{\text{сред}}^2 dA = \int_0^{2\pi} r_{\text{сред}}^2 (t r_{\text{сред}} d\alpha) = 2\pi r_{\text{сред}}^3 t = \\ &= 2 \cdot 3,14 (0,146)^3 \cdot 0,008 = 1,5643 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

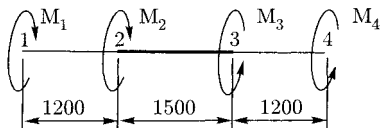
Соответствующие значения максимальных и "средних" касательных напряжений подсчитываются так:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M}{I_p} r = 11500 \cdot 0,15 / 1,5655 \cdot 10^{-4} = \\ &= 11,02 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,02 \text{ МПа}, \\ \tau_{\text{сред}} &= \frac{M}{I_p^*} r_{\text{сред}} = 11500 \cdot 0,146 / 1,5643 \cdot 10^{-4} = \\ &= 10,73 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,73 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Таким образом, погрешность составляет

$$\delta = (11,02 - 10,73) / 11,02 = 0,026 = 2,6\%.$$

**7.15.** К стальному валу переменного сечения приложены вращающие пары сил:  $M_1 = 1142$  Нм,  $M_2 = 2716$  Нм,  $M_3 = 5000$  Нм,  $M_4 = 1142$  Нм. Длины участков указаны на рис. Диаметр вала на среднем участке

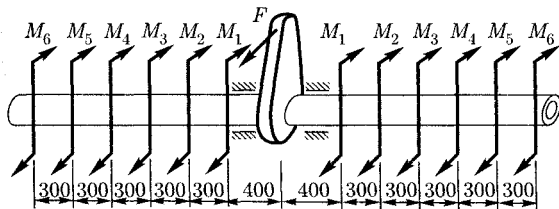


К задаче 7.15

составляет 60 мм, на крайних – 40 мм. Построить эпюру крутящих моментов и график нарастания угла закручивания, условно принимая нулевым угол поворота сечения 1. Подсчитать  $\tau_{\max}$  на каждом из участков вала, а также угол взаимного поворота сечений 2 и 4.

Ответ:  $\tau_{\max} = 91$  МПа на каждом из трех участков;  $\varphi_{2-4} = 0,0113$  рад.

**7.16.** На трубчатый стальной лонжерон самолетного руля высоты передается от нервюр (поперечных стержней) вращающие моменты  $M_1 = 1416$  Нм,  $M_2 = 1032$  Нм,  $M_3 = 712$  Нм,  $M_4 = 488$  Нм,  $M_5 = 328$  Нм,  $M_6 = 200$  Нм. Вычислить момент, действующий на рычаг, к которому крепится тяга управления рулем высоты. Построить эпюру крутящих моментов и подобрать размеры трубы, если отношение внутреннего диаметра трубы к наружному  $\alpha = 0,92$ , а допускаемое напряжение  $[\tau] = 200$  МПа. Определить угол поворота концевое сечения трубы относительно среднего сечения.



К задаче 7.16

**7.17.** Сплошной стальной вал скручивается моментом  $M = 200$  Нм. Подобрать его диаметр как по методу допускаемых напряжений, так и по методу допускаемых нагрузок. Принять предел текучести  $\tau_y = 144$  МПа, а нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,8$ .

*Решение.* Первый метод основан на представлении выхода вала из строя в состоянии предельной упругости. Соответствующий внутренний крутящий момент, называемый предельным упругим моментом, равен

$$M_{\text{ПУ}} = \tau_y W_p.$$

Предельному сопоставляется допускаемый момент

$$[M] = \frac{M_{\text{ПУ}}}{[s]} = \frac{\tau_y W_p}{[s]}.$$

Отсюда нетрудно получить уже известное условие прочности

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2M}{\pi[\tau]}},$$

где  $[\tau]$  – допускаемое напряжение, причем

$$[\tau] = \frac{\tau_y}{[s]}.$$



В данном случае

$$[\tau] = 144/1,8 = 80 \text{ МПа.}$$

Второй метод (метод допускаемых нагрузок) предполагает выход вала из строя в состоянии предельной пластичности. Соответствующий предельный пластический момент вычисляется из тех соображений, что по всему сечению вала наблюдается переход материала в состояние пластического деформирования:

$$M_{\text{III}} = \int_A dM = \int_A \rho \tau_y dA = \tau_y \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r \rho^2 d\rho \right) d\alpha = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_y.$$

Допускаемый момент определяется по общим правилам

$$[M_{\text{III}}] = \frac{M_{\text{III}}}{[s]} = \frac{2\pi r^3 \tau_y}{3[s]}.$$

Из этого выражения можно получить условие прочности в виде

$$r_* \geq \sqrt[3]{\frac{3M[s]}{2\pi\tau_y}}.$$

Перейдем к вычислениям, отвечающим условию задачи. Найдем

$$\begin{aligned} r &\geq \sqrt[3]{2 \cdot 200 / (3,14 \cdot 80 \cdot 10^6)} = 0,0117 \text{ м} = 11,7 \text{ мм}, \\ r_* &\geq \sqrt[3]{3 \cdot 200 \cdot 1,8 / (2 \cdot 3,14 \cdot 144 \cdot 10^6)} = 0,0106 \text{ м} = 10,6 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Таким образом, переход к вычислениям по второму методу позволяет уменьшить допускаемый поперечный размер вала в

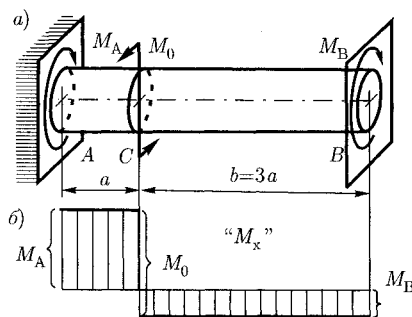
$$(11,7/10,6) = 1,104 \text{ раза,}$$

чему отвечает экономия материала в

$$(11,7/10,6)^2 = 1,22 \text{ раза.}$$

Идея расчета по допускаемым нагрузкам принята за основу в строительстве. В машиностроении такие расчеты осуществляются лишь для определения несущей способности конструкции в штатной, в частности, аварийной ситуации.

**7.18.** Защемленный по концам стержень нагружен в промежуточном сечении вращающей парой сил с моментом  $M_o = 12 \text{ кНм}$  (см. рис. а). Определить реактивные моменты  $M_A$  и  $M_B$  в опорных закреплениях, построить эпюру крутящих моментов, подобрать сечение вала из условия прочности при  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ .



К задаче 7.18

*Решение.* Зададимся направлениями реактивных моментов и составим уравнение равновесия

$$\sum m_x = M_o - M_A - M_B = 0.$$

Итак, имеем уравнение равновесия и две неизвестные реакции  $M_A$  и  $M_B$ . Следовательно, система статически неопределима. Дополнительным уравнением для определения реакций послужит, как обычно, условие совместности перемещений элементов системы. В данном случае – это равенство нулю полного угла закручивания:

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0.$$

Выразим углы  $\varphi_{AC}$  и  $\varphi_{CB}$  через соответствующие крутящие моменты:

$$\varphi_{AB} = \frac{M_A a}{GI_p} + \frac{(M_A - M_o) b}{GI_p} = 0,$$

откуда

$$M_A = M_o \frac{b}{a+b} = M_o \frac{3a}{a+3a} = \frac{3}{4} M_o = 3 \cdot 12/4 = 9 \text{ кНм}.$$

С использованием уравнения равновесия получаем также

$$M_B = M_o - M_A = \frac{1}{4} M_o = 12/4 = 3 \text{ кНм}.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. б.

Подбор сечения осуществляем по большему крутящему моменту

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2M_A}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 9000}{\pi \cdot (3,14 \cdot 80 \cdot 10^6)}} = 0,0415 \text{ м} = 41,5 \text{ мм}$$

или

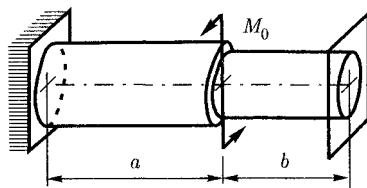
$$d = 2r \geq 2 \cdot 41,5 = 83 \text{ мм.}$$

**7.19.** На рис. изображен стержень переменного сечения, защемленный по концам. Диаметр левой части 12 мм, правой 10 мм; общая длина  $a + b = 330$  мм. На границе между участками приложен вращающий момент  $M_0$ . Определить размеры  $a$  и  $b$  из условия равнопрочности обеих частей стержня.

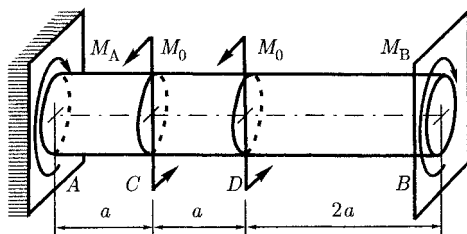
Ответ:

$$a = 180 \text{ мм,}$$

$$b = 150 \text{ мм.}$$



К задаче 7.19



К задаче 7.20

**7.20.** Стержень защемлен по концам и нагружен по схеме, данной на рис. Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру крутящих моментов, а также график нарастания углов закручивания.

Ответ:

$$M_A = 1,25M_0,$$

$$M_B = 0,75M_0.$$

**7.21.** Решить предыдущую задачу при условии, что момент в сечении  $D$  направлен в противоположную сторону.

*Ответ:*  $M_A = 0,25M_o$ ,  $M_B = -0,25M_o$ .

**7.22.** Медная трубка наружного диаметра 75 мм помещена внутри стальной трубки такого же внутреннего диаметра. Толщина стенок обеих трубок одинакова и составляет 3 мм. Концы трубок жестко скреплены между собой, а в месте скрепления приложены вращающие пары сил с моментами  $M_o$  по 1000 Нм. Длина трубок 3000 мм. Модуль сдвига для меди принять равным  $0,4 \cdot 10^{11}$  Па. Найти распределение моментов между трубками, их угол закручивания  $\varphi$  и максимальные касательные напряжения в стенках трубок.

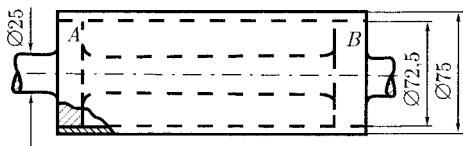
*Указание.* Обозначим  $M_m$  и  $M_c$  моменты, приходящиеся на медную и стальную трубки. Уравнение равновесия имеет вид

$$M_o = M_m + M_c.$$

Кроме того нужно принять во внимание равенство углов закручивания трубок.

*Ответ:*  $M_m = 282$  Нм,  $M_c = 718$  Нм,  $\varphi = 1,38$  град,  $\tau_m = 12$  МПа,  $\tau_c = 20$  МПа.

**7.23.** Стальной стержень круглого сечения диаметром 25 мм имеет цилиндрические выступы  $A$  и  $B$  (см. рис.). К боковым поверхностям выступов плотно прилегает стальная трубка наружным диаметром 75 мм и толщиной стенки 1,25 мм. Перед надеванием трубки стержень был нагружен парами сил с моментом  $M_o = 75$  Нм. После приварки трубки к выступам моменты  $M_o$  снимают. Определить моменты взаимодействия между стержнем и трубкой, вычислить наибольшие касательные напряжения в стержне и трубке.



К задаче 7.23

*Указание.* Выступы  $A$  и  $B$  считаются весьма жесткими. Стержень при нагружении парами сил  $M_o$  закручивается на угол  $\varphi_o$ . После удаления этих пар сил угол закручивания стержня уменьшается и станет равным разности между углом  $\varphi_o$  и углом закручивания трубки

$$\varphi_c = \varphi_o - \varphi_t.$$

Моменты взаимодействия между стержнем и трубкой равны, т.е. имеем

$$M_c = M_T.$$

Из совместного решения этих уравнений находятся сначала сами моменты  $M_c$  и  $M_T$ , а затем и касательные напряжения.

*Ответ:*  $M_c = M_T = 68,5$  Нм,  $\tau_c = 22,3$  МПа,  $\tau_T = 6,5$  МПа.

**7.24.** Решить задачу 7.18. не по методу допускаемых напряжений, а по методу допускаемых нагрузок.

*Решение.* Рассмотрим некоторые особенности процесса деформирования системы по мере роста момента  $M_o$  сверх его допускаемого значения, определяемого диаметром вала в 83 мм, найденном в задаче 7.18. Обозначим временно внешний момент  $M_o$  через  $M_{\text{внеш}}$ . С его увеличением будут возрастать реактивные моменты  $M_A$  и  $M_B$  (см. рис. к задаче 7.18). Рано или поздно возникнет состояние предельной упругости, при котором  $M_A = M_{\text{ПУ}}$ . Далее темп роста момента  $M_A$  замедляется по сравнению с темпом роста момента  $M_B$ , потому что стержень  $AC$  перейдет в состояние упругопластического деформирования. Затем этот участок достигнет состояния предельной пластичности, при котором имеем

$$M_A = M_{\text{ПП}}.$$

Далее не будет увеличения момента  $M_A$ , а момент  $M_B$  имеет резерв роста до тех пор, пока не получим

$$M_B = M_{\text{ПП}}.$$

Лишь только в этой ситуации грузоподъемность вала  $ACB$  будет исчерпана, он полностью перейдет в состояние предельной пластичности. Уравнение равновесия принимает вид

$$\sum m_x = M_{\text{внеш}} - M_A - M_B = M_{\text{внеш}} - 2M_{\text{ПП}} = 0,$$

откуда определяем реакции

$$M_A = M_B = M_{\text{ПП}} = \frac{1}{2} M_{\text{внеш}}.$$

Таким образом, в этих обстоятельствах система оказалась статически определимой.

Допускаемый внешний момент должен быть в  $[s]$  раз меньше. Получаем

$$[M_{\text{внеш}}] = M_o = \frac{M_{\text{внеш}}}{[s]} = \frac{2M_{\text{ПП}}}{[s]}.$$

Подставим сюда выражение для  $M_{\text{ПП}}$ , найденное в задаче 7.17:

$$M_o = \frac{2}{[s]} \cdot \frac{2\pi r_*^3 \tau_y}{3}.$$

Отсюда нетрудно получить

$$r_* \geq \sqrt[3]{\frac{3M_o[s]}{4\pi\tau_y}}.$$

Наконец, подставим числа

$$r_* \geq \sqrt[3]{3 \cdot 12000 \cdot 1,8 / (4 \cdot 3,14 \cdot 144 \cdot 10^6)} = 0,0330 \text{ м} = 33,0 \text{ мм}$$

**или**

$$d_* = 2r_* \geq 2 \cdot 33 = 66 \text{ мм}.$$

Полученный здесь поперечный размер вала в 1,26 раза меньше значения, найденного в задаче 7.18 по методу допускаемых напряжений. В статически определимых системах подобное соотношение составляет лишь 1,10 (см. задачу 7.17).

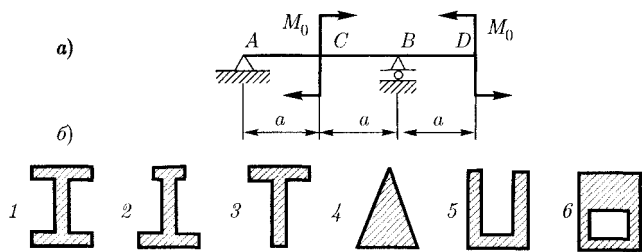
**7.25.** По условиям задачи 7.20 подобрать поперечные размеры вала как по методу допускаемых напряжений, так и по методу допускаемых нагрузок, считая  $M_o = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Принять  $\tau_y = 144 \text{ МПа}$ ,  $[s] = 1,8$ .

*Ответ:* 49,2 мм, 41,5 мм.

## Г Л А В А 8

### НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

**8.1.** На рис. *a* дана схема балки под действием внешней нагрузки в вертикальной плоскости. Балка может быть изготовлена в соответствии с одной из шести схем поперечного сечения, приведенных на рис. *б*. Найти реакции, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , изобразить примерный вид изогнутой оси балки, дать для каждого из вариантов эпюру распределения нормальных напряжений по высоте балки.



К задаче 8.1

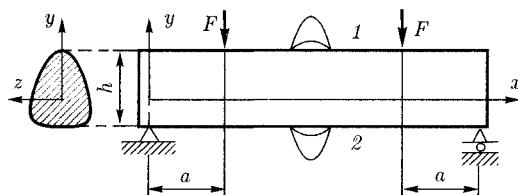
**8.2.** В качестве материала балки из предыдущего примера предполагается использовать чугун. Известно, что у чугунов предел прочности при сжатии существенно больше аналогичной характеристики при растяжении. Установить, как выгоднее расположить сечения, имеющие только одну ось симметрии.

*Ответ:* Повернуть балку так, чтобы наиболее удаленные от нейтральной оси точки сечения оказались бы в области сжатия.

**8.3.** Чугунная балка ( $E = 1,2 \cdot 10^{11}$  Па) нагружается по схеме, приведенной на рис. Сверху и снизу установлены тензометры 1 и 2. Средние приращения показаний на каждой ступени нагружения  $\Delta F = 50$  кН оказались равными  $\Delta n_1 = -15$  мм,  $\Delta n_2 = 5$  мм. Определить момент инерции сечения балки относительно оси  $z$ , проходящей через его центр тяжести, если высота сечения  $h = 240$  мм,  $a = 600$  мм, база каждого из тензометров  $l = 20$  мм, коэффициент увеличения  $k = 1000$ .

*Указание.* Нормальные напряжения в поперечном сечении балки вычисляют по формуле

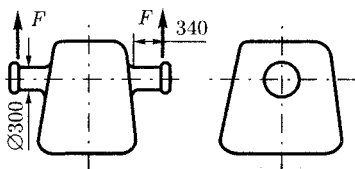
$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y,$$



К задаче 8.3

где  $M_z$  – изгибающий момент,  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения,  $y$  – расстояние от нейтральной линии до точки, в которой надлежит определить напряжение.

Ответ:  $I_z = 6000 \text{ см}^4$ .



К задаче 8.4

**8.4.** Форма для отливки стальных болванок имеет вес вместе с наполняющей ее сталью 430 кН (масса около 43 тонн). Дать оценку нормальным напряжениям в поперечном сечении шейки цапфы, см. рис.

Ответ:  $\sigma_{\max} \approx 27 \text{ МПа}$ .

**8.5.** Дверной проем перекрывается двутавровой балкой, воспринимающей вес лежащей над проемом стены  $P = 48 \text{ кН}$  (масса около 4,8 тонны). Считая балку свободно опертой по концам и принимая давление кирпичной кладки равномерно распределенным по длине пролета  $l = 3 \text{ м}$  (см. рис. а), подобрать необходимое сечение балки. Предел текучести  $\sigma_y = 288 \text{ МПа}$ , нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,8$ .

Решение. Сначала определяем допускаемое нормальное напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{[s]} = 288/1,8 = 160 \text{ МПа}.$$

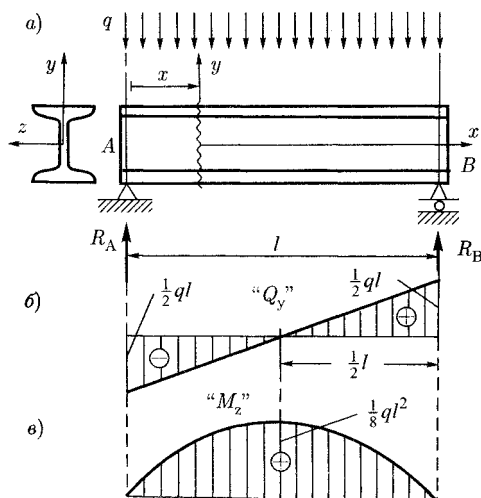
Интенсивность равномерно распределенной нагрузки (погонная нагрузка) в данном случае составляет

$$q = \frac{P}{l} = 48/3 = 16 \text{ кН/м}.$$

Из уравнений равновесия находим реакции

$$R_A = R_B = R = \frac{1}{2}ql.$$





К задаче 8.5

На расстоянии  $x$  от левой опоры проводим произвольное сечение. С этим сечением связываем ортогональную систему координат  $xyz$  (см. рис. а). Далее составляем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, возникающих в этом сечении:

$$Q_y = -R_A + qx = -\frac{1}{2}ql + qx, \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$M_z = R_A x - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2. \quad (0 \leq x \leq l)$$

Эпюры, отвечающие записанным здесь выражениям, изображены на рис. б и в. Нетрудно видеть, что опасное сечение балки находится в середине пролета, где изгибающий момент достигает экстремума:

$$M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2 = 16 \cdot 3^2 / 8 = 18 \text{ кНм.}$$

Условие прочности, соответствующее условию предельной упругости, записывается следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma],$$

откуда получаем выражение для момента сопротивления

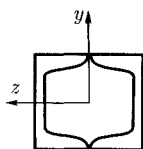
$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]}.$$

В данной задаче

$$W_z \geq 16000 / (160 \cdot 10^6) = \\ = 10^{-4} \text{ м}^3 = 100 \text{ см}^3.$$

По сортаменту двутавровых балок определяем, что подходит профиль № 16, для которого

$$W_z = 109 \text{ см}^3.$$



К задаче 8.6

**8.6.** По условиям предыдущей задачи подобрать сечение балки в виде двух одинаковых швеллеров.

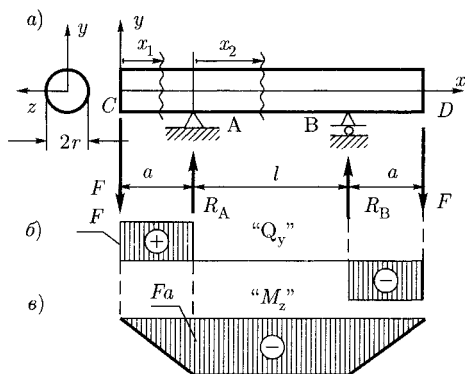
*Решение.* Ввиду симметрии балки относительно плоскости нагружения  $xy$  находим, что внешняя нагрузка распределяется поровну между каждым из этих двух стержней. Поэтому условие прочности оказывается следующим:

$$W_z \geq \frac{M}{2[\sigma]} = 16000 / (2 \cdot 160 \cdot 10^6) = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 50 \text{ см}^3.$$

По сортаменту швеллеров принимаем профиль № 12. В этом случае имеем

$$W_z = 50,6 \text{ см}^3.$$

**8.7.** Ось круглого поперечного сечения нагружена в соответствии со схемой, данной на рис. а. Подобрать сечение оси при  $F = 120 \text{ кН}$ ,  $a = 0,5 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .



К задаче 8.7

*Решение.* Из уравнений равновесия находим реакции в опорных закреплениях

$$R_A = R_B = R = F.$$

Далее займемся построением эпюр  $Q_y$  и  $M_z$ . В балке три участка:  $CA$ ,  $AB$ ,  $BD$ . На первом и втором участках изображаем произвольные сечения, выбираем местные системы координат (см. рис. *a*) и записываем выражения для поперечной силы

$$\begin{aligned} Q_{y1} &= +F = \text{const}, \\ Q_{y2} &= F - R_A = F - F = 0, \end{aligned}$$

а затем для изгибающего момента

$$\begin{aligned} M_{z1} &= -Fx, & (0 \leq x \leq a) \\ M_{z2} &= -F(x+a) + R_A x = -Fx - Fa + Fx = -Fa. & (0 \leq x \leq l) \end{aligned}$$

Соответствующие эпюры приведены на рис. *б* и *в*.

На третьем участке  $BD$  эпюры строятся аналогично, хотя можно также воспользоваться условиями симметрии.

Наибольший по модулю изгибающий момент имеет место на втором участке. Поэтому именно с этим значением составляем условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|}{W_z} \leq [\sigma].$$

Так как для осевого момента сопротивления круглого сечения известно, что

$$W_z = \frac{1}{4} \pi r^3,$$

то условию прочности можно придать вид

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{4M}{\pi[\sigma]}}.$$

Подставим числовые значения всех параметров данной задачи и получим окончательно

$$r \geq \sqrt[3]{4 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 0,5 / (3,14 \cdot 160 \cdot 10^6)} = 0,078 \text{ м} = 78 \text{ мм}$$

или

$$d = 2r \geq 2 \cdot 78 = 156 \text{ мм}.$$

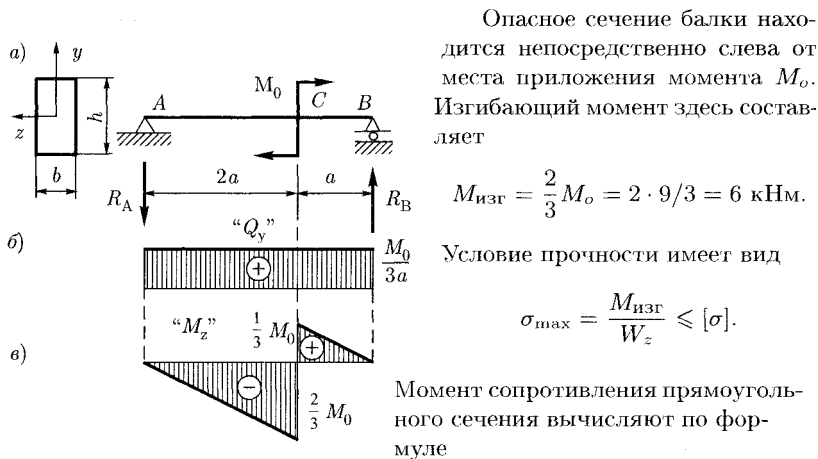
**8.8.** Стальная балка длиной  $3a = 3$  м прямоугольного сечения нагружена сосредоточенным моментом  $M_o = 9$  кНм (см. рис. *a*). Отношение высоты сечения  $h$  к ширине  $b$  предписано принять

$\gamma = h/b = 1,5$ . Подобрать размеры  $h$  и  $b$ , если допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Решение.* Реакции в шарнирных опорах направлены так, как показано на рис. а. Из уравнений равновесия находим

$$R_A = R_B = R = \frac{M_o}{3a} = 9/3 = 3 \text{ кН.}$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис. б и в. Обращаем внимание на то, что на эпюре изгибающих моментов имеется скачок, равный модулю внешнего момента  $M_o$ .



К задаче 8.8

$$W_z = \frac{1}{6} b h^2 \quad \text{или} \quad W_z = \frac{1}{6} \gamma^2 b^3,$$

если выразить  $h$  через  $b$ . С учетом полученного выражения условие прочности можно представить следующим образом:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 M_{\text{изг}}}{\gamma^2 [\sigma]}}.$$

Числовые подстановки дают

$$b \geq \sqrt[3]{6 \cdot 6000 / (1,5^2 \cdot 160 \cdot 10^6)} = 0,046 \text{ м} = 46 \text{ мм.}$$

Наконец, определяем требуемую высоту сечения

$$h = \gamma b = 1,5b = 1,5 \cdot 46 = 69 \text{ мм.}$$

**8.9.** Подземное помещение (см. рис.) шириной  $l = 3,2$  м перекрыто накатом из круглых сосновых бревен, для которых допускаемое напряжение в расчетах на изгиб предписывается принимать  $[\sigma] = 8,5$  МПа. Над перекрытием расположен слой грунта толщиной  $H = 1,8$  м, плотность которого  $\rho = 1700$  кг/м<sup>3</sup>. Пренебрегая собственным весом бревен, подобрать их диаметр.

*Указание.* Для расчета выделить участок длины перекрытия, равный диаметру бревна.

*Ответ:*  $d \geq 220$  мм.

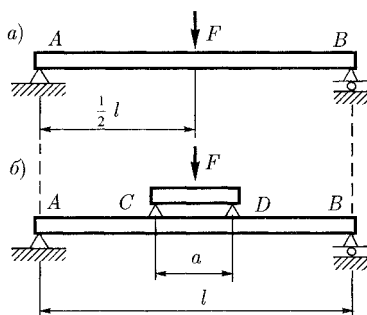
**8.10.** Проем в стене проектируется перекрыть двумя балками двутаврового сечения № 12. Затем было решено заменить их одной балкой большего сечения. Определить номер двутавра и выяснить, какое из решений экономичнее.

*Ответ:* Двутавр № 18. Это решение дает около 30% экономии металла.

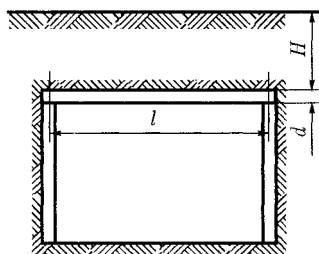
**8.11.** Деревянные балки пролетом  $l = 6$  м спроектированы из брусьев квадратного сечения со стороной  $b = 200$  мм. На стройке их решено заменить круглыми бревнами. Какой следует выбрать диаметр бревна, чтобы обеспечить проектную прочность?

*Ответ:* 233 мм.

**8.12.** Балка  $AB$  на двух шарнирных опорах нагружена силой  $F$  в середине пролета, рис. а. Наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении оказались в 1,3 раза больше допускаемых. Для устранения перенапряжения вводится вспомогательная балка  $CD$ , рис. б. Определить длину этой балки.



К задаче 8.12



К задаче 8.9

*Решение.* При нагружении по первому варианту имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Fl}{4W_z} \leq 1,3[\sigma].$$

При нагружении по второму варианту должны получить

$$\sigma_{\max}^* = \frac{M_c}{W_z} = \frac{F}{2W_z} \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) = \frac{Fl}{4W_z} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) = [\sigma].$$

Разделим второе уравнение на первое. Найдем

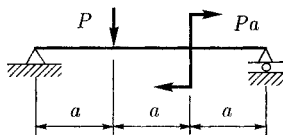
$$1 - \frac{a}{l} = 1/1,3,$$

откуда

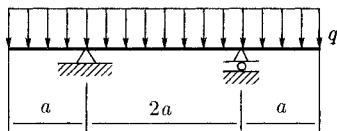
$$a = 0,231l.$$

**8.13.** Двухтавровая балка № 30 нагружена по схеме, изображенной на рис. Определить допускаемое значение параметра  $P$ , если  $a = 2$  м,  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Ответ:*  $P = 62$  кН.



К задаче 8.13

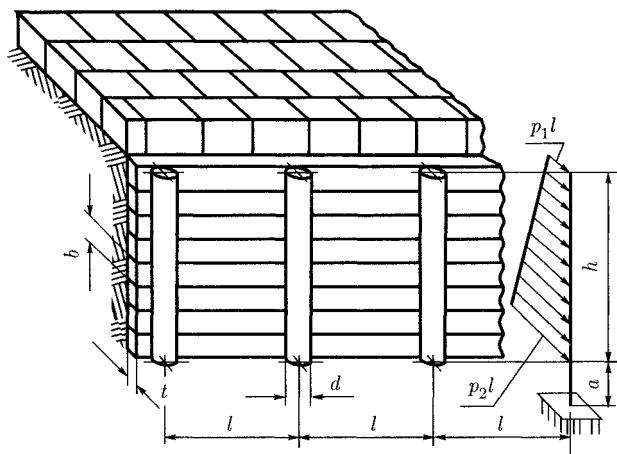


К задаче 8.14

**8.14.** Подобрать двухтавровое сечение балки с двумя консолями, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q = 20$  кН/м (см. рис.), если вылет консоли  $a = 2$  м, пролет  $l = 2a = 4$  м, а допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Ответ:* Двухтавр № 22.

**8.15.** Основу подпорной стенки составляет ряд вертикальных свай, вбитых в грунт с шагом  $l = 1,2$  м (см. рис.). Высота стенки  $h = 1,5$  м. Площадь стенки зашита досками шириной  $b$  и толщиной  $t$  (см. рис.). Удельное давление на подпорную стенку возрастает с глубиной по линейному закону от  $p_1 = 5$  кН/м<sup>2</sup> = 5 кПа (от действия нагрузки, возвышающейся над стенкой) до  $p_2 = 18$  кН/м<sup>2</sup> = 18 кПа. Вследствие податливости грунта место защемления (заделки) сваи принимается ниже уровня грунта на расстоянии  $a = 0,25$  м (см. рис.). Подобрать диаметр  $d$  сваи и толщину  $t$  доски при допускаемом напряжении  $[\sigma] = 10$  МПа. Доски обшивки рассматривать как балки, шарнирно опирающиеся на сваи. Принять для определенности ширину доски  $b = 0,20$  м.



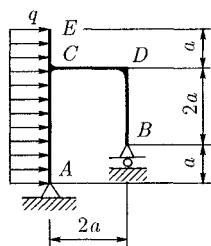
К задаче 8.15

*Указание.* Каждая промежуточная свая воспринимает давление от части обшивки площадью  $\omega = hl$ . Следовательно, интенсивность распределенной нагрузки на сваю (погонная нагрузка) изменяется по высоте сваи от  $q_1 = p_1 l$  до  $q_2 = p_2 l$ . Подсчитав  $M_{\max}$ , подбирают сечение сваи. Что касается обшивки, то в невыгоднейших условиях находится нижняя доска. Расчетная схема здесь – это балка на двух шарнирных опорах пролетом  $l$ , нагруженная равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q_b = p_2 b$ . В самом деле, давление на один квадратный метр равно  $p_2$ , а на один погонный метр при ширине доски  $b$  – в  $b$  раз больше.

*Ответ:*  $d \geq 0,260$  м,  $t \geq 0,044$  м.

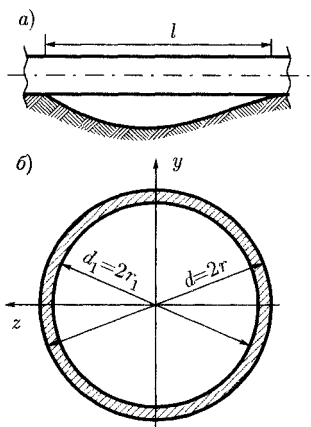
**8.16.** На рис. изображена схема рамы. На стойке  $ACE$  укреплена обшивка (на рис. не показана), воспринимающая давление ветра. В итоге эта стойка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q = 5$  кН/м. Стойки  $ACE$  и  $BD$ , а также ригель  $CD$  проектируются из двух одинаковых швеллеров. Из условия прочности на изгиб определить необходимый номер швеллера, если  $a = 2$  м, а допускаемое напряжение  $[\sigma] = 140$  МПа.

*Ответ:* Два швеллера № 36.



К задаче 8.16

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ



К задаче 9.1

**9.1.** Стальная труба, наполненная водой, перекрывает пролет  $l = 12$  м (см. рис. а). Рассматривая трубу как балку, шарнирно опертую по концам, определить наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении, если наружный диаметр трубы  $d = 250$  мм, внутренний  $d_1 = 230$  мм (рис. б).

*Указание.* В ходе решения задачи потребуется вычислить момент сопротивления  $W_z$  относительно нейтральной оси  $z$  (см. рис. б). Как известно,

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

где  $I_z$  — момент инерции сечения относительно оси  $z$ ,  $y_{\max}$  — расстояние, измеренное от нейтральной оси  $z$  до наиболее удаленной от нее точки сечения; в данном случае

$$y_{\max} = r = \frac{1}{2}d.$$

Можно найти, что ввиду симметрии сечения его осевой момент инерции  $I_z$  равен половине полярного момента инерции  $I_p$ , т.е.

$$I_z = \frac{1}{2}I_p.$$

Так как ранее получено, что

$$I_p = \frac{1}{2}\pi r^4(1 - \alpha^4),$$

то имеем

$$I_z = \frac{1}{4}\pi r^4(1 - \alpha^4),$$

где  $\alpha$  — отношение внутреннего поперечного размера трубы к наружному:

$$\alpha = \frac{r_1}{r} = \frac{d_1}{d}.$$



Полученную здесь формулу для  $I_z$  можно интерпретировать так: момент инерции трубы равен разности между моментом инерции сплошного сечения радиуса  $r$  и моментом инерции отверстия радиуса  $r_1$ .

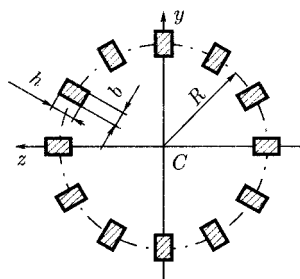
Наконец, для осевого момента сопротивления можно получить

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{r} = \frac{1}{4} \pi r^3 (1 - \alpha^4).$$

Ответ:  $\sigma_{\max} = 41$  МПа.

**9.2.** Сечение балки образовано из  $n$  одинаковых стержней прямоугольного профиля со сторонами  $b$  и  $h$  (см. рис.).

Продольные оси стержней расположены по цилиндрической поверхности радиуса  $R$  с равным шагом. Поперечные размеры  $b$  и  $h$  сечения стержня существенно меньше радиуса  $R$ . Стержни связываются друг с другом с помощью колец, расположенных на некотором расстоянии по длине цилиндра. Именно благодаря этому можно рассматривать указанную конструкцию как балку. Найти формулу для вычисления осевого момента сопротивления  $W_z$ , если число  $n$  достаточно велико.



К задаче 9.2

*Решение.* Для полярного момента инерции имеем в данном случае

$$I_p = \sum_{i=1}^n R^2 A_i = nbhR^2.$$

Далее вычисляем осевой момент инерции

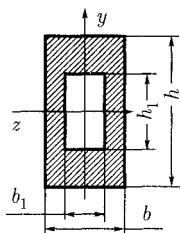
$$I_z = \frac{1}{2} I_p = \frac{1}{2} nbhR^2,$$

а затем и осевой момент сопротивления

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \left( \frac{1}{2} nbhR^2 \right) : \left( R + \frac{1}{2} h \right) = \frac{nbhR^2}{2R + h} \approx \frac{1}{2} nbhR.$$

**9.3.** Пустотелая балка прямоугольного поперечного сечения пролетом  $l = 4$  м свободно опёрта по концам. Какую сосредоточенную силу  $F$  можно безопасно приложить в середине пролёта в вертикальной плоскости при допускаемом напряжении  $[\sigma] = 50$  МПа? Размеры сечения:  $b_1 = 60$  мм,  $b = 120$  мм,  $h_1 = 120$  мм,  $h = 240$  мм.

*Указание.* В процессе решения задачи вычисляем момент инерции как разность между моментом инерции сплошного сечения и моментом инерции отверстия



К задаче 9.3

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{12}b_1h_1^3 = \\ &= (0,12 \cdot 0,24^3 - 0,06 \cdot 0,12^3)/12 = \\ &= 12960 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 12960 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

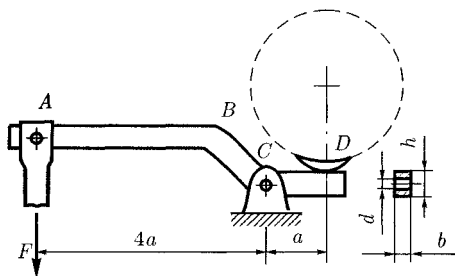
а затем определяем момент сопротивления

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = 12960/12 = 1080 \text{ см}^3.$$

Далее в балке определяются реакции, строятся эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , вычисляется изгибающий момент в опасном сечении, после чего из условия прочности отыскивается значение допускаемой силы  $F$ .

*Ответ:*  $F = 54 \text{ кН}$ .

**9.4.** Тормозное устройство состоит из тяги и ломаного рычага  $ABCD$ , свободно поворачивающегося вокруг шарнирного болта в точке  $C$  (см. рис.). При торможении в тяге развивается усилие  $F = 1,5 \text{ кН}$ , вследствие чего тормозная колодка прижимается к колесу в точке  $D$ . Определить напряжения, возникающие в опасном сечении рычага, ослабленном болтовым отверстием, если высота сечения  $h = 60 \text{ мм}$ , ширина  $b = 20 \text{ мм}$ , отверстие под болт имеет диаметр  $d = 30 \text{ мм}$ .



К задаче 9.4

*Указание.* Момент инерции  $I_z$  поперечного сечения рычага надлежит подсчитать как разность момента инерции сплошного сечения и момента инерции отверстия.

*Ответ:*  $\sigma_{\max} = 143 \text{ МПа}$ .

**9.5.** Деревянная балка составлена из трех одинаковых досок, склеенных между собой в виде двутавра (см. рис. а.). Определить моменты инерции и моменты сопротивления относительно главных центральных осей  $y$  и  $z$ , если размеры сечения каждой доски составляют  $50 \times 240$  мм.

*Решение.* Единое сечение мысленно подразделяем на три части с площадями  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  (рис. б). Центры тяжести каждой из этих частей обозначим через  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  (рис. б). С центром тяжести каждой из частей свяжем так называемые собственные оси координат  $y_1 z_1$ ,  $y_2 z_2$ ,  $y_3 z_3$ , параллельные главным центральным осям  $yz$  единого сечения. При вычислении момента инерции  $I_z$  следует воспользоваться формулой преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей

$$I_z = \sum_{i=1}^n (I_{z_i}^{\text{соб}} + a_i^2 A_i),$$

где  $I_{z_i}^{\text{соб}}$  – момент инерции  $i$ -й площади относительно собственной оси  $z_i$ ,  $A_i$  – площадь  $i$ -й фигуры,  $a_i$  – расстояние между осями  $z$  и  $z_i$ ,  $n$  – количество частей, на которые подразделяется единое сечение.

В данной задаче

$$A_1 = A_2 = A_3 = 5 \cdot 24 = 120 \text{ см}^4,$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a_3 = 14,5 \text{ см},$$

$$I_{z_1} = 5 \cdot 24^3 / 12 = 5760 \text{ см}^4,$$

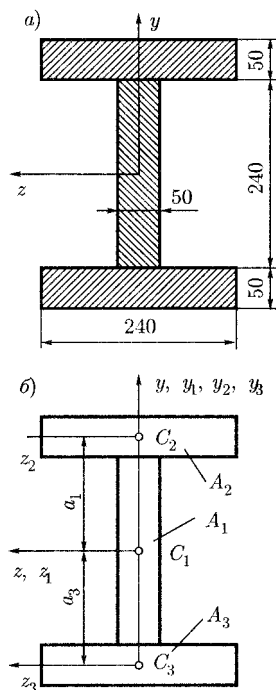
$$I_{z_2} = I_{z_3} = 24 \cdot 5^3 / 12 = 250 \text{ см}^4.$$

Подстановка всех этих чисел в предыдущую формулу суммирования дает

$$I_z = 5760 + 2 \cdot 250 + 2 \cdot 14,5^2 \cdot 120 = 56720 \text{ см}^4.$$

При вычислении момента инерции  $I_y$  просто складываем собственные моменты инерции  $I_{y_i}$ , потому что в данной ситуации нет параллельного переноса осей  $y_i$ :

$$I_y = 250 + 2 \cdot 5760 = 11770 \text{ см}^4.$$



К задаче 9.5

Моменты сопротивления единого сечения составляют:

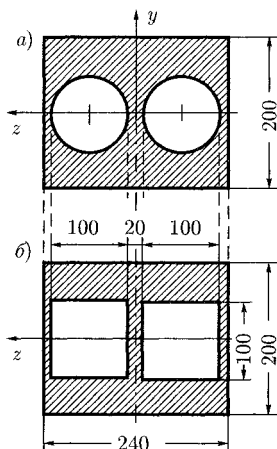
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = 56720/17 = 3336 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = 11770/12 = 981 \text{ см}^3.$$

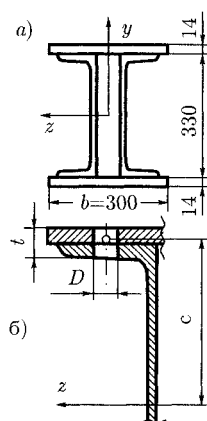
**9.6.** Вычислить главные центральные моменты инерции двухканальной трубы прямоугольного очертания, запроектированной в двух вариантах: а) с двумя круглыми отверстиями диаметром каждое  $d = 100$  мм; б) с двумя квадратными отверстиями размером  $100 \times 100$  мм каждое. Размеры сечений даны на рис.

*Указание.* При вычислении момента инерции  $I_z$  необходимо из момента инерции сплошного сечения вычесть сумму моментов инерции отверстий. Определяя момент инерции  $I_y$ , нужно из момента инерции сплошного сечения вычесть не только сумму моментов инерции отверстий, но также еще и сумму двух слагаемых, отвечающих параллельному переносу осей.

*Ответ:* а)  $I_z = 15000 \text{ см}^4$ ,  $I_y = 16400 \text{ см}^4$ ; б)  $I_z = 14300 \text{ см}^4$ ,  $I_y = 14200 \text{ см}^4$ .



К задаче 9.6



К задаче 9.7

**9.7.** Составная балка из двух швеллеров № 33, перекрытых листами  $300 \times 14$  мм (см. рис. а), проектируется в двух вариантах: а) сварной – с прикреплением листов к полкам швеллеров фланговыми швами; б) клепаный – с присоединением листов к полкам

швеллеров при помощи заклепок диаметром  $D = 23$  мм. Вычислить момент инерции и момент сопротивления относительно оси  $z$  для обоих вариантов и сравнить полученные результаты.

*Указание.* Для учета ослабления сечения заклепочными отверстиями следует подсчитать момент инерции четырех заклепочных отверстий (см. рис. б) относительно оси  $z$  по формуле

$$\Delta I_z = 4 \left( \frac{1}{12} D t^3 + D t c^2 \right).$$

Далее определяется момент инерции ослабленного сечения

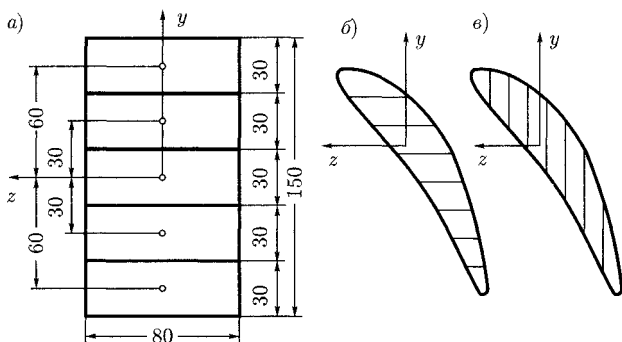
$$I_z^* = I_z - \Delta I_z,$$

где  $I_z$  – момент инерции балки по первому варианту.

Обращаем внимание, что слагаемым  $D t^3/12$  можно пренебречь по сравнению со слагаемым  $D t c^2$  (проверить!).

*Ответ:* а)  $I_z = 40800 \text{ см}^4$ ,  $W_z = 2280 \text{ см}^3$ ; б)  $I_z^* = 34300 \text{ см}^4$ ,  $W_y^* = 1920 \text{ см}^3$ .

**9.8.** Осевой момент инерции  $I_z$  прямоугольника вычислить, разбивая его на пять равновеликих полос, длинные стороны которых параллельны оси  $z$  (см. рис. а). Насколько уменьшится результат, если пренебречь слагаемыми, соответствующими собственным моментам инерции полос?



К задаче 9.8

*Решение.* Сначала вычислим момент инерции напрямую:

$$I_z = 8 \cdot 15^3 / 12 = 2250 \text{ см}^4,$$

а затем указанным в условии задачи способом:

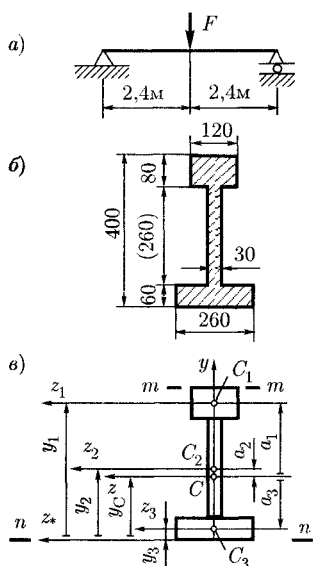
$$\begin{aligned} I_z &= 5(8 \cdot 3^3/12) + 2 \cdot 3^2(3 \cdot 8) + 2 \cdot 6^2(3 \cdot 8) = \\ &= 90 + 432 + 1728 = 2250 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Если же опустить слагаемые, отвечающие собственным моментам инерции полос, то относительная погрешность составит

$$\delta = 90/2250 = 0,04 = 4\%.$$

При разбивке исследуемой фигуры на 10 полос погрешность не превысит 0,5%, что вполне допустимо в инженерных расчетах.

Описанный здесь прием приближенного вычисления моментов инерции используют, например, в случае вычисления  $I_z$  и  $I_y$  для поперечного сечения пера лопатки паровой или газовой турбины (рис. б и в).



К задаче 9.9

**9.9.** Чугунная балка, лежащая на двух опорах и нагруженная силой  $F$  в середине пролета (рис. а), имеет поперечное сечение, показанное на рис. б. Для данной марки чугуна заданы допускаемые напряжения на сжатие и на растяжение:  $[\sigma_{u,c}] = 100$  МПа,  $[\sigma_{u,t}] = 30$  МПа. Определить допускаемое значение силы  $F$ .

*Решение.* Центр тяжести  $C$  всего сечения лежит на оси симметрии сечения, т.е. на оси  $y$  (рис. в). Далее очевидным образом разбиваем сечение на три части, берем вспомогательную ось  $z_*$  (рис. в), а затем определяем расстояние  $y_C$  от этой оси до центра тяжести  $C$  всей фигуры:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum S_{z_*}}{A} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \\ &= (36(8 \cdot 12) + 19(26 \cdot 3) + 3(6 \cdot 26)) / \\ &\quad / (96 + 78 + 156) = 16,4 \text{ см}. \end{aligned}$$

Нейтральной осью сечения будет ось  $z$ , проходящая через центр тяжести  $C$ . Относительно этой оси (называемой также центральной) вычисляем момент инерции  $I_z$  как сумму моментов инерции всех прямоугольников

при параллельном переносе осей:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \sum (I_{z_i}^{\text{соб}} + a_i^2 A_i) = \\
 &= 12 \cdot 8^3 / 12 + 19,6^2 \cdot 96 + 3 \cdot 26^3 / 12 + \\
 &\quad + 2,6^2 \cdot 78 + 26 \cdot 6^3 / 12 + (-13,4)^2 \cdot 156 = \\
 &= 70796 \approx 70800 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

В условии задачи указан материал, который различным образом сопротивляется в условиях сжатия и растяжения. Поэтому вводим два момента сопротивления

$$\begin{aligned}
 W_z^m &= \frac{I_z}{y_m} = 70800 / 23,6 = 3000 \text{ см}^3, \\
 W_z^n &= \frac{I_z}{y_n} = 70800 / 16,4 = 4317 \text{ см}^3.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в данном случае несущая способность балки лимитируется условием прочности на растяжение

$$\sigma_n = \frac{M_{\max}}{W_z^n} = \frac{F l}{4 W_z^n} \leq [\sigma_{u, t}],$$

откуда

$$\begin{aligned}
 F &\leq \frac{4 W_z^n [\sigma_{u, t}]}{l} = 4 \cdot 4317 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^6 / 4,8 = \\
 &= 107,9 \cdot 10^3 \text{ Н} = 107,9 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

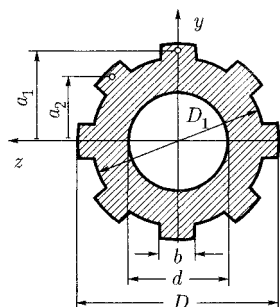
Наибольшие по модулю нормальные напряжения в сжатой части сечения вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_m &= -\frac{[F] l}{4 W_z^m} = \\
 &= -107,9 \cdot 10^3 \cdot 4,8 / (4 \cdot 3000 \cdot 10^{-6}) = \\
 &= -43 \cdot 10^6 \text{ Па} = -43 \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$

**9.10.** Найти момент инерции  $I_z$  для сечения полого вала со шлицами, если  $D = 52$  мм,  $D_1 = 47$  мм,  $d = 26$  мм,  $b = 9$  мм (см. рис.).

*Указание.* Задача может быть решена несколькими способами. Можно, например, к моменту инерции  $I_z^*$  полого вала с удаленными шлицевыми выступами прибавить моменты инерции этих площадей  $A_{\text{ш}}$  (с учетом параллельного переноса осей):

$$I_z \cong I_z^* + 2a_1^2 A_{\text{ш}} + 4a_2^2 A_{\text{ш}}.$$



К задаче 9.10





*Решение.* Выделим элементарную полоску площадью  $dA = b(y_*)dy_*$  (см. рис.). Далее для вычисления осевого момента инерции составим интеграл

$$I_{z_*} = \int_A y_*^2 dA = \int_0^h y_*^2 b(y_*) dy_*.$$

Так как для переменной ширины имеем

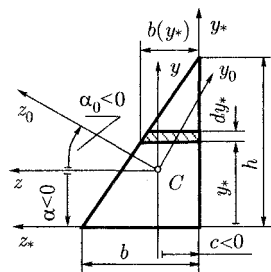
$$b(y_*) = \frac{b}{h}(h - y_*),$$

то интегрирование дает

$$I_{z_*} = \frac{1}{12}bh^3.$$

Аналогично можно найти

$$I_{y_*} = \frac{1}{12}b^3h.$$



К задаче 9.12

Центробежный момент инерции также найдем путем непосредственного интегрирования (с той же подстановкой для переменной ширины):

$$I_{y_*z_*} = \int_A y_* z_* dA = \int_0^h y_* \cdot \frac{b(y_*)}{2} \cdot b(y_*) dy_* = \dots = \frac{1}{24}b^2h^2.$$

После этого выпишем формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$I_{y_*} = I_y + c^2 A, \quad I_{z_*} = I_z + a^2 A, \quad I_{y_*z_*} = I_{yz} + acA.$$

С помощью этих формул получаем

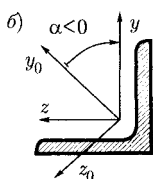
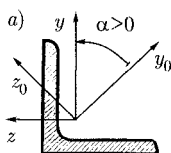
$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_*} - c^2 A = \frac{1}{12}hb^3 - \left(\frac{1}{3}b\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{1}{36}hb^3, \\ I_z &= I_{z_*} - a^2 A = \frac{1}{12}b^3h - \left(\frac{1}{3}h\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{1}{36}b^3h, \\ I_{yz} &= I_{y_*z_*} - acA = \frac{1}{24}b^2h^2 - \left(-\frac{1}{3}h\right) \left(-\frac{1}{3}b\right) \cdot \frac{1}{2}bh = -\frac{1}{72}b^2h^2. \end{aligned}$$

Угол наклона главных осей к осям начального направления определим стандартным путем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_o &= -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = -\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{72}b^2h^2\right)\right) : \left(\frac{1}{36}hb^3 - \frac{1}{36}b^3h\right) = \\ &= -\frac{bh}{h^2 - b^2} < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае главные оси  $y_0$  и  $z_0$  повернуты относительно осей  $y$  и  $z$  по часовой стрелке, потому что угол поворота  $\alpha_0$  отрицателен (см. рис.).

**9.13.** Найти центробежный момент инерции  $I_{yz}$  площади сечения равнополочного прокатного уголка  $125 \times 125 \times 10$  относительно центральных осей  $y$  и  $z$ , параллельных полкам (рис. а.). Как изменится момент инерции  $I_{yz}$ , если повернуть сечение вокруг вертикали на  $180^\circ$  (горизонтальной полкой влево, см. рис. б) ?



*Решение.* Если принять в качестве исходных главные оси  $y_0$  и  $z_0$ , то формула преобразования центробежного момента инерции при повороте осей принимает вид

$$I_{yz} = \frac{1}{2} (I_{y_0} - I_{z_0}) \sin 2\alpha.$$

К задаче 9.13

Обращаясь к сортаменту прокатной стали (см. приложение), можно

найти

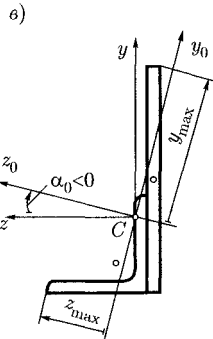
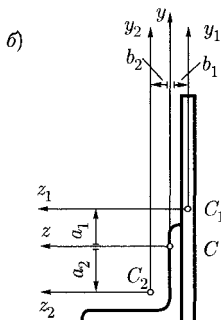
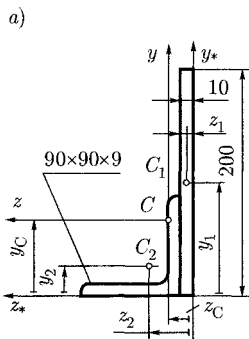
$$I_{yz} = \frac{1}{2} (571 - 149) \sin(2(+45^\circ)) = 211 \text{ см}^4.$$

Для сечения, повернутого полкой влево, имеем

$$I_{yz} = -211 \text{ см}^4,$$

потому что в этом случае

$$\alpha = -45^\circ.$$



К задаче 9.14

**9.14.** Определить координаты центра тяжести сечения, составленного из прямоугольника  $200 \times 10$  мм и равнополочного прокатного уголка  $90 \times 90 \times 9$  (см. рис. а). Найти положение главных централь-

ных осей инерции, вычислить главные моменты инерции, а также соответствующие моменты сопротивления.

*Решение.* 1. Определение координат центра тяжести сечения.

Выбрав вспомогательные оси  $y_*$  и  $z_*$ , подсчитаем статические моменты сечения

$$S_{y_*} = z_1 A_1 + z_2 A_2 = 0,5(20 \cdot 1) + 3,55(15,6) = 65,4 \text{ см}^3,$$

$$S_{z_*} = y_1 A_1 + y_2 A_2 = 10 \cdot 20 + 2,55 \cdot 15,6 = 239,8 \text{ см}^3.$$

Расстояния от осей  $z_*$  и  $y_*$  до центра тяжести  $C$  сечения (см. рис. б)

$$y_c = \frac{S_{z_*}}{A_1 + A_2} = 239,8/35,6 = 6,74 \text{ см},$$

$$z_c = \frac{S_{y_*}}{A_1 + A_2} = 65,4/35,6 = 1,84 \text{ см}.$$

2. Определение осевых и центробежных моментов инерции относительно центральных осей начального направления.

С центром тяжести  $C$  сечения свяжем оси  $y$  и  $z$ , параллельные осям  $y_*$  и  $z_*$ , а затем вычислим осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно этих осей, используя формулы перехода к параллельным осям. Вычисления удобно свести в таблицу. Понятия величин  $a_i$  и  $b_i$  поясняются на рис. б.

| №№     | $A_i$           | $a_i$           | $b_i$                              | $I_{z_i}^{cob}$     | $a_i^2 A_i$     | $I_{z_i}^{cob} +$<br>$+ a_i^2 A_i$       |
|--------|-----------------|-----------------|------------------------------------|---------------------|-----------------|------------------------------------------|
|        | см <sup>2</sup> | см              | см                                 | см <sup>4</sup>     | см <sup>4</sup> | см <sup>4</sup>                          |
|        | 1               | 2               | 3                                  | 4                   | 5               | 6                                        |
| 1      | 20              | 3,26            | -1,34                              | 667                 | 212             | 879                                      |
| 2      | 15,6            | -4,19           | 1,71                               | 118                 | 274             | 392                                      |
| Итого: |                 |                 |                                    |                     |                 | 1271                                     |
| №№     | $I_{y_i}^{cob}$ | $b_i^2 A_i$     | $I_{y_i}^{cob} +$<br>$+ b_i^2 A_i$ | $I_{y_i z_i}^{cob}$ | $a_i b_i A_i$   | $I_{y_i z_i}^{cob} +$<br>$+ a_i b_i A_i$ |
|        | см <sup>4</sup> | см <sup>4</sup> | см <sup>4</sup>                    | см <sup>4</sup>     | см <sup>4</sup> | см <sup>4</sup>                          |
|        | 7               | 8               | 9                                  | 10                  | 11              | 12                                       |
| 1      | ≈2              | 36              | 38                                 | 0                   | -87             | -87                                      |
| 2      | 118             | 46              | 164                                | -69                 | -112            | -181                                     |
| Итого: |                 |                 | 202                                |                     |                 | -268                                     |

*Примечание.* Порядок вычисления  $I_{y_2 z_2}^{cob} = -69 \text{ см}^4$  поясняется в предыдущей задаче 9.13.

Таким образом,  $I_z = 1271 \text{ см}^4$ ,  $I_y = 202 \text{ см}^4$ ,  $I_{yz} = -268 \text{ см}^4$ .

3. Вычисление главных центральных моментов инерции.

Угол наклона главных осей инерции к осям  $y$  и  $z$  определяется из условия

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = -2(-268)/(202 - 1271) = -0,5014.$$

Отсюда

$$2\alpha_o = -26,63^\circ, \quad \alpha_o = -13,31^\circ, \quad \sin 2\alpha_o = -0,4482, \quad \cos 2\alpha_o = 0,8939.$$

Далее воспользуемся формулами преобразования моментов инерции при повороте осей координат:

$$\begin{aligned} I_{y_o} &= \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cos 2\alpha_o - I_{yz} \sin 2\alpha_o = \\ &= 0,5(202 + 1271) + 0,5(202 - 1271) \cdot 0,8939 - \\ &\quad - (-268)(-0,4482) = 138,6 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{z_o} &= \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cos 2\alpha_o + I_{yz} \sin 2\alpha_o = \\ &= 0,5(202 + 1271) - 0,5(202 - 1271) \cdot 0,8939 + \\ &\quad + (-268)(-0,4482) = 1334,4 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Обычно здесь осуществляют две проверки арифметических выкладок. Первая основана на том, что сумма осевых моментов инерции не изменяется при повороте осей координат. В данной задаче имеем

$$I_y + I_z = 202 + 1271 = 1473 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_o} + I_{z_o} = 138,6 + 1334,4 = 1473 \text{ см}^4.$$

Вторая проверка использует то обстоятельство, что центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю:

$$\begin{aligned} I_{y_o z_o} &= \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\alpha_o + I_{yz} \cos 2\alpha_o = \\ &= 0,5(202 - 1271)(-0,4482) + (-268) \cdot 0,8939 = \\ &= 239,6 - 239,6 = 0. \end{aligned}$$

Напомним, что главные моменты инерции можно найти также по следующим формулам:

$$I_{\max, \min} = \frac{1}{2} \left( I_y + I_z \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right).$$

Положение главных осей инерции показано на рис. 6. Отметим, что оси  $y_o$  и  $z_o$  повернуты относительно осей  $y$  и  $z$  по часовой стрелке на угол  $\alpha_o = -13,31^\circ$ .

4. Вычисление моментов сопротивления относительно главных осей инерции.

Моменты сопротивления вычислим по известным формулам

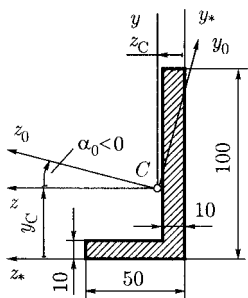
$$W_{y_o} = \frac{I_{y_o}}{z_{max}} = 138,6/5,6 = 24,7 \text{ см}^3,$$

$$W_{z_o} = \frac{I_{z_o}}{y_{max}} = 1334,4/13,3 = 100,3 \text{ см}^3.$$

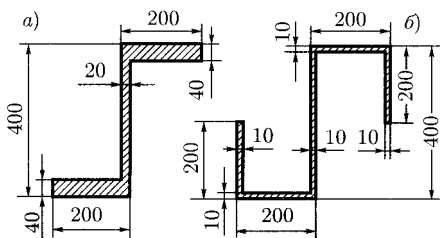
Координаты  $y_{max}$  и  $z_{max}$  тех точек, которые наиболее удалены от осей  $z_o$  и  $y_o$  (см. рис. 6), удобнее всего определять графически, тщательно вычерчивая схему сечения в надлежащем масштабе.

**9.15.** Определить координаты центра тяжести сечения неравнополочного уголка, показанного на рис.; найти положение главных центральных осей и вычислить моменты инерции относительно этих осей.

*Ответ:*  $y_c = 3,7 \text{ см}$ ,  $z_c = 1,2 \text{ см}$ ,  $\alpha_o = -14,38^\circ$ ,  $I_{y_o} = 15,7 \text{ см}^4$ ,  $I_{z_o} = 150 \text{ см}^4$ .



К задаче 9.15

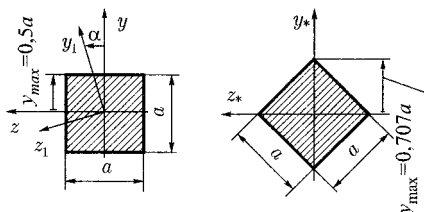


К задаче 9.16

**9.16.** На рис. приведены два варианта зетового сечения балки: толстостенного (а) и тонкостенного с отбортованными полками (б). Найти положение главных центральных осей инерции, определить моменты инерции относительно этих осей.

*Ответ:* а)  $\alpha_o = -26,42^\circ$ ,  $I_{y_o} = 5400 \text{ см}^4$ ,  $I_{z_o} = 70400 \text{ см}^4$ ;  
б)  $\alpha_o = -31,25^\circ$ ,  $I_{y_o} = 6000 \text{ см}^4$ ,  $I_{z_o} = 78100 \text{ см}^4$ .

**9.17.** Выяснить, как изменятся момент инерции и момент сопротивления квадратного сечения относительно горизонтальной оси, если сечение повернуть на угол  $45^\circ$  (см. рис.).



К задаче 9.17

*Решение.* Квадрат обладает свойством симметрии не только относительно осей  $y$  и  $z$  (осевая симметрия), но и относительно центра тяжести  $C$  (центральная симметрия). Из первого следует, что оси  $y$  и  $z$  — главные. Поэтому центробежный момент инерции обращается в нуль  $I_{yz} = 0$ . Из второго вытекает равенство  $I_y = I_z = a^4/12$ . Благодаря этому формула преобразования центробежного момента инерции в данном случае вырождается:

$$I_{y_1 z_1} = \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha = 0.$$

Таким образом, в квадрате любые центральные оси  $y_1$  и  $z_1$  главные, причем

$$I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{1}{12}a^4.$$

Обратимся к моментам сопротивления. В первом варианте имеем

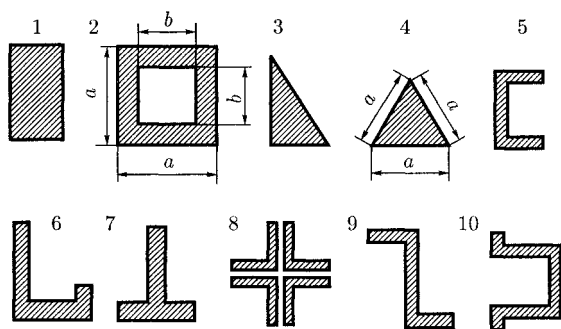
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{a^4}{12(0,5a)} = \frac{1}{6}a^3 = 0,1667a^3,$$

во втором

$$W_{z_*} = \frac{I_{z_*}}{y_{\max}} = \frac{a^4}{12(0,707a)} = 0,1178a^3,$$

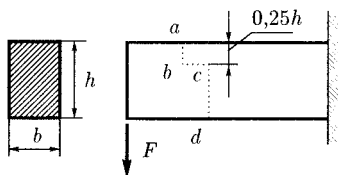
что меньше предыдущего значения на 41%.

**9.18.** Показать примерное расположение главных центральных осей инерции для каждой из фигур, изображенных на рис.



К задаче 9.18

# КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ



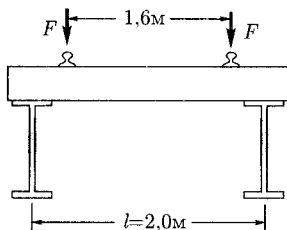
К задаче 10.1

К задаче 10.1. Показать направление касательных напряжений, возникающих в ступенчатом разрезе  $abcd$  балки прямоугольного сечения, заделанной одним концом и нагруженной на свободном конце силой  $F = 32$  кН (см. рис.). Определить значение касательных напряжений по площадке  $bc$ , если высота и ширина сечения составляют  $h = 200$  мм,  $b = 120$  мм.

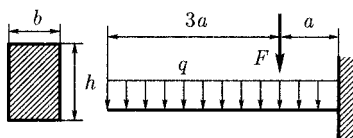
Ответ:  $\tau = 1,5$  МПа.

10.2. Определить максимальные нормальные и касательные напряжения в опасном сечении мостового бруса под давлением колес локомотива  $F = 96$  кН на каждый рельс (см. рис.). Размеры сечения бруса:  $h = 280$  мм,  $b = 200$  мм. Считать, что брус опирается шарнирно на продольные балки моста и имеет пролет  $l = 2$  м.

Ответ:  $\sigma_{\max} \approx 7$  МПа,  $\tau_{\max} \approx 2,5$  МПа.



К задаче 10.2



К задаче 10.3

10.3. Подобрать прямоугольное сечение деревянной балки, защемленной одним концом и нагруженной, как показано на схеме. В ходе решения принять  $h : b = 3 : 2$ ,  $a = 0,25$  м,  $q = 10$  кН/м,  $F = 100$  кН,  $[\sigma] = 10$  МПа,  $[\tau] = 1,2$  МПа.

Ответ:  $b = 170$  мм,  $h = 255$  мм.

10.4. Сравнить два варианта а) и б) трубчатого прямоугольного сечения балки, нагруженной в вертикальной плоскости, исходя из



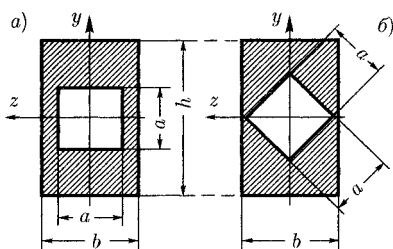
условий прочности по нормальным и по касательным напряжениям. Размеры сечения:  $b = 120$  мм,  $h = 200$  мм,  $a = 80$  мм (см. рис.).

*Ответ:* По нормальным напряжениям оба варианта равноопасны; по касательным – более выгоден вариант а) ( $\tau_b : \tau_a = 5,73$ ).

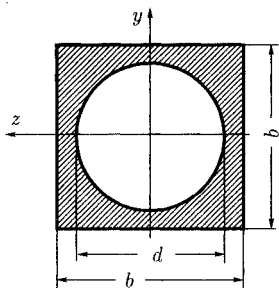
**10.5.** Балка пролетом  $l = 3$  м, свободно опертая по концам, нагружена двумя равными сосредоточенными силами  $F = 120$  кН каждая, приложенными на одинаковых расстояниях  $a = 0,7$  м от опор. Проверить прочность балки при заданном сечении (см. рис.) и при предписанных допускаемых напряжениях на изгиб  $[\sigma] = 60$  МПа и на срез  $[\tau] = 20$  МПа. Размеры сечения:  $b = 240$  мм,  $d = 200$  мм.

*Указание.* Статический момент полукруга относительно основания равен  $S = d^3/12$ .

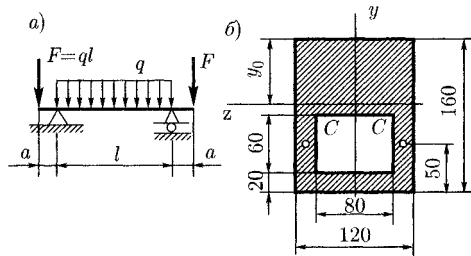
*Ответ:*  $\sigma_{\max} \approx 51$  МПа  $< 60$  МПа,  $\tau_{\max} \approx 16$  МПа  $< 20$  МПа.



К задаче 10.4



К задаче 10.5

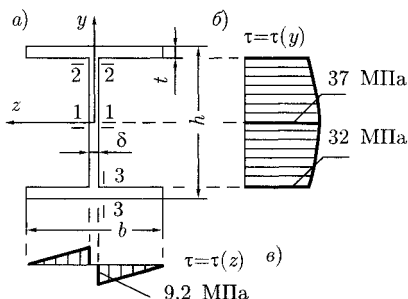


К задаче 10.6

**10.6.** Балка пролетом  $l = 4$  м с двумя консолями равного вылета  $a = 0,5$  м загружена, как показано на рис. а. Определить наибольшие нормальные и касательные напряжения в опасном сечении балки, если для точки С найдено  $\tau_c \approx 10$  МПа. Размеры сечения и расстояния до точки С указаны на рис. б.

*Ответ:*  $\sigma_{\max} = 70$  МПа,  $\tau_{\max} = 11$  МПа ( $y_0 = 7$  см,  $I_z = 3370$  см<sup>4</sup>).

**10.7.** Построить эпюры распределения касательных напряжений, возникающих в стенке и в полках двутавровой балки, сечение которой изображено на рис. а. Размеры сечения:  $b = 360$  мм,  $h = 400$  мм,  $t = 20$  мм,  $\delta = 12$  мм. Поперечную силу принять  $Q = 160$  кН.



К задаче 10.7

*Решение.* Сначала определим момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси  $z$ :

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{1}{12} \delta (h - 2t)^3 + \\
 &+ 2 \left( \frac{1}{12} b t^3 + b t \left( \frac{1}{2} (h - t) \right)^2 \right) = \\
 &= 1,2 \cdot 36^3 / 12 + \\
 &+ 2(36 \cdot 2^3 / 12 + 36 \cdot 2 \cdot 19^2) \approx \\
 &\approx 56700 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Далее отметим зоны, для которых будем определять касательные напряжения. Сечением 1-1 укажем на зону вблизи нейтрального слоя, сечением 2-2 - в месте перехода стенки в полку, сечением 3-3 - у основания полки. Статические моменты соответствующих "отсеченных" площадей найдутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S_z^{2-2} &= b t \left( \frac{1}{2} (h - t) \right) = 36 \cdot 2 \cdot 19 = 1368 \text{ см}^3, \\
 S_z^{1-1} &= S_z^{2-2} + \frac{1}{2} (h - 2t) \cdot \frac{1}{4} (h - t) \cdot \delta = 1368 + 18 \cdot 9 \cdot 1,2 = 1560 \text{ см}^3, \\
 S_z^{3-3} &= \left( (b - \delta) \cdot \frac{1}{2} \right) \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \cdot t = 17,4 \cdot 19 \cdot 2 = 661 \text{ см}^3.
 \end{aligned}$$

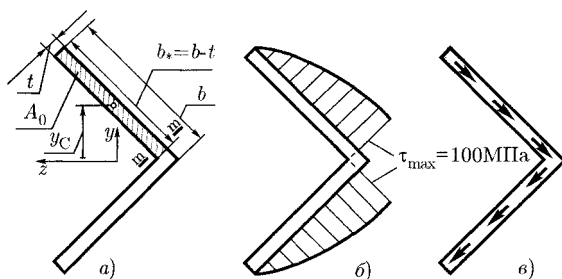
Наконец, переходим к определению касательных напряжений

$$\begin{aligned}
 \tau_{1-1} &= \frac{Q S_z^{1-1}}{I_z \delta} = 160 \cdot 10^3 \cdot 1560 \cdot 10^{-6} / (56700 \cdot 10^{-8} \cdot 0,012) = \\
 &= 37 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\
 \tau_{2-2} &= \frac{Q S_z^{2-2}}{I_z \delta} = 160 \cdot 10^3 \cdot 1368 \cdot 10^{-6} / (56700 \cdot 10^{-8} \cdot 0,012) = \\
 &= 32 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\
 \tau_{3-3} &= \frac{Q S_z^{3-3}}{I_z t} = 160 \cdot 10^3 \cdot 661 \cdot 10^{-6} / (56700 \cdot 10^{-8} \cdot 0,020) = \\
 &= 9,3 \cdot 10^6 \text{ Па}.
 \end{aligned}$$

Соответствующие эпюры приведены на рис. б и в (в МПа).

Отметим, что для зоны 2 – 2 формула Журавского не оценивает эффект высоких местных напряжений, возникающих вследствие резкого перехода стенки в полку. Как известно, в стандартных двутаврах предусмотрен плавный переход по цилиндрической поверхности. В этих обстоятельствах формула Журавского дает правильную оценку касательным напряжениям.

**10.8.** Балка, сечение которой представляет собой равнополочный уголок  $50 \times 50 \times 5$ , изгибается силами, расположенными в плоскости наибольшей жесткости. Найти максимальные касательные напряжения и построить примерный вид эпюры распределения касательных напряжений по сечению. Поперечную силу, параллельную оси  $y$ , принять  $Q = 20$  кН.



К задаче 10.8

*Указание.* Максимальные касательные напряжения возникают вблизи нейтрального слоя. Для их оценки проведем линию  $tt'$  (см. рис. *a*), заштрихуем так называемую отсеченную площадь  $A_o$  и вычислим ее статический момент относительно нейтральной оси (оси  $z$ )

$$S_z = y_c A_o = y_c t b_*$$

Из чертежа видно, что

$$b_* = b - t,$$

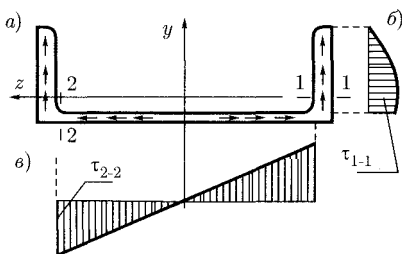
$$y_c = b_* \sin 45^\circ = 0,707(b - t).$$

*Ответ:*  $\tau_{\max} = 100$  МПа; эпюра  $\tau = \tau(y)$  дана на рис. *б*; "поток" касательных напряжений иллюстрируется с помощью рис. *в*.

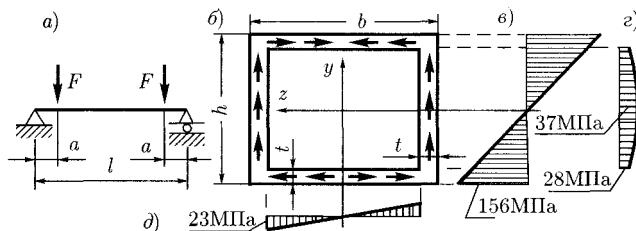
**10.9.** Швеллер № 30П (с параллельными гранями полков) изгибается в плоскости наименьшей жесткости. Построить эпюры распределения касательных напряжений, действующих вдоль стенки и вдоль полков. Поперечная сила  $Q = 65,4$  кН.

Ответ:  $\tau_{1-1} = 28$  МПа,  $\tau_{2-2} = 61$  МПа, см. рис.

**10.10.** Балка на двух шарнирных опорах нагружена так, как показано на рис. а. Сечение балки – прямоугольная труба с размерами:  $b = 240$  мм,  $h = 200$  мм,  $t = 20$  мм. Определить наибольшие нормальные и касательные напряжения в опасном сечении балки. Построить эпюры распределения напряжений вдоль вертикальных и горизонтальных стенок сечения, если  $F = 240$  кН,  $l = 4$  м,  $a = 0,6$  м.

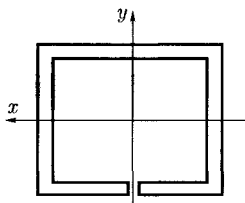


К задаче 10.9



К задаче 10.10

Ответ:  $\sigma_{\max} = 156$  МПа,  $\tau_{\max} = 37$  МПа; эпюры  $\tau(y)$  и  $\tau(z)$  показаны на рис. г и д, а эпюра  $\sigma(y)$  – на рис. в; "поток" касательных напряжений иллюстрируется схемой на рис. б.



К задаче 10.11

**10.11.** Как изменятся эпюры касательных напряжений, найденные в предыдущей задаче, если в качестве балки использовать прямоугольную трубу с продольным разрезом, см. рис.

Ответ: Не изменятся.

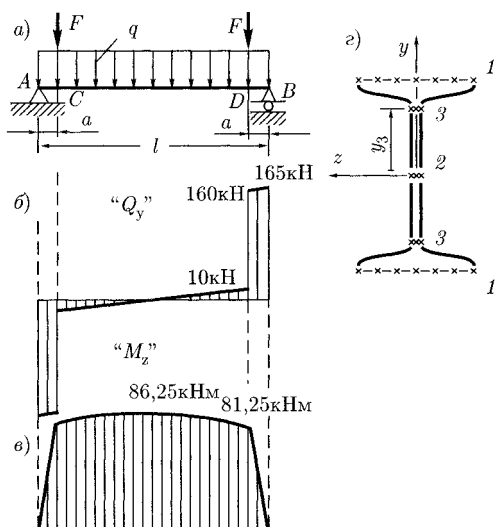
**10.12.** Двутавровая балка № 20, свободно лежащая на двух опорах, подвергается испытанию на изгиб сосредоточенной силой, прикладываемой в середине пролета равными ступенями  $\Delta F = 30$  кН. На нейтральном слое в четверти пролета установлены тензометры. Каждый из тензометров

ориентирован под углом  $45^\circ$  к оси балки. Среднее приращение показаний тензометров на каждой ступени нагружения составляет  $\Delta A = 10,6$  мм. База тензометра  $l = 100$  мм, коэффициент увеличения  $K = 1000$ . Определить коэффициент Пуассона материала балки.

*Указание.* При решении задачи следует помнить, что напряженное состояние малого объема вблизи нейтрального слоя – чистый сдвиг. Применительно к этим условиям надлежит найти соотношение между относительным удлинением вдоль оси тензометра и углом сдвига. Далее следует заменить угол сдвига через касательное напряжение по закону Гука. После этого можно подставить сюда значение касательного напряжения, вычисленного по формуле Журавского.

*Ответ:*  $\nu = 0,3$ .

**10.13.** Подобрать двутавровое сечение балки, нагруженной по схеме, изображенной на рис. а. Принять  $q = 10$  кН/м,  $F = 150$  кН,  $l = 3$  м,  $a = 0,5$  м,  $[\sigma] = 160$  МПа.



К задаче 10.13

*Решение.* 1. Подбор сечения по наибольшим нормальным напряжениям. Предварительно надлежит найти реакции в опорных закреплениях балки и построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  (рис. б и в). После этого по известному условию прочности, составленному для наиболее удаленных от нейтрального слоя точек (помечены цифрой 1 на

рис. 2), определяем требуемое значение момента сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = 86,25 \cdot 10^3 / (160 \cdot 10^6) = 539 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 539 \text{ см}^3.$$

По сортаменту стальных горячекатанных двутавров находим, что подходит профиль № 33, для которого  $W_z = 597 \text{ см}^3$ . Добавим, что в этом расчете опасным принималось сечение балки в середине пролета, где возникает максимальный изгибающий момент.

2. Подбор сечения по наибольшим касательным напряжениям. Соответствующий расчет надлежит выполнить для сечения с наибольшей поперечной силой. В данном случае – это концевые сечения, в каждом из которых  $|Q_y| = 165 \text{ кН}$ . Само же условие прочности составляется для объемов, расположенных у нейтрального слоя (помечены цифрой 2 на рис. 2):

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z}{I_z b} \leq [\tau].$$

Подстановкой чисел, отвечающих профилю № 33, получаем для максимальных касательных напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= 165000 \cdot 339 \cdot 10^{-6} / (9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,007) = \\ &= 81,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 81,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Ранее было показано, что допускаемое касательное напряжение для стали можно принимать в два раза меньше допускаемого нормального напряжения. В данном случае

$$[\tau] = 0,5[\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}.$$

Таким образом, имеем перегрузку

$$\delta = (81,2 - 80) / 80 = 0,015 = 1,5\%.$$

В инженерных расчетах считается приемлемой перегрузка до 5% от допускаемой нагрузки. Следовательно, двутавр № 33 удовлетворяет условию прочности по максимальным касательным напряжениям.

3. Проверка выбранного сечения по условию прочности для объемов, расположенных вблизи перехода стенки в полку. Подобного рода проверка выполняется для сечения, в котором и поперечная сила, и изгибающий момент близки к своим наибольшим значениям. В данной задаче – это сечения  $C$  и  $D$  (рис. а). Здесь имеем  $|Q| = 160 \text{ кН}$ ,  $M = 81,25 \text{ кНм}$ . Опасные объемы по высоте балки помечены цифрой 3 на рис. 2. В этих объемах имеем наложение чистого сдвига на растяжение (или сжатие). Выше было показано, что в подобной ситуации материал находится в условиях сложного напряженного состояния и условие прочности следует формулировать для

эквивалентного напряжения, вычисляемого по тому или иному критерию пластичности или разрушения. Поэтому можно воспользоваться условием прочности, соответствующим критерию максимальных касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\tau_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 4\tau_{(3)}^2} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{(3)}$  и  $\tau_{(3)}$  – нормальное и касательное напряжения, возникающие в упомянутом опасном объеме № 3. Здесь нормальное напряжение находится так:

$$\sigma_{(3)} = \frac{M}{I_z} y_3 = \frac{M}{I_z} \left( \frac{h}{2} - t \right),$$

где  $h$  и  $t$  – высота и усредненная толщина полки двутавра. Подставим числа (для двутавра № 33):

$$\begin{aligned} \sigma_{(3)} &= 81250 (16,5 - 1,12) \cdot 10^{-2} / (9840 \cdot 10^{-8}) = \\ &= 127 \cdot 10^6 \text{ Па} = 127 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

При вычислении касательного напряжения  $\tau_{(3)}$  необходимо знать значение статического момента "отсеченной" площади, расположенной по одну сторону от горизонтальной линии  $y = y_3$ . Удобнее всего воспользоваться значением статического момента полусечения (данного в сортаменте) за вычетом статического момента половины площади стенки:

$$S_z^{(3)} = S_z - (y_3 s) \frac{y_3}{2} = 339 - (15,38 \cdot 0,7) \cdot 7,69 = 256,2 \text{ см}^3.$$

Здесь  $s$  – толщина стенки по сортаменту. Имея величину  $S_z^{(3)}$ , можно вычислить касательное напряжение в опасном объеме

$$\begin{aligned} \tau_{(3)} &= \frac{Q S_z^{(3)}}{I_z b} = 160000 \cdot 256,2 \cdot 10^{-6} / (9840 \cdot 10^{-8} \cdot 7 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 60 \cdot 10^6 \text{ Па} = 60 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

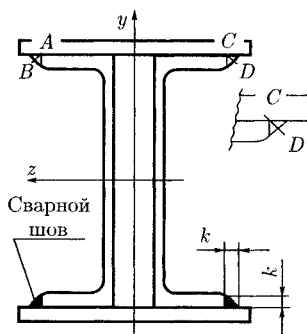
а затем и эквивалентное

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{127^2 + 4 \cdot 60^2} = 174 \text{ МПа}.$$

Как видим, эквивалентное напряжение на 9% больше допускаемого. Следовательно, двутавр № 33 не удовлетворяет условиям прочности. Читатель может убедиться, что подходит двутавр № 36. Последнее и является ответом на поставленный в задаче вопрос.

**10.14.** Стальная сварная балка из двух швеллеров № 33, перекрытых листами  $300 \times 14$  мм (см. задачу 9.7,а), предназначена под нагрузку  $M = 300$  кНм,  $Q = 400$  кН. Катет сварного шва составляет  $k = 10$  мм (см. рис.). Проверить его прочность, принимая для его материала допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Момент инерции  $I_z = 40800 \text{ см}^4$  взять из задачи 9.7,а.

*Решение.* При недостаточных размерах сварного шва возможен его срез в условиях предельного состояния. В данном случае срезаны будут одновременно либо два шва сверху, либо два шва снизу. На рис. поясняется первый из этих двух вариантов среза по линиям  $AB$  и  $CD$ . Линия  $AB$  (а также  $CD$ ) представляет собой наименьшую ширину сечения шва, причем



К задаче 10.14

$$AB = CD = k \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,707 \approx 7 \text{ мм.}$$

Займемся вычислением касательного напряжения по возможной поверхности среза. Ширина этой поверхности

$$b = AB + CD = 7 + 7 = 14 \text{ мм} = 1,4 \text{ см.}$$

Отсеченная площадь здесь – это сечение листа

$$A_o = 30 \cdot 1,4 = 42 \text{ см}^2$$

со статическим моментом относительно нейтральной оси

$$S_z = 42 \cdot (16,5 + 0,7) = 722 \text{ см}^3.$$

По формуле Журавского имеем

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{QS_z}{I_z b} = 400 \cdot 10^3 \cdot 722 \cdot 10^{-6} / (40800 \cdot 10^{-8} \cdot 0,014) = \\ &= 50 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

В поперечном сечении рассматриваемых сварных швов возникает также нормальное напряжение

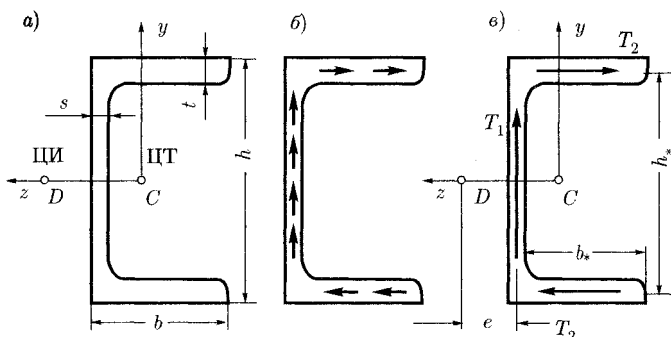
$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_z}{I_z} y = 300 \cdot 10^3 \cdot 0,165 / (40800 \cdot 10^{-8}) = \\ &= 121 \cdot 10^6 \text{ Па} = 121 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Таким образом, материал шва находится в условиях сложного (плоского) напряженного состояния. В этих обстоятельствах оценку прочности следует осуществлять по эквивалентному напряжению. По критерию максимальных касательных напряжений имеем

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\tau_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{121^2 + 4 \cdot 50^2} = 157 \text{ МПа.}$$

Подведем итоги. Эквивалентное напряжение оказалось практически равным допускаемому. Следовательно, балку с рассматриваемым сечением можно ставить под указанную в задаче нагрузку.





К задаче 10.15

**10.15.** Определить положение центра изгиба для сечения балки в виде швеллера № 40П с параллельными гранями полок.

*Решение.* На рис. а дана схема сечения балки. Здесь буквами  $C$  и  $D$  обозначены центр тяжести и центр изгиба (ЦТ и ЦИ). Далее на рис. б изображен "поток" касательных напряжений, а на рис. в — равнодействующие соответствующих касательных усилий в стенке и полках ( $T_1$  и  $T_2$ ). Известно, что расстояние от центра изгиба до середины стенки швеллера составляет

$$e = h_* \frac{T_2}{T_1},$$

где  $h_*$  — условная высота швеллера, которая связана с высотой  $h$  швеллера и толщиной  $t$  его полки следующим образом

$$h_* = h - t,$$

см. также рис. а и в.

Кроме того, для балки с сечением в виде швеллера известны следующие соотношения

$$T_1 \approx Q, \quad T_2 = Q \frac{th_* b_*^2}{4I_z},$$

где  $b_*$  — условная ширина полок швеллера, которая меньше ширины  $b$  швеллера на толщину  $s$  стенки (см. рис. а и в):

$$b_* = b - s.$$

Нетрудно видеть, что для искомого эксцентриситета имеем

$$e = \frac{t(h_* b_*)^2}{4I_z}.$$

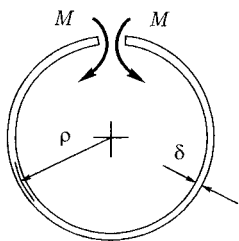
Осуществим числовые подстановки с использованием данных сортамента

$$e = 1,35 \cdot ((40 - 1,35)(11,5 - 0,8))^2 / (4 \cdot 15260) = 3,78 \text{ см} = 37,8 \text{ мм},$$

что примерно в 1,5 раза больше расстояния от середины стенки до центра тяжести сечения.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

**11.1.** Тонкую упругую линейку длиной  $l$  и толщиной  $\delta$  согнули в круговое кольцо (см. рис.). Чему при этом равны наибольшие нормальные напряжения в сечениях линейки, если они не превышают предела пропорциональности.



К задаче 11.1

*Решение.* Воспользуемся известным уравнением Бернулли-Эйлера

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны изогнутого стержня.

Длина окружности  $l$  определится через ее радиус:

$$l = 2\pi\rho.$$

С учетом этого соотношения перепишем предыдущее равенство так:

$$M = \frac{2\pi EI}{l}.$$

Для максимальных нормальных напряжений при изгибе имеем

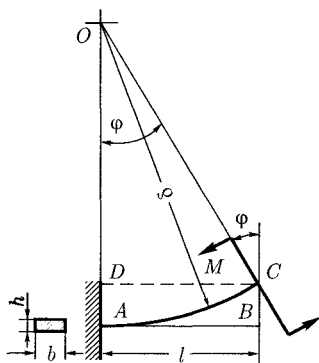
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}.$$

Так как

$$W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{2I}{\delta},$$

то записываем окончательно

$$\sigma_{\max} = \pi E \frac{\delta}{l}.$$



К задаче 11.2

**11.2.** Стальная балка прямоугольного сечения, защемленная одним концом, изгибается парой сил с моментом  $M = 10$  Нм, приложенной на свободном конце (см. рис.). Длина балки  $l = 1$  м, размеры

сечения:  $b = 60$  мм,  $h = 5$  мм. Определить прогиб и угол поворота концевого сечения балки, используя уравнение Бернулли-Эйлера.

*Решение.* Момент инерции сечения балки

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = 0,060 \cdot (0,005)^3 / 12 = 6,25 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4.$$

Далее вычисляем радиус кривизны оси балки

$$\rho = \frac{EI}{M} = 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-10} / 10 = 12,5 \text{ м}.$$

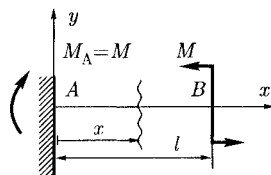
Затем обратимся к рис. Угол  $\varphi$  определяется как отношение дуги длиной  $l$  к радиусу  $\rho$ , а прогиб  $v_B = BC$  можно представить в виде разности  $BC = AD = OC - OD$ . Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{l}{\rho} = 1/12,5 = 0,08 \text{ рад} = 4,584^\circ, \\ v_B &= \rho - \rho \cos \varphi = 12,5 (1 - \cos 4,584^\circ) = \\ &= 12,5 (1 - 0,9968) = 0,03998 \text{ м} = 39,98 \text{ мм}. \end{aligned}$$

**11.3.** Решить предыдущую задачу 11.2 с помощью интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня.

*Решение.* Начало координат выбираем в заделке. Здесь возникает одна реакция  $M_A = M$ , поэтому дифференциальное уравнение приобретает вид

$$EIv'' = M_{\text{изг}} = M_A = M.$$



К задаче 11.3

Далее это уравнение дважды интегрируем:

$$\begin{aligned} EIv' &= C + Mx, \\ EIv &= D + Cx + \frac{1}{2}Mx^2. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования отыскиваются с помощью условий закрепления

$$v' \big|_{x=0} = \varphi_A = 0, \quad v \big|_{x=0} = v_A = 0.$$

Нетрудно установить, что  $C = 0$ ,  $D = 0$ . Тогда искомые угол поворота и прогиб концевого сечения найдутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= v' \big|_{x=l} = \frac{Ml}{EI} = 10 \cdot 1 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-10}) = 0,08 \text{ рад}, \\ v_B &= v \big|_{x=l} = \frac{Ml^2}{2EI} = 10 \cdot 1^2 / (2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-10}) = \\ &= 0,04 \text{ м} = 40 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные результаты с точным решением из предыдущей задачи, находим, что погрешность при определении прогиба не превышает

$$\delta = \frac{v - v_{\text{прибл}}}{v} = (39,98 - 40,00)/39,98 = 0,0005 = 0,05\%,$$

что вполне допустимо в инженерных расчетах.

**11.4.** Балка пролетом  $l = 1$  м, свободно лежащая на двух шарнирных опорах, изогнута по дуге окружности. Сечение балки – прямоугольник со сторонами  $b = 60$  мм,  $h = 40$  мм. Прогиб, измеренный в середине пролета, оказался равным 6,25 мм. Определить модуль упругости материала и радиус кривизны оси балки, если наибольшее нормальное напряжение  $\sigma_{\text{max}} = 10$  МПа.

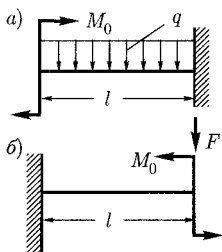
Ответ:  $E = 0,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 20$  м.

**11.5.** Балка круглого сечения диаметром  $d$  и длиной  $l$ , защемленная одним концом, подвергается изгибу под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$ . Определить радиус кривизны оси балки вблизи заделки.

Ответ:  $\rho = \frac{EI}{M} = \frac{2EI}{ql^2}$ .

**11.6.** Балка симметричного сечения высотой  $h$  и длиной  $l$  закреплена одним концом и нагружена силой  $F$  на другом конце. Сила  $F$  подобрана так, что нормальное напряжение в опасном сечении достигает допускаемого значения. Найти прогиб в сечении под силой, выразить его через размеры балки и допускаемое напряжение.

Ответ:  $v = \frac{2l^2[\sigma]}{3Eh}$ .



**11.7.** Для балок, зажатых одним концом (см. рис.), путем интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси определить значения углов поворота и прогибов на свободном конце при следующих данных:

а)  $l = 2$  м,  $q = 30$  кН/м,  $M_0 = 30$  кНм, сечение – двутавр № 20;

б)  $l = 2$  м,  $F = 20$  кН,  $M_0 = 20$  кНм, сечение – двутавр № 18.

К задаче 11.7

Ответ: а)  $\varphi = \frac{ql^3}{6EI} - \frac{M_0l}{6EI} = -0,0054$  рад =  $-0,31^\circ$ ,  
 $v = \frac{M_0l^2}{2EI} - \frac{ql^4}{8EI} = 0$ ;

$$\begin{aligned}
 б) \quad \varphi &= \frac{M_0 l}{EI} - \frac{F l^2}{2EI} = 0, \\
 v &= \frac{M_0 l^2}{2EI} - \frac{F l^3}{3EI} = -0,00516 \text{ м} = -5,16 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

**11.8.** С помощью интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси определить углы поворота  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  опорных сечений и прогибы  $v_c$  в середине пролета для шарнирно опертых балок двутаврового сечения (см. рис.) при следующих данных:

а)  $l = 2 \text{ м}$ ,  $q = 30 \text{ кН/м}$ , сечение – двутавр № 27;

б)  $l = 6 \text{ м}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $M_0 = 80 \text{ кНм}$ , сечение – двутавр № 36;

в)  $l = 4 \text{ м}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $M_0 = 40 \text{ кНм}$ , сечение – двутавр № 30.

Ответ:

а)  $\varphi_A = \varphi_B = -0,01 \text{ рад} = -0,57^\circ$ ,

$v_c = -0,62 \text{ мм}$ ;

б)  $\varphi_A = -0,0097 \text{ рад} = -0,55^\circ$ ,

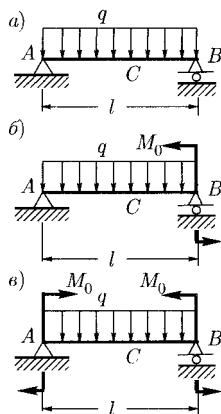
$\varphi_B = 0,0127 \text{ рад} = 0,72^\circ$ ,  $v_c = -19,4 \text{ мм}$ ;

в)  $\varphi_A = -\varphi_B = -0,0094 \text{ рад} = -0,54^\circ$ ,  $v_c = -10,4 \text{ мм}$ .

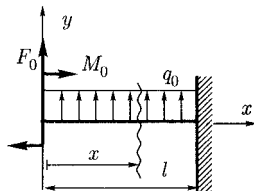
**11.9.** Подобрать по сортаменту двутавровое сечение балки пролетом  $l = 8 \text{ м}$ , шарнирно опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q = 40 \text{ кН/м}$ , из условия, чтобы наибольший прогиб не превосходил допускаемого  $[v] = l/400$ ; проверить также прочность принятого сечения, принимая  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Ответ: Двутавр № 55,  $\sigma_{\max} = 161 \text{ МПа} \approx [\sigma]$ .

**11.10.** Консольная балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q_0$ , а также сосредоточенным моментом  $M_0$  и сосредоточенной силой  $F_0$  на свободном конце (см. рис.). Выяснить физический смысл постоянных интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки, т.е. начальных параметров, входящих в это уравнение. Исследование провести, принимая начало координат на свободном конце бал-



К задаче 11.8



К задаче 11.10

ки. Найти по методу начальных параметров прогиб и угол поворота концевое сечения балки.

*Решение.* Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в общем виде

$$EI v'' = M(x), \quad (1)$$

а затем дважды его продифференцируем

$$EI v''' = -Q(x), \quad (2)$$

$$EI v'''' = q(x). \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (3) четыре раза, получим последовательно все уравнения, составляющие существо метода начальных параметров:

$$EI v''' = \int_0^x q(x) dx + C_1, \quad (4)$$

$$EI v'' = \int_0^x dx \int_0^x q(x) dx + C_1 x + C_2, \quad (5)$$

$$EI v' = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q(x) dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad (6)$$

$$EI v = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q(x) dx + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \quad (7)$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  определяются из условий в начале координат, т.е. при  $x = 0$ . Имеем

$$C_1 = EI v'''|_{x=0} = -Q|_{x=0} = F_0,$$

$$C_2 = EI v''|_{x=0} = M|_{x=0} = M_0,$$

$$C_3 = EI v'|_{x=0} = EI \varphi|_{x=0} = EI \varphi_0,$$

$$C_4 = EI v|_{x=0} = EI v_0.$$

Таким образом, каждая из постоянных интегрирования имеет вполне определенный смысл. Параметры  $F_0, M_0, \varphi_0, v_0$  принято называть начальными. С их помощью уравнение (7) можно записать следующим образом:

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} M_0 x^2 + \frac{1}{6} F_0 x^3 + \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx^4 \right). \quad (a)$$

В случае равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью  $q(x) = q_0 = \text{const}$  уравнение (a) принимает вид

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} M_0 x^2 + \frac{1}{6} F_0 x^3 + \frac{1}{24} q_0 x^4 \right). \quad (б)$$

Начальные параметры  $v_0$  и  $\varphi_0$  определим из условий закрепления балки. Так как в заделке имеем

$$v|_{x=l} = 0, \quad v'|_{x=l} = 0,$$

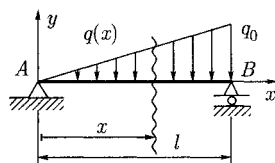
то можно получить

$$\varphi_0 = -\frac{M_0 l}{EI} - \frac{F_0 l^2}{2EI} - \frac{q_0 l^3}{6EI},$$

$$v_0 = \frac{M_0 l^2}{2EI} + \frac{F_0 l^3}{3EI} + \frac{q_0 l^4}{8EI}.$$

**11.11.** Пользуясь методом начальных параметров, определить линейные и угловые перемещения в балках, схемы которых приведены в задачах 11.7 и 11.8.

**11.12.** Методом начальных параметров определить наибольший по модулю прогиб, а также прогиб в середине пролета в шарнирно опертой по концам балке, несущей сплошную нагрузку, распределенную по закону "треугольника", см. рис. Длина балки составляет  $l$ .



К задаче 11.12

*Указание.* Интенсивность неравномерно распределенной нагрузки описывается следующим уравнением:

$$q(x) = -q \frac{x}{l}.$$

Четыре раза интегрируя эту функцию, получим последний член уравнения (а), найденного в задаче 11.10:

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx^4 = -\frac{qx^5}{120l}.$$

Параметры  $v_0$  и  $M_0$  в данной задаче равны нулю. Величина же  $F_0$  представляет собой реакцию  $R_A$  в опоре A. Параметр  $\varphi_0$  отыскивается из условия закрепления на правой опоре B:

$$v_B = v|_{x=l} = 0.$$

Ответ:  $v_{\text{extr}} = -0,00652 \frac{ql^4}{EI}$  (при  $x = 0,52l$ ),

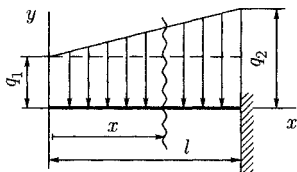
$$v_c = -0,00651 \frac{ql^4}{EI} \text{ (при } x = 0,50l \text{)}.$$

**11.13.** Для консольной балки (см. рис.), несущей сплошную нагрузку, изменяющуюся по закону "трапеции", определить угол поворота и прогиб концевого сечения.

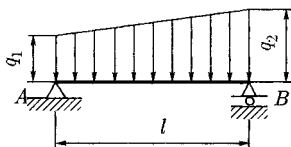
*Указание.* Удобно разделить нагрузку на равномерно распределенную интенсивности  $q_0 = -q_1$  и изменяющуюся по закону треугольника  $q(x) = qx/l$ , где  $q = -(q_2 - q_1)$ , см. также рис. Уравнение изогнутой оси примет вид

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2!} M_0 x^2 + \frac{1}{3!} F_0 x^3 + \frac{1}{4!} q_0 x^4 + \frac{1}{5!} q x^5 \right).$$

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{(3q_1 + q_2)l^3}{24EI}, \quad v = -\frac{(11q_1 + 4q_2)l^4}{120EI}.$$



К задаче 11.13



К задаче 11.14

**11.14.** Для балки на двух шарнирных опорах, нагруженной сплошной нагрузкой, изменяющейся по закону "трапеции", определить углы поворота на опорах и прогиб в середине пролета.

*Указание.* При решении удобно воспользоваться результатами решения задачи 11.13.

$$\text{Ответ: } \varphi_A = -\frac{(8q_1 + 7q_2)l^3}{360EI}, \quad \varphi_B = \frac{(7q_1 + 8q_2)l^3}{360EI},$$

$$v = -\frac{5(q_1 + q_2)l^4}{768EI}.$$

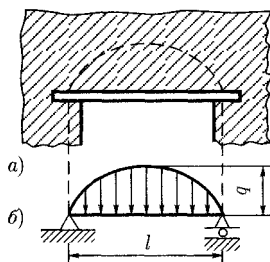
**11.15.** При расчете балок, перекрывающих проемы в кирпичных стенах зданий (рис. а), нагрузка на балку считается сплошной, распределенной по параболе второй степени (рис. б):

$$q(x) = \frac{4q}{l^2}(lx - x^2).$$

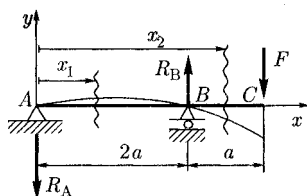
Кроме того, в расчетной схеме принимают, что балка опирается по концам на шарнирные опоры. Определить наибольший прогиб балки.

$$\text{Ответ: } v = -\frac{61ql^4}{5760EI} \approx -0,0106 \frac{ql^4}{EI}.$$





К задаче 11.15



К задаче 11.16

**11.16.** Балка на двух шарнирных опорах с консолью нагружена силой  $F$ , приложенной на конце консоли (см. рис.). Определить угол поворота  $\varphi_c$  и прогиб  $v_c$  на конце консоли.

*Решение.* Здесь нельзя составить единого выражения для изгибающего момента. Поэтому на каждом из участков приходится составлять свое собственное дифференциальное уравнение изогнутой оси. При интегрировании каждого такого уравнения получаются две постоянных, а всего четыре:  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$  и  $D_2$ . Известен способ составления дифференциальных уравнений, при котором постоянные уравниваются:  $C_1 = C_2 = C$  и  $D_1 = D_2 = D$ . Для этого:

1. начало координат располагается на одном из концов балки;
2. при составлении выражения для изгибающего момента  $M_{изг}$  рассматриваются все силы, расположенные с той стороны произвольного сечения, которая включает начало координат;
3. интегрирование осуществляется "без раскрытия скобок".

При уравнивании постоянных интегрирования принимаем во внимание непрерывность упругой линии на границе участков как по прогибам, так и по углам поворота.

В данной задаче выберем начало координат на левой опоре. Получим для первого участка ( $0 \leq x \leq 2a$ )

$$EI v'' = M_{изг} = -R_A x, \quad (1)$$

$$EI v' = C - \frac{1}{2} R_A x^2, \quad (2)$$

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{6} R_A x^3, \quad (3)$$

а также для второго ( $2a \leq x \leq 3a$ )

$$EI v'' = M_{изг} = -R_A x + R_B (x - 2a), \quad (4)$$

$$EI v' = C - \frac{1}{2} R_A x^2 + \frac{1}{2} R_B (x - 2a)^2, \quad (5)$$

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{1}{6} R_B (x - 2a)^3, \quad (6)$$

Для определения постоянных интегрирования следует воспользоваться условиями закрепления

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=2a} = 0. \quad (7)$$

Подстановка этих условий в уравнение (3) дает

$$D = 0, \quad (8)$$

$$0 = 0 + C \cdot 2a - \frac{1}{6} R_A \cdot 8a^3.$$

Отсюда

$$C = \frac{4}{3} R_A a^2.$$

Так как из условий статики имеем

$$R_A = \frac{1}{2} F, \quad R_B = \frac{3}{2} F, \quad (9)$$

то можно записать окончательно

$$C = \frac{2}{3} Fa^2. \quad (10)$$

С учетом (9) и (10) можно найти из (5) и (6)

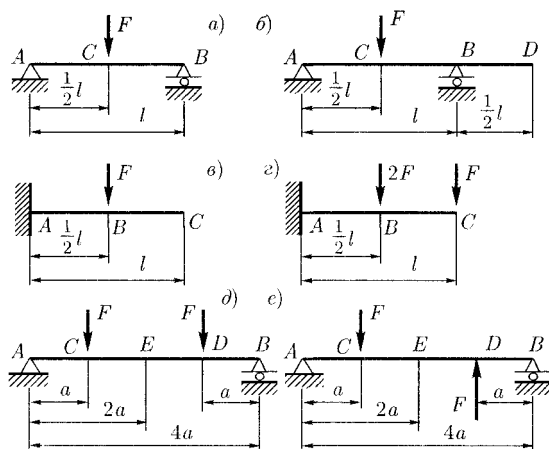
$$\begin{aligned} \varphi_c &= v'|_{x=3a} = \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} Fa^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} F \cdot (3a)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} F (3a - 2a)^2 \right) = \\ &= -\frac{5Fa^2}{6EI}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_c &= v|_{x=3a} = \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} Fa^2 \cdot 3a - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} F \cdot (3a)^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} F (3a - 2a)^3 \right) = \\ &= -\frac{2Fa^3}{EI}. \end{aligned}$$

Найдем дополнительно прогиб в середине пролета, используя (3):

$$v|_{x=a} = \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} Fa^2 \cdot a - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} F \cdot a^3 \right) = \frac{7Fa^3}{12EI}.$$

**11.17.** Найти углы поворота и прогибы в характерных сечениях балок, изображенных на рис.



К задаче 11.17

Ответ:

$$a) \varphi_A = -\frac{Fl^2}{16EI}, \varphi_C = \frac{Fl^2}{16EI}, v_C = -\frac{Fl^3}{48EI};$$

$$б) v_D = \frac{Fl^3}{32EI};$$

$$в) \varphi_B = \varphi_C = -\frac{Fl^2}{8EI}, v_B = -\frac{Fl^3}{24EI}, v_C = -\frac{5Fl^3}{48EI};$$

$$г) \varphi_B = -\frac{5Fl^2}{8EI}, \varphi_C = -\frac{3Fl^2}{4EI}, v_B = -\frac{3Fl^3}{10EI}, v_C = -\frac{13Fl^3}{24EI};$$

$$д) \varphi_A = -\frac{2Fa^2}{2EI}, \varphi_B = \frac{3Fa^2}{2EI}, v_C = v_D = -\frac{4Fa^3}{3EI},$$

$$v_E = -\frac{13Fa^3}{6EI};$$

$$е) \varphi_A = \varphi_B = -\frac{Fa^2}{4EI}, v_C = -\frac{Fa^3}{6EI}, v_D = \frac{Fa^3}{6EI}.$$

**11.18.** К балке на шарнирных опорах приложен сосредоточенный момент  $M_0$  на расстоянии  $a$  от левого конца (см. рис.). Балка имеет длину  $3a$ . Определить прогибы балки в сечениях C и D, а также углы поворота сечений A и B.

*Решение.* Расположим начало координат в точке A. Составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на пер-

вом участке ( $0 \leq x \leq a$ ):

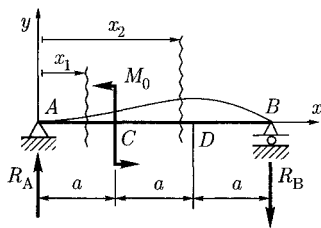
$$EI v'' = R_A x, \quad (1)$$

$$EI v' = C + \frac{1}{2} R_A x^2, \quad (2)$$

$$EI v = D + Cx + \frac{1}{6} R_A x^3, \quad (3)$$

При составлении дифференциального уравнения упругой линии на втором участке надлежит учесть момент  $M_0$  (при  $a \leq x \leq 3a$ ):

$$EI v'' = R_A x - M_0(x - a)^0. \quad (4)$$



Здесь искусственно введен множитель  $(x - a)^0$ , равный единице. Если дважды проинтегрировать уравнение (4) "без раскрытия скобок", то постоянные интегрирования на первом и втором участках уравняются вследствие упомянутой в задаче 11.16 неразрывности упругой линии.

Интегрируем уравнение (4):

К задаче 11.18 
$$EI v' = C + \frac{1}{2} R_A x^2 - M_0(x - a), \quad (5)$$

$$EI v = D + Cx + \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{2} M_0(x - a)^2. \quad (6)$$

Постоянные интегрирования найдутся при использовании условий закрепления

$$v_A = v|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

$$v_B = v|_{x=3a} = 0. \quad (8)$$

Подставляем (7) в (3), а (8) в (6). Получаем

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ 0 &= C \cdot 3a + \frac{1}{6} R_A (3a)^3 - \frac{1}{2} M_0(3a - a)^2. \end{aligned}$$

Так как для реакции имеем

$$R_A = \frac{M_0}{3a},$$

то из предыдущего равенства можно получить

$$C = \frac{1}{6} M_0 a.$$

Далее нахождение искомых в задаче величин не представляет труда

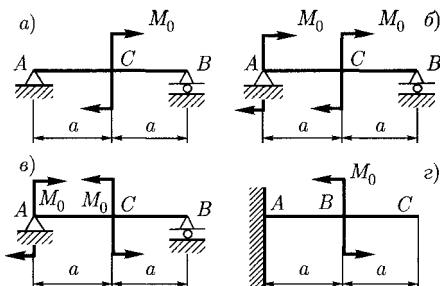
$$\varphi_A = \varphi|_{x=0} = \frac{C}{EI} = \frac{M_0 a}{6EI}, \quad \varphi_B = \varphi|_{x=3a} = -\frac{2M_0 a}{3EI},$$

$$v_C = v|_{x=a} = \frac{2M_0 a^2}{9EI}, \quad v_D = v|_{x=2a} = \frac{5M_0 a^2}{18EI}.$$

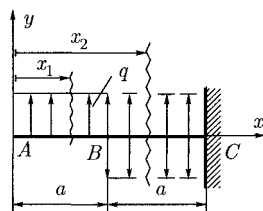
**11.19.** Найти углы поворота и прогибы в характерных сечениях балок, изображенных на рис.

Ответ:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi_A = \varphi_B = \frac{M_0 a}{12EI}, \quad \varphi_C = -\frac{M_0 a}{6EI}, \quad v_C = 0; \\ \text{б) } \varphi_A = -\frac{7M_0 a}{12EI}, \quad \varphi_C = -\frac{M_0 a}{12EI}, \quad \varphi_B = \frac{5M_0 a}{12EI}, \quad v_C = -\frac{M_0 a^2}{4EI}; \\ \text{в) } \varphi_A = -\frac{3M_0 a}{4EI}, \quad \varphi_C = \varphi_B = \frac{M_0 a}{4EI}, \quad v_C = -\frac{M_0 a^2}{4EI}; \\ \text{г) } \varphi_B = \varphi_C = \frac{M_0 a}{EI}, \quad v_B = \frac{M_0 l^2}{2EI}, \quad v_C = \frac{3M_0 a^2}{2EI}. \end{aligned}$$



К задаче 11.19



К задаче 11.20

**11.20.** К консольной балке на части ее длины приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$  (см. рис.). Определить прогибы и углы поворота в сечениях A и B.

*Решение.* Выберем начало координат на свободном конце A, составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси на первом участке (при  $0 \leq x \leq a$ ):

$$EI v'' = \frac{1}{2} q x^2, \quad (1)$$

$$EI v' = C + \frac{1}{6} q x^3, \quad (2)$$

$$EI v = D + Cx + \frac{1}{24} q x^4. \quad (3)$$

Прежде чем переходить к дальнейшему, напомним, что согласно правилам метода уравнивания постоянных, необходимо в правых частях уравнений сохранять все выражения из предыдущих участков. В данном случае – это слагаемое  $0,5qx^2$ . Такой нагрузки на втором участке нет. В этой ситуации распределенную нагрузку искусственно продлевают до конца балки, не забывая уравновесить ее такой же нагрузкой, но направленной в противоположную сторону, см. соответствующие построения штриховыми линиями. С учетом сказанного имеем для второго участка (при  $a \leq x \leq 2a$ )

$$EI v'' = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}q(x-a)^2, \quad (4)$$

$$EI v' = C + \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{6}q(x-a)^3, \quad (5)$$

$$EI v = D + Cx + \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{24}q(x-a)^4. \quad (6)$$

Постоянные интегрирования отыщем из условий закрепления

$$v'_c = v'|_{x=2a} = 0, \quad (7)$$

$$v_c = v|_{x=2a} = 0. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (5), а (8) в (6), находим

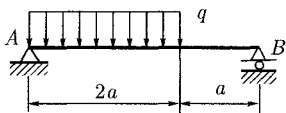
$$\begin{aligned} C + \frac{1}{6}q \cdot 8a^3 - \frac{1}{6}q(2a-a)^3 &= 0, \\ D + C \cdot 2a + \frac{1}{24}q \cdot 16a^4 - \frac{1}{24}q(2a-a)^4 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений относительно постоянных интегрирования, получаем

$$C = -\frac{7}{6}qa^3, \quad D = \frac{41}{24}qa^4.$$

Имея постоянные интегрирования, можно переходить к вычислению углов поворота и прогибов:

$$\varphi_A = \frac{C}{EI} = -\frac{7qa^3}{6EI}, \quad \varphi_B = -\frac{qa^3}{EI}, \quad v_A = \frac{D}{EI} = \frac{41qa^4}{24EI}, \quad v_B = \frac{7qa^4}{12EI}.$$



К задаче 11.21

**11.21.** Найти максимальный по модулю прогиб в балке, изображенной на рис.

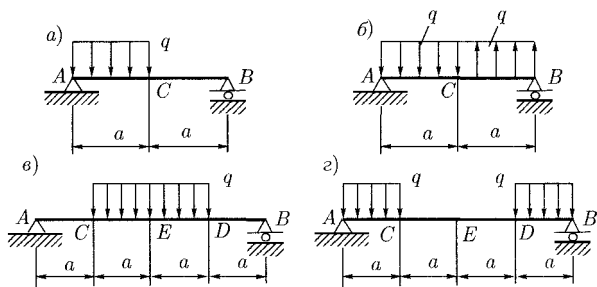
*Указание.* Угол поворота сечения с максимальным прогибом равен нулю. Из этого условия находится координата указанного сечения.

Ответ: Экстремальный прогиб составляет

$$v_{\text{extr}} \approx -\frac{0,80qa^4}{EI}$$

при  $x = 1,445a$ , считая от левого конца балки.

**11.22.** Найти углы поворота и прогибы в характерных сечениях балок, изображенных на рис.



К задаче 11.22

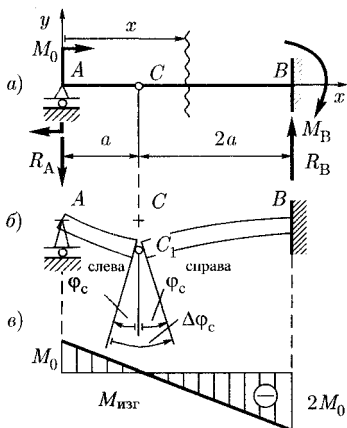
Ответ:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi_A &= -\frac{3qa^3}{8EI}, \varphi_C = \frac{qa^3}{48EI}, \varphi_B = \frac{7qa^3}{48EI}, v_C = -\frac{5qa^4}{48EI}; \\ \text{б) } \varphi_A &= \varphi_B = -\frac{qa^3}{24EI}, \varphi_C = \frac{qa^3}{24EI}, v_C = 0; \\ \text{в) } \varphi_A &= -\frac{11qa^3}{6EI}, \varphi_C = -\frac{4qa^3}{3EI}, \varphi_D = \frac{4qa^3}{3EI}, \varphi_B = \frac{11qa^3}{6EI}, \\ v_C &= v_D = -\frac{5qa^4}{3EI}, v_E = -\frac{57qa^4}{24EI}; \\ \text{г) } \varphi_A &= -\frac{5qa^3}{6EI}, \varphi_C = -\frac{qa^3}{2EI}, \varphi_D = \frac{qa^3}{2EI}, \varphi_B = \frac{5qa^3}{6EI}, \\ v_C &= v_D = -\frac{17qa^4}{24EI}, v_E = -\frac{23qa^4}{24EI}. \end{aligned}$$

**11.23.** На рис. а дана схема балки с шарниром. Балка нагружена сосредоточенным моментом  $M_0$  на левом конце. Найти вертикальное перемещение шарнира, угол его раскрытия, угол поворота сечения на опоре.

*Решение.* Напомним, что в шарнире возможна особенность: изогнутая ось имеет нарушение непрерывности по углу поворота, а именно: поперечные сечения слева и справа от шарнира не параллельны (см. рис. б). Обозначим угол между этими сечениями  $\Delta\varphi_C$ . Значение этого угла зара-

нее неизвестно, оно определится одновременно с нахождением постоянных интегрирования.



К задаче 11.23

Выберем начало координат на левом конце балки. Составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение на первом участке (при  $0 \leq x \leq a$ ):

$$EI v'' = -R_A x + M_0, \quad (1)$$

$$EI v' = C - \frac{1}{2} R_A x^2 + M_0 x, \quad (2)$$

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{1}{2} M_0 x^2. \quad (3)$$

Для второго участка (при  $a \leq x \leq 3a$ ) уравнение, связывающее вторую производную с изгибающим моментом, совпадает с аналогичным уравнением первого участка. В уравнение же углов поворота следует внести слагаемое, учитывающее скачок по углу поворота в шарнире:

$$EI v' = C - \frac{1}{2} R_A x^2 + M_0 x + EI \Delta \varphi_c (x - a)^0.$$

Интегрируя, находим уравнение прогибов

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{1}{2} M_0 x^2 + EI \Delta \varphi_c (x - a).$$

Нетрудно убедиться, что постоянные интегрирования на первом и втором участках действительно уравниваются.

Условия закрепления в данной балке таковы:

$$v|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=3a} = 0, \quad v|_{x=3a} = 0. \quad (4)$$

Подстановка этих условий в уравнения (3), (4) и (5) позволяет получить

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ C - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0}{a} \cdot (3a)^2 + M_0 \cdot 3a + EI \Delta \varphi_c &= 0, \\ C \cdot 3a - \frac{1}{6} \cdot \frac{M_0}{a} \cdot (3a)^3 + \frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot (3a)^2 + EI \Delta \varphi_c \cdot 2a &= 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $R_A = M_0/a$ .

Разрешая полученную систему уравнений относительно  $C$  и  $\Delta \varphi_c$ , получаем

$$C = -3M_0a, \quad \Delta \varphi_c = \frac{9M_0a}{2EI}.$$

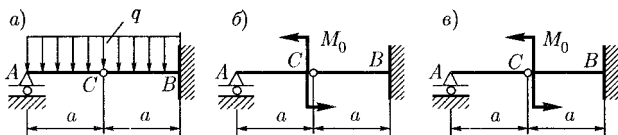


Имея значения параметров  $D$ ,  $C$  и  $\Delta\varphi_c$ , определим прогибы и углы поворота в характерных сечениях:

$$\varphi_A = \frac{C}{EI} = -\frac{3M_0a}{EI}, \quad \varphi_c^{\text{слева}} = -\frac{5M_0a}{2EI},$$

$$\varphi_c^{\text{справа}} = \varphi_c^{\text{слева}} + \Delta\varphi_c = \frac{M_0a}{EI} \left( -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} \right) = \frac{2M_0a}{EI}, \quad v_c = -\frac{17M_0a^2}{6EI}.$$

**11.24.** Найти углы поворота и прогибы в характерных сечениях балок, изображенных на рис.



К задаче 11.24

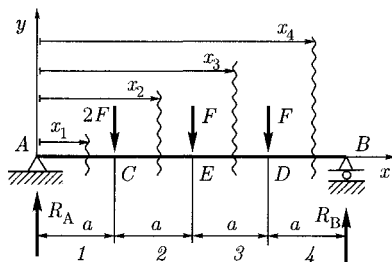
Ответ:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi_A &= -\frac{qa^3}{3EI}, \quad \varphi_C^{\text{слева}} = -\frac{qa^3}{4EI}, \quad \varphi_C^{\text{справа}} = \frac{5qa^3}{12EI}, \\ v_c &= \frac{7qa^4}{24EI}; \\ \text{б) } \varphi_A &= \frac{M_0a}{6EI}, \quad \varphi_C^{\text{слева}} = \frac{2M_0a}{3EI}, \quad \varphi_C^{\text{справа}} = -\frac{M_0a}{2EI}, \\ v_c &= \frac{M_0a^2}{3EI}; \\ \text{в) } \varphi_A &= -\frac{M_0a}{6EI}, \quad \varphi_C^{\text{слева}} = \varphi_A = -\frac{M_0a}{2EI}, \quad \varphi_C^{\text{справа}} = \frac{M_0a}{EI}, \\ v_c &= -\frac{M_0a^2}{2EI}. \end{aligned}$$

**11.25.** Шарнирно опертая по концам балка нагружена по схеме, приведенной на рис. Найти прогибы в характерных точках.

*Решение.* В балках, имеющих два и более участков, уравнения последующих участков, составленные по методу уравнивания постоянных, содержат всегда слагаемые предыдущих участков. Это обстоятельство можно использовать для особой сокращенной записи этих уравнений. В данном случае имеем для четырех дифференциальных уравнений следующее:

$$EIv'' = R_A x|_1 - 2F(x-a)|_2 - F(x-2a)|_3 - F(x-3a)|_4. \quad (1)$$



К задаче 11.25

Принятая здесь символика сохраняется в уравнениях углов поворота и прогибов:

$$EI v' = C + \frac{1}{2} R_A x^2 |_1 - \frac{2}{2} F(x-a)^2 |_2 - \frac{1}{2} F(x-2a)^2 |_3 - \frac{1}{2} F(x-3a)^2 |_4, \quad (2)$$

$$EI v = D + Cx + \frac{1}{6} R_A x^3 |_1 - \frac{2}{6} F(x-a)^3 |_2 - \frac{1}{6} F(x-2a)^3 |_3 - \frac{1}{6} F(x-3a)^3 |_4. \quad (3)$$

При такой записи все, записанное до символа " $|_1$ ", относится к первому участку (при  $0 \leq x \leq a$ ), стоящее ранее символа " $|_2$ ", — ко второму (при  $a \leq x \leq 2a$ ) и т.д. Условия закрепления в этом случае имеют вид

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=4a} = 0. \quad (4)$$

Подстановка этих условий в (3) дает возможность получить

$$D = 0, \\ 0 = C \cdot 4a + \frac{1}{6} R_A (4a)^3 - \frac{2}{6} F(3a)^3 - \frac{1}{6} F(2a)^3 - \frac{1}{6} Fa^3.$$

При этих подстановках имелось в виду, что сечение с координатой  $x = 0$  расположено в пределах первого участка, а с координатой  $x = 4a$  — в пределах четвертого. Из уравнений равновесия находим

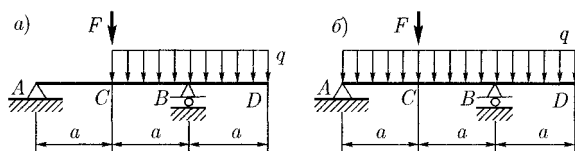
$$R_A = \frac{9}{4} F,$$

что позволяет записать окончательно

$$C = -\frac{27}{8} Fa^2.$$

После этого можно найти прогибы в характерных точках:  $v_c = -\frac{3Fa^3}{EI}$ ,  
 $v_E = -\frac{49Fa^3}{12EI} = -4,833 \frac{Fa^3}{EI}$ ,  $v_D = -\frac{67Fa^3}{24EI} = -2,792 \frac{Fa^3}{EI}$ .

**11.26.** На рис. а и б даны два варианта нагрузки балки, которая опирается на две шарнирные опоры и имеет консоль. Найти прогибы посередине пролета и на конце консоли.

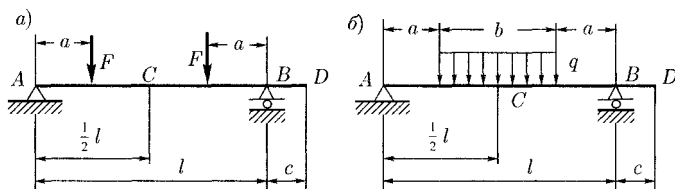


К задаче 11.26

Ответ:

$$a) v_c = -\frac{7qa^4}{48EI}, v_D = -\frac{qa^4}{48EI}; \quad б) v_c = -\frac{qa^4}{4EI}, v_D = \frac{qa^4}{8EI}.$$

**11.27.** Определить прогибы посередине пролета и на конце консоли для балок, изображенных на рис. а и б.



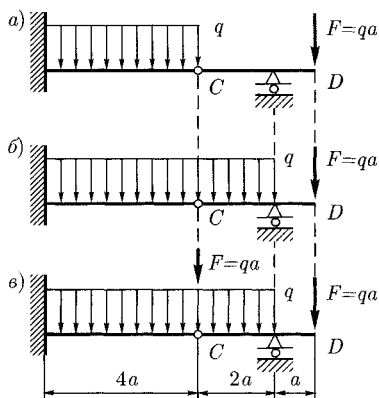
К задаче 11.27

Ответ:

$$a) v_c = -\frac{Fa(3l^2 - 4a^4)}{24EI}, v_D = \frac{Fab(l - a)}{2EI};$$

$$б) v_c = -\frac{ql(8l^3 - 4b^2l + b^3)}{384EI}, v_D = -\frac{qba(3l^2 - b^2)}{48EI}.$$

**11.28.** Балка с шарниром закреплена так, как показано на рис. Для трех вариантов нагрузки найти прогибы в шарнире, а также на конце консоли.



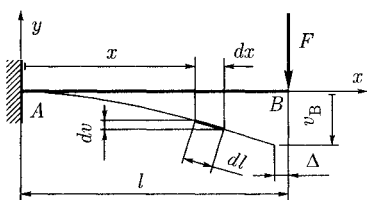
К задаче 11.28

Ответ:

$$\begin{aligned} \text{a) } v_C &= -\frac{64q a^4}{3EI}, \\ v_D &= -\frac{29q a^4}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } v_C &= -\frac{128q a^4}{3EI}, \\ v_D &= \frac{62q a^4}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } v_C &= -\frac{64q a^4}{EI}, \\ v_D &= \frac{94q a^4}{3EI}. \end{aligned}$$



К задаче 11.29

**11.29.** Консольная балка вылетом  $l$  нагружена силой  $F$ , приложенной на свободном конце (см. рис.). Определить продольное смещение  $\Delta$  точки приложения силы. Выразить это смещение через прогиб  $v_B$  балки на конце.

*Решение.* На рис. показан участок стержня бесконечно малой длины  $dl$ , расположенный в произвольном месте. Отрезок  $dl$  имеет проекции  $dx$  и  $dv$  на оси  $x$  и  $y$ . Разность  $(dl - dx)$  показывает, насколько проекция наклонного отрезка короче его самого

$$\delta(\Delta l) = dl - dx.$$

Разность же между всей длиной изогнутого стержня и его проекцией на ось  $x$  найдется интегрированием этого выражения по всей длине

$$\Delta = \int_l \delta(\Delta l) = \int_0^l (dl - dx).$$

Так как

$$dl = \sqrt{dx^2 + dv^2},$$

то предыдущий интеграл переписывается так

$$\Delta = \int_0^l (\sqrt{dx^2 + dv^2} - dx)$$

или

$$\Delta = \int_0^l (\sqrt{1 + (dv/dx)^2} - 1) dx = \int_0^l (\sqrt{1 + (v')^2} - 1) dx.$$

Разложим радикал в степенной ряд и удержим два его первых члена. Найдем

$$\Delta = \int_0^l \left( 1 + \frac{1}{2}(v')^2 - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx. \quad (1)$$

Составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI v'' = -F l + F x, \quad (2)$$

$$EI v' = C - F l x + \frac{1}{2} F x^2, \quad (3)$$

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{2} F l x^2 + \frac{1}{6} F x^3. \quad (4)$$

Здесь имеем  $C = 0$  и  $D = 0$ , потому что  $v'(0) = 0$  и  $v(0) = 0$ . Подставим (3) в (1)

$$\Delta = \frac{F^2}{2(EI)^2} \int_0^l \left( -lx + \frac{1}{2} x^2 \right)^2 dx,$$

а затем раскроем скобки и проинтегрируем

$$\Delta = \frac{F^2 l^5}{15(EI)^2}. \quad (5)$$

Прогиб на конце балки (при  $x = l$ ) определим из (4):

$$|v_B| = \frac{F l^3}{3EI}. \quad (6)$$

Выделим в выражении (5) множитель  $(F l^3 / (3EI))^2$  и заменим его через  $v_B^2$  из (6). Получим окончательно

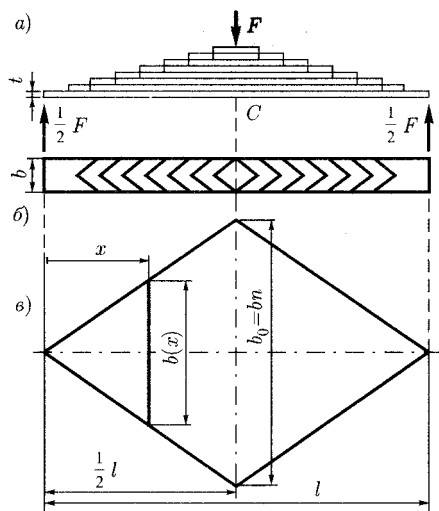
$$\Delta = 0,6 \frac{v_B^2}{l}.$$

В реальных балках отношение  $v_B/l$  намного меньше 0,01. Даже если мы возьмем этот крайний случай, то имеем для разности между длиной балки и проекцией ее изогнутой оси на начальное направление

$$\Delta = 0,6 \cdot 0,01^2 l \leq 10^{-4} l,$$

что вполне пренебрежимо с инженерной точки зрения.

**11.30.** Стальная рессора (см. рис. а и б) состоит из десяти листов шириной  $b = 75$  мм и толщиной  $t = 10$  мм. Пролет рессоры  $l = 1$  м. Допускаемое напряжение для материала рессоры  $[\sigma] = 400$  МПа. Определить допускаемую нагрузку  $[F]$  на рессору и прогиб под силой.



К задаче 11.30

*Решение.* Листовой рессоре сопоставляют ее расчетную схему – балку равного сопротивления (рис. в). В такой балке высота принимается постоянной, равной толщине  $t$  одного листа, а ширина  $b(x)$  изменяется по линейному закону  $b(x) = 2xb_0/l$  (см. рис. в). Здесь  $b_0$  – максимальная ширина рессоры, причем  $b_0 = bn$ , где  $n$  – количество листов в пакете. Тогда момент сопротивления и момент инерции определяют так

$$W_0 = \frac{1}{6} b_0 t^2 = \frac{1}{6} b n t^2 = 75 \cdot 10 \cdot 10^2 / 6 = 12500 \text{ мм}^3 = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$I_0 = \frac{1}{12} b_0 t^3 = \frac{1}{12} b n t^3 = 75 \cdot 10 \cdot 10^3 / 12 = 62500 \text{ мм}^4 = 62,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4.$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_0} = \frac{Fl}{4W_0} = [\sigma],$$

откуда

$$[F] = \frac{4W_0[\sigma]}{l} = 4 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot 10^6 / 1 = 2 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Прогиб в середине пролета подсчитаем по известной формуле

$$\begin{aligned} v_c &= -\frac{Fl^3}{32EI} = -2 \cdot 10^4 \cdot 1^3 / (32 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 62,5 \cdot 10^{-9}) = \\ &= -0,05 \text{ м} = -50 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Напомним, что прогиб балки постоянного сечения тех же размеров меньше найденного в 1,5 раза.

**11.31.** Стальная балка круглого поперечного сечения диаметром 120 мм имеет шарнирные опоры по концам. Балка загружена в середине пролета (равного 2,6 м) грузом  $F = 18 \text{ кН}$ . Определить наибольший прогиб балки.

Как изменится этот

прогиб, если использовать балку равного сопротивления.

*Решение.* Наибольший прогиб призматической балки определяется по известной формуле

$$v = -\frac{Fl^3}{48EI}.$$

Так как в данном случае

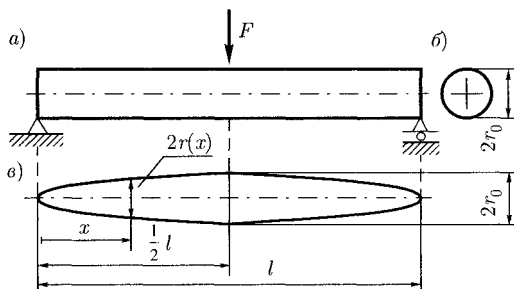
$$I_0 = \frac{1}{4} \pi r_o^4 = 3,14 \cdot 60^4 / 4 = 10,18 \cdot 10^6 \text{ мм}^4 = 10,18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4,$$

то можно найти

$$\begin{aligned} v &= -18 \cdot 10^3 \cdot 2,4^3 / (48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10,18 \cdot 10^{-6}) = \\ &= -0,00255 \text{ м} = -2,55 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Для балки равного сопротивления имеем

$$\sigma = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma].$$



К задаче 11.31

Изгибающий момент в данном случае

$$M(x) = \frac{1}{2} F x,$$

поэтому условие прочности принимает вид

$$\frac{F x}{2 \left( \frac{1}{4} \pi r^3(x) \right)} = [\sigma].$$

Откуда

$$r(x) = \sqrt[3]{\frac{2 F x}{\pi [\sigma]}}. \quad (1)$$

Таким образом, продольный профиль балки – это парабола третьей степени (рис. 6). При  $x = 0, 5l$  получаем

$$r|_{x=0,5l} = r_o = \sqrt[3]{\frac{F l}{\pi [\sigma]}}. \quad (2)$$

Выражению (1) с использованием соотношения (2) можно придать вид

$$r(x) = r_o \sqrt[3]{\frac{2x}{l}}. \quad (3)$$

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (на половине ее длины):

$$EI(x)v'' = \frac{1}{2} F x$$

или

$$E \left( \frac{1}{4} \pi r^4(x) \right) v'' = \frac{1}{2} F x.$$

С учетом (3) это равенство переписывается так

$$E \left( \frac{1}{4} \pi r_o^4 \right) \cdot \left( \frac{2x}{l} \right)^{\frac{4}{3}} v'' = \frac{1}{2} F x$$

или

$$EI_0 v'' = \frac{1}{2} F \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{4}{3}} x^{-\frac{1}{3}}. \quad (4)$$

Далее интегрируем как обычно

$$EI_0 v' = C + \frac{1}{2} F \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} = C + \frac{3}{4} F \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}}, \quad (5)$$

$$EI_0 v = D + Cx + \frac{3}{4} F \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{3}{5} = D + Cx + \frac{9}{20} F \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}}. \quad (6)$$



Условия закрепления

$$v' \Big|_{x=\frac{l}{2}} = 0, \quad (7)$$

$$v \Big|_{x=0} = 0. \quad (8)$$

Подставим (7) и (8) в (5) и (6) соответственно. Получим

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ 0 &= C + \frac{3}{4} F \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{4}{3}} \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Из последнего находим

$$C = -\frac{3}{4} F \left( \frac{l}{2} \right)^2 = -\frac{3}{16} F l^2,$$

что позволяет переписать уравнение (6) следующим образом

$$v = \frac{F}{EI_0} \left( -\frac{3}{16} l^2 x + \frac{9}{20} \left( \frac{l}{2} \right)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} \right).$$

Для прогиба в середине пролета можно найти

$$\begin{aligned} v^* &= v \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{F}{EI_0} \left( -\frac{3}{16} \cdot \frac{l^3}{2} + \frac{9}{20} \left( \frac{l}{2} \right)^3 \right) = \\ &= \frac{F l^3}{EI_0} \left( -\frac{3}{32} + \frac{9}{160} \right) = -\frac{3 F l^3}{80 EI_0}. \end{aligned}$$

Прогиб  $v^*$  балки равного сопротивления больше аналогичного прогиба  $v$  призматической балки в

$$k = \left( \frac{3}{80} \right) : \left( \frac{1}{48} \right) = 1,8 \text{ раза.}$$

Если вернуться к числовым параметрам, то получим для условий задачи

$$v^* = kv = 1,8 \cdot (-2,55) = -4,59 \text{ мм.}$$

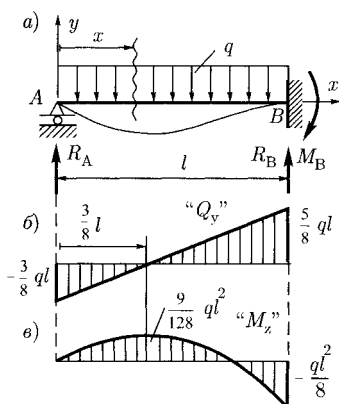
**11.32.** Балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ , одним своим концом опирается на шарнирную опору, а другим закреплена (см. рис.). Найти реакции, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ , определить наибольший по модулю прогиб.

*Решение.* Зададимся направлениями реакций (см. рис. а) и составим условия статики:

$$\sum F_y = -ql + R_A + R_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_{z(B)} = \frac{1}{2} ql^2 - R_A l - M_B = 0. \quad (2)$$

Итак, имеем два уравнения равновесия и три реакции. Следовательно, балка статически неопределима. Недостающее уравнение найдем из рассмотрения деформаций системы.



К задаче 11.32

наний (4) и (5). Запишем

$$D = 0, \quad (7)$$

$$0 = C + \frac{1}{2} R_A l^2 - \frac{1}{6} q l^3, \quad (8)$$

$$0 = D + C l + \frac{1}{6} R_A l^3 - \frac{1}{24} q l^4. \quad (9)$$

Уравнения (1), (2), (8) и (9) образуют систему, решением которой будут реакции и постоянная интегрирования. Найдем их:

$$R_A = \frac{3}{8} q l, \quad R_B = \frac{5}{8} q l, \quad M_B = \frac{1}{8} q l^2, \quad C = -\frac{1}{48} q l^3.$$

Далее можно приступить к построению эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  (рис. б и в).

Положение сечения с максимальным изгибающим моментом определим из условия равенства нулю поперечной силы

$$Q_y = q x_* - R_A = q x_* - \frac{3}{8} q l = 0.$$

Отсюда имеем

$$x_* = \frac{3}{8} l,$$

что позволяет найти  $M_{\max} = \frac{9}{128} q l^2$ .

Абсциссу сечения с экстремальным прогибом найдем из условия

$$v' = C + \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{6} q x^3 = 0$$

Составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$EI v'' = R_A x - \frac{1}{2} q x^2, \quad (3)$$

$$EI v' = C + \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{6} q x^3, \quad (4)$$

$$EI v = D + C x + \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{24} q x^4. \quad (5)$$

Условия закрепления в данной балке следующие:

$$v|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=l} = 0, \quad v|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

Развернем условия (6) с помощью уравнений

или

$$-\frac{1}{48}ql^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}qlx^2 - \frac{1}{6}qx^3 = 0,$$

если использовать выражения, найденные выше для  $C$  и  $R_A$ . Решаем это уравнение

$$x \approx 0,42l,$$

а затем определяем экстремальный прогиб

$$v_{\text{extr}} = v|_{x=0,42l} = -0,00542 \frac{ql^4}{EI}.$$

**11.33.** Найти реакции в статически неопределимых балках, построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ .

Ответ:

$$a) M_A = \frac{1}{8}M_0,$$

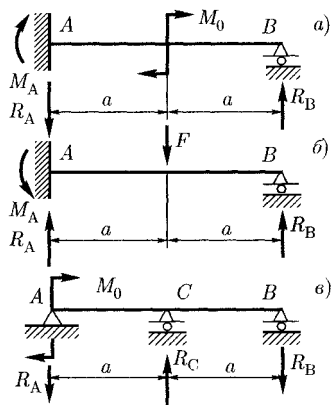
$$R_A = R_B = \frac{9M_0}{16a};$$

$$б) M_A = \frac{3}{8}Fa, R_A = \frac{11}{16}F,$$

$$R_B = \frac{5}{16}F;$$

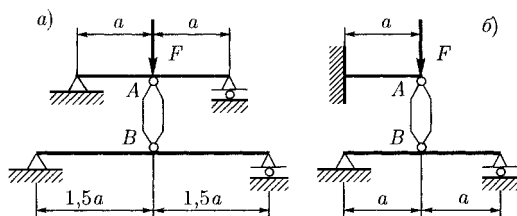
$$в) R_A = \frac{5M_0}{4a}, R_B = \frac{M_0}{4a},$$

$$R_C = \frac{6M_0}{4a}, C = -\frac{7}{24}M_0a.$$



К задаче 11.33

**11.34.** На рис. а и б изображены две балочные системы, каждая из которых образована с помощью жесткой тяги  $AB$ . Сечения всех балок одинаковы. Найти усилие  $F_*$ , воспринимаемое нижней балкой, а также определить вертикальное перемещение тяги.

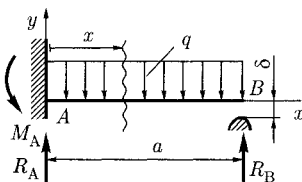


К задаче 11.34

Ответ:

$$a) F_* = \frac{8}{35}F, v = -\frac{9F_*a^3}{128EI} = -\frac{9Fa^3}{560EI};$$

$$б) F_* = \frac{2}{3}F, v = -\frac{F_*a^3}{6EI} = -\frac{Fa^3}{9EI}.$$



К задаче 11.35

**11.35.** Найти реакции в балке, нагруженной распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ . Балка закреплена одним концом и имеет малый зазор  $\delta$  между другим концом и опорой (см. рис.).

*Решение.* Составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$EI v'' = -M_A + R_A x - \frac{1}{2}qx^2, \quad (1)$$

$$EI v' = C - M_A x + \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{1}{2}qx^3, \quad (2)$$

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{2}M_A x^2 + \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{24}qx^4. \quad (3)$$

Условия закрепления в данной ситуации:

$$v'|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=a} = -\delta. \quad (4)$$

Из первых двух получаем

$$C = 0, \quad D = 0,$$

а из третьего

$$-\frac{1}{2}M_A a^2 + \frac{1}{6}R_A a^3 - \frac{1}{24}qa^4 = -\delta EI. \quad (5)$$

Из уравнения равновесия

$$\sum m_{z(B)} = M_A - R_A a + \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

находим

$$M_A = R_A a - \frac{1}{2}qa^2 \quad (6)$$

и подставляем это в (5):

$$-\frac{1}{2}R_A a^3 + \frac{1}{4}qa^4 + \frac{1}{6}R_A a^3 - \frac{1}{24}qa^4 = -\delta EI.$$

Отсюда имеем

$$R_A = \frac{5}{8}qa + \frac{3\delta EI}{a^3}. \quad (7)$$

С помощью (6) и (7) отыскиваем момент в заделке

$$M_A = \frac{1}{8}qa^2 + \frac{3\delta EI}{a^2}. \quad (8)$$

Реакцию  $R_B$  найдем из другого уравнения равновесия:

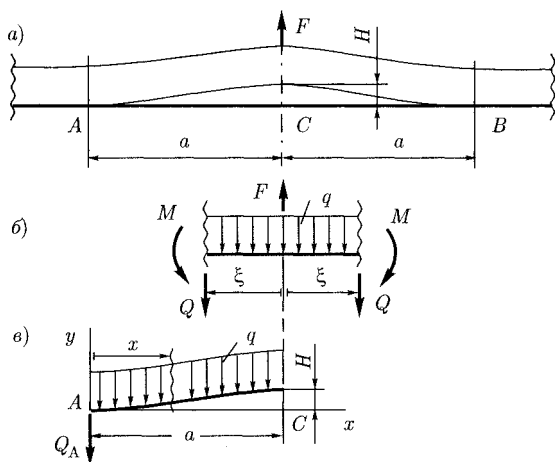
$$R_B = qa - R_A = \frac{3}{8}qa - \frac{3\delta EI}{a^3}. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что данная задача имеет решение лишь при

$$\delta < \frac{qa^4}{8EI},$$

потому что в случае  $\delta > qa^4/8EI$  правый конец балки не коснется опоры.

**11.36.** Стальная труба газопровода диаметром  $D = 2R = 500$  мм и толщиной стенки  $t = 10$  мм, свободно лежащая на земле, приподнимается краном на высоту  $H = 100$  мм. Найти силу  $F$ , считая трубу бесконечно длинной, а основание бесконечно жестким. Дополнительно найти расстояние  $l = 2a$  между точками отрыва от земли приподнятой части газопровода (рис. а).



К задаче 11.36

*Решение.* Изгибающий момент в точке отрыва равен нулю, потому что кривизна изогнутой оси трубы равна нулю.

Выделим из трубы относительно короткий отрезок, симметричный относительно линии действия силы  $F$  и имеющий длину  $2\xi$ , причем  $\xi < a$ .

На рис. б показаны усилия, действующие на выделенный участок трубы. Составим условие равновесия этого отрезка трубы

$$\sum F_y = F - 2q\xi - 2Q = 0.$$

Здесь  $q$  – погонная нагрузка на трубу, определяемая ее собственным весом. При  $\xi = a$  предыдущему уравнению можно придать вид

$$F = 2qa + 2Q_A. \quad (1)$$

Здесь через  $Q_A$  обозначена поперечная сила в сечении  $A$ .

Совместим с сечением  $A$  начало координат, составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси (для участка  $AC$ , см. рис. в):

$$EI v'' = -Q_A x - \frac{1}{2} q x^2, \quad (2)$$

$$EI v' = C - \frac{1}{2} Q_A x^2 - \frac{1}{6} q x^3, \quad (3)$$

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{6} Q_A x^3 - \frac{1}{24} q x^4. \quad (4)$$

Условия закрепления концов изогнутого отрезка трубы  $AC$  имеют вид

$$v' |_{x=0} = 0, \quad (5)$$

$$v |_{x=0} = 0, \quad (6)$$

$$v' |_{x=a} = 0, \quad (7)$$

$$v |_{x=a} = H. \quad (8)$$

С помощью условий (5) и (6) получаем из (3) и (4)

$$C = 0, \quad D = 0. \quad (9)$$

Из тех же уравнений (3) и (4), но уже с использованием условий (7) и (8) можно найти

$$-\frac{1}{2} Q_A a^2 - \frac{1}{6} q a^3 = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{1}{6} Q_A a^3 - \frac{1}{24} q a^4 = EIH. \quad (11)$$

Уравнения (1), (10) и (11) образуют систему, из решения которой находим

$$Q_A = -\frac{1}{3} qa, \quad F = \frac{4}{3} qa, \quad qa^4 = 72 EIH.$$

Последнее из этих соотношений можно переписать так:

$$a = \sqrt[4]{\frac{72 EIH}{q}}.$$

Кроме того надо иметь в виду:

$$A = 2\pi Rt = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,25 \cdot 0,01 = 0,0157 \text{ м}^2,$$

$$q = (A \cdot 1)\gamma = A\rho g = 0,0157 \cdot 7800 \cdot 9,81 = 1200 \text{ Н/м},$$

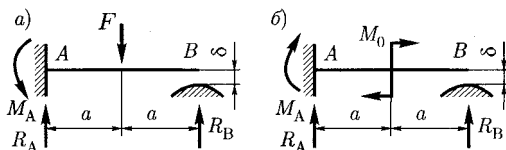
$$I_z = \frac{1}{2}I_p \approx (2\pi Rt \cdot R^2)/2 = \pi R^3 t = 3,14 \cdot 0,25^3 \cdot 0,01 = 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4.$$

Найденные здесь числовые значения параметров позволяют закончить решение задачи

$$a = \sqrt[4]{72 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,49 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1/1200} = 27,7 \text{ м},$$

$$F = 4 \cdot 1200 \cdot 27,7/3 = 44300 \text{ кН}.$$

**11.37.** Найти реакции в балке, защемленной одним концом и имеющий малый зазор  $\delta$  между другим концом и опорой. Рассмотреть два варианта нагружения балки (см. рис. а и б).



К задаче 11.37

Ответ:

$$a) R_A = \frac{11}{16}F + \frac{3\delta EI}{8a^3}, R_B = \frac{5}{16}F - \frac{3\delta EI}{8a^3}, M_A = \frac{3}{8}Fa + \frac{3\delta EI}{4a^2}.$$

Зазор исчезнет только при  $\delta < 5Fa^3/6EI$ .

б)  $R_A = R_B = \frac{9M_0}{16a} - \frac{3\delta EI}{8a^3}$ ,  $M_A = \frac{1}{8}M_0 - \frac{3\delta EI}{4a^2}$ . Зазор исчезнет только при  $\delta < 3M_0a^2/2EI$ ; при  $\delta > M_0a^2/6EI$  момент в заделке будет направлен в сторону, противоположную указанной на рис. б.

**11.38.** Стальная балка на двух шарнирных опорах, нагруженная на одном из концов сосредоточенным моментом  $M_0$ , подпирается в середине пролета пружинной опорой с податливостью  $\lambda$ . Найти реакции в опорах при  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}$ , если  $a = 1 \text{ м}$ ,  $M_0 = 8 \text{ кНм}$ ,  $I = 350 \text{ см}^4$ .

Решение. Предполагаемое направление реакций указано на рис. Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_y = -R_A + R_B - R_c = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_{z(c)} = -M_0 + R_A \cdot 2a - R_B \cdot a = 0. \quad (2)$$

Составим и проинтегрируем дифференциальные уравнения изогнутой оси балки:

$$EI v'' = M_0 - R_A x \Big|_1 + R_B (x - a) \Big|_2 . \quad (3)$$

$$EI v' = C + M_0 x - \frac{1}{2} R_A x^2 \Big|_1 + \frac{1}{2} R_B (x - a)^2 \Big|_2 , \quad (4)$$

$$EI v = D + Cx + \frac{1}{2} M_0 x^2 - \frac{1}{6} R_A x^3 \Big|_1 + \frac{1}{6} R_B (x - a)^3 \Big|_2 . \quad (5)$$

Условия закрепления:

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=2a} = 0, \quad v|_{x=a} = -\lambda R_B . \quad (6)$$

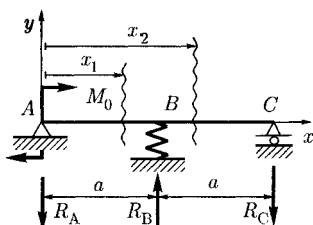
Из первого условия (6) имеем

$$D = 0, \quad (7)$$

а второе и третье дают

$$2Ca + \frac{4}{2} M_0 a^2 - \frac{8}{6} R_A a^3 + \frac{1}{6} R_B a^3 = 0, \quad (8)$$

$$Ca + \frac{1}{2} M_0 a^2 - \frac{1}{6} R_A a^3 = -\lambda R_B EI. \quad (9)$$



К задаче 11.38

Уравнения (1), (2), (8) и (9) образуют систему, из решения которой получаем

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{M_0}{a} \cdot \frac{5a^2 + 12\lambda EI}{4a^2 + 24\lambda EI}, \\ R_B &= \frac{M_0}{a} \cdot \frac{6a^2}{4a^2 + 24\lambda EI}, \\ R_C &= \frac{M_0}{a} \cdot \frac{a^2 - 12\lambda EI}{4a^2 + 24\lambda EI}, \\ C &= -M_0 a \cdot \frac{7a^2 + 81\lambda EI}{24a^2 + 144\lambda EI}. \end{aligned}$$

Численные расчеты при заданных в условии параметрах приводят к следующему:

– при  $\lambda = 0$  имеем  $R_A = 10$  кН,  $R_B = 12$  кН,  $R_C = 2$  кН,  $C = -2,333$  кНм<sup>2</sup>;

– при  $\lambda = 0,2 \cdot 10^{-6}$  м/Н получаем  $R_A = 6,37$  кН,  $R_B = 6,52$  кН,  $R_C = -0,739$  кН,  $C = -3,322$  кНм<sup>2</sup>.

В заключение отметим, что при  $12\lambda EI > a^2$  реакция  $R_C$  направлена в сторону, противоположную указанной на рис., как это и вышло в рассмотренном варианте.

**11.39.** Балка опирается одним концом на шарнирную опору, а другим закреплена. Закрепление имеет податливость  $\lambda_M$  по углу поворота. Балка нагружена сосредоточенным моментом  $M_0$  на шарнирно опертом конце. Определить реакции в закреплениях. Дать



численную оценку этих величин при  $\lambda_M = 0$  и  $\lambda_M = 10^{-6}$  рад/Нм, если  $a = 1$  м,  $I = 198$  см<sup>4</sup>,  $M_0 = 5$  кНм,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

*Решение.* Зададимся направлениями реакций и составим уравнение равновесия

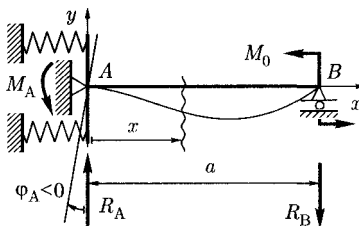
$$\sum m_{z(B)} = M_A - R_A a + M_0 = 0. \quad (1)$$

Далее записываем и интегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$EI v'' = -M_A + R_A x, \quad (2)$$

$$EI v' = C - M_A x + \frac{1}{2} R_A x^2, \quad (3)$$

$$EI v = D + Cx - \frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6} R_A x^3. \quad (4)$$



К задаче 11.39

Условия закрепления в данном случае имеют следующий вид:

$$v|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=0} = -\lambda_M M_A, \quad v|_{x=a} = 0. \quad (5)$$

Первое из них позволяет найти

$$D = 0,$$

а второе и третье дают возможность записать

$$C = -\lambda_M M_A EI, \quad (6)$$

$$Ca - \frac{1}{2} M_A a^2 + \frac{1}{6} R_A a^3 = 0. \quad (7)$$

В итоге получаем

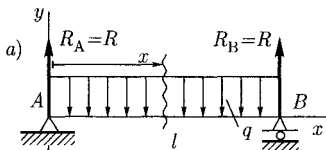
$$\begin{aligned} M_A &= \frac{M_0}{2} \cdot \frac{a}{a + 3\lambda_M EI}, \\ R_A = R_B &= \frac{3M_0}{2a} \cdot \frac{a + 2\lambda_M EI}{a + 3\lambda_M EI}, \\ C &= -\frac{M_0 a}{2} \cdot \frac{\lambda_M EI}{a + 3\lambda_M EI}. \end{aligned}$$

Закончим решение задачи численной оценкой рассматриваемых величин по заданным в условии параметрам:

- при  $\lambda_M = 0$  имеем  $M_A = 2,5$  кНм,  $R_A = R_B = 7,5$  кН,  $C = 0$ ;
- при  $\lambda_M = 10^{-6}$  рад/Нм получаем  $M_A = 1,142$  кНм,  $R_A = R_B = 6,142$  кН,  $C = -0,452$  кНм<sup>2</sup>.

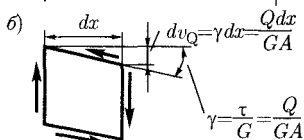
**11.40.** Балка на двух шарнирных опорах нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ . Определить прогиб в середине пролета с учетом поправки на поперечную силу.

*Решение.* Ввиду симметрии имеем для реакций



$$R_A = R_B = R = \frac{1}{2}ql. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид



$$EI v'' = M_{изг} = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2. \quad (2)$$

Далее как обычно интегрируем это уравнение дважды

К задаче 11.40

$$EI v' = C + \frac{1}{4}qlx^2 - \frac{1}{6}qx^3, \quad (3)$$

$$EI v = D + Cx + \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qx^4.$$

Последнее уравнение представим в форме

$$v = \frac{1}{EI} \left( D + Cx + \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qx^4 \right). \quad (4)$$

Учет влияния поперечной силы требует вписать в уравнение (4) дополнительное слагаемое

$$v_Q = \int_0^x dv_Q.$$

Понятие элементарного перемещения  $dv_Q$  на длине  $dx$  поясняется на рис. б. Здесь  $\gamma$  – угол сдвига,  $G$  – модуль сдвига,  $\tau$  – касательное напряжение,  $A$  – площадь поперечного сечения стержня,  $Q$  – поперечная сила. В этом контексте используется понятие среднего касательного напряжения по сечению

$$\tau = \frac{Q}{A}.$$

Так как из рис. б имеем

$$dv_Q = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx = \frac{Q}{GA} dx,$$

то перемещение за счет поперечной силы принимает вид

$$v_Q = \int_0^x dv_Q = \int_0^x \frac{kQ}{GA} dx. \quad (5)$$

Здесь дополнительно вписан безразмерный множитель  $k$ , называемый коэффициентом формы и учитывающий реальную неравномерность распределения касательных напряжений по сечению при изгибе. Таким образом, уравнение изогнутой оси стержня с упомянутой поправкой принимает вид

$$v = \frac{1}{EI} \left( D + Cx + \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qx^4 \right) + \int_0^x \frac{kQ}{GA} dx. \quad (6)$$

В нашем случае

$$Q = -R + qx = -\frac{1}{2}qlx + qx, \quad (7)$$

поэтому уравнение (6) переписывается следующим образом:

$$v = \frac{1}{EI} \left( D + Cx + \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qx^4 \right) + \frac{k}{GA} \int_0^x \left( -\frac{1}{2}ql + qx \right) dx.$$

Возьмем интеграл. Получаем

$$v = \frac{1}{EI} \left( D + Cx + \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qx^4 \right) + \frac{k}{GA} \left( -\frac{1}{2}qlx + \frac{1}{2}qx^2 \right). \quad (8)$$

Условия закрепления имеют вид

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), находим

$$D = 0, \quad C = -\frac{1}{24}ql^3. \quad (10)$$

Соотношения (10) дают возможность записать окончательно уравнение прогибов

$$v = \frac{ql^4}{24EI} \left( -\left(\frac{x}{l}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l} \right) + \frac{kql^2}{2GA} \left( \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \right). \quad (11)$$

Найдем, к примеру, прогиб в середине пролета

$$v_{\text{extr}} = v \Big|_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{5ql^4}{384EI} - \frac{kql^2}{8GA}. \quad (12)$$

Уравнение (11) можно продифференцировать по  $x$ . Найдем

$$v' = \frac{ql^3}{24EI} \left( -4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1 \right) + \frac{kql}{2GA} \left( 2\frac{x}{l} - 1 \right). \quad (13)$$

Выражение (13) надлежит использовать вместо соотношения (3).

**11.41.** Консольная двутавровая стальная балка № 60 с вылетом  $l = 2$  м нагружена на свободном конце силой  $F = 200$  кН. Определить прогиб на конце балки с учетом поправки на поперечную силу.

*Решение.* Прогиб сечения под силой  $F$  за счет изгибающего момента находится по известной формуле

$$\begin{aligned} v_M &= -\frac{Fl^3}{3EI} = -200 \cdot 10^3 \cdot 2^3 / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 76810 \cdot 10^{-8}) = \\ &= -0,0035 \text{ м} = -3,5 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Переходим к учету поперечной силы. В данной задаче  $Q = \text{const}$ . В этом случае формула для  $v_Q$  из предыдущей задачи 11.40 преобразуется следующим образом:

$$v_Q = -\frac{kQl}{GA}.$$

В двутавровых балках коэффициент формы вычисляют так:

$$k = \frac{A}{A_{\text{ст}}},$$

где  $A_{\text{ст}}$  – площадь поперечного сечения стенки. Подставляя выражение для  $k$  в предыдущую формулу, получим

$$v_Q = -\frac{Ql}{GA_{\text{ст}}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$A_{\text{ст}} = (h - 2t)s,$$

где  $h$ ,  $t$  и  $s$  – высота сечения, толщина полки и толщина стенки. В итоге для двутаврового профиля имеем

$$A_{\text{ст}} = (60 - 2 \cdot 1,8) \cdot 1,2 = 67,7 \text{ см}^2.$$

Наконец, вычисляем прогиб, возникающий за счет поперечной силы

$$\begin{aligned} v_Q &= -200 \cdot 10^3 \cdot 2 / (0,8 \cdot 10^{11} \cdot 67,7 \cdot 10^{-4}) = \\ &= -0,0007 \text{ м} = 0,7 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Полный прогиб найдется простым суммированием

$$v = v_M + v_Q = -3,5 - 0,7 = -4,2 \text{ мм}.$$

Таким образом, в данном случае поправка на поперечную силу составляет

$$v_Q/v_M = 0,7/3,5 = 0,2 = 20\%.$$

**11.42.** Панель, имеющая общую толщину  $h = 600$  мм и ширину  $b = 190$  мм, склеена из трех слоев (см. рис.). Два наружных слоя – стальные листы толщиной  $t = 18$  мм, промежуточный слой – пористый алюминиевый сплав, для которого модуль сдвига  $G = 0,02 \cdot 10^{11}$  Па. Панель используется в качестве консольной балки с вылетом  $l = 2$  м под нагрузку  $F = 200$  кН, приложенную на свободном конце. Найти прогиб сечения балки под силой  $F$ .

*Решение.* При подсчете момента инерции сечения следует учесть только площади сечения стальных листов

$$I_z \approx 2tb \left( \frac{h-t}{2} \right)^2 = 2 \cdot 1,8 \cdot 19 \cdot ((60-1,8)/2)^2 = 57920 \text{ см}^4.$$

Площадь же поперечного сечения промежуточного слоя составляет

$$A = (h - 2t)b = (60 - 2 \cdot 1,8) \cdot 19 = 1072 \text{ см}^2.$$

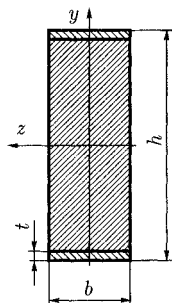
Прогибы  $v_M$  и  $v_Q$  подсчитываем по формулам, использованным в задаче 11.40:

$$\begin{aligned} v_M &= -\frac{F l^3}{3EI} = \\ &= -200 \cdot 10^3 \cdot 2^3 / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 57920 \cdot 10^{-8}) = \\ &= -0,0046 \text{ м} = -4,6 \text{ мм}, \\ v_Q &= -\frac{kQl}{GA} = \\ &= -1 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 2 / (0,02 \cdot 10^{11} \cdot 1072 \cdot 10^{-6}) = \\ &= -0,0019 \text{ м} = -1,9 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Несущая способность на изгиб трехслойной панели определяется жесткими листами, как в двутавровой балке – полками. Поэтому в панели, как и в двутавре, поперечная сила полностью воспринимается промежуточным элементом. Более того, поперечная сила распределена по поперечному сечению этого промежуточного элемента практически равномерно. Отсюда как раз и следует равенство  $k = 1$ .

Закончим решение задачи вычислением относительной доли поправки к прогибу за счет поперечной силы

$$v_Q/v_M = 1,9/4,6 = 0,41 = 41\%.$$

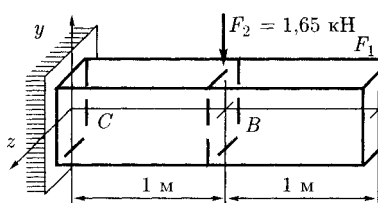


К задаче 11.42

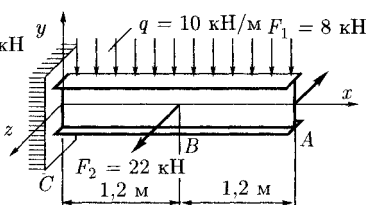
## СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ И РАСТЯЖЕНИЕМ–СЖАТИЕМ

**12.1.** Балка прямоугольного сечения защемлена одним концом и нагружена силами  $F_1$  и  $F_2$ , см. рис. Построить эпюры изгибающих моментов, указать опасное сечение.

Ответ:  $M_y^C = 1,6 \text{ кНм}$ ,  $M_z^C = 1,65 \text{ кНм}$ .



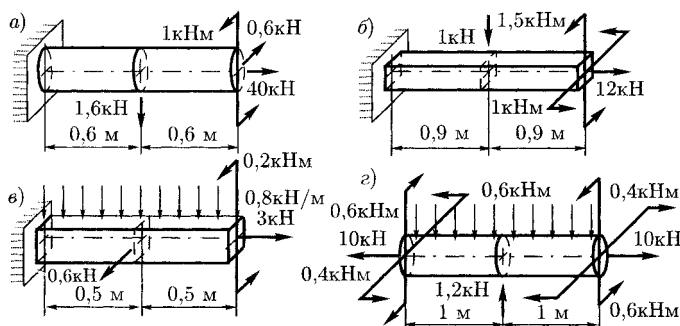
К задаче 12.1



К задаче 12.2

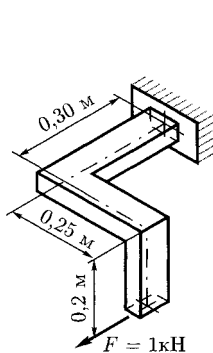
**12.2.** Двутавровая балка заделана одним концом и нагружена в плоскости наибольшей жесткости равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ , а в плоскости наименьшей жесткости – силами  $F_1$  и  $F_2$ , см. рис. Построить эпюры изгибающих моментов.

Ответ:  $M_y^C = -7,2 \text{ кНм}$ ,  $M_z^C = -28,8 \text{ кНм}$ ,  $M_y^B = +9,6 \text{ кНм}$ ,  $M_z^B = -7,2 \text{ кНм}$ .

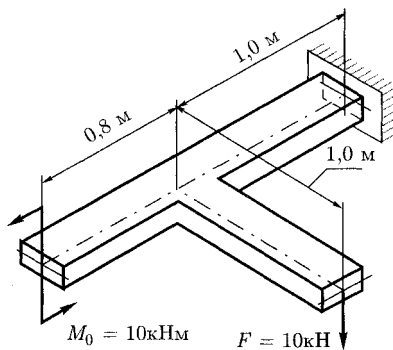


К задаче 12.3

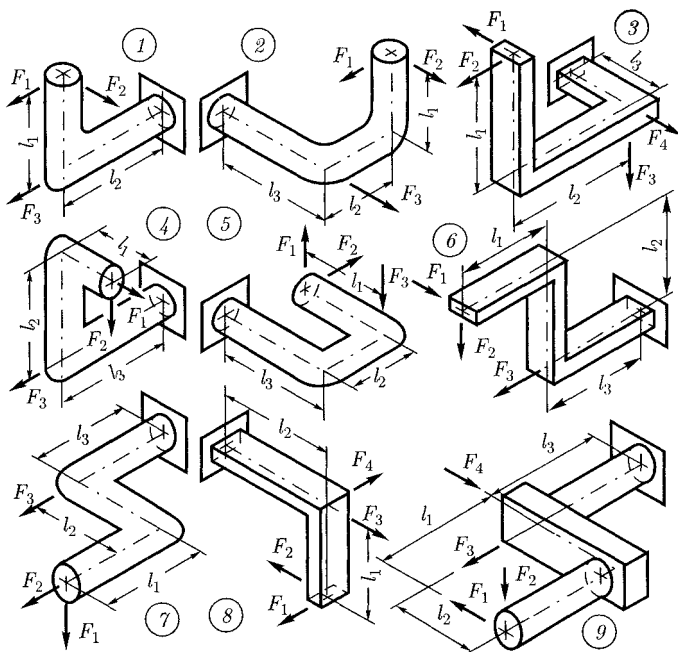
**12.3.** Для указанных на рис. стержней построить эпюры внутренних усилий.



К задаче 12.4



К задаче 12.5



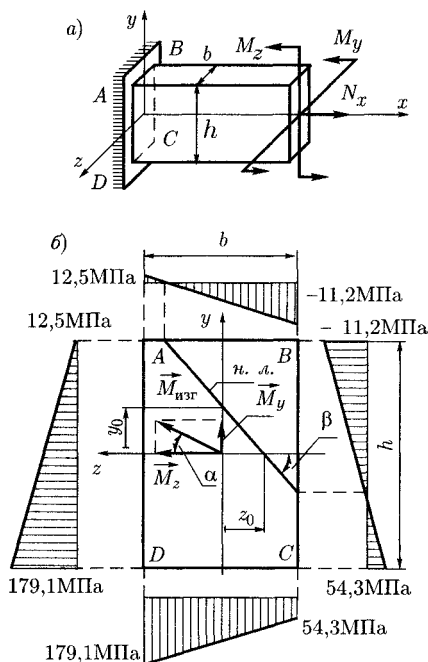
К задаче 12.6

**12.4.** Для изображенного на рис. коленчатого стержня построить эпюры внутренних усилий.

**12.5.** Для коленчатого стержня, схема которого приведена на рис., построить эпюры внутренних усилий.

**12.6.** Для изображенных на рис. коленчатых стержней построить эпюры внутренних усилий.

**12.7.** Консольная балка прямоугольного сечения ( $h = 60$  мм,  $b = 40$  мм) нагружена моментами  $M_y = 1$  кНм и  $M_z = 2$  кНм, а также продольной силой  $N_x = 80$  кН. Определить нормальные напряжения в угловых точках  $A, B, C$  и  $D$  сечения (с построением эпюр), найти положение нейтральной линии.



К задаче 12.7

*Решение.* Так как в данном случае имеем  $M_y > 0$ ,  $M_z > 0$ ,  $N_x > 0$ , то выражение для вычисления нормального напряжения в произвольной точке сечения принимает вид

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y. \quad (1)$$



Из этого уравнения можно получить для угловых точек сечения

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_A - \frac{M_z}{I_z} y_A = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z}, \\ \sigma_B &= \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_B - \frac{M_z}{I_z} y_B = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z}, \\ \sigma_C &= \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_C - \frac{M_z}{I_z} y_C = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}, \\ \sigma_D &= \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_D - \frac{M_z}{I_z} y_D = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}.\end{aligned}$$

Проведем вспомогательные вычисления

$$\begin{aligned}A &= bh = 0,04 \cdot 0,06 = 2400 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \\ W_y &= \frac{1}{6} hb^2 = 0,06 \cdot 0,04^2 / 6 = 16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \\ W_z &= \frac{1}{6} bh^2 = 0,04 \cdot 0,06^2 / 6 = 24 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}\frac{N_x}{A} &= 80000 / (2400 \cdot 10^{-6}) = 33,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,3 \text{ МПа}, \\ \frac{M_y}{W_y} &= 1000 / (16 \cdot 10^{-6}) = 62,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 62,5 \text{ МПа}, \\ \frac{M_z}{W_z} &= 2000 / (24 \cdot 10^{-6}) = 83,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 83,3 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Таким образом, можно найти

$$\begin{aligned}\sigma_A &= 33,3 + 62,5 - 83,3 = 12,5 \text{ МПа}, \\ \sigma_B &= 33,3 - 62,5 - 83,3 = -112,5 \text{ МПа}, \\ \sigma_C &= 33,3 - 62,5 + 83,3 = 54,3 \text{ МПа}, \\ \sigma_D &= 33,3 + 62,5 + 83,3 = 179,1 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Уравнение нейтральной линии получаем из уравнения (1) приравниванием нормального напряжения нулю:

$$\frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0. \quad (2)$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией от осей координат, найдутся из уравнения (2) следующим образом:

$$\begin{aligned}y_o|_{z=0} &= \frac{N_x}{M_z} \cdot \frac{I_z}{A} = \frac{N_x h^2}{12 M_z} = \\ &= (80000 / 2000) \cdot 0,06^2 / 12 = 0,0120 \text{ м}, \\ z_o|_{y=0} &= -\frac{N_x}{M_y} \cdot \frac{I_y}{A} = -\frac{N_x b^2}{12 M_y} = \\ &= -(80000 / 1000) \cdot 0,04^2 / 12 = -0,0107 \text{ м}.\end{aligned}$$

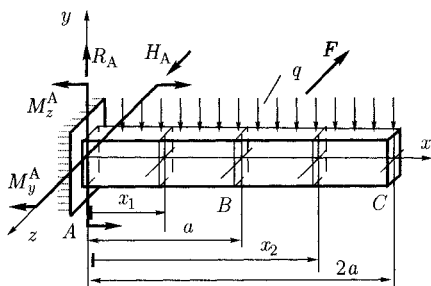
Соответствующие построения даны на рис. 6.

Здесь же дано изображение проекций векторов  $\vec{M}_y$ ,  $\vec{M}_z$  и  $\vec{M}_{изг}$ . Причем вектор полного изгибающего момента  $\vec{M}_{изг}$  наклонен к оси  $z$  под углом

$$\alpha = \arctg \left( \frac{M_y}{M_z} \right) = 26,56^\circ,$$

а нейтральная линия - под углом

$$\beta = \arctg \left( \frac{y_o}{z_o} \right) = \arctg \left( \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \right) = 48,37^\circ.$$



К задаче 12.8

**12.8.** Балка  $ABC$  длиной  $2a$  прямоугольного сечения, заделанная одним концом, нагружена в вертикальной плоскости равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ , а в горизонтальной плоскости - силой  $F$ , приложенной на расстоянии  $a$  от заделки, см. рис. Найти вертикальное  $v_C$  и горизонтальное

перемещения свободного конца балки.

*Решение.* Связываем с продольной осью балки и с главными плоскостями инерции систему координат  $x y z$ , а затем находим реакции в заделке, действующие в вертикальной плоскости  $x y$  (см. рис.)

$$M_z^A = 2qa^2, \quad R_A = 2qa,$$

а затем - в горизонтальной плоскости  $x y$

$$M_y^A = Fa, \quad H_A = F.$$

Далее составляем и интегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в вертикальной плоскости:

$$\begin{aligned} EI_z v'' &= -M_y^A + R_A x - \frac{1}{2} q x^2, \\ EI_z v' &= C_z - M_y^A x + \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{6} q x^3, \\ EI_z v &= D_z + C_z x - \frac{1}{2} M_y^A x^2 + \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{24} q x^4. \end{aligned}$$

Для упругой линии в горизонтальной плоскости придется составить и проинтегрировать два дифференциальных уравнения

$$EI_y w'' = -M_y^{\text{изг}} = -(+M_y^A - H_A x|_1 + F(x-a)|_2)$$

или

$$EI_y w'' = -M_y^A + H_A x|_1 - F(x-a)|_2,$$

$$EI_y w' = C_y - M_y^A x + \frac{1}{2} H_A x|_1 - \frac{1}{2} F(x-a)^2|_2,$$

$$EI_y w = D_y + C_y x - \frac{1}{2} M_y^A x^2 + \frac{1}{6} H_A x^3|_1 - \frac{1}{6} F(x-a)^3|_2.$$

Условия закрепления в рассматриваемых обстоятельствах имеют вид:

$$v'|_{x=0} = 0; \quad v|_{x=0} = 0; \quad w'|_{x=0} = 0; \quad w|_{x=0} = 0.$$

Отсюда следует

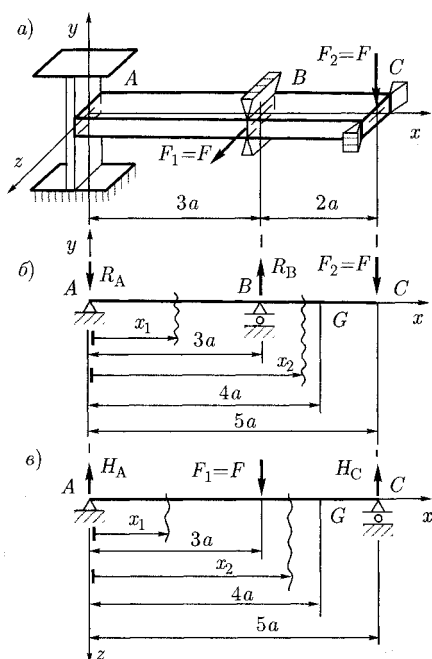
$$C_z = 0; \quad D_z = 0; \quad C_y = 0; \quad D_y = 0.$$

Наконец, определяем искомые перемещения:

$$\begin{aligned} v_C &= v|_{x=2a} = \frac{1}{EI_z} \left( -\frac{1}{2}(2qa^2)(2a)^2 + \frac{1}{6}(2qa)(2a)^3 - \frac{1}{24}q(2a)^4 \right) = \\ &= -\frac{2qa^4}{EI_z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_C &= w|_{x=2a} = \frac{1}{EI_y} \left( -\frac{1}{2}Fa(2a)^2 + \frac{1}{6}F(2a)^3 - \frac{1}{6}Fa^3 \right) = \\ &= -\frac{5Fa^3}{6EI_y}. \end{aligned}$$

**12.9.** Балка  $ABC$  закреплена в сечениях  $A$ ,  $B$  и  $C$  с помощью шарниров, см. рис. *а*. Следует добавить, что закрепление в сечении  $B$  позволяет свободное перемещение в горизонтальном направлении, а в сечении  $C$  - в вертикальном. Конец  $A$  балки соединен с тонкой стальной мембраной, контур которой закреплен неподвижно. Последняя препятствует как вертикальному, так и горизонтальному перемещению сечения  $A$ , но позволяет ему практически свободно поворачиваться как вокруг горизонтальной, так и вокруг вертикальной оси. Другими словами, в сечении  $A$  имеем шарнирное закрепление. Балка нагружена двумя активными силами  $F_1 = F$  и  $F_2 = F$ , см. рис. *а*. Составить и проинтегрировать дифференциальные уравнения изогнутой оси балки. Найти вертикальное и горизонтальное перемещение сечения  $G$ , см. рис. *б* и *в*. Принять  $I_y = 3I_z = 3I$ .



К задаче 12.9

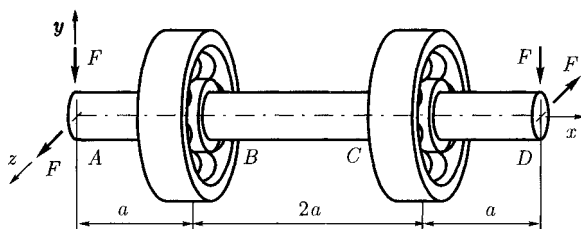
*Указание.* Схема выбора осей координат иллюстрируется с помощью рис. а. На рис. б и в балка дана в двух проекциях со стандартным изображением опорных закреплений.

$$\text{Ответ: } v_G = -\frac{17Fa^3}{6EI} ; w_G = \frac{Fa^3}{2EI} .$$

**12.10.** Ось  $ABCD$  вращается в двух шарикоподшипниках и нагружена так, как показано на рис. Определить перемещения сечения  $A$  как по вертикали ( $v_A$ ), так и по горизонтали ( $w_A$ ), а также углы поворота  $\varphi_z^B$  и  $\varphi_y^B$  внутреннего кольца подшипника  $B$  из своей плоскости относительно наружного кольца.

*Указание.* Шарикоподшипник можно считать шарнирной опорой, потому что в нем практически не возникает сопротивления повороту внутреннего кольца из своей плоскости относительно наружного (при малых углах поворота!).

$$\text{Ответ: } v_A = -\frac{4Fa^3}{3EI} ; w_A = \frac{2Fa^3}{3EI} ; \varphi_z^B = \frac{Fa^2}{EI} ; \varphi_y^B = \frac{Fa^2}{3EI} .$$



К задаче 12.10

**12.11.** Деревянная балка прямоугольного сечения ( $h = 0,20$  м,  $b = 0,12$  м, см. рис.) шарнирно опирается по концам. В середине пролета ( $l = 3$  м) приложена сила  $F = 8$  кН, которая направлена поперек продольной оси балки, но под углом  $\varphi = 12^\circ$  к вертикали, см. рис. Определить нормальные напряжения в угловых точках опасного сечения, построить эпюры изменения этих напряжений по боковым сторонам сечения, проверить прочность балки при  $[\sigma] = 10$  МПа, определить полный прогиб по величине и направлению.

*Решение.* Балка находится в условиях косоугольного изгиба. Максимальный момент в середине пролета находим как обычно:

$$M_{\max} = \frac{1}{4} F l = 8 \cdot 3/4 = 6 \text{ кНм.}$$

Вычисляем проекции этого момента по осям координат

$$M_y = M_{\max} \sin \varphi = 6 \cdot 0,208 = 1,25 \text{ кНм,}$$

$$M_z = M_{\max} \cos \varphi = 6 \cdot 0,978 = 5,87 \text{ кНм.}$$

Общее уравнение для нормальных напряжений в поперечном сечении запишется в данном случае так

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y.$$

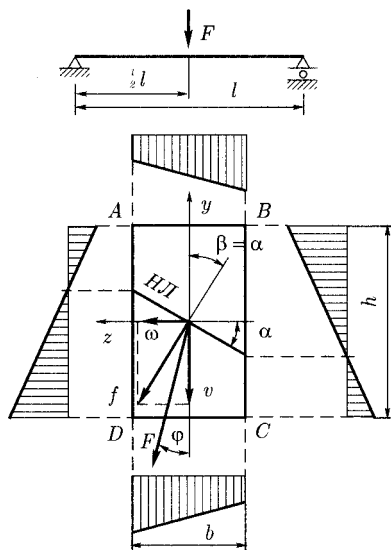
Отсюда нетрудно получить для угловых точек сечения:

$$\sigma_A = \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_B = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_C = -\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_D = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}.$$



К задаче 12.11

Так как

$$W_y = \frac{1}{6}hb^2 = 0,20 \cdot 0,12^2/6 = 480 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_z = \frac{1}{6}bh^2 = 0,12 \cdot 0,20^2/6 = 800 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

то нетрудно вычислить

$$\sigma_A = -4,7 \text{ МПа}, \sigma_B = -9,9 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = +4,7 \text{ МПа}, \sigma_D = +9,9 \text{ МПа},$$

см. также эпюры на рис. Устанавливаем также, что условие прочности  $\sigma \leq [\sigma]$  соблюдается.

Вертикальный и горизонтальный прогибы среднего сечения балки вычисляем по табличным формулам

$$v = -\frac{F_y l^3}{48EI_z}, \quad w = \frac{F_z l^3}{48EI_y}.$$

В нашем случае

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3 = 0,20 \cdot 0,12^3/12 = 28,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4,$$

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 = 0,12 \cdot 0,20^3/12 = 80,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4,$$

поэтому получаем

$$\begin{aligned} v &= -8000 \cdot 0,978 \cdot 3^3 / (48 \cdot 0,1 \cdot 10^{11} \cdot 80 \cdot 10^{-6}) = \\ &= -0,00550 \text{ м} = -5,50 \text{ мм}, \\ w &= +8000 \cdot 0,208 \cdot 3^3 / (48 \cdot 0,1 \cdot 10^{11} \cdot 28,8 \cdot 10^{-6}) = \\ &= +0,00325 \text{ м} = +3,25 \text{ мм}, \end{aligned}$$

а также

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{5,50^2 + 3,25^2} = 6,39 \text{ мм}.$$

Угол наклона  $\beta$  вектора  $\vec{f}$  к оси  $y$  вычисляем очевидным образом

$$\beta = \arctg(w/v) = \arctg(3,25/5,50) = 30,6^\circ.$$

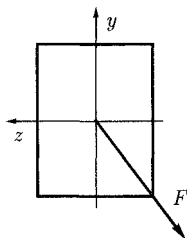
Угол же наклона  $\alpha$  нейтральной линии к оси  $z$  вычислим по стандартной формуле

$$\alpha = \arctg\left(\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y}\right) = \arctg(1,25/5,87)(80/28,8) = 30,6^\circ.$$

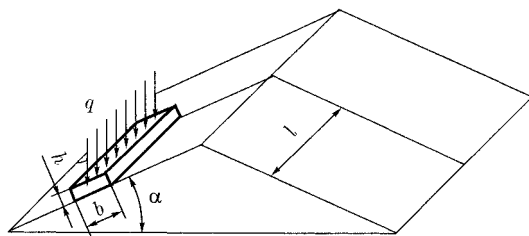
Следовательно, направление прогиба перпендикулярно нейтральной линии.

**12.12.** Какое положение займет нейтральная линия в прямоугольном сечении балки, если плоскость действия нагрузки будет совпадать с одной из диагональных плоскостей, см. рис.

*Ответ:* Совпадет с другой диагональной плоскостью.



К задаче 12.12



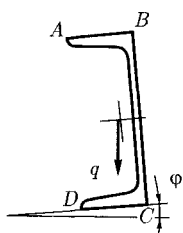
К задаче 12.13

**12.13.** Дощатые обрешетины кровли, шарнирно опирающиеся на стропила, подвергаются действию вертикально распределенной нагрузки интенсивности  $q$ , см. рис. Определить допускаемое значение этой нагрузки при  $[\sigma] = 10$  МПа, а также вычислить полный прогиб обрешетины в середине пролета, если  $h = 50$  мм,  $b = 180$  мм,  $l = 2$  м,  $\alpha = 25^\circ$ .

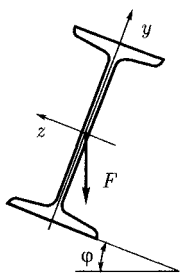
*Ответ:*  $[q] = 1,46$  кН/м,  $f = 14,7$  мм.

**12.14.** При установке на опоры двутавра № 60, предназначенного для работы на изгиб в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью стенки, была допущена ошибка: стенка двутавра отклонилась от вертикали на угол  $\varphi = 2^\circ$ . Определить связанное с этим увеличение наибольших нормальных напряжений и полного прогиба двутавра.

*Ответ:* Напряжения увеличились на 51,5%, полный прогиб — на 99%.



К задаче 12.15



К задаче 12.16

**12.15.** Балка длиной  $l = 4$  м, шарнирно опирающаяся концами, несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью  $q = 5$  кН/м. Поперечное сечение балки — швеллер № 18. Стенка швеллера наклонена к плоскости действия нагрузки под углом  $\varphi = 5^\circ$ , см. рис. Определить нормальные напряжения в точках  $A, B, C$  и  $D$  опасного сечения балки и построить эпюры этих напряжений по линиям  $AB, BC$  и  $CD$ . Определить также величину и направление наибольшего прогиба балки. Кручение швеллера во внимание не принимать.

*Ответ:*  $\sigma_A = -31$  МПа;  $\sigma_B = -102$  МПа;  
 $\sigma_C = +63$  МПа;  $\sigma_D = +133$  МПа;  
 $f = 11,4$  мм;  
 $\alpha = 47,95^\circ$  (к плоскости стенки).

**12.16.** Двутавровая балка, шарнирно опертая по концам, нагружена в середине пролета  $l = 5$  м сосредоточенной силой  $F = 8$  кН. Плоскость стенки двутавра составляет угол  $\varphi = 20^\circ$  с плоскостью действия нагрузки, см. рис. Подобрать сечение балки при допуске напряжении  $[\sigma] = 160$  МПа.

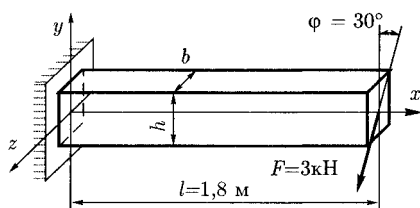
*Ответ:* Двутавр № 22.

**12.17.** Деревянный брус прямоугольного поперечного сечения, защемленный одним концом, нагружен на другом конце сосредоточенной силой  $F$ , см. рис. Полагая, что  $h/b = 1,5$ , подобрать размеры сечения бруса при допуске напряжении  $[\sigma] = 10$  МПа. Определить величину и направление наибольшего прогиба.

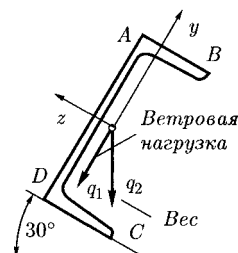
*Ответ:*  $h \cong 200$ ;  $f = 9,3$  мм;  $\alpha = 52,42^\circ$  с осью  $y$ .

**12.18.** Стропильные ноги крыши отстоят друг от друга на 3 м и наклонены к горизонту под углом  $30^\circ$ . К ним прикреплены обрешетки из швеллеров № 20 на расстоянии 2 м друг от друга. Ветро-





К задаче 12.17



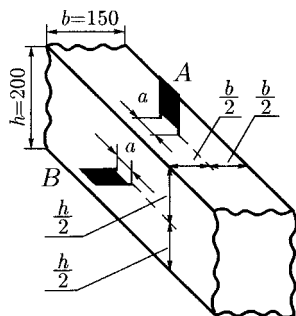
К задаче 12.18

вая нагрузка, направленная перпендикулярно к плоскости крыши, имеет интенсивность  $q_1 = 0,75 \text{ кН/м}^2$ , а собственный вес кровли, действующий вертикально, имеет интенсивность  $q_2 = 0,50 \text{ кН/м}^2$ , см. рис. Определить в опасном сечении нормальные напряжения в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и построить эпюры этих напряжений по линиям  $AB$ ,  $AD$  и  $DC$ . Скручивание швеллера во внимание не принимать.

Ответ:  $\sigma_A = -27 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_B = +10 \text{ МПа}$ ;

$\sigma_C = +45 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_D = +7 \text{ МПа}$ .

**12.19.** Деревянная балка прямоугольного сечения длиной 2,4 м, шарнирно опирающаяся своими концами, нагружена в середине пролета сосредоточенной силой  $F$ . На установленных в опасном сечении балки тензометрах  $A$  и  $B$ , см. рис., с базой 20 мм и увеличением в 1000 раз отмечены такие изменения отсчетов:  $A$  — уменьшение на 9 мм,  $B$  — увеличение на 6 мм. Определить величину и направление нагрузки  $F$ , а также величину наибольшего нормального напряжения в балке.

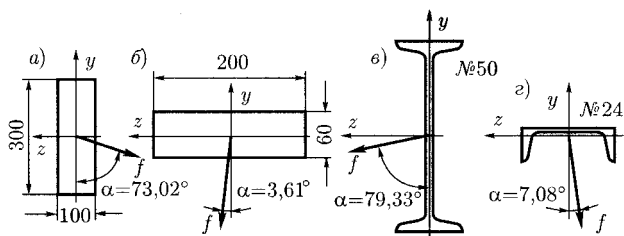


К задаче 12.19

Ответ:  $F = 8,4 \text{ кН}$ ;  $\varphi = 26,57^\circ$  к вертикали;  $\sigma_{\max} = 7,5 \text{ МПа}$ .

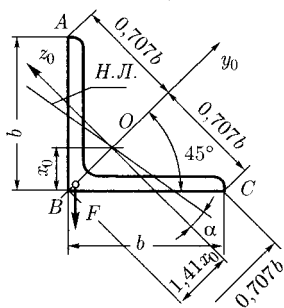
**12.20.** В результате изгиба балок, поперечные сечения которых изображены на рис., центры тяжести переместились в указанных направлениях. Определить для каждой из балок положение плоскости действия внешних сил (угол  $\varphi$  с осью  $y$ ).

Ответ: а)  $\varphi = 20^\circ$ ; б)  $\varphi = 35^\circ$ ; в)  $\varphi = 8^\circ$ ; г)  $\varphi = 60^\circ$ .



К задаче 12.20

**12.21.** Уголок  $80 \times 80 \times 7$  мм длиной 1,6 м работает как балка с одним зашпеленным концом; на свободном конце он нагружен сосредоточенной силой  $F = 1$  кН, линия действия которой проходит через центр изгиба сечения (см. рис.). Определить в опасном сечении положение нейтральной линии и нормальные напряжения в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Найти также величину и направление наибольшего прогиба уголка.



К задаче 12.21

*Указание.* При решении задачи надлежит силу  $F$  разложить по направлениям главных осей  $y_0$  и  $z_0$ .

*Ответ:*  $\sigma_A = 166$  МПа;  
 $\sigma_B = -132$  МПа;  $\sigma_C = 43$  МПа; нейтральная линия наклонена под углом  $\alpha = 14,55^\circ$  к оси  $z_0$ ;  $f = 18,5$  мм (перемещение направлено перпендикулярно нейтральной линии).

**12.22.** Для деревянной балки по задаче 12.1 подобрать высоту  $h$  и ширину  $b$  сечения, если  $h/b = 2$  и  $[\sigma] = 10$  МПа. Определить также полный прогиб концевое сечения с указанием направления.

*Ответ:*  $h = 180$  мм;  $b = 90$  мм;  $f = 19,5$  мм (под углом  $\alpha = 80,87^\circ$  к вертикали).

**12.23.** Сечение балки из задачи 12.2 принять в виде двутавра № 36. Определить в опасном сечении наибольшее нормальное напряжение, а также прогибы в сечениях, находящихся на расстояниях 0,6; 1,2; 1,8 и 2,4 м от заделки.

*Ответ:*  $\sigma_{\max} = 145$  МПа (в сечении  $B$ );

| Координата сечения,<br>м | $v$ ,<br>мм | $w$ ,<br>мм | $f$ ,<br>мм |
|--------------------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,6                      | -0,163      | +0,767      | 0,785       |
| 1,2                      | -0,549      | +1,116      | 1,244       |
| 1,8                      | -1,035      | -1,116      | 1,522       |
| 2,4                      | -1,550      | -8,093      | 8,240       |

**12.24.** Деревянная стойка прямоугольного поперечного сечения нагружена продольной сжимающей силой  $N = 90$  кН, приложенной в точке  $M$ , см. рис. Определить положение нейтральной линии и построить эпюры нормальных напряжений по сторонам сечения.

*Решение.* Так как в данном случае возникают изгибающие моменты

$$M_y = -N z_F \text{ и } M_z = N y_F,$$

то имеем сложный изгиб с одновременным сжатием. Общая формула для нормальных напряжений принимает вид

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{N \cdot z_F}{I_y} z - \frac{N \cdot y_F}{I_z} y$$

или

$$\sigma = -\frac{N}{A} \left( 1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} \right), \quad (1)$$

где  $i_y$  и  $i_z$  — радиусы инерции сечения относительно осей  $y$  и  $z$ . Вычислим геометрические характеристики сечения:

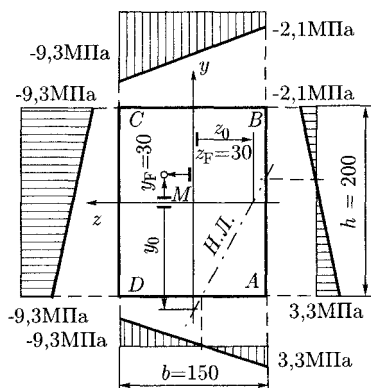
$$A = bh = 0,15 \cdot 0,20 = 0,03 \text{ м}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12} = 0,15^2/12 = 1,875 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} = 0,20^2/12 = 3,333 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Уравнение нейтральной линии получим из выражения (1), принимая  $\sigma = 0$ :

$$1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} = 0. \quad (2)$$



К задаче 12.24

С помощью формулы (2) можно найти отрезки, отсекаемые нейтральной линией от осей координат:

$$y_0|_{z=0} = -\frac{i_z^2}{y_F} = -3,333 \cdot 10^{-3} / 0,03 = -0,1111 \text{ м},$$

$$z_0|_{y=0} = -\frac{i_y^2}{z_F} = -1,875 \cdot 10^{-3} / 0,03 = -0,0625 \text{ м},$$

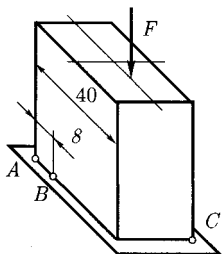
см. рис.

Далее нетрудно определить напряжения в угловых точках, подставляя в формулу (1) их координаты:

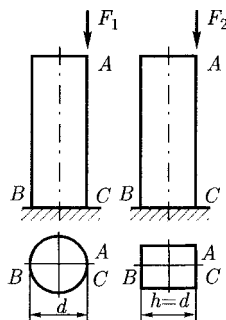
$$\begin{aligned}\sigma_C &= -(90000/0,03)(1 + 0,03 \cdot 0,075/(1,875 \cdot 10^{-3}) + \\ &\quad + 0,03 \cdot 0,10/(3,333 \cdot 10^{-3})) = \\ &= -9,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = -9,3 \text{ МПа}; \\ \sigma_A &= +3,3 \text{ МПа}; \\ \sigma_B &= -2,1 \text{ МПа}; \\ \sigma_D &= -3,9 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

**12.25.** Нормальное напряжение в точке  $A$  сжатого бруса (см. рис.) равно 1,2 МПа (растяжение), в точке  $B$  имеем  $\sigma = 0$ . Чему равно напряжение в точке  $C$ ?

*Ответ:*  $\sigma_C = 4,8$  МПа (сжатие).



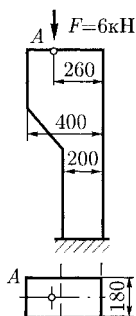
К задаче 12.25



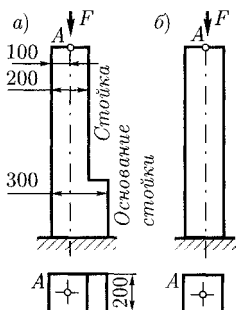
К задаче 12.26

**12.26.** В точках  $A$  двух колонн приложены сжимающие силы, см. рис. При этом в точках  $C$  обеих колонн сжимающие напряжения оказались одинаковыми. Сравнить напряжения в точках  $B$  колонн.

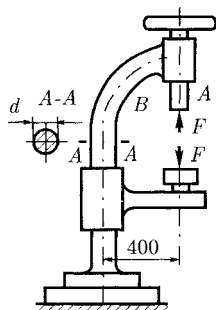
*Ответ:* В колонне круглого сечения напряжение будет больше на 20%.



К задаче 12.27



К задаче 12.28



К задаче 12.29

**12.27.** Проверить прочность нижней части бетонного столба прямоугольного поперечного сечения (см. рис.). Допускаемое напряжение на растяжение равно 0,7 МПа, на сжатие – 7 МПа.

Ответ:  $\sigma_{\max, t} = 0,63$  МПа < 0,7 МПа;

$\sigma_{\max, c} = 0,97$  МПа < 7 МПа.

**12.28.** Основание для стойки сделано из бруса с поперечным сечением  $20 \times 30$  см, см. рис. а. Определить наибольшее нормальное напряжение в основании стойки, если сжимающая её сила  $F = 360$  кН. Чему будет равно это напряжение, если основание стойки сделать из бруса с поперечным сечением  $20 \times 20$  см, см. рис. б ?

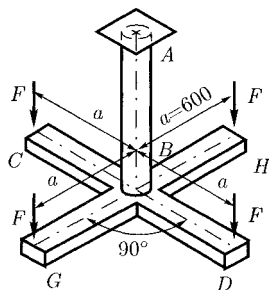
Ответ: а) 12 МПа; б) 9 МПа.

**12.29.** При сверлении детали передаётся на шпиндель А сверлильного станка осевое усилие  $F = 16$  кН, см. рис. Определить диаметр  $d$  круглой чугунной колонны В, если допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma] = 35$  МПа.

Ответ:  $d = 125$  мм.

**12.30.** К крестовине CDEF, жёстко скреплённой со стальной трубой AB (см. рис.), симметрично подвешены четыре одинаковых груза  $F = 1$  кН. Труба AB имеет наружный диаметр  $d = 60$  мм при толщине стенки  $t = 2$  мм. Определить наибольшее растягивающее напряжение в трубе при четырёх грузах, а также в том случае, если один из грузов будет снят.

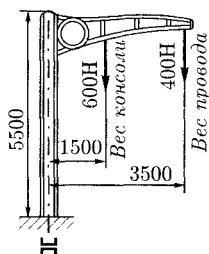
Ответ: 11 МПа; 127 МПа.



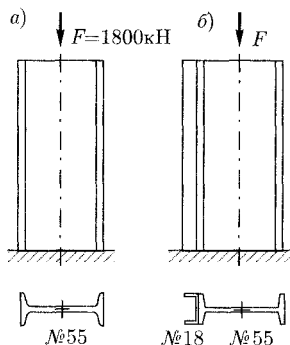
К задаче 12.30

**12.31.** Столб, служащий для подвески одиночного трамвайного провода, состоит из двух швеллеров № 16, см. рис. Учитывая вес провода, вес консоли, к которой подведен провод, и собственный вес столба, определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в сечении у основания столба.

*Ответ:* +11,6 МПа; -13 МПа.



К задаче 12.31



К задаче 12.32

**12.32.** Короткая двутавровая стойка № 55, нагруженная центрально приложенной сжимающей силой  $F = 1800$  кН (см. рис. а), "усилена" швеллером № 18, приваренным к стойке по всей её длине (см. рис. б). Чему было равно наибольшее сжимающее напряжение в двутавровой стойке и чему оно равно в стойке, "усиленной" швеллером ?

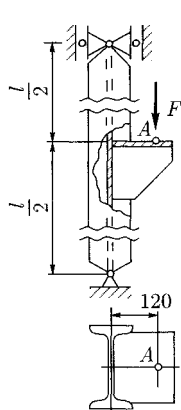
*Ответ:* а) 153 МПа; б) 171 МПа.

**12.33.** На короткую стойку двутаврового сечения, шарнирно закреплённую по концам, через кронштейн передаётся нагрузка  $F = 65$  кН, см. рис. Определить необходимый номер двутавра при допуске напряжении  $[\sigma] = 160$  МПа.

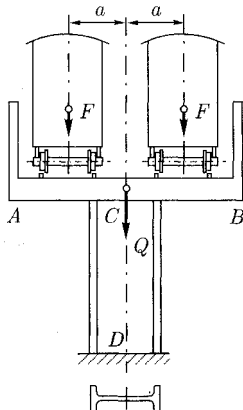
*Ответ:* Двутавр № 22.

**12.34.** Двутавровые стойки  $CD$  поддерживают балки  $AB$ , по которым уложены пути узкоколейной железной дороги, см. рис. Определить необходимый номер двутавра при загрузке вагонами обоих путей или одного из них, если собственный вес конструкции, передающийся на одну стойку, равен  $Q = 120$  кН,  $P = 80$  кН,  $a = 1$  м и  $[\sigma] = 140$  МПа.

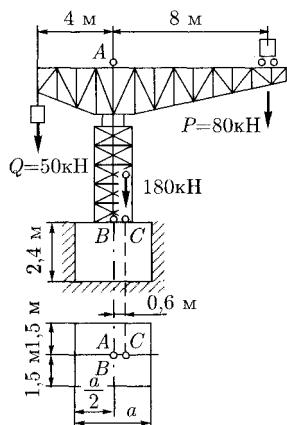
*Ответ:* Двутавр № 36.



К задаче 12.33



К задаче 12.34



К задаче 12.35

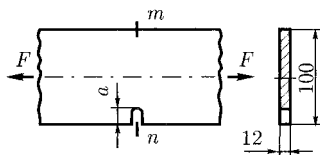
**12.35.** Кран для подъёма и перемещения груза до 80 кН (см. рис.) опирается на бетонный фундамент, причём ось  $AB$  крана проходит через центр фундамента. Считая, что вес крана, равный 180 кН (без веса груза  $P$  и веса противовеса  $Q$ ), приложен к фундаменту в точке  $C$  на расстоянии 0,6 м от оси  $AB$ , определить размер стороны  $a$  фундамента так, чтобы в его основании не было растягивающих напряжений. Определить, чему при выбранном значении  $a$  будет равно наибольшее давление на грунт. Плотность бетона принять  $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$ .

*Ответ:*  $a \approx 3,7 \text{ м}$ ;  $q_{\max} = 0,161 \text{ МПа}$ .

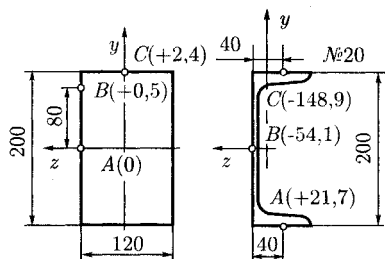
**12.36.** Стальная полоса растягивается центрально приложенными силами  $F$ , см. рис. Какой глубины  $a$  может быть сделана в полосе односторонняя прорезь при условии, что наибольшее нормальное напряжение не превысит 150 МПа? Концентрацию напряжений в устье прорези во внимание не принимать.

*Ответ:*  $a = 20,7 \text{ мм}$ .

**12.37.** Стойки, поперечные сечения которых изображены на рис., подвергаются действию продольной сжимающей нагрузки  $F$ , приложенной внецентренно. Для некоторых точек найдены напря-



К задаче 12.36



К задаче 12.37

жения (экспериментальным путём); на рис. эти напряжения указаны в МПа. Определить для каждой из стоек нагрузку  $F$  и координаты точки её приложения, вычислить также наибольшее сжимающее напряжение.

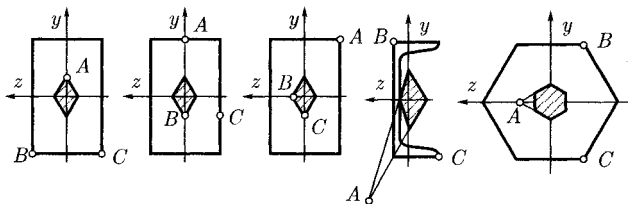
Ответ: а)  $F = 60 \text{ кН}$ ,  $z_F = -20 \text{ мм}$ ,  $y_F = -40 \text{ мм}$ ,

$\sigma_{\max, c} = 8 \text{ МПа}$ ;

б)  $F = 150 \text{ кН}$ ,  $z_F = -2,2 \text{ мм}$ ,  $y_F = +95 \text{ мм}$ ,

$\sigma_{\max, c} = 158 \text{ МПа}$ .

**12.38.** На рис. изображены поперечные сечения: прямоугольные, корытное и шестиугольное, а также ядра этих сечений. Как будет проходить в каждом из этих сечений нейтральная ось, если перпендикулярная к плоскости сечения сила будет приложена в точке  $A$ ?



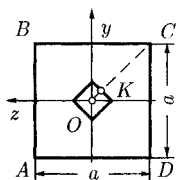
К задаче 12.38

Ответ: Пройдёт через точки  $B$  и  $C$ .

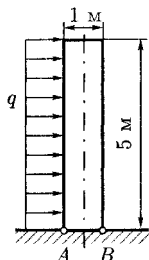
**12.39.** На рис. изображено квадратное поперечное сечение кирпичного столба. Продольная сжимающая сила  $F$  приложена на границе ядра сечения в точке  $K$ , лежащей на диагонали  $OC$ . Чему равны напряжения в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ?

Ответ:  $\sigma_A = 0$ ;  $\sigma_B = \sigma_D = -\frac{F}{A}$ ;  $\sigma_C = -2\frac{F}{A}$ .

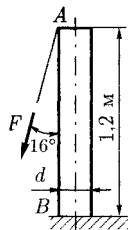




К задаче 12.39



К задаче 12.40



К задаче 12.41

**12.40.** Кирпичный столб квадратного поперечного сечения  $1 \times 1$  м, высотой  $H = 5$  м нагружен своим собственным весом и поперечным равномерно распределённым давлением ветра  $q = 800$  Па, см. рис. Плотность кирпичной кладки принять  $\rho = 1600$  кг/м<sup>3</sup>. Определить наибольшее и наименьшее значения сжимающих напряжений в основании столба.

Ответ:  $\sigma_A = -20$  кПа;  $\sigma_B = -140$  кПа.

**12.41.** Деревянный столб  $AB$  круглого поперечного сечения диаметром  $d = 150$  мм удерживает канат, который растянут силой  $F$ , см. рис. Считая столб в сечении  $B$  закреплённым, определить наибольшее возможное натяжение каната, если допускаемое напряжение для древесины  $[\sigma] = 10$  МПа.

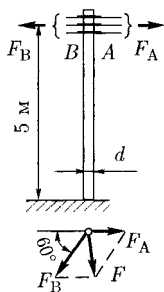
Ответ:  $[F] = 7,9$  кН.

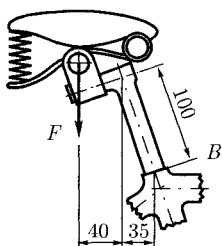
**12.42.** Столб диаметром  $d = 200$  мм несёт на высоте  $H = 5$  м над землёй две группы горизонтальных проводов:  $A$  и  $B$ , см. рис. Горизонтальное усилие от группы проводов  $A$  составляет 1 кН, от группы  $B$  — 1,5 кН. Передающийся на столб вес проводов обеих групп достигает 2,8 кН, а вес столба 0,9 кН. Определить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении столба у земли.

Ответ:  $\sigma_{\max, t} = 8,3$  МПа;  $\sigma_{\max, c} = -8,5$  МПа.

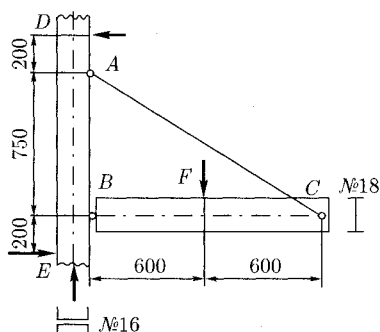
**12.43.** Определить нормальное напряжение в трубке, на которой укреплено седло велосипеда, см. рис. Нагрузку на седло принять  $F = 0,8$  кН. Наружный диаметр трубки  $d = 24$  мм, внутренний  $d_1 = 21$  мм. Конец трубки  $B$  считать закреплённым.

Ответ:  $\sigma = 114$  МПа.

К задаче  
12.42



К задаче 12.43



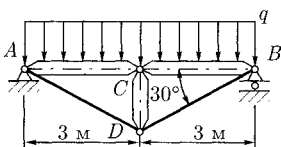
К задаче 12.44

**12.44.** Двутавровая балка  $BC$  настенного крана шарнирно соединена со стойкой  $DE$  и тягой  $AC$ , см. рис. Определить наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки при грузе  $F = 40$  кН.

Ответ:  $\sigma = 98$  МПа.

**12.45.** Стойка  $DE$  настенного крана (см. рис. к предыдущей задаче 12.44) составлена из двух швеллеров № 16, сваренных стенками; плоскость стенок параллельна плоскости чертежа. Определить наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении стойки, расположенном непосредственно под точкой  $A$ . Считать, что груз находится в точке  $C$ .

Ответ:  $\sigma = 56$  МПа.



К задаче 12.46

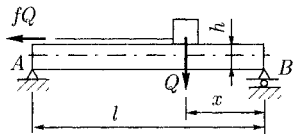
**12.46.** Деревянная шпренгельная балка прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон  $h/b = 1,5$  опирается концами на шарнирные опоры. Балка нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивности  $q = 5$  кН/м, см. рис. Определить поперечные размеры балки при допускаемом напряжении

$[\sigma] = 10$  МПа и диаметр  $d$  стальных тяг  $AD$  и  $DB$  при  $[\sigma] = 120$  МПа. Считать, что балка  $AB$  в сечении  $C$  имеет шарнир.

Ответ:  $h = 176$  мм,  $b = 117$  мм,  $d = 12,6$  мм.

**12.47.** По деревянной балке  $AB$  с помощью лебёдки волоком перемещается груз  $Q = 10$  кН, см. рис. Сечение балки прямоугольное

(высота  $h = 300$  мм, ширина  $b = 100$  мм). Пролёт балки  $l = 6$  м. Коэффициент трения между грузом и балкой считать равным  $f = 0,4$ . Определить положение груза, при котором в балке возникает наибольшее сжимающее напряжение, вычислить также само это напряжение. Груз  $Q$  считать сосредоточенным, усилие троса лебёдки — приложенным на уровне низа груза.



К задаче 12.47

Ответ:  $x = 2,97$  м,  $\sigma = 9,93$  МПа.

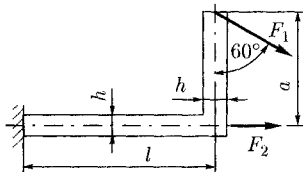
**12.48.** Трубка из тонкой прорезининой ткани диаметром  $d = 60$  мм заклеена по концам. В трубку накачан воздух под давлением  $q = 0,12$  МПа (добавочным к атмосферному). Трубка положена концами на две опоры, расстояние между которыми  $l = 0,3$  м, и нагружена сосредоточенной силой  $F$  в середине пролёта. Определить предельное значение этой силы.

Указание. Трубка способна работать на изгиб только до того момента, когда в какой-либо точке её опасного сечения возникнут сжимающие напряжения

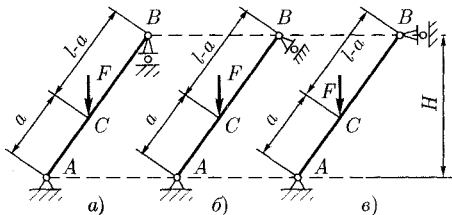
Ответ:  $F_{\text{пред}} = 33,9$  Н.

**12.49.** Защемлённый в стену коленчатый стержень прямоугольного поперечного сечения нагружен двумя сосредоточенными силами  $F_1$  и  $F_2$ , см. рис. Для каждого из участков стержня построить эпюры изгибающего момента и нормальной силы, а также определить наибольшие нормальные напряжения. Принять:  $F_1 = 3,6$  кН,  $F_2 = 72$  кН,  $l = 0,5$  м,  $a = 0,3$  м,  $h = 60$  мм,  $b = 40$  мм,  $\alpha = 60^\circ$ .

Ответ:  $\sigma_{(1)} = 36$  МПа;  $\sigma_{(2)} = 108$  МПа.



К задаче 12.49



К задаче 12.50

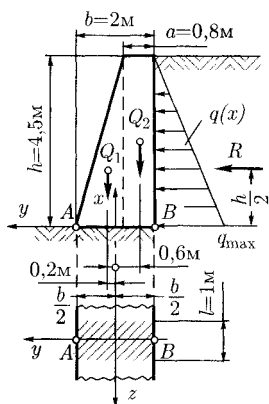
**12.50.** Наклонно установленная балка  $AB$  длиной  $l$  в сечении  $C$  нагружена вертикально направленной сосредоточенной силой  $F$ , см. рис. Построить эпюры изменения по длине балки изгибающе-

го момента и продольной силы. Определить наибольшие значения растягивающих и сжимающих напряжений в опасном сечении при различных вариантах устройства верхней шарнирной опоры. Балка имеет прямоугольное поперечное сечение ( $h = 200$  мм,  $b = 90$  мм). Кроме того принять:  $l = 1,8$  м,  $a = 0,8$  м,  $H = 1,5$  м,  $F = 20$  кН.

Ответ: а)  $\sigma_{\max, t} = 8,6$  МПа;  $\sigma_{\max, c} = 8,7$  МПа;

б)  $\sigma_{\max, t} = 8,2$  МПа;  $\sigma_{\max, c} = 9,1$  МПа;

в)  $\sigma_{\max, t} = 8,0$  МПа;  $\sigma_{\max, c} = 9,3$  МПа.



К задаче 12.51

**12.51.** Каменная подпорная стенка, поперечный разрез которой изображён на рис., поддерживает земляную насыпь. Плотность кладки  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>. Давление земли направлено горизонтально и распределено по высоте по закону треугольника; наибольшее давление у основания  $q_{\max} = 15$  кПа. Определить наибольшее и наименьшее значения сжимающего напряжения в основании стенки.

*Решение.* Выделим из стенки по её длине участок длиной  $l = 1$  м. Этот участок можно рассматривать как брус, защемлённый нижним концом, изгибаемый давлением земли и сжимаемый собственным весом. Искомые напряжения будем вычислять по формулам

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M}{W}, \quad \sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M}{W}.$$

Нормальная сила  $N$  равна собственному весу выделенного участка стенки

$$N = Q_1 + Q_2,$$

где  $Q_1$  – вес треугольной, а  $Q_2$  – вес прямоугольной призмы. Нетрудно видеть, что

$$Q_1 = \frac{1}{2} h(b-a) l \rho g = 4,5(2-0,8) \cdot 1 \cdot 1800 \cdot 9,81/2 = 47,7 \text{ кН},$$

$$Q_2 = h a l \rho g = 4,4 \cdot 0,8 \cdot 1 \cdot 1800 \cdot 9,81 = 63,6 \text{ кН}.$$

Таким образом, имеем

$$N = 47,7 + 63,6 = 111,3 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент следует вычислять относительно центральной оси  $z$  площади основания стенки. Строго говоря, к моменту от равнодействующей  $R$  давления земли следует добавить моменты от сил  $Q_1$  и

$Q_2$ . Вычислим сначала равнодействующую

$$R = \frac{1}{2} q_{\max} hl = 15000 \cdot 4,5 \cdot 1/2 = 33750 \text{ Н} = 33,75 \text{ кН},$$

а затем перейдем к определению изгибающего момента

$$\begin{aligned} M &= Q_1 \left( a + \frac{b-a}{3} - \frac{b}{2} \right) - Q_2 \cdot \frac{b-a}{2} + R \cdot \frac{h}{3} = \\ &= 47,7 \cdot 0,2 - 63,6 \cdot 0,6 + 33,75 \cdot 4,5/3 = 22,0 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Так как

$$A = bl = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м}^2, \quad W = W_z = \frac{1}{6} lb^2 = 1 \cdot 2^2/6 = 0,667 \text{ м}^3,$$

то получаем для напряжений окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -111,3/2 - 22,0/0,667 = -55,65 - 33,0 = -88,65 \text{ кПа}, \\ \sigma_B &= -55,65 + 33,0 = -22,65 \text{ кПа}. \end{aligned}$$

**12.52.** На рис. схематически изображены два варианта поперечного разреза бетонной плотины высотой 7 м. Принимая плотность бетона  $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$ , определить необходимую ширину плотины ( $a_1$  и  $a_2$ ) так, чтобы в её основании не возникало растягивающих напряжений.

*Ответ:*  $a_1 = 3,93 \text{ м}$ ,  $a_2 = 5,52 \text{ м}$ .

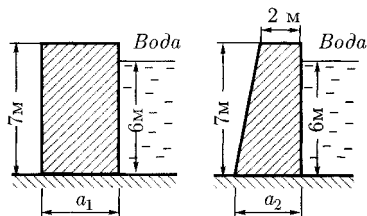
**12.53.** На вал (см. рис.) пассажи-

К задаче 12.52

ны два шкива, через шкивы перекинута ремень, ветви которых наклонены к горизонту на первом шкиве под углом  $30^\circ$ , на втором – под углом  $45^\circ$ . От первого шкива ремень идёт к приводному электродвигателю; в этом ремне усилие в сбегающей ветви вдвое больше, чем в набегающей. От второго шкива ремень идёт к станку; в этом ремне усилие в набегающей ветви вдвое больше, чем в сбегающей. Передаваемая мощность  $N = 73,6 \text{ кВт}$ , частота вращения вала  $n = 200 \text{ об/мин}$ . Определить необходимый диаметр вала при допуске напряжении  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ .

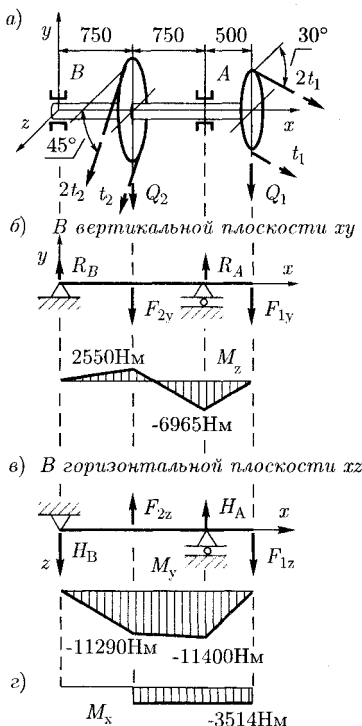
*Решение.* Вал подвергается изгибу, а часть его, расположенная между шкивами, ещё и скручиванию. Крутящий момент определяется по формуле

$$M_x = \frac{N}{\omega},$$



где  $\omega$  – угловая скорость. Вычислим эту скорость

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 3,14 \cdot 200/30 = 20,9 \text{ рад/с.}$$



К задаче 12.53

Тогда нетрудно определить и крутящий момент

$$M_x = 73600/20,9 = 3514 \text{ Нм.}$$

Обозначим натяжение набегающей ветви первого шкива через  $t_1$ . Тогда натяжение сбегающей ветви по условию равно  $2t_1$ . Для вращающего шкив момента  $T_1$ , равного крутящему  $M_x$ , имеем

$$T_1 = M_x = t_1 R_1,$$

где  $R_1$  – радиус первого шкива. Отсюда

$$t_1 = \frac{M_x}{R_1} = 3514/0,4 = 8785 \text{ Н.}$$

Аналогично имеем для второго шкива

$$t_2 = \frac{M_x}{R_2} = 3514/0,5 = 7028 \text{ Н.}$$

Таким образом, вал нагружается со стороны шкивов наклонными силами

$$P_1 = 3t_1 = 3 \cdot 8785 = 26300 \text{ Н,}$$

$$P_2 = 3t_2 = 3 \cdot 7028 = 21080 \text{ Н.}$$

Кроме того, в тех же сечениях действуют вертикальные силы веса шкивов:

$$Q_1 = 780 \text{ Н, } Q_2 = 1180 \text{ Н.}$$

Далее разложим все силы на вертикальные и горизонтальные составляющие, сначала для первого шкива

$$F_{1y} = Q_1 + P_1 \sin 30^\circ = 780 + 26300 \cdot 0,5 = 13930 \text{ Н,}$$

$$F_{1z} = P_1 \cos 30^\circ = 26300 \cdot 0,866 = 22800 \text{ Н,}$$

а затем для второго

$$F_{2y} = Q_2 + P_2 \sin 45^\circ = 1180 + 21080 \cdot 0,707 = 16080 \text{ Н,}$$

$$F_{2z} = P_2 \cos 45^\circ = 21080 \cdot 0,707 = 14900 \text{ Н.}$$

Направления всех этих сил поясняются схемами на рис. б и в.

Найдём реакции и построим эпюры  $M_y$  и  $M_z$ , а также  $M_x$ , см. рис. б, в и г.

Из сопоставления эпюр нетрудно видеть, что опасное сечение располагается у опоры А. Здесь

$$M_x = 3514 \text{ Нм}, M_y = 11400 \text{ Нм}, M_z = 6965 \text{ Нм}.$$

Далее удобнее иметь дело с полным изгибающим моментом

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 13360 \text{ Нм}.$$

В опасном поперечном сечении возникают нормальные и касательные напряжения. Как известно, в подобных ситуациях имеем сложное (плоское) напряжённое состояние. Следовательно, условие прочности надлежит составлять по тому или иному критерию пластичности (разрушения). Для стали обычно применяют критерий максимальных касательных напряжений (критерий Треска-Сен-Венана):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_i^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1)$$

Так как

$$\sigma = \frac{M_{\text{изг}}}{W}, \quad \tau = \frac{M_x}{W_p}, \quad W_p = 2W = \frac{1}{2}\pi r^3,$$

то из условия прочности (1) можно получить

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{4}{\pi[\sigma]} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_x^2}}. \quad (2)$$

Подставляя сюда числа, найдём

$$r \geq \sqrt[3]{(4/(3,14 \cdot 80 \cdot 10^6)) \sqrt{13360^2 + 3514^2}} = 0,0603 \text{ м} = 60,3 \text{ мм}.$$

В расчётной практике используют также критерий постоянства интенсивности напряжений (критерий Губера-Мизеса)

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma],$$

откуда

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{4}{\pi[\sigma]} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75M_x^2}}. \quad (3)$$

В числах получаем с помощью (3)

$$r \geq 60,2 \text{ мм}.$$

**12.54.** Сплошной стальной вал круглого сечения в опасном сечении подвергается действию крутящего момента  $M_x = 1$  кНм и изгибающего  $M_{изг} = 1,2$  кНм. Подобрать необходимый диаметр вала при  $[\sigma] = 80$  МПа. Воспользоваться как критерием максимальных касательных напряжений, так и критерием постоянства интенсивности напряжений.

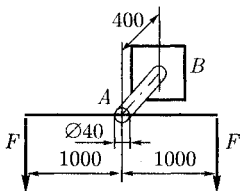
*Ответ:*  $d_1 = 126$  мм,  $d_2 = 124$  мм.

**12.55.** Полый стальной вал, внутренний диаметр  $d_o$  которого должен составлять 0,6 наружного  $d$ , в опасном сечении подвергается действию изгибающего момента  $M_{изг} = 90$  кНм и крутящего  $M_x = 120$  кНм. Определить наружный и внутренний диаметры вала при допуске напряжении  $[\sigma] = 120$  МПа. Использовать критерий максимальных касательных напряжений.

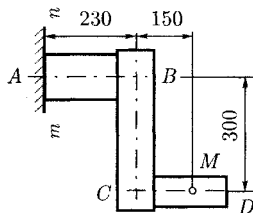
*Ответ:*  $d = 245$  мм,  $d_o = 147$  мм.

**12.56.** Определить наибольшее эквивалентное напряжение в стальном стержне  $AB$  круглого поперечного сечения, нагруженного двумя одинаковыми грузами весом  $F = 1$  кН каждый, приложенными так, как указано на рис. Как изменится эквивалентное напряжение, если один из грузов будет снят? Использовать критерий постоянства интенсивности напряжений.

*Ответ:*  $\sigma_{экр,1} = 127$  МПа,  $\sigma_{экр,2} = 152$  МПа.



К задаче 12.56



К задаче 12.57

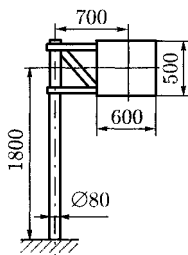
**12.57.** Стальной коленчатый стержень  $ABCD$  закреплён, как указало на рис. Участок  $AB$  имеет круглое поперечное сечение диаметром 125 мм. Сила  $F = 20$  кН приложена в точке  $M$  перпендикулярно к плоскости чертежа. Определить в опасной точке сечения  $mn$  эквивалентные напряжения по критерию максимальных касательных напряжений и по критерию постоянства интенсивности напряжений.

*Ответ:*  $\sigma_{экр,1} = 50,5$  МПа,  $\sigma_{экр,2} = 48$  МПа.

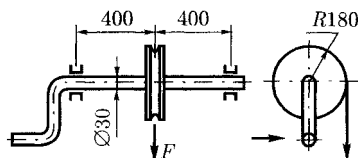


**12.58.** Дорожный знак укреплен на стойке, выполненной из трубы с наружным диаметром  $d = 80$  мм, см. рис. Определить требуемую толщину  $t$  стенки трубы при допуске напряжении  $[\sigma] = 80$  МПа, если ветровая нагрузка на знак составляет  $q = 1500$  Па. Воспользоваться критерием максимальных касательных напряжений.

Ответ:  $t = 2,36$  мм  $\approx 2,4$  мм.



К задаче 12.58

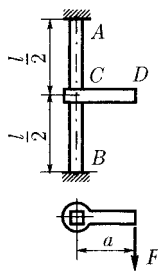


К задаче 12.59

**12.59.** Из условия прочности по критерию максимальных касательных напряжений определить наибольшее значение груза  $F$ , который можно поднимать при помощи ворота, см. рис. Вал ворота круглого сечения диаметром  $d = 30$  мм. Допускаемое напряжение для материала вала  $[\sigma] = 80$  МПа.

Ответ:  $[F] = 790$  Н.

**12.60.** Оба конца стального бруса  $AB$  квадратного сечения  $20 \times 20$  мм заделаны. Посредине пролёта  $l = 1,6$  м к брусу жёстко прикреплена (приварена) стальная поперечина  $CD$  такого же сечения, длина которой  $a = 0,3$  м; на её свободном конце приложена сила  $F = 300$  Н, см. рис. Определить эквивалентные напряжения в опасных сечениях брусьев  $AB$  и  $CD$ . Использовать критерий максимальных касательных напряжений.



К задаче 12.60

*Указание.* При расчётах на кручение стержней прямоугольного поперечного сечения следует воспользоваться следующими сведениями:

– момент инерции и момент сопротивления прямоугольного сечения стержня вычисляются по формулам

$$I_k = \alpha b^4, \quad (1)$$

$$W_k = \beta b^3, \quad (2)$$

где  $b$  – меньшая сторона прямоугольника;

– наибольшее касательное напряжение возникает посредине большей стороны прямоугольника и вычисляется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_K}; \quad (3)$$

– наибольшее касательное напряжение, возникающее посредине меньшей стороны прямоугольника, оценивается следующим образом:

$$\tau_{\max}^* = \gamma \tau_{\max}; \quad (4)$$

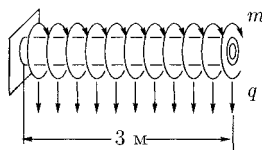
– коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  зависят от отношения  $h/b$ , где  $h$  и  $b$  – большая и меньшая стороны прямоугольника; коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  принимаются из табл. 12.1.

Таблица 12.1

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в зависимости от  $h/b$ 

| $h/b$    | 1,0   | 1,5   | 1,75  | 2,0   | 2,5   |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha$ | 0,140 | 0,294 | 0,375 | 0,457 | 0,622 |
| $\beta$  | 0,208 | 0,346 | 0,418 | 0,493 | 0,645 |
| $\gamma$ | 1,000 | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,766 |
| $h/b$    | 3,0   | 4,0   | 6,0   | 8,0   | 10,0  |
| $\alpha$ | 0,790 | 1,123 | 1,789 | 2,456 | 3,123 |
| $\beta$  | 0,801 | 1,128 | 1,789 | 2,456 | 3,123 |
| $\gamma$ | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 |

Ответ:  $\sigma_{\text{экв}, 1} = 70$  МПа,  $\sigma_{\text{экв}, 2} = 67$  МПа.



**12.61.** Дюралюминиевая (дюралевая) труба с наружным диаметром  $d = 80$  мм и толщиной стенки  $t = 5$  мм скручивается равномерно распределённым по её длине крутящим моментом интенсивности  $m = 300$  Нм/м и изгибается равномерно распределённой поперечной нагрузкой, интенсивности  $q = 200$  Н/м, см. рис. Определить

в опасном сечении трубы эквивалентное напряжение по критерию максимальных касательных напряжений.

Ответ:  $\sigma_{\text{экв}} = 61$  МПа.

**12.62.** Труба с наружным и внутренним диаметрами  $d = 80$  мм и  $d_o = 60$  мм скручивается парой сил с моментом  $M_x = 4$  кНм. Какое наибольшее растягивающее усилие  $N_x$  может быть дополнительно приложено к стержню, если допускаемое напряжение принято  $[\sigma] = 160$  МПа. Использовать критерий постоянства интенсивности напряжений.

*Ответ:*  $N_x = 273$  кН.

**12.63.** Из условия прочности по критерию максимальных касательных напряжений определить наружный  $d$  и внутренний  $d_o$  диаметры полого вала, подвергающегося одновременному кручению парой сил с моментом  $M_x = 40$  кНм и растяжению осевой силой  $N_x = 300$  кН. Допускаемое напряжение принять  $[\sigma] = 120$  МПа, отношение  $d/d_o = 0,6$ .

*Ответ:*  $d = 159$  мм,  $d_o = 95$  мм.

**12.64.** Вал диаметром  $d = 220$  мм, имеющий на конце консоли длиной  $l = 450$  мм гребной винт, передаёт мощность  $N = 2943$  кВт при  $n = 300$  об/мин. Тяговое усилие на винте  $N_x = 170$  кН, вес винта  $Q = 20$  кН. Определить эквивалентное напряжение в опасной точке самого нагруженного сечения вала по критерию постоянства интенсивности напряжений.

*Ответ:*  $\sigma_{\text{экв}} = 80$  МПа.

**12.65.** Стальная труба, имеющая внутренний диаметр  $d_o = 80$  мм и толщину стенки  $t = 5$  мм, подвергается действию сжимающего осевого усилия  $N_x = 40$  кН и крутящего момента  $M_x = 3$  кНм. Пользуясь критерием максимальных касательных напряжений, определять наибольшее допускаемое внутреннее (избыточное над атмосферным) давление  $q$ , которое может быть подано внутрь трубы дополнительно, если  $[\sigma] = 120$  МПа. Считать, что внутреннее давление не вызывает в трубе продольных напряжений. Определить угол  $\alpha$  наклона к оси трубы площадок, по которым будут действовать наибольшие касательные напряжения.

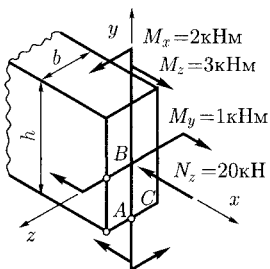
*Ответ:*  $q = 1,78$  МПа;  $\alpha = 10,80^\circ$ .

**12.66.** Определить размеры прямоугольного поперечного сечения щеки коленчатого вала, нагруженной, как указано на рис. Отношение сторон  $h/b = 2$ . Применить критерий максимальных касательных напряжений. Принять  $[\sigma] = 80$  МПа.

*Решение.* В данном случае имеем сложный изгиб с кручением стержня прямоугольного сечения. В подобных обстоятельствах стержень может перейти в состояние предельной упругости по одному из трёх вариантов. В первом опасным может оказаться объём в окрестности угловой точки сеченая (см. точку  $A$  на рис.). Здесь нет касательных напряжений, но

нормальные максимальны. Поэтому условие прочности записывается так:

$$\sigma_A \leq [\sigma]. \quad (1)$$



Во втором случае опасным приходится считать объём вблизи середины большей стороны (см. точку *B* на рис.). Здесь возникают максимальные касательные напряжения при заметных нормальных напряжениях. Следовательно, имеем сложное (плоское) напряжённое состояние, а условие прочности следует записывать в соответствии с тем или иным критерием пластичности, например, критерием максимальных касательных напряжений:

К задаче 12.66

$$\sigma_{\text{эKB},B} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} \leq [\sigma]. \quad (2)$$

Аналогичную проверку следует осуществлять для объёма около середины меньшей стороны (см. точку *C* на рис.):

$$\sigma_{\text{эKB},C} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

Вычисление напряжений  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$ ,  $\sigma_C$ ,  $\tau_B$  и  $\tau_C$  производится так, как это было описано в задачах 12.7 и 12.60:

$$\sigma_A = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_A + \frac{M_z}{I_z} y_A = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z}, \quad (4)$$

$$\sigma_B = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_B + \frac{M_z}{I_z} y_B = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{W_y}, \quad (5)$$

$$\sigma_C = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_C + \frac{M_z}{I_z} y_C = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{W_z}, \quad (6)$$

$$\tau_B = \tau_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_K}, \quad (7)$$

$$\tau_C = \gamma \tau_{\text{max}} = \frac{\gamma M_x}{W_K}. \quad (8)$$

Так как  $h/b = 2$ , то для геометрических характеристик сечения имеем

$$\left. \begin{aligned} A &= bh = 2b^2, \quad W_y = \frac{1}{6}hb^2 = \frac{1}{3}b^3, \quad W_z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{2}{3}b^3, \\ W_K &= \beta b^3 = 0,493b. \quad (\text{См. табл. 12.1}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Далее подставляем соотношения (9) в формулы (4, 5, 6, 7, 8). Значение коэффициента  $\gamma$  берём из той же табл.12.1. В итоге условия прочности

(1, 2, 3) принимают вид

$$\left| -\frac{20000}{2b^2} - \frac{3 \cdot 1000}{b^3} - \frac{3 \cdot 3000}{2b^3} \right| \leq 80 \cdot 10^6,$$

$$\sqrt{\left( -\frac{20000}{2b^2} - \frac{3 \cdot 1000}{b^3} \right)^2 + 4 \left( \frac{2000}{0,493b^3} \right)^2} \leq 80 \cdot 10^6,$$

$$\sqrt{\left( -\frac{20000}{2b^2} - \frac{3 \cdot 3000}{2b^3} \right)^2 + 4 \left( \frac{0,795 \cdot 2000}{0,493b^3} \right)^2} \leq 80 \cdot 10^6.$$

Путём подбора получаем  $b = 0,046$  м из первого условия прочности,  $b = 0,048$  м - из второго и  $b = 0,047$  м - из третьего.

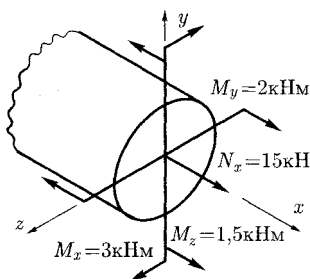
Таким образом, наиболее опасным оказался объём в окрестности точки В. Размеры сечения щеки коленчатого вала принимаем следующими:  $b = 48$  мм,  $h = 2 \cdot b = 96$  мм.

**12.67.** Стержень прямоугольного сечения  $100 \times 40$  мм скручивается парой сил с моментом  $M_x = 1$  кНм и растягивается центрально приложенной силой  $N_x = 60$  кН. Определить наибольшее значение эквивалентного напряжения в опасном объёме по критерию максимальных касательных напряжений.

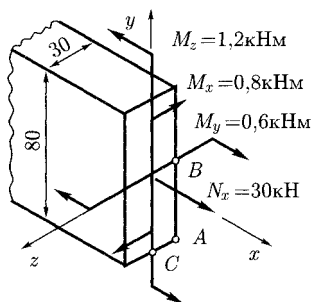
Ответ:  $\sigma_{\text{экв}} = 51$  МПа.

**12.68.** Мотылевая шейка коленчатого вала нагружена, как показано на рис. Из условия прочности по критерию постоянства интенсивности напряжений определить необходимый диаметр шейки при  $[\sigma] = 120$  МПа.

Ответ:  $d = 68$  мм.



К задаче 12.68



К задаче 12.69

**12.69.** Щека коленчатого вала прямоугольного сечения  $30 \times 80$  мм нагружена, как показано на рис. Определить отрезки, отсекаемые нейтральной линией от осей  $y$  и  $z$ , вычислить максимальное

нормальное напряжение в угловой точке  $A$ , а также эквивалентные напряжения в точках  $B$  и  $C$  (в серединах сторон прямоугольника) по критерию максимальных касательных напряжений.

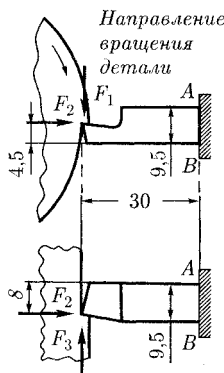
Ответ:  $y_o = +3,78$  мм;  $z_o = +13,3$  мм;  $\sigma_A = 100$  МПа;

$\sigma_{\text{экв}, B} = 105$  МПа;  $\sigma_{\text{экв}, C} = 82$  МПа.

**12.70.** Вершина реза токарного станка (см. рис.) при обточке цилиндрической детали подвергается действию трёх взаимно перпендикулярных усилий:  $F_1$  — окружное усилие (сопротивление резанию в узком смысле слова),  $F_2$  — радиальное усилие, стремящееся отжать резец назад, и  $F_3$  — осевое усилие, параллельное оси детали, или усилие подачи. Резец считать защемлённым в сечении  $AB$ . Принять  $F_1 = 600$  Н,  $F_2 = 0,15F_1 = 90$  Н,  $F_3 = 0,35F_1 = 210$  Н. Вычислить максимальное напряжение в угловой точке защемлённого сечения, а также эквивалентные напряжения в серединах его сторон по критерию постоянства интенсивности напряжений. Расчёт осуществить: а) без учёта поперечных сил, б) с учётом поперечных сил.

Ответ: а)  $\sigma_{\text{max}} = 169$  МПа,  $\sigma_{\text{экв}}^* = 129$  МПа,  $\sigma_{\text{экв}}^{**} = 47$  МПа;

б)  $\sigma_{\text{max}} = 169$  МПа,  $\sigma_{\text{экв}}^* = 131$  МПа,  $\sigma_{\text{экв}}^{**} = 60$  МПа.



К задаче 12.70

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

**13.1.** Как соотносятся количества потенциальной энергии в двух стальных стержнях, показанных на рисунке, при условии, что напряжения в первом стержне и нижней части второго равны?

*Решение.* Очевидно, внутренние продольные усилия в стержнях равны соответственно

$$N_1 = F_1, \quad N_2 = F_2.$$

Тогда с учетом равенства напряжений

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2} = \sigma_2,$$

находим соотношение

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2} = 2.$$

Вычислим значения потенциальной энергии деформации:

$$U_1 = \int_0^l \frac{N_1^2}{2EA_1} dx = \frac{F_1^2 l}{2EA_1};$$

$$U_2 = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{N_2^2}{2EA_1} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{N_2^2}{2EA_2} dx = \frac{F_2^2 l}{4E} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) = \frac{3}{16} \frac{F_2^2 l}{EA_1}.$$

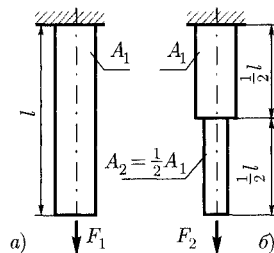
Тогда отношение найденных величин составит

$$U_1 : U_2 = 8 : 3.$$

*Ответ:* 8:3.

**13.2.** Найти отношение наибольших значений удельной потенциальной энергии  $u$  растянутых стержней из стали и резины, если соотношения модулей упругости и пределов пропорциональности этих материалов составляют соответственно  $E^c : E^p = 25000$ ,  $\sigma_{pr}^c : \sigma_{pr}^p = 100$ .

*Ответ:*  $u^c : u^p = 2 : 5$ .



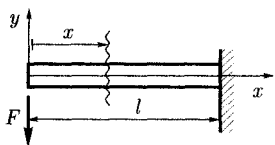
К задаче 13.1

**13.3.** Два круглых стержня диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  имеют одинаковую длину, сделаны из одного материала и скручиваются равными моментами. Количество потенциальной энергии, запасенной в первом стержне, в 16 раз больше, чем во втором. Чему равно отношение  $d_1 : d_2$ ?

Ответ:  $d_1 : d_2 = 2$ .

**13.4.** Балка пролетом  $l$  постоянного сечения жесткостью  $EI$  и высотой  $h$  испытывает чистый изгиб. Подсчитать количество потенциальной энергии, накопленной балкой, предполагая, что наибольшие нормальные напряжения в балке равны допускаемым  $[\sigma]$ .

Ответ:  $\frac{2[\sigma]^2 I l}{E h^2}$ .



К задаче 13.5

**13.5.** Оценить соотношение между потенциальной энергией деформации изгиба и деформации сдвига в балке, изображенной на рисунке. Рассмотреть различные виды поперечных сечений балки:

- а) круг диаметра  $d$ ;
- б) прямоугольник со сторонами  $b$  и  $h$ ,  $h > b$ ;
- в) двутавр.

*Решение.* Потенциальная энергия деформации в данном случае складывается из двух составляющих:

$$U = U_{\text{изг}} + U_{\text{сдв}},$$

$$\text{где } U_{\text{изг}} = \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx, \quad U_{\text{сдв}} = \int_0^l k_y \frac{Q_y^2}{2GA} dx.$$

Записав выражения для внутренних усилий

$$Q_y = -F, \quad M_z = -Fx,$$

вычислим интегралы:

$$U_{\text{изг}} = \frac{F^2 l^3}{6EI_z}, \quad U_{\text{сдв}} = k_y \frac{F^2 l}{2GA}.$$

Найдем отношение  $U_{\text{сдв}}$  и  $U_{\text{изг}}$  с учетом связи между  $G$  и  $E$ :

$$\alpha = \frac{U_{\text{сдв}}}{U_{\text{изг}}} = \frac{3k_y \cdot E}{G \cdot l^2} \cdot \frac{I_z}{A} = \frac{6k_y(1+\nu)}{l^2} \cdot \frac{I_z}{A}.$$



Для круглого и прямоугольного поперечных сечений получаем выражения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha_{\text{кр}} &= \frac{3(1+\nu)k_y^{\text{кр}}}{8} \cdot \frac{d^2}{l^2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot (1+\nu) \cdot \frac{d^2}{l^2} = \frac{5(1+\nu)}{12} \cdot \frac{d^2}{l^2}; \\ \text{б) } \alpha_{\text{пр}} &= \frac{(1+\nu)k_y^{\text{пр}}}{2} \cdot \frac{h^2}{l^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot (1+\nu) \cdot \frac{h^2}{l^2} = 0,6(1+\nu) \cdot \frac{h^2}{l^2}. \end{aligned}$$

(здесь учтены значения коэффициентов формы для круга и прямоугольника  $k_y^{\text{кр}} = \frac{10}{9}$ ,  $k_y^{\text{пр}} = \frac{6}{5}$ ). Как известно, для различных материалов значения коэффициента Пуассона  $\nu$  лежат в пределах от 0 до 0,5. Тогда первый множитель в выражении для  $\alpha_{\text{кр}}$  будет изменяться от 0,42 до 0,63, в выражении для  $\alpha_{\text{пр}}$  — от 0,6 до 0,9. Соотношение характерного поперечного размера ( $d$  или  $h$ ) и длины  $l$  для тела, считающегося стержнем, не должно превышать 0,2. Таким образом,  $\alpha_{\text{кр}}$  будет составлять не более 1,7–2,5 %;  $\alpha_{\text{пр}}$  — не более 2,4–3,6 %.

Для двутавров отношение  $I_z/A$  изменяется в довольно широких пределах: от  $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$  (№ 10) до  $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$  (№ 70). Коэффициент формы  $k_y$  равен отношению площади профиля к площади стенки и не превосходит 5. Учитывая, что длина стержня  $l$  должна быть по крайней мере в 5 раз больше, чем высота двутавра, оценим максимальные значения  $\alpha$  для двутавров № 10 и № 70 (принимается  $k_y = 5$ ,  $\nu = 0,3$ ):

$$\alpha_{\text{ДВ №10}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot (1 + 0,3)}{(0,5)^2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 23,4 \cdot 10^{-2};$$

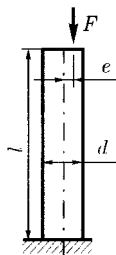
$$\alpha_{\text{ДВ №70}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot (1 + 0,3)}{(3,5)^2} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} = 23,8 \cdot 10^{-2}.$$

Как видно, максимальное значение  $\alpha$  не превышает 24%, что существенно больше, чем в случаях а) и б). Этот факт хорошо согласуется с известными выводами о заметном влиянии касательных напряжений на прочность при изгибе тонкостенных профилей.

**13.6.** Стержень длины  $l$  круглого поперечного сечения находится в условиях внецентренного сжатия силой  $F$  (см. рис. ). Найти потенциальную энергию деформации стержня и исследовать вклад в нее как деформации изгиба, так и деформации сжатия в зависимости от соотношения эксцентриситета нагрузки  $e$  и диаметра стержня  $d$  ( $0 \leq e \leq 0,5d$ ).

*Решение.* Потенциальная энергия деформации стержня состоит из двух частей:

$$U = U_{\text{изг}} + U_{\text{сж}}.$$



К задаче 13.6

Определив внутренние усилия (изгибающий момент  $M = F e$  и продольную силу  $N = -F$ ), можно найти значения составляющих потенциальной энергии, связанные с деформацией изгиба и деформацией сжатия, а также их сумму:

$$U_{\text{изг}} = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{F^2 e^2}{2EI} l; \quad U_{\text{сж}} = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx = \frac{F^2}{2EA} l;$$

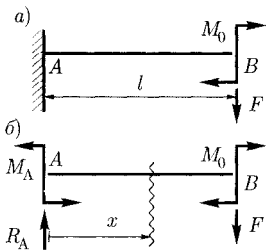
$$U = \frac{F^2 l}{2EI} \left( e^2 + \frac{I}{A} \right) = \frac{2F^2 l}{\pi d^2 E} \left( 16 \frac{e^2}{d^2} + 1 \right).$$

Отношение слагаемых потенциальной энергии стержня, таким образом, составляет

$$\beta = \frac{U_{\text{изг}}}{U_{\text{сж}}} = \frac{16e^2}{d^2}.$$

При изменении  $e$  от 0 до  $0,5d$  параметр  $\beta$  изменяется от 0 до 4. Если  $e$  остается в пределах ядра сечения ( $0 \leq e \leq 0,125d$ ), то получаем  $\beta \leq 1$ . Следовательно, потенциальная энергия, связанная с деформацией сжатия, преобладает над энергией изгиба в случае приложения силы  $F$  в ядре сечения, а при удалении силы от центра сечения вклад энергии деформации сжатия уменьшается, но во всяком случае  $U_{\text{сж}}$  составляет не менее 25% от  $U_{\text{изг}}$ .

### 13.7. На консольную балку (см. рис. а)



действуют сосредоточенная вертикальная сила  $F$  и сосредоточенный момент  $M_0$ . Жесткость балки  $EI$  постоянна. Чему равна потенциальная энергия деформации балки?

*Решение.* Определив реакции закрепления  $R_A = F$ ,  $M_A = M_0 + Fl$  (см. рис. б), запишем выражение для изгибающего момента

$$M(x) = -M_A + R_A x = -(M_0 + Fl) + Fx.$$

К задаче 13.7

В случае плоского изгиба допустимо использовать приближенное выражение для потенциальной энергии деформации, содержащее один интеграл:

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^l \frac{(-(M_0 + Fl) + Fx)^2}{2EI} dx =$$

$$= \frac{1}{2EI} (M_0^2 l + M_0 F l^2 + \frac{F l^3}{3}).$$

Заметим, что тот же результат может быть получен с использованием теоремы Клапейрона для двух обобщенных сил ( $F$  и  $M_0$ ):

$$U = \frac{1}{2} F \cdot v_B + \frac{1}{2} M_0 \cdot \varphi_B.$$

Очевидно, что в силу принципа суперпозиции имеем

$$\begin{aligned}v_B &= v_B(F) + v_B(M_0), \\ \varphi_B &= \varphi_B(F) + \varphi_B(M_0),\end{aligned}$$

где  $v_B(F)$ ,  $v_B(M_0)$  и  $\varphi_B(F)$ ,  $\varphi_B(M_0)$  – соответственно прогибы и углы поворота, создаваемые силой  $F$  и моментом  $M_0$ , прикладываемыми к балке по отдельности. Эти величины имеются в таблицах (см., например, ниже ответ к задаче 13.22, а, б) или могут быть легко найдены интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений изогнутых осей:

$$\begin{aligned}v_B(F) &= \frac{l^3}{3EI}F = \lambda_{FF}F, \quad \varphi_B(F) = \frac{l^2}{2EI}F = \lambda_{MF}F; \\ v_B(M_0) &= \frac{l^2}{2EI}M_0 = \lambda_{FM}M_0, \quad \varphi_B(M_0) = \frac{l}{EI}M_0 = \lambda_{MM}M_0.\end{aligned}$$

Здесь буквами  $\lambda$  обозначены так называемые коэффициенты податливости, причем первый индекс указывает, по направлению какой обобщенной силы происходит перемещение, второй – какая обобщенная сила его вызывает. Заметим, что коэффициенты податливости численно равны соответствующим перемещениям от единичных обобщенных сил. Из формул видно, что  $\lambda_{FM} = \lambda_{MF}$ . Напомним, что это фундаментальное свойство носит название теоремы о взаимности перемещений. С учетом введенных обозначений можно записать

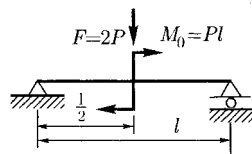
$$\begin{aligned}v_B &= \lambda_{FF}F + \lambda_{FM}M_0, \\ \varphi_B &= \lambda_{MF}F + \lambda_{MM}M_0, \\ U &= \frac{1}{2}\lambda_{FF}F^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{MF} + \lambda_{FM})FM_0 + \frac{1}{2}\lambda_{MM}M_0^2 = \\ &= \frac{F^2 l^3}{6EI} + \frac{M_0 F l^2}{2EI} + \frac{M_0^2 l}{2EI}.\end{aligned}$$

Последнее выражение полностью совпадает с полученным ранее.

Ответ:  $\frac{M_0^2 l}{2EI} + \frac{M_0 F l^2}{2EI} + \frac{F^2 l^3}{6EI}$ .

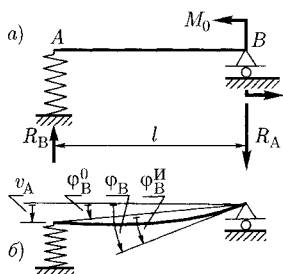
**13.8.** На балку, изображенную на рисунке, действуют сосредоточенные сила  $F$  и момент  $M_0$ , величины которых изменяются пропорционально некоторому параметру  $P$ . Определить потенциальную энергию упругой деформации балки и обобщенное перемещение, отвечающее обобщенной силе  $P$ . Жесткость  $EI$  считать постоянной.

Ответ:  $\frac{P^2 l^3}{12EI}, \frac{P l^3}{6EI}$ .



К задаче 13.8

**13.9.** Балка  $AB$  длины  $l$  опирается в точке  $A$  на винтовую пружину с коэффициентом податливости  $\lambda$ , а в точке  $B$  – на шарнирную опору (см. рис.  $a$ ). Подсчитать количество потенциальной энергии, накопленной этой системой под действием пары сил с моментом  $M_0$ , приложенной в сечении  $B$ . Жесткость балки на изгиб  $EI$  известна. Чему равно обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе  $M_0$ ?



К задаче 13.9

*Решение.* Потенциальная энергия деформации, накопленная системой, складывается из потенциальной энергии деформации изгиба балки  $U_1$  и потенциальной энергии деформации пружины  $U_2$ :

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} M_0 \cdot \varphi_B^I + \frac{1}{2} R_A \cdot v_A.$$

Здесь  $\varphi_B^I = \frac{M_0 l}{3EI}$  – угол поворота сечения  $B$ , обусловленный изгибом балки;  $v_A = \lambda R_A = \lambda \frac{M_0}{l}$  – осадка опоры  $A$  (см. рис.  $b$ ). Тогда

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2 l}{3EI} + \frac{1}{2} \cdot \lambda \frac{M_0^2}{l^2}.$$

Отметим, что угол поворота сечения  $B$ , связанный с перемещением балки как жесткого целого от осадки опоры  $A$ , составляет  $\varphi_B^o \approx \operatorname{tg} \varphi_B^o = \frac{v_A}{l} = \lambda \frac{M_0}{l^2}$ . Тогда перемещение, которое может быть найдено по теореме Кастильяно, будет представлять полный угол поворота сечения  $B$ , обусловленный деформацией всей системы  $\frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 l}{3EI} + \lambda \frac{M_0}{l^2} = \varphi_B^I + \varphi_B^o = \varphi_B$ . Это, по определению, и есть обобщенное перемещение, отвечающее обобщенной силе  $M_0$ .

Ответ:  $\frac{M_0^2 l}{6EI} + \frac{M_0^2 \lambda}{2l^2}, \frac{M_0 l}{3EI} + \frac{M_0 \lambda}{l^2}.$

**13.10.** Двутавровая стальная балка № 22 пролетом 6 м опирается одним концом на шарнирную опору, а другим – на винтовую пружину с коэффициентом податливости  $3,75 \cdot 10^{-6}$  м/Н. Подсчитать количество потенциальной энергии, накопленной этой системой под действием силы  $P = 20$  кН, приложенной посередине пролета балки. Найти величину вертикального перемещения среднего сечения балки.

Ответ: 364 Дж ;  $3,64 \cdot 10^{-2}$  м.

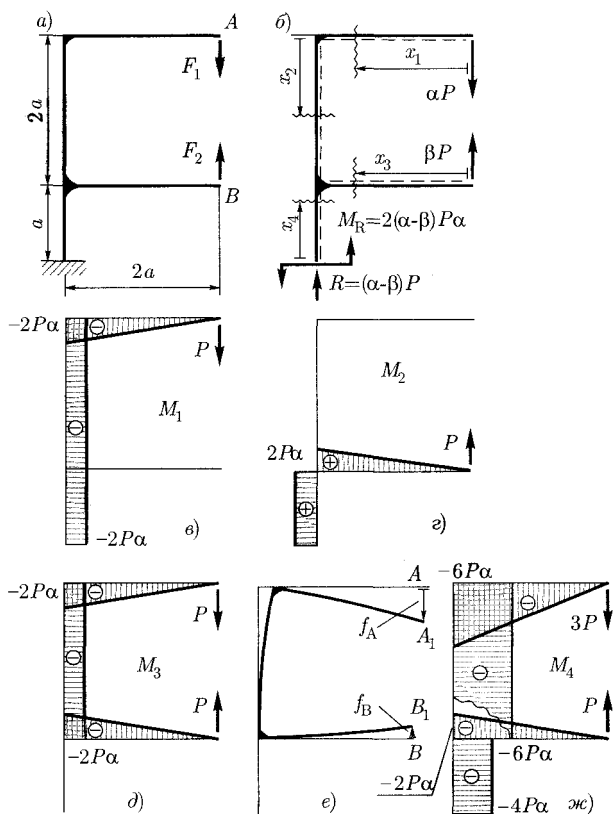
**13.11.** Плоская рама нагружена сосредоточенными силами  $F_1$  и  $F_2$  (см. рис.  $a$ ). Их значения изменяются пропорционально некоторо-

му параметру  $P$ , так что  $F_1 = \alpha P$ ,  $F_2 = \beta P$ . Найти потенциальную энергию деформации рамы и обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе  $P$ , если:

1)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ; 2)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ;

3)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ; 4)  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ .

Жесткость на изгиб  $EI$  для всех участков рамы известна и одинакова.



К задаче 13.11

*Решение.* Для нахождения потенциальной энергии деформации изгиба допустимо использовать приближенную формулу

$$U = \int_L \frac{M^2(x)}{2EI} dl,$$

где  $M(x)$  – выражение изгибающего момента, а символ  $\int_L \dots dl$  обозначает интегрирование по всем участкам, составляющим контур плоской рамы.

Разбиение рамы на участки представлено на рис. б, выражения  $M(x)$  для отдельных участков в задачах 1–4 сведены в таблицу 1. Эпюры моментов изображены на рис. в, г, д, ж; для задачи 3 дополнительно приведен примерный вид изогнутой оси рамы (рис. е). Напомним, что штриховая линия (рис. б) на всех участках обозначает нижнюю часть стержня, что позволяет использовать правило знаков внутренних усилий, ранее введенное для балок.

Таблица 1

| № задачи | Эпюра моментов | Рис. | $0 \leq x_1 \leq 2a$ | $0 \leq x_2 \leq 2a$ | $0 \leq x_3 \leq 2a$ | $0 \leq x_4 \leq a$ |
|----------|----------------|------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| 1        | $M_1$          | в    | $-Px_1$              | $-2Pa$               | 0                    | $-2Pa$              |
| 2        | $M_2$          | г    | 0                    | 0                    | $Px_3$               | $2Pa$               |
| 3        | $M_3$          | д    | $-Px_1$              | $-2Pa$               | $Px_3$               | 0                   |
| 4        | $M_4$          | ж    | $-3Px_1$             | $-6Pa$               | $Px_3$               | $-4Pa$              |

Отметим очевидные соотношения, вытекающие из принципа суперпозиции:  $M_3 = M_1 + M_2$ ,  $M_4 = 3M_1 + M_2$ . Результаты вычисления потенциальной энергии деформации и искомого обобщенного перемещения представлены в таблице 2. Можно показать (см. задачу 13.26.), что  $f_3 = f_A + f_B$  (рис. е).

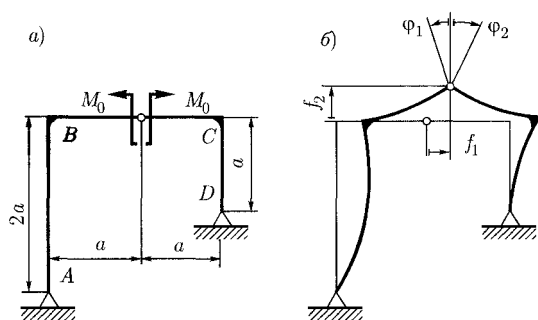
Ответ:

Таблица 2

| № задачи, $i$ | Потенциальная энергия деформации $U_i$ |                              | Обобщенное перемещение $f_i$ |                              |
|---------------|----------------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1             | 22                                     | $\times \frac{P^2 a^3}{3EI}$ | 44                           | $\times \frac{P^2 a^3}{3EI}$ |
| 2             | 10                                     |                              | 20                           |                              |
| 3             | 20                                     |                              | 40                           |                              |
| 4             | 172                                    |                              | 344                          |                              |

**13.12.** Рама, представленная на рис. а, нагружена двумя одинаковыми по величине и противоположными по направлению моментами, приложенными на бесконечно малом расстоянии от шарнира с разных его сторон. Найти потенциальную энергию деформации рамы и обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе  $M_0$ . Жесткость всех участков рамы на изгиб  $EI = \text{const}$ .

*Примечание.* Искомое обобщенное перемещение  $\varphi$  называется углом раскрытия шарнира. Можно показать, что оно равно сумме углов пово-

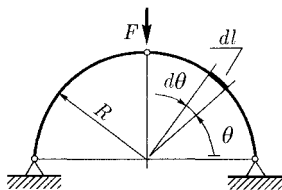


К задаче 13.12

рота сечений, расположенных бесконечно близко с двух сторон шарнира:  
 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  (см. рис. б).

Ответ:  $\frac{46}{27} \cdot \frac{M_0^2 a}{EI}$ ;  $\frac{92}{27} \cdot \frac{Ma}{EI}$ .

**13.13.** Определить потенциальную энергию деформации стержня малой кривизны, представляющего собой полукруглую трехшарнирную арку радиуса  $R$  (см. рис.). Чему равно обобщенное перемещение, соответствующее силе  $F$ ? Жесткость стержня на изгиб  $EI$  задана.



К задаче 13.13

Указание. Выражение для изгибающего момента записать как функцию полярного угла  $\theta$ :  $M(\theta) = 0,5FR(1 - \sin \theta - \cos \theta)$ . При вычислении интеграла учесть, что дифференциал дуги  $dl = R d\theta$  (см. рис.).

Ответ:  $\frac{F^2 R^3}{4EI}(\pi - 3)$ ;  $\frac{FR^3}{2EI}(\pi - 3)$ .

**13.14.** Определить потенциальную энергию деформации коленчатого стержня, изображенного на рис. а. Значения  $EI$  и  $GI_K$  считать заданными и постоянными по длине стержня.

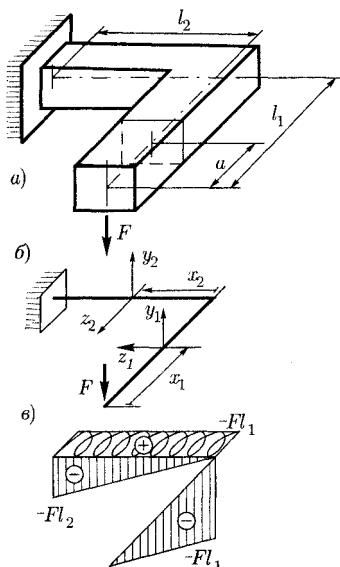
Решение. Для определения потенциальной энергии деформации воспользуемся приближенной формулой

$$U = \int_L \frac{M_x^2}{2GI_K} dl + \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dl + \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dl.$$

(здесь символ  $\int_L \dots dl$  обозначает интегрирование по всем стержням, составляющим стержневую систему). Запишем выражения для моментов,

входящих в формулу, по двум участкам (см. рис. б):

- 1)  $0 \leq x \leq l_1 : M_x = 0, M_y = 0, M_z = -F x;$
- 2)  $0 \leq x \leq l_2 : M_x = F l_1, M_y = 0, M_z = -F x.$



К задаче 13.14

Эпюры моментов представлены на рис. в (эпюра крутящего момента  $M_x$  строится в произвольной плоскости и штрихуется винтовой линией, эпюры изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  строятся в плоскостях изгиба  $xoz$  и  $xoy$  соответственно, на сжатых волокнах).

Тогда

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{l_1} \frac{F^2 x^2}{2EI_z} dx + \int_0^{l_2} \frac{F^2 l_1^2}{2GI_K} dx + \\
 &+ \int_0^{l_2} \frac{F^2 x^2}{2EI_z} dx = \\
 &= \frac{F^2 l_1^3}{6EI_z} + \frac{F^2 l_1^2 l_2}{2GI_K} + \frac{F^2 l_2^3}{6EI_z}.
 \end{aligned}$$

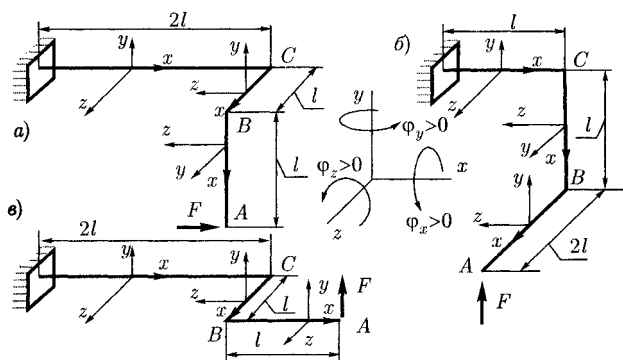
$$\text{Ответ: } \frac{F^2}{6} \left( \frac{l_1^3 + l_2^3}{EI_z} + \frac{3l_1^2 l_2}{GI_K} \right).$$

**13.15.** Определить потенциальную энергию деформации стальных пространственных коленчатых стержней, представленных на рис. а, б, в. Стержни имеют постоянное по всей длине сечение: а) квадрат со стороной  $c = 0,05$  м; б) круг диаметром  $d = 0,07$  м; в) прямоугольник со сторонами  $b = 0,04$  м,  $h = 2b$ . Во всех случаях  $l = 1$  м,  $F = 500$  кН,  $E = 200$  ГПа,  $G = 80$  ГПа.

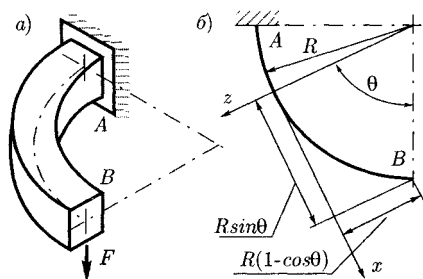
$$\begin{aligned}
 \text{Ответ: а) } &\frac{F^2 l^3}{2c^4} \left( \frac{56}{E} + \frac{7,14}{G} \right) \approx 7,4 \text{ Дж.} \\
 \text{б) } &\frac{32F^2 l^3}{\pi d^4} \left( \frac{7}{E} + \frac{2}{G} \right) \approx 6,4 \text{ Дж.} \\
 \text{в) } &\frac{F^2 l^3}{2b^4} \left( \frac{14}{E} + \frac{6,56}{G} \right) \approx 7,4 \text{ Дж.}
 \end{aligned}$$

**13.16.** Ось криволинейного стержня  $AB$  представляет собой четверть окружности радиуса  $R$ . Стержень жестко заделан в сечении





К задаче 13.15



К задаче 13-16

А и нагружен силой  $F$  на свободном конце  $B$  (см. рис. а). Какова потенциальная энергия деформации стержня, если его сечение – квадрат со стороной  $c$ ? Физические постоянные материала  $E$  и  $\nu$  считать известными.

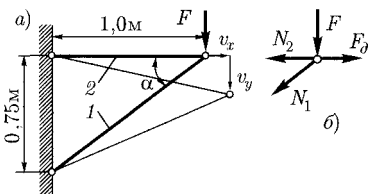
*Решение.* Запишем выражения моментов в полярной системе координат как функции полярного угла  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  (рис. б):  $M_x = -FR(1 - \cos \theta)$ ,  $M_y = 0$ ,  $M_z = -FR \sin \theta$ . Напомним, что в данном случае величина  $dl$  является дифференциалом дуги, поэтому  $dl = R d\theta$ . Вычислим теперь потенциальную энергию деформации

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{\pi/2} \frac{F^2 R^2 (1 - \cos \theta)^2}{2GI_K} R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{F^2 R^2 \sin^2 \theta}{2EI} R d\theta = \\
 &= F^2 R^3 \left( \frac{3\pi - 8}{8GI_K} + \frac{\pi}{8EI} \right) = \frac{F^2 R^3}{8E} \left( \frac{2(1 + \nu)(3\pi - 8)}{I_K} + \frac{\pi}{I} \right).
 \end{aligned}$$

Подставив в формулу геометрические характеристики квадратного сечения  $I = c^4/12$ ,  $I_K = 0,14c^4$ , окончательно получаем

$$U = \frac{F^2 R^3}{8Ec^4} (14,29(1+\nu)(3\pi - 8) + 12\pi).$$

Ответ:  $F^2 R^3 (14,29(1+\nu)(3\pi - 8) + 12\pi) / 8Ec^4$ .



К задаче 13.17

**13.17.** В кронштейне, показанном на рис. а, стержень 1 представляет собой подкос из сосны ( $E_1 = 10^{10}$  Па,  $A_1 = 2,5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>), а стержень 2 – стальную оттяжку ( $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $A_2 = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>). С помощью теоремы Кастильяно определить вертикальное и горизонтальное перемещения узла, в котором приложена сила  $F = 120$  кН.

*Решение.* Поскольку сила приложена по направлению одного из искоемых перемещений ( $v_y$ ), по направлению другого ( $v_x$ ) приложим добавочную силу  $F_\partial = 0$ . Выразим продольные усилия в стержнях через эти силы с помощью уравнений равновесия рассматриваемого узла (см. рис. б) и вычислим частные производные:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -N_1 \cos \alpha - N_2 + F_\partial = 0; \\ \sum F_y &= -N_1 \sin \alpha - F = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{F}{\sin \alpha} = -\frac{5}{3}F; \quad \frac{\partial N_1}{\partial F} = -\frac{5}{3}; \quad \frac{\partial N_1}{\partial F_\partial} = 0; \\ N_2 &= F_\partial - N_1 \cos \alpha = F_\partial + \frac{4}{3}F; \quad \frac{\partial N_2}{\partial F} = +\frac{4}{3}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial F_\partial} = 1. \end{aligned}$$

Для потенциальной энергии деформации системы двух стержней имеем выражение

$$U = \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \frac{N_i^2 dx}{2E_i A_i} = \frac{N_1^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{N_2^2 l_2}{2E_2 A_2}.$$

Тогда, согласно теореме Кастильяно, получаем выражения для горизонтального и вертикального перемещений узла соответственно:

$$\begin{aligned} v_x &= \left. \frac{\partial U}{\partial F_\partial} \right|_{F_\partial=0} = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_\partial} + \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \Big|_{F_\partial=0} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial F_\partial} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F l_2}{E_2 A_2} = \\ &= (4 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 1) / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3}) = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,8 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_y &= \frac{\partial U}{\partial F} \Big|_{F_0=0} = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F} + \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \Big|_{F_0=0} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial F} = \\
 &= -\frac{5}{3} \cdot \frac{F l_1}{E_1 A_1} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{4}{3} \cdot \frac{F l_2}{E_2 A_2} \cdot \frac{4}{3} = \\
 &= (25 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 1,25) / (9 \cdot 10^{10} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}) + \\
 &\quad + (16 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 1) / (9 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3}) = \\
 &= 1,67 \cdot 10^{-3} + 1,07 \cdot 10^{-3} = 2,73 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,73 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

*Ответ:* вертикальное перемещение 2,73 мм вниз; горизонтальное перемещение 0,8 мм вправо.

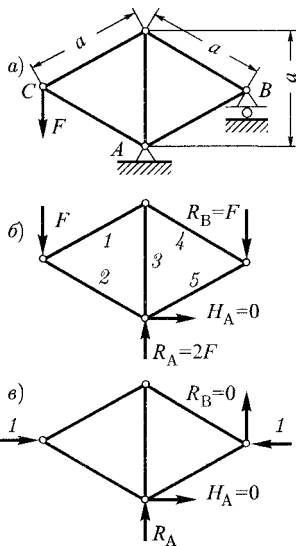
**13.18.** В ферме (см. рис. а) определить взаимное горизонтальное перемещение точек *C* и *B* с помощью интеграла Максвелла – Мора. Жесткость *EA* постоянна.

*Указание.* Взаимное горизонтальное перемещение  $u_{BC}$  выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
 u_{BC} &= \sum_{i=1}^5 \int_{l_i} \frac{N N_1}{EA} dx = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i N_{1i} l_i}{EA} = \\
 &= \left( \sum_{i=1}^5 N_i N_{1i} \right) \cdot \frac{a}{EA}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $N_i$  – продольная сила, возникающая в  $i$ -ом стержне от заданной нагрузки,  $N_{1i}$  – продольная сила в том же стержне от загрузения единичной обобщенной силой, соответствующей искомому перемещению. То, что они постоянны в пределах каждого стержня, позволяет легко вычислить интегралы Максвелла – Мора.

После вычисления реакций закрепления в грузовом и вспомогательном состояниях, изображенных на рис. б, в, определение продольных усилий  $N_i$  и  $N_{1i}$  производится с помощью уравнений равновесия отдельных вырезанных узлов конструкции (см. задачу 13.17.). Результаты сведены в таблицу:



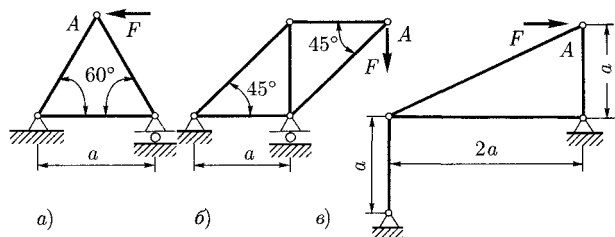
К задаче 13.18

| Номер<br>стержня<br>$i$ | Грузовое<br>состояние<br>$N_i$ | Вспомогательное<br>состояние<br>$N_{1i}$ | $N_i \cdot N_{1i}$ |
|-------------------------|--------------------------------|------------------------------------------|--------------------|
| 1                       | $F$                            | $-1/\sqrt{3}$                            | $-F/\sqrt{3}$      |
| 2                       | $-F$                           | $-1/\sqrt{3}$                            | $F/\sqrt{3}$       |
| 3                       | $-F$                           | $1/\sqrt{3}$                             | $-F/\sqrt{3}$      |
| 4                       | $F$                            | $-1/\sqrt{3}$                            | $-F/\sqrt{3}$      |
| 5                       | $-F$                           | $-1/\sqrt{3}$                            | $F/\sqrt{3}$       |

Тогда  $u_{BC} = -\frac{F}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{EA}$ , т.е. на самом деле расстояние между точками  $B$  и  $C$  увеличивается.

Ответ: Точки  $B$  и  $C$  расходятся на расстояние  $\frac{Fa}{\sqrt{3}EA}$ .

**13.19.** С помощью теоремы Кастильяно или формулы Максвелла – Мора определить вертикальные  $v_y$  и горизонтальные  $v_x$  перемещения узла  $A$  в стержневых системах, изображенных на рисунках  $a$ ,  $b$ ,  $v$ . Жесткость  $EA = \text{const}$ .



К задаче 13.19

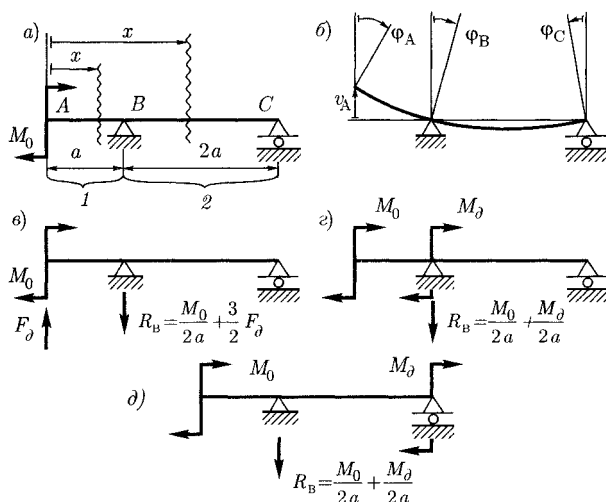
Ответ: а)  $v_x = \frac{9 Fa}{4 EA}$  (влево),  $v_y = \frac{Fa}{4\sqrt{3}EA}$  (вверх);

б)  $v_x = \frac{Fa}{EA}(3+2\sqrt{2})$  (вправо),  $v_y = \frac{Fa}{EA}(3+4\sqrt{2})$  (вниз);

в)  $v_x = \frac{Fa}{2EA}$  (влево),  $v_y = \frac{5(2+\sqrt{5}) Fa}{4 EA}$  (вверх).

**13.20.** Определить при помощи теоремы Кастильяно прогиб в сечении  $A$  и углы поворота в сечениях  $A$ ,  $B$ ,  $C$  для балки, изображенной на рис.  $a$ . Жесткость на изгиб  $EI$  считать известной.

Решение. Произвольное обобщенное перемещение  $f$  (например,  $v_A$ ,  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  или  $\varphi_C$ , см. схему  $b$ ) может быть найдено по теореме Кастильяно как частная производная от потенциальной энергии деформации по соответствующей обобщенной силе  $F$ , действительно приложенной к кон-



К задаче 13.20

струкции, или добавочной:

$$f = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_l \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} dx.$$

В последней формуле, справедливой только для плоского изгиба балок, символ  $\int \dots dx$  обозначает интегрирование по всей длине балки, а функция  $M$  представляет собой выражение изгибающего момента.

В данной задаче выделяются два участка интегрирования: первый —  $0 \leq x \leq a$  и второй —  $a \leq x \leq 3a$  (см. схему б). Выражения изгибающего момента на первом и втором участках:

$$M_1(x) = M_0; \quad M_2(x) = M_0 - R_B(x - a) = \frac{M_0}{2} \left( 3 - \frac{x}{a} \right).$$

Найдем угол поворота  $\varphi_A$ , воспользовавшись тем, что соответствующая ему обобщенная сила — момент  $M_0$  действительно приложена к балке в сечении А:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial M_0} &= 1; \quad \frac{\partial M_2}{\partial M_0} = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{x}{a} \right); \\ \varphi_A &= \int_0^a \frac{M_0}{EI} \cdot 1 \cdot dx + \int_a^{3a} \frac{M_0}{2EI} \cdot \left( 3 - \frac{x}{a} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( 3 - \frac{x}{a} \right) dx = \\ &= \frac{M_0 a}{EI} - \frac{M_0 a}{4EI} \cdot \left( -\frac{8}{3} \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_0 a}{EI}. \end{aligned}$$

Для вычисления всех остальных перемещений воспользуемся приемом введения добавочной силы  $P_\partial$  ( $F_\partial$  для перемещения  $v_A$ ,  $M_\partial$  — для  $\varphi_B$  и  $\varphi_C$ ), которая после вычисления частной производной полагается равной нулю (см. рис. в, г, д). Заметим, что во всех случаях структура выражения суммарного изгибающего момента  $M_\Sigma$  от совместного действия заданной нагрузки и добавочной силы такова:

$$M_\Sigma(x) = M(x) + M^*(x).$$

Здесь  $M(x)$  — изгибающий момент от заданной нагрузки — был вычислен ранее. Он не зависит от  $P_\partial$ , поэтому

$$\frac{\partial M_\Sigma}{\partial P_\partial} = \frac{\partial M^*}{\partial P_\partial}.$$

Таким образом, достаточно продифференцировать лишь выражение изгибающего момента от добавочной силы  $M^*$ , которое затем обращается в нуль при  $P_\partial = 0$ . Результаты вычисления  $M^*$  и  $\frac{\partial M^*}{\partial P_\partial}$  для схем в, г, д сведены в таблицу:

| Схема | Обобщенное перемещение | $M_1^*(x)$     | $\partial M_1^* / \partial P_\partial$ | $M_2^*(x)$                                            | $\partial M_2^* / \partial P_\partial$     |
|-------|------------------------|----------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| в     | $v_A$                  | $F_\partial x$ | $x$                                    | $\frac{F_\partial a}{2} \left(3 - \frac{x}{a}\right)$ | $\frac{a}{2} \left(3 - \frac{x}{a}\right)$ |
| г     | $\varphi_B$            | 0              | 0                                      | $\frac{M_\partial}{2} \left(3 - \frac{x}{a}\right)$   | $\frac{1}{2} \left(3 - \frac{x}{a}\right)$ |
| д     | $\varphi_C$            | 0              | 0                                      | $\frac{M_\partial}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)$   | $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ |

Теперь определим искомые перемещения:

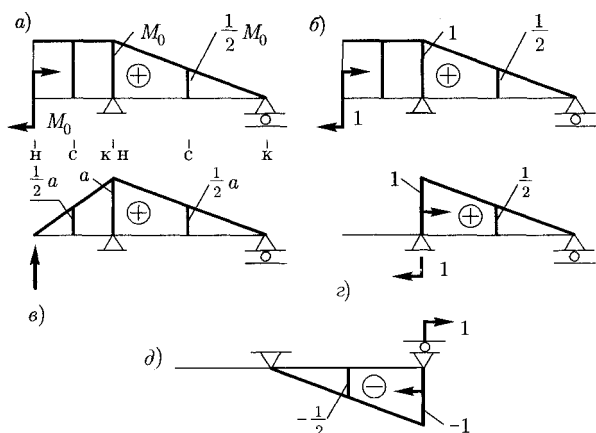
$$\begin{aligned}
 v_A &= \int_0^a \frac{M_0}{EI} \cdot x dx + \int_0^{3a} \frac{M_0}{2EI} \cdot \left(3 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(3 - \frac{x}{a}\right) dx = \\
 &= \frac{M_0 a^2}{2EI} - \frac{M_0 a^2}{4EI} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{7}{6} \cdot \frac{M_0 a^2}{EI}; \\
 \varphi_B &= \int_0^{3a} \frac{M_0}{2EI} \cdot \left(3 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{x}{a}\right) dx = \\
 &= -\frac{M_0 a}{4EI} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_0 a}{EI};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_C &= \int_a^{3a} \frac{M_0}{2EI} \cdot \left(3 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{M_0 a}{4EI} \cdot \left(3 \cdot 2 - \frac{4}{2} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 26\right) = -\frac{M_0 a}{3EI}.\end{aligned}$$

Знак "+" у  $v_A$  и  $\varphi_B$  означает, что их направления совпадают с направлением добавочных сил (см. схему б.), знак "-" для угла  $\varphi_C$  - то, что его направление противоположно направлению добавочной силы.

Ответ:  $v_A = \frac{7}{6} \cdot \frac{M_0 a^2}{EI}$  (вверх);  $\varphi_A = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_0 a}{EI}$ ,  $\varphi_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_0 a}{EI}$  (по часовой стрелке);  $\varphi_C = -\frac{M_0 a}{3EI}$  (против часовой стрелки).

**13.21.** Определить указанные в задаче 13.20. перемещения с помощью интегралов Максвелла - Мора.



К задаче 13.21

**Решение.** При использовании интегралов Максвелла-Мора вычисление частной производной по добавочной силе заменяется составлением выражения изгибающего момента  $M_1$  от единичной обобщенной силы, соответствующей искомому перемещению. Действительно, из таблицы в задаче 13.20. видно, что третий и пятый столбцы могут быть получены, если во втором и четвертом столбцах положить  $P_\partial = 1$ . Эпюра  $M(x)$  (так называемая грузовая эпюра) и эпюра  $M_1(x) = M^*|_{P_\partial = 1}$  (так называемая вспомогательная эпюра) независимы и строятся по отдельности.

Грузовая и вспомогательные эпюры приведены на рис. а и б, в, г, д соответственно для определения  $\varphi_A$ ,  $v_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$ ; их аналитические выражения имеются в задаче 13.20. Далее, если проводить вычисления инте-

гралов Максвелла–Мора

$$f = \int_l \frac{MM_1}{EI} dx$$

аналитически, то ход решения не отличается от хода решения задачи 13.20. Однако объем расчетов может быть сокращен с помощью формулы численного интегрирования Симпсона:

$$f = \int_0^l \frac{MM_1}{EI} dx = \frac{l}{6EI} (M^H M_1^H + 4M^c M_1^c + M^K M_1^K),$$

где верхние индексы *н*, *с* и *к* означают, что ординаты эюр *M* и *M*<sub>1</sub> вычисляются соответственно в начале, середине и конце участка интегрирования длиной *l* (направление обхода произвольно).

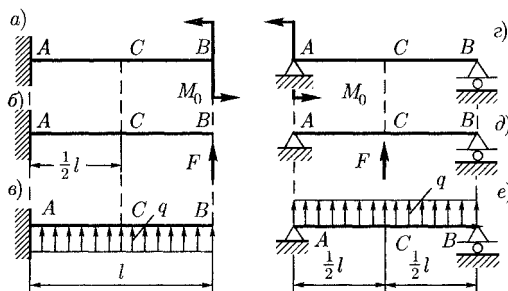
Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{a}{6EI} (M_0 \cdot 1 + 4 \cdot M_0 \cdot 1 + M_0 \cdot 1) + \frac{2a}{6EI} \left( M_0 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{M_0}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{M_0 a}{EI} + \frac{2}{3} \cdot \frac{M_0 a}{EI} = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_0 a}{EI}; \\ v_A &= \frac{a}{6EI} \left( 4 \cdot M_0 \cdot \frac{a}{2} + M_0 \cdot a \right) + \frac{2a}{6EI} \left( M_0 \cdot a + 4 \cdot \frac{M_0}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) = \\ &= \frac{M_0 a^2}{2EI} + \frac{2}{3} \cdot \frac{M_0 a^2}{EI} = \frac{7}{6} \cdot \frac{M_0 a^2}{EI}; \\ \varphi_B &= \frac{2a}{6EI} \left( M_0 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{M_0}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} \frac{M_0 a}{EI}; \\ \varphi_C &= \frac{2a}{6EI} \left( 4 \cdot \frac{M_0}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{M_0 a}{3EI}. \end{aligned}$$

Результаты расчета полностью совпадают с результатами расчета в задаче 13.20.

**13.22.** В балках, изображенных на рис. *а–е*, определить следующие перемещения: вертикальные перемещения сечений *B* и *C* и угол поворота сечения *B* для схем *а–в*; вертикальное перемещение сечения *C* и углы поворота сечений *A* и *B* для схем *г–е*. Жесткость *EI* считать постоянной.





К задаче 13.22

Ответ:

| Схема | $v_B$                 | $\varphi_B$        | Схема | $v_B$                 | $\varphi_B$          | Схема | $v_c$                            | Схема | $v_c$                           |
|-------|-----------------------|--------------------|-------|-----------------------|----------------------|-------|----------------------------------|-------|---------------------------------|
| a     | $\frac{M_0 l^2}{2EI}$ | $\frac{M_0 l}{EI}$ | з     | $\frac{M_0 l^2}{3EI}$ | $-\frac{M_0 l}{6EI}$ | a     | $\frac{M_0 l^2}{8EI}$            | з     | $\frac{M_0 l^2}{16EI}$          |
| б     | $\frac{Fl^3}{3EI}$    | $\frac{Fl^2}{2EI}$ | д     | $\frac{Fl^3}{16EI}$   | $-\frac{Fl^2}{16EI}$ | б     | $\frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EI}$   | д     | $\frac{Fl^3}{48EI}$             |
| в     | $\frac{ql^4}{8EI}$    | $\frac{ql^3}{6EI}$ | е     | $\frac{ql^4}{24EI}$   | $-\frac{ql^3}{24EI}$ | в     | $\frac{17}{384} \frac{ql^4}{EI}$ | е     | $\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$ |

*Примечание.* В таблице знак "+" соответствует перемещению точки оси стержня вверх и повороту сечения против часовой стрелки от первоначального положения.

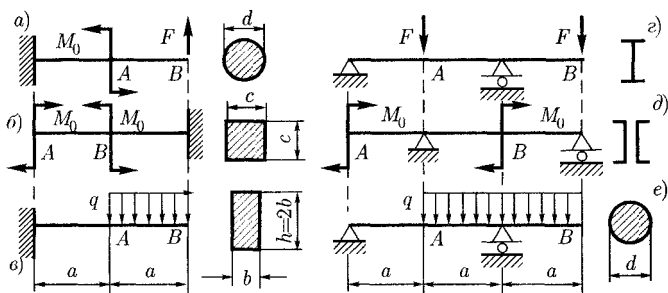
**13.23.** В стальных балках, представленных на рис. а–е, подобрав размеры поперечных сечений указанного вида из условия прочности ( $[\sigma]=160$  МПа), определить прогибы и углы поворота в сечениях А и В. Для всех схем принять  $a = 2$  м,  $q = 10$  кН/м,  $F = 20$  кН,  $M_0 = 40$  кНм. После определения числовых значений величин перемещений проверить условия жесткости, считая, что прогибы не должны превосходить 12 мм в задачах а–в и 6 мм в задачах з–е, и, если нужно, подобрать новые размеры сечений.

Ответ: См. таблицу на стр. 230.

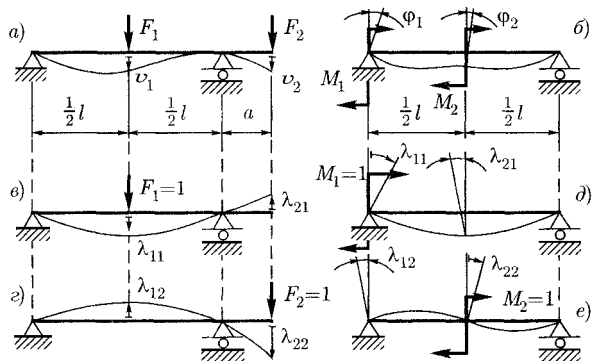
*Примечание.* В таблице знак "+" соответствует перемещению точки оси стержня вверх от первоначального положения и повороту сечения против часовой стрелки. В графе "сечение" в первой строке приведены сведения о сечениях, подобранных из условий прочности (пр), во второй — из условия жесткости (ж).

К задаче 13.23

| Схема                | $a$                                                             | $\bar{b}$                                                       | $\epsilon$                                                      | $z$                                         | $\partial$                                  | $e$                                                             |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Сечение              | $d_{\text{пр}} = 0,14\text{м}$<br>$d_{\text{ж}} = 0,20\text{м}$ | $c_{\text{пр}} = 0,12\text{м}$<br>$c_{\text{ж}} = 0,14\text{м}$ | $b_{\text{пр}} = 0,09\text{м}$<br>$b_{\text{ж}} = 0,12\text{м}$ | $N^{\circ} 22a$<br>$N^{\circ} 36$           | $N^{\circ} 18a$<br>$N^{\circ} 33$           | $d_{\text{пр}} = 0,11\text{м}$<br>$d_{\text{ж}} = 0,17\text{м}$ |
| $v_A$                | $\frac{a^2(3M_0 - 5Fa)}{6EI}$                                   | $\frac{M_0 a^2}{2EI}$                                           | $-\frac{7}{12} \frac{qa^4}{EI}$                                 | $\frac{Fa^3}{12EI}$                         | $\frac{13}{12} \frac{M_0 a^2}{EI}$          | $\frac{qa^4}{48EI}$                                             |
| $\times 10^{-3}$ м   | $\begin{matrix} -14,1 \\ -3,4 \end{matrix}$                     | $\begin{matrix} 23,1 \\ 12,5 \end{matrix}$                      | $\begin{matrix} -10,7 \\ -3,4 \end{matrix}$                     | $\begin{matrix} 2,4 \\ 0,5 \end{matrix}$    | $\begin{matrix} 36,4 \\ 5,4 \end{matrix}$   | $\begin{matrix} 2,3 \\ 0,4 \end{matrix}$                        |
| $\varphi_A$          | $\frac{a(2M_0 - 3Fa)}{2EI}$                                     | $-\frac{M_0 a}{EI}$                                             | $-\frac{qa^3}{EI}$                                              | $\frac{Fa^2}{12EI}$                         | $-\frac{19}{12} \frac{M_0 a}{EI}$           | $\frac{qa^3}{48EI}$                                             |
| $\times 10^{-3}$ рад | $\begin{matrix} -11 \\ -2,5 \end{matrix}$                       | $\begin{matrix} 23,1 \\ 12,5 \end{matrix}$                      | $\begin{matrix} -9,2 \\ -2,9 \end{matrix}$                      | $\begin{matrix} 1,2 \\ 0,3 \end{matrix}$    | $\begin{matrix} -26,6 \\ -4,0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1,2 \\ 0,2 \end{matrix}$                        |
| $v_B$                | $\frac{a^2(9M_0 - 16Fa)}{6EI}$                                  | 0                                                               | $-\frac{41}{24} \frac{qa^4}{EI}$                                | $-\frac{3}{4} \frac{Fa^3}{EI}$              | $-\frac{M_0 a^2}{4EI}$                      | $\frac{13}{48} \frac{qa^4}{EI}$                                 |
| $\times 10^{-3}$ м   | $\begin{matrix} -49,5 \\ -11,9 \end{matrix}$                    | 0                                                               | $\begin{matrix} -31,2 \\ -9,9 \end{matrix}$                     | $\begin{matrix} -21,5 \\ -4,5 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -8,4 \\ -1,3 \end{matrix}$  | $\begin{matrix} -30,1 \\ -5,3 \end{matrix}$                     |
| $\varphi_B$          | $\frac{a(M_0 - 2Fa)}{EI}$                                       | 0                                                               | $-\frac{7}{6} \frac{qa^3}{EI}$                                  | $-\frac{11}{12} \frac{Fa^2}{EI}$            | $-\frac{M_0 a}{12EI}$                       | $\frac{5}{16} \frac{qa^3}{EI}$                                  |
| $\times 10^{-3}$ рад | $\begin{matrix} -21,2 \\ -5,1 \end{matrix}$                     | 0                                                               | $\begin{matrix} -10,7 \\ -3,4 \end{matrix}$                     | $\begin{matrix} -13,1 \\ -2,7 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -1,4 \\ -0,2 \end{matrix}$  | $\begin{matrix} -19,3 \\ -3,0 \end{matrix}$                     |



К задаче 13.23



К задаче 13.24

**13.24.** Для балок, изображенных на рис. а, б, записать выражения обобщенного закона Гука для перемещений  $v_1$ ,  $v_2$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , вычислив коэффициенты податливости как соответствующие перемещения от единичных обобщенных сил (см. решение задачи 13.7.). Используя полученные выражения, найти потенциальную энергию деформации балок, считая их жесткость  $EI$  постоянной.

*Указание.* Решение удобно проводить с использованием интегралов Максвелла–Мора. Необходимо построить эпюры моментов для следующих состояний балок, изображенных на рис. в, г (задача а) и рис. д, е (задача б). Обозначим эпюры для рис. в и д через  $M_1(x)$ , для рис. г и е — через  $M_2(x)$ . Каждая из них будет попеременно выполнять роль грузовой и вспомогательной эпюр в зависимости от определяемого перемеще-

ния. Тогда имеем  $\lambda_{ij} = \int_L \frac{M_i(x)M_j(x)}{EI} dx$ , причем индексы  $i, j$  принимают значения 1, 2. Вычисление интегралов дает  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ , что подтверждает теорему о взаимности перемещений.

Ответ:

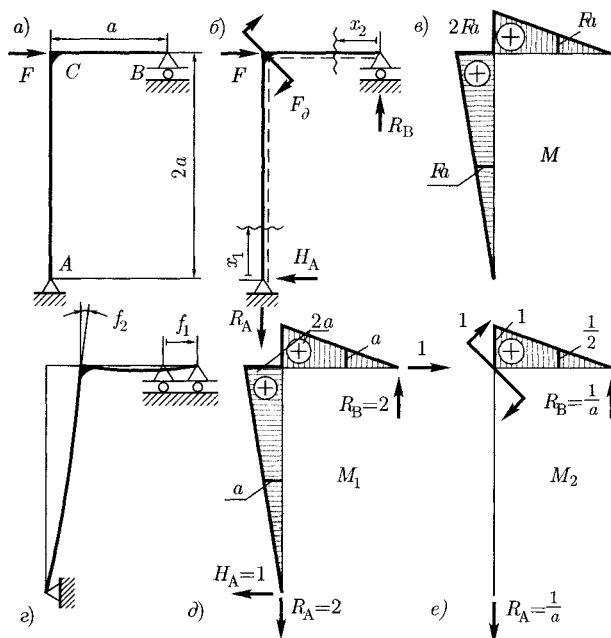
$$\text{а) } v_1 = \frac{l^3}{48EI} F_1 - \frac{l^2 a}{16EI} F_2, \quad v_2 = \frac{a^2(l+a)}{3EI} F_2 - \frac{l^2 a}{16EI} F_1,$$

$$U = \frac{1}{96EI} (l^3 F_1^2 - 6l^2 a F_1 F_2 + 16a^2(l+a) F_2^2).$$

$$\text{б) } \varphi_1 = \frac{l}{3EI} M_1 - \frac{l}{24EI} M_2, \quad \varphi_2 = \frac{l}{12EI} M_2 - \frac{l}{24EI} M_1,$$

$$U = \frac{l}{24EI} (4M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2).$$

**13.25.** В плоской раме, изображенной на рис. а, определить горизонтальное перемещение  $f_1$  шарнирной опоры  $B$  и угол поворота  $f_2$  сечения  $C$ . С учетом направления найденных перемещений изобразить примерный вид изогнутой оси рамы. Жесткость на изгиб  $EI$  считать одинаковой для обоих участков рамы.



К задаче 13.25

*Решение.* 1) Использование теоремы Кастильяно. С помощью уравнений равновесия выразим реакции закрепления  $R_A, H_A, R_B$  (см. рис. б) через обобщенные силы  $F$  и  $F_\partial$ , первая из которых задана и соответствует искомому перемещению  $f_1$ , а вторая – добавочный момент – прикладывается в сечении  $C$ , где нужно определить угол поворота  $f_2$ :

$$R_A = \frac{F_\partial}{l} + 2F, \quad H_A = F, \quad R_B = \frac{F_\partial}{l} + 2F.$$

Составим выражения изгибающего момента и его частных производных по обобщенным силам  $F$  и  $F_\partial$  для двух участков рамы.

1 участок:  $0 \leq x_1 \leq 2a$

$$M(x_1) = H_A x_1 = F x_1, \quad M(x_1)|_{F_\partial=0} = F x_1,$$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial F} = x_1, \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial F_\partial} = 0;$$

2 участок:  $0 \leq x_2 \leq a$

$$M(x_2) = R_B x_2 = \frac{F_\partial}{a} x_2 + 2F x_2, \quad M(x_2)|_{F_\partial=0} = 2F x_2,$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial F} = 2x_2, \quad \frac{\partial M(x_2)}{\partial F_\partial} = \frac{x_2}{a}.$$

Напомним, что при определении знаков внутренних усилий в плоских рамах пользуются штриховой линией, обозначающей нижнюю часть стержня. Изгибающий момент, сжимающий нижнее волокно, считается отрицательным. Эпюра моментов от заданной нагрузки  $M|_{F_\partial=0}$  представлена на рис. в.

Перейдем к определению перемещений по теореме Кастильяно:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial U}{\partial F} = \int_L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} dl = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{2a} (F x_1) \cdot x_1 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (2F x_2) \cdot (2x_2) dx_2 = \frac{4Fa^3}{EI}, \\ f_2 &= \frac{\partial U}{\partial F_\partial} \Big|_{F_\partial=0} = \int_L \left( \frac{M}{EI} \right) \Big|_{F_\partial=0} \cdot \frac{\partial M}{\partial F_\partial} dl = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{2a} (F x_2) \cdot 0 \cdot dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (2F x_2) \cdot \frac{x_2}{a} dx_2 = \frac{2Fa^2}{3EI}. \end{aligned}$$

Перемещения  $f_1$  и  $f_2$  получились положительными. Следовательно, их направления совпадают с направлениями  $F$  и  $F_\partial$ . Примерный вид изогнутой оси показан на рис. г. При ее построении учитываются направления найденных перемещений. Кроме того, выпуклость изогнутой оси на разных участках связана с расположением эпюры  $M$  на сжатом волокне, что

определяется принятым правилом знаков. Необходимо также помнить о неизменности углов между жестко соединенными стержнями (в данном случае – прямого угла в узле  $C$ ).

## 2) Использование интегралов Максвелла–Мора.

Выпишем соответствующие формулы

$$f_1 = \int_L \frac{MM_1}{EI} dl, \quad f_2 = \int_L \frac{MM_2}{EI} dl.$$

Здесь  $M$  соответствует так называемой грузовой эпюре, т.е. эпюре изгибающего момента только от заданной нагрузки  $F$ , а  $M_1(x)$ ,  $M_2(x)$  – вспомогательным эпюрам, т.е. эпюрам изгибающих моментов только от единичных обобщенных сил, отвечающих искомым перемещениям и прикладываемых к системе по отдельности.

Построение грузовой эпюры  $M(x)$  полностью описано выше. Следует лишь во всех выражениях положить  $F_D = 0$ . (см. рис. в). Выражения  $M(x)$ ,  $M_1(x)$  и  $M_2(x)$  для двух участков рамы сведены в таблицу, вспомогательные эпюры представлены на рис. д, е. Ординаты эпюр, необходимые для применения формулы Симпсона, указаны на рис. в, д, е. С учетом этого проведем вычисления:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2a}{6EI} (2Fa \cdot 2a + 4 \cdot Fa \cdot a + 0 \cdot 0) + \\ &+ \frac{a}{6EI} (2Fa \cdot 2a + 4 \cdot Fa \cdot a + 0 \cdot 0) = \frac{4Fa^3}{EI}, \\ f_2 &= \frac{a}{6EI} (2Fa \cdot 1 + 4 \cdot Fa \cdot 0,5 + 0 \cdot 0) = \frac{2Fa^2}{3EI}. \end{aligned}$$

|          | $0 \leq x \leq 2a$ | $0 \leq x \leq a$ |
|----------|--------------------|-------------------|
| $M(x)$   | $Fx$               | $2Fx$             |
| $M_1(x)$ | $x$                | $2x$              |
| $M_2(x)$ | $0$                | $x/a$             |

$$\text{Ответ: } f_1 = \frac{4Fa^3}{EI}, \quad f_2 = \frac{2Fa^2}{3EI}.$$

**13.26.** Для рамы (см. задачу 13.11, рис. а), считая  $F_1 = F_2 = P$ , определить вертикальное перемещение  $f_A$  точки  $A$ , вертикальное перемещение  $f_B$  точки  $B$ , а также взаимное вертикальное перемещение  $f_{AB}$  точек  $A$  и  $B$  и обобщенное перемещение  $f_{AB}^* = 3f_A + f_B$ .

*Указание.* Решая задачу с помощью интегралов Максвелла–Мора, можно воспользоваться результатами, полученными в задаче 13.11. Так, эпюра  $M_3$  (см. задачу 13.11, рис. д) станет грузовой. Для построения вспомогательных эпюр нужно приложить к системе единичные обобщенные силы, соответствующие искомым перемещениям. Легко убедиться, что такие силы представлены на рис. в, г, д к задаче 13.11, нужно лишь положить  $P = 1$ . Действительно, в выражениях для работы именно этих сил в

качестве множителя выступают искомые обобщенные перемещения. Например, для силы, изображенной на рис. д, имеем

$$W = \frac{1}{2} P \cdot f_A + \frac{1}{2} P \cdot f_B = \frac{1}{2} P \cdot (f_A + f_B) = \frac{1}{2} P \cdot f_{AB}.$$

Для обобщенной силы, изображенной на рис. е, получаем аналогично

$$W = \frac{1}{2} \cdot 3P \cdot f_A + \frac{1}{2} P \cdot f_B = \frac{1}{2} P \cdot (3f_A + f_B) = \frac{1}{2} P \cdot f_{AB}^*.$$

Таким образом, в качестве вспомогательных можно использовать эпюры  $M_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), построенные в задаче 13.11, положив в них  $P = 1$ :

$$\overline{M}_i = M_i(P = 1), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$$\text{Тогда: } f_A = \int_L \frac{M_3 \overline{M}_1}{EI} dl, \quad f_B = \int_L \frac{M_3 \overline{M}_2}{EI} dl, \quad f_{AB} = \int_L \frac{M_3 \overline{M}_3}{EI} dl,$$

$$f_{AB}^* = \int_L \frac{M_3 \overline{M}_4}{EI} dl.$$

$$\text{Ответ: } f_A = \frac{32}{3} \frac{Pa^3}{EI}; \quad f_B = \frac{8}{3} \frac{Pa^3}{EI};$$

$$f_{AB} = \frac{40}{3} \frac{Pa^3}{EI}; \quad f_{AB}^* = \frac{104}{3} \frac{Pa^3}{EI}.$$

**13.27.** В плоской раме (см. задачу 13.12, рис. а) найти углы поворота сечений  $A, B, C, D$ , горизонтальное перемещение  $f_1$  и вертикальное перемещение  $f_2$  точек  $B$  и  $C$ , а также угол раскрытия шарнира  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  (см. примечание к задаче 13.12.).

*Указание.* В качестве добавочной силы для нахождения угла раскрытия шарнира использовать два одинаковых по величине и противоположных по направлению сосредоточенных момента, приложенных непосредственно слева и справа от него.

$$\text{Ответ: } \varphi_A = -\frac{20}{27} \cdot \frac{M_0 a}{EI}, \quad \varphi_B = \frac{16}{27} \cdot \frac{M_0 a}{EI},$$

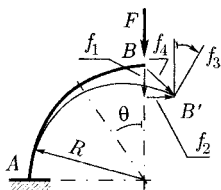
$$\varphi_C = -\frac{22}{27} \cdot \frac{M_0 a}{EI}, \quad \varphi_D = -\frac{13}{27} \cdot \frac{M_0 a}{EI}.$$

(положительным считается угол поворота против часовой стрелки);

$$f_1 = \frac{16}{27} \cdot \frac{M_0 a^2}{EI}, \quad f_2 = \frac{65}{54} \cdot \frac{M_0 a^2}{EI}, \quad \varphi = \frac{92}{27} \cdot \frac{M_0 a}{EI}.$$

**13.28.** Определить вертикальное  $f_1$ , горизонтальное  $f_2$  и угловое  $f_3$  перемещения сечения  $B$ , в котором приложена сила  $F = 10$  кН для стержня малой кривизны (см. рис.). Ось стержня представляет

собой четверть окружности радиуса  $R = 2$  м, его жесткость на изгиб  $EI = 10^7$  Н · м<sup>2</sup>. Определить также полное линейное перемещение  $f_4$  сечения B.



*Указание.* Выражения для изгибающих моментов следует составлять как функции полярного угла  $\theta$  (см. рис.), при интегрировании учитывать, что  $dl$  – дифференциал дуги, причем  $dl = R d\theta$ . Перемещение  $f_4$  находится как геометрическая сумма перемещений  $f_1$  и  $f_2$ .

К задаче 13.28

$$\text{Ответ: } f_1 = \frac{\pi FR^3}{4EI} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}, f_2 = \frac{FR^3}{2EI} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$f_3 = \frac{FR^2}{EI} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, f_4 = 7,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

**13.29.** Для рам, изображенных на рис. а-е, определить указанные перемещения. В каждом случае указан вид поперечного сечения, размеры которого следует подобрать из условия прочности. Для всех рам  $a = 1$  м,  $F = 10$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $E = 200$  ГПа,  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Ответ:* См. таблицу на стр. 238.

**13.30.** Найти вертикальное перемещение  $f_1$ , угол поворота  $f_2$  и угол закручивания  $f_3$  концевого сечения коленчатого стержня (см. задачу 13.14, рис. а), а также вертикальное перемещение  $f_4$  сечения, находящегося на расстоянии  $a$  от концевого.

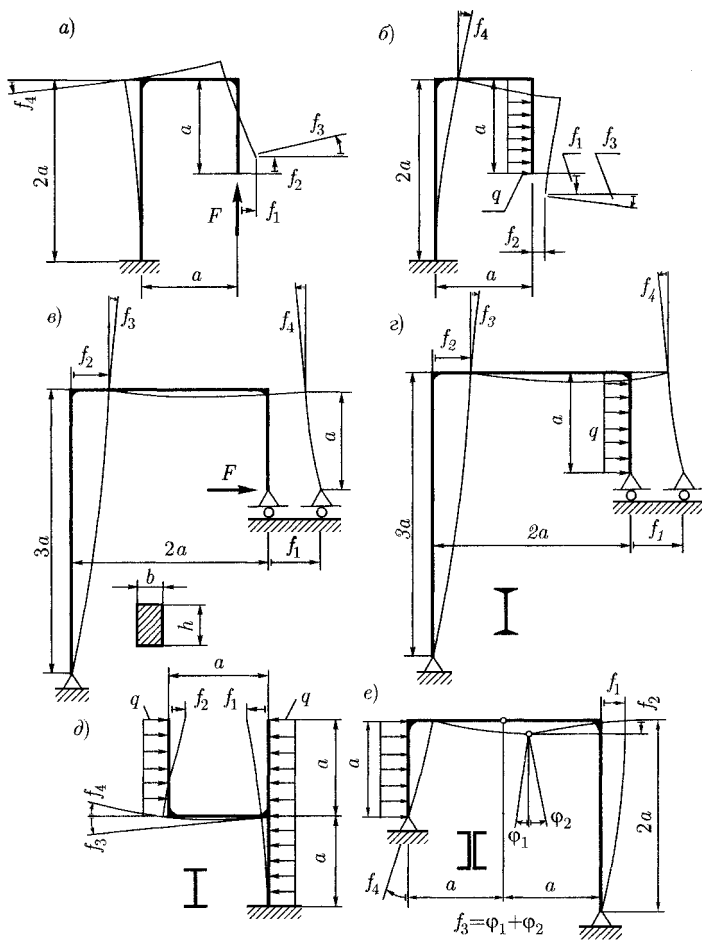
*Решение.* Отметим, что перемещение  $f_1$  может быть найдено по теореме Кастильяно непосредственным дифференцированием выражения потенциальной энергии, полученного в задаче 13.14:

$$f_1 = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F}{3} \left( \frac{l_1^3 + l_2^3}{EI_z} + \frac{3l_1^2 l_2}{GI_\kappa} \right).$$

Для определения остальных перемещений удобнее воспользоваться интегралами Максвелла–Мора. Грузовые эпюры моментов  $M_x$  и  $M_z$  были построены в задаче 13.14. (рис. в). Вспомогательные эпюры  $M_{x1}^j$  и  $M_{z1}^j$  от единичных обобщенных сил, соответствующих перемещениям  $f_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ), представлены на рис. а, б, в, г. Напомним, что перемещения могут быть найдены по формулам

$$f_j = \sum_{i=1}^2 \left( \int_0^{l_i} \frac{M_x M_{x1}^j}{GI_\kappa} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_z M_{z1}^j}{EI_z} dx \right),$$

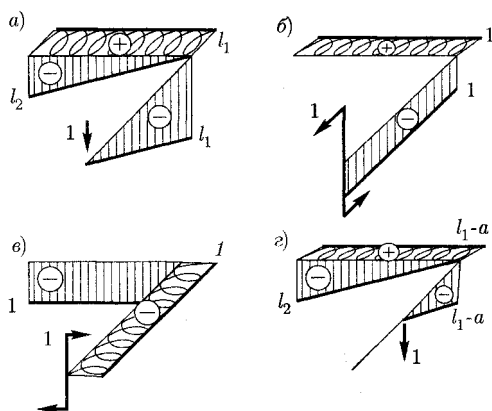




К задаче 13.29

К задаче 13.29

| № задачи | Сечение            | $f_1 \times 10^2 \text{ м}$ |      | $f_2 \times 10^2 \text{ м}$ |      | $f_3 \times 10^{-2} \text{ рад}$ |      | $f_4 \times 10^{-2} \text{ рад}$ |      |
|----------|--------------------|-----------------------------|------|-----------------------------|------|----------------------------------|------|----------------------------------|------|
|          |                    | $\frac{Fa^3}{2EI}$          | 1,10 | $\frac{7Fa^3}{3EI}$         | 5,20 | $\frac{5Fa^2}{2EI}$              | 5,50 | $\frac{2Fa^2}{EI}$               | 4,40 |
| <i>a</i> | <i>c</i> = 0,072 м |                             |      |                             |      |                                  |      |                                  |      |
| <i>б</i> | <i>d</i> = 0,10 м  | $\frac{31qa^4}{24EI}$       | 1,32 | $\frac{3qa^4}{4EI}$         | 0,76 | $\frac{qa^3}{3EI}$               | 0,33 | $\frac{qa^3}{EI}$                | 1,0  |
| <i>в</i> | <i>b</i> = 0,066 м | $\frac{18Fa^3}{EI}$         | 7,33 | $\frac{16Fa^3}{EI}$         | 6,51 | $\frac{7Fa^2}{3EI}$              | 0,95 | $\frac{5Fa^2}{3EI}$              | 0,68 |
| <i>г</i> | двутавр № 20а      | $\frac{407qa^4}{24EI}$      | 4,18 | $\frac{31qa^4}{2EI}$        | 3,82 | $\frac{13qa^3}{6EI}$             | 0,53 | $\frac{4qa^3}{3EI}$              | 0,33 |
| <i>д</i> | двутавр № 10       | $\frac{5qa^4}{12EI}$        | 1,05 | $\frac{qa^4}{3EI}$          | 0,84 | $\frac{qa^3}{3EI}$               | 0,84 | $\frac{qa^3}{3EI}$               | 0,84 |
| <i>е</i> | швеллер № 6,5      | $\frac{43qa^4}{108EI}$      | 2,05 | $\frac{29qa^4}{216EI}$      | 0,69 | $\frac{29qa^3}{108EI}$           | 1,38 | $\frac{107qa^3}{216EI}$          | 2,55 |



К задаче 13.30

где  $l_i$ ,  $i=1, 2$  – длины участков коленчатого стержня. Аналитические выражения моментов и ординаты эюров в точках, используемых при вычислении интегралов Максвелла–Мора по формуле Симпсона, приведены в таблице на стр. 240.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{l_1}{6EI_z} \left( 0 \cdot 0 + 4 \cdot \left( -\frac{Fl_1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{l_1}{2} \right) + (-Fl_1) \cdot (-l_1) \right) + \\
 &+ \frac{l_2}{6GI_K} (Fl_1 \cdot l_1 + 4Fl_1 \cdot l_1 + Fl_1 \cdot l_1) + \\
 &+ \frac{l_2}{6EI_z} \left( 0 \cdot 0 + 4 \cdot \left( -\frac{Fl_2}{2} \right) \cdot \left( -\frac{l_2}{2} \right) + (-Fl_2) \cdot (-l_2) \right) = \\
 &= \frac{Fl_1^3}{3EI_z} + \frac{Fl_1^2 l_2}{GI_K} + \frac{Fl_2^3}{3EI_z}, \\
 f_2 &= \frac{l_1}{6EI_z} \left( 0 \cdot (-1) + 4 \cdot \left( -\frac{Fl_1}{2} \right) \cdot (-1) + (-Fl_1) \cdot (-1) \right) + \\
 &+ \frac{l_2}{6GI_K} (Fl_1 \cdot 1 + 4Fl_1 \cdot 1 + Fl_1 \cdot 1) = \frac{Fl_1^2}{2EI_z} + \frac{Fl_1 l_2}{GI_K}, \\
 f_3 &= \frac{l_2}{6EI_z} \left( 0 \cdot (-1) + 4 \cdot \left( -\frac{Fl_2}{2} \right) \cdot (-1) + (-Fl_2) \cdot (-1) \right) = \\
 &= \frac{Fl_2^2}{2EI_z}, \\
 f_4 &= \frac{l_1 - a}{6EI_z} \left( (-Fa) \cdot 0 + 4 \cdot \left( -F \frac{a + l_1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{l_1 - a}{2} \right) + \right. \\
 &+ \left. (-Fl_1) \cdot (-(l_1 - a)) \right) + \\
 &+ \frac{l_2}{6GI_K} (Fl_1 \cdot (l_1 - a) + 4Fl_1 \cdot (l_1 - a) + Fl_1 \cdot (l_1 - a)) +
 \end{aligned}$$

К задаче 13.30

|            | $0 \leq x \leq l_1$                                           | 0  | $a$   | $\frac{l_1}{2}$   | $\frac{a + l_1}{2}$  | $l_1$        | $0 \leq x \leq l_2$ | 0         | $\frac{l_2}{2}$   | $l_2$     |
|------------|---------------------------------------------------------------|----|-------|-------------------|----------------------|--------------|---------------------|-----------|-------------------|-----------|
| $M_x$      | 0                                                             | 0  | 0     | 0                 | 0                    | 0            | $Fl_1$              | $Fl_1$    | $Fl_1$            | $Fl_1$    |
| $M_z$      | $-Fx$                                                         | 0  | $-Fa$ | $-\frac{Fl_1}{2}$ | $-\frac{a + l_1}{2}$ | $-Fl_1$      | $-Fx$               | 0         | $-\frac{Fl_2}{2}$ | $-Fl_2$   |
| $M_{x1}^1$ | 0                                                             | 0  |       | 0                 |                      | 0            | $l_1$               | $l_1$     | $l_1$             | $l_1$     |
| $M_{z1}^1$ | $-x$                                                          | 0  |       | $-\frac{l_1}{2}$  |                      | $-l_1$       | $-x$                | 0         | $-\frac{Fl_2}{2}$ | $-Fl_2$   |
| $M_{x1}^2$ | 0                                                             | 0  |       | 0                 |                      | 0            | 1                   | 1         | 1                 | 1         |
| $M_{z1}^2$ | -1                                                            | -1 |       | -1                |                      | -1           | 0                   | 0         | 0                 | 0         |
| $M_{x1}^3$ | -1                                                            | -1 |       | -1                |                      | -1           | 0                   | 0         | 0                 | 0         |
| $M_{z1}^3$ | 0                                                             | 0  |       | 0                 |                      | 0            | -1                  | -1        | -1                | -1        |
| $M_{x1}^4$ | 0                                                             | 0  | 0     |                   | 0                    | 0            | $l_1 - a$           | $l_1 - a$ | $l_1 - a$         | $l_1 - a$ |
| $M_{z1}^4$ | 0 при $0 \leq x \leq a$<br>$-(x - a)$ при $a \leq x \leq l_2$ | 0  | 0     |                   | $-\frac{l_1 - a}{2}$ | $-(l_1 - a)$ | $-x$                | 0         | $-\frac{l_2}{2}$  | $-l_2$    |

$$\begin{aligned}
& + \frac{l_2}{6EI_z} \left( 0 \cdot 0 + 4 \cdot \left( -\frac{Fl_2}{2} \right) \cdot \left( -\frac{l_2}{2} \right) + (-Fl_2) \cdot (-l_2) \right) = \\
& = \frac{F(l_1 - a)^2(a + 2l_1)}{6EI_z} + \frac{Fl_1l_2(l_1 - a)}{GI_K} + \frac{Fl_2^3}{3EI_z}.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$f_1 = \frac{F}{3} \left( \frac{l_1^3 + l_2^3}{EI_z} + \frac{3l_1^2l_2}{GI_K} \right),$$

$$f_2 = \frac{Fl_1}{2} \left( \frac{l_1}{EI_z} + \frac{2l_2}{GI_K} \right),$$

$$f_3 = \frac{Fl_2^2}{2EI_z},$$

$$f_4 = \frac{F}{6} \left( \frac{(l_1 - a)^2(a + 2l_1) + 2l_2^3}{EI_z} + \frac{6l_1l_2(l_1 - a)}{GI_K} \right).$$

**13.31.** Проиллюстрировать на частном примере справедливость теоремы о взаимности перемещений, вычислив вертикальное перемещение  $f$  на конце коленчатого стержня (задача 13.14, рис. а) от вертикальной сосредоточенной силы  $F$ , приложенной на расстоянии  $a$  от этого конца, показать, что  $f = f_4$  (см. задачу 13.30).

**13.32.** Найти вертикальные перемещения  $v_y$  и углы закручивания  $\varphi_x$  сечений  $B$ ,  $C$  для коленчатых стержней, представленных на рис. а, б, в (задача 13.15). В сечениях  $A$  определить линейные перемещения  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , углы закручивания  $\varphi_x$  и углы поворота  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ . Числовые данные взять из задачи 13.15.

Ответ: См. таблицу на стр. 242.

*Примечание.* Положительными здесь считаются линейные перемещения  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , совпадающие по направлению с соответствующими координатными осями, положительные величины углов  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  отсчитываются против часовой стрелки относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (см. рис. к задаче 13.15).

**13.33.** Для криволинейного стержня (см. рис. а, задача 13.16) определить все шесть перемещений сечения  $B$ , приняв  $F = 10$  кН,  $E = 200$  ГПа,  $c = 0,1$  м,  $R = 1$  м,  $\nu = 0,3$ .

Ответ:

$$v_x = 0;$$

$$v_y = -\frac{FR^3}{4Ec^4}(14,29(1+\nu)(3\pi-8)+12\pi) \approx -0,008 \text{ м};$$

$$v_z = 0;$$

| Схема стержня |                                     |                                                                                |                                                                                                                                                                    |
|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|               | $a$                                 |                                                                                | $b$                                                                                                                                                                |
|               |                                     |                                                                                | $\epsilon$                                                                                                                                                         |
| a             | $v_z$<br>$\times 10^{-2}$ м         | $-\frac{24Fl^3}{Ec^4} \approx -0,96$                                           | $\frac{64Fl^3}{\pi d^4} \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{G} \right) \approx 0,74$<br><br>0                                                                            |
|               | $v_y$<br>$\times 10^{-2}$ м         | $-\frac{24Fl^3}{Ec^4} \approx -0,96$                                           | $\frac{64Fl^3}{\pi d^4} \left( \frac{7}{E} + \frac{2}{G} \right) \approx 2,55$<br><br>$\frac{Fl^3}{b^4} \left( \frac{14}{E} + \frac{6,56}{G} \right) \approx 2,97$ |
|               | $v_z$<br>$\times 10^{-2}$ м         | $-\frac{Fl^3}{c^4} \left( \frac{56}{E} + \frac{7,14}{G} \right) \approx -2,95$ | $-\frac{32Fl^3}{\pi Ed^4} \approx -0,11$<br><br>0                                                                                                                  |
|               | $\varphi_z$<br>$\times 10^{-2}$ рад | $-\frac{30Fl^2}{Ec^4} \approx -1,2$                                            | $\frac{32Fl^2}{\pi Ed^4} \approx 0,11$<br><br>$-\frac{Fl^2}{b^4} \left( \frac{3}{4E} + \frac{4,38}{G} \right) \approx -1,14$                                       |
| b             | $\varphi_y$<br>$\times 10^{-2}$ рад | $Fl^2 \left( \frac{30}{c^4} + \frac{7,14}{G} \right) \approx 1,9$              | 0                                                                                                                                                                  |
|               | $\varphi_z$<br>$\times 10^{-2}$ рад | 0                                                                              | $\frac{64Fl^2}{\pi d^4} \left( \frac{4}{E} + \frac{1}{G} \right) \approx 1,4$<br><br>$\frac{Fl^2}{b^4} \left( \frac{6,75}{E} + \frac{2,19}{G} \right) \approx 1,2$ |
|               | $v_y$<br>$\times 10^{-2}$ м         | $\frac{24Fl^3}{Ec^4} \approx 0,96$                                             | $\frac{64Fl^3}{3\pi Ed^4} \approx 0,07$<br><br>$\frac{Fl^3}{b^4} \left( \frac{15}{2E} + \frac{4,38}{G} \right) \approx 1,80$                                       |
| c             | $\varphi_z$<br>$\times 10^{-2}$ рад | $\frac{Fl^2}{c^4} \left( \frac{24}{E} + \frac{7,14}{G} \right) \approx 1,7$    | 0<br><br>$\frac{Fl^2}{b^4} \left( \frac{6}{E} + \frac{2,19}{G} \right) \approx 1,1$                                                                                |
|               | $v_y$<br>$\times 10^{-2}$ м         | $\frac{24Fl^3}{Ec^4} \approx 0,96$                                             | $\frac{64Fl^3}{3\pi Ed^4} \approx 0,07$<br><br>$\frac{7Fl^3}{Eb^4} \approx 0,68$                                                                                   |
|               | $\varphi_z$<br>$\times 10^{-2}$ рад | 0                                                                              | $-\frac{64Fl^2}{G\pi d^4} \approx -0,53$<br><br>$-\frac{4,38Fl^2}{Gb^4} \approx -1,07$                                                                             |

$$\varphi_x = \frac{FR^2}{Ec^4} (3,57(1 + \nu)(\pi - 4) + 3\pi) \approx 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

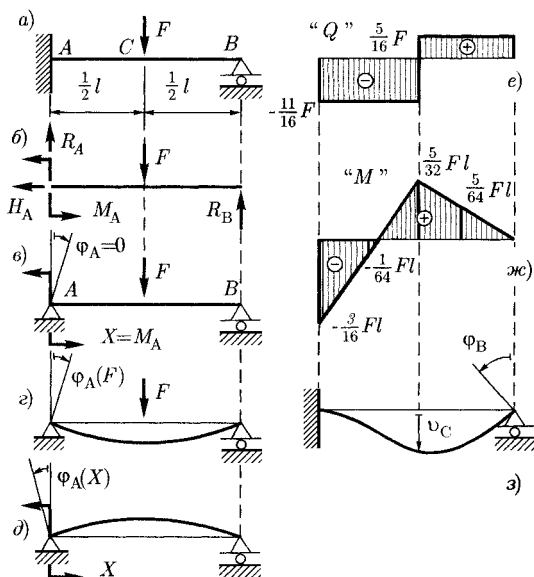
$$\varphi_y = 0;$$

$$\varphi_z = -\frac{FR^2}{2Ec^4} (14,29(1 + \nu) + 12) = -7,64 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Знаки перемещений определяются по правилу, сформулированному в примечании к задаче 13.32.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

**14.1.** Определить реакции и построить эпюры внутренних усилий в статически неопределимой балке (рис. а). Изобразить примерный вид изогнутой оси. Жесткость  $EI$  постоянна. Определить вертикальное перемещение в точке  $C$ .



К задаче 14.1

*Решение.* Для определения четырех неизвестных реакций закрепления  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ ,  $M_A$  (рис. б) необходимо четыре уравнения. Как известно, для плоской задачи можно составить три линейно независимых уравнения статики, например:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= H_A = 0; \\ \sum m_{z(B)} &= -R_A \cdot l + M_A + \frac{Fl}{2} = 0; \\ \sum m_{z(A)} &= R_B \cdot l + M_A - \frac{Fl}{2} = 0. \end{aligned}$$



Таким образом, задача один раз статически неопределима. Недостающим, четвертым, уравнением обычно является уравнение совместности перемещений.

Чтобы его записать, одну из реактивных сил (в обобщенном смысле, т.е. это может быть, например, момент  $M_A$ ) рассмотрим как независимую активную силу. Будем впредь называть ее лишней неизвестной и обозначать  $X$ . Для этого отбросим связь, реакцией которой является лишняя неизвестная, и перейдем к так называемой основной системе (рис. 6). В основной системе действуют те же силы, что и в исходной, но по сравнению с последней в ней отсутствует одна связь и, следовательно, возможно перемещение по направлению этой связи, в данном случае  $\varphi_A$  (рис. 6). Мы добьемся полной эквивалентности исходной и основной системы, поставив условие равенства нулю такого перемещения:  $\varphi_A = 0$ . Это и будет уравнение совместности перемещений.

В силу принципа суперпозиции можно рассмотреть основную систему под действием сил  $F$  и  $X$  по отдельности (рис. 2, 6), при этом уравнение совместности преобразуется в виде

$$\varphi_A = \varphi_A(F) + \varphi_A(X) = 0.$$

Значения  $\varphi_A(F)$  и  $\varphi_A(X)$  можно найти в таблицах (см. задачу 13.22):

$$\varphi_A(F) = -\frac{Fl^2}{16EI}; \quad \varphi_A(X) = \frac{Xl}{3EI}.$$

Из уравнения совместности перемещений

$$-\frac{Fl^2}{16EI} + \frac{Xl}{3EI} = 0$$

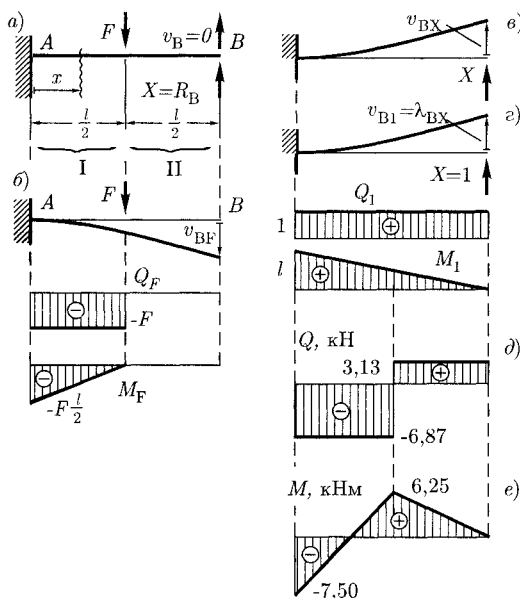
определим  $X = M_A = \frac{3}{16}Fl$ . После этого из уравнений равновесия получим остальные реакции  $R_A = \frac{11}{16}F$ ,  $R_B = \frac{5}{16}F$ . Эпюры внутренних усилий  $Q$ ,  $M$  представлены на рис. 6, ж, примерный вид изогнутой оси балки – на рис. 3. Изложенный алгоритм носит название метода сравнения перемещений.

Определим вертикальное перемещение в сечении С :

$$\begin{aligned} v_c &= v_c(F) + v_c(X) = -\frac{Fl^3}{48EI} + X \cdot \frac{l^2}{16EI} = \\ &= -\frac{Fl^3}{48EI} + \frac{3}{16}Fl \cdot \frac{l^2}{16EI} = -\frac{7}{768} \frac{Fl^3}{EI}. \end{aligned}$$

Здесь перемещения  $v_c(F)$  и  $v_c(X)$  взяты из таблицы к задаче 13.22, знак "–" означает, что перемещение происходит вниз (в соответствии с принятым в таблице правилом знаков).

**14.2.** Построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы для стальной балки (рис. а, задача 14.1), считая  $EI = const$ . Подобрать двутавровое сечение, если  $l = 4$  м,  $F = 10$  кН,  $[\sigma] = 160$  МПа.



К задаче 14.2

*Решение.* Применим рассмотренный в задаче 14.1 метод сравнения перемещений, называемый также методом сил (это название подчеркивает, что искомыми неизвестными являются реактивные силы – в обобщенном смысле, силы и моменты), используя для определения перемещений способы, изложенные в главе 13. В этом состоит наиболее общий подход к решению подобных задач, поскольку необходимые значения перемещений не всегда имеются в таблицах.

Итак, составим уравнения равновесия:

$$H_A = 0; R_A + R_B - F = 0; R_B \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} + M_A = 0.$$

Поскольку можно записать лишь три линейно независимые уравнения статики, а неизвестных реакций четыре (см. рис. б, задача 14.1), система один раз статически неопределима. Необходимо еще одно уравнение – уравнение совместности перемещений.

Воспользуемся тем, что перемещения по направлению наложенных на систему связей равны нулю. В частности, из-за наличия шарнирной

опоры  $B$  точка приложения вертикальной реакции  $R_B$  не имеет вертикального перемещения. Назовем связь в опоре  $B$  "лишней" и мысленно отбросим ее. Полученную таким образом статически определимую конструкцию назовем основной системой (рис.  $a$ ). Здесь в точке  $B$  возможно вертикальное перемещение  $v_B$ .

Приложим к основной системе заданную силу  $F$  и силу  $R_B$ . Последняя в основной системе уже не является реакцией, а выступает как активная сила. Будем обозначать ее  $X$  и называть лишней неизвестной. Придавая ей различные значения, можно получать различные перемещения  $v_B$ , и только при одном определенном значении  $X$ , совпадающем с истинной величиной реакции,  $v_B$  будет равно нулю. Таким образом, уравнение совместности перемещений

$$v_B = 0$$

может служить для определения  $X$ , если удастся выразить  $v_B$  через величины сил  $F$  и  $X$ .

Сделаем это, учитывая, что, по теореме Кастильяно,

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial X}.$$

Разрешим уравнения статики относительно оставшихся реакций  $H_A$ ,  $R_A$  и  $M_A$  и запишем выражения для изгибающего момента и соответствующих производных по  $X$  на I и II участках (см. рис.  $a$ ):

$$\begin{aligned} H_A &= 0; \quad R_A = R_A(F) + R_A(X) = F - X; \\ M_A &= M_A(F) + M_A(X) = F \frac{l}{2} - X \cdot l; \end{aligned}$$

$$\text{I: } 0 \leq x \leq l/2$$

$$\begin{aligned} M(x) &= R_A x - M_A = (F - X)x - \left(F \frac{l}{2} - X \cdot l\right) = \\ &= F \left(x - \frac{l}{2}\right) + X(l - x) = M(F) + M(X); \end{aligned}$$

$$\text{II: } l/2 \leq x \leq l$$

$$\begin{aligned} M(x) &= R_A x - M_A - F \left(x - \frac{l}{2}\right) = \\ &= X(l - x) = M(F) + M(X). \end{aligned}$$

(Здесь  $M(F) = 0$ ).

Заметим, что в соответствии с принципом суперпозиции в структуре всех построенных выражений имеются две независимые части: одна зависит только от  $F$ , другая — только от  $X$ .

Подставив в уравнение совместности перемещений найденные выражения, получим

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( F \left( x - \frac{l}{2} \right) + X(l-x) \right) \cdot (l-x) dx + \\ + \frac{1}{EI} \int_{\frac{l}{2}}^l X(l-x) \cdot (l-x) dx = 0,$$

или

$$-\frac{5}{48} \frac{F l^3}{EI} + \frac{l^3}{3EI} X = 0.$$

Таким образом,  $X = R_B = \frac{5}{16} F$ . Определив остальные реакции

$$M_A = \frac{3}{16} F l; R_A = \frac{11}{16} F; H_A = 0,$$

строим эпюры изгибающего момента и поперечной силы (рис. д, е). Как видно,  $M_{\max} = 7,5 \text{ кНм}$ . Необходимый момент сопротивления

$$W \geq \frac{7,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 46,875 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Двутавр №12 имеет  $W = 58,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ .

II способ.

Используем интегралы Максвелла-Мора.

По принципу суперпозиции, перемещение  $v_B$  при совместном действии сил  $F$  и  $X$  может быть найдено как сумма перемещений  $v_{BF}$  и  $v_{BX}$ , возникающих в точке  $B$  от приложения этих сил к основной системе по отдельности (см. рис. б, в):

$$v_B = v_{BF} + v_{BX} = v_{BF} + \lambda_{BX} \cdot X.$$

Здесь  $\lambda_{BX}$  — податливость основной системы в направлении силы  $X$  под действием той же силы  $X$ , численно равная перемещению  $v_{B1}$  под действием  $X = 1$  (рис. г).

Уравнение совместности перемещений (называемое также каноническим уравнением метода сил)

$$v_{BF} + \lambda_{BX} \cdot X = 0$$

дает значение лишней неизвестной

$$X = -\frac{v_{BF}}{\lambda_{BX}}.$$

В соответствии с алгоритмом определения перемещений (для вычисления интегралов используется формула Симпсона) получаем

$$\begin{aligned} v_{BF} &= \int_l \frac{M_F M_1}{EI} dl = \frac{1}{6EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{Fl}{2} \cdot l - 4 \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{3}{4}l + 0 \cdot \frac{1}{2}l \right) = \\ &= -\frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EI}, \\ \lambda_{BX} &= v_{B1} = \int_l \frac{M_1 M_1}{EI} dl = \frac{1}{6EI} \cdot l \left( l^2 + 4 \cdot \left( \frac{l}{2} \right)^2 + 0^2 \right) = \frac{l^3}{3EI}. \end{aligned}$$

Здесь  $M_F$  – выражение изгибающего момента в так называемом грузовом состоянии (см. рис. б: на основную систему действует только заданная нагрузка, здесь – сила  $F$ ),  $M_1$  – выражение изгибающего момента во вспомогательном состоянии (см. рис. г: на основную систему действует только  $X = 1$ ). Знак "–" перед  $v_{BF}$  здесь, как и ранее, указывает на несовпадение направлений искомого перемещения и дополнительной единичной силы. Отметим, что величина  $v_{B1}$  (или  $\lambda_{BX}$ ) всегда положительна.

В соответствии с принципом суперпозиции можно использовать для построения эпюр внутренних усилий  $M$  и  $Q$  ранее построенные грузовые эпюры  $M_F$ ,  $Q_F$  и вспомогательные эпюры  $M_1$ ,  $Q_1$  (рис. б, г):

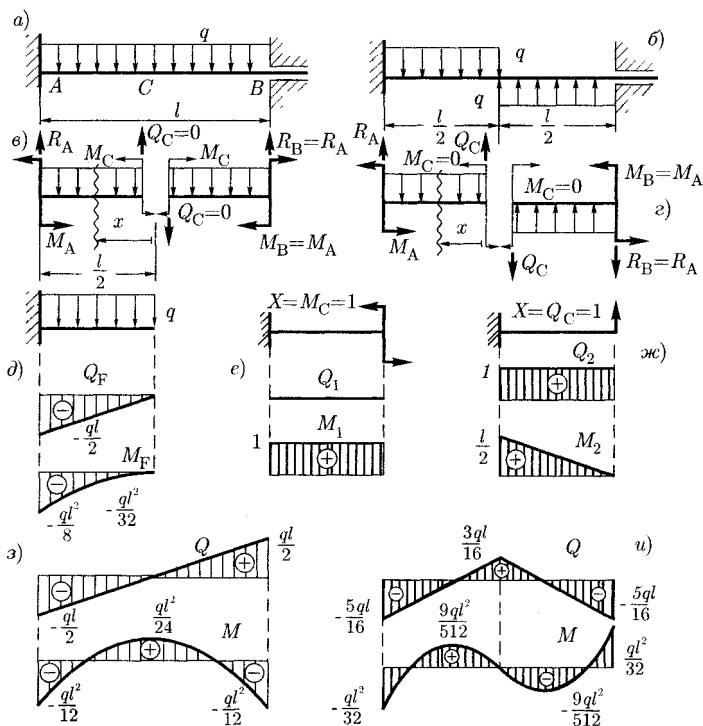
$$M = M_F + X \cdot M_1, \quad Q = Q_F + X \cdot Q_1.$$

Разумеется, результат не зависит от использованного способа решения и выбора основной системы (ср. рис. е, ж задача 14.1). Способ Максвелла–Мора позволяет уменьшить объем вычислений при сложном виде внешней нагрузки и большом числе участков интегрирования.

**14.3.** Построить эпюры  $M$  и  $Q$  для статически неопределимых балок, нагруженных, как показано на рис. а, б. Жесткость  $EI$  считать постоянной.

*Решение.* Поскольку среди внешних сил отсутствуют горизонтальные, геометрию балок можно считать симметричной. Нагрузка в случае а обладает осевой симметрией (симметричная нагрузка), а в случае б – центральной (кососимметричная нагрузка). Таков же характер симметрии реакций, внутренних усилий и перемещений (см. рис. в, г).

Обе балки дважды статически неопределимы. Использовать симметрию для снижения степени статической неопределимости можно, выбрав лишними неизвестными внутренние усилия в сечении  $C$  на оси симметрии системы (см. рис. в, г):  $X = M_c$  для случая а и  $X = Q_c$  для случая б. После этого все выкладки проводятся для половины балки, которая теперь является основной системой, с последующим удвоением результата. Поскольку образование основной системы производится путем устранения внутренних связей, уравнение совместности деформаций будет выражать равенство нулю взаимных перемещений  $f$  сечений по сторонам разреза:



К задаче 14.3

а) взаимного поворота  $f = \Delta\varphi$ , б) взаимного вертикального смещения  $f = \Delta v$ .

При непосредственном использовании теоремы Кастильяно, уравнения совместности деформаций

$$f = \frac{\partial U}{\partial X} = 0$$

запишутся в виде

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( -\frac{qx^2}{2} + X \right) \cdot 1 \cdot dx &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{qx^3}{48} + X \frac{l}{2} &= 0 \Rightarrow X = M_c = \frac{ql^2}{24}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad & \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( -\frac{qx^2}{2} + Xx \right) \cdot x \cdot dx = 0 \implies \\
 & \implies -\frac{qx^4}{128} + X \frac{l^3}{24} = 0 \implies X = Q_c = \frac{3}{16} ql.
 \end{aligned}$$

Можно также определить коэффициенты канонических уравнений методом сил

$$а) f_{q_1} + M_c \cdot f_1 = 0,$$

$$б) f_{q_2} + Q_c \cdot f_2 = 0$$

с помощью интегралов Максвелла Мора:

$$f_{q_1} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_F M_1}{EI} dx = -\frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( 4 \cdot \frac{ql^2}{32} \cdot 1 + \frac{ql^2}{8} \cdot 1 \right) = -\frac{ql^3}{48EI};$$

$$f_{q_2} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_F M_2}{EI} dx = -\frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( 4 \cdot \frac{ql^2}{32} \cdot \frac{l}{4} + \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) = -\frac{ql^4}{128EI};$$

$$f_1 = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{l}{2 \cdot 6EI} (1^2 + 4 \cdot 1^2 + 1^2) = \frac{l}{2EI};$$

$$f_2 = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_2^2}{EI} dx = \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{l}{4} \right)^2 \right) = \frac{l^3}{24EI}.$$

(эпюры  $M_F$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  представлены на рис. *д*, *е*, *ж* соответственно). Разрешив канонические уравнения относительно лишних неизвестных, придем к тем же результатам, которые получены выше.

Эпюры внутренних усилий для задач *а* и *б* построены на рис. *ж*, *и* соответственно.

**14.4.** Для стальной балки, представленной на рис. *а*, найти реакцию в упругой опоре, имеющей податливость  $\lambda$ , и исследовать ее зависимость от  $\lambda$ . Построить эпюры внутренних усилий и проверить условие прочности, если сечение балки – двутавр № 12,  $l = 4$  м,  $F = 10$  кН,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$  м/Н.

*Указание.* Уравнение совместности перемещений в данном случае принимает вид

$$v_B + v_\lambda = 0,$$

где  $v_\lambda = \lambda R_B$  – осадка упруго-податливой опоры,  $v_B = v_{BF} + v_{BX}$ . Выбрав  $X = R_B$ , получим, как и в задаче 14.2,

$$v_B = -\frac{5}{48} \frac{F l^3}{EI} + \frac{l^3}{3EI} X.$$

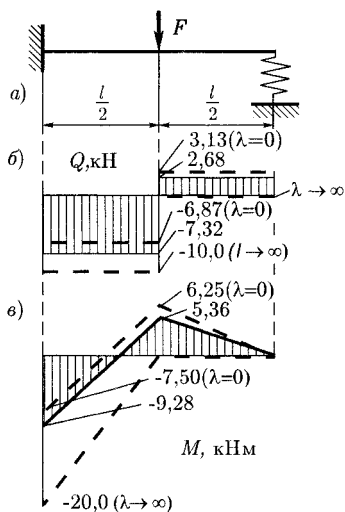
Тогда

$$R_B = \frac{5}{48} \cdot \frac{Fl^3}{EI(l^3/3EI + \lambda)}.$$

Полагая в этом выражении  $\lambda = 0$  (абсолютно жесткая опора), приходим к решению задачи 14.2. При  $\lambda \rightarrow \infty$  (балка, защемленная одним концом)  $R_B = 0$ ,  $R_A = F$ ,  $M_A = -\frac{Fl}{2}$ .

Численное значение реакции при заданной податливости

$$R_B = \frac{5}{48} \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 64}{2 \cdot 10^{11} \cdot 350 \cdot 10^{-8} \cdot (3,05 \cdot 10^{-5} + 0,5 \cdot 10^{-5})} = 2,68 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$



К задаче 14.4

Отметим, что

$$\begin{aligned} |\sigma|_{\max} &= \frac{|M|_{\max}}{W} = \\ &= \frac{9,28 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 158,9 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

т. е. условие прочности выполняется. Дальнейшее увеличение податливости опоры приведет к нарушению условия прочности, поскольку величина  $|M|_{\max} = |M_A|$  будет возрастать.

Ответ:  $R_B = 2,68$  кН, эпюры  $M$  и  $Q$  представлены на рис. б, в; штриховыми линиями на рис. б, в изображены эпюры, соответствующие  $\lambda = 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$ . Условие прочности выполнено.

**14.5.** В месте соединения двух балок  $AB$  и  $CD$  приложена сила  $F$  (см. рис. а). Построить эпюры внутренних усилий, если известны отношения длин пролетов и их жесткостей:  $l_1 : l_2 = 3 : 2$ ,  $EI_1 : EI_2 = 4 : 5$ .

Решение. Система может быть представлена как совокупность двух балок, первая из которых является статически неопределимой (рис. б), а вторая – статически определимой (рис. в). Запишем уравнения равновесия для этих балок:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum F_x = H_A = 0, \quad \sum F_y = R_A + R_B - F = 0, \\ & \sum m_{z(A)} = M_A - Fl_1 + R_B l_1 = 0; \\ 2) \quad & \sum F_x = H_C = 0, \quad \sum F_y = R_B - R_C = 0, \\ & \sum m_{z(C)} = -M_C + R_B l_2 = 0. \end{aligned}$$



Податливость упругой опоры первой балки определяется податливостью  $\lambda_2$  второй балки под действием силы, приложенной на конце, по направлению этой же силы; при этом перемещение  $v_B = \lambda_2 R_B$ . Каноническое уравнение метода сил для первой балки относительно лишней неизвестной  $X = R_B$  записывается в виде

$$v_{BF} + \lambda_{BX} X + v_B = 0.$$

Используя интегралы Максвелла–Мора, можно определить коэффициенты уравнения:

$$\begin{aligned} v_{BF} &= \int_0^{l_1} \frac{M_F M_1}{EI_1} dx = \\ &= -\frac{l_1}{6EI_1} \left( F l_1 \cdot l_1 + 4 \frac{F l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{2} \right) = \\ &= -\frac{F l_1^3}{3EI_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{BX} &= \int_0^{l_1} \frac{M_1^2}{EI_1} dx = \\ &= \frac{l_1}{6EI_1} \left( l_1^2 + 4 \left( \frac{l_1}{2} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{l_1^3}{3EI_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_0^{l_2} \frac{M_2^2}{EI_2} dx = \\ &= \frac{l_2}{6EI_2} \left( l_2^2 + 4 \left( \frac{l_2}{2} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{l_2^3}{3EI_2}. \end{aligned}$$

(эпюры  $M_F$ ,  $M_1$  и  $M_2$  представлены на рис. з).

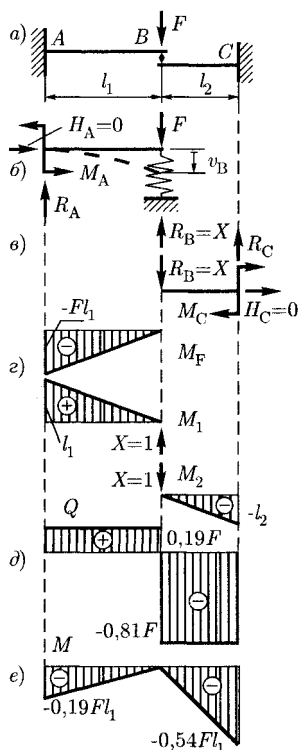
Из канонического уравнения определяем лишнюю неизвестную, затем из уравнений равновесия находим реакции в опорах А и С:

$$R_B = F \left( 1 + \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^3 \cdot \frac{I_1}{I_2} \right)^{-1} \approx 0,81F;$$

$$R_A = F - R_B = 0,19F; \quad M_A = (F - R_B)l_1 = 0,19F l_1;$$

$$R_C = R_B \approx 0,81F; \quad M_C = R_B l_2 = 0,54F l_1.$$

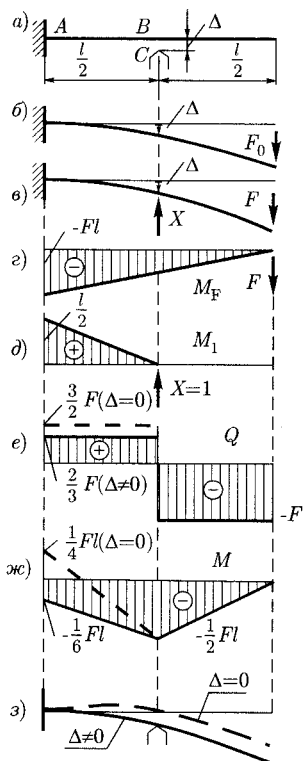
Эпюры  $Q$  и  $M$  изображены на рис. д, е.



К задаче 14.5

**14.6.** Пролет перекрыт тремя параллельными балками прямоугольного сечения со свободно опертыми концами. Ширина сечения всех балок одинакова. Высота средней балки вдвое больше крайних. Верхние грани балок находятся первоначально в горизонтальной плоскости и перекрыты посередине пролета абсолютно жесткой поперечиной, передающей на балки сосредоточенную силу  $F$ . Какая часть нагрузки воспринимается каждой из балок?

Ответ: 1:8:1.



К задаче 14.7

**14.7.** Балка, изображенная на рис. а, при нагрузке  $F = F_0$  касается упора  $C$  (при  $F = 0$  расстояние  $|BC| = \Delta$ ). Определить значение  $F_0$ , а также найти реакцию опоры  $C$  при  $F = 3F_0$  (при  $F = F_0$  реакция  $R_c = 0$ ) и построить эпюры внутренних усилий ( $EI = \text{const}$ ). Исследовать также случай  $\Delta = 0$ .

Указание. При значениях силы  $F \leq F_0$  система является статически определимой. При  $F = F_0$  (рис. б) перемещение в точке  $C$  легко найти:  $\Delta = \frac{5}{48} \cdot \frac{F_0 l^3}{EI}$  (см. определение перемещения  $v_{BF}$  в задаче 14.2). Если сила  $F$  превышает  $F_0$ , задача становится статически неопределимой. Примем за лишнюю неизвестную реакцию в опоре  $C$  (см. рис. в). Запишем каноническое уравнение метода сил в виде

$$v_{BF} + \lambda_{BX} X + \Delta = 0,$$

где

$$v_{BF} = \int_l \frac{M_F M_1}{EI} dl, \quad \lambda_{BX} = \int_l \frac{M_1^2}{EI} dl.$$

В силу геометрической линейности этой системы обе эпюры  $M_F$  и  $M_1$  (рис. з, д) строятся так, как если бы балка была недеформированной. Полагая в каноническом уравнении  $\Delta = 0$ , что соответствует отсутствию зазора в опоре  $C$ , решаем статически неопределимую задачу при произвольном значении  $F$ .

Ответ:  $F_0 = \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{l^3} \Delta$ ;  $F = \frac{144}{5} \cdot \frac{EI}{l^3} \Delta$ ;  $R_c = \frac{5}{3} F = 5F_0 = 48 \cdot \frac{EI}{l^3} \Delta$ . Если  $\Delta = 0$ , то  $R_c = \frac{3}{2} F$  для любого значения  $F$ .

Эпюры  $Q$  и  $M$  представлены на рис. *е*, *ж*, на рис. *з* – примерный вид изогнутой оси балки после деформации, случаю  $\Delta \neq 0$  соответствует сплошная линия, случаю  $\Delta = 0$  – штриховая.

**14.8.** Двухпролетная неразрезная балка  $ABC$  с пролетами длины  $l$  нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ . Реакция средней опоры  $B$  равна  $ql$ . Найти величину вертикального расстояния между прямой, соединяющей опоры  $A$  и  $C$  и опорой  $B$ .

*Ответ:* Опора  $B$  расположена ниже крайних опор на  $\frac{ql^4}{24EI}$ .

**14.9.** Балка, защемленная одним концом и поддерживаемая на другом конце шарнирно подвижной опорой, нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$  по всему пролету  $l$ . Насколько нужно приподнять или опустить опору, чтобы сделать величину наибольшего положительного изгибающего момента в пролете равной величине отрицательного момента в защемлении?

*Ответ:* Приподнять на  $0,013 \frac{ql^4}{EI}$ .

**14.10.** Раскрыть статическую неопределимость стальной рамы (рис. *а*) двутаврового сечения, одинакового на всех участках; построить эпюры внутренних усилий, подобрать номер двутавра из условия прочности. Числовые данные:  $M_o = 30$  кНм,  $l = 2$  м,  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Решение.* Задача один раз статически неопределима. Запишем уравнения статики для опорных реакций  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ ,  $H_B$  (рис. *а*):

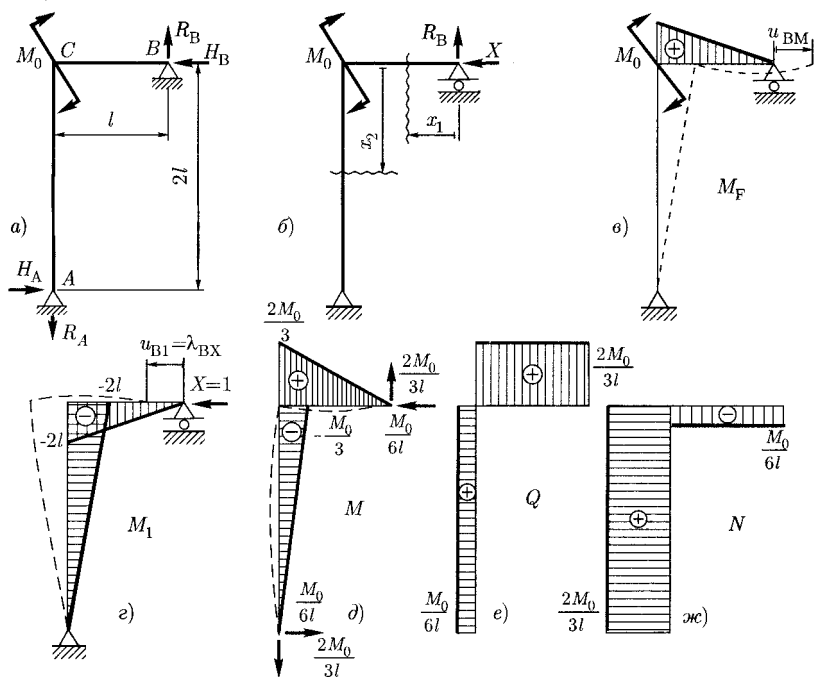
$$H_A = H_B; R_A = R_B; R_B \cdot l + H_B \cdot 2l - M_o = 0 \text{ или } R_B = \frac{M_o}{l} - 2H_B.$$

За лишнюю неизвестную  $X$  примем реакцию  $H_B$  (соответствующая основная система изображена на рис. *б*). Тогда уравнение совместности перемещений будет выражать отсутствие горизонтального перемещения опоры  $B$ :

$$u_B = 0.$$

При непосредственном использовании теоремы Кастильяно это уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{\partial U}{\partial X} = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left( \left( \frac{M_o}{l} - 2X \right) \cdot x_1 \right) (-2x_1) dx_1 + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^{2l} X (x_2 - 2l) (x_2 - 2l) dx_2 = \end{aligned}$$



К задаче 14.10

$$= -\frac{2M_0 l^2}{3} + \frac{4}{3}X l^3 + \frac{8}{3}X l^3 = 0 \Rightarrow X = \frac{M_0}{6l}.$$

С другой стороны, к тому же результату можно прийти, если найти лишнюю неизвестную из канонического уравнения метода сил:

$$u_{BF} + \lambda_{BX} X = 0 \Rightarrow X = -\frac{u_{BF}}{\lambda_{BX}}.$$

Здесь  $u_{BF}$  — горизонтальное перемещение опоры  $B$  при действии на основную систему только заданной внешней нагрузки (рис. в), а  $\lambda_{BX}$  — горизонтальное перемещение опоры  $B$  под действием только единичной лишней неизвестной  $X = 1$  (рис. г). Тогда

$$\begin{aligned} u_{BF} &= \int_L \frac{M_F M_1}{EI} dl = -\frac{l}{6EI} \left( 4 \cdot l \cdot \frac{M_0}{2} + M_0 \cdot 2l \right) = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{M_0 l^2}{EI}; \\ \lambda_{BX} &= \int_L \frac{M_1^2}{EI} dl = \frac{l}{6EI} (4(-l)^2 + (-2l)^2) + \frac{2l}{6EI} ((-2l)^2 + 4(-l)^2) = \\ &= \frac{4l^3}{EI}. \end{aligned}$$

Эпюры  $M_F$  и  $M_1$  изображены на рис. 6, 2.

Определив из уравнений статики остальные реакции (см. рис. 3), можно построить эпюры изгибающего момента  $M$  (рис. 4), поперечной силы  $Q$  (рис. 5), продольной силы  $N$  (рис. 6). На рис. 4 также представлен вид изогнутой оси рамы. Как видно,  $M_{\max} = \frac{2}{3} M_o = 20 \text{ кНм}$ . Условию прочности

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

удовлетворяет двутавр №18 ( $W = 143 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ).

**14.11.** Построить эпюры внутренних усилий в раме, имеющей замкнутый контур (рис. а). Жесткость  $EI$  считать постоянной.

*Решение.* Опорные реакции  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$  определяются из уравнений равновесия:

$$H_A = 0; R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

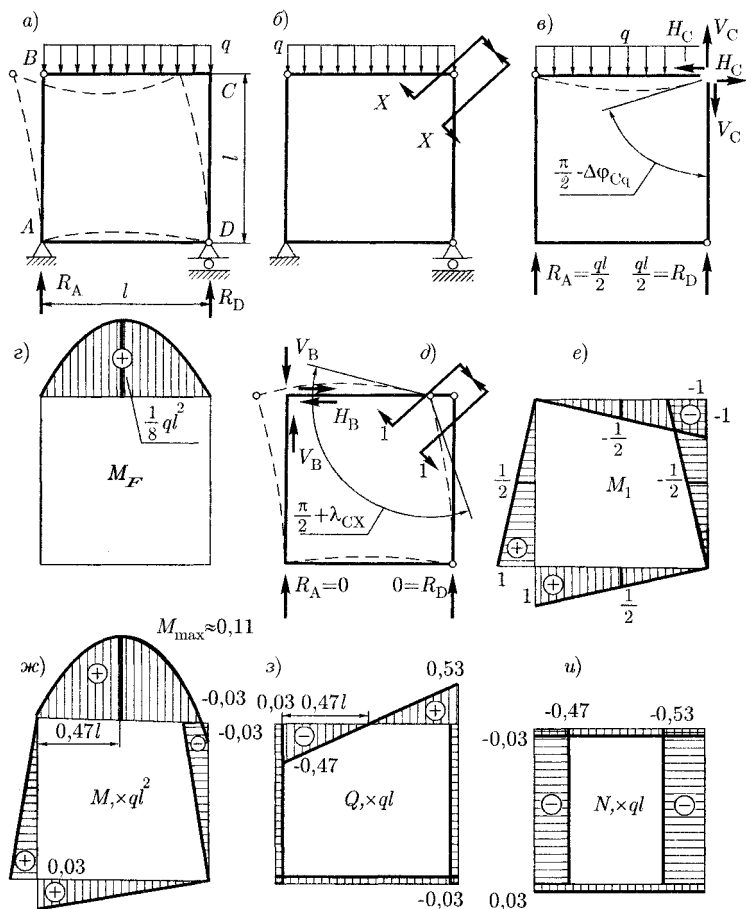
Однако внутренние усилия в произвольном сечении замкнутого контура не могут быть найдены из уравнений равновесия рамы в целом, поскольку входят в них парами равных по модулю и противоположных по знаку слагаемых, которые сокращаются. Говорят, что внешне статически определимый (или статически определимый по отношению к закреплению) замкнутый контур внутренне трижды статически неопределим (по числу неизвестных внутренних усилий).

Наличие в контуре шарнира позволяет записать равенство нулю суммы моментов всех сил, приложенных по одну сторону от шарнира, в том числе и внутренних усилий с одной стороны от произвольного разреза. Таким образом, степень статической неопределимости снижается на единицу. Так, рама, изображенная на рис. а, содержит два шарнира в замкнутом контуре и, следовательно, один раз статически неопределима.

Выберем за лишнюю неизвестную изгибающий момент в точке С и образуем основную систему путем введения шарнира в сечении С, что соответствует устранению соответствующей внутренней связи, запрещающей взаимный угол поворота  $\Delta\varphi_C$ . Поэтому уравнение совместности перемещений выражает отсутствие угла раскрытия введенного в сечении С шарнира (напомним, что углом раскрытия называется сумма углов поворота сечений слева и справа от шарнира):

$$\Delta\varphi_{Cq} + \lambda_{CX} X = 0,$$

см. рис. 6, 2, на которых изображены грузовое и вспомогательное состояния основной системы. Вычислим указанные перемещения с помощью интегралов Максвелла – Мора:



К задаче 14.11

$$\Delta\varphi_{Cq} = \int_L \frac{M_F M_1}{EI} dl = \frac{l}{6EI} \cdot 4 \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{ql^3}{24EI};$$

$$\lambda_{CX} = \int_L \frac{M_1^2}{EI} dl = 4 \cdot \frac{l}{6EI} \cdot \left(1^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{l}{EI}.$$

Эпюры  $M_F$  и  $M_1$  представлены на рис. ж и з. При их построении используются внутренние усилия в одном из шарниров, обозначенные на рис. в и д буквами  $V$  и  $H$ . Определяются эти усилия из условий равенства нулю моментов всех сил, приложенных по одну сторону от оставшихся двух шарниров:

$$\begin{aligned}\sum m_{z(B)}^{\text{справа}} &= V_C \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0 \Rightarrow V_C = \frac{ql}{2}; \\ \sum m_{z(D)}^{\text{сверху}} &= H_C \cdot l = 0 \Rightarrow H_C = 0; \\ \sum m_{z(C)}^{\text{слева}} &= V_B \cdot l - 1 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{l}; \\ \sum m_{z(D)}^{\text{слева}} &= V_B \cdot l - H_B \cdot l + 1 - 1 = 0 \Rightarrow H_B = \frac{1}{l};\end{aligned}$$

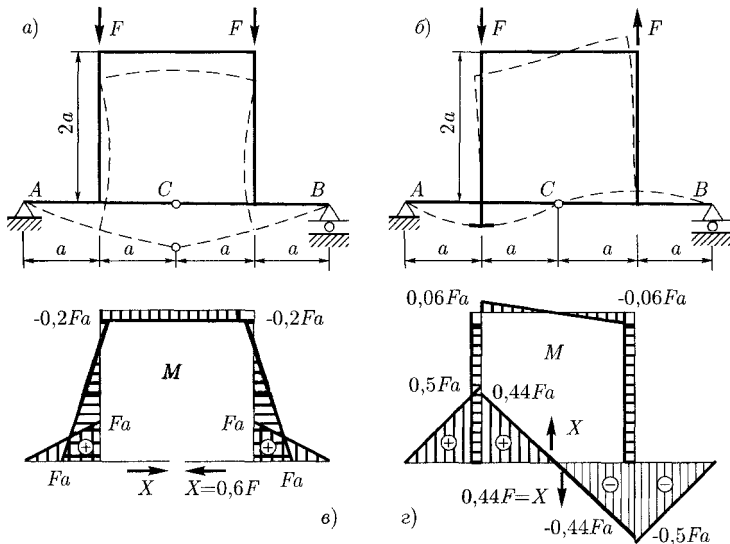
Далее построение эпор производится так же, как для обычной незамкнутой рамы, по отношению к которой силы  $V$  и  $H$  считаются внешними.

Из уравнения совместности находим значение лишней неизвестной:

$$X = \frac{ql^2}{32} \approx 0,031ql^2.$$

*Ответ:* Эпюра моментов и примерный вид изогнутой оси рамы изображены на рис. ж и а, эпюры поперечных и продольных сил – на рис. з, и.

**14.12.** Построить эпюры изгибающего момента в симметричных рамах, представленных на рис. а, б.



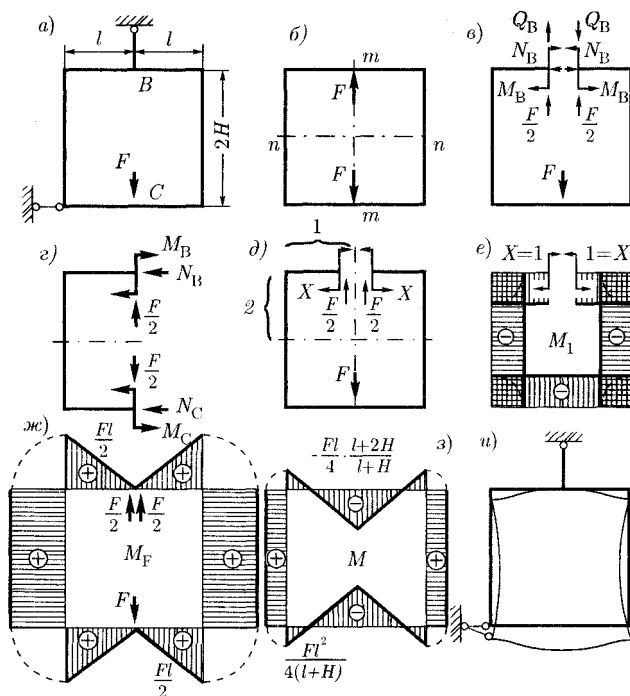
К задаче 14.12

*Указание.* Основная система для обеих рам образуется путем устранения внутренних связей в сечении С. В задаче а) нагрузка симметрична, поэтому в шарнире равна нулю поперечная сила, а лишней неизвестной

является продольная сила. Кососимметричная нагрузка в задаче б) обуславливает равенство нулю изгибающего момента и продольной силы в сечении С, лишняя неизвестная – поперечная сила.

Ответ: Значения лишних неизвестных: а)  $X = N_C = 0,6F$ ; б)  $X = Q_C \approx 0,44Fa$ . Эпюры для задач а, б представлены на рис. в, г соответственно, изогнутые оси – на рис. а, б.

**14.13.** Построить эпюру изгибающего момента в стальной раме (рис. а) и подобрать прямоугольное сечение с соотношением сторон 1 : 2 из условия прочности при  $[\sigma] = 160$  МПа,  $F = 40$  кН;  $H = 2$  м;  $l = 1,2$  м.



К задаче 14.13

**Решение.** Система, изображенная на рис. а, статически определима по отношению к закреплению, и внутренние усилия в стержнях АВ и DE могут быть вычислены только из уравнений равновесия (в частности,  $N_{DE} = 0$ ). Это позволяет перейти к более простой модели (рис. б). Замкнутый контур не содержит шарниров, и поэтому трижды статически неопределим: если сделать разрез в какой-либо его точке, например в точке В, все три внутренних усилия (изгибающий момент  $M_B$ , про-



дольная сила  $N_B$  и поперечная сила  $Q_B$ ) будут неизвестны (рис. 29, в). Однако использование условий симметрии относительно осей  $m - m$  и  $n - n$  позволяет определить величины  $Q_B$  и  $N_B$ . Так, кососимметричное усилие  $Q_B$  на оси симметрии должно быть равно нулю. Для нахождения  $N_B$  рассмотрим левую половину контура – см. рис. 2 (усилия в точках  $B$  и  $C$  равны в силу симметрии относительно оси  $n - n$ ). Тогда равенство нулю суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих на эту часть рамы, дает  $2N_B = 0$  или  $N_B = 0$ . Таким образом, неизвестным остается лишь изгибающий момент в сечении  $B$  (или равный ему момент в сечении  $C$ ), который мы и примем за лишнюю неизвестную  $X$  (см. рис. д). Для нее запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\Delta\varphi_{BF} + \lambda_{BX} X = 0,$$

где  $\Delta\varphi_{BF}$  – угол взаимного поворота сечений по сторонам разреза, возникающий от действия на основную систему заданной нагрузки,  $\lambda_{BX}$  – то же от действия  $X = 1$ . Грузовая и вспомогательная эпюры  $M_F$  и  $M_1$  изображены на рис. ж, з. Ввиду симметрии эпюр при вычислении интегралов Мора выделяют два участка (рис. д), и результат учетверяют:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{BF} &= 4 \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_F M_1}{EI} dx = \\ &= 4 \left\{ \frac{l}{6EI} \left( 0 \cdot (-1) + 4 \cdot \frac{Fl}{4} \cdot (-1) + \frac{Fl}{2} \cdot (-1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{H}{6EI} \left( \frac{Fl}{2} \cdot (-1) + 4 \cdot \frac{Fl}{2} \cdot (-1) + \frac{Fl}{2} \cdot (-1) \right) \right\} = \\ &= -\frac{Fl}{EI} (l + 2H), \\ \lambda_{BX} &= 4 \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_1^2}{EI} dx = \\ &= 4 \left\{ \frac{l}{6EI} ((-1)^2 + 4 \cdot (-1)^2 + (-1)^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{H}{6EI} ((-1)^2 + 4 \cdot (-1)^2 + (-1)^2) \right\} = \\ &= \frac{4(l + H)}{EI}, \\ X &= -\frac{\Delta\varphi_{BF}}{\lambda_{BX}} = \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l + 2H}{l + H}. \end{aligned}$$

Окончательная эпюра изгибающего момента и изогнутая ось представлены на рис. 3, и. Отметим, что в качестве основной системы могла быть выбрана и половина контура (рис. 2). Числовые подстановки дают

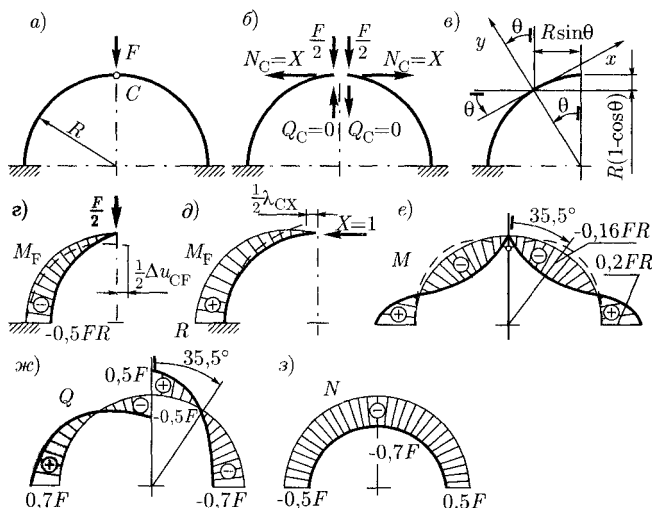
$$|M|_{\max} = X = \frac{40 \cdot 1,2 \cdot (1,2 + 4)}{4 \cdot (1,2 + 2)} = 19,5 \text{ кНм.}$$

Тогда из условия прочности

$$\frac{6|M|_{\max}}{bh^2} \leq [\sigma]$$

определим, что  $b$  должно быть больше чем 0,072 м. Примем  $b = 0,075$ ,  $h = 0,15$  м.

**14.14.** Рама, ось которой представляет собой полуокружность, нагружена сосредоточенной силой  $F$  (рис. а). Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры внутренних усилий, подобрать двутавровое сечение из условия прочности, если  $R = 2$  м,  $F = 20$  кН,  $[\sigma] = 160$  МПа.



К задаче 14.14

*Решение.* Рама дважды статически неопределима. Образует основную систему, устранив две внутренние связи на оси симметрии, где, очевидно, равно нулю кососимметричное внутреннее усилие  $Q_C = 0$ . Значение лишней неизвестной (продольной силы в шарнире C) находится из канонического уравнения метода сил:

$$\Delta u_{CF} + \lambda_{CX} X = 0,$$

где  $\Delta u_{CF}$  — взаимное горизонтальное смещение сечений в месте разреза от действия на основную систему силы  $F$  (см. рис. г),  $\lambda_{CX}$  — такое же смещение от  $X = 1$  (см. рис. д).

Выражения изгибающих моментов в грузовом и вспомогательном состояниях записываются как функции полярного угла  $\theta$  (см. рис. в):

$$M_F(\theta) = \begin{cases} -0,5FR \sin \theta, & \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ 0,5FR \sin \theta, & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0\right) \end{cases}$$

$$M_1(\theta) = R(1 - \cos \theta) \cdot \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Коэффициенты канонического уравнения определяются с помощью интегралов Максвелла–Мора: (вследствие симметрии эпюр  $M_F$  и  $M_1$  вычисления проводятся по половине контура рамы, а результат удваивается):

$$\begin{aligned} \Delta u_{CF} &= \int_L \frac{M_F M_1}{EI} dl = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-0,5FR \sin \theta) \cdot R(1 - \cos \theta) R d\theta = \\ &= -0,5 \frac{FR^3}{EI}; \\ \lambda_{CX} &= \int_L \frac{M_1^2}{EI} dl = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 (1 - \cos \theta)^2 R d\theta = \\ &= \frac{2R^3}{EI} \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) \approx 0,71 \frac{R^3}{EI}. \end{aligned}$$

Тогда

$$X = -\frac{\Delta u_{CF}}{\lambda_{CX}} \approx 0,7F.$$

Выражение для изгибающего момента в исходной системе строится по принципу суперпозиции:

$$M(\theta) = M_F(\theta) + X \cdot M_1(\theta) \approx 0,7FR - 0,5FR \sin |\theta| - 0,7FR \cos \theta. \\ \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Эпюра  $M$  и вид изогнутой оси представлены на рис. е. Поперечная и продольная силы представляют собой проекции на оси  $x$  и  $y$  подвижной системы координат в каждом сечении (рис. в) сил  $0,5F$  и  $X$ , действующих в шарнире  $C$ :

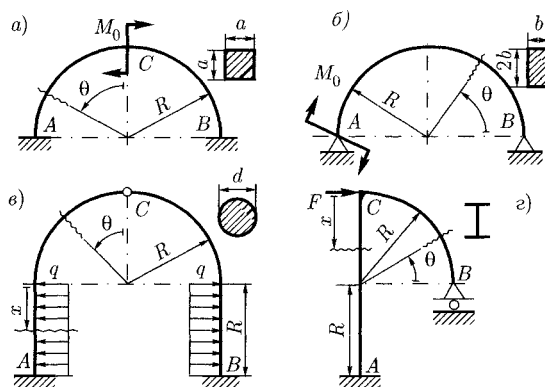
$$Q(\theta) = \begin{cases} -0,5F \cos \theta + 0,7F \sin \theta, & \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ 0,5F \cos \theta + 0,7F \sin \theta, & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0\right) \end{cases}$$

$$N = -0,5F \sin |\theta| - 0,7F \cos \theta \quad (\text{см. рис. ж, з}). \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Экстремума изгибающий момент достигает при  $\theta_o = 35,5^\circ$ . Здесь имеем  $|M(\theta_o)| = 0,16FR$ . В сечении с координатой  $\theta = \pm\pi/2$  изгибающий момент составляет  $M \approx 0,20FR$ . Таким образом, находим, что  $|M|_{\max} \approx 0,2FR$ . Подставляя этот результат в условие прочности, получаем  $W \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{0,2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 2}{160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ .

Ответ: Двутавр № 12,  $W_z = 58,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ .

**14.15.** В рамах, содержащих криволинейные стержни (рис. а–г), построить эпюры изгибающих моментов и подобрать указанные сечения из условия прочности. Числовые данные:  $F = 20 \text{ кН}$ ,  $M_0 = 30 \text{ кНм}$ ,  $R = 2 \text{ м}$ ,  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .



К задаче 14.15

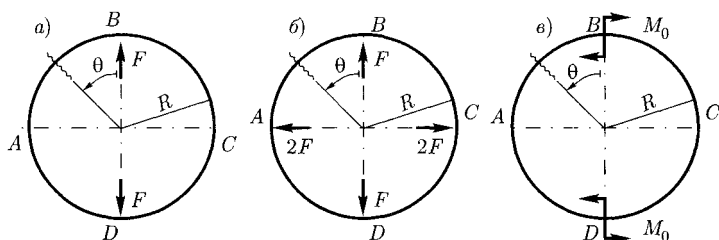
Ответ:

| За-<br>да-<br>ча | Изгибающий момент                                                                                                                                                  | $ M _{\max},$<br>кНм   | Сечение,<br>м  |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------|
| а                | $0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad M(\theta) = -M_0(\pi - 4 \sin \theta)/(2\pi);$<br>$-\pi/2 \leq \theta \leq 0, \quad M(\theta) = M_0(\pi + 4 \sin \theta)/(2\pi);$ | 15<br>( $\theta = 0$ ) | $a = 0,083$    |
| б                | $0 \leq \theta \leq \pi, \quad M(\theta) = M_0(\pi - \pi \cos \theta  - 4 \sin \theta)/(2\pi);$                                                                    | 30<br>( $\theta = 0$ ) | $b = 0,066$    |
| в                | $0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad M(\theta) = -3,5qR^2(1 - \cos \theta)/(9\pi - 8);$<br>$0 \leq x \leq R, \quad M(x) = -3,5qR(R + x)/(9\pi - 8) + 0,5qx^2;$         | 7,5<br>( $x = 0,17R$ ) | $d = 0,079$    |
| г                | $0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad M(\theta) = 8FR(1 - \cos \theta)/(3\pi);$<br>$0 \leq x \leq R, \quad M(x) = F(8R - 3\pi x)/(3\pi).$                               | 46<br>( $x = 2R$ )     | Двутавр<br>№24 |

**14.16.** Используя условия симметрии, раскрыть статическую неопределимость рам (рис. а–в), построить эпюры изгибающих моментов.

Ответ:

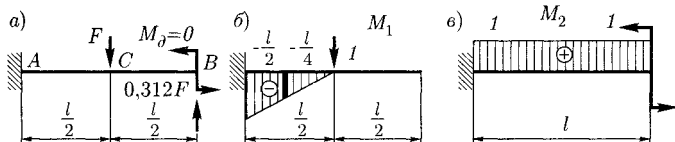
$$\begin{aligned} \text{а) } -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad M(\theta) &= \frac{FR}{2\pi}(\pi \sin |\theta| - 2); \\ \text{б) } -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad M(\theta) &= \frac{FR}{2\pi}(\pi \sin |\theta| + 2\pi |\cos \theta| - 6); \end{aligned}$$



К задаче 14.16

$$\begin{aligned} \text{в) } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad M(\theta) &= -\frac{M_0}{2\pi} (4 \sin \theta - \pi); \\ -\pi \leq \theta \leq 0, \quad M(\theta) &= \frac{M_0}{2\pi} (4 \sin |\theta| - \pi). \end{aligned}$$

**14.17.** В балке, представленной на рис. а (задача 14.1.), определить вертикальное перемещение  $v_C$  сечения C и угол поворота  $\varphi_B$  сечения B. Числовые данные взять из задачи 14.2.



К задаче 14.17

*Решение.*

Определение перемещений с помощью теоремы Кастильяно.

Будем рассматривать основную систему (рис. а, задача 14.2), на которую действуют сила  $F$  и лишняя неизвестная  $X$ , значение которой было определено в задаче 14.2:  $X = \frac{5}{16}F \approx 0,312F$ . Тогда для изгибающего момента будем иметь выражения

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 0,5l: \quad M(x) &= F(0,688x - 0,188l), \\ \frac{\partial M(x)}{\partial F} &= 0,688x - 0,188l; \\ 0,5l \leq x \leq l: \quad M(x) &= 0,312F(l - x), \\ \frac{\partial M(x)}{\partial F} &= 0,312(l - x). \end{aligned}$$

С использованием теоремы Кастильяно получаем

$$\begin{aligned}
v_C &= \frac{\partial U}{\partial F} = \\
&= \frac{1}{EI} \int_0^{0,5l} F(0,688x - 0,188l)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_{0,5l}^l F(0,312(l-x))^2 dx \approx \\
&\approx \frac{Fl^3}{EI} (5,05 \cdot 10^{-3} + 4,08 \cdot 10^{-3}) \approx 9,1 \cdot 10^{-3} \frac{Fl^3}{EI} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}
\end{aligned}$$

В соответствии с данными задачи 14.2 принимается  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 4 \text{ м}$ ,  $I = 350 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$  – двутавр №12.

Для нахождения угла поворота  $\varphi_B$  необходимо к основной системе, на которую действуют силы  $F$  и  $X = 0,312F$ , дополнительно приложить добавочный момент  $M_\theta = 0$  в сечении  $B$  (рис. а). Тогда выражения для изгибающего момента и его производных по  $M_\theta$  примут вид

$$\begin{aligned}
1) \ 0 \leq x \leq 0,5l: \quad M(x) &= F(0,688x - 0,188l) + M_\theta, \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_\theta} = 1; \\
2) \ 0,5l \leq x \leq l: \quad M(x) &= 0,312F(l-x) + M_\theta, \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_\theta} = 1.
\end{aligned}$$

Угол поворота  $\varphi_B$  найдется из формул

$$\begin{aligned}
\varphi_B &= \left. \frac{\partial U}{\partial M_\theta} \right|_{M_\theta=0} = \\
&= \frac{1}{EI} \int_0^{0,5l} F(0,688x - 0,188l) \cdot 1 \cdot dx + \frac{1}{EI} \int_{0,5l}^l 0,312F(l-x) \cdot 1 \cdot dx = \\
&= \frac{Fl^2}{EI} (-0,0078 + 0,0391) \approx 0,031 \frac{Fl^2}{EI} \approx 0,07(\text{рад}).
\end{aligned}$$

#### Использование интегралов Максвелла – Мора.

В соответствии с известным алгоритмом, искомые перемещения находятся как интегралы Максвелла – Мора:

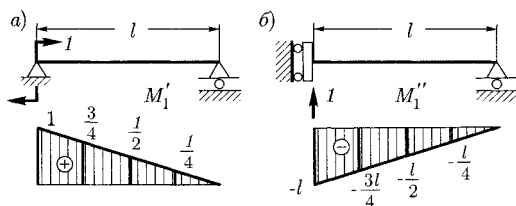
$$v_C = \int_L \frac{M M_1}{EI} dl, \quad \varphi_B = \int_L \frac{M M_2}{EI} dl,$$

где  $M$  – выражение изгибающего момента для статически неопределимой балки. Соответствующая эпюра  $M$  (рис. жс, задача 14.1) выступает в роли грузовой,  $M_1$  и  $M_2$  – выражения изгибающих моментов от действия единичных обобщенных сил, соответствующих искомому перемещению. Важная особенность: вспомогательные эпюры  $M_1$  и  $M_2$  могут быть построены в произвольной статически определимой основной системе (см. рис. б, в). Используя для вычисления интегралов формулу Симпсона, получаем

$$\begin{aligned}
 v_C &= \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( -\frac{3}{16} Fl \cdot \left( -\frac{l}{2} \right) + 4 \cdot \left( -\frac{1}{64} Fl \right) \cdot \left( -\frac{l}{4} \right) \right) = \\
 &= \frac{7}{768} \frac{Fl^3}{EI} \approx 9,1 \cdot 10^{-3} \frac{Fl^3}{EI}; \\
 \varphi_B &= \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( -\frac{3}{16} Fl \cdot 1 + 4 \cdot \left( -\frac{1}{64} Fl \right) \cdot 1 + \frac{5}{32} Fl \cdot 1 \right) + \\
 &+ \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( \frac{5}{32} Fl \cdot 1 + \frac{5}{64} Fl \cdot 1 \right) = \frac{Fl^2}{32EI} \approx 0,031 \frac{Fl^2}{EI}.
 \end{aligned}$$

Как видно, в данном случае использование интегралов Максвелла–Мора существенно сокращает объем вычислений.

**14.18.** Сделать деформационную проверку решения задачи 14.1, т.е. убедиться в правильности построения эпюры изгибающего момента путем нахождения заведомо известного (равного нулю) перемещения.



К задаче 14.18

*Решение.* Определим угол поворота в заделке  $\varphi_A$ . Для этого выберем основную систему, в которой отсутствует связь по направлению искомого перемещения (рис. а), приложим к ней единичную обобщенную силу (в данном случае – момент), соответствующую искомому перемещению, и построим вспомогательную эпюру  $M'_1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \varphi_A &= \int_L \frac{M M'_1}{EI} dl = \\
 &= \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( -\frac{3}{16} Fl \cdot 1 + 4 \cdot \left( -\frac{1}{64} Fl \right) \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{32} Fl \cdot \frac{1}{2} \right) + \\
 &+ \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left( \frac{5}{32} Fl \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{5}{64} Fl \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 0 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь  $M$  – выражение изгибающего момента в статически неопределимой балке. Соответствующая эпюра  $M$  изображена на рис. жс, задача 14.1.

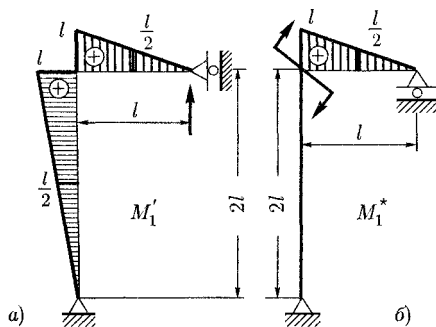
Аналогичным образом можно убедиться в отсутствии вертикального перемещения  $v_A$  в заделке: основная система образуется путем устранения

связи, препятствующей вертикальному перемещению (заделка превращается в скользящую), и строится эпюра  $M_1''$  от действия единичной вертикальной сосредоточенной силы (рис. б). Используя интеграл Максвелла – Мора, находим

$$v_A = \int_L \frac{M M''}{EI} dl = 0.$$

Важно отметить, что вспомогательные эпюры моментов при любом выборе основной системы подобны друг другу:  $M_1'' = -l \cdot M_1'$ ,  $M_1' = \frac{1}{l} M_1$  (см. рис. 2, задача 14.2). Этим обстоятельством можно пользоваться для проверки правильности построения вспомогательной эпюры  $M_1$ .

**14.19.** Сделать деформационную проверку решения задачи 14.10 и найти угол поворота сечения  $C$  (рис. а, задача 14.10).



К задаче 14.19

*Решение.* Для проверки найдем вертикальное перемещение  $v_B$  сечения  $B$ . Соответствующая основная система и вспомогательная эпюра  $M_1'$  представлены на рис. а. Вычислим интегралы Максвелла – Мора по формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} v_B &= \int_L \frac{M M_1'}{EI} dl = \\ &= \frac{2l}{6EI} \left( 4 \cdot \left( -\frac{M_o}{6} \right) \cdot \frac{l}{2} + \left( -\frac{M_o}{3} \right) \cdot l \right) + \\ &\quad + \frac{l}{6EI} \left( \frac{2M_o}{3} \cdot l + \frac{4M_o}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

(эпюра  $M$  – см. рис. д, задача 14.10).

Для определения угла поворота сечения  $C$  можно непосредственно использовать теорему Кастильяно. Запишем выражения для изгибающего момента и его производных по участкам:



$$\begin{aligned}
 1) \ 0 \leq x_1 \leq l: \quad M(x) &= \left( \frac{M_o}{l} - 2 \frac{M_o}{6l} \right) x_1 = \frac{2}{3} \frac{M_o}{l} \cdot x_1; \quad \frac{\partial M}{\partial M_o} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_1}{l}; \\
 1) \ 0 \leq x_2 \leq 2l: \quad M(x) &= \frac{M_o}{6l} (x_2 - 2l), \quad \frac{\partial M}{\partial M_o} = \frac{x_2 - 2l}{6l}.
 \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 \varphi_C &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{x_1}{l} \right)^2 \cdot M_o \cdot dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{2l} \left( \frac{x_2 - 2l}{6l} \right)^2 \cdot M_o \cdot dx_2 = \\
 &= \frac{M_o l}{EI} \left( \frac{4}{27} + \frac{2}{27} \right) = \frac{2}{9} \frac{M_o l}{EI} \approx \frac{2}{9} \cdot \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = \\
 &= 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}
 \end{aligned}$$

Для применения формулы Максвелла – Мора нужно построить вспомогательную эпюру  $M_1^*$  в произвольной основной системе. Используя ту же основную систему, в которой решалась задача 14.10. (рис. б, задача 14.10), убеждаемся, что  $M_1^* = \frac{M_F}{M_o}$ , где  $M_F$  – грузовая эпюра, изображенная на рис. в, задача 14.10. Тогда

$$\varphi_C = \int_L \frac{M M_1^*}{EI} dl = \frac{l}{6EI} \left( 1 \cdot \frac{2M_o}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{M_o}{3} \right) = \frac{2}{9} \frac{M_o l}{EI}.$$

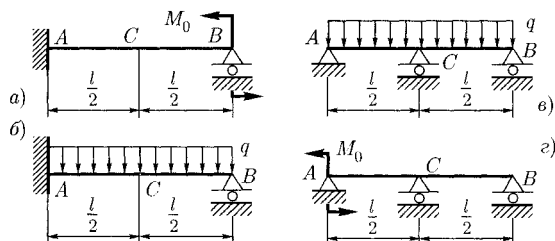
В этом случае вычисления по формуле Максвелла – Мора оказались существенно короче, чем при непосредственном применении теоремы Кастильяно.

**14.20.** Найти относительное вертикальное перемещение точек  $B$  и  $C$  в задаче 14.13.

*Указание.* Аналогично задаче 14.19 убеждаемся, что  $M_1^* = \frac{M_F}{F}$  (эпюра  $M_F$  представлена на рис. ж, задача 14.13). Удобно воспользоваться формулой Максвелла – Мора.

$$\text{Ответ: } \Delta v_{BC} = \frac{Fl^3(l + 4H)}{12EI(l + H)} \approx 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

**14.21.** Используя метод сравнения перемещений, раскрыть статическую неопределенность в балках, представленных на рис. а–г. Построить эпюры внутренних усилий. Определить перемещения: вертикальное перемещение сечения  $C$  и угол поворота сечения  $B$  в схемах а, б; углы поворота сечений  $A$  и  $B$  в схемах в, г.



К задаче 14.21

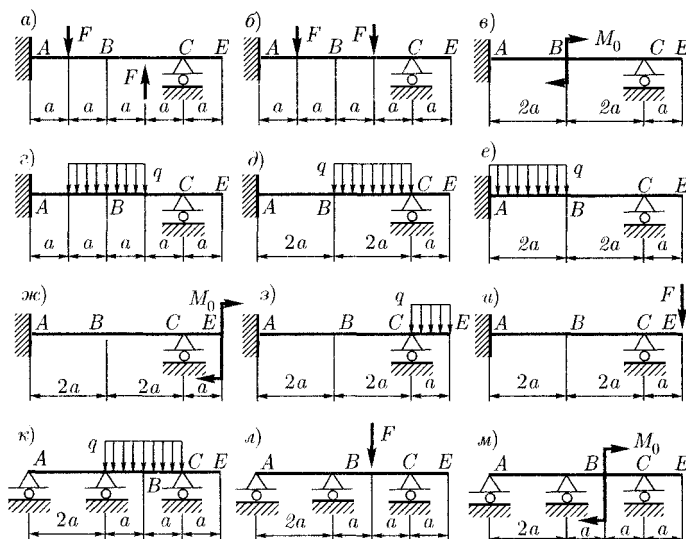
Ответ:

| Схема | $R_B$                              | $M_A$                | $v_C$                              | $\varphi_B$                     |
|-------|------------------------------------|----------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| a     | $\frac{3}{2} \frac{M_0}{l}$ , вниз | $-\frac{1}{2} M_0$   | $-\frac{1}{32} \frac{M_0 l^2}{EI}$ | $\frac{1}{4} \frac{M_0 l}{EI}$  |
| б     | $\frac{3}{8} ql$ , вверх           | $-\frac{1}{8} ql^2$  | $-\frac{1}{192} \frac{ql^4}{EI}$   | $\frac{1}{48} \frac{ql^3}{EI}$  |
| в     | $\frac{5}{8} ql$ , вверх           | $-\frac{1}{32} ql^2$ | $-\frac{1}{384} \frac{ql^3}{EI}$   | $\frac{1}{384} \frac{ql^3}{EI}$ |
| г     | $\frac{3M_0}{l}$ , вниз            | $\frac{1}{4} M_0$    | $\frac{7}{48} \frac{M_0 l}{EI}$    | $\frac{1}{48} \frac{M_0 l}{EI}$ |

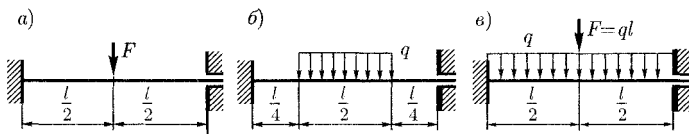
**14.22.** На рисунке показаны статически неопределимые балки с различными схемами нагружения. Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры внутренних усилий, подобрать из условия прочности: для схем а – в – круглое сечение диаметра  $d$ , для схем г – е – квадратное со стороной  $a$ , для схем ж – и – прямоугольное с соотношением сторон  $h : b = 2 : 1$ , для схем к – м – двутавровое. Материал: для схем а – е – дерево ( $[\sigma] = 10$  МПа,  $E = 10$  ГПа), для схем ж – м – сталь ( $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 200$  ГПа). Определить вертикальные перемещения  $v_B$ ,  $v_E$  и углы поворота  $\varphi_E$ , проверить условия жесткости и, если нужно, подобрать новые сечения, считая, что величина  $v_B$  не может превосходить  $6 \cdot 10^{-3}$  м, а величина  $v_E$  –  $3 \cdot 10^{-3}$  м. Во всех случаях принять  $F = 30$  кН,  $M_0 = 40$  кНм,  $q = 20$  кН/м,  $a = 1$  м.

Ответ: См. таблицу на стр. 272.

Примечание. Здесь  $x$  – координата сечения, в котором достигается максимальный по модулю изгибающий момент ( $M_{\min}$  или  $M_{\max}$ ) – от-



К задаче 14.22



К задаче 14.23

считывается от точки A; положительным для прогибов  $v_B$  и  $v_E$  считается направление вверх, для углов поворота  $\varphi_C$  – против часовой стрелки.

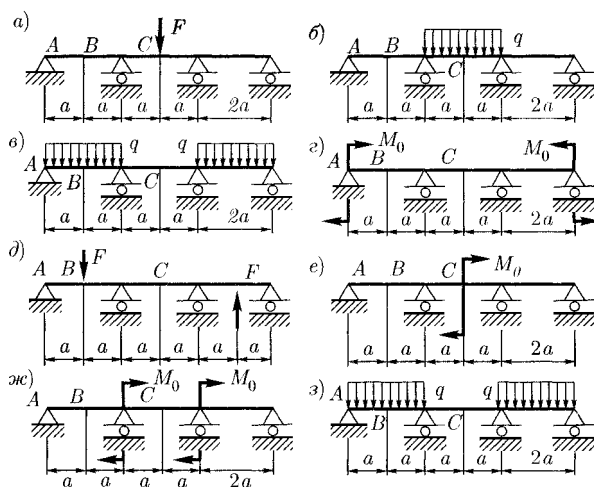
**14.23.** Определить грузоподъемность балок, защемленных обоими концами и нагруженных симметрично, как показано на рисунке. Вычислить величину наибольшего прогиба. В схеме а сечение прямоугольное  $12 \times 30$  см, пролет  $l = 6$  м,  $[\sigma] = 10$  МПа (материал балки – сосна). В схеме б сечение – двутавр № 20, пролет  $l = 4$  м. В схеме в сечение – двутавр № 20, пролет  $l = 6$  м. Для двутавровых балок  $[\sigma] = 160$  МПа.

Ответ: а)  $P \leq 24$  кН,  $10^{-2}$  М; б)  $q \leq 7$  кН/м,  $0,96 \cdot 10^{-2}$  М;

в)  $q \leq 4$  кН/м,  $1,1 \cdot 10^{-2}$  М.

## К задаче 14.22

| Схема    | $R_C$                        |      | $M_{\max}$<br>(min)  | $x$    | $ M _{\max}$ | Сечение     | $v_B$                             | $v_E$                             | $\varphi_C$                         |
|----------|------------------------------|------|----------------------|--------|--------------|-------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
|          |                              | кН   |                      | м      | кН · м       | м           | $\frac{\text{м}}{\times 10^{-3}}$ | $\frac{\text{м}}{\times 10^{-3}}$ | $\frac{\text{рад}}{\times 10^{-3}}$ |
| $a$      | $-\frac{35}{64}F$            | 16,4 | $-\frac{35}{64}Fa$   | 3      | 16,4         | $d = 0,26$  | 2,52                              | -4,96                             | -4,99                               |
|          |                              |      |                      |        |              | $d = 0,30$  | 1,42                              | -2,80                             | -2,81                               |
| $b$      | $\frac{23}{32}F$             | 21,6 | $-\frac{9}{8}Fa$     | 0      | 33,8         | $d = 0,33$  | -3,65                             | 4,06                              | 3,94                                |
|          |                              |      |                      |        |              | $d = 0,36$  | -2,58                             | 2,86                              | 2,78                                |
| $c$      | $\frac{9}{32}\frac{M_0}{a}$  | 11,3 | $\frac{9}{16}M_0$    | 2      | 22,5         | $d = 0,29$  | -1,44                             | 2,88                              | 2,88                                |
| $e$      | $\frac{21}{32}qa$            | 13,1 | $-\frac{11}{8}qa^2$  | 0      | 27,5         | $a = 0,26$  | -5,25                             | 4,81                              | 4,81                                |
|          |                              |      |                      |        |              | $a = 0,30$  | -2,96                             | 2,71                              | 2,71                                |
| $d$      | $\frac{41}{32}qa$            | 25,6 | $-\frac{7}{8}qa^2$   | 0      | 17,5         | $a = 0,22$  | -8,11                             | 9,39                              | 9,39                                |
|          |                              |      |                      |        |              | $a = 0,30$  | -2,35                             | 2,72                              | 2,72                                |
| $e$      | $\frac{7}{32}qa$             | 4,4  | $-\frac{9}{8}qa^2$   | 0      | 22,5         | $a = 0,24$  | -3,92                             | 3,01                              | 3,01                                |
| $ж$      | $\frac{3}{8}\frac{M_0}{a}$   | 15   | $-M_0$               | [4; 5] | 40           | $b = 0,072$ | 5,58                              | -16,7                             | -11,1                               |
|          |                              |      |                      |        |              | $b = 0,11$  | 1,02                              | -3,07                             | -2,03                               |
| $з$      | $\frac{19}{16}qa$            | 23,8 | $-\frac{1}{2}qa^2$   | 4      | 10           | $b = 0,046$ | 8,37                              | -20,9                             | -16,7                               |
|          |                              |      |                      |        |              | $b = 0,075$ | 1,18                              | -2,96                             | -2,36                               |
| $u$      | $\frac{11}{8}F$              | 41,3 | $-Fa$                | 4      | 30           | $b = 0,066$ | 5,92                              | -15,8                             | -11,9                               |
|          |                              |      |                      |        |              | $b = 0,10$  | 1,12                              | -3,0                              | -2,26                               |
| $\kappa$ | $\frac{7}{8}qa$              | 17,5 | $\frac{49}{128}qa^2$ | 3,13   | 7,7          | № 12        | -4,17                             | 7,14                              | 7,14                                |
|          |                              |      |                      |        |              | № 16        | -1,67                             | 2,86                              | 2,86                                |
| $л$      | $\frac{13}{32}F$             | 12,2 | $\frac{13}{32}Fa$    | 3      | 12,2         | № 14        | -3,14                             | 4,92                              | 4,92                                |
|          |                              |      |                      |        |              | № 18        | -1,39                             | 2,18                              | 2,18                                |
| $м$      | $\frac{17}{32}\frac{M_0}{a}$ | 21,3 | $\frac{17}{32}M_0$   | 3      | 21,3         | № 18        | -0,24                             | 1,62                              | 1,62                                |



К задаче 14.24

**14.24.** Двухавровые неразрезные стальные балки загружены, как показано на рисунке. Используя условия симметрии, раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры внутренних усилий, подобрать сечения из условия прочности ( $F = 40$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $M_0 = 30$  кНм,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $a = 1$  м). Вычислить вертикальные перемещения сечений  $B$  и  $C$  и угол поворота сечения  $C$ .

| Схема | $M_C$                        |       | $ M _{\max}$          |      | Двухавр<br>№ | $v_B$               | $v_C$               | $\varphi_C$              |
|-------|------------------------------|-------|-----------------------|------|--------------|---------------------|---------------------|--------------------------|
|       |                              | кНм   |                       | кНм  |              | м, $\times 10^{-3}$ | м, $\times 10^{-3}$ | рад,<br>$\times 10^{-3}$ |
| а     | $\frac{7}{20} Fa$            | 14    | $\frac{7}{20} Fa$     | 14   | 16           | 0,86                | -2,10               | 0                        |
| б     | $\frac{3}{10} qa^2$          | 3     | $\frac{3}{10} qa^2$   | 3    | 10           | 1,26                | -2,74               | 0                        |
| в     | $-\frac{1}{5} qa^2$          | -2    | $\frac{81}{200} qa^2$ | 4,05 | 10           | -3,79               | 2,20                | 0                        |
| г     | $-\frac{1}{5} M_0$           | -6    | $M_0$                 | 30   | 20а          | -1,48               | 0,74                | 0                        |
|       | $Q_C$                        |       |                       |      |              |                     |                     |                          |
|       |                              | кН    |                       |      |              |                     |                     |                          |
| д     | $-\frac{1}{4} F$             | -10   | $\frac{3}{8} Fa$      | 15   | 16           | -2,39               | 0                   | -1,91                    |
| е     | $\frac{7}{12} \frac{M_0}{a}$ | -17,5 | $\frac{1}{2} M_0$     | 15   | 16           | -0,36               | 0                   | -5,25                    |
| ж     | $\frac{2}{3} \frac{M_0}{a}$  | 20    | $\frac{2}{3} M_0$     | 20   | 18           | 0,97                | 0                   | 2,58                     |
| з     | $-\frac{1}{3} qa$            | -3,3  | $\frac{25}{72} qa^2$  | 3,47 | 10           | -2,80               | 0                   | -2,80                    |

Ответ к задаче 14.24

**14.25.** В рамах, изображенных на рис. *а-г* к задаче 14.15, определить следующие перемещения: *а)* горизонтальное перемещение и угол поворота сечения *С*; *б)* углы поворота в сечениях *А* и *В*; *в)* угол раскрытия и вертикальное перемещение шарнира *С*; *г)* угол поворота и горизонтальное перемещение сечения *В* и горизонтальное перемещение сечения *С*. Числовые данные взять из задачи 14.15.

Ответ: *а)*  $u_C = \frac{M_o R^2}{4\pi EI}(\pi^2 - 2\pi - 4) \approx 0,005$  м, влево;

$$\varphi_C = \frac{M_o R}{4\pi EI}(\pi^2 - 8) \approx 0,011 \text{ рад, по часовой стрелке;}$$

*б)*  $\varphi_A = \frac{M_o R}{8\pi EI}(3\pi^2 - 16) \approx 0,013$  рад, по часовой стрелке;

$$\varphi_B = \frac{M_o R}{8\pi EI}(\pi^2 - 16) \approx 0,0058 \text{ рад, по часовой стрелке;}$$

*в)*  $\Delta\varphi_C = \frac{qR^3(3\pi + 37)}{6EI(9\pi - 8)} \approx 0,08$  рад,

$$v_C = \frac{qR^4(50 - 9\pi)}{3EI(9\pi - 8)} \approx 0,15 \text{ м, вниз;}$$

*г)*  $\varphi_B = \frac{FR^2}{3\pi EI}(2\pi - 8) \approx 0,002$  рад, против часовой стрелки,

$$u_B = \frac{2FR^3}{3\pi EI}(2 + \pi) \approx 0,025 \text{ м, вправо,}$$

$$u_C = \frac{FR^3}{3\pi EI}(8\pi - 16) \approx 0,022 \text{ м, вправо.}$$

**14.26.** Определить взаимное горизонтальное перемещение точек *А* и *С* и взаимное вертикальное перемещение точек *В* и *Д* для рам с замкнутым контуром криволинейной симметричной формы (рис. *а-в*, задача 14.16).

Ответ:

| Схема    | $u_{AC}$                                  | $v_{BD}$                                   |
|----------|-------------------------------------------|--------------------------------------------|
| <i>а</i> | $-\frac{FR^3}{4\pi EI}(\pi^2 - 8)$        | $\frac{FR^3}{4\pi EI}(\pi^2 - 8)$          |
| <i>б</i> | $\frac{FR^3}{4\pi EI}(24 + 4\pi - \pi^2)$ | $-\frac{FR^3}{4\pi EI}(24 + 4\pi - \pi^2)$ |
| <i>в</i> | 0                                         | 0                                          |

*Примечание.* Здесь взаимное перемещение считается положительным, если точки удаляются друг от друга и отрицательным, если они сближаются.

**14.27.** Раскрыть статическую неопределимость рам, изображенных на рис.  $a - z$ , построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ . Подобрать сечения указанного вида из условия прочности. Определить перемещения: углы поворота сечений  $A$  и  $B$ , линейное смещение опоры  $A$  (для схем  $a - z$ ), углы поворота сечений  $A$  и  $C$ , горизонтальное смещение точек  $C$  и  $D$  (для схем  $d - z$ ). Числовые данные:  $a = 2$  м,  $F = 40$  кН,  $M_o = 28$  кНм,  $q = 14$  кН/м,  $[\sigma] = 10$  МПа (схемы  $a - z$ );  $a = 2$  м,  $F = 40$  кН,  $M_o = 32$  кНм,  $q = 16$  кН/м,  $[\sigma] = 160$  МПа (схемы  $d - z$ ).

*Ответ:* См. таблицу на стр. 277.

*Примечание.*  $R_A$  — вертикальная составляющая реакции в шарнирной неподвижной опоре или реакция в шарнирной подвижной опоре.

**14.28.** Учитывая характер симметрии нагрузок, действующих на симметричные рамы (рис.  $a - e$ ), раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры внутренних усилий. Из условия прочности подобрать двутавровые сечения ( $[\sigma] = 160$  МПа) и определить перемещения: угол раскрытия и вертикальное смещение сечения  $B$  (для схем  $a - e$ ); угол поворота и горизонтальное смещение сечения  $B$  (для схем  $z - e$ ). Для всех рам принять:  $a = 1$  м,  $F = 20$  кН,  $M = 40$  кНм,  $q = 10$  кН/м.

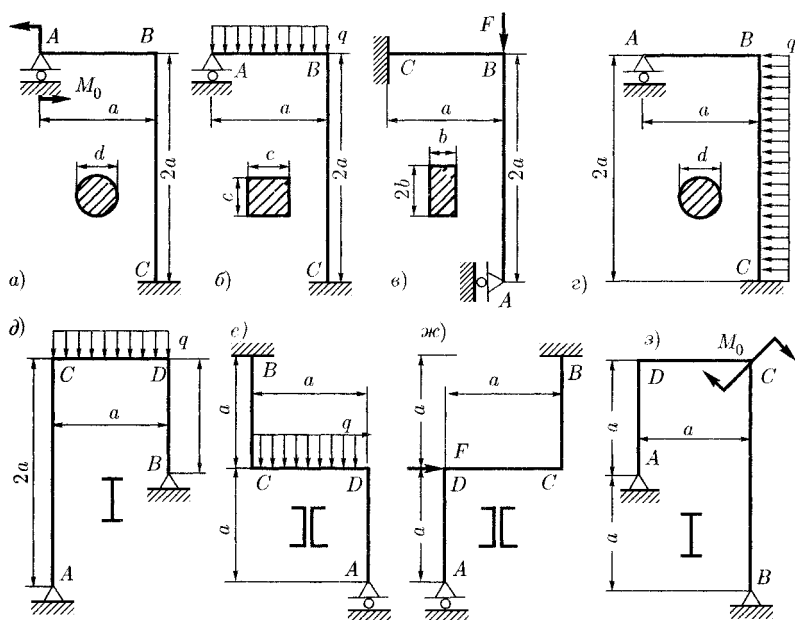
*Указание.* Рамы, изображенные на рис.  $a - e$  дважды, а на рис.  $z - e$  трижды статически неопределимы. Однако наличие симметрии нагрузки позволяет снизить степень статической неопределимости при условии рационального выбора основной системы. Для этого наиболее целесообразно провести разрез на оси симметрии рамы. Тогда лишними неизвестными станут внутренние усилия в этом сечении. В схемах  $a - e$  равно нулю кососимметричное усилие  $Q_B$ , в схемах  $z - e$  — симметричные усилия  $M_B$  и  $N_B$ .

*Ответ:* См. таблицу на стр. 277.

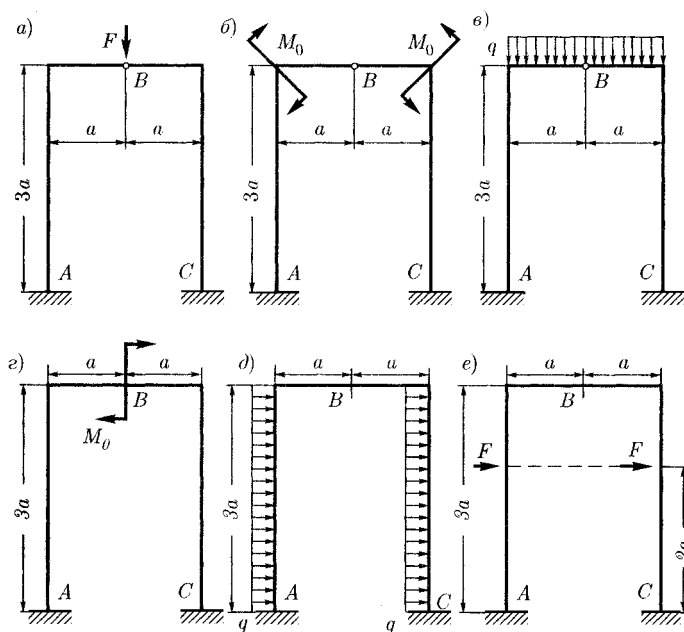
**14.29.** Построить эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в рамах, содержащих замкнутый контур (рис.  $a - ж$ ). Для всех схем определить горизонтальное и вертикальное перемещение узла  $A$ . Жесткость  $EI$  считать одинаковой на всех участках рам.

*Указание.* Рамы статически определимы по отношению к реакциям закрепления и один раз внутренне статически неопределимы. Основная система в этом случае образуется путем введения шарнира в одно из сечений замкнутого контура, изгибающий момент в котором является лишней неизвестной (см. задачу 14.11).

*Ответ:* на рис.  $a - ж$  изображен примерный вид изогнутых осей рам. Изгибающие моменты в характерных сечениях 1, 2, 3, 4 сведены в таблицу на странице 279 (положительными считаются ордина-



К задаче 14.27



К задаче 14.28



Ответ к задаче 14.27

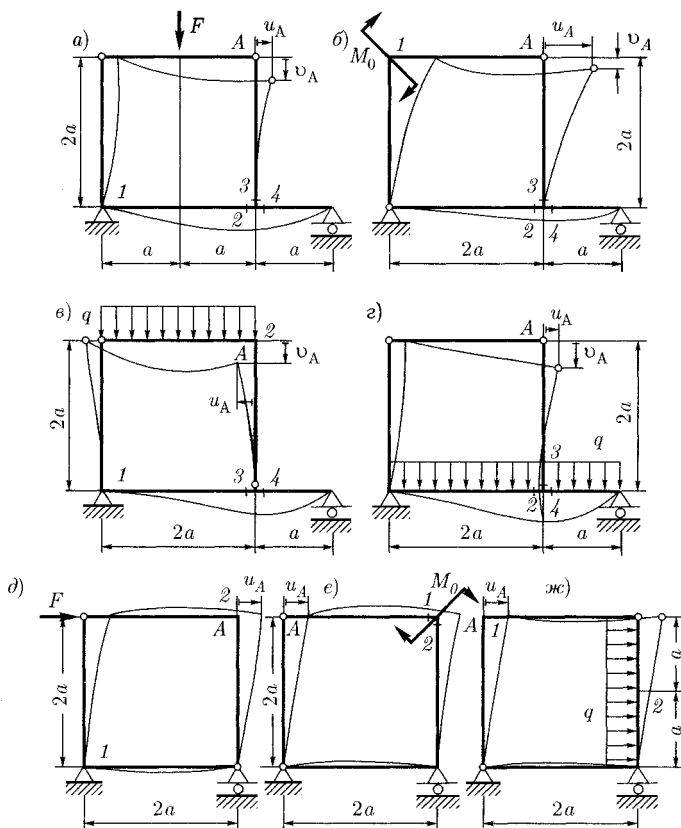
| Схема    | $R_A$                          |       | $ M _{max}$           | Сечение               | $\varphi_A$           | $\varphi_B$         | $f_A$           |
|----------|--------------------------------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------|
|          | кН                             | кН·м  | м                     | рад, $\times 10^{-3}$ | рад, $\times 10^{-3}$ | м, $\times 10^{-3}$ |                 |
| <i>a</i> | $\frac{15}{14} \frac{M_O}{a}$  | 15    | 28                    | $d = 0,31$            | 3,97                  | -1,76               | 3,53,<br>вправо |
| <i>б</i> | $\frac{27}{56} qa$             | 13,5  | 6,51                  | $c = 0,16$            | -7,93                 | 7,32                | 14,6,<br>влево  |
| <i>в</i> | $\frac{3}{20} F$               | 6     | 56                    | $b = 0,21$            | 4,93                  | -2,47               | 4,52,<br>вниз   |
| <i>г</i> | $\frac{4}{7} qa$               | 16    | 80                    | $d = 0,44$            | -0,58                 | 1,16                | 10,4,<br>влево  |
| Схема    | $R_A$                          |       | $ M _{max}$           | №<br>профиля          | $\varphi_A$           | $\varphi_C$         | $f_A = f_D$     |
|          | кН                             | кН·м  | рад, $\times 10^{-3}$ |                       | рад, $\times 10^{-3}$ | м, $\times 10^{-3}$ |                 |
| <i>д</i> | $\frac{67}{128} qa$            | 16,75 | 5,8                   | 10                    | 8,00                  |                     | 11,8,<br>влево  |
| <i>e</i> | $\frac{15}{32} qa$             | 15    | 7,2                   | 10                    | -6,70                 | -5,74               | 5,74,<br>влево  |
| <i>ж</i> | $-\frac{3}{8} F$               | 15    | 50                    | $20a$                 | -1,50                 | 2,99                | 6,99,<br>вправо |
| <i>з</i> | $-\frac{27}{32} \frac{M_O}{a}$ | -13,5 | 22                    | 18                    | -0,38                 | -5,03               | 0,52,<br>влево  |

Примечание.  $R_A$  – вертикальная составляющая реакции в шарнирной неподвижной опоре или реакция в шарнирной подвижной опоре.

Ответ к задаче 14.28

| Схема    | $N_B$                         |      | $ M _{\max}$         |      | Сечение<br>Двутавр<br>№ | $\Delta\varphi_B$     | $v_B$               |
|----------|-------------------------------|------|----------------------|------|-------------------------|-----------------------|---------------------|
|          |                               | кН   |                      | кНм  |                         | рад, $\times 10^{-3}$ | м, $\times 10^{-3}$ |
| <i>a</i> | $\frac{1}{4} F$               | 5    | $\frac{1}{2} Fa$     | 10   | 14                      | 21,9                  | -9,47               |
| <i>б</i> | $\frac{1}{2} \frac{M_0}{a}$   | 20   | $M_0$                | 40   | 22а                     | 10,8                  | -5,38               |
| <i>в</i> | $\frac{1}{4} qa$              | -2,5 | $\frac{1}{2} qa^2$   | 5    | 10                      | 17,4                  | -12,6               |
| Схема    | $Q_B$                         |      |                      |      |                         | $\varphi_B$           | $u_B$               |
|          |                               | кН   |                      |      |                         | рад, $\times 10^{-3}$ | м, $\times 10^{-3}$ |
| <i>г</i> | $\frac{21}{40} \frac{M_0}{a}$ | 21   | $\frac{1}{2} M_0$    | 20   | 18                      | -2,52                 | 1,75,<br>влево      |
| <i>д</i> | $\frac{27}{20} qa$            | 13,5 | $\frac{63}{20} qa^2$ | 31,5 | 20а                     | 0,55                  | 9,98,<br>вправо     |
| <i>е</i> | $\frac{3}{5} F$               | 12   | $\frac{7}{5} Fa$     | 28   | 20                      | 0,54                  | 10,7,<br>вправо     |

ты эпюры  $M$ , находящиеся с внешней стороны замкнутого контура или сверху от горизонтального участка рамы). При этом сечения стержней, сходящихся в одном узле (схемы *a* – *г*), считаются расположенными бесконечно близко к этому узлу.



К задаче 14.29

**14.30.** На симметричные рамы постоянной жесткости (рис. а – и) действуют нагрузки, обладающие осевой или центральной симметрией. Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры нормальной силы, поперечной силы и изгибающего момента. Вычислить перемещения, возникающие вследствие деформации рамы: вертикальное смещение сечения А, угол раскрытия и вертикальное смещение шарнира В (для схем а – в); углы поворота сечений А и В, горизонтальное перемещение сечения А (для схем г – е); изменение расстояний между сечениями А и В, С и D (для схем ж – и).

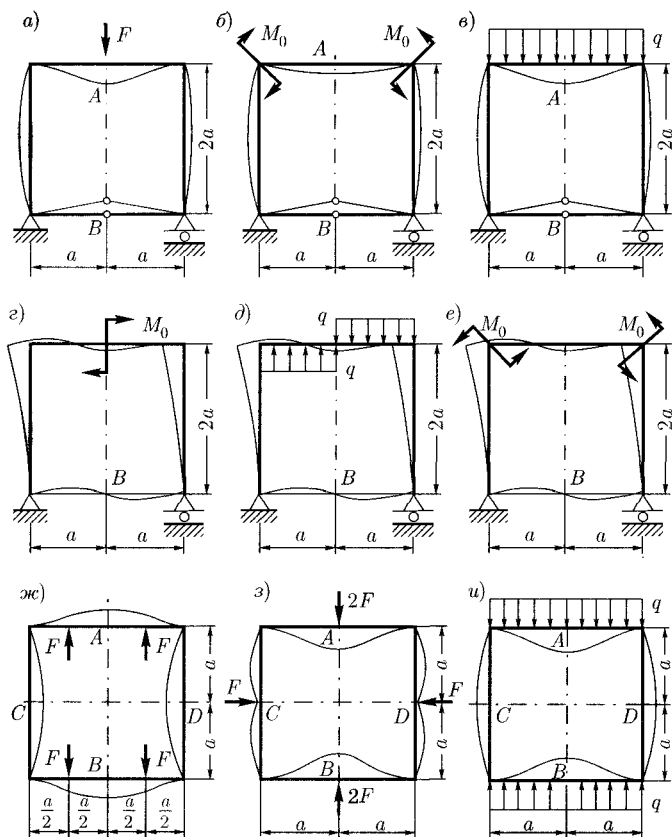
*Указание.* Рамы, изображенные на рис. а – в, дважды, а изображенные на рис. г – и – трижды внутренне статически неопределимы. Реакции закрепления для схем а – е могут быть найдены из уравнений равновесия. Для всех задач основной системой удобно считать раму, контур которой

Ответ к задаче 14.29

| Схема | $M_1$                | $M_2$                | $M_3$               | $M_4$              | $u_A$                              | $v_A$                             |
|-------|----------------------|----------------------|---------------------|--------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $a$   | $\frac{1}{10} Fa$    | $-\frac{7}{30} Fa$   | $\frac{1}{10} Fa$   | $\frac{1}{3} Fa$   | $\frac{17}{135} \frac{Fa^3}{EI}$   | $\frac{7}{45} \frac{Fa^3}{EI}$    |
| $b$   | $-\frac{1}{3} M_0$   | 0                    | $\frac{1}{3} M_0$   | $\frac{1}{3} M_0$  | $\frac{14}{27} \frac{M_0 a^2}{EI}$ | $\frac{2}{27} \frac{M_0 a^2}{EI}$ |
|       | $\frac{2}{3} M_0$    |                      |                     |                    |                                    |                                   |
| $c$   | $-\frac{5}{24} qa^2$ | $-\frac{5}{24} qa^2$ | $-\frac{2}{3} qa^2$ | $\frac{2}{3} qa^2$ | $\frac{53}{108} \frac{qa^4}{EI}$   | $\frac{43}{108} \frac{qa^4}{EI}$  |
| $d$   | $\frac{1}{2} qa^2$   | $-\frac{1}{2} qa^2$  | $\frac{1}{2} qa^2$  | $qa^2$             | $\frac{1}{4} \frac{qa^4}{EI}$      | $\frac{7}{12} \frac{qa^4}{EI}$    |
| $e$   | $-Fa$                | $-Fa$                | —                   | —                  | $\frac{8}{3} \frac{Fa^3}{EI}$      | 0                                 |
| $e$   | $-\frac{4}{5} M_0$   | $\frac{1}{5} M_0$    | $\frac{1}{5} M_0$   | —                  | $\frac{2}{3} \frac{M_0 a^2}{EI}$   | 0                                 |
| $ж$   | $\frac{7}{8} qa^2$   | $\frac{1}{16} qa^2$  | $\frac{9}{8} qa^2$  | —                  | $\frac{7}{3} \frac{qa^4}{EI}$      | 0                                 |

Ответ к задаче 14.30

| Схема | $N_B$                       | $Q_B$                         | $M_B$              | $v_A$                             | $\Delta\varphi_B$               | $v_B$                             |
|-------|-----------------------------|-------------------------------|--------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| $a$   | $\frac{3}{40} F$            | 0                             | 0                  | $\frac{11}{120} \frac{Fa^3}{EI}$  | $\frac{1}{2} \frac{Fa^2}{EI}$   | $\frac{1}{20} \frac{Fa^3}{EI}$    |
| $b$   | $-\frac{3}{10} \frac{M}{a}$ | 0                             | 0                  | $\frac{1}{5} \frac{M_0 a^2}{EI}$  | $\frac{2}{5} \frac{M_0 a}{EI}$  | $\frac{1}{5} \frac{M_0 a^2}{EI}$  |
| $c$   | $\frac{1}{10} qa$           | 0                             | 0                  | $\frac{13}{120} \frac{qa^4}{EI}$  | $\frac{2}{15} \frac{qa^3}{EI}$  | $\frac{1}{15} \frac{qa^4}{EI}$    |
|       |                             |                               |                    | $\varphi_A$                       | $\varphi_B$                     | $u_B$                             |
| $d$   | 0                           | $-\frac{1}{32} \frac{M_0}{a}$ | 0                  | $\frac{31}{192} \frac{M_0 a}{EI}$ | $\frac{1}{96} \frac{M_0 a}{EI}$ | $\frac{1}{12} \frac{M_0 a^2}{EI}$ |
| $e$   | 0                           | $-\frac{1}{64} qa$            | 0                  | $\frac{5}{128} \frac{qa^3}{EI}$   | $\frac{1}{384} \frac{qa^3}{EI}$ | $\frac{1}{24} \frac{qa^4}{EI}$    |
| $e$   | 0                           | $\frac{1}{8} \frac{M_0}{a}$   | 0                  | $\frac{7}{48} \frac{M_0 a}{EI}$   | $\frac{1}{48} \frac{M_0 a}{EI}$ | $\frac{1}{3} \frac{M_0 a^2}{EI}$  |
|       |                             |                               |                    | $\Delta v_{AB}$                   |                                 | $\Delta u_{AB}$                   |
| $ж$   | 0                           | 0                             | $\frac{5}{16} Fa$  | $\frac{13}{48} \frac{Fa^3}{EI}$   | $\frac{9}{16} \frac{Fa^3}{EI}$  |                                   |
| $з$   | $\frac{1}{2} F$             | $F$                           | $\frac{5}{8} Fa$   | $\frac{7}{24} \frac{Fa^3}{EI}$    | $\frac{1}{24} \frac{Fa^3}{EI}$  |                                   |
| $u$   | 0                           | 0                             | $\frac{1}{3} qa^2$ | $\frac{1}{4} \frac{qa^4}{EI}$     | $\frac{1}{6} \frac{qa^4}{EI}$   |                                   |



К задаче 14.30

разомкнут в сечении B. Одно из внутренних усилий в этом сечении ( $N_B$  для схем а—в,  $Q_B$  для схем г—е и  $M_B$  для схем ж—и) является лишней неизвестной. Остальные усилия могут быть найдены из условий симметрии (схемы а—е) или уравнений равновесия половины рамы (схемы ж—и). На рис. а—и также представлены изогнутые оси всех рам.

*Ответ:* на рис. а—и представлен примерный вид изогнутых осей всех рам, в соответствии с которым определяют направления найденных перемещений, абсолютные величины перемещений приведены в таблице на странице 279.

## УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

**15.1.** Стальная линейка длиной 1 м, шириной 25 мм и толщиной 2,5 мм изогнута в виде лука с максимальным упругим прогибом в 50 мм. Концы линейки связаны тетивой. Определить усилие в тетиве и наибольшее напряжение в стержне.

*Ответ:*  $F = F_{cr} = 64,3 \text{ Н}$ ;  $|\sigma|_{\max} \approx 125 \text{ МПа}$  (сжатие при прогибе 50 мм).

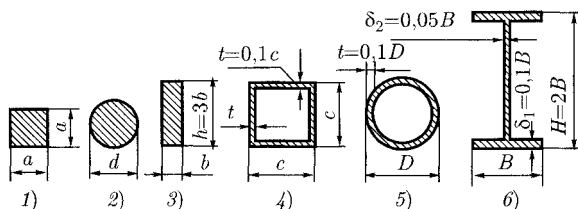
**15.2.** Определить наименьшую гибкость стержня  $\lambda_*$ , при которой еще применима формула Эйлера для вычисления критической силы, если стержень выполнен: а) из стали ( $\sigma_{pr} = 220 \text{ МПа}$ ,  $E = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ), б) из стали ( $\sigma_{pr} = 490 \text{ МПа}$ ,  $E = 2,15 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ), в) из дюралюминия ( $\sigma_{pr} = 177 \text{ МПа}$ ,  $E = 0,7 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ), г) из сосны ( $\sigma_{pr} = 16 \text{ МПа}$ ,  $E = 0,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ).

*Ответ:* а) 92,3; б) 65,8; в) 62,5; г) 78,6.

**15.3.** Сравнить по гибкости два стержня: квадратного и круглого поперечного сечения равной площади при одинаковых длинах, материалах и условиях закрепления.

*Ответ:* Гибкость второго на 2,3% больше.

**15.4.** Пользуясь формулой Эйлера, найти отношения критических сил для работающих в одинаковых условиях стоек, поперечные сечения которых, изображенные на рис., имеют одинаковые площади.



К задаче 15.4

*Ответ:*  $F_{cr1} : F_{cr2} : F_{cr3} : F_{cr4} : F_{cr5} : F_{cr6} = 1 : 0,955 : 0,333 : 4,56 : 4,35 : 2,38$ .

**15.5.** Определить допускаемое значение  $[F_{cr}]$  сжимающей силы  $F$  и допускаемое напряжение  $[\sigma_{cr}]$  для сжатой стойки двутаврового сечения № 27. Каждый из ее концов опирается на шаровой шарнир.

Длина стойки  $l = 4$  м. Материал – сталь с пределом пропорциональности  $\sigma_{pr} = 200$  МПа и модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Нормативный коэффициент запаса при расчете на устойчивость принять  $[s_{cr}] = 2$ .

*Решение.* Из сортамента выписываем для двутавра № 27:  $A = 40,2$  см<sup>2</sup>,  $I_{min} = I_y = 260$  см<sup>4</sup>,  $i_{min} = i_y = 2,54$  см. Далее вычисляем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = 1 \cdot 400 / 2,54 = 157,$$

а затем и предельную гибкость

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}} = 3,14 \sqrt{2 \cdot 10^{11} / 200 \cdot 10^6} = 99.$$

Так как условие

$$\lambda > \lambda_*$$

соблюдается, то применима формула Эйлера для вычисления критической силы:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu l)^2} = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 260 \cdot 10^{-8} / (1 \cdot 4)^2 = 320800 \text{ Н} \approx 321 \text{ кН}.$$

После этого определяем допускаемое значение сжимающей силы

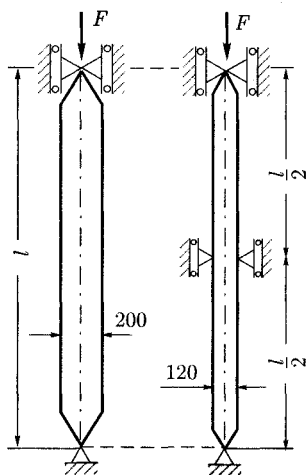
$$[F_{cr}] = \frac{F_{cr}}{[s_{cr}]} = 321 / 2 = 160,5 \text{ кН},$$

критическое напряжение

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = 321000 / (40,2 \cdot 10^{-4}) \approx \approx 80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80 \text{ МПа}$$

и допускаемое напряжение при расчетах на устойчивость

$$[\sigma_{cr}] = \frac{[\sigma_{cr}]}{A} = 160500 / (40,2 \cdot 10^{-4}) \approx \approx 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа}.$$



К задаче 15.6

**15.6.** Деревянная стойка ( $\sigma_{pr} = 15$  МПа,  $E = 0,09 \cdot 10^{11}$  Па) прямоугольного сечения  $120 \times 200$  мм, длиной  $l = 6$  м имеет закрепления, показанные в двух проекциях на рис.

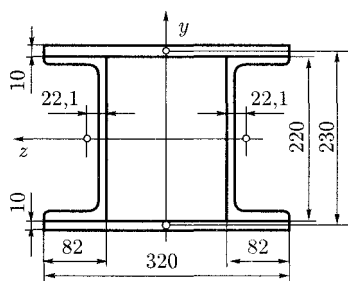
Определить значения допускаемой сжимающей силы и допускаемого напряжения при расчетах на устойчивость, принимая нормативный коэффициент запаса при расчетах на устойчивость  $[s_{cr}] = 3$ .

*Ответ:*  $[F_{cr}] = 65,8$  кН,  $[\sigma_{cr}] = 2,7$  МПа.

**15.7.** Двутавр № 24 длиной  $l = 5$  м зашцеилен обоими концами в стены при температуре  $T_1 = 15^\circ \text{C}$ . При какой температуре двутавр начнет терять устойчивость, если стены считать: а) абсолютно жесткими, б) податливыми с коэффициентом податливости каждой стены  $\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$  мм/Н ?

*Ответ:*  $T_a = 87^\circ \text{C}$ ,  $T_b = 127^\circ \text{C}$ .

**15.8.** Шестиметровая стальная стойка, склепанная из двух швеллеров № 22 и двух листов  $320 \times 10$  мм, (см. рис.), шарнирно опирается по концам. Определить допускаемую нагрузку, пользуясь таблицей коэффициента  $\varphi$  снижения основного допускаемого напряжения в зависимости от гибкости  $\lambda$  стержня и от предела текучести  $\sigma_y$ , см. табл. 15.1. Принять для материала швеллеров и листов  $\sigma_y = 280$  МПа, а также нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,75$ .



К задаче 15.8

**15.1.** Принять для материала швеллеров и листов  $\sigma_y = 280$  МПа, а также нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,75$ .

*Решение.* Так как для одного швеллера № 22 имеем  $A = 26,7 \text{ см}^2$ ,  $I_z = 2110 \text{ см}^4$ ,  $I_y = 151 \text{ см}^4$ , то для всего сечения получаем

$$A = 2(26,7 + 32 \cdot 1) = 117,4 \text{ см}^2,$$

$$I_z = 2(2110 + 32 \cdot 1^3/12 + 32 \cdot 1 \cdot 11,5^2) = 12690 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2(151 + 26,7 \cdot (16 - 8,2 + 2,21)^2 + 1 \cdot 32^3/12) = 11110 \text{ см}^4.$$

В данном случае  $I_y < I_z$ , поэтому минимальный радиус инерции сечения стойки вычисляется так:

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{11110/117,4} = 9,73 \text{ см}.$$

Далее вычисляем гибкость стержня

$$\lambda_{\min} = \frac{\mu l}{i_{\min}} = 1 \cdot 600/9,73 = 61,7,$$

что позволяет с помощью табл. 15.1 отыскать коэффициент снижения основного допускаемого напряжения:

$$\varphi = 0,775.$$

Отметим, что определение коэффициента  $\varphi$  по табл. 15.1 осуществлено с применением линейной интерполяции.

Основное допускаемое напряжение по определению назначается следующим образом:

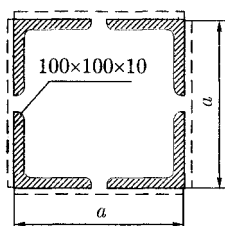
$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{[s]} = 280/1,75 = 160 \text{ МПа},$$

после чего нетрудно найти допускаемое напряжение при расчетах на устойчивость

$$[\sigma_{cr}] = \varphi[\sigma] = 0,775 \cdot 160 = 124 \text{ МПа},$$

а также допускаемое сжимающее усилие

$$[F] = [\sigma_{cr}] \cdot A = 124 \cdot 10^6 \cdot 117,4 \cdot 10^{-4} = 1,456 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1456 \text{ кН}.$$



К задаче 15.9

**15.9.** Основу стальной сварной решетчатой стойки составляют четыре уголка  $100 \times 100 \times 10$  мм, см. рис. Оба конца стойки шарнирно закреплены, ее длина 6 м, она сжата силой  $F$ . Материал — сталь ( $\sigma_y = 280$  МПа). С помощью таблицы коэффициента снижения допускаемого напряжения  $\varphi$  определить допускаемое значение силы  $F$  для трех вариантов:  $a = 200$  мм,  $a = 240$  мм,  $a = 300$  мм. Принять  $[s] = 1,75$ .

*Указание.* При вычислении момента инерции поперечного сечения стойки считать уголки жестко соединенными между собой. В этих вычислениях учитывать лишь сечения уголков. Увеличение гибкости стойки за счет соединения уголков не вполне жесткой решеткой не принимать во внимание.

*Ответ:* 820 кН; 950 кН; 1040 кН.

**15.10.** Стойка длиной  $l = 2$  м, заделанная с одного конца и шарнирно закрепленная на другом, сжимается силой  $F = 400$  кН. Стойка проектируется в виде стальной трубы с отношением внутреннего диаметра к наружному  $\beta = d_*/d = 0,9$ . Предел текучести материала трубы  $\sigma_y = 280$  МПа, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,75$ . Подобрать размеры поперечного сечения стойки с помощью таблицы коэффициента снижения допускаемого напряжения  $\varphi$ .

*Решение.* Ввиду того, что нелинейная зависимость  $\varphi = \varphi(\lambda)$  задается таблично, указанный подбор сечения осуществляется методом последовательных приближений, когда в ходе расчетов находятся последовательности очередных значений коэффициента  $\varphi_i$  и диаметра  $d_i$ , сходящиеся к своим оптимальным значениям. Первое приближение производится по



одному из двух вариантов. В первом подбор производят с помощью формулы Эйлера, во втором – задаваясь произвольным значением коэффициента  $\varphi$ , например,  $\varphi_1 = 0,5$ .

По формуле Эйлера имеем для допускаемой нагрузки

$$[F] = \frac{F_{\text{cr}}}{[s]} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 [s]}.$$

Отсюда находим требуемое значение момента инерции

$$I_{\min} = \frac{(\mu l)^2 [s] [F]}{\pi^2 E} = (0,7 \cdot 2)^2 \cdot 1,75 \cdot 400000 / (3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}) = 69,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Так как для трубы

$$I = \frac{1}{4} \pi R^4 (1 - \beta^4),$$

то нетрудно найти наружный радиус трубы в первом приближении

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt[4]{\frac{4I}{\pi(1-\beta^4)}} = \sqrt[4]{4 \cdot 69,5 \cdot 10^{-8} / (3,14 \cdot (1 - 0,9^4))} = \\ &= 0,04 \text{ м} = 40 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Далее надлежит проверить полученный результат, привлекая понятие коэффициента снижения  $\varphi$ . Для этого необходимо вычислить радиус инерции сечения

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \frac{R}{2} \sqrt{(1 + \beta^2)} = \frac{R}{2} \sqrt{(1 + 0,9^2)} = \\ &= 0,673R = 0,673 \cdot 0,04 = 0,027 \text{ м} \end{aligned}$$

и гибкость

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_1} = 0,7 \cdot 2 / 0,027 = 52.$$

С помощью табл. 15.1 находим для  $\lambda_1 = 52$  (с использованием линейной интерполяции):

$$\varphi_1 = 0,826.$$

В нашем случае основное допускаемое напряжение составляет

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{[s]} = 280 / 1,75 = 160 \text{ МПа},$$

поэтому имеем для допускаемого напряжения при расчете на устойчивость в первом приближении

$$[\sigma_{\text{cr}}]_1 = \varphi_1 [\sigma] = 0,826 \cdot 160 = 132 \text{ МПа}.$$

По полученному в первом приближении значению  $R_1 = 0,04$  м вычисляем соответствующую площадь сечения

$$A_1 = \pi R_1^2 (1 - \beta^2) = 3,14 \cdot 0,04^2 \cdot (1 - 0,9^2) = 955 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

Таблица 15.1

Коэффициенты  $\varphi$  снижения основного допускаемого напряжения (коэффициенты продольного изгиба) (увеличено в 1000 раз) в зависимости от гибкости  $\lambda$  центрально сжатого стержня и от предела текучести  $\sigma_y$

| Гибкость,<br>$\lambda$ | Предел текучести $\sigma_y$ , МПа |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------------------|-----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                        | 200                               | 240 | 280 | 320 | 360 | 400 | 440 | 480 | 520 | 560 | 600 | 640 |
| 10                     | 988                               | 987 | 985 | 984 | 983 | 982 | 981 | 980 | 979 | 978 | 977 | 977 |
| 20                     | 967                               | 962 | 959 | 955 | 952 | 949 | 946 | 943 | 941 | 938 | 936 | 934 |
| 30                     | 939                               | 931 | 924 | 917 | 911 | 905 | 900 | 895 | 891 | 887 | 883 | 879 |
| 40                     | 906                               | 894 | 883 | 873 | 863 | 854 | 846 | 849 | 832 | 825 | 820 | 814 |
| 50                     | 869                               | 852 | 836 | 822 | 809 | 796 | 785 | 775 | 764 | 746 | 729 | 712 |
| 60                     | 827                               | 805 | 785 | 766 | 749 | 721 | 696 | 672 | 650 | 628 | 608 | 588 |
| 70                     | 782                               | 754 | 724 | 687 | 654 | 623 | 595 | 568 | 542 | 518 | 494 | 470 |
| 80                     | 734                               | 686 | 641 | 602 | 566 | 532 | 501 | 471 | 442 | 414 | 386 | 359 |
| 90                     | 665                               | 612 | 565 | 522 | 483 | 447 | 413 | 380 | 349 | 326 | 305 | 287 |
| 100                    | 599                               | 542 | 493 | 448 | 408 | 369 | 335 | 309 | 286 | 267 | 250 | 235 |
| 110                    | 537                               | 478 | 427 | 381 | 338 | 306 | 280 | 258 | 239 | 223 | 209 | 197 |
| 120                    | 479                               | 419 | 366 | 321 | 287 | 260 | 237 | 219 | 203 | 190 | 178 | 167 |
| 130                    | 425                               | 364 | 313 | 276 | 247 | 223 | 204 | 189 | 175 | 163 | 153 | 145 |
| 140                    | 376                               | 315 | 272 | 240 | 215 | 195 | 178 | 164 | 153 | 143 | 134 | 126 |
| 150                    | 328                               | 276 | 239 | 211 | 189 | 171 | 157 | 145 | 134 | 126 | 118 | 111 |
| 160                    | 290                               | 244 | 212 | 187 | 167 | 152 | 139 | 129 | 120 | 112 | 105 | 099 |
| 170                    | 259                               | 218 | 189 | 167 | 150 | 136 | 125 | 115 | 107 | 100 | 094 | 089 |
| 180                    | 233                               | 196 | 170 | 150 | 135 | 123 | 112 | 104 | 097 | 091 | 085 | 081 |
| 190                    | 210                               | 177 | 154 | 136 | 122 | 111 | 102 | 094 | 088 | 082 | 077 | 073 |
| 200                    | 191                               | 161 | 140 | 124 | 111 | 101 | 093 | 086 | 080 | 075 | 071 | 067 |
| 210                    | 174                               | 147 | 128 | 113 | 102 | 093 | 085 | 079 | 074 | 069 | 065 | 062 |
| 220                    | 160                               | 135 | 118 | 104 | 094 | 086 | 077 | 073 | 068 | 064 | 060 | 057 |

а затем и напряжение

$$\sigma_{(1)} = \frac{[F]}{A_1} = 400000/(955 \cdot 10^{-6}) = 419 \cdot 10^6 \text{ Па} = 419 \text{ МПа.}$$

Негрудно видеть, что напряжение  $\sigma_{(1)}$  превышает допускаемое напряжение  $[\sigma_{\text{cr}}]_1$  в  $k_1 = 419/132 = 3,17$  раза. Таким образом, найденные в первом приближении размеры стойки явно недостаточны. Во втором приближении увеличиваем радиус  $R_1$  в  $\sqrt{k_1} = \sqrt{3,17} = 1,78$  раза, т.е. до

$$R_2 = 0,04 \cdot 1,78 = 0,071 \text{ м.}$$

В этом случае можно найти:

$$i_2 = 0,673 \cdot 0,071 = 0,048 \text{ м,}$$

$$\lambda_2 = 0,7 \cdot 2/0,048 = 29,$$

$$\varphi_2 = 0,926,$$

$$[\sigma_{\text{cr}}]_2 = 0,926 \cdot 160 = 148 \text{ МПа,}$$

$$A_2 = 3,14 \cdot 0,071^2 \cdot (1 - 0,9^2) = 3000 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$\sigma_{(2)} = 400000/3000 \cdot 10^{-6} = 133 \cdot 10^6 \text{ Па} = 133 \text{ МПа.}$$

Следовательно, во втором приближении получили недогрузку стойки в  $1/k_2 = 148/133 = 1,11$ , что в отдельных случаях считается избыточным.

В третьем приближении уменьшим радиус  $R_2$  в  $\sqrt{1/k_2} = \sqrt{1,11} = 1,05$  раза, т.е. до

$$R_3 = 0,071/1,05 = 0,067 \text{ м.}$$

Далее еще раз повторяем весь цикл вычислений:

$$i_3 = 0,673 \cdot 0,067 = 0,045 \text{ м,}$$

$$\lambda_3 = 0,7 \cdot 2/0,045 = 31,$$

$$\varphi_3 = 0,919,$$

$$[\sigma_{\text{cr}}]_3 = 0,919 \cdot 160 = 147 \text{ МПа,}$$

$$A_3 = 3,14 \cdot 0,067^2 \cdot (1 - 0,9^2) = 2680 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$\sigma_{(3)} = 400000/(2680 \cdot 10^{-6}) = 149 \cdot 10^6 \text{ Па} = 149 \text{ МПа.}$$

В третьем приближении получили перегрузку стойки до 1,3%, что в инженерных расчетах считается приемлемым.

Таким образом, окончательный ответ на поставленный в задаче вопрос будет следующим:

- наружный диаметр трубы  $d = 2R_3 = 134 \text{ мм,}$
- внутренний диаметр трубы  $d_* = 0,9d = 120,6 \text{ мм.}$

Как видим, вычислительный процесс быстро сходится: потребовалось всего три приближения. Читатель может убедиться самостоятельно, что

темп сходимости вычислительного процесса практически не изменится, если выбрать второй вариант первого приближения.

**15.11.** Деревянная стойка длиной  $l = 3$  м, заделанная с обоих концов, имеет квадратное сечение со стороной  $a$ . Допускаемое напряжение принять  $[\sigma] = 10$  МПа. Определить значение допускаемой сжимающей силы для трех вариантов:  $a = 200$  мм,  $a = 300$  мм,  $a = 400$  мм. Расчет вести с использованием таблицы 15.2 для коэффициента  $\varphi$  снижения основного допускаемого напряжения в зависимости от гибкости  $\lambda$ .

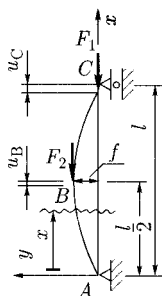
*Ответ:* 111 кН, 557 кН, 1254 кН.

Таблица 15.2

Коэффициенты  $\varphi$  снижения основного допускаемого напряжения (коэффициенты продольного изгиба) в зависимости от гибкости  $\lambda$  центрально сжатого стержня, выполненного из древесины  
(Увеличено в 1000 раз)

| $\lambda$ | $\varphi$ | $\lambda$ | $\varphi$ | $\lambda$ | $\varphi$ | $\lambda$ | $\varphi$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 10        | 992       | 50        | 800       | 90        | 370       | 130       | 177       |
| 20        | 968       | 60        | 712       | 100       | 300       | 140       | 153       |
| 30        | 928       | 70        | 608       | 110       | 248       | 150       | 133       |
| 40        | 872       | 80        | 469       | 120       | 208       | 160       | 117       |

*Примечание.* Таблица 15.2 соответствует зависимостям  $\varphi = 1 - 0,8(\lambda/100)^2$  при  $\lambda \leq 70$  и  $\varphi = 3000/\lambda^2$  при  $\lambda > 70$ , принятым в Строительных нормах и правилах.



**15.12.** Стержень длины  $l$ , постоянного сечения, шарнирно закрепленный по концам, нагружен двумя продольными сжимающими усилиями  $F_1$  и  $F_2$ , см. рис. Определить критическое значение общей нагрузки  $F_{cr} = (F_1 + F_2)_{cr}$ .

*Решение.* Воспользуемся процедурой энергетического метода. Напоминаем, что в момент потери устойчивости стержень слегка изгибается, в нем накапливается потенциальная энергия упругой деформации

К задаче 15.12

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M_{изг}^2 dx}{2EI}. \quad (1)$$

Так как

$$EIv'' = M_{\text{изг}},$$

то соотношение (1) можно переписать так:

$$\Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^l (v'')^2 dx. \quad (2)$$

Одновременно в изгибаемом стержне точки  $B$  и  $C$  слегка приближаются к точке  $A$ , см. перемещения  $u_B$  и  $u_C$  на рис. В результате силы  $F_1$  и  $F_2$  совершают работу. Приращение полной работы подсчитываем путем суммирования работ, совершаемых силами  $F_1$  и  $F_2$  порознь:

$$\Delta W = \frac{F_1}{2} \int_0^l (v')^2 dx + \frac{F_2}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} (v')^2 dx. \quad (3)$$

В докритическом режиме имеем

$$\Delta W < \Delta U,$$

в закритическом –

$$\Delta W > \Delta U,$$

в момент потери устойчивости (в предельном состоянии) –

$$\Delta W = \Delta U. \quad (4)$$

Подстановка выражений (2) и (3) в (4) позволяет получить уравнение, из которого далее можно найти искомую формулу для критической силы  $F_{\text{кр}}$ .

Однако для совершения всех этих выкладок нужно иметь уравнение изогнутой оси стержня. В первом приближении будем считать, что стержень теряет устойчивость по полуволне синусоиды:

$$v = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (5)$$

где  $f$  – максимальный прогиб в середине, см. рис. Выражение (5) удовлетворяет условиям закрепления

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0.$$

Вычислим производные

$$v' = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

$$v'' = -\frac{\pi^2 f}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7)$$

Подставим полученные выражения в (2) и (3) и проинтегрируем. Найдем

$$\Delta U = \frac{\pi^4 f^2 EI}{4l^3}, \quad (8)$$

$$\Delta W = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \left( F_1 + \frac{F_2}{2} \right). \quad (9)$$

Введем безразмерный параметр

$$m = \frac{F_1 + F_2}{F_1}, \quad (10)$$

с помощью которого выражение (9) может быть записано двумя способами:

$$\Delta W = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot F_1, \quad (11)$$

$$\Delta W = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \cdot \frac{m+1}{2(m-1)} \cdot F_2. \quad (12)$$

Подставляя (8) и (11), а затем (8) и (12) в условие (4), находим

$$(F_1)_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{2}{m+1}, \quad (13)$$

$$(F_2)_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{2(m-1)}{m+1}. \quad (14)$$

Далее находим общую нагрузку на стержень

$$F_{\text{cr}} = (F_1 + F_2)_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{2m}{m+1}. \quad (15)$$

С введением коэффициента приведения (коэффициента длины)

$$\mu = \sqrt{\frac{m+1}{2m}} \quad (16)$$

формула (5) приобретает привычный вид:

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (17)$$

**15.13.** Стержень длины  $l$  и постоянного сечения, заделанный обоими концами, нагружен двумя продольными сжимающими силами  $F_1$  и  $F_2$ , см. рис. Определить критическое значение общей нагрузки  $F_{\text{cr}} = (F_1 + F_2)_{\text{cr}}$ .

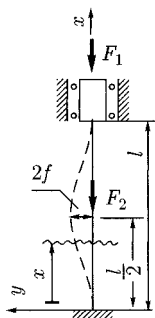
*Указание.* Задача решается по аналогии с задачей 15.12. Предполагаем, что стержень теряет устойчивость по полной волне синусоиды (см. рис.):

$$v = f \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

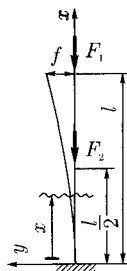
Это уравнение удовлетворяет условиям закрепления:

$$v|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=l} = 0, \quad v|_{x=l} = 0.$$

Ответ:  $F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ , где  $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m+1}{2m}}$ ,  $m = \frac{F_1 + F_2}{F_1}$ .



К задаче 15.13



К задаче 15.14

**15.14.** Стержень длины  $l$  и постоянного сечения, заделанный одним концом и имеющий другой конец свободным, нагружен двумя продольными сжимающими силами  $F_1$  и  $F_2$ , см. рис. Определить критическое значение общей нагрузки  $F_{\text{cr}} = (F_1 + F_2)_{\text{cr}}$ .

*Указание.* Задача решается по аналогии с задачей 15.12. Предполагаем, что стержень теряет устойчивость по четверти волны синусоиды (см. рис.):

$$v = f \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Это уравнение удовлетворяет граничным условиям:

$$v|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=l} = f, \quad v''|_{x=l} = 0.$$

Последнее из этих условий означает равенство нулю изгибающего момента.

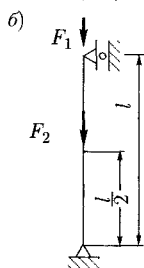
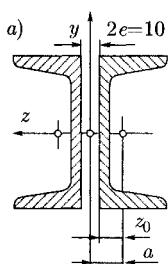
Ответ:  $F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ , где  $\mu = 2 \sqrt{\frac{1,1817 - 0,1817m}{m}}$ ,  
 $m = \frac{F_1 + F_2}{F_1}$ .

**15.15.** Деревянная стойка длиной  $l = 7$  м имеет круглое поперечное сечение диаметром  $d = 0,2$  м. Стойка нагружена двумя продольными силами  $F_1 = \frac{1}{3}F$  и  $F_2 = \frac{2}{3}F$ . Первая приложена к верхнему концу, вторая – в середине длины стойки. Найти допускаемое значение нагрузки  $F = F_1 + F_2$ , если нормативный коэффициент запаса при расчете на устойчивость принять  $[s_{cr}] = 3$ . Рассмотреть три случая:

- концы стержня закреплены шарнирно,
- концы стержня жестко защемлены,
- верхний конец стержня свободен, нижний жестко защемлен.

*Указание.* Воспользоваться результатами решения задач 15.12, 15.13 и 15.14.

*Ответ:* 79,1 кН; 316,4 кН; 62,1 кН.



**15.16.** Стальная колонна составлена из двух швеллеров, см. рис. а. Колонна шарнирно закреплена концами и имеет длину  $l = 4,5$  м. Колонна нагружена двумя продольными сжимающими силами  $F_1 = 120$  кН,  $F_2 = 80$  кН. Первая приложена к верхнему концу колонны, вторая – посередине длины, см. рис. б. Подобрать сечение колонны при основном допускаемом напряжении  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Решение.* Здесь используем расчетную схему из задачи 15.12. По найденным там формулам вычислим безразмерный коэффициент

$$m = \frac{F_1 + F_2}{F_1} = (120 + 80)/120 = 1,67,$$

а затем и коэффициент приведения

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m+1}{2m}} = \sqrt{(1,67+1)/(2 \cdot 1,67)} = 0,894.$$

К задаче 15.16

Далее формулу (17) запишем не для предельного, а для допускаемого состояния:

$$[F] = \frac{F_{cr}}{[s_{cr}]} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 [s_{cr}]} \quad (1)$$

В данном случае

$$[F] = F_1 + F_2 = 120 + 80 = 200 \text{ кН.}$$



При оценочных расчетах стальных конструкций можно принять

$$[s_{cr}] = 2.$$

С учетом этого вычислим требуемый момент инерции сечения колонны

$$\begin{aligned} I &= \frac{[F] \cdot (\mu l)^2 \cdot [s_{cr}]}{\pi^2 E} = \\ &= 200000 \cdot (0,894 \cdot 4,5)^2 \cdot 2 / (3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}) = \\ &= 82 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 82 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Проверим в первом приближении сечение колонны из двух швеллеров № 8. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} I_z &= 2I_z^{\text{соб}} = 2 \cdot 89,4 = 198,8 \text{ см}^4, \\ I_y &= 2(I_y^{\text{соб}} + a^2 A) = 2(12,8 + 1,81^2 \cdot 8,98) = 84,4 \text{ см}^4, \\ i_{\min} &= i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{84,4 / (2 \cdot 8,98)} = 2,17 \text{ см}, \\ \lambda_{\min} &= \frac{\mu l}{i_{\min}} = 0,894 \cdot 450 / 2,17 = 185, \\ \varphi &= 0,143 \text{ (см. табл. 15.1, } \sigma_y = 320 \text{ МПа)}, \\ [\sigma_{cr}] &= \varphi[\sigma] = 0,143 \cdot 160 = 22,9 \text{ МПа}, \\ \sigma &= \frac{[F]}{A} = 200000 / (2 \cdot 8,98 \cdot 10^{-4}) = \\ &= 111 \cdot 10^6 \text{ Па} = 111 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

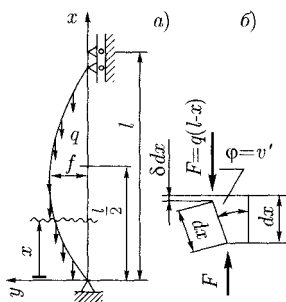
Таким образом, условие прочности  $\sigma \leq [\sigma_{cr}]$  не соблюдается. Надлежит принять швеллер более высокого номера. Проверим № 18а. Находим

$$\begin{aligned} I_z &= 2 \cdot 1190 = 2380 \text{ см}^4, \\ I_y &= 2(105 + 2,63^2 \cdot 22,2) = 517 \text{ см}^4, \\ i_{\min} &= i_y = \sqrt{517 / (2 \cdot 22,2)} = 3,41 \text{ см}, \\ \lambda_{\min} &= 0,894 \cdot 450 / 3,41 = 118, \varphi = 0,309, \\ [\sigma_{cr}] &= 0,309 \cdot 160 = 49,4 \text{ МПа}, \\ \sigma &= 200000 / (2 \cdot 22,2 \cdot 10^{-4}) = 45 \cdot 10^6 \text{ Па} = 45 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Следовательно, для колонны, составленной из двух швеллеров № 18а, условие прочности  $\sigma \leq [\sigma_{cr}]$  соблюдается.

**15.17.** Длинный, вертикально поставленный стержень постоянного сечения нагружен собственным весом интенсивности  $q = \text{const}$ . Полная нагрузка составляет в данном случае  $F = ql$ , где  $l$  – длина стержня, см. рис. а. Стержень закреплен по концам в шарнирных опорах. С увеличением длины  $l$  может наступить момент, когда

стержень потеряет устойчивость под действием собственного веса. Найти условие, отвечающее этому предельному состоянию.



К задаче 15.17

*Решение.* Вслед за задачей 15.12 примем, что стержень в момент потери устойчивости изгибается по полуволне синусоиды:

$$v = f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (1)$$

Поэтому будем иметь такое же, как и там, выражение для приращения потенциальной энергии упругой деформации:

$$\Delta U = \frac{\pi^2 f^2 EI}{4l^3}. \quad (2)$$

Приращение работы внешних сил будем определять заново. Дело в том, что элементарную работу следует здесь записывать для бесконечно короткого участка  $dx$  стержня, см. рис. а. На рис. б показано положение участка  $dx$  до и после изгиба стержня в момент потери устойчивости. Этот участок повернется на угол  $\varphi = v'$ . В результате проекция повернутого участка на вертикальную ось  $x$  станет короче отрезка  $dx$  на  $\delta dx = \frac{1}{2}(v')^2 dx$ . На этом перемещении и будет работать постоянная сила  $F = q(l-x)$ , т.е. вес той части стержня, которая расположена выше сечения с координатой  $x$ . В итоге для элементарной работы имеем

$$dW = F \cdot \delta dx = \frac{1}{2} q(l-x)(v')^2 dx. \quad (3)$$

Приращение работы внешних сил на всей длине стержня найдется интегрированием выражения (3):

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^l q(l-x)(v')^2 dx. \quad (4)$$

Подставим (1) в (4) и проинтегрируем. Найдем

$$\Delta W = \frac{\pi^2 f^2 q}{8}. \quad (5)$$

Так как для критического состояния имеем

$$\Delta U = \Delta W,$$

то, приравнявая (2) и (5), получаем

$$\frac{\pi^4 f^2 EI}{4l^3} = \frac{\pi^2 f^2 q_{\text{кр}}}{8},$$

откуда

$$F_{cr} = (ql)_{cr} = 2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (6)$$

Если теперь ввести коэффициент приведения

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707, \quad (7)$$

то формула (6) приобретает обычный вид

$$F_{cr} = (ql)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (8)$$

**15.18.** Найти условие, отвечающее предельному состоянию потери устойчивости от сил собственного веса для стержня постоянного сечения, защемленного с обоих концов.

*Указание.* Действовать по аналогии с решением задач 15.12, 15.13 и 15.17.

*Ответ:*  $(ql)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}; \mu = 0,354.$

**15.19.** Найти условие, отвечающее предельному состоянию потери устойчивости от сил собственного веса для стержня постоянного сечения, защемленного с нижнего конца и со свободным верхним.

*Указание.* Действовать по аналогии с решением задач 15.12, 15.14 и 15.17.

*Ответ:*  $(ql)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}; \mu = 1,09.$

**15.20.** Стержень квадратного сечения со стороной  $a = 50$  мм поставлен вертикально. Определить критическую длину  $l_{cr}$  такого стержня для трех случаев закрепления его концов:

- оба конца закреплены в шарнирных опорах,
- оба конца жестко защемлены,
- нижний конец жестко защемлен, верхний свободен.

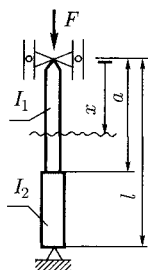
Решить задачу для стальной и деревянной стойки. Плотность стали и древесины принять  $\rho_c = 7800 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_d = 500 \text{ кг/м}^3$ .

*Указание.* Воспользоваться результатами решения задач 15.17, 15.18 и 15.19.

Ответ:

| Материал | $q = A\rho g, \text{Н/м}$ | $l_{\text{cr}} = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 EI}{q\mu^2}}, \text{ м}$ |      |      |
|----------|---------------------------|----------------------------------------------------------------|------|------|
|          |                           | а                                                              | б    | в    |
| Сталь    | 191,3                     | 22,1                                                           | 34,7 | 16,5 |
| Дерево   | 12,26                     | 20,3                                                           | 32,2 | 15,2 |

**15.21.** Найти выражение для критической сжимающей силы  $F_{\text{cr}}$ , при которой теряет устойчивость стержень переменного сечения, шарнирно опирающийся по концам. На длине  $a$  стержень имеет момент инерции  $I_1 = \text{const}$ , на длине  $(l - a)$  —  $I_2 = \text{const}$ , см. рис.



К задаче 15.21

*Решение.* Будем действовать по плану, использованному в задаче 15.12. Примем, что в момент потери устойчивости стержень изгибается по полуволне синусоиды:

$$v = f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (1)$$

Приращение работы внешней силы  $F$  при изгибе стержня определяется так:

$$\Delta W = \frac{F_{\text{cr}}}{2} \int_0^l (v')^2 dx. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и интегрируя, получаем

$$\Delta W = \frac{\pi^2 f^2 F_{\text{cr}}}{4l}. \quad (3)$$

Приращение потенциальной энергии упругой деформации изгибаемого стержня следует искать следующим образом:

$$\Delta U = \frac{E}{2} \left( I_1 \int_0^a (v'')^2 dx + I_2 \int_a^l (v'')^2 dx \right)$$

или

$$\Delta U = \frac{EI_2}{2} \left( n \int_0^a (v'')^2 dx + \int_a^l (v'')^2 dx \right), \quad (4)$$

где

$$n = \frac{I_1}{I_2}. \quad (5)$$

Подставим (1) в (4). Проинтегрируем и найдем

$$\Delta U = \frac{\pi^4 f^2 EI_2}{4l^3} \left( 1 + (n-1) \left( \frac{a}{l} - 0,159 \sin \frac{2\pi a}{l} \right) \right). \quad (6)$$

Для момента потери устойчивости имеем

$$\Delta W = \Delta U, \quad (7)$$

откуда с учетом (3) и (6) можно получить

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu l)^2}, \quad (8)$$

где

$$\mu = \left( 1 + (n-1) \left( \frac{a}{l} - 0,159 \sin \frac{2\pi a}{l} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

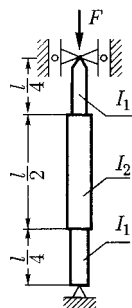
**15.22.** Для стержня, расчетная схема которого изображена на рис., найти выражение для критической силы.

*Указание.* Следует принять в первом приближении, что при  $F = F_{cr}$  стержень принимает форму полуволны синусоиды. Ввиду симметрии следует величину  $\Delta U$  определять интегрированием по половине общей длины стержня с последующим удвоением результата.

Ответ:  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu l)^2},$

$$\mu = (0,818 + 0,182n)^{-\frac{1}{2}},$$

$$n = \frac{I_1}{I_2}.$$



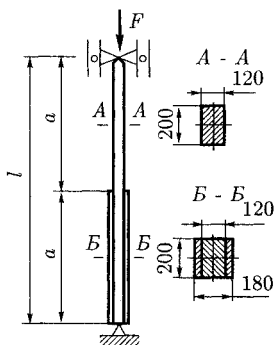
К задаче 15.22

**15.23.** Деревянная стойка прямоугольного сечения  $120 \times 200$  мм длиной  $l = 3,5$  м опирается концами на шарнирные опоры. Стойка усилена двумя досками  $30 \times 200$  мм в нижней своей половине, см. рис. Стойка сжата силой  $F = 100$  кН. Проверить условие прочности  $F \leq [F]$ , принимая нормативный коэффициент запаса  $[s_{cr}] = 3$  и модуль упругости  $E = 0,09 \cdot 10^{11}$  Па.

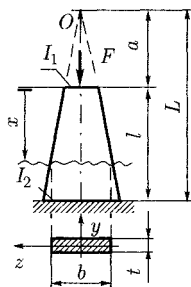
*Указание.* Использовать решение задачи 15.21, считая  $a = l/2$ .

Ответ:  $F_{cr} = 306$  кН,  $[F] = 102$  кН; таким образом, условие прочности выполняется.

**15.24.** Стержень заделан одним концом, а к свободному концу приложена сжимающая сила. Стержень имеет переменное сечение от  $I_1$  сверху до  $I_2$  снизу, причем высота сечения  $t = \text{const}$ , а ширина



К задаче 15.23



К задаче 15.24

$b$  меняется пропорционально расстоянию  $x + a$  от некоторой точки  $O$  на оси  $x$ , см. рис. Найти критическую силу.

*Решение.* Обозначим ширину сечения стержня сверху и снизу через  $b_1$  и  $b_2$ . Нетрудно видеть, что в рассматриваемой ситуации имеем

$$b_1 : b_2 = I_1 : I_2. \quad (1)$$

Упомянутая в задаче линейная зависимость ширины  $b(x)$  от расстояния  $(x + a)$  позволяет записать (из условия подобия треугольников, см. рис.):

$$\frac{a}{b_1} = \frac{x + a}{b(x)} = \frac{a + l}{b_2} = \frac{l}{b_2 - b_1}. \quad (2)$$

Из этих соотношений нетрудно получить

$$b(x) = \frac{x + a}{l}(b_2 - b_1) = \frac{x}{l}(b_2 - b_1) + \frac{a}{l}(b_2 - b_1), \quad (3)$$

$$a = \frac{lb_1}{b_2 - b_1}. \quad (4)$$

Исключим величину  $a$  из (3) с помощью (4). Найдем

$$b(x) = \frac{x}{l}(b_2 - b_1) + b_1 = b_2 \left( \frac{x}{l}(1 - n) + n \right), \quad (5)$$

где

$$n = \frac{b_1}{b_2} = \frac{I_1}{I_2}. \quad (6)$$

Сопоставляя (1), (5) и (6), можно записать

$$I(x) = I_2 \left( \frac{x}{l}(1 - n) + n \right). \quad (7)$$

Далее задача решается по аналогии с 15.12, 15.14 и 15.21. Примем, что в момент потери устойчивости стержень изгибается в соответствии с выражением

$$v = f \left( 1 - \sin \frac{\pi x}{2l} \right), \quad (8)$$

удовлетворяющим граничным условиям

$$v|_{x=0} = f, \quad v|_{x=l} = 0, \quad v'|_{x=l} = 0.$$

Определим приращение потенциальной энергии упругой деформации стержня

$$\Delta U = \frac{E}{2} \int_0^l I(x)(v'')^2 dx.$$

Подставляя сюда (7) и (8), получим после интегрирования

$$\Delta U = \frac{\pi^4 f^2 EI_2}{64l} (0,298n + 0,702). \quad (9)$$

Вычислим приращение работы внешних сил

$$\Delta W = \frac{F_{cr}}{2} \int_0^l (v')^2 dx.$$

Интегрирование этого выражения с учетом (8) дает

$$\Delta W = \frac{\pi^2 f^2 F_{cr}}{16l}. \quad (10)$$

Для момента предельного равновесия имеем

$$\Delta U = \Delta W. \quad (11)$$

Соотношение (11) с использованием (9) и (10) позволяет найти

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2} \cdot (0,0745n + 0,1755).$$

С введением коэффициента приведения

$$\mu = (0,0745n + 0,1755)^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

получаем окончательно

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu l)^2}. \quad (13)$$

**15.25.** Стержень длины  $l$  закреплен шарнирно концами и сжимается продольной силой  $F$ . Момент инерции поперечного сечения

изменяется пропорционально квадрату расстояния  $(x + a)$  от некоторой точки  $O$ , см. рис. Момент инерции посредине длины максимален и равен  $I_2$ , моменты инерции концевых сечений составляют по  $I_1$  каждый. Определить критическое значение силы  $F$ .

*Решение.* По аналогии с задачей 15.24 можно

найти

$$I(x) = I_2 \left( \frac{x}{l} (1 - n) + n \right)^2, \quad (1)$$

где

$$n = \frac{I_1}{I_2}. \quad (2)$$

Выражение (1) можно применить, например, для момента инерции решетчатой колонны, составленной из четырех уголков, см. рис. В этом случае площадь поперечного сечения такой колонны остается по длине постоянной, а момент инерции вычисляется так:

$$I_z = I_y = 4(I_z^{\text{коб}} + b^2 A) \approx 4b^2 A, \quad (3)$$

где  $b$  — расстояние центра тяжести уголка от главной оси  $z$  всего сечения.

Будем считать, что при потере устойчивости стержень искривляется по полуволне синусоиды

$$v = f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (4)$$

Выше было показано, что приращение потенциальной энергии упругой деформации вычисляется с помощью интеграла

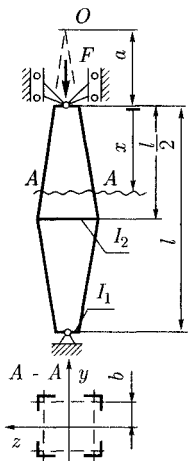
$$\Delta U = \int_l \frac{EI(x)}{2} (v'')^2 dx.$$

Ввиду симметрии удобнее интегрировать на половине длины стержня с удвоением результата

$$\Delta U = 2 \left( \frac{E}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} I(x) (v'')^2 dx \right).$$

Подставим сюда выражения для  $I(x)$  и  $v''$  из (1) и (4) и проинтегрируем:

$$\Delta U = \frac{\pi^4 f^2 EI_2}{4l^2} \cdot (0,186n + 0,223\sqrt{n} + 0,591). \quad (5)$$



К задаче 15.25



Аналогичный прием используем, определяя приращение работы внешних сил:

$$\Delta W = 2 \left( \frac{F_{cr}}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} (v')^2 dx \right) = \frac{\pi^2 f^2 F_{cr}}{4l}. \quad (6)$$

Так как к моменту потери устойчивости имеем  $\Delta W = \Delta U$ , то приравняем (5) и (6). Из полученного уравнения находим

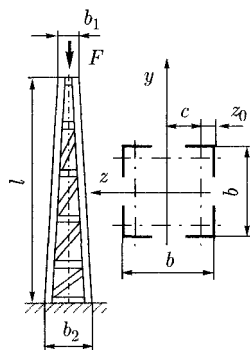
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu l)^2}, \quad (7)$$

где

$$\mu = (0,186n + 0,223\sqrt{n} + 0,591)^{-\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

**15.26.** Защемленная в нижнем сечении колонна высотой  $l = 6$  м изготовлена из четырех равнополочных уголков  $100 \times 100 \times 12$  мм, скрепленных решеткой из распорок и диагоналей, см. рис. Размеры колонны в верхнем и нижнем сечениях составляют  $b_1 = 0,3$  м,  $b_2 = 0,6$  м, см. рис. Материал уголков – сталь с пределом текучести  $\sigma_y = 320$  МПа. Нормативный коэффициент запаса предписан  $[s] = 2$ .

*Решение.* Рассматриваемой здесь колонне можно сопоставить расчетную схему из предыдущей задачи 15.25, но с удвоенной длиной стержня. Для этого формулу (7) для критической силы оставляем неизменной, но увеличиваем в два раза коэффициент приведения



К задаче 15.26

$$\mu_2 = 2 \left( 0,186n + 0,223\sqrt{n} + 0,591 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Далее вычисляем все вспомогательные параметры:

$$I_1 = 4(I_z^{\text{с.о.б}} + c^2 A) = 4(209 + 12,09^2 \cdot 22,8) = 14170 \text{ см}^4,$$

$$I_2 = 4(209 + 27,09^2 \cdot 22,8) = 67760 \text{ см}^4,$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{67760/91,2} = 27,2 \text{ см},$$

$$n = \frac{I_1}{I_2} = 14170/67760 = 0,209,$$

$$\mu_2 = 2 \left( 0,186 \cdot 0,209 + 0,223\sqrt{0,209} + 0,591 \right)^{-\frac{1}{2}} = 2,34.$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{[s]} = 320/2 = 160 \text{ МПа.}$$

В Строительных нормах и правилах рекомендуется наличие решетки учесть следующим образом:

$$\mu = \mu_1 \mu_2,$$

где  $\mu_1 = 1, 11$ . Для нашей задачи получаем

$$\mu = 1, 11 \cdot 2, 34 = 2, 60.$$

Затем вычисляем гибкость колонны

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_2} = 2, 60 \cdot 600/27, 2 = 57, 3.$$

Обратившись к табл. 15.1, определяем коэффициент снижения основного допускаемого напряжения:

$$\varphi = 0, 781.$$

Заканчиваем решение задачи вычислением допускаемого напряжения при расчете на устойчивость

$$[\sigma_{cr}] = \varphi[\sigma] = 0, 781 \cdot 160 = 125 \text{ МПа,}$$

а затем и допускаемой нагрузки

$$[F] = [\sigma_{cr}] \cdot A = 125 \cdot 10^6 \cdot 91, 2 \cdot 10^{-4} = 1, 14 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1140 \text{ кН.}$$

За расчетное принимаем сечение в защемлении.

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ И УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

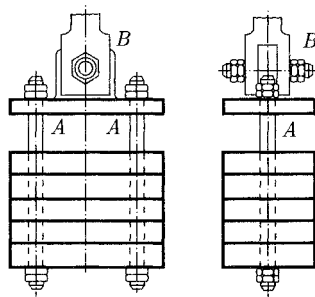
**16.1.** Клеть шахтного подъемника массой  $m = 3000$  кг поднимается равноускоренно с помощью стального троса, причем за первые две секунды она проходит путь  $H = 4$  м. Площадь поперечного сечения троса  $A = 5$  см<sup>2</sup>, его длина  $l = 90$  м, условная плотность материала троса  $\rho_* = 7200$  кг/м<sup>3</sup>. Определить наибольшее нормальное напряжение в тросе без учета и с учетом его собственного веса.

*Ответ:* 72 МПа; 80 МПа.

**16.2.** Противовес подъемника (см. рис.) имеет массу  $m = 4200$  кг. При торможении поднимающегося противовеса испытывает ускорение  $w = 1,5$  м/с<sup>2</sup>. Определить диаметры болтов  $A$  и  $B$  противовеса (см. рис.), если для материала болтов задано  $[\sigma] = 32$  МПа,  $[\tau] = 20$  МПа.

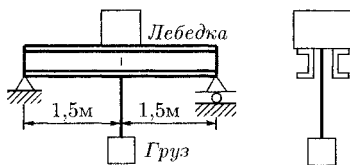
*Ответ:*  $d_A = 31$  мм;

$d_B = 40$  мм.



К задаче 16.2

**16.3.** На двух балках корытного профиля № 20 установлена лебедка массой  $m_1 = 800$  кг, поднимающая груз  $m_2 = 3000$  кг с помощью стального троса, см. рис. Площадь поперечного сечения троса  $A = 5$  см<sup>2</sup>. Подъем груза происходит с ускорением  $w = 4$  м/с<sup>2</sup>. Определить наибольшее нормальное напряжение в балках и в тросе с учетом веса лебедки и собственного веса балок.

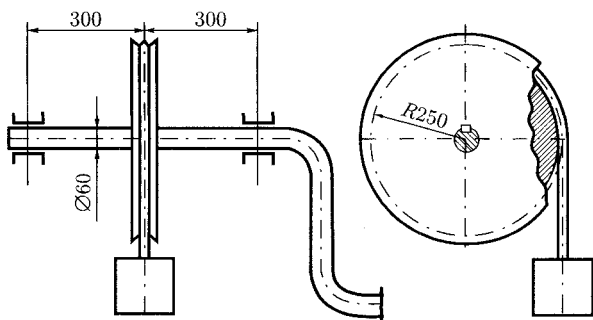


К задаче 16.3

*Ответ:*  $\sigma_{\text{бал}}^{\text{бал}} = 125$  МПа;  $\sigma^{\text{тр}} = 84$  МПа.

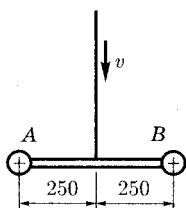
**16.4.** Груз массой  $m = 600$  кг поднимается на тросе, накрутом на шкив (см. рис.). Груз движется с ускорением  $w = 0,8$  м/с<sup>2</sup>. Площадь поперечного сечения троса  $A = 1$  см<sup>2</sup>. Определить нормальное напряжение в тросе и эквивалентное напряжение в материале вала

по критерию максимальных касательных напряжений. Массу троса, вала и шкива не учитывать.



К задаче 16.4

Ответ:  $\sigma^{\text{тр}} = 65$  МПа;  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{вал}} = 89$  МПа.



К задаче 16.5

16.5. Стальной стержень  $AB$  квадратного поперечного сечения  $10 \times 10$  мм, несущий на концах  $A$  и  $B$  грузы массой  $m = 6$  кг каждый, опускается на стальной проволоке диаметром  $d = 2$  мм с постоянной скоростью  $v_1$  (см. рис.). Далее за время  $\Delta t = 0,5$  с проволока притормаживается со скорости  $v_1 = 2,4$  м/с до скорости  $v_2 = 0,8$  м/с. Определить прогибы  $f$  концов стержня  $AB$ , наибольшее нормальное напряжение в нем, а также напряжение в проволоке. Массой стержня  $AB$  пренебречь.

Ответ:  $f = 2,5$  мм;  $\sigma_{\text{max}}^{AB} = 119$  МПа;  $\sigma^{\text{пров}} = 51$  МПа.

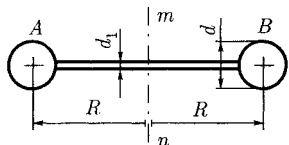
16.6. На вал диаметром  $d = 60$  мм насажен маховик с моментом инерции  $J_x = 50$  кг·м<sup>2</sup>. Частота вращения вала  $n = 600$  об/мин. После включения тормоза маховик останавливается, сделав 10 оборотов. Определить максимальное касательное напряжение в вале, считая силы торможения постоянными. Массой вала пренебречь.

Ответ:  $\tau_{\text{max}} = 29,6$  МПа.

16.7. Маховик электроинерционного стартера представляет собой диск постоянной толщины диаметром  $D = 160$  мм и массы  $m = 8$  кг. За время  $\Delta t = 1$  с он приобретает частоту вращения  $n = 8000$  об/мин. Найти максимальное касательное напряжение в вале диаметром  $d = 20$  мм, на который насажен маховик. Ускорение маховика считать постоянным.

Ответ:  $\tau_{\text{max}} = 13,6$  МПа.

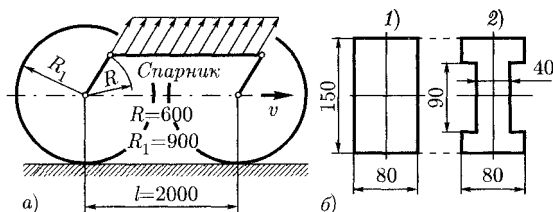
**16.8.** Стальной стержень  $AB$  длиной  $2R = 1,0$  м вращается вокруг поперечной оси  $mn$  с частотой  $n = 495$  об/мин (см. рис.). На концах стержня укреплено по чугунному шару диаметром  $d = 200$  мм. Подобрать диаметр  $d_1$  стержня при допуске напряжении  $[\sigma] = 380$  МПа.



К задаче 16.8  
см. рис. б).

Ответ:  $d_1 = 12$  мм.

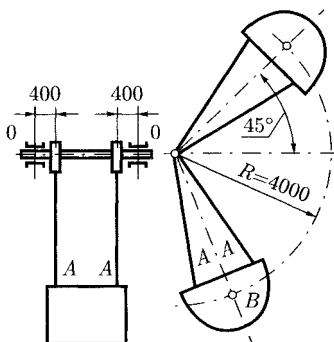
**16.9.** Определить наибольшее напряжение в спарнике локомотива, движущегося с постоянной скоростью  $v = 120$  км/час (см. рис. а). Продольное сжимающее спарник усилие равно  $N = 180$  кН. Рассмотреть два варианта поперечного сечения (см. рис. б).



К задаче 16.9

Ответ: 1)  $\sigma_{\max} = 142$  МПа; 2)  $\sigma_{\max} = 125$  МПа. Во втором варианте, несмотря на уменьшение сечения, напряжение примерно на 15% меньше.

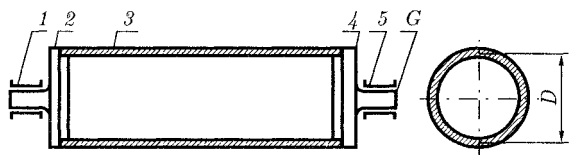
**16.10.** Люлька качелей, имеющая массу вместе с людьми  $m = 300$  кг, подвешена к стальному валу  $O-O$  при помощи стержней  $A$ , см. рис. Определить необходимый диаметр вала  $d$  при допуске напряжении  $[\sigma] = 80$  МПа. Центр масс люльки расположен на расстоянии  $R = 4$  м от оси вращения (точка  $B$  на рис.). Наибольший угол подъема люльки над горизонтом равен  $45^\circ$ .



Ответ:  $d = 70$  мм.

К задаче 16.10

**16.11.** Длинный стальной тонкостенный цилиндрический барабан 3 вращается вокруг продольной оси  $xx$  с частотой  $n = 600$  об/мин. По торцам барабан скреплен с дискообразными крышками 2 и 4, изготовленными заодно с полуосями  $G$ , которые собственно и входят в подшипники 1 и 5 (см. рис.). Диаметр барабана  $D = 2R = 2$  м. Определить окружное нормальное напряжение  $\sigma_\theta$  в цилиндрической стенке барабана. Влиянием закреплений по торцам пренебречь.



К задаче 16.11

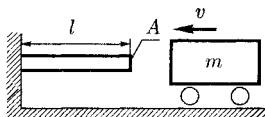
*Ответ:*  $\sigma_\theta = 31$  МПа.

**16.12.** Тонкое кольцо вращается с частотой  $n = 3000$  об/мин, равной частоте вращения роторов турбин на электростанциях Европы и России. Определить наибольший допускаемый диаметр  $D$  такого кольца при допускаемом напряжении  $[\sigma] = 250$  МПа для трех вариантов материалов: а) сталь, б) титановый сплав ( $\rho = 4500$  кг/м<sup>3</sup>), в) алюминиевый сплав.

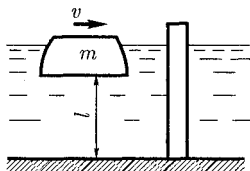
*Ответ:* а) 1,14 м; б) 1,50 м; в) 1,94 м.

**16.13.** Стержень, имеющий длину  $l = 0,8$  м и площадь поперечного сечения  $A = 5$  см<sup>2</sup>, используется в качестве буфера для остановки тележки массой  $m = 300$  кг, движущейся со скоростью  $v = 0,1$  м/с. Найти максимальное нормальное напряжение в стержне при ударе для трех вариантов изготовления стержня: а) из стали, б) из дерева, в) из резины ( $E = 0,001 \cdot 10^{11}$  Па).

*Ответ:* а) 38,7 МПа; б) 8,6 МПа; в) 0,86 МПа.



К задаче 16.13



К задаче 16.14

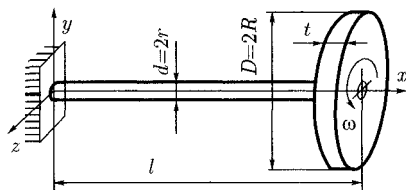
**16.14.** Лыдина, плывущая со скоростью  $v = 1$  м/с, обладающая массой  $m = 150$  кг, ударяется о деревянную сваю прямоугольного сечения, см. рис. Сваю в нижнем сечении считать заземленной, удар производится на расстоянии  $l = 3$  м от заземления, см. рис. Сечение сваи  $300 \times 150$  мм, модуль упругости древесины  $E = 0,08 \cdot 10^{11}$  Па. Определить наибольшее усилие, наибольший прогиб и наибольшее напряжение в свае в момент удара. Расчет произвести для двух вариантов: а) свая ориентирована плоскостью наибольшей жесткости вдоль течения реки, б) – поперек этого течения.

*Ответ:*

а)  $F_{\max} = 7800$  Н;  $f_{\max} = 19$  мм;  $\sigma_{\max} = 10$  МПа;

б)  $F_{\max} = 3900$  Н;  $f_{\max} = 38$  мм;  $\sigma_{\max} = 10$  МПа.

**16.15.** Стальной силовой диск диаметром  $D = 2R = 800$  мм и толщиной  $t = 10$  мм свободно вращается с угловой скоростью  $\omega = 10$  рад/с на конце заделанного стержня круглого сечения, см. рис. Вес диска воспринимается подшипниками (на схеме не показаны) и не вызывает изгиба стержня. Диск сцепляется со стержнем и останавливается. Подобрать размеры стержня (диаметр  $d = 2r$ , длина  $l = 40r$ ) при допуске касательном напряжении  $[\tau] = 200$  МПа.



К задаче 16.15

*Решение.* Момент инерции диска найдем по известной формуле

$$J_x = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \pi R^4 t \rho = 3,14 \cdot 0,4^4 \cdot 0,01 \cdot 7800/2 = 3,14 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося диска подсчитывается следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} J_x \omega^2 = 3,14 \cdot 10^2/2 = 157 \text{ Дж}.$$

Уравнение энергетического баланса в данном случае можно записать так:

$$T = U = \frac{1}{2} M_{\max} \varphi_{\max} = \frac{M_{\max}^2 l}{2 G I_p}.$$

Из условия прочности для скручиваемого стержня имеем

$$M_{\max} = [\tau] W_p.$$

Здесь  $M_{\max}$  – внутренний крутящий момент в стержне,  $I_p$  и  $W_p$  – полярный момент инерции и полярный момент сопротивления сечения стержня.

Исключим из двух последних соотношений величину  $M_{\max}$ :

$$T = \frac{[\tau]^2 W_p^2 l}{2GI_p}.$$

Так как

$$\frac{W_p^2}{I_p} = \left(\frac{\pi r^3}{2}\right)^2 : \left(\frac{\pi r^4}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{2},$$

то для кинетической энергии получаем

$$T = \frac{\pi r^2 l [\tau]^2}{4G}$$

или

$$4TG = V[\tau]^2,$$

где  $V$  — объем стержня.

С помощью последней формулы находим требуемый объем стержня

$$V = \frac{4TG}{[\tau]^2} = 4 \cdot 157 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} / (200 \cdot 10^6)^2 = 1,255 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Длина стержня  $l$  в 40 раз больше радиуса  $r$ , поэтому последний определяется так:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{40\pi}} = \sqrt[3]{1,255 \cdot 10^{-3} / (40 \cdot 3,14)} = 0,0215 \text{ м} = 21,5 \text{ мм}.$$

В заключение найдем жесткость стержня на скручивание

$$\begin{aligned} c_\varphi &= \frac{GI_p}{l} = \frac{G\pi r^4}{2 \cdot 40r} = \frac{\pi}{80} Gr^3 = \\ &= 3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,0215^3 / 80 = 31400 \text{ Нм/рад}, \end{aligned}$$

а также максимальные значения крутящего момента и угла закручивания

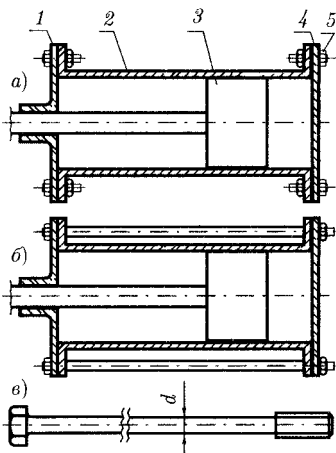
$$\begin{aligned} M_{\max} &= \omega \sqrt{J_x c_\varphi} = 10 \sqrt{3,14 \cdot 31400} = 3140 \text{ Нм}, \\ \varphi_{\max} &= \omega \sqrt{\frac{J_x}{c_\varphi}} = 10 \sqrt{3,14 / 31400} = 0,1 \text{ рад}. \end{aligned}$$

**16.16.** Рассматривается элемент пневматического инструмента: цилиндр 2 с поршнем 3, см. рис. а. К цилиндру с помощью болтов 5 крепятся крышки 1 и 4. Работа инструмента связана с неизбежными одиночными ударами поршня по крышке. Энергия поршня в момент его удара по крышке достигает значения  $T = 6$  Дж. Болт имеет внутренний диаметр резьбы  $d = 16$  мм. Резьба нарезана по всей длине болта. Кроме того, предлагается второй вариант конструкции, когда крышки крепятся к цилиндру длинными болтами

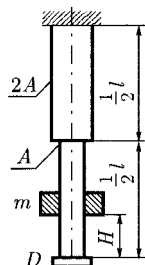


(рис. б). Такой длинный болт имеет тот же диаметр  $d$  (рис. в). Определить необходимое число болтов для каждого из вариантов при допускаемом напряжении для материала болта  $[\sigma] = 50 \text{ МПа}$ .

Ответ: На одну крышку: а) 120 шт.; б) 12 шт.



К задаче 16.16



К задаче 16.17

**16.17.** Определить наибольшее напряжение в стальном стержне переменного сечения (см. рис.) при ударе грузом массой  $m = 400 \text{ кг}$ , падающим с высоты  $H = 6 \text{ мм}$ . Принять  $A = 2 \text{ см}^2$ ,  $l = 5 \text{ м}$ .

Вычислить, кроме того, наибольшее напряжение в этой же системе, если на кольцевой выступ  $D$  поставить цилиндрическую винтовую пружину с податливостью  $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м/Н}$ .

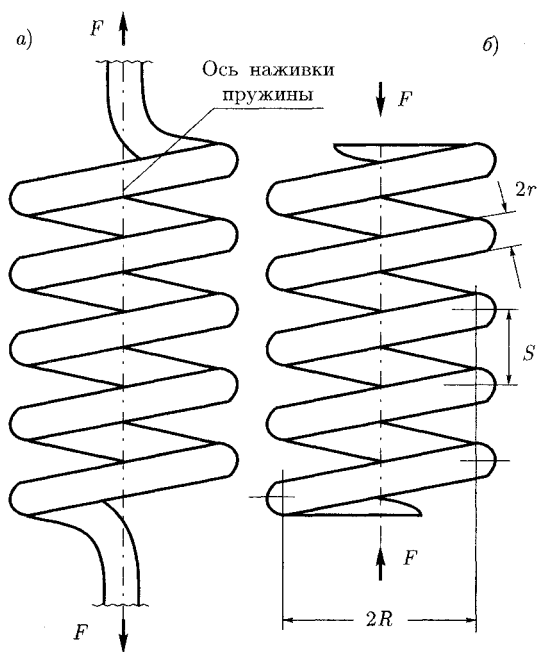
Ответ: 133 МПа; 72,2 МПа.

**16.18.** Стальная двутавровая балка № 16 длиной  $l = 3 \text{ м}$  заделана одним концом в стену. На свободный ее конец падает груз массой  $m = 100 \text{ кг}$  с высоты  $H$ . Определить прогиб этого конца балки в следующих случаях: а) груз спокойно укладывается на свое место, б) груз "падает" с высоты  $H = 0$ , в)  $H = 50 \text{ мм}$ , г)  $H = 500 \text{ мм}$ .

Ответ: а) 5,06 мм; б) 10,12 мм; в) 21,8 мм; г) 55,7 мм.

## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВИНТОВЫЕ ПРУЖИНЫ С МАЛЫМ ШАГОМ

**17.1.** На рис. *а* изображена схема цилиндрической винтовой пружины "растяжения" силой  $F$ , а на рис. *б* – пружины "сжатия" силой  $F$ . Из чертежа видно, что число витков в каждой из этих пружин составляет 5. Определить допускаемую нагрузку  $[F]$  на пружину, если допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 200$  МПа, радиус навивки пружины  $R = 25$  мм, радиус поперечного сечения проволоки (стержня пружины)  $r = 4,5$  мм. Оценить осадку  $y$  под допускаемой нагрузкой в случае изготовления пружины из стальной проволоки. Найти жесткость  $c$  и податливость  $\lambda$  пружины, а также энергоемкость  $[U]$  пружины.



К задаче 17.1

*Решение.* Вычислим площадь, полярный момент сопротивления и полярный момент инерции сечения проволоки пружины, а также расчетную

длину и объем этой проволоки:

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 4,5^2 = 63,6 \text{ мм}^2 = 63,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$W_p = \frac{1}{2} \pi r^3 = 3,14 \cdot 4,5^3 / 2 = 143 \text{ мм}^3 = 143 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3,$$

$$I_p = \frac{1}{2} \pi r^4 = 3,14 \cdot 4,5^4 / 2 = 644 \text{ мм}^4 = 644 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4,$$

$$l = 2\pi Rn = 2 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot 5 = 785 \text{ мм} = 0,785 \text{ м},$$

$$V = A \cdot l = 63,6 \cdot 785 = 49900 \text{ мм}^3 = 49,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Условие прочности в данном случае имеет вид (единообразно для вариантов *a* и *б*)

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{A} + \frac{M_{\text{крут}}}{W_p} = \frac{F}{A} + \frac{FR}{W_p} \leq [\tau],$$

откуда нетрудно найти допускаемую нагрузку

$$\begin{aligned} [F]_* &= [\tau] \left( \frac{1}{A} + \frac{R}{W_p} \right)^{-1} = \\ &= 200 \cdot 10^6 ((1/63,6 + 0,025/0,143) \cdot 10^6)^{-1} = 1050 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Если же пренебречь влиянием поперечной силы  $Q = F$ , то из предыдущего выражения получим несколько большее значение допускаемой нагрузки

$$[F] = 1144 \text{ Н}.$$

Это значение будем иметь в виду при дальнейших оценочных расчетах.

Осадка пружины обычно определяется из следующего приближенного выражения, учитывающего только скручивание проволоки пружины:

$$y = \frac{M_{\text{крут}} R l}{G I_p} = \frac{F R^2 l}{G I_p}.$$

Для случая  $F = [F]$  получаем допускаемое значение осадки

$$[y] = 1144 \cdot 0,025^2 \cdot 0,785 / (0,8 \cdot 10^{11} \cdot 644 \cdot 10^{-12}) = 0,0109 \text{ м} = 10,9 \text{ мм}.$$

Далее вычисляется жесткость пружины

$$c = \frac{F}{y} = \frac{G I_p}{R^2 l} = 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 644 \cdot 10^{-12} / (0,025^2 \cdot 0,785) = 0,105 \cdot 10^6 \text{ Н/м},$$

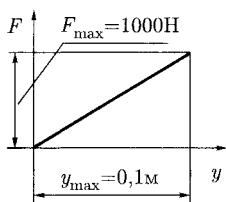
ее податливость

$$\lambda = \frac{1}{c} = 1 / (0,105 \cdot 10^6) = 9,50 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н},$$

и, наконец, допускаемая энергоемкость пружины

$$[U] = \frac{1}{2} [F] \cdot [y] = 1144 \cdot 0,0109/2 = 6,23 \text{ Дж.}$$

В заключение еще раз подчеркнем, что приведенные здесь расчеты пригодны как для пружин "растяжения" (вариант а), так и для пружин "сжатия" (вариант б).



К задаче 17.2

**17.2.** На рис. дана диаграмма деформирования пружины. Подобрать основные параметры такой пружины, если она навивается из стальной проволоки, для которой  $[\tau] = 250 \text{ МПа}$ . Принять отношение радиуса наливки  $R$  к радиусу сечения проволоки  $r$  равным 10.

*Решение.* По диаграмме деформирования пружины определяем требуемую ее жесткость и допускаемое значение потенциальной энергии

упругой деформации, накапливаемой в пружине при ее наибольшей осадке:

$$c = \frac{F_{\max}}{y_{\max}} = 1000/0,1 = 10^4 \text{ Н/м,}$$

$$[U] = \frac{1}{2} F_{\max} \cdot y_{\max} = 1000 \cdot 0,1/2 = 50 \text{ Дж.}$$

Имея данные о величине  $[U]$ , можно вычислить расчетный допускаемый объем проволоки пружины (см., например, задачу 16.15):

$$[V] = \frac{4G[U]}{[\tau]^2} = 4 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 50 / (250 \cdot 10^6)^2 = 2,56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Условие прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{крут}}}{W_p} = \frac{FR}{W_p} \leq [\tau]$$

представим в виде

$$\frac{2FR}{\pi r^3} \leq [\tau].$$

Так как по условию задачи

$$m = \frac{R}{r} = 10,$$

то нетрудно получить

$$r = \sqrt{\frac{2Fm}{\pi[\tau]}} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 10 / (3,14 \cdot 250 \cdot 10^6)} = 5,04 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

а также

$$R = mr = 10 \cdot 5,04 \cdot 10^{-3} = 50,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

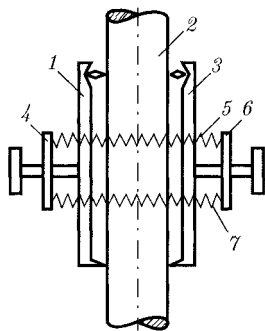
В свою очередь, для объема проволоки имеем

$$V = Al = (\pi r^2)(2\pi Rn) = 2Rn(\pi r)^2.$$

Отсюда находим требуемое количество витков пружины

$$n = \frac{[V]}{2R(\pi r)^2} = 2,56 \cdot 10^{-4} / (2 \cdot 50,4 \cdot 10^{-3} (3,14 \cdot 5,04 \cdot 10^{-3})^2) \approx 10 \text{ витков.}$$

**17.3.** При испытании на растяжение (сжатие) образца 2 (см. рис.) на него устанавливают два одинаковых тензомера 1 и 3. Это осуществляется с помощью двух струбцин 4 и 6, связанных между собой двумя одинаковыми стальными пружинами 5 и 7. Сколько витков должна иметь каждая из пружин, если при деформации на 10 мм суммарная сила нажатия упорного винта на корпус тензомера должна равняться 4 Н? Какие возникнут при этом максимальные касательные напряжения в проволоке каждой из пружин? Диаметр проволоки пружины 0,5 мм, радиус навитки пружины 2 мм.



К задаче 17.3

*Ответ:*  $n = 49$  витков;  $\tau_{\max} = 173$  МПа.

**17.4.** Буферная стальная цилиндрическая винтовая пружина имеет радиус навитки  $R = 100$  мм. Пружина должна поглощать 500 Дж энергии удара при осадке на 50 мм. Допускаемое касательное напряжение принять равным 175 МПа. Определить диаметр стержня пружины и число ее витков.

*Указание.* При составлении условия прочности учесть слагаемое, зависящее от поперечной силы.

*Ответ:*  $d = 2r = 40$  мм;  $n = 8$  витков.

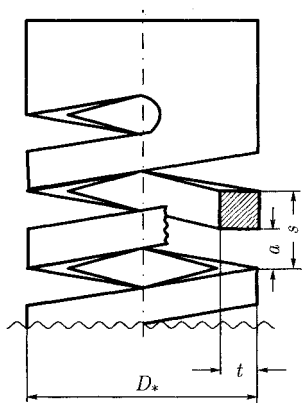
**17.5.** Каким образом следует изменить диаметр стержня пружины и число ее витков, если в условие предыдущей задачи внести изменение: пружина должна поглощать 1000 Дж энергии?

*Ответ:* Диаметр следует увеличить в 1,27 раза, а число витков довести до 11.

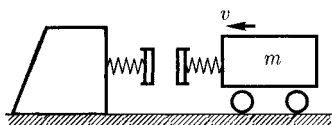
**17.6.** Цилиндрическая винтовая пружина под нагрузкой в 2 кН должна демонстрировать полную осадку (до соприкосновения витков), равную 80 мм. Допускаемое касательное напряжение принять

180 МПа. Стальная проволока при изготовлении пружины навивается на технологическую оправку диаметром 160 мм. Определить диаметр  $d$  проволоки, число витков  $n$  и полную высоту  $H$  пружины. Оценить расчетную массу  $m$  такой пружины.

*Ответ:*  $d = 17,4$  мм;  $n = 7$  витков;  $H = 200$  мм;  $m \approx 7,2$  кг.



К задаче 17.7



К задаче 17.8

**17.7.** Цилиндрическая винтовая пружина изготавливается из трубы путем фрезерования винтового сквозного паза, имеющего шаг  $s = 20$  мм и ширину прорези  $a = 10$  мм, см. рис. Используется труба с наружным диаметром  $D_* = 120$  мм и толщиной стенки  $t = 10$  мм. Длина трубы подобрана так, чтобы получилось 12 полных витков пружины. Определить наибольшую силу, которой можно нагрузить пружину при допуске касательном напряжении 280 МПа. Чему будет равна осадка пружины при действии этой силы?

*Ответ:*  $F = 1120$  Н;  $y = 94$  мм.

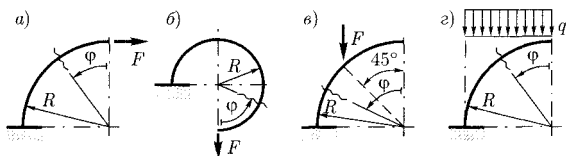
**17.8.** Вагонетка массой  $m = 400$  кг катится по рельсам тупикового пути и останавливается массивным упором, см. рис. Вагонетка имеет два буфера, каждый из которых снабжен стальной цилиндрической винтовой пружиной. На упоре

установлены два аналогичных буфера. Каждая из упомянутых здесь пружин изготовлена из проволоки диаметром 25 мм при радиусе навивки 80 мм и имеет 12 витков. Определить допустимую скорость вагонетки, если допустимое касательное напряжение для материала пружины составляет 300 МПа. Оценить также осадку каждой пружины.

*Ответ:*  $[v] = 3,75$  м/с;  $y = 134$  мм.

## ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ БОЛЬШОЙ НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

**18.1.** Построить эпюры изгибающего момента, поперечной и нормальной силы для кривых стержней, показанных на рис. Ось каждого стержня – круговая линия.



К задаче 18.1

Ответ:

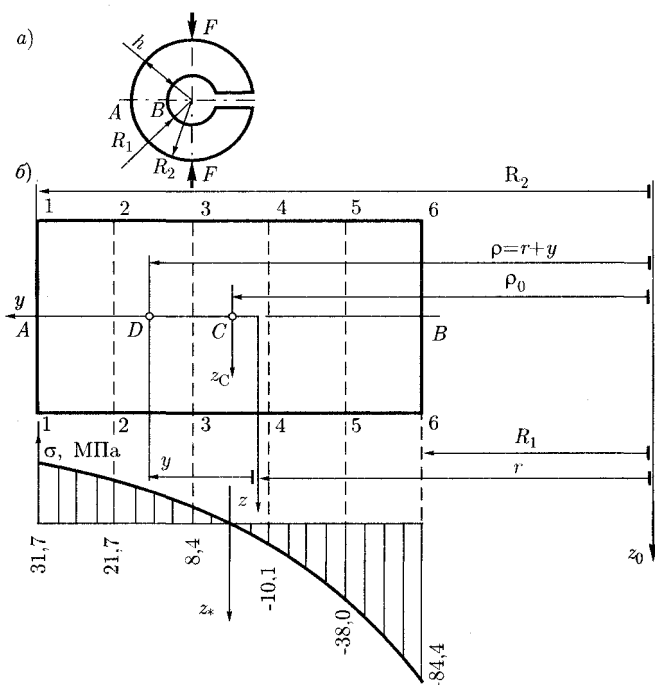
| Схема | $M(\varphi)$                                          | $Q(\varphi)$                   | $N(\varphi)$         |
|-------|-------------------------------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| a     | $-FR(1 - \cos \varphi)$                               | $-F \sin \varphi$              | $F \cos \varphi$     |
| б     | $FR \sin \varphi$                                     | $-F \cos \varphi$              | $F \sin \varphi$     |
| в     | $FR \left( \sin \frac{\pi}{4} - \sin \varphi \right)$ | $-F \cos \varphi$              | $-F \sin \varphi$    |
| г     | $-\frac{1}{2}qR^2 \sin^2 \varphi$                     | $-\frac{1}{2}qR \sin 2\varphi$ | $-qR \sin^2 \varphi$ |

**18.2.** Кольцо с разрезом по горизонтальному диаметру (см. рис. a) имеет высоту сечения  $h = 100$  мм и ширину  $b = 50$  мм. Кроме того задан радиус кривизны внутренней поверхности кольца  $R_1 = 60$  мм. Кольцо сжато силами  $F = 40$  кН. Определить напряжения в сечении  $AB$  по линиям 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3, 4 – 4, 5 – 5 и 6 – 6 с построением эпюры.

*Решение.* В данной задаче имеем по существу наложение сжатия на изгиб, когда нормальные напряжения в поперечном сечении подсчитываются следующим образом:

$$\sigma = \sigma_* + \sigma_{**} = \frac{N}{A} + \frac{M}{S_z} \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (1)$$

Изгибающий момент в опасном сечении  $AB$  находят как обычно, т.е. вычисляют его относительно оси  $z_C$ , проходящей через центр тяжести  $C$



К задаче 18.2

поперечного сечения (см. рис. б):

$$M = F\rho_0 = 40000 \cdot 0,11 = 4400 \text{ Нм},$$

а нормальную силу определяют очевидным образом

$$N = -F = -40000 \text{ Н}.$$

Поэтому первое слагаемое в правой части выражения (1) принимает вид

$$\sigma_* = \frac{N}{A} = -40000/(0,1 \cdot 0,05) = -8 \cdot 10^6 \text{ Па} = -8 \text{ МПа}.$$

Координата  $\rho$  произвольной точки  $D$  сечения отсчитывается от оси  $z_0$ , соответствующей линии центров кривизны кривого стержня. Координата  $y$  той же точки  $D$  принимается от оси  $z$ , которая совпадала бы с нейтральной линией в случае чистого изгиба. Определим радиус кривизны такого нейтрального слоя

$$r = \frac{h}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{R_2 - R_1}{\ln(R_2/R_1)} = (160 - 60)/\ln(160/60) \approx 101,95 \text{ мм}.$$



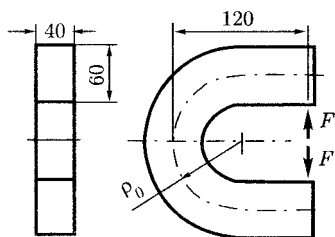
Статический момент площади сечения стержня определяется относительно оси  $z$ :

$$S_z = A(\rho_0 - r) = 100 \cdot 50 \cdot (110 - 101,95) = 40250 \text{ мм}^3 = 40,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Дальнейшие расчеты сведем в таблицу, а затем построим эпюру, см. рис. б. Здесь через  $z_*$  обозначена нейтральная линия при совместном действии изгибающего момента  $M$  и нормальной силы  $N$ .

| Точки сечения | $\rho$ ,<br>мм | $y$ ,<br>мм | $\sigma_{**}$ ,<br>МПа | $\sigma$ ,<br>МПа |
|---------------|----------------|-------------|------------------------|-------------------|
| 1 – 1         | 160            | 58,05       | 39,7                   | 31,7              |
| 2 – 2         | 140            | 38,05       | 29,7                   | 21,7              |
| 3 – 3         | 120            | 18,05       | 16,4                   | 8,4               |
| 4 – 4         | 100            | –1,95       | –2,1                   | –10,1             |
| 5 – 5         | 80             | –21,95      | –30,0                  | –38,0             |
| 6 – 6         | 60             | –41,95      | –76,4                  | –84,4             |

**18.3.** Стержень прямоугольного сечения шириной 40 мм и толщиной 60 мм имеет форму, показанную на рис. Радиус  $\rho_0$  осевой линии кривого стержня равен 70 мм. На расстоянии 120 мм от центра среднего сечения приложены две равные силы по 10 кН каждая. Они направлены так, чтобы разогнуть стержень. Найти наибольшие и наименьшие нормальные напряжения и построить эпюру распределения напряжений по высоте среднего сечения стержня.



К задаче 18.3

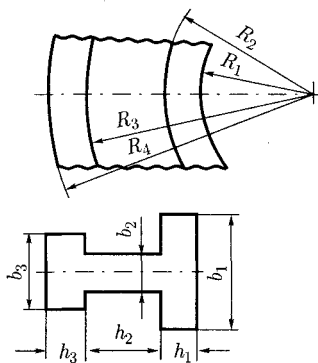
*Ответ:*  $\sigma_{\max} = 75 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{\min} = -34 \text{ МПа}$ .

**18.4.** Найти грузоподъемность крюка прямоугольного сечения. Радиус внутренней поверхности крюка 150 мм, наружной – 250 мм, ширина сечения 75 мм. Линия действия внешних сил проходит через центр кривизны крюка. Допускаемое нормальное напряжение принять 70 МПа.

*Ответ:*  $[F] = 33,8 \text{ кН}$ .

**18.5.** Вычислить радиус кривизны нейтрального слоя  $r$  при чистом изгибе кривого стержня. Поперечное сечение – двутавр с различными полками. Характерные размеры как самого стержня, так и его сечения поясняются на рис. Числовые значения этих разме-

ров:  $b_1 = 30$  мм,  $b_2 = 10$  мм,  $b_3 = 20$  мм,  $h_1 = 10$  мм,  $h_2 = 20$  мм,  $h_3 = 10$  мм,  $R_1 = 30$  мм.



К задаче 18.5

*Решение.* Радиус кривизны нейтрального слоя вычисляется следующим образом:

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}}. \quad (1)$$

Для площади сечения имеем очевидное равенство

$$\begin{aligned} A &= b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3 = \\ &= 30 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 20 \cdot 10 = \\ &= 700 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

Интеграл, фигурирующий в формуле (1), вычислим как сумму интегралов по трем прямоугольным областям:

$$\begin{aligned} K &= \int_A \frac{dA}{\rho} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b_1 d\rho}{\rho} + \int_{R_2}^{R_3} \frac{b_2 d\rho}{\rho} + \int_{R_3}^{R_4} \frac{b_3 d\rho}{\rho} = \\ &= b_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \ln \frac{R_4}{R_3} = \\ &= 30 \ln(40/30) + 10 \ln(60/40) + 20 \ln(70/60) = 15,768 \text{ мм}. \end{aligned}$$

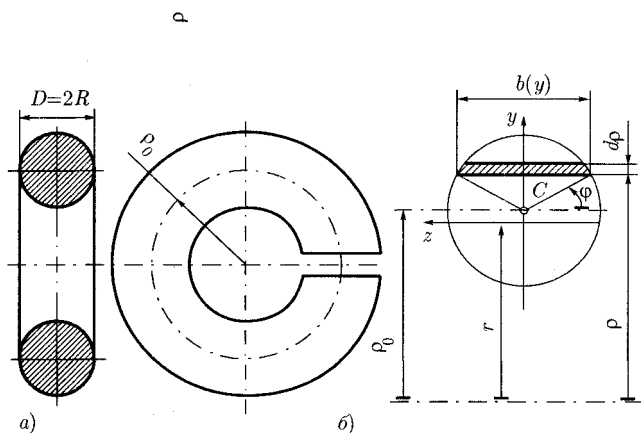
Теперь осталось подставить значения  $A$  и  $K$  в формулу (1):

$$r = \frac{A}{K} = 700/15,768 = 44,39 \text{ мм}.$$

**18.6.** Вычислить радиус кривизны нейтрального слоя  $r$  при чистом изгибе кривого стержня с круговым поперечным сечением, см. рис. *а*. Характерные размеры указаны там же. Принять  $D = 2R = 80$  мм,  $\rho_0 = 100$  мм.

*Решение.* Радиус  $r$  находится с помощью формулы (1), см. задачу 18.5. Для вычисления интеграла, стоящего в этой формуле, продelaем дополнительные построения на схеме поперечного сечения, рис. *б*. На расстоянии  $\rho$  от центра кривизны стержня выделим элементарную площадь  $dA$ . Эта площадь представляет собой элементарную полоску шириной  $d\rho$  и длиной  $b(y)$ , параллельную нейтральной оси  $z$ . Введем центральный угол  $\varphi$  так, как показано на рис. *б*. Тогда имеем

$$\begin{aligned} dA &= b(y)d\rho, \\ \rho &= \rho_0 + R \sin \varphi, \\ b(y) &= 2R \cos \varphi. \end{aligned}$$



К задаче 18.6

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} d\rho &= R \cos \varphi d\varphi, \\ dA &= 2R^2 \cos^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

С учетом найденного интеграл в формуле (1) принимает вид

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2R^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{\rho_o + R \sin \varphi} = \dots = 2\pi \left( \rho_o - \sqrt{\rho_o^2 - R^2} \right).$$

Так как  $A = \pi R^2$ , то для радиуса кривизны находим

$$r = \frac{A}{K} = \frac{R^2}{2 \left( \rho_o - \sqrt{\rho_o^2 - R^2} \right)}.$$

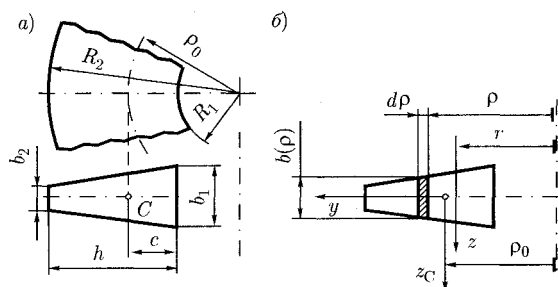
Подстановка чисел дает

$$r = 40^2 / \left( 2 \left( 100 - \sqrt{100^2 - 40^2} \right) \right) = 95,826 \text{ мм}.$$

**18.7.** Кривой стержень имеет трапецидальное сечение, см. рис. а. Определить радиус  $\rho_o$  осевой линии стержня и радиус кривизны  $r$  нейтрального слоя при чистом изгибе, см. рис. б. Принять  $h = 120$  мм,  $R_1 = 80$  мм,  $R_2 = 200$  мм,  $b_1 = 80$  мм,  $b_2 = 30$  мм.

*Решение.* Положение центра тяжести  $C$  сечения определится расстоянием  $c$  от внутренней цилиндрической поверхности:

$$c = \frac{h(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)} = 120 \cdot (80 + 2 \cdot 30) / (3 \cdot (80 + 30)) = 50,91 \text{ мм},$$



К задаче 18.7

что позволяет определить радиус осевой линии стержня

$$\rho_o = R_1 + c = 80 + 50,91 = 130,91 \text{ мм.}$$

Далее вычисляем площадь трапеции

$$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2) = 120 \cdot (80 + 30)/2 = 6600 \text{ мм}^2.$$

Затем выделим элементарную площадь  $dA$  в виде элементарной полоски ширины  $d\rho$  и длины  $b(\rho)$ , см. рис. б. Из чертежа устанавливаем

$$dA = b(\rho)d\rho,$$

$$b(\rho) = b_2 + (b_1 - b_2) \frac{R_2 - \rho}{R_2 - R_1}.$$

Тогда можно найти интеграл

$$K = \int_A \frac{dA}{\rho} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} \left( b_2 + (b_1 - b_2) \frac{R_2 - \rho}{R_2 - R_1} \right) d\rho =$$

$$= \left( b_2 + R_2 \frac{b_1 - b_2}{R_2 - R_1} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2).$$

Числовые подстановки дают

$$K = (30 + 200 \cdot (80 - 30)/(200 - 80)) \ln(200/80) - (80 - 30) = 53,846 \text{ мм.}$$

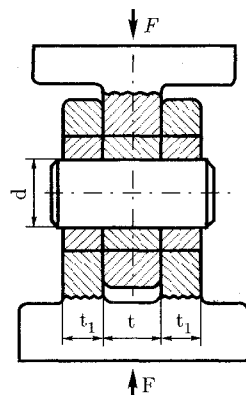
И, наконец, определяем радиус кривизны нейтрального слоя

$$r = \frac{A}{K} = 6600/53,846 = 122,57 \text{ мм.}$$

## ЗАКЛЕПОЧНЫЕ, ШПОНОЧНЫЕ И ДРУГИЕ СОЕДИНЕНИЯ, РАБОТАЮЩИЕ НА СДВИГ

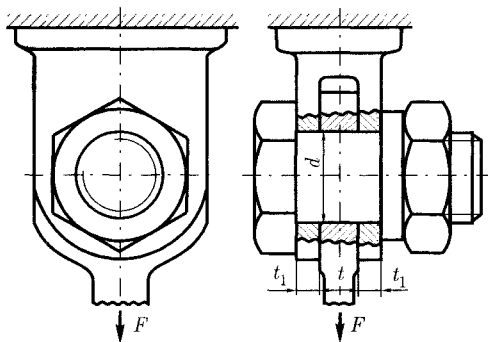
**19.1.** Для испытания на срез стержней круглого сечения применяется приспособление, размещаемое между подвижной и неподвижной траверсами пресса, см. рис. Определить наибольший диаметр стального стержня, который может быть подвергнут срезу на прессе усилием  $F = 600$  кН, если сопротивление срезу исследуемой стали может достигнуть значения  $\tau_{\text{ср}} = 300$  МПа. Выяснить, какие напряжения смятия возникнут при испытании такого стержня, если для проушин дано:  $t = 30$  мм,  $t_1 = 20$  мм.

*Ответ:*  $d = 36$  мм,  $\sigma_c = 556$  МПа.



К задаче 19.1

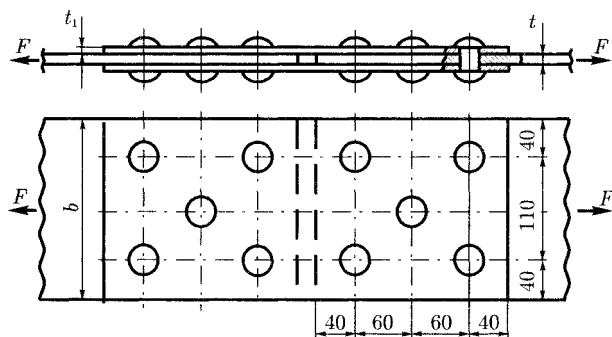
**19.2.** Из условий прочности на срез и смятие определить допускаемую силу  $F$ , которую можно приложить к тяге болтового соединения, см. рис. Принять допускаемые напряжения: на срез  $[\tau] = 80$  МПа, на смятие  $[\sigma_c] = 240$  МПа. Характерные размеры соединения:  $d = 50$  мм,  $t = 20$  мм,  $t_1 = 12$  мм.



К задаче 19.2

*Ответ:* 240 кН.

**19.3.** Два листа соединены встык двумя приклепанными накладками, см. рис. Толщина каждого листа  $t = 10$  мм, а накладки  $t_1 = 6$  мм. Соединение растягивается усилием  $F = 240$  кН. Определить необходимое количество заклепок диаметром  $d = 2r = 20$  мм и дать рекомендации по их оптимальному распределению. Допускаемые напряжения: для заклепок на срез  $[\tau] = 100$  МПа и на смятие  $[\sigma_c] = 240$  МПа, для листов на растяжение  $[\sigma] = 160$  МПа.



К задаче 19.3

*Решение.* Заклепки двусрезные. Необходимое их количество из условия прочности на срез должно быть

$$n \geq \frac{F}{2\pi r^2 [\tau]} = 240000 / (2 \cdot 3,14 \cdot 0,01^2 \cdot 100 \cdot 10^6) \approx 4.$$

По условию прочности на смятие требуется

$$n \geq \frac{F}{td[\sigma_c]} = 240000 / (0,01 \cdot 0,02 \cdot 240 \cdot 10^6) = 5.$$

Таким образом, следует иметь с каждой стороны стыка по 5 заклепок.

Из условия прочности листа на растяжение найдем требуемую рабочую площадь его сечения

$$A \geq \frac{F}{[\sigma_c]} = 240000 / (160 \cdot 10^6) = 1500 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 1500 \text{ мм}^2.$$

Рабочая ширина листа (за вычетом ослабления заклепочными отверстиями)

$$b_* = \frac{A}{t} = 1500 / 10 = 150 \text{ мм}.$$

Полная ширина листа

$$b = b_* + md,$$

где  $m$  – число заклепок в поперечном ряду. При  $b \geq 150$  мм оказывается, что число заклепок в поперечном ряду должно быть не менее  $m = 2$ . В этом случае сечение ослабляется двумя отверстиями и полную ширину принимаем

$$b = 150 + 2 \cdot 20 = 190 \text{ мм},$$

а сами заклепки размещаем в шахматном порядке. Устанавливаем шаг заклепок  $s = 3d = 3 \cdot 20 = 60$  мм и расстояния от осей заклепочных отверстий до краев листов по  $c = 2d = 2 \cdot 20 = 40$  мм. В итоге располагаем заклепки по схеме, показанной на рис.

**19.4.** Два листа толщиной  $t = 10$  мм соединены внахлестку шестью заклепками диаметром  $d = 20$  мм, см. рис. Определить допускаемое растягивающее усилие  $F$  и необходимую ширину  $b$  листов. Принять допускаемые напряжения: на растяжение  $[\sigma] = 160$  МПа, на срез  $[\tau] = 120$  МПа, на смятие  $[\sigma_c] = 320$  МПа.

*Ответ:*  $F = 220$  кН,  $b = 180$  мм.

**19.5.** Вал диаметром  $d = 50$  мм передаст через шпонку крутящий момент  $M = 2,8$  кНм на зубчатое колесо, см. рис. Шпонка имеет длину  $l = 80$  мм, ширину  $b = 16$  мм, высоту  $h = 10$  мм. Проверить соединение на срез шпонки и на смятие ступицы колеса, если допускаемые напряжения  $[\tau] = 90$  МПа,  $[\sigma_c] = 280$  МПа.

*Решение.* Определяем по очереди окружное усилие, действующее на шпонку:

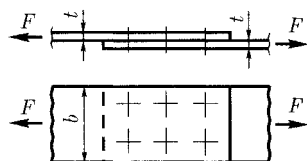
$$F_t = \frac{M}{r} = \frac{2M}{d} = 2 \cdot 2800 / 0,05 = 112000 \text{ Н},$$

касательное напряжение в сечении  $A - A$  шпонки

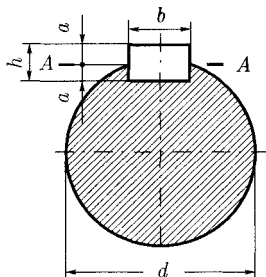
$$\tau = \frac{F_t}{bl} = 112000 / (0,016 \cdot 0,080) = 87 \cdot 10^6 \text{ Па} = 87 \text{ МПа} < [\tau],$$

напряжения смятия

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{F_t}{la} = \frac{2F_t}{lh} = 2 \cdot 112000 / (0,08 \cdot 0,01) = \\ &= 280 \cdot 10^6 \text{ Па} = 280 \text{ МПа} = [\sigma_c]. \end{aligned}$$



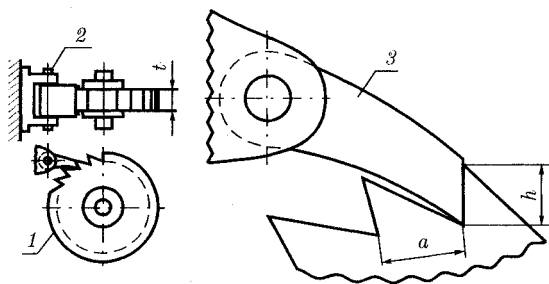
К задаче 19.4



К задаче 19.5

**19.6.** Проверить прочность зубьев храпового колеса 1 на срез и смятие собачкой 3, если нормальное усилие на зуб в момент торможения составляет  $F = 32$  кН. Размеры зуба: ширина основания  $a = 24$  мм, толщина  $t = 20$  мм, высота  $h = 10$  мм.

Определить также необходимый диаметр болта 2, на который опирается собачка 3, из условия прочности на срез и на смятие. Допускаемые напряжения принять: на срез  $[\tau] = 70$  МПа, на смятие  $[\sigma_c] = 120$  МПа.



К задаче 19.6

*Ответ:*  $\tau = 67$  МПа  $< 70$  МПа,  $\sigma_c = 100$  МПа  $< 120$  МПа,  
 $d = 13,3$  мм.

**19.7.** Две полосы толщиной  $t = 10$  мм каждая соединены двумя сварными швами, см. рис. *a*. Полосы должны обеспечивать передачу растягивающего усилия  $F = 120$  кН. Определить минимальную ширину  $b$  пластины и длину  $l$  сварного шва, если допускаемое напряжение на растяжение материала листа  $[\sigma] = 160$  МПа, допускаемое напряжение на срез материала сварного шва  $[\tau] = 90$  МПа. Катет сварного шва  $a$  равен толщине листа  $t$ . Учесть возможный непровар в начале и в конце каждого шва по  $l_o = 5$  мм.

*Решение.* Запишем условие прочности для пластины:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{bt} \leq [\sigma],$$

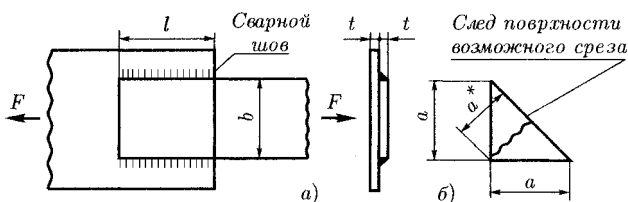
откуда

$$b = \frac{F}{t[\sigma]} = 120000 / (0,01 \cdot 160 \cdot 10^6) = 0,075 \text{ м} = 75 \text{ мм}.$$

При проверке сварного шва на срез принимают, что по его длине усилие распределяется равномерно. Тогда касательное напряжение по площади возможного среза найдем так:

$$\tau = \frac{F}{2A_*},$$





К задаче 19.07

где

$$A_* = l_* a_*.$$

Здесь  $l_*$  — расчетная длина шва,  $a_*$  — ширина поверхности возможного среза, см. рис. б. Нетрудно видеть, что

$$a_* = a \cos 45^\circ = 0,7a.$$

Таким образом, условие прочности может быть записано так:

$$\tau = \frac{F}{1,4al_*} \leq [\tau].$$

Отсюда определяем расчетную длину шва

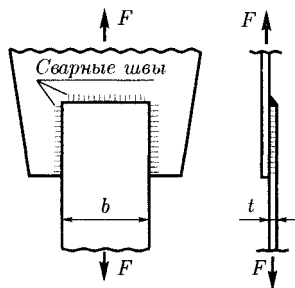
$$\begin{aligned} l_* &= \frac{F}{1,4a[\tau]} = \\ &= 120000 / (1,4 \cdot 0,01 \cdot 90 \cdot 10^6) = \\ &= 0,095 \text{ м} = 95 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Полная длина сварного шва с учетом непровара по его концам должна составлять

$$l = l_* + 2l_0 = 95 + 2 \cdot 5 = 105 \text{ мм}.$$

**19.8.** Стальная полоса шириной  $b = 100$  мм и толщиной  $t = 10$  мм соединяется внахлестку с фасонным листом тремя сварными швами (двумя фланговыми и одним лобовым), см. рис. Соединение должно передавать растягивающую силу  $F = 150$  кН. Допускаемое напряжение на срез швов  $[\tau] = 90$  МПа, катет шва равен толщине пластины. Определить наименьшую длину фланговых швов с учетом непровара в 5 мм с одного конца.

Ответ:  $l = 74$  мм.

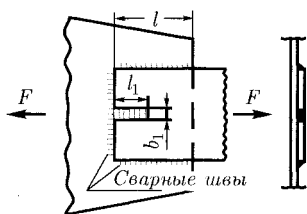


К задаче 19.8

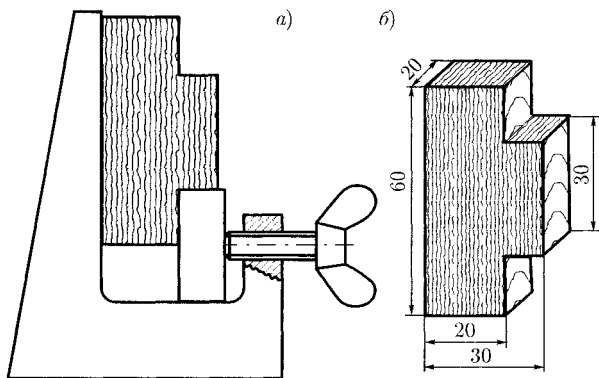
**19.9.** Стальная полоса сечением  $10 \times 240$  мм приваривается внахлестку к фасонному листу с помощью двух фланговых и одного прорезного шва. Последний имеет размеры  $b_1 = 20$  мм,  $l_1 = 100$  мм, см. рис. Определить необходимую длину фланговых швов, если полоса растягивается усилием  $F = 360$  кН, а допускаемое напряжение на срез материала швов принято  $[\tau] = 80$  МПа. Ослабление швов вследствие непровара не учитывать.

*Ответ:*  $l = 200$  мм.

**19.10.** При испытании древесины на сдвиг применяется приспособление, устанавливаемое на испытательный пресс, см. рис. а. На рис. б. дается эскиз используемого образца древесины. Определить сопротивление срезу (сопротивление скалыванию)  $\tau_{\text{ср}}$  вдоль волокон, если силовой меритель прессы показал усилие  $F = 7,2$  кН в момент разрушения. Вычислить также напряжение смятия.



К задаче 19.9



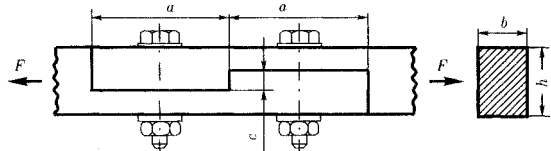
К задаче 19.10

*Ответ:*  $\tau_{\text{ср}} = 12$  МПа,  $\sigma_{\text{с}} = 36$  МПа.

**19.11.** Два бруса прямоугольного сечения ( $b = 100$  мм,  $h = 180$  мм), работающие на растяжение, соединены прямым зубом глубиной  $c = 0,25h = 45$  мм, см. рис. Определить допускаемое усилие  $[F]$  и длину  $a$  врубок при допускаемых напряжениях: на растяжение  $[\sigma] = 10$  МПа, на скалывание вдоль волокон  $[\tau] = 1$  МПа, на

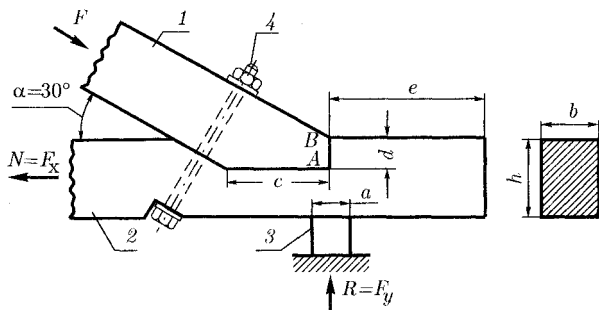
смятие вдоль волокон  $[\sigma_c] = 8 \text{ МПа}$ . Стягивающие врубку болты в расчет не принимать.

Ответ:  $[F] = 43 \text{ кН}$ ,  $a = 360 \text{ мм}$ .



К задаче 19.11

**19.12.** Соединение стропильной ноги 1 с растяжкой 2 выполнено с помощью лобовой врубки, затянутой болтом 4, см. рис. Соединение устанавливается на опору 3. Определить необходимые характерные размеры соединения ( $a, d, e, c$ ), если сжимающее усилие в стропильной ноге (раскосе) предполагается  $F = 70 \text{ кН}$ , угол наклона крыши  $\alpha = 30^\circ$ , поперечные размеры брусев  $b = 150 \text{ мм}$ ,  $h = 200 \text{ мм}$ . Допускаемые напряжения принять: на растяжение и сжатие вдоль волокон  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ , на смятие вдоль волокон  $[\sigma_c] = 8 \text{ МПа}$ , на смятие поперек волокон  $[\sigma_{90}] = 2,5 \text{ МПа}$ , на смятие под углом  $30^\circ$  к волокнам  $[\sigma_{30}] = 5 \text{ МПа}$  и на скалывание вдоль волокон  $[\tau] = 1 \text{ МПа}$ . Соединительный болт и силы трения в расчет не принимать.



К задаче 19.12

*Решение.* Разложим силу  $F$  на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$F_y = F \sin \alpha = 70 \cdot 0,5 = 35 \text{ кН}, \quad F_x = F \cos \alpha = 70 \cdot 0,865 = 60,6 \text{ кН}.$$

При этом имеем для реакции опоры 3 и для растягивающего усилия в затяжке 2

$$R = F_y = 35 \text{ кН}, \\ N = F_x = 60,6 \text{ кН}.$$

По поверхности соприкосновения опоры и горизонтального бруса возникают напряжения смятия. Составляем условие прочности:

$$\sigma_c = \frac{R}{ab} \leq [\sigma_{90}],$$

откуда

$$a \geq \frac{R}{b[\sigma_{90}]} = 35000 / (0,15 \cdot 2,5 \cdot 10^6) = 0,093 \text{ м} = 93 \text{ мм}.$$

Площадь, по которой раскос 1 ложится на затяжку 2, должна быть не меньше площади опоры 3. Поэтому размер  $c$  должен быть равен размеру  $a$ . По конструктивным соображениям, принимают  $c > a$ .

Торец раскоса и зуб растяжки соприкасаются по поверхности, след которой на рис. обозначен через  $AB$ . Для возникающих здесь напряжений следует составить два условия прочности на смятие, потому что эта площадка располагается под углом к волокнам раскоса и поперек волокон затяжки. Так как  $[\sigma_{30}] < [\sigma_c]$ , то принимаем во внимание лишь следующее условие прочности:

$$\sigma_c = \frac{N}{bd} \leq [\sigma_{30}],$$

откуда

$$d \geq \frac{N}{b[\sigma_{30}]} = 60600 / (0,15 \cdot 5 \cdot 10^6) = 0,081 \text{ м} = 81 \text{ мм}.$$

Это же усилие  $N$  вызывает появление касательных напряжений в выступающем конце затяжки (на длине  $e$ ). Условие прочности записывается так:

$$\tau = \frac{N}{be} \leq [\tau],$$

откуда

$$e \geq \frac{N}{b[\tau]} = 60600 / (0,15 \cdot 1 \cdot 10^6) = 0,404 \text{ м} = 404 \text{ мм}.$$

## УСТАЛОСТЬ МЕТАЛЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

**20.1.** Технологическая вагонетка катится по рельсам на двух колесных парах. Одна такая колесная пара изображена схематически на рис. Расчетная масса вагонетки с грузом составляет  $m = 1000$  кг. Ось колесной пары имеет диаметр  $d = 2r = 34$  мм и вылет консольной части  $AB$  (или  $CD$ )  $a = 200$  мм. Определить коэффициент запаса  $s$  по отношению к предельному состоянию усталостного разрушения, если ось изготовлена из стали 45.

*Решение.* Коэффициент запаса в данном случае вычисляется как обычно

$$s = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\text{max}}},$$

где  $\sigma_{\text{max}}$  — максимальное нормальное напряжение, возникающее в поперечном сечении оси при ее изгибе,  $\sigma_{\text{пред}}$  — предельное напряжение, равное пределу выносливости  $\sigma_{-1}$  материала (определенному из испытаний на изгиб).

Для стали 45 примем из таблицы 20.1

$$\sigma_{-1} = 250 \text{ МПа.}$$

Ось вагонетки находится в условиях изгиба моментом

$$M = Fa = \frac{1}{4}mga = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,2/4 = 490 \text{ Нм.}$$

Момент сопротивления сечения оси составляет

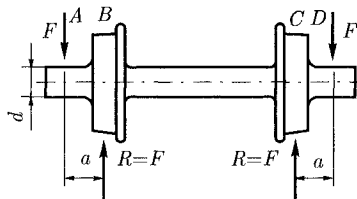
$$W = \frac{1}{4}\pi r^3 = 3,14 \cdot 0,017^3/4 = 3,86 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Вычисляем максимальное нормальное напряжение при изгибе оси

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W} = 490/(3,86 \cdot 10^{-6}) = 127 \cdot 10^6 \text{ Па} = 127 \text{ МПа,}$$

а затем и коэффициент запаса

$$s = 250/127 = 1,97.$$



К задаче 20.1

Таблица 20.1

Характеристики прочности некоторых сталей после термообработки: закалка плюс высокий отпуск (для ориентировочных учебных расчетов)

| Материал   | Предел текучести $\sigma_y$ или $\sigma_{0,2}$ , МПа | Предел прочности $\sigma_u$ , МПа | Предел выносливости в опытах |                                           |                               |
|------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------|
|            |                                                      |                                   | на изгиб $\sigma_{-1}$ , МПа | на растяжение-сжатие $\sigma_{-1t}$ , МПа | на кручение $\tau_{-1}$ , МПа |
| Сталь 45   | 340–360                                              | 600–750                           | 250–340                      | 190–240                                   | 140–190                       |
| Сталь 40X  | 650–900                                              | 730–1050                          | 320–480                      | 220–340                                   | 210–260                       |
| Сталь 40XH | 800–1300                                             | 1000–1450                         | 460–600                      | 310–420                                   | —                             |

**20.2.** Подобрать сечение оси технологической тележки по условиям задачи 20.1, если нормативный коэффициент запаса предписывается принять  $[s] = 1,7$ . Расчет осуществить для сталей 45, 40X и 40XH.

*Ответ:* 32,4 мм; 29,8 мм; 26,4 мм.

**20.3.** Дать оценку параметрам уравнения кривой усталости

$$\sigma_{-1N} = AN^{-\frac{1}{m}} \quad (1)$$

для стали 45.

*Решение.* В справочной литературе по общему машиностроению рекомендуется для углеродистых и низколегированных сталей принимать единое усредненное значение показателя уравнения (1), а именно:

$$m = 9.$$

Кроме того там же принято считать, что перелом на кривой усталости имеет место в среднем при количестве циклов

$$N_G = 2 \cdot 10^6.$$

Таким образом, в данной задаче осталось определить лишь параметр  $A$ . Получаем его из (1):

$$A = \sigma_{-1} \sqrt[m]{N_G} = 250 \sqrt[9]{2 \cdot 10^6} = 1253 \text{ МПа}.$$

**20.4.** Установить параметр  $A$  в уравнении кривой усталости (см. уравнение (1) в решении задачи 20.3) для сталей 40X и 40XH.

*Ответ:* 1604 МПа; 2306 МПа.

**20.5.** Подобрать сечение оси вагонетки по условиям задач 20.1 и 20.2 для случая ее ограниченной выносливости лишь до  $N = 2 \cdot 10^5$  циклов (оборотов колеса). Уравнение кривой усталости принять из задачи 20.3 для стали 45.

*Решение.* В данном случае предел ограниченной выносливости составляет

$$\sigma_{-1N} = AN^{-\frac{1}{m}} = 1253/\sqrt[9]{2 \cdot 10^5} = 323 \text{ МПа},$$

а допускаемое напряжение

$$[\sigma_{-1N}] = \frac{\sigma_{-1N}}{[s]} = 323/1,7 = 190 \text{ МПа}.$$

После этого подбор сечения не представляет труда

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{4M}{\pi[\sigma_{-1N}]}} = (4 \cdot 490 / (3,14 \cdot 190 \cdot 10^6))^{1/3} = 0,0148 \text{ м} = 14,8 \text{ мм}.$$

Следовательно, имеем

$$d = 2r = 2 \cdot 14,8 = 29,6 \text{ мм}.$$

*Примечание.* Еще раз подчеркнем, что эксплуатация вагонетки за пределами заданного ресурса в  $N = 2 \cdot 10^5$  циклов *не допускается*.

**20.6.** Стержень круглого сечения должен работать в условиях переменного изгиба по симметричному циклу с амплитудой изгибающего момента  $M_a = 300 \text{ Нм}$ . Кроме того к стержню приложена постоянная растягивающая сила  $N = 80 \text{ кН}$ . Подобрать сечение стержня, если в качестве материала используется сталь 45. Нормативный коэффициент запаса принять  $[s] = 1,6$ .

*Решение.* В данном случае стержень находится в условиях нагружения по несимметричному циклу. В подобных обстоятельствах условие прочности записывается с использованием понятия приведенной амплитуды  $\sigma_a^*$  для опасных объемов стержня:

$$\sigma_a^* = \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \sigma_m \leq [\sigma]. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_u$  – предел прочности материала,  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$  – амплитудное и среднее напряжение цикла, причем

$$\sigma_a = \frac{M_a}{W} = \frac{4M_a}{\pi r^3},$$

$$\sigma_m = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi r^2}.$$

С учетом последних выражений условие прочности (1) приобретает вид

$$\sigma_a^* = \frac{4M_a}{\pi r^3} + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \cdot \frac{N}{\pi r^2} \leq [\sigma].$$

Устанавливаем допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{[s]} = 250/1,6 = 156 \text{ МПа},$$

после чего методом подбора находим минимально допустимый диаметр стержня

$$d = 2r \geq 30,4 \text{ мм.}$$

Предоставляем читателю удостовериться, что при  $d = 30,4$  мм имеем

$$\begin{aligned}\sigma_a &= 108,7 \text{ МПа}, \sigma_m = 110,0 \text{ МПа}, \\ \sigma_{\max} &= \sigma_a + \sigma_m = 218,7 \text{ МПа}, \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a = 1,3 \text{ МПа}, \\ \sigma_a^* &= 108,7 + (250/600) \cdot 110 = 155 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Кроме того можно вычислить коэффициент асимметрии цикла

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 1,3/218,7 \approx 0,006.$$

Таким образом, здесь реализуется знакопостоянный, близкий к отнулевому цикл переменного нагружения.

**20.7.** На проволоке (сталь 40ХН), протянутой над улицей шириной  $l = 40$  м, подвешен фонарь. Проволока ( $d = 4$  мм) натянута до усилия  $N = 4000$  Н. Под действием ветра фонарь колеблется, вызывая в проволоке продольные переменные деформации с амплитудой  $\Delta l = 6$  мм. Оценить коэффициент запаса  $s$  по отношению к предельному состоянию усталостного разрушения.

*Решение.* Площадь поперечного сечения проволоки составляет

$$A = \pi r^2 = 3,15 \cdot 2^2 = 12,57 \text{ мм}^2 = 12,57 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

что позволяет найти постоянное напряжение цикла

$$\sigma_m = \frac{N}{A} = 4000/(12,57 \cdot 10^{-6}) = 318 \cdot 10^6 \text{ Па} = 318 \text{ МПа}.$$

Амплитудное значение относительной деформации определяем очевидным образом:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta l}{l} = 0,006/40 = 15 \cdot 10^{-5},$$

благодаря чему получаем возможность вычислить амплитудное напряжение цикла

$$\sigma_a = \varepsilon_a E = 15 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{11} = 30 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30 \text{ МПа}.$$

Так как проволока растянута, то в расчетах на усталость следует основываться на пределе выносливости, определенном в испытаниях на циклическое растяжение-сжатие (см. табл. 20.1):

$$\sigma_{-1t} = 310 \text{ МПа}.$$



Приведенную амплитуду подсчитываем стандартным образом:

$$\sigma_a^* = \sigma_a + \frac{\sigma_{-1t}}{\sigma_u} \sigma_m = 30 + (310/1000) \cdot 318 = 128,6 \text{ МПа.}$$

Следовательно, для коэффициента запаса имеем

$$s = \frac{\sigma_{-1t}}{\sigma_a^*} = 310/128,6 = 2,41.$$

**20.8.** Цилиндрическая винтовая пружина имеет  $n = 10$  витков при среднем радиусе навивки  $R = 9$  мм и диаметре проволоки  $d = 2r = 4$  мм. Материал проволоки – сталь 40ХН. Пружина предварительно сжата на  $y_m = 2$  мм. При дальнейшей эксплуатации пружина испытывает переменную осадку с амплитудой  $y_a = 1,5$  мм. Оценить коэффициент запаса  $s$  по отношению к предельному состоянию усталостного разрушения.

*Решение.* Найдём сначала развернутую длину проволоки пружины

$$l = 2\pi Rn = 2 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10 = 566 \text{ мм} = 0,566 \text{ м},$$

а также полярный момент инерции и полярный момент сопротивления ее сечения

$$I_p = \frac{1}{2}\pi r^4 = 3,14 \cdot 2^4/2 = 25,13 \text{ мм}^4 = 25,13 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4,$$

$$W_p = \frac{I_p}{r} = 25,13/2 = 12,57 \text{ мм}^3 = 12,57 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

После этого вычисляем среднее и амплитудное значение сжимающей силы:

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{y_m G I_p}{R^2 l} = 0,002 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 25,13 \cdot 10^{-12} / (0,009^2 \cdot 0,566) = \\ &= 87,7 \text{ Н}, \\ F_a &= 65,8 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Далее можно дать оценку среднему и амплитудному значению касательного напряжения, возникающего в стержне пружины,

$$\begin{aligned} \tau_m &= \frac{F_m R}{W_p} = 87,7 \cdot 0,009 / (12,57 \cdot 10^{-9}) = 62,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 62,8 \text{ МПа}, \\ \tau_a &= 47,1 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Приведенную амплитуду касательных напряжений следует считать по формуле

$$\tau_a^* = \tau_a + \frac{\tau_{-1}}{\tau_u} \tau_m.$$

В табл. 20.1 нет значений характеристик прочности  $\tau_{-1}$  и  $\tau_u$ . В подобных обстоятельствах рекомендуется отношение  $\tau_{-1}/\tau_u$  заменить близким

к нему выражением  $\sigma_{-1}/\sigma_u$ . В этом случае формула для приведенной амплитуды касательных напряжений принимает вид

$$\tau_a^* = \tau_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \tau_m. \quad (1)$$

В нашей задаче имеем

$$\tau_a^* = 47,1 + (460/1000) \cdot 62,8 = 76 \text{ МПа.}$$

Для вычисления коэффициента запаса необходимо знать предельное напряжение, равное пределу выносливости  $\tau_{-1}$ . У нас нет значения этой характеристики прочности. Оценим ее по величине предела выносливости  $\sigma_{-1}$ . Выше в гл. 6 мы уже занимались подобного рода оценками, когда предел текучести  $\tau_y$  вычисляли по пределу текучести  $\sigma_y$ :

$$\tau_y = 0,5\sigma_y.$$

Такая оценка основывалась на критерии максимальных касательных напряжений (критерии Треска–Сен-Венана). Оказалось, что этот критерий может быть обобщен на случай нагружения конструкционного элемента циклическими нагрузками:

$$\tau_{-1} = 0,5\sigma_{-1}.$$

В нашем случае

$$\tau_{-1} = 0,5 \cdot 460 = 230 \text{ МПа.}$$

Таким образом, имеем для коэффициента запаса

$$s = \frac{\tau_{\text{пред}}}{\tau_a^*} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a^*} = 230/76 = 3,03.$$

**20.9.** Подобрать радиус  $r$  поперечного сечения стержня, нагружаемого переменными изгибающим и крутящим моментами  $M_{\text{изг}} = 200 \text{ Нм}$  и  $M_{\text{кр}} = 300 \text{ Нм}$ , меняющимися во времени синфазно и по симметричному циклу. Материал – сталь 45, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,7$ .

*Решение.* В поперечном сечении стержня возникают нормальные и касательные напряжения. Наложение напряженного состояния чистого сдвига на простое растяжение дает в итоге сложное (плоское) напряженное состояние. В этом случае мерой нагруженности материала принято считать так называемые эквивалентные напряжения  $\sigma_{\text{экв}}$ . Для пластичных материалов (в том числе и для сталей) условие прочности записывается обычно так:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1)$$

В нашем случае

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{[s]} = 250/1,7 = 147 \text{ МПа.}$$

Так как

$$\sigma = \frac{M_{изг}}{W} = \frac{4M_{изг}}{\pi r^3}, \quad \tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{2M_x}{\pi r^3},$$

то неравенству (1) можно придать вид

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{4M_{изг}}{\pi[\sigma]} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{2\tau_{-1}}\right)^2 \left(\frac{M_{кр}}{M_{изг}}\right)^2}}.$$

Подставляя числа, получим

$$r \geq \sqrt[3]{(4 \cdot 200 / (3,14 \cdot 147 \cdot 10^6)) \sqrt{1 + (250/2 \cdot 140)^2 (300/200)^2}} = \\ = 0,0142 \text{ м} = 14,2 \text{ мм.}$$

Округлим значение радиуса до целого числа:

$$r = 15 \text{ мм.}$$

**20.10.** По данным предыдущей задачи 20.9 вычислить коэффициенты запаса по нормальным и касательным напряжениям  $s_\sigma$  и  $s_\tau$ , а также полный коэффициент запаса  $s$ .

*Решение.* Неравенство (1) из задачи 20.9 можно переписать так:

$$\sigma_{экв}^2 = \sigma^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau^2 \leq \frac{\sigma_{-1}^2}{[s]^2}$$

или

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{-1}}\right)^2 \leq \frac{1}{[s]^2}.$$

Введем понятия коэффициентов запаса по нормальным и касательным напряжениям:

$$s_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma},$$

$$s_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau}.$$

Тогда предыдущему неравенству можно придать вид

$$\frac{1}{s_\sigma^2} + \frac{1}{s_\tau^2} = \frac{1}{s^2} \leq \frac{1}{[s]^2}. \quad (1)$$

При  $r = 15$  мм имеем

$$W = \frac{1}{4} \pi r^3 = 3,14 \cdot 15^3 / 4 = 2651 \text{ мм}^3 = 2,651 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_n = 2W = 5,301 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

поэтому находим

$$\sigma = \frac{M_{\text{изг}}}{W} = 200 / (2,651 \cdot 10^{-6}) = 75,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 75,4 \text{ МПа},$$

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = 300 / (5,301 \cdot 10^{-6}) = 56,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 56,6 \text{ МПа}.$$

Далее вычисляем частные коэффициенты запаса

$$s_\sigma = 250 / 75,4 = 3,32,$$

$$s_\tau = 140 / 56,6 = 2,47,$$

а затем и полный коэффициент запаса (см. формулу (1))

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}} = 3,32 \cdot 2,47 / \sqrt{3,32^2 + 2,47^2} = 1,98.$$

Как и следовало ожидать, коэффициент запаса возрастает при увеличении поперечных размеров изгибаемого и скручиваемого стержня.

**20.11.** Подобрать радиус  $r$  поперечного сечения стержня, нагруженного переменными изгибающим и крутящим моментами  $M^{\text{изг}} = 200 \text{ Нм}$  и  $M^{\text{кр}} = 300 \text{ Нм}$ , меняющимися во времени синфазно, но по несимметричным циклам с коэффициентами асимметрии  $R_\sigma = -0,8$  и  $R_\tau = +0,1$ . Материал – сталь 45, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,7$ .

*Решение.* Условие прочности (1) из задачи 20.9 обобщается для рассматриваемой ситуации так:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_a^*)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 (\tau_a^*)^2} \leq [\sigma]. \quad (1)$$

Выражениям для приведенных амплитуд можно придать вид

$$\sigma_a^* = \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m,$$

$$\tau_a^* = \tau_a + \psi_\tau \tau_m,$$

если ввести обозначения

$$\psi_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u}, \quad \psi_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_u}.$$

В задаче 20.8 указывалось, что при недостатке справочных данных рекомендуется принимать

$$\psi = \psi_\sigma = \psi_\tau = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u}. \quad (2)$$

Этой рекомендации будем придерживаться как здесь, так и в решении последующих задач.

С обозначением (2) перепишем условие прочности (1) следующим образом:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{(\sigma_a + \psi \sigma_m)^2 + (\sigma_{-1}/\tau_{-1})^2 (\tau_a + \psi \tau_m)^2} \leq [\sigma] \quad (3)$$

или

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\left(\frac{M_a^{\text{изг}} + \psi M_m^{\text{изг}}}{W}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \left(\frac{M_a^{\text{кр}} + \psi M_m^{\text{кр}}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (4)$$

Кроме того, напомним, что

$$\left\{ \begin{array}{l} W_p = 2W, \\ M_a^{\text{изг}} = M^{\text{изг}} \frac{1-R_\sigma}{2}, \\ M_m^{\text{изг}} = M^{\text{изг}} \frac{1+R_\sigma}{2}, \\ M_a^{\text{кр}} = M^{\text{кр}} \frac{1-R_\tau}{2}, \\ M_m^{\text{кр}} = M^{\text{кр}} \frac{1+R_\tau}{2}. \end{array} \right. \quad (5)$$

С учетом формул (5) условие прочности (4) может быть преобразовано к виду

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2M^{\text{изг}}}{\pi[\sigma]} \sqrt{(1-R_\sigma + \psi(1+R_\sigma))^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{2\tau_{-1}}\right)^2 (1-R_\tau + \psi(1+R_\tau))^2 \left(\frac{M^{\text{кр}}}{M^{\text{изг}}}\right)^2}}.$$

Подстановка сюда чисел из условий задачи позволяет найти

$$r \geq 0,0132 \text{ м} = 13,2 \text{ мм}.$$

**20.12.** По данным предыдущей задачи 20.11 дать оценку полному коэффициенту запаса  $s$ , если радиус сечения стержня принять  $r = 14 \text{ мм}$ .

*Решение.* Сначала определяем моменты сопротивления поперечного сечения стержня

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} \pi r^3 = 3,14 \cdot 14^3 / 4 = 2155 \text{ мм}^3 = 2,155 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \\ W_p &= 2W = 4,310 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Затем вычисляем амплитудные и средние напряжения циклов

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{M^{\text{изг}}}{W} \cdot \frac{1 - R_\sigma}{2} = (200 / (2,155 \cdot 10^{-6})) (1 - (-0,8)) / 2 = \\ &= 83,5 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\ \sigma_m &= \frac{M^{\text{изг}}}{W} \cdot \frac{1 + R_\sigma}{2} = 9,3 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\ \tau_a &= \frac{M^{\text{кр}}}{W_p} \cdot \frac{1 - R_\tau}{2} = (300 / (4,31 \cdot 10^{-6})) (1 - 0,1) / 2 = 31,3 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\ \tau_m &= \frac{M^{\text{кр}}}{W_p} \cdot \frac{1 + R_\tau}{2} = 38,3 \cdot 10^6 \text{ Па},\end{aligned}$$

после чего можно перейти к приведенным амплитудам

$$\begin{aligned}\sigma_a^* &= \sigma_a + \psi \sigma_m = 83,5 + (250/600) \cdot 9,3 = 87,4 \text{ МПа}, \\ \tau_a^* &= \tau_a + \psi \tau_m = 31,3 + (250/600) \cdot 38,3 = 47,3 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Далее оцениваем частные коэффициенты запаса

$$\begin{aligned}s_\sigma &= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = 250/87,4 = 2,86, \\ s_\tau &= \frac{\tau_{-1}}{\tau_a^*} = 140/47,3 = 2,96.\end{aligned}$$

Наконец, находим полный коэффициент запаса

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}} = 2,86 \cdot 2,96 / \sqrt{2,86^2 + 2,96^2} = 2,06.$$

**20.13.** Подобрать радиус  $r$  поперечного сечения стержня, нагружаемого крутящим моментом  $M_{\text{кр}} = 10^4 \text{ Нм}$  и продольной силой  $N = 800 \text{ кН}$ , меняющимися синфазно по симметричным циклам. Материал — сталь 40ХН, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 2$ .

*Решение.* Так как здесь речь идет о переменном растяжении–сжатии стержня, то следует принимать во внимание предел выносливости

$$\sigma_{-1t} = 220 \text{ МПа},$$

см. табл. 20.1.

Допускаемое напряжение также следует назначать, исходя из принятого предела выносливости

$$[\sigma_{-1t}] = \frac{\sigma_{-1t}}{[s]} = 220/2 = 110 \text{ МПа}.$$

Условие прочности (1) из задачи 20.9 принимает здесь вид

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1t}}{\tau_{-1}}\right)^2 \left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma_{-1t}].$$

После числовых подстановок можно записать

$$\sqrt{\left(\frac{0,8 \cdot 10^6}{\pi r^2}\right)^2 + \left(\frac{310}{230}\right)^2 \left(\frac{2 \cdot 10^4}{\pi r^3}\right)^2} \leq 110 \cdot 10^6,$$

откуда подбором находим радиус стержня

$$r \geq 0,047 \text{ м} = 47 \text{ мм.}$$

Здесь принято  $\tau_{-1} = 230 \text{ МПа} = \sigma_{-1}/2$ , см. соответствующие соображения в решении задачи 20.8.

**20.14.** Подобрать радиус  $r$  поперечного сечения стержня, нагружаемого переменными крутящим моментом и продольной силой с максимальными значениями  $M_{\max}^{\text{кр}} = 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и  $N_{\max} = 800 \text{ кН}$ . Момент и сила изменяются синфазно по несимметричным циклам с коэффициентами асимметрии  $R_\tau = +0,2$  и  $R_\sigma = -0,9$  соответственно. Материал – сталь 40ХН, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 2$ .

*Решение.* Условие прочности (4) из задачи 20.11 принимает здесь следующий облик:

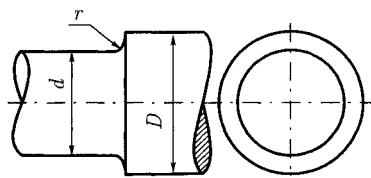
$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{N_a + \psi N_m}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1t}}{\tau_{-1}}\right)^2 \left(\frac{M_a^{\text{кр}} + \psi M_m^{\text{кр}}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma_{-1t}].$$

С учетом указаний, данных в решении задач 20.11 и 20.13, перепишем предыдущее условие прочности таким образом:

$$\left[ \frac{N_{\max}}{2\pi r^2} \left(1 - R_\sigma + \frac{\sigma_{-1t}}{\sigma_u} (1 + R_\sigma)\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{-1t}}{\sigma_{-1}}\right)^2 \left(\frac{M_{\max}^{\text{кр}}}{\pi r^3}\right)^2 \left(1 - R_\tau + \frac{\sigma_{-1t}}{\sigma_u} (1 + R_\tau)\right)^2 \right]^{1/2} \leq [\sigma_{-1t}].$$

Подстановка заданных в условии задачи чисел, а также характеристик прочности из табл. 20.1 позволяет найти методом подбора

$$r \geq 0,042 \text{ м} = 42 \text{ мм.}$$



К задаче 20.15

**20.15.** Подобрать радиус  $d = 2r_o$  ступенчатой оси (см. рис.), работающей в условиях циклического изгиба при симметричном цикле, когда максимальный за период цикла изгибающий момент  $M_{\max} = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Параметры галтели:  $D/d = 1,25$ ,  $r/d = 0,1$ . Материал – сталь 40Х, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,7$ .

Таблица 20.2

Значение эффективного коэффициента концентрации  $K_\sigma$  при циклическом изгибе вала с галтелью в зависимости от предела прочности  $\sigma_u$  материала, отношения радиуса кривизны  $r$  галтели к диаметру вала  $d$ , отношения большего диаметра вала  $D$  к меньшему  $d$

| $D/d$ | $r/d$ | Предел прочности $\sigma_u$ ,<br>МПа |      |             |
|-------|-------|--------------------------------------|------|-------------|
|       |       | $\leq 500$                           | 800  | $\geq 1000$ |
| 1,05  | 0,02  | 1,70                                 | 1,88 | 2,05        |
|       | 0,05  | 1,48                                 | 1,57 | 1,63        |
|       | 0,10  | 1,28                                 | 1,33 | 1,36        |
|       | 0,15  | 1,20                                 | 1,23 | 1,25        |
|       | 0,20  | 1,16                                 | 1,20 | 1,22        |
| 1,10  | 0,02  | 2,00                                 | 2,24 | 2,47        |
|       | 0,05  | 1,64                                 | 1,70 | 1,75        |
|       | 0,10  | 1,37                                 | 1,42 | 1,45        |
|       | 0,15  | 1,27                                 | 1,31 | 1,34        |
|       | 0,20  | 1,20                                 | 1,24 | 1,27        |
| 1,25  | 0,02  | 2,12                                 | 2,68 | 3,10        |
|       | 0,05  | 1,81                                 | 1,97 | 2,10        |
|       | 0,10  | 1,47                                 | 1,54 | 1,60        |
|       | 0,15  | 1,35                                 | 1,40 | 1,43        |
|       | 0,20  | 1,30                                 | 1,32 | 1,34        |
| 1,50  | 0,02  | 2,42                                 | —    | —           |
|       | 0,05  | 1,91                                 | 2,06 | 2,20        |
|       | 0,10  | 1,53                                 | 1,61 | 1,67        |
|       | 0,15  | 1,38                                 | 1,44 | 1,48        |
|       | 0,20  | 1,33                                 | 1,36 | 1,38        |



*Решение.* Условие прочности в подобных случаях записывается в виде

$$\sigma_{\max} K_{\sigma} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где  $K_{\sigma}$  – эффективный коэффициент концентрации местных напряжений. В данном случае можно воспользоваться табл. 20.2. Находим

$$K_{\sigma} \approx 1,54.$$

Кроме того, назначаем допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{[s]} = 320/1,7 = 188 \text{ МПа.}$$

Далее представляем неравенство (1) в виде

$$\frac{M_{\max}}{W} K_{\sigma} \leq [\sigma],$$

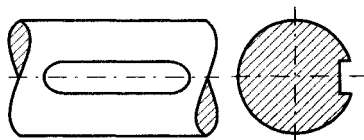
откуда

$$r_0 \geq \sqrt[3]{\frac{4M_{\max} K_{\sigma}}{\pi[\sigma]}}.$$

После подстановки чисел находим

$$d = 2r_0 \geq 2 \sqrt[3]{4 \cdot 500 \cdot 1,54 / (3,14 \cdot 188 \cdot 10^6)} = 0,0347 \text{ м} = 34,7 \text{ мм.}$$

**20.16.** Подобрать диаметр вала  $d = 2r_0$ , находящегося в условиях циклического кручения при симметричном цикле, когда максимальный за период цикла крутящий момент составляет  $M_{\max} = 500 \text{ Нм}$ . Вал имеет шпоночную канавку, обработанную пальцевой фрезой. Материал – сталь 40Х, нормативный коэффициент запаса  $[s] = 1,7$ .



К задаче 20.16

*Решение.* Условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} K_{\tau} \leq [\tau], \quad (1)$$

где  $K_{\tau}$  – эффективный коэффициент концентрации. Воспользуемся таблицей 20.3. Находим

$$K_{\tau} \approx 1,86.$$

Назначаем также допускаемое напряжение

$$[\tau] = \frac{\tau_{-1}}{[s]} = 210/1,7 = 123 \text{ МПа.}$$

Таблица 20.3

Зависимость эффективных коэффициентов концентрации  $K_\sigma$  и  $K_\tau$  от предела прочности  $\sigma_u$  материала вала со шпоночным пазом, обработанным пальцевой фрезой

| $\sigma_u$ ,<br>МПа | При изгибе<br>$K$ | При кручении<br>$K$ | $\sigma_u$ ,<br>МПа | При изгибе<br>$K$ | При кручении<br>$K$ |
|---------------------|-------------------|---------------------|---------------------|-------------------|---------------------|
| 400                 | 1,51              | 1,20                | 800                 | 2,01              | 1,86                |
| 500                 | 1,64              | 1,37                | 900                 | 2,14              | 2,05                |
| 600                 | 1,76              | 1,54                | 1000                | 2,26              | 2,22                |
| 700                 | 1,89              | 1,71                | 1200                | 2,50              | 2,39                |

Затем условие прочности (1) представляем в виде

$$d = 2r_0 \geq 2 \sqrt[3]{\frac{2M_{\max}K_\tau}{\pi[\tau]}},$$

что позволяет найти

$$d = 2r_0 \geq 2 \sqrt[3]{2 \cdot 500 \cdot 1,86 / (3,14 \cdot 123 \cdot 10^6)} = 0,0338 \text{ м} = 33,8 \text{ мм}.$$

**20.17.** Ось переменного (ступенчатого) поперечного сечения, см. рис. к задаче 20.15, помимо циклического изгиба по симметричному циклу нагружена постоянной растягивающей силой, причем  $M_{\max} = 700 \text{ Нм}$ ,  $N = 130 \text{ кН}$ . Параметры галтели  $d = 40 \text{ мм}$ ,  $D = 44 \text{ мм}$ ,  $r = 4 \text{ мм}$ . Материал – сталь 40Х. Дать оценку коэффициенту запаса  $s$ .

*Решение.* Амплитудное и среднее напряжения цикла подсчитываются так:

$$\sigma_a = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{4M_{\max}}{\pi r_0^3} = 4 \cdot 700 / (3,14 \cdot 20^3 \cdot 10^{-9}) = 111 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_m = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi r_0^2} = 130000 / (3,14 \cdot 20^2 \cdot 10^{-6}) = 103 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Эффективный коэффициент концентрации устанавливаем с помощью табл.20.2:

$$K_\sigma \approx 1,42.$$

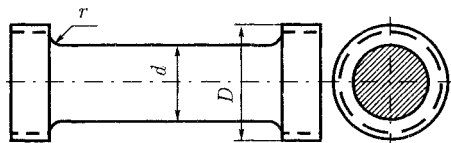
Затем вычисляем приведенную амплитуду

$$\sigma_a^* = \sigma_a K_\sigma + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \sigma_m = 111 \cdot 1,42 + (320/730) \cdot 103 = 203 \text{ МПа},$$

а также коэффициент запаса

$$s = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = 320/203 = 1,58.$$

**20.18.** Подобрать диаметр  $d = 2r_0$  вала торсиона (см. рис.), работающего в условиях несимметричного циклического скручивания, причем  $M_m^{кр} = 2000$  Нм,  $M_a^{кр} = 6000$  Нм. Эффективный коэффициент концентрации  $K_\tau$  для перехода от шлицевой к цилиндрической части принять приближенно — как для ступенчатого вала с гайтлейю. Подбор поперечных размеров осуществлять для варианта:  $D/d = 1,5$  и  $r/d = 0,1$ . Материал — сталь 40ХН. Нормативный коэффициент запаса  $[s] = 2$ .



К задаче 20.18

*Решение.* Эффективный коэффициент концентрации примем по табл. 20.4:

$$K_\tau \approx 1,38.$$

Условие прочности запишем по аналогии с неравенством (1) в задачах 20.6 и 20.17:

$$\tau_a^* = \tau_a K_\tau + \frac{\tau_{-1}}{\tau_u} \tau_m \leq [\tau].$$

В задаче 20.8 было показано, что отношение  $\tau_{-1}/\tau_u$  можно заменить выражением  $\sigma_{-1}/\sigma_u$ . Получаем

$$\begin{aligned} \tau_a^* &= \tau_a K_\tau + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \tau_m \leq [\tau], \\ \tau_a^* &= \frac{M_a^{кр}}{W_p} K_\tau + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \cdot \frac{M_m^{кр}}{W_p} = \frac{M_a^{кр}}{W_p} \left( K_\tau + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \cdot \frac{M_m^{кр}}{M_a^{кр}} \right) \leq [\tau]. \end{aligned}$$

Так как  $W_p = \pi r_0^3/2$ , то этому выражению можно придать вид

$$d = 2r_0 \geq 2 \sqrt[3]{\frac{2M_a^{кр}}{\pi[\tau]} \left( K_\tau + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \cdot \frac{M_m^{кр}}{M_a^{кр}} \right)}. \quad (1)$$

В упомянутой задаче 20.8 рекомендовалось принимать

$$[\tau] = 0,50[\sigma]$$

Таблица 20.4

Значение эффективного коэффициента концентрации  $K_\tau$  при циклическом кручении вала с галтелью в зависимости от предела прочности  $\sigma_u$  материала, отношения радиуса кривизны  $r$  галтели к диаметру вала  $d$ , отношения большего диаметра вала  $D$  к меньшему  $d$

| $\frac{D}{d}$ | $\frac{r}{d}$ | Предел прочности $\sigma_u$ ,<br>МПа |      |             |
|---------------|---------------|--------------------------------------|------|-------------|
|               |               | $\leq 500$                           | 800  | $\geq 1000$ |
|               |               |                                      |      |             |
| 1,05          | 0,02          | 1,24                                 | 1,29 | 1,33        |
|               | 0,05          | 1,15                                 | 1,18 | 1,20        |
|               | 0,10          | 1,08                                 | 1,10 | 1,12        |
|               | 0,15          | 1,06                                 | 1,08 | 1,09        |
|               | 0,20          | 1,05                                 | 1,06 | 1,07        |
| 1,10          | 0,02          | 1,40                                 | 1,52 | 1,62        |
|               | 0,05          | 1,25                                 | 1,28 | 1,30        |
|               | 0,10          | 1,12                                 | 1,16 | 1,18        |
|               | 0,15          | 1,09                                 | 1,12 | 1,14        |
|               | 0,20          | 1,06                                 | 1,08 | 1,10        |
| 1,25          | 0,02          | 1,64                                 | 1,73 | 1,80        |
|               | 0,05          | 1,40                                 | 1,45 | 1,48        |
|               | 0,10          | 1,20                                 | 1,27 | 1,32        |
|               | 0,15          | 1,15                                 | 1,20 | 1,24        |
|               | 0,20          | 1,09                                 | 1,13 | 1,16        |
| 1,50          | 0,02          | 1,76                                 | 1,97 | 2,14        |
|               | 0,05          | 1,48                                 | 1,56 | 1,62        |
|               | 0,10          | 1,24                                 | 1,32 | 1,38        |
|               | 0,15          | 1,19                                 | 1,25 | 1,29        |
|               | 0,20          | 1,10                                 | 1,18 | 1,24        |

в случае отсутствия данных о пределе выносливости  $\tau_{-1}$ . В данной ситуации имеем

$$[\tau] = \frac{\sigma_{-1}}{2[s]} = 460/(2 \cdot 2) = 115 \text{ МПа.}$$

Подставляя числа в условие прочности (1), находим

$$d = 2r_0 \geq 2 \sqrt[3]{2 \cdot 6000(1,38 + (460/1000)(2000/6000))(3,14 \cdot 115 \cdot 10^6)} = 0,074 \text{ м} = 74 \text{ мм.}$$

**20.19.** Вал диаметром  $d = 38$  мм со шпоночным пазом одновременно с циклическим изгибом нагружен синфазным переменным кручением, а также неизменной растягивающей силой. Изгиб осуществляется по симметричному циклу ( $R_{\text{изг}} = -1$ ), кручение — по отнулевому ( $R_{\text{кр}} = 0$ ), причем  $M_{\text{max}}^{\text{изг}} = 200$  Нм,  $M_{\text{max}}^{\text{кр}} = 500$  Нм,  $N = 80$  кН. Материал — сталь 40Х. Оценить полный коэффициент запаса  $s$ .

*Решение.* Предварительно определяем эффективные коэффициенты концентрации, см. табл. 20.3:

$$K_{\sigma} = 2,01, \quad K_{\tau} \approx 1,86,$$

а затем площадь и моменты сопротивления поперечного сечения вала

$$A = \pi r_0^2 = 3,14 \cdot 19^2 = 1134 \text{ мм}^2 = 1134 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$W = \frac{1}{4} \pi r_0^3 = 3,14 \cdot 19^3 / 4 = 5387 \text{ мм}^3 = 5,387 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_p = 2W = 10,78 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Далее находим амплитудные и средние напряжения цикла

$$\sigma_a = \frac{M_{\text{max}}^{\text{изг}}}{A} W = 200 / (5,39 \cdot 10^{-6}) = 37,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 37,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_m = \frac{N}{A} = 80000 / (1134 \cdot 10^{-6}) = 70,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70,6 \text{ МПа},$$

$$\tau_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{\text{max}}^{\text{кр}}}{W_p} = 500 / (2 \cdot 10,78 \cdot 10^{-6}) = 23,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,2 \text{ МПа},$$

$$\tau_m = \tau_a = 23,2 \text{ МПа}.$$

После этого нетрудно найти приведенные амплитуды (см. задачу 20.12):

$$\sigma_a^* = \sigma_a K_{\sigma} + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \sigma_m = 37,1 \cdot 2,01 + (320/730) \cdot 70,6 = 105,5 \text{ МПа},$$

$$\tau_a^* = \tau_a K_{\tau} + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \tau_m = 23,2 \cdot 1,86 + (320/730) \cdot 23,2 = 53,3 \text{ МПа}.$$

Наконец, вычисляем частные коэффициенты запаса

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = 320/105,5 = 3,03,$$

$$s_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a^*} = 210/53,3 = 3,94$$

и полный коэффициент запаса

$$s = \frac{s_{\sigma} s_{\tau}}{\sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}} = 3,03 \cdot 3,94 / \sqrt{3,03^2 + 3,94^2} = 2,40.$$

**20.20.** Уточнить оценку полного коэффициента запаса  $s$  в предыдущей задаче 20.19, дополнительно учитывая влияние качества поверхности и размеров изделия на усталостную прочность материалов. Рассмотреть вариант тонко обточенной поверхности вала.

*Решение.* Упомянутые в условии задачи факторы учитываются с помощью коэффициента влияния шероховатости  $K_F$  и коэффициента влияния абсолютных размеров изделия  $K_d$ , см. табл. 20.5 и 20.6.

Таблица 20.5

Значение коэффициента влияния шероховатости  $K_F$  при циклическом изгибе вала в зависимости от предела прочности  $\sigma_u$  материала, вида обработки поверхности

| Вид поверхности  | Предел прочности $\sigma_u$ , МПа |      |      |      |      |
|------------------|-----------------------------------|------|------|------|------|
|                  | 400                               | 600  | 800  | 1000 | 1200 |
| Шлифованная      | 0,95                              | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,87 |
| Тонко обточенная | 0,93                              | 0,88 | 0,84 | 0,80 | 0,77 |
| Грубо обточенная | 0,91                              | 0,84 | 0,77 | 0,71 | 0,66 |
| С окалиной       | 0,80                              | 0,64 | 0,53 | 0,45 | 0,38 |

Применительно к данной задаче находим из табл. 20.5 и 20.6 (с использованием линейной интерполяции):

$$K_F = 0,85, \quad K_d = 0,63.$$

Тогда получаем для приведенных амплитуд

$$\sigma_a^* = \sigma_a \frac{K_{\sigma}}{K_F K_d} + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \sigma_m =$$

$$= 37,1 \cdot 2,01 / (0,85 \cdot 0,63) + (320/730) \cdot 70,6 = 172,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_a^* = \tau_a \frac{K_{\tau}}{K_F K_d} + \frac{\tau_{-1}}{\sigma_u} \tau_m =$$

$$= 23,2 \cdot 1,86 / (0,85 \cdot 0,63) + (320/730) \cdot 23,2 = 90,8 \text{ МПа},$$

Таблица 20.6

Значение коэффициента влияния размеров  $K_d$  при циклическом нагружении вала в зависимости от его диаметра  $d$ , а также от вида материала, наличия или отсутствия концентратора

| Материал детали,<br>наличие или отсутствие<br>концентратора                          | Диаметр вала $d$ , мм |      |      |      |      |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|------|------|------|------|--------|--------|
|                                                                                      | 10                    | 20   | 30   | 40   | 60   | 100    | 200    |
| Углеродистая сталь,<br>без концентратора                                             | 1                     | 0,96 | 0,91 | 0,86 | 0,78 | 0,70   | 0,54   |
| Углеродистая сталь,<br>с концентратором.<br>Легированная сталь,<br>без концентратора | 1                     | 0,93 | 0,86 | 0,78 | 0,70 | 0,60   | (0,48) |
| Легированная сталь,<br>с концентратором                                              | 1                     | 0,91 | 0,72 | 0,64 | 0,53 | (0,45) | —      |
| Любая сталь, с сильным<br>концентратором типа<br>надреза                             | 1                     | 0,68 | 0,50 | —    | —    | —      | —      |

а также для частных коэффициентов запаса

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = 320/172,1 = 1,86,$$

$$s_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a^*} = 210/90,8 = 2,31.$$

Наконец, даем оценку полному коэффициенту запаса

$$s = \frac{s_{\sigma} s_{\tau}}{\sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}} = 1,86 \cdot 2,31 / \sqrt{1,86^2 + 2,31^2} = 1,46.$$

Таким образом, в данном случае учет влияния шероховатости поверхности изделия и его абсолютных размеров влечет за собой уменьшение коэффициента запаса в  $2,40/1,46 = 1,66$  раза. Такое изменение коэффициента запаса следует признать существенным.

**20.21.** Опасный участок вала зубчатой передачи подвержен действию циклического изгибающего момента (по симметричному циклу) и постоянного во времени крутящего момента, причем  $M_{изг} = 300$  Нм и  $M_{кр} = 500$  Нм. Вал имеет диаметр  $d = 40$  мм. Поверхность этого участка вала отшлифована и предназначена для посадки на нее с натягом внутреннего кольца шарикоподшипника. Материал – сталь 45. Дать оценку полному коэффициенту запаса  $s$ .

*Решение.* Вычислим амплитудные и средние значения нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении вала:

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{M_{изг}}{W} = \frac{4M_{изг}}{\pi r_o^3} = \\ &= 4 \cdot 300 / (3,14 \cdot 0,02^3) = 47,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,7 \text{ МПа}, \\ \sigma_m &= 0, \\ \tau_a &= 0, \\ \tau_m &= \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{2M_{кр}}{\pi r_o^3} = \\ &= 2 \cdot 500 / (3,14 \cdot 0,02^3) = 39,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 39,8 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Приведенная амплитуда касательных напряжений, подсчитывается по "усеченной" формуле (ввиду условия  $\tau_a = 0$ ):

$$\tau_a^* = \frac{\tau_{-1}}{\tau_u} \tau_m = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \tau_m = (250/600) \cdot 39,8 = 16,6 \text{ МПа}.$$

Выражение для приведенной амплитуды нормальных напряжений при наличии на валу кольца, посаженного с натягом, записывается так:

$$\sigma_a^* = \sigma_a \left( \frac{K_\sigma}{K_d} \right)_0 \xi + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \sigma_m.$$

Здесь величина  $\sigma_m$  оказалась равной нулю, а множители  $(K_\sigma/K_d)_0$  и  $\xi$  определяются с помощью таблиц 20.7 и 20.8:

$$\left( \frac{K_\sigma}{K_d} \right)_0 = 2,16, \quad \xi = 1,14.$$

Таким образом, можно получить

$$\sigma_a^* = 47,1 \cdot 2,16 \cdot 1,14 = 116 \text{ МПа}$$

Наконец, определяем частные коэффициенты запаса

$$\begin{aligned}s_\sigma &= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = 250/116,0 = 2,16, \\ s_\tau &= \frac{\tau_{-1}}{\tau_a^*} = 140/16,6 = 8,40,\end{aligned}$$

что позволяет дать оценку полному коэффициенту запаса

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}} = 2,16 \cdot 8,4 / \sqrt{2,16^2 + 8,4^2} = 2,09.$$

**20.22.** Технологическая вагонетка предназначена для длительной работы по перевозке груза массой  $m$ . Угловая скорость вращения колес вагонетки планируется  $\omega = 50$  рад/с. Технологической



Таблица 20.7

Зависимость отношения  $(K_\sigma/K_d)_o$  от диаметра  $d$  вала в случае напрессовки на него кольца с натягом (например, кольца шарикоподшипника)

| $d$ , мм           | 30   | 40   | 50   | 60   | 80   | 100  | 150  | 200  |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $(K_\sigma/K_d)_o$ | 1,92 | 2,16 | 2,32 | 2,42 | 2,56 | 2,64 | 2,80 | 2,88 |

Таблица 20.8

Зависимость коэффициента  $\xi$  от предела прочности  $\sigma_u$  материала вала

| $\sigma_u$ , МПа | 500  | 600  | 700  | 800  | 900  | 1000 | 1200 |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\xi$            | 1,00 | 1,14 | 1,28 | 1,42 | 1,56 | 1,70 | 1,84 |

схемой предусмотрено, что груз имеет массу  $m_1 = 1800$  кг в течение  $N_1 = 1200$  оборотов колеса,  $m_2 = 1000$  кг — в течение  $N_2 = 5 \cdot 10^6$  оборотов,  $m_3 = 1600$  кг — в течение  $N_3 = 1500$  оборотов, после чего описанная последовательность и длительность нагрузок повторяется вновь. В ходе решения задачи 20.2 (1) установлено, что в поперечном сечении оси при  $a = 0,2$  м,  $d = 32,4$  мм,  $m = 1000$  кг (см. рис. к задаче 20.1) возникают нормальные напряжения  $\sigma = 147$  МПа, равные допускаемому  $[\sigma]$ . Определить предельное количество оборотов  $N_{\text{пред}}$  колеса вагонетки (ее долговечность), а также допускаемое количество оборотов  $[N]$  (ресурс), если нормативный коэффициент запаса по долговечности назначен  $[s_N] = 10$ .

*Решение.* Условиями задачи вагонетке предписан так называемый ступенчато-блочный режим нагружения. Здесь на второй, самой длительной ступени внутри одного блока имеем напряжение

$$\sigma_{(2)} = 147 \text{ МПа} = [\sigma].$$

Аналогичные напряжения на первой и третьей ступенях подсчитаем очевидным образом:

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} \frac{m_1}{m_2} = 147 \cdot 1800/1000 = 265 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{(3)} = \sigma_{(2)} \frac{m_3}{m_2} = 147 \cdot 1600/1000 = 235 \text{ МПа}.$$

В подобных расчетах удобно пользоваться особым условным понятием "поврежденность", которая вычисляется для каждой ступени отдельно,

а затем просто суммируется (по формуле Майнера–Пальмгрена):

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_i^{\text{разр}}}, \quad (1)$$

где  $n$  – количество ступеней в одном блоке,  $N_i$  – количество циклов нагружения на  $i$ -й ступени,  $N_i^{\text{разр}}$  – разрушающее количество циклов, соответствующее нагрузке на  $i$ -й ступени. В нашей задаче формула (1) для поврежденности в одном блоке нагружения принимает вид

$$\Pi = \frac{N_1}{N_1^{\text{разр}}} + \frac{N_2}{N_2^{\text{разр}}} + \frac{N_3}{N_3^{\text{разр}}}. \quad (2)$$

Кроме того, здесь имеем

$$N_2^{\text{разр}} \rightarrow \infty, \quad N_3^{\text{разр}} \rightarrow \infty,$$

потому что соответствующие напряжения меньше предела выносливости  $\sigma_{-1} = 250$  МПа.

Разрушающее же количество циклов на первой ступени подсчитаем прямо по уравнению кривой усталости (см. задачи 20.3, 20.4 и 20.5):

$$N_1^{\text{разр}} = \left( \frac{A}{\sigma_{(1)}} \right)^m = (1253/265)^9 = 1,18 \cdot 10^6 \text{ циклов.}$$

Тогда поврежденность, накапливаемая в одном блоке, составит

$$\Pi_{\text{бл}} = \frac{N_1}{N_1^{\text{разр}}} = 1200/(1,18 \cdot 10^6) = 1,017 \cdot 10^{-3}.$$

Считается, что предельного состояния конструкция достигает, когда суммарная поврежденность за  $Q$  блоков становится равной единице:

$$\Pi_{\text{бл}} Q_{\text{разр}} = 1,$$

откуда разрушающее количество блоков находится так:

$$Q_{\text{разр}} = \frac{1}{\Pi_{\text{бл}}} = 1/(1,017 \cdot 10^{-3}) = 983 \text{ блока.}$$

Допускаемое количество блоков (ресурс) определяется обычным образом:

$$[Q] = \frac{Q_{\text{разр}}}{[s_N]} = 983/10 \approx 98 \text{ блоков.}$$

Вычислим затем допускаемое (ресурсное) количество оборотов колеса

$$\begin{aligned} [N] &= [Q](N_1 + N_2 + N_3) = 98 \cdot (1200 + 5 \cdot 10^6 + 1500) = \\ &= 490 \cdot 10^6 \text{ оборотов,} \end{aligned}$$

а затем и допускаемое (ресурсное) время непрерывной эксплуатации

$$\begin{aligned}[t] &= 2\pi[N]/\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 490 \cdot 10^6 / 50 = 62 \cdot 10^6 \text{ с} = \\ &= 17104 \text{ ч} = 712 \text{ суток}.\end{aligned}$$

**20.23.** Стержень по условию задачи 20.6 предполагается эксплуатировать по ступенчато-блочному режиму нагружения. В блоке – две ступени: в первой имеем заданную в задаче 20.6 нагрузку, во второй предполагается нагрузка, превосходящая предыдущую в 1,7 раза. Длительность первой ступени –  $2 \cdot 10^6$  циклов, длительность второй – 600. Определить предельное (разрушающее)  $Q_{\text{разр}}$  и допускаемое  $[Q]$  числа блоков, если нормативный коэффициент запаса по долговечности составляет  $[s_N] = 10$ .

*Решение.* Приведенная амплитуда на первой ступени меньше предела выносливости  $\sigma_{-1}$ , на второй ступени она превосходит этот предел. Поэтому накопление повреждений происходит лишь на второй ступени. В этом случае условие возникновения предельного состояния усталостного разрушения придется записывать с использованием понятия предела ограниченной выносливости:

$$\sigma_a^* = \sigma_a + \frac{\sigma_{-1N}}{\sigma_u} \sigma_m = \sigma_{-1N}.$$

Заменим величину  $\sigma_{-1N}$  соответствующим выражением из уравнения кривой усталости

$$\sigma_a + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} AN^{-\frac{1}{m}} = AN^{-\frac{1}{m}}.$$

Отсюда нетрудно получить формулу для вычисления разрушающего числа циклов

$$N_{\text{разр}} = \left( \frac{A}{\sigma_a} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right) \right)^m.$$

Подставим сюда числа, отвечающие нагрузке второй ступени, не забывая учесть коэффициент перегрузки  $K_* = 1,7$ . Получаем

$$N_{\text{разр}} = \{((1253/(108,7 \cdot 1,7))(1 - 110 \cdot 1,7/600))\}^9 = 1,05 \cdot 10^6 \text{ циклов}.$$

Далее следуем алгоритму, использованному в предыдущей задаче 20.22. Вычисляем сначала поврежденность, накапливаемую на второй ступени блока, а, следовательно, и во всем блоке:

$$P_{\text{бл}} = \frac{N_2}{N_{\text{разр}, 2}} = 600/(1,05 \cdot 10^6) = 5,71 \cdot 10^{-4}.$$

Затем определяем разрушающее и допускаемое (ресурсное) количество блоков

$$\begin{aligned}Q_{\text{разр}} &= \frac{1}{P_{\text{бл}}} = 1/(5,71 \cdot 10^{-4}) = 1752 \text{ блока}, \\ [Q] &= \frac{Q_{\text{разр}}}{[s_N]} = 1752/10 \approx 175 \text{ блоков}.\end{aligned}$$

Представляет интерес также нахождение общего разрушающего числа циклов (долговечности)

$$N_{\text{общ}} = Q_p(N_1 + N_2) = 1752 \cdot (2 \cdot 10^6 + 600) = 3,5 \cdot 10^9 \text{ циклов,}$$

а также допускаемого (ресурсного) количества циклов

$$[N] = [Q](N_1 + N_2) = 175 \cdot (2 \cdot 10^6 + 600) = 3,5 \cdot 10^8 \text{ циклов.}$$

**20.24.** Стержень из задачи 20.11 предполагается эксплуатировать по ступенчато-блочному режиму нагружения. Первая ступень в блоке —  $2 \cdot 10^6$  циклов, вторая — 900 циклов. Нагрузка на первой ступени соответствует указанной в задаче 20.11, на 2-й в  $K_* = 1,8$  раза больше. Определить допускаемое число блоков, если нормативный коэффициент запаса по долговечности предписан  $[s_N] = 10$ .

*Решение.* Выражение (1) для эквивалентного напряжения из задачи 20.11 упростим, осуществляя замену

$$\sigma_{-1} = 2\tau_{-1}.$$

Запишем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_a^*)^2 + 4(\tau_a^*)^2}$$

или

$$\sigma_{\text{экв}}^2 = \left( \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \sigma_m \right)^2 + 4 \left( \tau_a + \frac{\tau_{-1}}{\tau_u} \tau_m \right)^2,$$

Там же в задаче 20.11 указано на возможность замены отношения  $\tau_{-1}/\tau_u$  на выражение  $\sigma_{-1}/\sigma_u$ :

$$\sigma_{\text{экв}}^2 = \left( \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \sigma_m \right)^2 + 4 \left( \tau_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u} \tau_m \right)^2.$$

Запишем далее условие возникновения предельного состояния усталостного разрушения для случая  $\sigma_{\text{экв}} > \sigma_{-1}$ . В этой ситуации следует обратиться к понятию предела ограниченной выносливости

$$\sigma_{\text{экв}}^2 = \left( \sigma_a + \frac{\sigma_{-1N}}{\sigma_u} \sigma_m \right)^2 + 4 \left( \tau_a + \frac{\sigma_{-1N}}{\sigma_u} \tau_m \right)^2 = \sigma_{-1N}^2.$$

Обращаем внимание, что здесь в выражениях для приведенных амплитуд пришлось заменить  $\sigma_{-1}$  на  $\sigma_{-1N}$ , как это сделано в задаче 20.23.

Далее вместо предела ограниченной выносливости введем соответствующее выражение из уравнения кривой усталости. Получаем

$$\left( \sigma_a + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} AN_p^{-\frac{1}{m}} \right)^2 + 4 \left( \tau_a + \frac{\tau_m}{\sigma_u} AN_p^{-\frac{1}{m}} \right)^2 = \left( AN_p^{-\frac{1}{m}} \right)^2,$$

где  $N_p$  – разрушающее количество при заданных  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$ ,  $\tau_a$ ,  $\tau_m$ ,  $\sigma_u$ ,  $A$  и  $m$ . Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$a \left( AN_p^{-\frac{1}{m}} \right)^2 + b \left( AN_p^{-\frac{1}{m}} \right) + c = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 - \left( \frac{2\tau_m}{\sigma_u} \right)^2, \\ b &= -\frac{2}{\sigma_u} (\sigma_a \sigma_m + 4\tau_a \tau_m), \\ c &= -\sigma_a^2 - (2\tau_a)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Выражение (1) представляет собой квадратное уравнение относительно комплекса  $AN_p^{-\frac{1}{m}}$ . Из двух его корней имеет смысл больший

$$AN_p^{-\frac{1}{m}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) служат основой решения поставленной в условии задачи.

Для второй ступени нагружения имеем

$$M_{\max}^{\text{изг}} = M^{\text{изг}} \cdot K_* = 200 \cdot 1,8 = 360 \text{ Нм},$$

$$M_{\max}^{\text{кр}} = M^{\text{кр}} \cdot K_* = 300 \cdot 1,8 = 540 \text{ Нм},$$

$$M_a^{\text{изг}} = M_{\max}^{\text{изг}} \cdot \frac{1 - R_\sigma}{2} = 360 \cdot (1 - (-0,8))/2 = 324 \text{ Нм},$$

$$M_m^{\text{изг}} = M_{\max}^{\text{изг}} \cdot \frac{1 + R_\sigma}{2} = 360 \cdot (1 + (-0,8))/2 = 36 \text{ Нм},$$

$$M_a^{\text{кр}} = M_{\max}^{\text{кр}} \cdot \frac{1 - R_\tau}{2} = 540 \cdot (1 - 0,1)/2 = 243 \text{ Нм},$$

$$M_m^{\text{кр}} = M_{\max}^{\text{кр}} \cdot \frac{1 + R_\tau}{2} = 540 \cdot (1 + 0,1)/2 = 297 \text{ Нм}.$$

При  $r = 13,2$  мм определяем осевой и полярный моменты сопротивления

$$W = \frac{1}{4} \pi r^3 = 3,14 \cdot 0,0132^3 / 4 = 1,81 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_p = 2W = 3,62 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

а затем и напряжения

$$\sigma_a = 179,0 \text{ МПа}, \quad \sigma_m = 19,9 \text{ МПа},$$

$$\tau_a = 67,1 \text{ МПа}, \quad \tau_m = 82,0 \text{ МПа}.$$

Далее подставляем все это, а также  $\sigma_u = 600$  МПа в выражения (2) и (3). Найдем

$$AN_p^{-\frac{1}{m}} = 283 \text{ МПа},$$

откуда

$$N_{\text{разр}, 2} = (1253/283)^9 = 0,654 \cdot 10^6 \text{ циклов.}$$

После этого действуем по алгоритму, использованному выше в задачах 20.22 и 20.23:

$$P_{\text{бл}} = \frac{N_2}{N_{\text{разр}, 2}} = 900/(0,654 \cdot 10^6) = 1,376 \cdot 10^{-3},$$

$$Q_{\text{разр}} = \frac{1}{P_{\text{бл}}} = 1/(1,376 \cdot 10^{-3}) = 727 \text{ блоков,}$$

$$[Q] = \frac{Q_{\text{разр}}}{[s_N]} = 727/10 \approx 73 \text{ блока,}$$

$$N_{\text{общ}} = Q_{\text{разр}}(N_1 + N_2) = 727 \cdot (2 \cdot 10^6 + 900) = 1,45 \cdot 10^9 \text{ циклов,}$$

$$[N] = [Q](N_1 + N_2) = 73 \cdot (2 \cdot 10^6 + 900) = 1,45 \cdot 10^8 \text{ циклов.}$$

**20.25.** Материал кромок пера лопатки газовой турбины (см. рис.) при пуске, а затем и при останове испытывает циклическое деформирование с размахом  $\Delta \varepsilon = 0,007 = 0,7\%$ . Пользуясь кривой малоциклового усталости материала лопатки (сталь 12Х1МФ), построенной для условий рабочей температуры  $T = 500^\circ\text{C}$  (см. рис. з), установить предельное и допускаемое число циклов "пуск-останов" турбины, если нормативный коэффициент запаса по долговечности предписан  $[s_N] = 10$ .

*Решение.* На рис. а схематично изображена направляющая статорная лопатка газовой турбины. При пуске турбины воздух в ее проточной части нагревается на несколько сотен градусов за 1–2 секунды, т.е. практически мгновенно. Лопатка же прогревается медленнее и неравномерно: тонкие кромки повышают температуру быстрее средней части. Если лопатку мысленно разделить на множество продольных волокон, то на рис. б можно видеть их свободное термическое удлинение по упомянутому закону. Символами  $\Delta l_T^K$  и  $\Delta l_T^c$  обозначены удлинения кромок и средней части. В действительности волокна связаны в единый массив, благодаря чему все сечения остаются плоскими, хотя в целом лопатка удлиняется от длины  $l_0$  до  $l$ . При этом кромки укорачиваются на  $\Delta l^K$ , а середина удлиняется на  $\Delta l^c$ . Уравнение совместности перемещений имеет вид

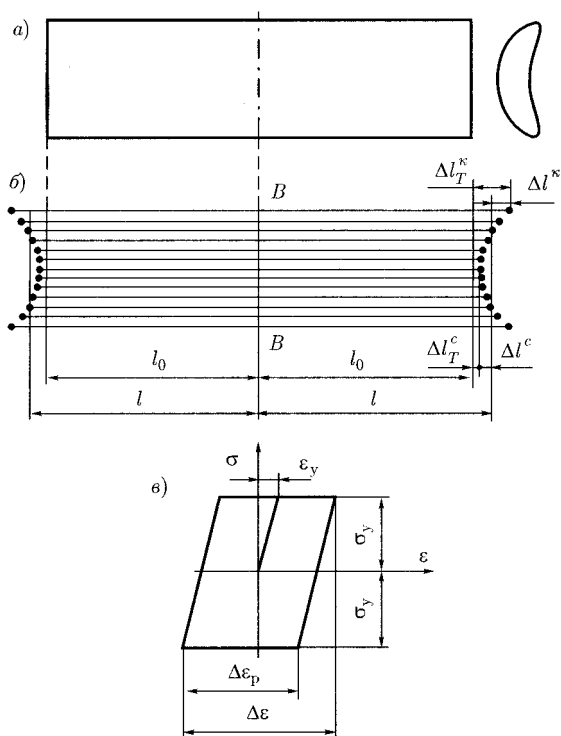
$$\Delta l^K - \Delta l^c = \Delta l_T^K - \Delta l_T^c$$

или

$$\Delta l^K \approx \Delta l_T^K - \Delta l_T^c,$$

потому что деформацией  $\Delta l^c$  можно пренебречь в первом приближении. Правую часть этого уравнения запишем через разность температур  $T_1$  и  $T_2$

$$\Delta l^K \approx \alpha l(T^K - T^c) = \alpha l \Delta T. \quad (1)$$



К задаче 20.25

При относительно небольшой разности температур можно в левой части этого соотношения заменить деформацию  $\Delta l^k$  через усилие по закону Гука:

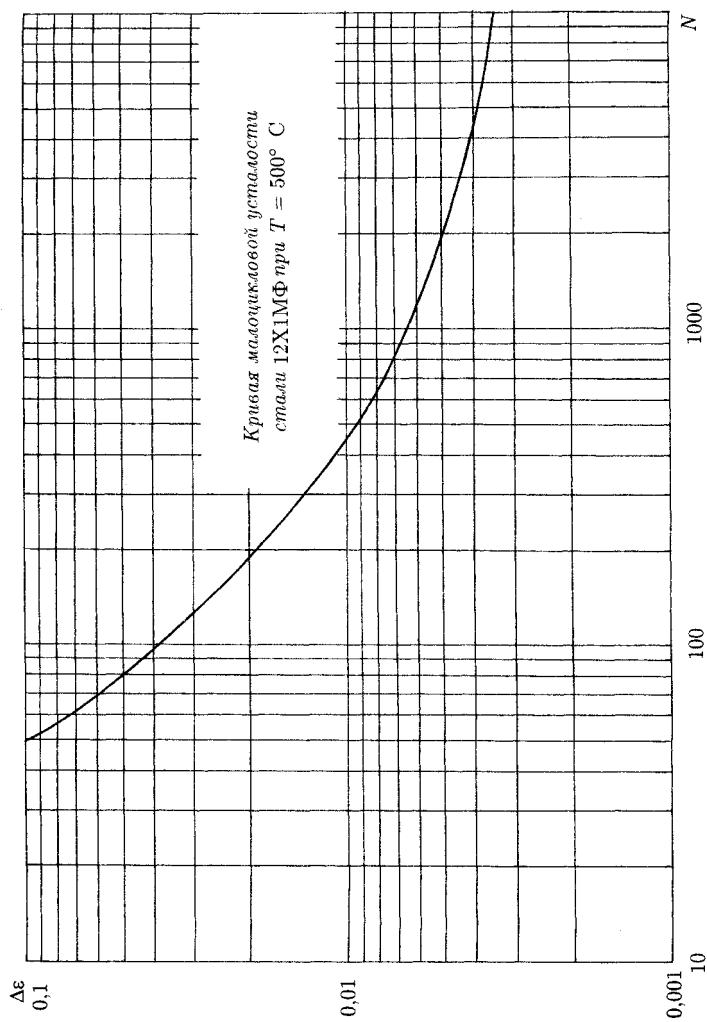
$$\frac{Nl}{EA} = \alpha l \Delta T,$$

откуда

$$\sigma = \alpha E \Delta T. \quad (2)$$

В случае, когда  $\Delta T$  превосходит  $200...300^\circ$ , из уравнения (2) следует, что термическое напряжение  $\sigma$  в кромке лопатки должно быть больше предела пропорциональности, т.е. процесс деформирования будет протекать за пределами упругости. Кромки будут пластически деформироваться, а уравнение (2) становится неприменимым.

При останове турбины процесс деформирования происходит в обратном направлении. За один цикл "пуск-останов" в кромках происходит один цикл пластических деформаций сжатия-растяжения. При последу-



К задаче 20.25



ющих пусках-остановах картина повторяется, диаграмма деформирования материала принимает вид петли гистерезиса в координатах  $\sigma - \varepsilon$ . На рис. 6 такая петля деформирования дана для случая использования в расчете материала Прандтля. Здесь через  $\Delta\varepsilon$  обозначен размах полных деформаций

$$\Delta\varepsilon = 2\alpha\Delta T. \quad (3)$$

Ширина же петли гистерезиса, называемая размахом пластических деформаций, обозначена символом  $\Delta\varepsilon_p$ , причем

$$\Delta\varepsilon_p = \Delta\varepsilon - 2\varepsilon_y = 2(\alpha\Delta T - \varepsilon_y). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E},$$

где  $\sigma_y$  – предел текучести. Поэтому соотношению (4) можно придать вид

$$\Delta\varepsilon_p = 2\left(\alpha\Delta T - \frac{\sigma_y}{E}\right). \quad (5)$$

Циклическое пластическое деформирование быстро приводит к появлению трещин усталости, а затем и к разрушению. Процесс получил название малоциклового усталости. По запросам промышленности в механических лабораториях осуществляют соответствующие эксперименты, по результатам которых строятся кривые малоциклового усталости. На рис. 2 приведена одна такая кривая, отвечающая испытаниям образцов стали 12Х1МФ при температуре  $T = 500^\circ\text{C}$ .

С помощью этой кривой устанавливаем, что при  $\Delta\varepsilon = 0,007$  долговечность составляет

$$N_{\text{пред}} = 820 \text{ циклов.}$$

Допускаемое число циклов (ресурс) подсчитывается как обычно:

$$[N] = \frac{N_{\text{пред}}}{[s_N]} = 820/10 = 82 \text{ цикла.}$$

**20.26.** Для лопатки газовой турбины, находящейся в условиях, описанных в предыдущей задаче 20.25, дать оценку предельному количеству циклов, используя уравнение Коффина–Мэнсона

$$\Delta\varepsilon_p = DN^{-\frac{1}{k}}$$

или

$$N = C(\Delta\varepsilon_p)^{-k}, \quad (1)$$

где

$$C = D^k. \quad (2)$$

Таблица 20.9

Некоторые характеристики сталей, используемых в турбомашинах

| Марка стали                                         | $T, ^\circ\text{C}$ | $\sigma_k, \text{МПа}$ | $k$  | $C$  |
|-----------------------------------------------------|---------------------|------------------------|------|------|
| 15Х1М1ФЛ (корпус)                                   | 300                 | 765                    | 1,13 | 3,04 |
|                                                     | 400                 | 688                    | 1,13 | 3,04 |
|                                                     | 560                 | 517                    | 0,74 | 12,6 |
| 20ХМЛ (корпус)<br>(фланцы)                          | 450                 | 636                    | 0,99 | 2,46 |
|                                                     | 450                 | 636                    | 0,63 | 26,7 |
| 25Л                                                 | 20                  | 664                    | 1,40 | 1,40 |
| 20ХМФЛ                                              | 400                 | 643                    | 1,30 | 0,70 |
|                                                     | 560                 | –                      | 1,27 | 0,76 |
| 20ХЗМВФ                                             | 20                  | 500                    | 1,15 | 0,47 |
|                                                     | 400                 | –                      | 1,40 | 0,47 |
|                                                     | 500                 | –                      | 1,33 | 0,62 |
|                                                     | 550                 | 320                    | 1,49 | 0,34 |
| Р2МА<br>(исходное состояние)<br>(длительная работа) | 550                 | 635                    | 0,54 | 34,8 |
|                                                     | 550                 | 544                    | 0,74 | 14,0 |
| ЭИ-415<br>(длительная работа)                       | 550                 | 810                    | 1,00 | 3,81 |
| 34ХМ1А<br>(длительная работа)                       | 450                 | 668                    | 0,86 | 16,6 |

*Примечание.* Величина  $\sigma_k$  – так называемый "циклический" предел текучести, который определяется по реальной установившейся петле гистерезиса.

Материал – сталь 15Х1М1ФЛ, рабочая температура  $T = 560^\circ\text{C}$ .

*Решение.* В современной справочной литературе можно найти сведения о параметрах  $C$  (или  $D$ ) и  $k$  для некоторых конструкционных материалов, см., например, табл. 20.9. Из этой таблицы, а также из табл. 20.10 находим для своего случая необходимые параметры

$$\sigma_k = 517 \text{ МПа}; \quad k = 0,74; \quad C = 12,6; \quad E = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Далее вычисляем значение упругой деформации при напряжении, равном пределу текучести  $\sigma_y = \sigma_k$ :

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_k}{E} = 517 \cdot 10^6 / (1,8 \cdot 10^{11}) = 0,0029.$$

Затем по формуле (4) из задачи 20.25 определяем размах пластических деформаций

$$\Delta\varepsilon_p = \Delta\varepsilon - 2\varepsilon_y = 0,0070 - 2 \cdot 0,0029 = 0,0012.$$

После этого можно переходить к оценке предельного количества циклов по формуле (2):

$$N_{\text{пред}} = \frac{C}{(\Delta\varepsilon_p)^k} = 12,6 / (0,0012^{0,74}) = 1830 \text{ циклов}.$$

В заключение следует сделать замечание относительно так называемого предела текучести  $\sigma_k$ . Эта характеристика прочности определяется по диаграмме деформирования (по петле гистерезиса), которая устанавливается после нескольких десятков начальных циклов. Дело в том, что большинство турбостроительных сталей при циклическом деформировании упрочняются, а именно: петля гистерезиса от цикла к циклу вытягивается в вертикальном направлении с одновременным некоторым уменьшением своей ширины.

Таблица 20.10

Зависимость модуля упругости  $E \cdot 10^{-11}$  Па некоторых сталей от температуры

| Марка стали | $T, ^\circ\text{C}$ |      |      |      |
|-------------|---------------------|------|------|------|
|             | 20                  | 100  | 300  | 500  |
| 30ХМ        | 2,15                | 2,12 | 2,01 | 1,82 |
| 35Х2М       | 2,15                | 2,12 | 2,01 | 1,82 |
| 35ХМФ       | 2,13                | 2,09 | 1,99 | 1,80 |
| 33ХНЗМ      | 2,07                | 2,03 | 1,92 | 1,73 |

## МЕСТНЫЕ КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

**21.1.** Стальной шарик диаметром  $d = 2R = 10$  мм прижимается к стальной плите силой  $F = 10$  Н. Вычислить наибольшее удельное давление  $q_{\max}$  в центре площадки контакта, а также эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}}$  в наиболее опасном объеме на некоторой глубине под площадкой контакта.

*Решение.* Наибольшее удельное давление находим по формуле

$$q_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R^2}},$$

см. также табл. 21.1, схему 3. Подстановка чисел дает

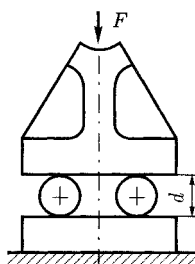
$$q_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{10 \cdot (2 \cdot 10^{11})^2 / (0,005)^2} = 978 \cdot 10^6 \text{ Па} = 978 \text{ МПа}.$$

Для вычисления эквивалентных напряжений необходимо знать главные напряжения в опасном объеме. По справочным данным находим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,20q_{\max}, \quad \sigma_3 = -0,82q_{\max}.$$

После этого можно вычислить эквивалентное напряжение по критерию максимальных касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = -0,20q_{\max} - (-0,82)q_{\max} = 0,62q_{\max} = \\ &= 0,62 \cdot 978 = 606 \text{ МПа}. \end{aligned}$$



**21.2.** Определить допускаемую силу  $[P]$ , которую может передавать шарнирная подвижная опора мостовой фермы с двумя стальными цилиндрическими катками диаметром  $d = 2R = 100$  мм и длиной  $l = 900$  мм, лежащими на стальной плите, см. рис. Допускаемое удельное давление по площадке контакта  $[q] = 1100$  МПа.

*Указание.* Наибольшее удельное давление по площадке контакта под одним катком следует определять по формуле

К задаче 21.2

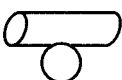
$$q_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{FE}{lR}},$$

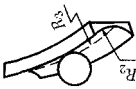
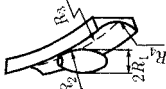
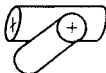
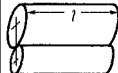
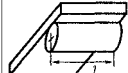
см. также схему 10 в табл. 21.1. В данной задаче усилие, приходящееся на один каток, находим из очевидных соображений:  $F = P/2$ .

*Ответ:*  $[P] = 3100$  кН.

Формулы для вычисления  $q_{\max}$ , а также коэффициентов  $A$  и  $B$

Таблица 21.1

| № | Форма соприкасающихся тел                                                           |                                                                        | Коэффициент $A$                                            | Коэффициент $B$                                            | Максимальное удельное давление $q_{\max}$ по площадке контакта |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
|   | Схема касания                                                                       | Размеры соприкасающихся тел                                            |                                                            |                                                            |                                                                |
| 1 |  | 3                                                                      | 4                                                          | 5                                                          | 6                                                              |
| 1 |  | Два шара радиусов $R_1$ и $R_2$                                        | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ | $0,388 \sqrt[3]{FE^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{(R_1 R_2)^2}}$       |
| 2 |  | Шар радиуса $R_1$ и шаровая сфера радиуса $R_2$                        | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ | $0,388 \sqrt[3]{FE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{(R_1 R_2)^2}}$       |
| 3 |  | Шар радиуса $R$ и плоскость ( $R_2 \rightarrow \infty$ )               | $\frac{1}{2R}$                                             | $\frac{1}{2R}$                                             | $0,388 \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R^2}}$                             |
| 4 |  | Шар радиуса $R_1$ и цилиндр радиуса $R_2$ ( $R_2 > R_1$ )              | $\frac{1}{2R_1}$                                           | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ | $\alpha \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R_1^2}}$                          |
| 5 |  | Шар радиуса $R_1$ и цилиндрический желоб радиуса $R_2$ ( $R_2 > R_1$ ) | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ | $\frac{1}{2R_1}$                                           | $\alpha \sqrt[3]{FE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{(R_1 R_2)^2}}$      |

| 1  | 2                                                                                   | 3                                                                                                                    | 4                                                          | 5                                                          | 6                                                           |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 6  |  | Шар радиуса $R_1$ и круговой желоб радиусов $R_2$ и $R_3$ (шарикоподшипник) ( $R_2 > R_1$ )                          | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)$ | $\alpha \sqrt[3]{FE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{(R_1 R_2)^2}}$   |
| 7  |  | Бочкообразный ролик радиусов $R_1$ и $R_2$ и круговой желоб радиусов $R_3$ и $R_4$ (шарикоподшипник) ( $R_4 > R_2$ ) | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} \right)$ | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)$ | $\alpha \sqrt[3]{FE^2 \frac{(R_4 - R_2)^2}{(R_2 R_4)^2}}$   |
| 8  |  | Два цилиндра накрест радиусов $R_1$ и $R_2$ ( $R_2 > R_1$ )                                                          | $\frac{1}{2R_2}$                                           | $\frac{1}{2R_1}$                                           | $\alpha \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R_2^2}}$                       |
| 9  |  | Два цилиндра с параллельными осями радиусов $R_1$ и $R_2$                                                            | —                                                          | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ | $0,418 \sqrt{\frac{FE}{l} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$ |
| 10 |  | Цилиндр радиуса $R$ и плоскость ( $R_2 = \infty$ )                                                                   | —                                                          | $\frac{1}{2R}$                                             | $0,418 \sqrt{\frac{FE}{lR}}$                                |

**21.3.** Через два одинаковых стальных цилиндра длиной  $l = 200$  мм передается нагрузка  $F = 100$  кН, см. рис. Определить необходимый диаметр цилиндров  $d = 2R$ , если допускаемое контактное давление по поверхности соприкосновения предписано  $[q] = 1000$  МПа. Нагрузку  $F$  считать распределенной по длине цилиндров равномерно.

*Указание.* Наибольшее удельное давление по площадке контакта следует вычислять по формуле

$$q_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{2FE}{lR}},$$

см. также схему 9 в табл. 21.1.

*Ответ:*  $d = 70$  мм.

**21.4.** Стальное колесо  $R_2 = 470$  мм катится по стальному рельсу с радиусом закругления головки  $R_1 = 300$  мм. Нагрузка на колесо составляет  $F = 80$  кН. Определить наибольшее удельное давление  $q_{\max}$  по поверхности контакта, а также эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экр}}$  на некоторой глубине под поверхностью контакта в наиболее опасном объеме.

*Решение.* Для данной задачи подходит схема 8 из табл. 21.1. Площадь контакта в подобных обстоятельствах представляет собой в первом приближении эллипс. Соотношение размеров этого эллипса в главных направлениях определяется коэффициентами  $A$  и  $B$ . В данной задаче имеем

$$A = \frac{1}{R_2}, \quad B = \frac{1}{R_1},$$

а также

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{R_1}{R_2} = 300/470 = 0,638.$$

По отношению  $\gamma = 0,638$  можно определить с помощью таблицы 21.2 коэффициент  $\alpha$ , стоящий перед радикалом в формуле для  $q_{\max}$ . Находим (с применением линейной интерполяции)

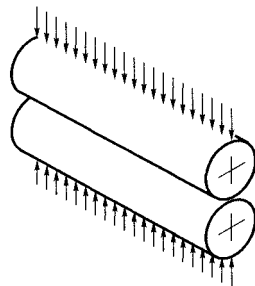
$$\alpha = 0,456.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} q_{\max} &= 0,456 \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R_2^2}} = 0,456 \sqrt[3]{80000(2 \cdot 10^{11})^2/(0,47)^2} = \\ &= 1110 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1110 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

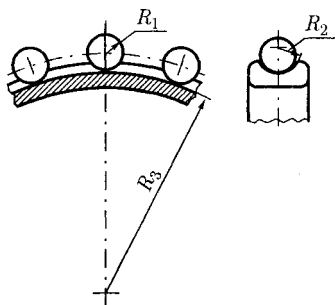
а также

$$\sigma_{\text{экр}} = 0,62 q_{\max} = 0,62 \cdot 1110 = 670 \text{ МПа}.$$



К задаче 21.3

**21.5.** Определить параметры напряженного состояния в материале внутреннего кольца стального шарикоподшипника, см. рис. Радиус шарика  $R_1 = 2,5$  мм, радиус кривизны желоба в поперечном его сечении  $R_2 = 3$  мм, радиус кривизны желоба в продольном сечении (по направлению движения шариков)  $R_3 = 30$  мм. Нагрузка на наиболее нагруженный шарик  $F = 400$  Н.



К задаче 21.5

*Решение.* К данному случаю из табл. 21.2. подходит схема 6. Определяем параметры  $A$  и  $B$ .

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\ &= (1/0,0025 - 1/0,003)/2 = 33,33, \\ B &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) = \\ &= (1/0,0025 + 1/0,030)/2 = 216,7, \end{aligned}$$

а также их отношение

$$\gamma = \frac{A}{B} = 33,33/216,7 = 0,1538.$$

По величине  $\gamma$  из табл.21.1 находим

$$\alpha = 0,793.$$

Далее из табл. 21.2, схема 6 выписываем формулу для вычисления максимального удельного давления

$$q_{\max} = 0,793 \sqrt[3]{FE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{(R_1 R_2)^2}},$$

по которой находим

$$\begin{aligned} q_{\max} &= 0,793 \sqrt[3]{400(2 \cdot 10^{11})^2(0,0030 - 0,0025)^2/(0,0025 \cdot 0,0030)^2} = \\ &= 3280 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3280 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Далее определяем эквивалентное напряжение в наиболее опасном объеме под площадкой контакта

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0,62q_{\max} = 0,62 \cdot 3280 = 2030 \text{ МПа}. \quad (1)$$

Исследования последних двух десятилетий указывают, что в кольце шарикоподшипника помимо упомянутого опасного объема под площадкой контакта наблюдается еще один опасный объем. Этот второй объем располагается по контуру площадки контакта у самой поверхности. Это



обстоятельство можно выявить, если эквивалентные напряжения определять не по критерию (1) Треска–Сен–Венана (критерию максимальных касательных напряжений), а по критерию Мора:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^M = \sigma_1 - k\sigma_3. \quad (2)$$

Безразмерный коэффициент  $k$  обычно оценивают следующим образом:

$$k = \frac{\sigma_{u,t}}{\sigma_{u,c}}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{u,t}$  и  $\sigma_{u,c}$  — пределы прочности при растяжении и сжатии.

Для первого опасного объема имеем

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,20q_{\text{max}}, \quad \sigma_3 = -0,82q_{\text{max}},$$

а для второго (при  $\gamma = A/B > 0,1$ )

$$\sigma_1 = +0,13q_{\text{max}}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -0,13q_{\text{max}}.$$

Таким образом, по Мору получаем значения эквивалентных напряжений для первого и второго объемов

$$\sigma_{\text{ЭКВ},1}^M = \sigma_1 - k\sigma_3 = (-0,20 + 0,82k)q_{\text{max}},$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ},2}^M = \sigma_1 - k\sigma_3 = 0,13(1 + k)q_{\text{max}}.$$

Из этих соотношений нетрудно установить, что при  $k = 0,48$  имеем равенство эквивалентных напряжений. Другими словами, по критерию Мора эти два объема равноопасны. Если же  $k > 0,48$ , то более опасен глубинный объем, если  $k < 0,48$ , то — приповерхностный.

Таблица 21.2

Значения коэффициента  $\alpha$  в формуле для максимального контактного давления  $q_{\text{max}} = \alpha \sqrt[3]{4FA^2E^2}$  в зависимости от отношения  $\gamma = A/B$

|                        |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\gamma = \frac{A}{B}$ | 1,00  | 0,90  | 0,80  | 0,70  | 0,60  | 0,50  | 0,40  | 0,30  |
| $\alpha$               | 0,388 | 0,400 | 0,420 | 0,440 | 0,468 | 0,490 | 0,536 | 0,600 |

|                        |       |       |       |       |       |       |       |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\gamma = \frac{A}{B}$ | 0,20  | 0,15  | 0,10  | 0,05  | 0,02  | 0,01  | 0,007 |
| $\alpha$               | 0,716 | 0,800 | 0,970 | 1,280 | 1,800 | 2,271 | 3,202 |

## ВЯЗКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ. ПОЛЗУЧЕСТЬ

**22.1.** К стержню подвешен груз весом  $F = 1000$  Н. Длина стержня и площадь его сечения составляют  $l = 1$  м и  $A = 1$  см<sup>2</sup>. За 3 года удлинение стержня составляет  $\Delta l = 1$  мм. Определить скорость  $\dot{\epsilon}$  относительной деформации ползучести и оценить коэффициент вязкости  $\lambda$ , считая материал линейно вязким.

*Ответ:*  $\dot{\epsilon} = 1,06 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda = 0,943 \cdot 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

**22.2.** В стержне при напряжении растяжения  $\sigma_{(1)} = 100$  МПа зарегистрирована скорость ползучести  $\dot{\epsilon}_{(1)} = 10^{-13} \text{ с}^{-1}$ , а при напряжении  $\sigma_{(2)} = 150$  МПа – в два раза больше, то есть  $\dot{\epsilon}_{(2)} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}$ . Найти параметры уравнения нелинейно вязкого деформирования  $\dot{\epsilon} = \frac{\sigma^m}{\lambda_1}$ .

*Решение.* Искомые величины найдутся из системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{(1)} &= \frac{\sigma_{(1)}^m}{\lambda_1}, \\ \dot{\epsilon}_{(2)} &= \frac{\sigma_{(2)}^m}{\lambda_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Разделим первое на второе и прологарифмируем

$$\lg(\dot{\epsilon}_{(1)}/\dot{\epsilon}_{(2)}) = m \lg(\sigma_{(1)}/\sigma_{(2)}),$$

откуда

$$m = \frac{\lg(\dot{\epsilon}_{(1)}/\dot{\epsilon}_{(2)})}{\lg(\sigma_{(1)}/\sigma_{(2)})}.$$

Подстановка чисел из условий задачи позволяет найти

$$m = \lg(1/2)/\lg(100/150) = 1,71.$$

Для отыскания параметра  $\lambda_1$  можно воспользоваться первым (или вторым) уравнением из (1):

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_{(1)}^m}{\dot{\epsilon}_{(1)}} = (10^8)^{1,71} / 10^{-13} = 4,79 \cdot 10^{26} \text{ с} \cdot \text{Па}^{1,71}.$$

**22.3.** Стержень прямоугольного поперечного сечения  $20 \times 30$  мм растягивается силой  $F = 29,43$  кН при температуре  $T = 540^\circ\text{C}$ . Определить его относительное удлинение на стадии равномерной

(установившейся) ползучести через 10000 часов. Использовать формулу

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon} t = \frac{\sigma^m}{\lambda_1} t.$$

Рассмотреть четыре варианта сталей:

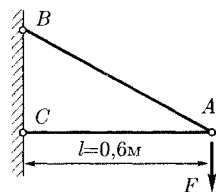
- а)  $m = 3,9$ ;  $\lambda_1 = 2,09 \cdot 10^{35} \text{ ч} \cdot \text{Па}^{3,9}$ ;
- б)  $m = 3,05$ ;  $\lambda_1 = 1,39 \cdot 10^{29} \text{ ч} \cdot \text{Па}^{3,05}$ ;
- в)  $m = 3,55$ ;  $\lambda_1 = 6,22 \cdot 10^{33} \text{ ч} \cdot \text{Па}^{3,55}$ ;
- г)  $m = 4,6$ ;  $\lambda_1 = 1,52 \cdot 10^{42} \text{ ч} \cdot \text{Па}^{4,6}$ .

Ответ: а) 4,70%; б) 2,05%; в) 0,321%; г) 0,156%.

**22.4.** Длинная стальная труба (наружный диаметр  $D = 60$  мм, толщина стенки  $t = 2,5$  мм) нагружена изнутри давлением пара  $q = 5$  МПа при температуре  $T = 420^\circ\text{C}$ . Найти изменение диаметра трубы в процессе равномерной ползучести за время  $t = 3000$  ч. Материал – сталь с параметрами нелинейно вязкого сопротивления  $m = 5,9$  и  $\lambda_1 = 2,39 \cdot 10^{50} \text{ ч} \cdot \text{Па}^{5,9}$ .

Ответ:  $\Delta D = 5,85$  мм.

**22.5.** Кронштейн собран из двух трубок (наружный диаметр  $d = 40$  мм, толщина стенки  $t = 3$  мм), см. рис. Кронштейн поддерживает груз  $F = 13$  кН при температуре  $T = 425^\circ\text{C}$ . Материал трубок – сталь:  $E = 1,75 \cdot 10^{11}$  Па;  $m = 5,4$ ;  $\lambda_1 = 5,01 \cdot 10^{48} \text{ ч} \cdot \text{Па}^{5,4}$ . Определить вертикальное перемещение узла  $A$  в момент нагружения и спустя 6 месяцев.



К задаче 22.5

Ответ:  $v_A|_{t=0} = 0,98$  мм;  $v_A|_{t=6 \text{ мес}} = 6,17$  мм.

**22.6.** В жестком металлическом фланцевом соединении усилие затяжки металлических болтов воспринимается полимерной прокладкой, материал которой характеризуется модулем упругости  $E = 10^{10}$  Па и коэффициентом вязкости  $\lambda = 10^{15} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Конструкция фланца обеспечивает в прокладке только деформацию сжатия. Минимально допустимое напряжение в прокладке из условия плотности соединения составляет  $[\sigma] = 4$  МПа. Найти время, спустя которое следует подтянуть болты этого соединения, если начальное напряжение  $\sigma_* = 10$  МПа. Построить кривую релаксации напряжений в прокладке. Податливостью металлических частей фланца пренебречь.

*Решение.* Уравнение механических состояний вязкого материала Максвелла в условиях релаксации (при  $\varepsilon = \text{const}$ ) принимает вид

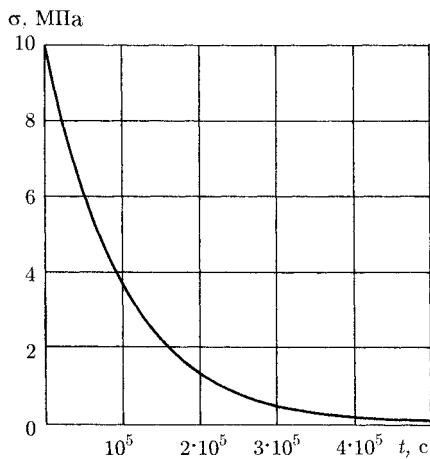
$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda} = 0.$$

После интегрирования и отыскания постоянной интегрирования (из условия  $\sigma = \sigma_*$  при  $t = 0$ ) получаем следующее уравнение релаксации напряжений:

$$\sigma = \sigma_* e^{-\frac{E}{\lambda} t}. \quad (1)$$

Разрешим его относительно времени:

$$t = \frac{\lambda}{E \lg e} \lg \left( \frac{\sigma_*}{\sigma} \right). \quad (2)$$



К задаче 22.6

После числовых подстановок находим время перезатяжки

$$t_3 = 10^{15} \lg(10/4) / (10^{10} \lg 2,718) = 0,915 \cdot 10^5 \text{ с.}$$

С помощью уравнения (2) удобно строить график релаксации напряжений  $\sigma = \sigma(t)$ , см. рис. Этим графиком можно проиллюстрировать понятие времени релаксации

$$t_p = \frac{\lambda}{E} = 10^{15} / 10^{10} = 10^5 \text{ с.}$$

По графику можно видеть, что через каждые  $t_p = 10^5 \text{ с}$  напряжения в прокладке падают в  $e = 2,718$  раза.

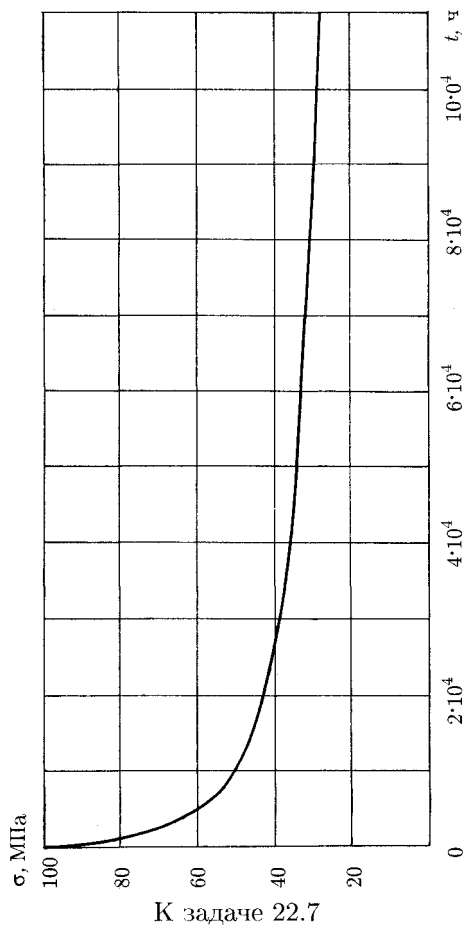
**22.7.** Жесткое стальное фланцевое соединение, работающее при температуре  $T = 425^\circ\text{C}$ , стянуто стальными болтами при отсутствии прокладок. Релаксация напряжений в соединении определяется, главным образом, за счет вязких деформаций болтов. Для материала болтов при заданной температуре задано:  $E = 1,75 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $m = 5$ ,  $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{46} \text{ ч} \cdot \text{Па}^5$ . Построить кривую релаксации напряжений в болтах, если начальное напряжение затяжки  $\sigma_* = 100 \text{ МПа}$ .

*Решение.* Дифференциальное уравнение механических состояний в условиях релаксации (при  $\varepsilon = \text{const}$ ) принимает вид

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma^m}{\lambda_1} = 0. \quad (1)$$

После интегрирования и отыскания постоянной интегрирования (из условия  $\sigma = \sigma_*$  при  $t = 0$ ) находим

$$t = \frac{\lambda_1}{E(m-1)\sigma_*^{m-1}} \left( \left( \frac{\sigma_*}{\sigma} \right)^{m-1} - 1 \right). \quad (2)$$



Осуществим числовые подстановки

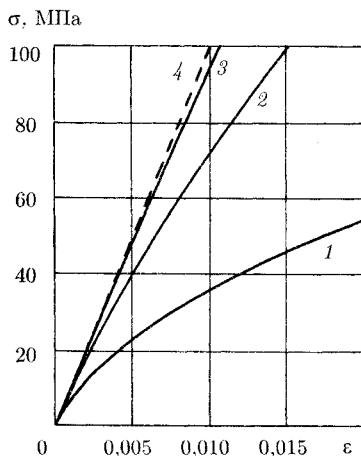
$$t = 5 \cdot 10^{16} ((\sigma_*/\sigma)^4 - 1) / (1,75 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot (100 \cdot 10^6)^4).$$

После упрощений получим

$$t = 714 \left( \left( \frac{\sigma_*}{\sigma} \right)^4 - 1 \right).$$

Соответствующий график представлен на рис.

Если сравнить этот график с экспонентой, полученной в предыдущей задаче 22.6, то можно констатировать, что здесь имеем увеличенный темп падения напряжений в начале процесса и замедленный в остальное время.



К задаче 22.8

После интегрирования и отыскания постоянной интегрирования (из условия  $\varepsilon = 0$  при  $t = 0$ ) получаем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma^2}{2\lambda v_\sigma}.$$

Для условий нашей задачи получаем три уравнения:

- 1)  $\varepsilon = \sigma \cdot 10^{-10} + \sigma^2 \cdot 5 \cdot 10^{-18}$ , (при  $v_\sigma = 0,01 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$ )
- 2)  $\varepsilon = \sigma \cdot 10^{-10} + \sigma^2 \cdot 5 \cdot 10^{-19}$ , (при  $v_\sigma = 0,10 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$ )
- 3)  $\varepsilon = \sigma \cdot 10^{-10} + \sigma^2 \cdot 5 \cdot 10^{-20}$ , (при  $v_\sigma = 1,00 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$ )

Соответствующие диаграммы деформирования приведены на рис. Там же штриховой линией 4 изображен график линейной зависимости между  $\sigma$  и  $\varepsilon$  при бесконечно высокой скорости нагружения.

**22.8.** Для растягиваемого стержня построить семейство кривых деформирования в координатах  $\sigma - \varepsilon$  при трех постоянных скоростях нагружения  $v_\sigma = \dot{\sigma}$  : 0,01; 0,1 и 1,0 МПа · с<sup>-1</sup>. Материал считать линейно вязким:  $E = 10 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\lambda = 10^{13} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

*Решение.* Дифференциальное уравнение механических состояний Максвелла в данных обстоятельствах принимает вид

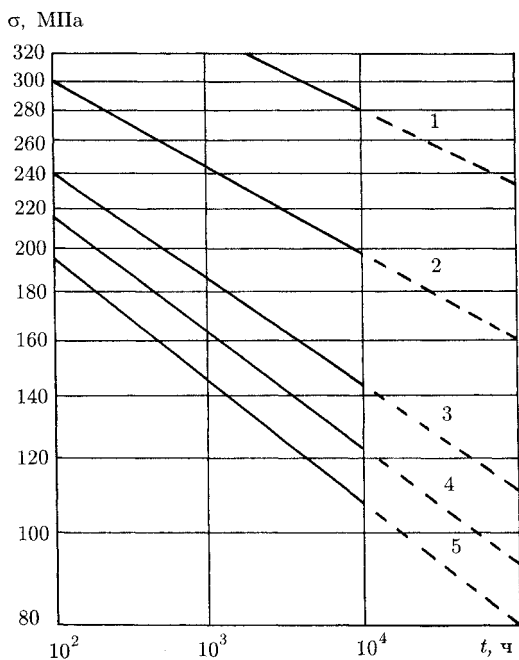
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{v_\sigma}{E} + \frac{v_\sigma t}{\lambda}.$$

## ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ПОД ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКОЙ

**23.1.** На рис. в координатах  $\lg \sigma - \lg t$  изображены пять кривых длительной прочности, построенные по результатам испытаний образцов стали 12Х1МФ (12ХМФ) при температурах: 1 – 480°C, 2 – 520°C, 3 – 560°C, 4 – 580°C, 5 – 600°C. Испытания проводились на базе  $10^4$  ч. Штриховыми линиями показаны результаты экстраполяции полученных экспериментальных данных на длительность до  $10^5$  ч. Подобрать параметры уравнения длительной прочности

$$t = B\sigma^{-m} \quad (1)$$

для каждой из представленных кривых.



К задаче 23.1

*Указание.* Для двух точек на кривой составляются два уравнения

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= B\sigma_{(1)}^{-m}, \\ t_2 &= B\sigma_{(2)}^{-m}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Далее разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sigma_{(1)}^{-m}}{\sigma_{(2)}^{-m}},$$

а затем прологарифмируем полученное выражение

$$\lg(t_1/t_2) = -m \lg(\sigma_{(1)}/\sigma_{(2)}).$$

Отсюда нетрудно получить формулу для вычисления показателя

$$m = \frac{\lg(t_2/t_1)}{\lg(\sigma_{(1)}/\sigma_{(2)})}. \quad (3)$$

Кроме того, из уравнений (2) можно найти

$$B = t_1 \sigma_{(1)}^m = t_2 \sigma_{(2)}^m. \quad (4)$$

*Ответ:*

Таблица 23.1

Параметры  $m$  и  $B$  уравнения  $t = B\sigma^{-m}$  кривой длительной прочности для стали 12Х1МФ(12ХМФ) в зависимости от температуры  $T$

| $T, ^\circ\text{C}$ | $m$  | $B$                                                    |
|---------------------|------|--------------------------------------------------------|
| 480                 | 13,3 | $0,34 \cdot 10^{37} \text{ ч} \cdot \text{МПа}^{13,3}$ |
| 520                 | 11,0 | $0,176 \cdot 10^{30} \text{ ч} \cdot \text{МПа}^{11}$  |
| 560                 | 9,06 | $0,37 \cdot 10^{24} \text{ ч} \cdot \text{МПа}^{9,06}$ |
| 580                 | 8,24 | $0,17 \cdot 10^{22} \text{ ч} \cdot \text{МПа}^{8,24}$ |
| 600                 | 7,80 | $0,70 \cdot 10^{20} \text{ ч} \cdot \text{МПа}^{7,8}$  |

**23.2.** Длинная труба паропровода (наружный диаметр  $d = 42$  мм, толщина стенки  $t = 2$  мм) находится под давлением пара  $q = 20$  МПа при температуре  $T = 520^\circ\text{C}$ . Материал – сталь 12Х1МФ. Определить время до выхода трубы из строя, используя данные из задачи 23.1.

*Ответ:*  $t_{\text{пред}} = 85900$  ч.

**23.3.** Длинная труба паропровода (наружный диаметр  $d = 42$  мм, толщина стенки  $t = 2$  мм) четыре дня в неделю находится под давлением пара  $q_1 = 12,4$  МПа при температуре  $T_1 = 580^\circ\text{C}$  и три дня –  $q_2 = 12$  МПа,  $T_2 = 560^\circ\text{C}$ . Определить предельное (разрушающее) количество недель эксплуатации, используя данные задачи 23.1. Материал – сталь 12Х1МФ.



*Решение.* Окружные нормальные напряжения в стенке трубы определяются по известной котельной формуле

$$\sigma_{\theta} = q \frac{R}{t}.$$

Для первой и второй ступени получаем

$$\sigma_{(1)} = 124 \text{ МПа}, \quad \sigma_{(2)} = 120 \text{ МПа}.$$

Здесь имеем по существу двухступенчатый режим блочного нагружения. Техника вычислений и терминология аналогичны тому, что мы имели в гл. 20 в сходных расчетах на усталость. Разрушающие времена, соответствующие нагрузкам первой и второй ступеней, находим по уравнению (1) из задачи 23.1:

$$\begin{aligned} t_{p1} &= B_1 \sigma_{(1)}^{-m_1} = 0,17 \cdot 10^{22} \cdot 124^{-8,24} = 9560 \text{ ч}, \\ t_{p2} &= B_2 \sigma_{(2)}^{-m_2} = 0,37 \cdot 10^{24} \cdot 120^{-9,06} = 53800 \text{ ч}. \end{aligned}$$

Поврежденности на каждой из этих ступеней вычисляются из очевидных соображений

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{t_1}{t_{p1}} = 4 \cdot 24/9560 = 0,0100, \\ P_2 &= \frac{t_2}{t_{p2}} = 3 \cdot 24/53800 = 0,0013. \end{aligned}$$

Далее определяем поврежденность, накапливающуюся за один блок, т.е. в течение недели:

$$P_{\text{бл}} = P_1 + P_2 = 0,0100 + 0,0013 = 0,0113,$$

а затем и предельное (разрушающее) количество блоков (недель)

$$Q_{\text{пред}} = \frac{1}{P_{\text{бл}}} = 1/0,0113 = 89 \text{ недель}.$$

**23.4.** В табл. 23.2 даны допускаемые напряжения, обязательные к применению при проектировании высокотемпературного оборудования в условиях плановой эксплуатации в течение  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $2 \cdot 10^5$  ч.

Таблица 23.2

Номинальные допускаемые напряжения для низколегированной  
 стали 12ХМФ, МПа (по данным ОСТ 108.031.08–85 и  
 ОСТ 108.031.09 – 85)

| $T^{\circ}, \text{C}$ | Расчетный ресурс, час |        |                | $T^{\circ}, \text{C}$ | Расчетный ресурс, час |        |                |
|-----------------------|-----------------------|--------|----------------|-----------------------|-----------------------|--------|----------------|
|                       | $10^4$                | $10^5$ | $2 \cdot 10^5$ |                       | $10^4$                | $10^5$ | $2 \cdot 10^5$ |
| От 20                 |                       |        |                | 510                   | 120                   | 101    | 86             |
| до 150                | 173                   | 173    | 173            | 520                   | 112                   | 90     | 77             |
| 250                   | 166                   | 166    | 166            | 530                   | 100                   | 81     | 69             |
| 300                   | 159                   | 159    | 159            | 540                   | 88                    | 73     | 62             |
| 350                   | 152                   | 152    | 152            | 550                   | 80                    | 66     | 56             |
| 400                   | 145                   | 145    | 145            | 560                   | 72                    | 59     | 50             |
| 420                   | 142                   | 142    | 142            | 570                   | 65                    | 53     | 44             |
| 440                   | 139                   | 139    | 139            | 580                   | 59                    | 47     | 39             |
| 450                   | 138                   | 138    | 138            | 590                   | 53                    | 41     | 35             |
| 460                   | 136                   | 136    | 136            | 600                   | 47                    | 37     | 31             |
| 480                   | 133                   | 133    | 133            | 610                   | 41                    | 33     |                |
| 500                   | 130                   | 113    | 96             | 620                   | 35                    |        |                |

Найти параметры уравнения

$$[t] = B_* [\sigma]^{-m_*}$$

допускаемого (ресурсного) времени эксплуатации  $[t]$  при допускаемом напряжении  $[\sigma]$ , заданном в промежутке между табличными значениями.

*Указание.* Задача решается по аналогии с задачей 23.1:

$$m_* = \frac{\lg([t]_2/[t]_1)}{\lg([\sigma]_1/[\sigma]_2)}, \quad (2)$$

$$B_* = [t]_1 [\sigma]_1^{m_*} = [t]_2 [\sigma]_2^{m_*}. \quad (3)$$

*Ответ:* Результаты расчетов сведены в табл. 23.3.

Таблица 23.3

Параметры  $m_*$  и  $B_*$  в уравнении  $[\dot{\epsilon}] = B_*[\sigma]^{-m_*}$   
допускаемого времени эксплуатации для стали 12ХНФ

| $T^\circ, C$ | Пределы применения<br>от $10^4$ до $10^5$ ч |                                                 | Пределы применения<br>от $10^5$ до $2 \cdot 10^5$ ч |                                                 |
|--------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|              | $m_*$                                       | $B_*$                                           | $m_*$                                               | $B_*$                                           |
| 500          | $m_* = 16,4$                                | $B_* = 4,0 \cdot 10^{58}$ ч·МПа <sup>16,4</sup> | $m_* = 4,25$                                        | $B_* = 5,3 \cdot 10^{13}$ ч·МПа <sup>4,25</sup> |
| 510          | $m_* = 13,4$                                | $B_* = 7,3 \cdot 10^{31}$ ч·МПа <sup>13,4</sup> | $m_* = 4,31$                                        | $B_* = 4,3 \cdot 10^{13}$ ч·МПа <sup>4,31</sup> |
| 520          | $m_* = 10,5$                                | $B_* = 3,3 \cdot 10^{25}$ ч·МПа <sup>10,5</sup> | $m_* = 4,44$                                        | $B_* = 4,7 \cdot 10^{13}$ ч·МПа <sup>4,44</sup> |
| 530          | $m_* = 10,9$                                | $B_* = 6,3 \cdot 10^{25}$ ч·МПа <sup>10,9</sup> | $m_* = 4,32$                                        | $B_* = 1,8 \cdot 10^{13}$ ч·МПа <sup>4,32</sup> |
| 540          | $m_* = 12,3$                                | $B_* = 8,3 \cdot 10^{27}$ ч·МПа <sup>12,3</sup> | $m_* = 4,24$                                        | $B_* = 7,9 \cdot 10^{12}$ ч·МПа <sup>4,24</sup> |
| 550          | $m_* = 12,0$                                | $B_* = 6,9 \cdot 10^{26}$ ч·МПа <sup>12,0</sup> | $m_* = 4,22$                                        | $B_* = 4,8 \cdot 10^{12}$ ч·МПа <sup>4,22</sup> |
| 560          | $m_* = 11,6$                                | $B_* = 3,5 \cdot 10^{25}$ ч·МПа <sup>11,6</sup> | $m_* = 4,19$                                        | $B_* = 2,6 \cdot 10^{12}$ ч·МПа <sup>4,19</sup> |
| 570          | $m_* = 11,3$                                | $B_* = 3,1 \cdot 10^{24}$ ч·МПа <sup>11,3</sup> | $m_* = 3,72$                                        | $B_* = 2,6 \cdot 10^{11}$ ч·МПа <sup>3,72</sup> |
| 580          | $m_* = 10,1$                                | $B_* = 7,7 \cdot 10^{21}$ ч·МПа <sup>10,1</sup> | $m_* = 3,71$                                        | $B_* = 1,6 \cdot 10^{11}$ ч·МПа <sup>3,71</sup> |
| 590          | $m_* = 9,0$                                 | $B_* = 3,3 \cdot 10^{19}$ ч·МПа <sup>9</sup>    | $m_* = 4,38$                                        | $B_* = 1,2 \cdot 10^{12}$ ч·МПа <sup>4,38</sup> |
| 600          | $m_* = 9,6$                                 | $B_* = 1,1 \cdot 10^{20}$ ч·МПа <sup>9,6</sup>  | $m_* = 3,92$                                        | $B_* = 1,4 \cdot 10^{11}$ ч·МПа <sup>3,92</sup> |
| 610          | $m_* = 10,6$                                | $B_* = 1,2 \cdot 10^{21}$ ч·МПа <sup>10,6</sup> | —                                                   | —                                               |

**23.5.** Длинная труба паропровода (наружный диаметр  $d = 42$  мм, толщина стенки  $t = 2$  мм) нагружена изнутри давлением пара  $q = 5,2$  МПа при температуре  $T = 560^\circ\text{C}$ . Материал – сталь 12ХМФ. Определить допускаемое (ресурсное) время эксплуатации, используя данные задачи 23.4.

*Ответ:*  $[t] = 168000$  ч.

**23.6.** Длинная труба паропровода (наружный диаметр  $d = 42$  мм, толщина стенки  $t = 2$  мм) пять дней в неделю находится под давлением пара  $q_1 = 5,7$  МПа при температуре  $T_1 = 560^\circ\text{C}$  и два дня –  $q_2 = 5,8$  МПа,  $T_2 = 570^\circ\text{C}$ . Материал – сталь 12ХМФ. Определить допускаемое (ресурсное) количество недель эксплуатации этой трубы. Использовать данные задач 23.4 и 23.3.

*Решение.* Сначала определяем окружные нормальные напряжения для первой и второй ступени нагружения

$$\sigma_{(1)} = 57 \text{ МПа}, \quad \sigma_{(2)} = 58 \text{ МПа}.$$

Эти две ступени образуют один блок нестационарного нагружения. Задача решается подобно тому, как это было сделано в задаче 23.3. Однако вместо понятия поврежденности здесь следует использовать понятие относительного использования ресурса. При стационарном нагружении мера относительного использования ресурса вводится так:

$$II^* = \frac{t}{[t]},$$

где  $[t]$  – допускаемое время эксплуатации при  $\sigma = \text{const}$  и  $T = \text{const}$ ,  $t$  – время эксплуатации при тех же условиях. Нетрудно видеть, что величина  $II^*$  равна нулю в начале процесса и возрастает до единицы к моменту полной выработки ресурса. В нашем случае имеем на каждой из ступеней внутри одного недельного блока

$$II_1^* = \frac{t_1}{[t]_1} \quad \text{и} \quad II_2^* = \frac{t_2}{[t]_2}.$$

Вычисляем упомянутые здесь ресурсные времена для нагрузок первой и второй ступеней

$$\begin{aligned} [t]_1 &= B_{*1} \sigma_{(1)}^{-m_{*1}} = 2,6 \cdot 10^{12} \cdot 57^{-4,19} = 114000 \text{ ч}, \\ [t]_2 &= B_{*2} \sigma_{(2)}^{-m_{*2}} = 3,1 \cdot 10^{24} \cdot 58^{-11,3} = 37000 \text{ ч}. \end{aligned}$$

Полученные здесь значения времени позволяют вычислить доли относительного использования ресурса на каждой из этих ступеней:

$$\begin{aligned} II_1^* &= \frac{t_1}{[t]_1} = 5 \cdot 24 / 114000 = 0,00105, \\ II_2^* &= \frac{t_2}{[t]_2} = 2 \cdot 24 / 37000 = 0,00130. \end{aligned}$$

Далее определяем относительное использование ресурса за один недельный блок нагружения

$$\Pi_{6л}^* = \Pi_1^* + \Pi_1^* = 0,00105 + 0,00130 = 0,00235,$$

а затем и допускаемое (ресурсное) количество недельных блоков

$$[Q] = \frac{1}{\Pi_{6л}^*} = 1/0,00235 = 425 \text{ недель.}$$

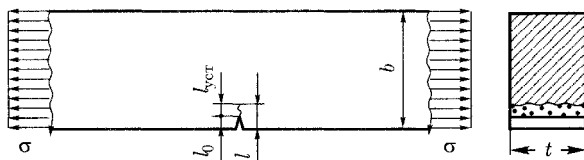
Так как в году насчитывается 52 недели, то имеем для заданных условий следующий ресурс непрерывной эксплуатации:

$$[Q]/52 = 425/52 = 8,2 \text{ года.}$$

Напоминаем, что после выработки ресурса конструкционный элемент должен быть снят с эксплуатации *немедленно*.

## ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

**24.1.** При испытании длинной стальной полосы с краевой поперечной трещиной была найдена критическая сила  $F_c = 39 \text{ кН}$ . Толщина полосы  $t = 10 \text{ мм}$ , ширина  $b = 15 \text{ мм}$ , глубина трещины  $l = 3 \text{ мм}$ . По требованию ГОСТ 25.506–85, трещина образована следующим образом: сначала механическим образом образован надрез глубиной  $l_o$ , а затем была выращена трещина усталости протяженностью  $l_{уст}$ , см. рис. Определить критическое значение коэффициента интенсивности напряжений (коэффициент трещиностойкости)  $K_c$ .



К задаче 24.1

*Решение.* В критический момент при срабатывании трещины имеем

$$K_I = K_c, \quad (1)$$

где  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений,  $K_c$  – критическое значение коэффициента интенсивности напряжений.

По упомянутому стандарту коэффициент интенсивности напряжений определяется по формуле

$$K_I = Y(\lambda) \sigma \sqrt{\pi l}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – напряжение вдали от трещины,  $l$  – глубина трещины,  $Y(\lambda)$  – коэффициент, учитывающий конечные размеры пластины,  $\lambda$  – относительная глубина трещины

$$\lambda = \frac{l}{b}. \quad (3)$$

В нашей задаче имеем

$$\lambda = 3/15 = 0,2.$$

Коэффициент  $Y(\lambda)$  вычисляем по стандарту следующим образом:

$$Y(\lambda) = 1,12 - 0,231\lambda + 10,52\lambda^2 - 21,65\lambda^3 + 30,30\lambda^4 = 1,37.$$

Кроме того, в данном случае имеем

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} = \frac{F_c}{bt} = 39000 / (0,015 \cdot 0,010) = 260 \cdot 10^6 \text{ Па} = 260 \text{ МПа}.$$

В итоге получаем

$$K_I = 1,37 \cdot 260 \sqrt{3,14 \cdot 0,003} = 34,6 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2} (\text{МН/м}^{3/2}).$$

Наконец, обращаемся к условию предельного равновесия трещины (1), откуда записываем для коэффициента трещиностойкости

$$K_c = K_I = 34,6 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2} (\text{МН/м}^{3/2}).$$

**24.2.** Уточнить величину коэффициента трещиностойкости, полученную в предыдущей задаче 24.1, принимая во внимание поправку на размер упругопластической зоны перед устьем трещины. Предел текучести исследуемой стали принять  $\sigma_{0,2} = 600$  МПа.

*Решение.* Характерный размер  $d_o$  упругопластической зоны перед фронтом продвигающейся трещины оценивается формулой

$$d_o \approx \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_{0,2}} \right)^2. \quad (1)$$

Числовые подстановки дают

$$d_o = (34,6/600)^2 / (2 \cdot 3,14) = 0,0005 \text{ м.}$$

Далее определяем приведенную глубину трещины

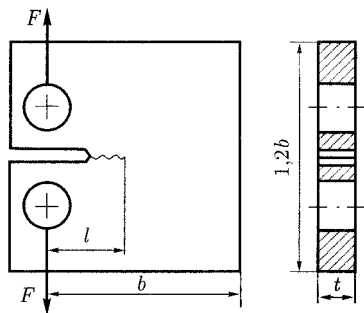
$$l_* = l + d_o = 0,0030 + 0,0005 = 0,0035 \text{ м,}$$

что позволяет заново вычислить коэффициент трещиностойкости

$$K_c = Y(\lambda) \sigma_c \sqrt{\pi l_*} = 1,37 \cdot 260 \sqrt{3,14 \cdot 0,0035} = 37,3 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

**24.3.** "Компактный" образец по ГОСТ 25.506–85 (см. рис.) имеет размеры:  $l = 40$  мм (вместе с трещиной усталости),  $b = 100$  мм,  $t = 20$  мм. Критическая сила в ходе испытаний составила  $F_{cr} = 60$  кН. Определить коэффициент трещиностойкости  $K_c$ .

*Решение.* Формулу для вычисления коэффициента интенсивности напряжений примем из упомянутого стандарта, но запишем ее сразу для критического состояния (для момента страгивания трещины):



К задаче 24.3

$$K_c = K_I = 13,74 (1 - 3,38\lambda + 5,572\lambda^2) \frac{F_c}{t\sqrt{b}}. \quad (1)$$

Сначала займемся выражением, стоящим в скобках. Так как в данном случае

$$\lambda = \frac{l}{b} = 40/100 = 0,4,$$

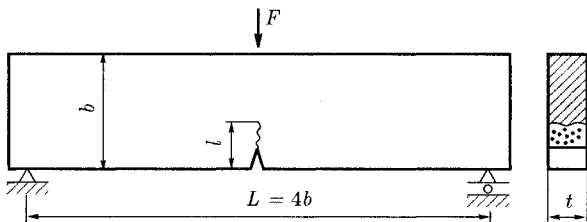
то получаем

$$(1 - 3,38 \cdot 0,4 + 5,572 \cdot 0,4^2) = 0,539.$$

Далее подставляем все исходные данные в формулу (1). В итоге находим критическое значение коэффициента интенсивности напряжений

$$\begin{aligned} K_c = K_I &= 13,74 \cdot 0,539 \cdot 60000 / (0,02\sqrt{0,1}) = 70,2 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2} = \\ &= 70,2 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2} \text{ (МН/м}^{3/2}\text{)}. \end{aligned}$$

**24.4.** При изгибе плоского образца (см. рис.) зарегистрирована критическая сила  $F_c = 35 \text{ кН}$ . Размеры образца: высота  $b = 60 \text{ мм}$ , глубина трещины  $l = 25 \text{ мм}$ , толщина  $t = 20 \text{ мм}$ , расстояние между опорами  $L = 4b = 240 \text{ мм}$ . Определить коэффициент трещиностойкости  $K_c$ .



К задаче 24.4

*Решение.* Из ГОСТ 25.506-85 запишем для случая предельного равновесия

$$K_c = K_I = 3,494 (1 - 3,396\lambda + 5,839\lambda^2) \frac{F_c L}{t\sqrt{b^3}}. \quad (1)$$

В данной задаче имеем

$$\lambda = \frac{l}{b} = 25/60 = 0,417,$$

поэтому сумма, стоящая в скобках, составляет

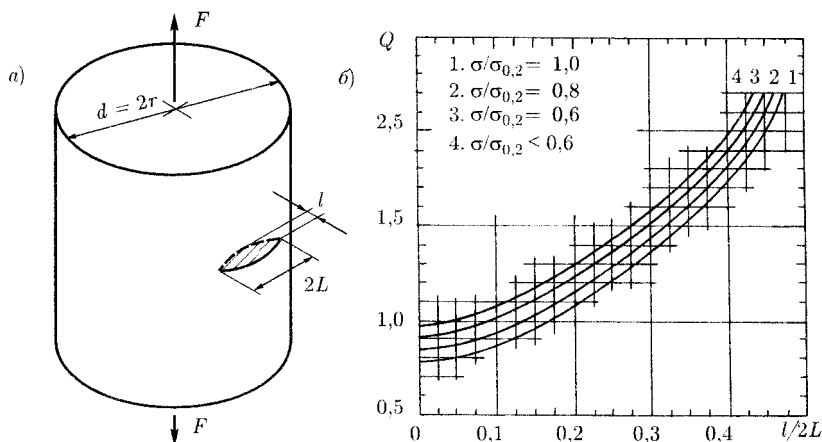
$$(1 - 3,396 \cdot 0,417 + 5,839 \cdot 0,417^2) = 0,599.$$

В заключение производим числовые подстановки в формулу (1). Получаем

$$\begin{aligned} K_c = K_I &= 3,494 \cdot 0,599 \cdot 35000 \cdot 0,24 / (0,02\sqrt{0,06^3}) = \\ &= 59,8 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2} = 59,8 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2} \text{ (МН/м}^{3/2}\text{)}. \end{aligned}$$



**24.5.** Стержень диаметром  $d = 2r = 100$  мм, растягивается силой  $F$ . В стержне обнаружена приповерхностная трещина, которая имеет полуэллиптическую форму длиной  $2L = 20$  мм и глубиной  $l = 4$  мм, см. рис. а. Трещина ориентирована своей плоскостью поперек оси стержня. Материал – сталь с характеристиками  $\sigma_{0,2} = 700$  МПа,  $K_c = 60$  МПа·м<sup>1/2</sup>. Определить критическое значение силы  $F$ , а также ее допускаемое значение, если нормативный коэффициент запаса  $[s] = 2$ .



К задаче 24.5

*Решение.* Коэффициент интенсивности напряжений в данном случае вычисляется следующим образом:

$$K_I = \sqrt{\frac{1,21}{Q}} \sigma \sqrt{\pi l}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – напряжение вдали от трещины,  $l$  – глубина трещины,  $Q$  – некоторый "параметр трещины", зависящий от отношений  $\sigma/\sigma_{0,2}$  и  $l/2L$ , см. рис. б и табл. 24.1.

Примем в первом приближении  $Q = 1,0$  и вычислим критическое напряжение с помощью формулы (1):

$$\sigma_c^{(1)} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{1,21} = 60 \sqrt{1,21} / (\sqrt{3,14 \cdot 0,004}) = 588 \text{ МПа.}$$

Теперь имеем

$$\sigma/\sigma_{0,2} = 588/700 = 0,84.$$

Из табл. 24.1 и рис. б находим во втором приближении

$$Q_{(2)} = 1,14,$$

Таблица 24.1

Зависимость параметра  $Q$  от отношений  $\sigma/\sigma_{0,2}$  и  $l/2L$ 

|    | Относительный уровень напряжений вдали от трещины $\sigma/\sigma_{0,2}$ | Параметр трещины $Q$ в зависимости от отношения $l/2L$ |      |      |      |      |
|----|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------|------|------|------|
|    |                                                                         | 0,1                                                    | 0,2  | 0,25 | 0,3  | 0,4  |
| 1. | 1,0                                                                     | 0,88                                                   | 1,07 | 1,21 | 1,38 | 1,76 |
| 2. | 0,9                                                                     | 0,91                                                   | 1,12 | 1,24 | 1,41 | 1,79 |
|    | 0,8                                                                     | 0,95                                                   | 1,15 | 1,27 | 1,45 | 1,83 |
| 3. | 0,7                                                                     | 0,98                                                   | 1,17 | 1,31 | 1,48 | 1,87 |
|    | 0,6                                                                     | 1,02                                                   | 1,22 | 1,35 | 1,52 | 1,90 |
| 4. | $< 0,6$                                                                 | 1,10                                                   | 1,29 | 1,43 | 1,60 | 1,98 |

что позволяет уточнить величину критического напряжения

$$\sigma_c = 60\sqrt{1,21}/(\sqrt{3,14 \cdot 0,004 \cdot 1,14}) = 551 \text{ МПа.}$$

В итоге получаем для критической и допускаемой силы

$$F_c = \sigma_c A = 551 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 0,05^2 = 4,32 \cdot 10^6 \text{ Н} = 4320 \text{ кН,}$$

$$[F] = \frac{F_c}{[s]} = 4320/2 = 2160 \text{ кН.}$$

**24.6.** Дать оценку параметрам уравнения скорости роста трещины усталости (уравнения Пэриса)

$$v = \frac{dl}{dN} = Q \left( \frac{\Delta K}{K_{cr}} \right)^m. \quad (1)$$

*Указание.* Здесь  $\Delta K$  – размах коэффициента интенсивности напряжений

$$\Delta K = K_{I \max} - K_{I \min}$$

или

$$\Delta K = K_{I \max} \left( 1 - \frac{K_{I \min}}{K_{I \max}} \right) = K_{I \max}(1 - R),$$

где  $R$  – коэффициент асимметрии цикла переменных напряжений. Поэтому уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$v = \frac{dl}{dN} = Q(1 - R)^m \left( \frac{K_{I \max}}{K_{cr}} \right)^m. \quad (2)$$

*Решение.* Справочные данные о параметрах  $m$ ,  $Q$ ,  $K_{cr}$  в открытой литературе весьма скудны. Поэтому приходится пользоваться некоторыми усредненными рекомендациями. Во-первых, показатель степени в уравнениях (1) и (2) может быть принят в первом приближении

$$m = 4.$$

Во-вторых, рекомендуется принимать

$$K_{cr} = K_c.$$

В-третьих, скорость роста трещины усталости составляет

$$v = 10^{-6} \text{ м/цикл}$$

в случае  $K_{I \max}/K_c = 0,9$  и  $R = 0$ .

Остается лишь вычислить параметр  $Q$  при указанных условиях:

$$\begin{aligned} Q &= v(1-R)^{-4} (K_{I \max}/K_c)^{-4} = \\ &= 10^{-6} (1-0)^{-4} \cdot 0,9^{-4} = 1,52 \cdot 10^{-6} \text{ м/цикл}. \end{aligned}$$

**24.7.** Плоский образец (см. рис. к задаче 24.1) имеет размеры: ширина  $b = 75$  мм, толщина  $t = 10$  мм, глубина надреза  $l_o = 3$  мм. Образец испытывается в условиях переменной нагрузки знакопостоянного цикла, когда среднее и амплитудное значения продольного усилия составляют  $F_m = 102$  кН и  $F_a = 25,5$  кН. Коэффициент трещиностойкости материала  $K_c = 45 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ . Определить критическую глубину трещины  $l_c$  в момент слома образца, критическое количество циклов  $N_c$ , скорость продвижения фронта трещины усталости в начале процесса ( $l_o = 0,003$  м), в конце ( $l = 0,8l_c$ ), а также в промежуточный момент ( $l = 0,5l_c$ ). Из предыдущей задачи принять  $Q = 1,52 \cdot 10^{-6} \text{ м/цикл}$ .

*Решение.* Среднее, амплитудное, максимальное, минимальное значения напряжений, а также коэффициент асимметрии составляют

$$\sigma_m = F_m/(bt) = 102000/(0,075 \cdot 0,010) = 136 \cdot 10^6 \text{ Па} = 136 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a = F_a/(bt) = 25500/(0,075 \cdot 0,010) = 34 \cdot 10^6 \text{ Па} = 34 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = 136 + 34 = 170 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a = 136 - 34 = 102 \text{ МПа},$$

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 102/170 = +0.6.$$

Условие предельного равновесия примем из задачи 24.1, полагая  $Y = 1$ :

$$K_I = \sigma_c \sqrt{\pi l_c} = K_c. \quad (1)$$

Приравняем критическое напряжение  $\sigma_c$  величине  $\sigma_{\max}$  и разрешим полученное уравнение относительно критической глубины трещины

$$l_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_{\max}} \right)^2 = (45/170)^2 / 3,14 = 0,022 \text{ м.}$$

Далее уравнение (2) из задачи 24.6 перепишем с учетом соотношения (1)

$$v = \frac{dl}{dN} = Q(1-R)^4 \pi^2 l^2 \left( \frac{\sigma_{\max}}{K_c} \right)^4. \quad (2)$$

Разделим переменные

$$l^{-2} dl = \pi^2 Q \left( \frac{\sigma_{\max}(1-R)}{K_c} \right)^4 dN$$

и проинтегрируем

$$-\frac{1}{l} + C = \pi^2 Q N \left( \frac{\sigma_{\max}(1-R)}{K_c} \right)^4.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим из условия, что при  $N = 0$  глубина трещины имеет начальное значение  $l_o$ . Тогда получаем

$$C = \frac{1}{l_o},$$

благодаря чему предыдущее уравнение принимает вид

$$\pi^2 Q N \left( \frac{\sigma_{\max}(1-R)}{K_c} \right)^4 = \frac{l - l_o}{ll_o}. \quad (3)$$

Заменяя  $l$  на  $l_c$ , можно получить формулу для вычисления критического числа циклов

$$N_c = \frac{1}{\pi^2 Q} \cdot \frac{l_c - l_o}{l_c l_o} \left( \frac{K_c}{\sigma_{\max}(1-R)} \right)^4, \quad (4)$$

откуда после подстановок имеем

$$\begin{aligned} N_c &= (45/(170(1-0,6)))^4 \cdot \frac{0,022 - 0,003}{0,022 \cdot 0,003 \cdot 3,14^2 \cdot 1,52 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 3,67 \cdot 10^6 \text{ циклов.} \end{aligned}$$

Наконец, вычисляем скорости роста трещины в указанные в задаче моменты по формуле (2):

$$\begin{aligned} v|_{l=0,003\text{м}} &= 1,52 \cdot 10^{-6} (1-0,6)^4 (3,14 \cdot 0,003)^2 = (170/45)^4 \\ &= 0,07 \cdot 10^{-8} \text{ м/цикл,} \\ v|_{l=0,011\text{м}} &= 0,95 \cdot 10^{-8} \text{ м/цикл,} \\ v|_{l=0,018\text{м}} &= 2,54 \cdot 10^{-8} \text{ м/цикл.} \end{aligned}$$

**24.8.** Плоский образец из предыдущей задачи подвергается циклическому нагружению при симметричном цикле, когда  $\sigma_{\max} = \sigma_a = 110$  МПа. Дать оценку количеству циклов до разрушения.

*Указание.* Уравнение (4) из предыдущей задачи согласуется с экспериментальными данными при знакопостоянных циклах растяжения ( $R > 0$ ). Для знакопеременных циклов ( $-1 < R < 0$ ) можно говорить лишь о некоторой оценке, потому что при сжимающих напряжениях трещина закрывается, хотя и продолжает подрастать вследствие наличия остаточных напряжений растяжения в малой упругопластической области вблизи устья трещины. В подобных обстоятельствах использование уравнения (4) дает заниженное число циклов. Для верхней оценки решают задачу при  $R = 0$ .

*Решение.* Сначала вычислим критическую длину трещины

$$l_c = (K_c/\sigma_c)^2/\pi = (45/110)^2/3,14 = 0,053 \text{ м.}$$

Нижняя оценка критического числа циклов найдется при формальном использовании уравнения (4):

$$\begin{aligned} N_c^{\min} &= (45/110)^4 (1 - (-1))^4 \cdot \frac{0,053 - 0,003}{0,053 \cdot 0,003 \cdot 3,14^2 \cdot 1,52 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 36 \cdot 10^3 \text{ циклов.} \end{aligned}$$

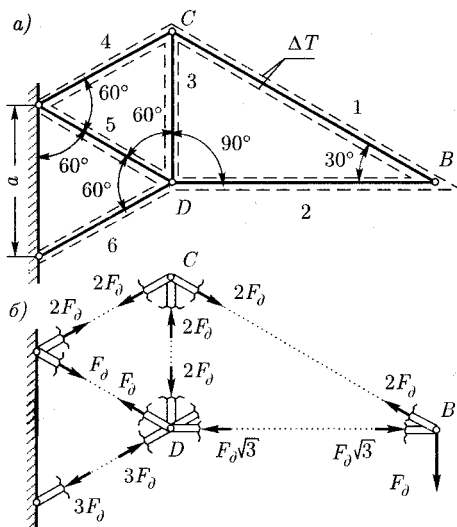
Верхнюю оценку долговечности образца произведем путем замены симметричного цикла отнулевым, при равных максимальных напряжениях цикла. При вычислениях по формуле (4) вместо  $R = -1$  ставим  $R = 0$ . Получаем

$$N_c^{\max} = 576 \cdot 10^3 \text{ циклов,}$$

что в 16 раз превышает минимальную оценку.

## ОЦЕНКА ТЕРМОУПРУГОГО ЭФФЕКТА В СТЕРЖНЯХ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ\*

**25.1.** Плоская ферма составлена из стальных стержней, которые после сборки подвергаются нагреву на  $\Delta T = 50^\circ \text{C}$  равномерно по их объему (рис. а). Определить вертикальное перемещение  $v_B$  узла В, вызванное нагревом, если температурный коэффициент линейного расширения материала стержней составляет  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} 1/\text{град}$ , а размер  $a = 2 \text{ м}$ .



К задаче 25.1

*Решение.* Для определения перемещения  $v_B$  воспользуемся аналогией между перемещениями, обусловленными упругими и тепловыми деформациями стержня. Напомним, что при силовом воздействии на систему используется теорема Кастильяно для определения того или иного перемещения. В случае необходимости к системе прикладывается добавочная

\*См. также "Соппротивление материалов". Под ред. Б.Е.Мельникова. — СПб.: Изд-во "Лань", 2007.

сила  $F_{\partial} = 0$ . Тогда в нашем случае следовало бы записать (см. рис. б)

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial F_{\partial}} = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_i}{EA} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{\partial}} dx,$$

где  $N_i$  – нормальная сила в  $i$ -м стержне. В данном случае  $N_i = \text{const}$ ,  $EA = \text{const}$ , поэтому вышеприведенная формула принимает вид

$$v_B = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{\partial}}$$

или

$$v_B = \sum_{i=1}^n \Delta l_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{\partial}}, \quad (1)$$

где  $\Delta l_i$  – упругое удлинение (или укорочение)  $i$ -го стержня. Но в рассматриваемой задаче изменение длины стержня связано не с силовым воздействием, а с изменением температуры:

$$\Delta l_i = \alpha l_i \Delta T, \quad (2)$$

поэтому соотношение (1) переписываем следующим образом:

$$v_B = \sum_{i=1}^n \alpha \Delta T l_i \frac{\partial N_i}{\partial F_{\partial}}. \quad (3)$$

Рассматривая последовательно условия равновесия узлов  $B$ ,  $C$  и  $D$ , определим усилия в стержнях (см. рис. б), а затем и производные (см. табл.). Напоминаем, что положительная нормальная сила соответствует растяжению стержня, отрицательная – сжатию.

| $i$                                          | 1               | 2                       | 3                | 4               | 5              | 6                |
|----------------------------------------------|-----------------|-------------------------|------------------|-----------------|----------------|------------------|
| $l_i$                                        | $2a$            | $a\sqrt{3}$             | $a$              | $a$             | $a$            | $a$              |
| $N_i$                                        | $2F_{\partial}$ | $-F_{\partial}\sqrt{3}$ | $-2F_{\partial}$ | $2F_{\partial}$ | $F_{\partial}$ | $-3F_{\partial}$ |
| $\frac{\partial N_i}{\partial F_{\partial}}$ | 2               | $-\sqrt{3}$             | -2               | 2               | 1              | -3               |

Найденные значения  $l_i$ ,  $N_i$  и  $\partial N_i / \partial F_{\partial}$  позволяет получить из (3)

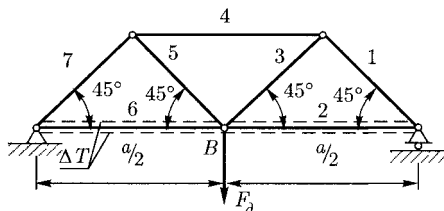
$$v_B = \alpha \Delta T (2a \cdot 2 + a\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + a \cdot (-2) + a \cdot 2a \cdot 1 + a \cdot (-3)) = -2\alpha a \Delta T.$$

Подстановка числовых данных дает окончательно

$$v_B = -2 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 50 = -0,0025 \text{ м} = -2,5 \text{ мм}.$$

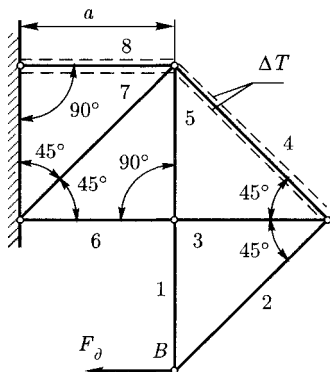
Знак минус означает, что перемещение направлено против силы  $F_\partial$ , то есть вверх.

**25.2.** Плоская ферма из однородных стержней перекрывает пролет длиной  $a$ . Определить вертикальное перемещение  $v_B$  узла  $B$ , если после сборки фермы температура ее нижнего пояса (стержни 2 и 6) изменяется на  $\Delta T$ .



К задаче 25.2

*Указание.* Решение задачи рекомендуется осуществить, используя рассмотренный выше подход. Для этого следует в точке  $B$  приложить силу  $F_\partial = 0$  (см. рис.), найти усилия  $N_i$ , производные  $\partial N_i / \partial F_\partial$ , а затем воспользоваться формулой (3) задачи 25.1. Так как в стержнях 1, 3, 4, 5 и 7 температура не изменяется, то упомянутая формула принимает вид



К задаче 25.3

$$v_B = \alpha \Delta T \left( l_2 \frac{\partial N_2}{\partial F_\partial} + l_6 \frac{\partial N_6}{\partial F_\partial} \right).$$

С использованием условия симметрии можно это выражение упростить

$$v_B = 2\alpha \Delta T l_2 \frac{\partial N_2}{\partial F_\partial}.$$

Ответ:  $v_B = \frac{1}{2} \alpha a \Delta T.$

**25.3.** Определить горизонтальное перемещение  $u_B$  узла  $B$  плоской фермы при повышении температуры в стержнях 4 и 8 на  $\Delta T$ .

*Указание.* Решение можно построить по аналогии с двумя предыдущими задачами, прикладывая к точке  $B$  добавочную силу  $F_\partial = 0$ , направленную горизонтально (см. рис.).

Ответ:  $u_B = 3\alpha a \Delta T.$

**25.4.** Ферма из предыдущей задачи 25.3 снабжена дополнительной шарнирной подвижной опорой в узле  $B$  (см. рис.  $a$ ). Определить



реакцию  $H_B$ , возникающую в этой опоре, если стержни 4 и 8 нагреваются на  $\Delta T = 60^\circ$ . Все стержни изготовлены из трубы, наружный диаметр которой  $D = 2R = 50$  мм, внутренний  $d = 2r = 40$  мм. Материал - дюраль:  $E = 0,75 \cdot 10^{11}$  Па,  $\alpha = 22,5 \cdot 10^{-6}$  1/град.

**Решение.** При наличии опоры  $B$  данная стержневая система является статически неопределимой. При решении такой задачи методом сил надлежит перейти к основной системе. В качестве последней принимаем ферму, рассмотренную ранее в задаче 25.3 (см. также рис. б). При таком переходе реакция  $H_B$  в исходной, статически неопределимой системе носит название лишней неизвестной. Обозначим ее  $X$ . Далее рассмотрим раздельно горизонтальное перемещение точки  $B$  основной системы

- при тепловом воздействии ( $u_{BT}$ ),
- при нагружении силой  $X$  ( $u_{BX}$ ).

Если подобрать силу  $X$  так, чтобы выполнялось условие

$$u_{BT} + u_{BX} = 0, \quad (1)$$

то основная система станет статически эквивалентной исходной системе, а сила  $X$  будет действительно равна реакции  $H_B$ . В задаче 25.3 найдено, что

$$|u_{BT}| = |3\alpha a \Delta T|. \quad (2)$$

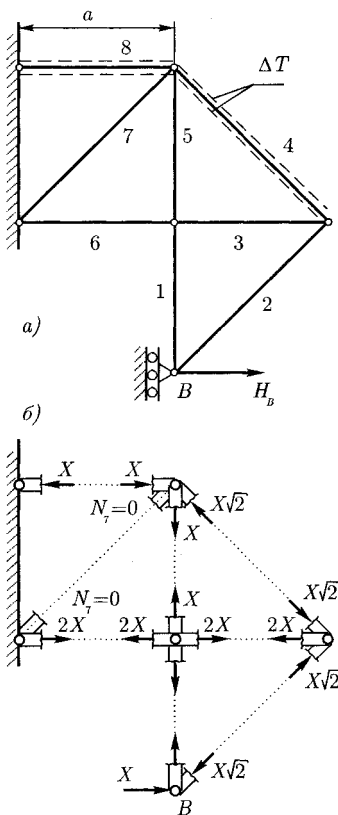
Величину  $u_{BX}$  отыщем с помощью теоремы Кастильяно, согласно которой в данном случае имеем

$$u_{BX} = \frac{\partial U}{\partial X} = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_i}{EA} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X} dx.$$

Так как  $EA = \text{const}$ ,  $N_i = \text{const}$ , то предыдущее выражение принимает вид

$$u_{BX} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X}.$$

Усилия  $N_i$  определим, рассматривая последовательно условия равновесия всех узлов. Результаты этих вычислений приведены на рис. б. Подставляя



К задаче 25.4

(3)

значения  $N_i$ ,  $l_i$  и  $\partial N_i / \partial X$  в формулу (3), найдем

$$\begin{aligned} u_{BX} = & \frac{1}{EA} \left( X \cdot a \cdot 1 + (-X\sqrt{2}) \cdot a\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + 2X \cdot a \cdot 2 + \right. \\ & + (-X\sqrt{2}) \cdot a\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + X \cdot a \cdot 1 + 2X \cdot a \cdot 2 + 0 + \\ & \left. + (-X) \cdot a \cdot (-1) \right) = \frac{Xa}{EA} (11 + 4\sqrt{2}) \approx 16,6 \frac{Xa}{EA}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь осталось подставить соотношения (2) и (4) в условие совместности перемещений (1). Обращаем внимание на то, что перемещения  $u_{BT}$  и  $u_{BX}$  направлены в противоположные стороны, т.е. имеют разные знаки. В итоге получаем

$$-3\alpha a \Delta T + 16,6 \frac{Xa}{EA} = 0,$$

откуда

$$X = 0,181\alpha EA \Delta T. \quad (5)$$

В заключение, определяя сначала значение площади поперечного сечения стержня

$$A = \pi R^2 (1 - (r/R)^2) = 3,14(0,025)^2 (1 - (20/25)^2) = 7,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

вычислим лишнюю неизвестную (реакцию опоры)

$$X = 0,181 \cdot 22,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,75 \cdot 10^{11} \cdot 7,06 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 12900 \text{ Н} = 12,9 \text{ кН}.$$

**25.5.** В стержневой системе, заданной в задаче 25.4, определить критическое повышение температуры  $\Delta T_{cr}$ , соответствующее предельному состоянию этой системы, обусловленному потерей устойчивости одного или нескольких сжатых стержней. Критическую силу вычислять по формуле Эйлера. Принять параметр длины  $a$  равным 1,5 м.

*Решение.* В предыдущей задаче установлено, что сжатыми будут стержни 2, 4 и 8 (четыре других растянуты, а один является нулевым). При этом стержни 2 и 4 равноопасны (одинаковы длины и силы), а стержень 8 менее опасен, потому что имеет не только меньшую нагрузку, но и меньшую длину.

Критическая сила по Эйлеру определяется так:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}.$$

Здесь коэффициент приведения  $\mu = 1$ , потому что исследуемый стержень закреплен по концам шарнирно. Кроме того длина этого стержня составляет  $l = a\sqrt{2}$ . В итоге предыдущая формула принимает вид

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{2a^2}. \quad (1)$$

В свою очередь, для усилий в исследуемом стержне было найдено в задаче 25.4

$$\begin{aligned} N_2 &= X\sqrt{2}, \\ X &= 0,181\alpha EA\Delta T, \\ N_2 &= 0,256\alpha EA\Delta T. \end{aligned}$$

Таким образом, условие возникновения предельного состояния

$$N_2 = F_{\text{cr}}$$

можно записать следующим образом

$$0,256\alpha EA\Delta T_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{2a^2}.$$

Отсюда нетрудно получить выражение для критической температуры

$$\Delta T_{\text{cr}} = \frac{19,23}{\alpha a^2} \cdot \frac{I_{\min}}{A}.$$

Выразим отношение момента инерции сечения к его площади через наружный и внутренний радиусы

$$\frac{I_{\min}}{A} = \frac{\pi R^4(1 - (r/R)^4)}{4\pi R^2(1 - (r/R)^2)} = \frac{1}{4}R^2(1 + (r/R)^2),$$

а затем вычислим это отношение

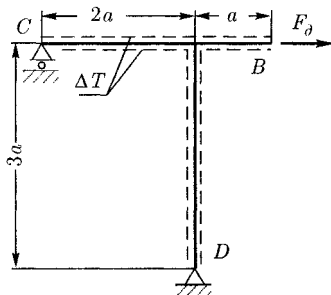
$$\frac{I_{\min}}{A} = 0,025^2(1 + (0,020/0,025)^2)/4 = 2,56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Наконец, определяем критическую температуру

$$T_{\text{cr}} = 19,23 \cdot 2,56 \cdot 10^{-4} / (22,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5^2) = 97^\circ.$$

**25.6.** Рама с консольным вылетом (см. рис.) равномерно нагревается. Изменение температуры составляет  $\Delta T$ . Определить горизонтальное перемещение конца  $B$  консоли.

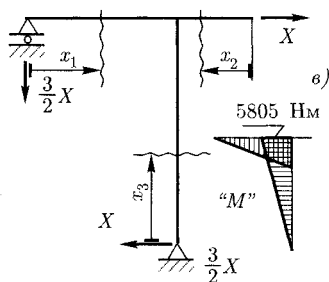
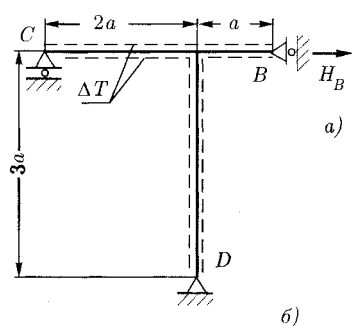
*Указание.* Для решения задачи с использованием теоремы Кастильяно надлежит в точке  $B$  приложить горизонтальную добавочную силу  $F_{\partial} = 0$  (см. рис.). Так как при равномерном нестесненном нагреве не возникает искривления стержней рамы, то решение можно провести по аналогии с задачами 25.1. В этом случае учитываются лишь температурные деформации удлинения стержней.



К задаче 25.6

Ответ:  $u_B = -3,5\alpha a\Delta T$ ; перемещение  $u_B$  происходит против силы  $F_\partial$ .

**25.7.** Рама из предыдущей задачи 25.6. снабжена шарнирной подвижной опорой в точке  $B$  (рис. а). Конструкция равномерно нагревается. Определить реакцию  $H_B$  в опоре, если рама сварена из отрезков стального двутавра № 20. Принять  $a = 0,5$  м,  $\Delta T = 100^\circ$ ,  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$  1/град.



К задаче 25.7

*Решение.* Заданная в задаче рама является статически неопределимой. Тепловые деформации такой конструкции не являются свободными, что приводит к возникновению усилий в связях. При решении задачи методом сил примем в качестве основной системы раму из задачи 25.6. В этом случае опору  $B$  следует считать лишней, а реакцию  $H_B$  — лишней неизвестной с обозначением  $H_B = X$ . Условие статической эквивалентности основной системы исходной системе выглядит здесь так:

$$u_{BT} + u_{BX} = 0, \quad (1)$$

где  $u_{BT}$  и  $u_{BX}$  — горизонтальные перемещения точки  $B$  при нагреве рамы и под действием силы  $X$ . Для первого имеем из задачи 25.6

$$|u_{BT}| = 3,5\alpha a\Delta T, \quad (2)$$

Второе по теореме Кастильяно находится так

$$\begin{aligned} u_{BX} = & \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_i}{EI} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial X} dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_i}{EA} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X} dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{kQ_i}{GA} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial X} dx, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M_i$ ,  $N_i$  и  $Q_i$  — изгибающий момент, нормальная и поперечные силы в  $i$ -м стержне.

Под действием силы  $X$  в основной системе возникают реакции, которые находятся из условий равновесия. Значения реакций вынесены на

рис. б. Тогда для первого участка ( $0 \leq x \leq 2a$ ) имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{3}{2}Xx, \quad \frac{\partial M_1}{\partial X} = -\frac{3}{2}x; \\ N_1 &= 0; \\ Q_1 &= \frac{3}{2}X, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial X} = \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

для второго ( $0 \leq x \leq a$ )

$$\begin{aligned} M_2 &= 0; \\ N_2 &= X, \quad \frac{\partial N_2}{\partial X} = 1; \\ Q_2 &= 0; \end{aligned}$$

для третьего ( $0 \leq x \leq 3a$ )

$$\begin{aligned} M_3 &= -Xx, \quad \frac{\partial M_3}{\partial X} = -x; \\ N_3 &= -\frac{3}{2}X, \quad \frac{\partial N_3}{\partial X} = -\frac{3}{2}; \\ Q_3 &= -X, \quad \frac{\partial Q_3}{\partial X} = -1. \end{aligned}$$

Использование полученных выражений в формуле (3) позволяет получить

$$\begin{aligned} u_{BX} &= \frac{1}{EI} \left( \int_0^{2a} \left( -\frac{3}{2}Xx \right) \left( -\frac{3}{2}x \right) dx + 0 + \int_0^{3a} (-Xx)(-x) dx \right) + \\ &+ \frac{1}{EA} \left( 0 + \int_0^a X \cdot 1 \cdot dx + \int_0^{3a} \left( -\frac{3}{2}X \right) \left( -\frac{3}{2} \right) dx \right) + \\ &+ \frac{k}{GA} \left( \int_0^{2a} \left( \frac{3}{2}X \right) \cdot \frac{3}{2} \cdot dx + 0 + \int_0^{3a} (-X)(-1) dx \right) = \\ &= \frac{15Xa^3}{EI} + \frac{7,75Xa}{EA} + \frac{7,5kXa}{GA}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для двутавра № 20 имеем из сортамента

$$A = 26,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad I = 18,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Безразмерный множитель  $k$  для двутавров вычисляется так:

$$k \approx \frac{A}{A_{\text{ст}}},$$

где  $A$  и  $A_{\text{ст}}$  – площадь сечения двутавра и площадь сечения его стенки.  
С помощью сортамента можно найти

$$k = 26,8/9,53 = 2,8.$$

Подставляя числа в формулы (2) и (4), получим

$$|u_{BT}| = 3,5 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 \cdot 100 = 0,002187 \text{ м},$$

$$u_{BX} = X(0,509 + 0,007 + 0,049) \cdot 10^{-6} = X \cdot 0,565 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Так как перемещение  $u_{BT}$  направлено против силы  $X$ , то условие эквивалентности (1) записывается следующим образом:

$$-0,002187 + X \cdot 0,565 \cdot 10^{-6} = 0,$$

откуда

$$X = 3870 \text{ Н}.$$

Имея значение лишней неизвестной, вычисляем остальные реакции

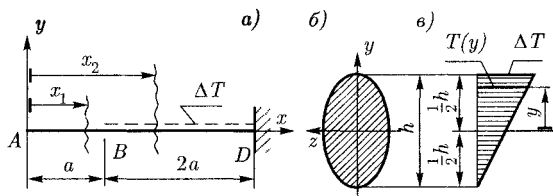
$$R_C = R_A = 3X/2 = 3 \cdot 3870/2 = 5805 \text{ Н},$$

$$R_C = X = 3870 \text{ Н},$$

после чего построение эпюры изгибающего момента не представляет труда (рис. в). В заключение вычисляем максимальное напряжение в поперечном сечении двутавра:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = 5808/(184 \cdot 10^{-6}) = 31,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31,5 \text{ МПа}.$$

**25.8.** Прямая консольная балка  $ABD$  с вылетом  $3a$  нагревается сверху на длине  $BD = 2a$  (рис. а). Сечение балки имеет две оси симметрии (рис. б). Условия подвода и отвода тепла таковы, что температура по высоте балки  $h$  изменяется линейно с перепадом  $\Delta T$  (рис. в). Поле температур на участке  $BD$  не зависит от координаты  $x$  (см. рис. а). Найти уравнение изогнутой оси балки.



К задаче 25.8

*Решение.* Если по толщине стержня температура изменяется линейно, то последний искривляется по дуге окружности с кривизной  $K_z$ . В данном случае на участке  $BD$  имеем

$$K_z = -\frac{\alpha \Delta T}{h},$$

а на участке  $AB$

$$K_z = 0.$$

На каждом из этих двух участков можно составить свое дифференциальное уравнение изогнутой оси. Составим эти уравнения по методу уравнивания постоянных и запишем их, используя сокращенную форму записи. Начало координат для обоих участков выберем на левом конце  $A$  (см. рис. а). Получаем

$$K_z \approx \frac{d^2 v}{dx^2} = 0|_1 - \frac{\alpha \Delta T}{h} (x-a)^0|_2. \quad (1)$$

Дважды интегрируем уравнения (1):

$$\frac{dv}{dx} = C_*|_1 - \frac{\alpha \Delta T}{h} (x-a)|_2, \quad (2)$$

$$v = D_* + C_* x|_1 - \frac{\alpha \Delta T}{2h} (x-a)^2|_2. \quad (3)$$

Постоянные интегрирования найдем с помощью условий закрепления балки:

$$v'|_{x=3a} = 0, \quad (4)$$

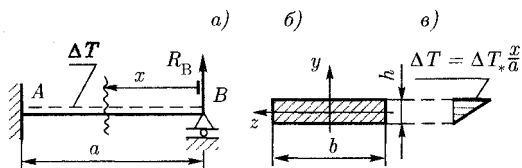
$$v|_{x=3a} = 0. \quad (5)$$

Подставляя условие (4) в (2), а условие (5) в (3), находим

$$C_* = 2\alpha \Delta T \frac{a}{h}, \quad D_* = -4\alpha \Delta T \frac{a^2}{h}. \quad (6)$$

С учетом соотношений (6) уравнения (3) изогнутой оси балки принимают вид

$$v = -\frac{\alpha \Delta T}{2h} \left( 8a^2 - 4ax|_1 + (x-a)^2|_2 \right).$$



К задаче 25.9

**25.9.** Пластина  $AB$  механического реле (рис. а) нагревается сверху. Температура линейно изменяется не только по толщине пластины (рис. б и в), но и по длине. Наибольший перепад температуры

$\Delta T_*$  имеет место у заделки  $A$ . Найти реакцию  $R_B$  в опоре  $B$ , а также установить закон изменения прогибов  $v(x)$ , если толщина  $h$  и ширина  $b$  пластины постоянны по всей ее длине.

*Решение.* Закон линейного изменения перепада температур по длине балки  $AB$  имеет в данном случае вид

$$\Delta T = \Delta T_* \frac{x}{a}. \quad (1)$$

Местная кривизна  $K_z(x)$  балки зависит как от местного перепада температуры  $\Delta T$ , так и от изгибающего момента в рассматриваемом сечении:

$$K_z(x) = K_z^T(x) + K_z^M(x). \quad (2)$$

В данном случае можно записать

$$K_z(x) = -\frac{\alpha \Delta T}{h} + \frac{M_z}{EI_z}$$

или

$$\frac{d^2 v}{dx^2} \approx K_z(x) = -\frac{\alpha \Delta T_* x}{ha} + \frac{R_B x}{EI_z} = \left( -\frac{\alpha \Delta T_*}{ha} + \frac{R_B}{EI_z} \right) x. \quad (3)$$

Дважды интегрируем дифференциальное уравнение (3):

$$\frac{dv}{dx} = C_* + \left( -\frac{\alpha \Delta T_*}{ha} + \frac{R_B}{EI_z} \right) \cdot \frac{x^2}{2}, \quad (4)$$

$$v = D_* + C_* x + \left( -\frac{\alpha \Delta T_*}{ha} + \frac{R_B}{EI_z} \right) \cdot \frac{x^3}{6}. \quad (5)$$

Условия закрепления балки имеют здесь вид

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=a} = 0, \quad v'|_{x=a} = 0. \quad (6)$$

Из уравнений (4) и (5) с помощью условий (6) получаем

$$D_* = 0, \quad (7)$$

$$C_* = 0, \quad (8)$$

$$R_B = \frac{\alpha EI_z \Delta T_*}{ha}. \quad (9)$$

Подставляя (7), (8) и (9) в уравнение (5), находим

$$v(x) = 0. \quad (10)$$

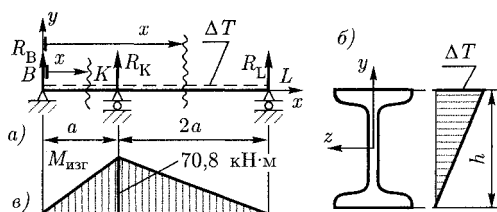
Таким образом, при заданных в задаче условиях пластина  $AB$  не искривляется.

Выражению (9) можно придать несколько иной вид, если выразить момент инерции  $I_z$  сечения через его ширину  $b$  и высоту  $h$ :

$$R_B = \frac{\alpha E b h^2 \Delta T_*}{12a}.$$



**25.10.** Стальная двутавровая балка № 30 опирается на три шарнирные опоры (рис. а). Балка сверху нагревается так, что температура по высоте меняется по линейному закону (рис. б). Температурный перепад составляет  $\Delta T = 80^\circ$ . Найти реакции в опорных закреплениях, построить эпюру изгибающих моментов, вычислить максимальные нормальные напряжения, если  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$  1/град,  $a = 1$  м.



К задаче 25.10

*Решение.* Предположим, что все реакции направлены вверх. Составим уравнения равновесия

$$\sum F_y = R_B + R_K + R_L = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_{z(B)} = R_K a + 3R_L a = 0. \quad (2)$$

По аналогии с задачей 26.8 составим дифференциальные уравнения изогнутой оси по методу уравнивания постоянных. Запишем эти уравнения сокращенным образом, выбирая начало координат в точке B (рис. а):

$$K_z(x) \approx \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{\alpha \Delta T}{h} + \frac{R_B}{EI} x \Big|_1 + \frac{R_K}{EI} (x-a) \Big|_2. \quad (3)$$

Проинтегрируем эти уравнения дважды:

$$v' = C_* - \frac{\alpha \Delta T}{h} x + \frac{R_B}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1 + \frac{R_K}{EI} \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_2, \quad (4)$$

$$v = D_* + C_* x - \frac{\alpha \Delta T}{h} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{R_B}{EI} \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_1 + \frac{R_K}{EI} \cdot \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_2. \quad (5)$$

Условия закрепления в данной балке имеют вид

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=a} = 0, \quad v|_{x=3a} = 0. \quad (6)$$

Подставляя по очереди условия (6) в уравнения (5), можно получить три алгебраических уравнения. Эти уравнения объединим с уравнениями (1) и (2) в одну систему и решим ее. Получим

$$\begin{aligned} D_* &= 0, & C_* &= \frac{\alpha a \Delta T}{4h}, \\ R_B &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha EI \Delta T}{ha}, \\ R_K &= -\frac{9}{4} \cdot \frac{\alpha EI \Delta T}{ha}, \\ R_L &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha EI \Delta T}{ha}. \end{aligned}$$

Осуществим числовые подстановки

$$C_* = 0,00125 \text{ рад}, \quad R_B = 47,2 \text{ кН}, \quad R_K = -70,8 \text{ кН}, \quad R_L = 23,6 \text{ кН}.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 6. Отсюда видно, что максимальные напряжения возникают в сечении  $K$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = 70800 / (472 \cdot 10^{-6}) = 150 \cdot 10^6 \text{ Па} = 150 \text{ МПа}.$$

**25.11.** Незамкнутая рама опирается на опоры  $A$  и  $C$  (см. рис.  $a$ ). Стержень  $AC$  охлаждается снизу таким образом, что по его толщине  $h$  температура изменяется линейно. Сечение стержня рамы имеет две оси симметрии. Определить расхождение  $u_B$  между сечениями  $B_1$  и  $B_2$  незамкнутого контура рамы, если  $a = 0,8$  м,  $h = 0,14$  м,  $\Delta T = -50^\circ$ ,  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$ .

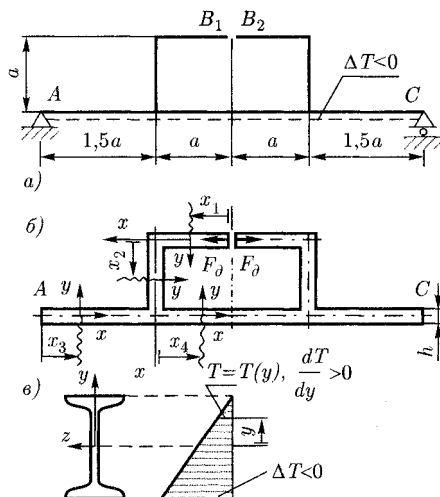
*Решение.* Перемещение  $u_B$  найдем с помощью теоремы Кастильяно. Приложим к сечениям  $B_1$  и  $B_2$  две равные и противоположно направленные добавочные силы  $F_\partial = 0$  (см. рис.  $b$ ). Тогда для искомого перемещения можно записать (с учетом симметрии рамы):

$$u_B = 2 \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{N_i}{EA} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_\partial} dx + 2 \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{M_i}{EI} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_\partial} dx. \quad (1)$$

В задаче 25.1 было показано, что первую сумму можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^4 \Delta l_i^T \frac{\partial N_i}{\partial F_\partial}.$$

Укажем, что температурную деформацию  $\Delta l_i^T$  стержня  $l_i$  при его искривлении следует измерять вдоль осевой линии. Если сечение стержня имеет две оси симметрии и если температура по его толщине меняется линейно,



К задаче 25.11

то вышеупомянутое удлинение  $\Delta l_i^T$  определяется лишь половиной полного перепада температуры. В итоге предыдущее выражение принимает вид

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \alpha l_i \Delta T_i \frac{\partial N_i}{\partial F_\theta}.$$

Во второй сумме формулы (1) множитель  $M_i/EI$  есть не что иное, как кривизна изогнутого стержня (согласно известной формуле Бернулли–Эйлера):

$$K_z = \frac{M_i}{EI}.$$

В задаче 25.8 было показано, что при неравномерном по толщине стержня прогреве имеем

$$K_z = -\frac{\alpha \Delta T}{h}. \quad (2)$$

Эта формула была выведена для условий  $\frac{dT}{dy} > 0$  и  $\Delta T > 0$ . На рис. в показаны произвольные сечения на каждом из четырех участков и связанные с этими сечениями подвижные оси координат. В этих осях на третьем и четвертом участках в данной задаче имеем  $\frac{dT}{dy} > 0$  и  $\Delta T < 0$ , поэтому в формуле (2) для кривизны следует изменить знак на противоположный. Осуществим соответствующие замены и перепишем формулу (1) в

окончательном виде

$$u_B = \sum_{i=1}^4 \alpha l_i \Delta T \frac{\partial N_i}{\partial F_\partial} + 2 \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{\alpha \Delta T}{h} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_\partial} dx. \quad (3)$$

Слагаемые, отвечающие стержням 1 и 2, выпадают из формулы (2), потому что эти стержни не подвергаются тепловому воздействию. Выпадают также слагаемые, соответствующие стержню 3. Это происходит из-за того, что

$$N_3 = 0, \quad M_3 = 0.$$

В итоге формула (2) в данном случае принимает вид

$$u_B = \alpha l_4 \Delta T \frac{\partial N_4}{\partial F_\partial} + \frac{2\alpha \Delta T}{h} \int_0^{l_4} \frac{\partial M_i}{\partial F_\partial} dx. \quad (4)$$

Так как

$$\begin{aligned} l_4 &= a, \quad l_2 = a, \\ N_4 &= F_\partial, \quad \frac{\partial N_4}{\partial F_\partial} = 1, \\ M_4 &= -F_\partial l_2 = -F_\partial a, \quad \frac{\partial M_4}{\partial F_\partial} = -a, \end{aligned}$$

то выражение (4) можно преобразовать следующим образом:

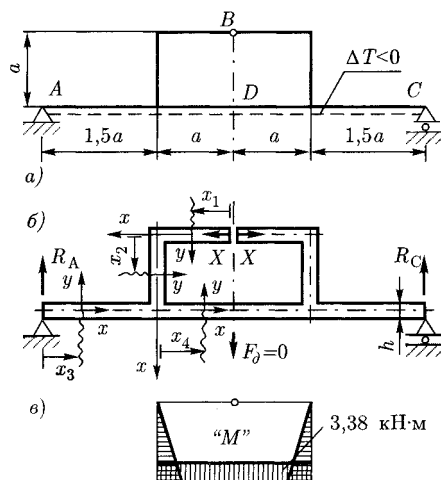
$$u_B = \alpha a \left( 1 - \frac{2a}{h} \right) \Delta T.$$

Подставим числа

$$u_B = 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8(1 - 2 \cdot 0,8/0,14)(-50) = 0,0052 \text{ м} = 5,2 \text{ мм}.$$

**25.12.** Сечения  $B_1$  и  $B_2$  рамы из предыдущей задачи 25.11 соединены шарниром  $B$ . Определить усилие в шарнире, если рама сварена из отрезков двутавра № 14. Остальные условия задачи 25.11 сохраняются. Вычислить наибольшее нормальное напряжение при изгибе стержней рамы, определить прогиб в точке  $D$  (в середине прогона между опорами).

*Решение.* Конструкция имеет в своем составе замкнутый контур, который в общем случае трижды статически неопределим. Однако в данном случае степень статической неопределимости равна единице ввиду наличия оси симметрии и расположенного на ней шарнира  $B$ . Перейдем к основной системе, разрезая контур поперечным сечением в шарнире  $B$ . Из внутренних сил в этом сечении останется отличной от нуля лишь нормальная (продольная) сила, которую примем за лишнюю неизвестную с



К задаче 25.12

обозначением  $X$  (рис. б). Условие эквивалентности основной системы исходной системе имеет здесь вид

$$u_{BT} + u_{BX} = 0, \quad (1)$$

где  $u_{BT}$  и  $u_{BX}$  — расхождения концов  $B_1$  и  $B_2$  при тепловом воздействии на раму и под влиянием сил  $X$  соответственно. Для первого имеем из задачи 25.11

$$u_{BT} = \alpha a \left( 1 - \frac{2a}{h} \right) \Delta T = 0,0052 \text{ м}, \quad (2)$$

для второго

$$u_{BX} = \frac{\partial U}{\partial X} = 2 \left( \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{M_i}{EI} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial X} dx + \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{N_i}{EA} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial X} dx + \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{kQ_i}{GA} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial X} dx \right). \quad (3)$$

Составим выражения для внутренних сил и производных. В пределах первого участка ( $0 \leq x \leq a$ , см. рис. б) имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, \quad Q_1 = 0, \\ N_1 &= -X, \quad \frac{\partial N_1}{\partial X} = -1; \end{aligned}$$

для второго ( $0 \leq x \leq a$ ) –

$$\begin{aligned} M_2 &= -Xx, \quad \frac{\partial M_2}{\partial X} = -1; \\ N_2 &= 0; \\ Q_2 &= X, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial X} = 1; \end{aligned}$$

для третьего ( $0 \leq x \leq 1,5a$ ) –

$$M_3 = 0, \quad N_3 = 0, \quad Q_3 = 0;$$

для четвертого ( $0 \leq x \leq a$ ) –

$$\begin{aligned} M_4 &= -Xx, \quad \frac{\partial M_4}{\partial X} = -x, \\ N_4 &= X, \quad \frac{\partial M_4}{\partial X} = 1; \\ Q_4 &= 0. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (3). После интегрирования найдем

$$u_{BX} = \frac{8Xa^3}{3EI} + \frac{4Xa}{EA} + \frac{2kXa}{GA}.$$

Из сортамента имеем для двутавра № 14:

$$I = 5,72 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4, \quad A = 17,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Кроме того, с помощью сортамента устанавливаем значение коэффициента  $k$  (см. также задачу 25.7):

$$k \approx \frac{A}{A_{\text{ст}}} = 17,4/6,12 = 2,84.$$

Наконец, после всех подстановок находим

$$u_{BX} = (1,19 + 0,01 + 0,03) \cdot 10^{-6} X$$

или

$$u_{BX} = 1,23 \cdot 10^{-6} X. \quad (4)$$

Отметим, что в данной задаче поправка к значению податливости  $\lambda_{XX} = 1,19 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}$ , вводимая при учете нормальной и поперечной сил, не превосходит 4%.

Направления вычисленных здесь перемещений  $u_{BT}$  и  $u_{BX}$  совпадают, поэтому условие (1), записанное с учетом (2) и (4), принимает вид

$$0,0052 + 1,23 \cdot 10^{-6} X = 0.$$

Отсюда получаем

$$X = -4230 \text{ Н}.$$

Таким образом, реальное направление лишней неизвестной  $X$  противоположно принятому в начале вычислений и указанному на рис. б.

Эпюра изгибающих моментов приведена на рис. в, откуда видно, что

$$|M|_{\max} = 3380 \text{ Нм.}$$

Соответствующее максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении стержня рамы находим известным образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} = 3380 / (81,7 \cdot 10^{-6}) = 41,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 41,4 \text{ МПа.}$$

Для определения вертикального перемещения  $v_D$  в сечении D вновь обратимся к теореме Кастильяно. Приложим здесь вертикальную добавочную силу  $F_D = 0$  (рис. б). Кроме того перемещение  $v_D$  представим в виде суммы

$$v_D = v_{DT} + v_{DX}, \quad (5)$$

где  $v_{DT}$  и  $v_{DX}$  – перемещения при тепловом воздействии на раму и под влиянием реальных сил  $X$  соответственно. Для определения первого воспользуемся результатами, полученными в задаче 25.11:

$$v_{DT} = \sum_{i=1}^4 \alpha l_i \Delta T \frac{\partial N_i}{\partial F_D} + 2 \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{\alpha \Delta T}{h} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_D} dx. \quad (6)$$

Второе перемещение определим традиционным путем

$$v_{DX} = 2 \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{M_i}{EI} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial F_D} dx. \quad (7)$$

В формуле (7) опущены ввиду малости слагаемые, отвечающие усилиям  $N_i$  и  $Q_i$ .

На первом и втором участках рамы внутренние усилия не зависят от добавочной силы  $F_D$ , поэтому займемся третьим и четвертым:

– при  $0 \leq x_3 \leq 1,5a$  найдем

$$\begin{aligned} N_3 &= 0, \\ M_3 &= \frac{1}{2} F_D x, \quad \frac{\partial M_3}{\partial F_D} = \frac{1}{2} x; \end{aligned}$$

– при  $0 \leq x_4 \leq a$  имеем

$$\begin{aligned} N_4 &= 0, \\ M_4 &= \frac{1}{2} F_D (x + 1,5a) - Xa, \quad \frac{\partial M_4}{\partial F_D} = \frac{1}{2} (x + 1,5a). \end{aligned}$$

В итоге формулы (6) и (7) принимают вид

$$v_{DT} = \frac{2\alpha \Delta T}{h} \left( \int_0^{1,5a} \frac{1}{2} x dx + \int_0^a \frac{1}{2} (x + 1,5a) dx \right),$$

$$v_{DX} = \frac{2}{EI} \left( \int_0^a (-Xa) \cdot \frac{1}{2} (x + 1,5a) dx \right).$$

В результате интегрирования получим

$$v_{DT} = \frac{4,25\alpha a^2 \Delta T}{h}, \quad v_{DX} = -\frac{2Xa^3}{EI}.$$

Подставим числа

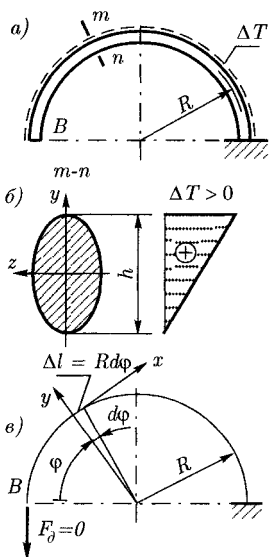
$$v_{DT} = +4,25 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8^2 (-50)/0,14 = -0,0121 \text{ м},$$

$$v_{DX} = -2(-4230) \cdot 0,8^3 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 5,72 \cdot 10^{-6}) = +0,0038 \text{ м}.$$

Наконец, по формуле (5) найдем

$$v_D = -0,0121 + 0,0038 = -0,0083 \text{ м} = -8,3 \text{ мм}.$$

Таким образом, перемещение сечения D происходит против направления силы  $F_D$ , т.е. вверх.



К задаче 25.13

**25.13.** Тонкое полукольцо радиуса  $R$  заделано одним концом (рис. а). Поперечное сечение этого кривого стержня имеет две оси симметрии и постоянно по всей длине. Одна из этих осей совпадает с плоскостью полукольца. Стержень нагревается с наружной стороны равномерно по всей длине (рис. а), а по толщине  $h$  температура изменяется линейно с перепадом  $\Delta T$  (рис. б). Определить вертикальное перемещение  $v_B$  свободного конца  $B$ .

*Решение.* Формула (1) из задачи 25.11 трансформируется в данном случае следующим образом:

$$v_B = \int_l \varepsilon_T \frac{\partial N}{\partial F_D} dl + \int_l \Delta K_z \frac{\partial M_z}{\partial F_D} dl, \quad (1)$$

где  $l$  и  $dl$  — развернутая длина стержня и элемент его длины (рис. в),  $F_D$  — добавочная сила (рис. в),  $\varepsilon_T$  — температурное относительное удлинение стержня по осевой линии,  $\Delta K_z$  — изменение кривизны стержня под действием неравномерного прогрева.



В задаче рассматривается стержень малой кривизны, поэтому изменение кривизны его оси можно определять по формуле, выведенной для прямого стержня при его неравномерном прогреве (см. задачу 25.8):

$$\Delta K_z = -\frac{\alpha \Delta T}{h}. \quad (2)$$

Подвижная система координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , связанная с произвольным поперечным сечением, показана на рис. 6. Здесь ось  $y$  направлена от центра кривизны. Именно для таких условий была получена формула (2).

Положение произвольного сечения будем задавать в полярной системе координат (рис. 6). Тогда для нормальной силы и изгибающего момента можно записать

$$N = F_\partial \cos \varphi, \quad M_z = -F_\partial R(1 - \cos \varphi). \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \quad (3)$$

Укажем также выражение для элемента длины

$$dl = R d\varphi. \quad (4)$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial N}{\partial F_\partial} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial M_z}{\partial F_\partial} = -R(1 - \cos \varphi). \quad (5)$$

Подставим соотношения (4) и (5) в (1) и проинтегрируем

$$\begin{aligned} v_B &= \varepsilon_T \int_0^\pi R \cos \varphi d\varphi - \Delta K_z \int_0^\pi R^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \varepsilon_T R \sin \varphi \Big|_0^\pi - \Delta K_z R^2 (\varphi - \sin \varphi) \Big|_0^\pi = -\pi \Delta K_z R^2. \end{aligned} \quad (6)$$

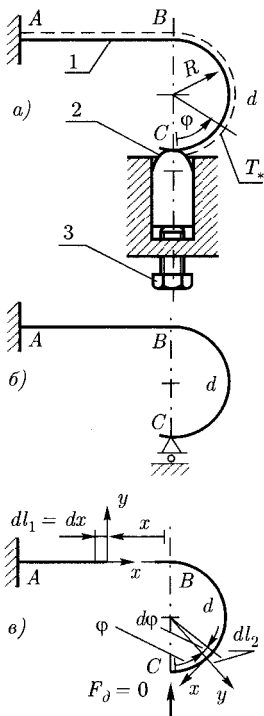
С учетом равенства (2) формуле (6) можно придать вид

$$v_B = \frac{\pi \alpha R^2 \Delta T}{h}. \quad (7)$$

Положительный знак здесь указывает на совпадение направлений силы  $F_\partial$  и перемещения  $v_B$ .

**25.14.** На рис. а дана схема специального токосъемного устройства, включающего шину 1 (полосу толщиной  $h$ ) и полуконтакт 2 с винтом 3. Последний поджимает полуконтакт к шине с заданным усилием. Шина прогревается по толщине неравномерно (по линейному закону), причем температура  $T_o$  нижней поверхности участка  $AB$  и внутренней поверхности полукольца  $BdC$  остается неизменной. Температура же верхней поверхности участка  $AB$  постоянна и составляет  $T_o + \Delta T$ , а температура наружной поверхности полукольца  $BdC$  изменяется по закону  $T_* = T_o + \Delta T \frac{\varphi}{\pi}$  (рис. а). Найти

соотношение между длиной  $l$  участка  $AB$  и радиусом  $R$  полукольца  $BdC$ , при котором усилие предварительного натяга не изменяется с нагреванием.



К задаче 25.14

*Решение.* Расчетная схема устройства представлена на рис. 6. Это статически неопределимая рама. При переходе к основной системе отбросим связь по вертикали в точке  $C$ . (рис. 6). Сначала остановимся на двух крайних случаях (применительно к основной системе):  $l \ll R$  и  $l \gg R$ . В первом из них искривлением участка  $AB$  можно пренебречь, а полукольцо станет увеличивать кривизну. В итоге точка  $C$  двинется вверх (и налево). Во втором случае пренебрегаем деформацией полукольца, а за счет приобретения участком  $AB$  отрицательной кривизны точка  $C$  переместится вниз (и налево). При искомом соотношении между  $l$  и  $R$  вертикальное перемещение точки  $C$  будет равно нулю:

$$v_C = 0. \quad (1)$$

Отыщем перемещение  $v_C$  по теореме Кастильяно. Для этого в точке  $C$  приложим вертикальную добавочную силу  $F_\theta = 0$  и запишем по аналогии с задачами 25.13 и 25.11:

$$\begin{aligned} v_C &= v_{C1} + v_{C2} = \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \varepsilon_i^T \frac{\partial N_i}{\partial F_\theta} dl_i + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \Delta K_{zi}^T \frac{\partial M_{zi}}{\partial F_\theta} dl_i = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь предполагается  $l_1 = \pi R$ ,  $l_2 = l$ ,  $dl_1 = R d\varphi$ ,  $dl_2 = dx$  (рис. 6).

Первая и вторая суммы в (2) принимают в этой задаче вид

$$v_{C1} = \int_0^\pi \varepsilon_1^T \frac{\partial N_1}{\partial F_\theta} R d\varphi + \int_0^l \varepsilon_2^T \frac{\partial N_2}{\partial F_\theta} dx, \quad (3)$$

$$v_{C2} = \int_0^\pi \Delta K_{z1}^T \frac{\partial M_{z1}}{\partial F_\theta} R d\varphi + \int_0^l \Delta K_{z2}^T \frac{\partial N_{z2}}{\partial F_\theta} dx. \quad (4)$$

Нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} N_1 &= -F_\partial \sin \varphi, \quad \frac{\partial N_1}{\partial F_\partial} = -\sin \varphi, \\ N_2 &= 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial F_\partial} = 0, \\ M_{z1} &= -F_\partial R \sin \varphi, \quad \frac{\partial M_{z1}}{\partial F_\partial} = -R \sin \varphi, \\ M_{z2} &= F_\partial x, \quad \frac{\partial M_{z2}}{\partial F_\partial} = x. \end{aligned}$$

Кроме того, используем соображения, высказанные при решении задач 25.8 и 25.13. Запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T &= \frac{1}{2} \alpha \Delta T \frac{\varphi}{\pi}, \quad \varepsilon_2^T = \frac{1}{2} \alpha \Delta T, \\ \Delta K_{z1}^T &= -\frac{\alpha \Delta T}{h} \cdot \frac{\varphi}{\pi}, \quad \Delta K_{z2}^T = -\frac{\alpha \Delta T}{h}. \end{aligned}$$

С учетом найденного можно соотношения (3) и (4) переписать следующим образом:

$$v_{C1} = \int_0^\pi \frac{1}{2} \alpha \Delta T \frac{\varphi}{\pi} \cdot (\sin \varphi) R d\varphi + \int_0^l \frac{1}{2} \alpha \Delta T \cdot 0 \cdot dx, \quad (5)$$

$$v_{C2} = \int_0^\pi \left( -\frac{\alpha \Delta T}{h} \cdot \frac{\varphi}{\pi} \right) (-R \sin \varphi) R d\varphi + \int_0^l \left( -\frac{\alpha \Delta T}{h} \right) \cdot x \cdot dx. \quad (6)$$

Проинтегрируем выражения (5) и (6):

$$v_{C1} = -\frac{1}{2} \alpha R \Delta T, \quad (7)$$

$$v_{C2} = \frac{1}{h} \alpha R^2 \Delta T - \frac{1}{2h} \alpha l^2 \Delta T. \quad (8)$$

Укажем, что для получения выражений (7) и (8) приходится дважды вычислять "по частям" один и тот же интеграл

$$\int_0^\pi \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi.$$

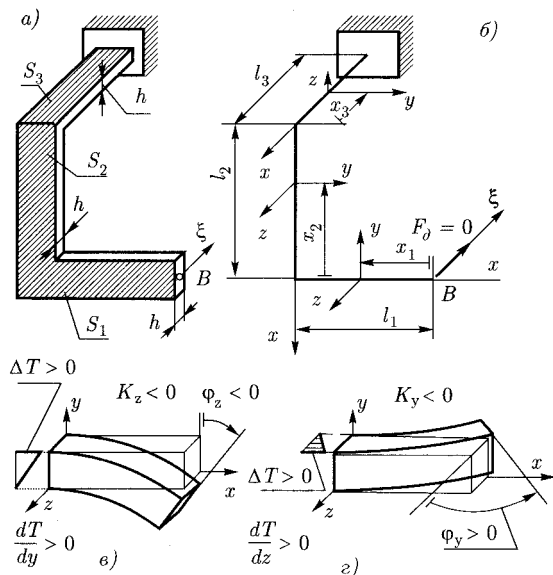
Подставим (7) и (8) в (2). Найдем

$$\frac{\alpha \Delta T}{2h} (-Rh + 2R^2 - l^2) = 0,$$

откуда

$$l = \sqrt{R(2R - h)}.$$

**25.15.** Ломаный стержень подвергается тепловому воздействию по граням  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  (рис. а). На этих поверхностях температура повышается на  $\Delta T$ , на противоположных остается постоянной. По толщине  $h$  температура изменяется линейно (рис. а). Определить перемещение  $w_{B\xi}$  свободного конца  $B$  в направлении  $\xi$ , если длины участков составляют  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  (рис. а и б).



К задаче 25.15

*Решение.* На каждом из участков вводим подвижные координатные оси  $xuz$ . Кроме того, прикладываем добавочную силу  $F_\partial = 0$  в точке  $B$  по направлению  $\xi$  (рис. б). По аналогии с задачей 25.14 записываем выражение для искомого перемещения

$$w_{B\xi} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \varepsilon^T \frac{\partial N_i}{\partial F_\partial} dx + \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} K_y^T \frac{\partial M_{yi}}{\partial F_\partial} dx. \quad (1)$$

Здесь

$$\varepsilon^T = \frac{1}{2} \alpha \Delta T, \quad (2)$$

$$K_y^T = + \frac{1}{h} \alpha \Delta T. \quad (3)$$

В формуле (3) перед правой частью поставлен положительный знак вместо отрицательного, как это было выше в аналогичной формуле

$$K_z^T = -\frac{1}{h}\alpha\Delta T, \quad (4)$$

см., например, задачу 25.8. Дело объясняется следующим. Формула (4) была выведена для случая  $dT/dy > 0$ , когда при искривлении стержня мы имели отрицательными как кривизну, так и взаимный угол поворота концов стержня ( $K_z < 0$ ,  $\varphi_z < 0$ , рис. в). Формула (3) записана также для варианта положительной производной  $dT/dz$ . Однако здесь получаем отрицательную кривизну и положительный взаимный угол поворота концов стержня ( $K_y < 0$ ,  $\varphi_y > 0$ , рис. г). Именно различие в знаках для углов  $\varphi_z$  и  $\varphi_y$  требует изменения знака в формуле (3) на противоположный по сравнению с формулой (4).

Обращаем внимание, что в данной задаче на каждом из трех участков имеем

$$K_z^T = 0,$$

поэтому в формуле (1) отсутствует соответствующее слагаемое справа от знака равенства.

Развернем формулу (1) применительно к заданным условиям

$$\begin{aligned} w_{B\xi} = & \frac{1}{2}\alpha\Delta T(0 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + (-1) \cdot l_3) + \\ & + \frac{1}{h}\alpha\Delta T \left( \int_0^{l_1} x dx + \int_0^{l_2} x dx + \int_0^{l_3} l_2 dx \right). \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить окончательно

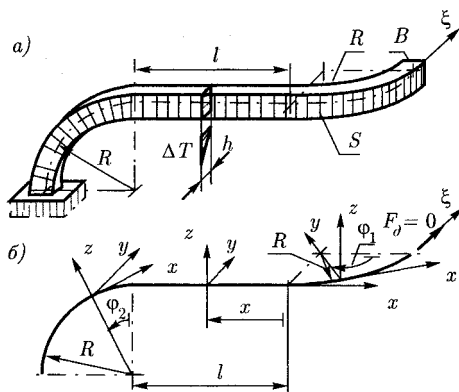
$$w_{B\xi} = \frac{\alpha\Delta T}{2h}(-hl_3 + l_1^2 + 2l_2l_3).$$

**25.16.** Заделанная одним концом скоба квадратного поперечного сечения со стороной  $h$ , изогнутая по концам во взаимно перпендикулярных плоскостях, подвергается нагреву на температуру  $\Delta T = \text{const}$  по поверхности  $S$  (рис. а). На противоположной стороне поддерживается начальная температура, а по толщине она меняется линейно. Определить горизонтальное перемещение  $u_{B\xi}$  свободного конца  $B$  в направлении  $\xi$ .

*Решение.* В основу решения положена формула

$$u_{B\xi} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \varepsilon^T \frac{\partial N_i}{\partial F_\partial} dl + \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \Delta K_z^T \frac{\partial M_{zi}}{\partial F_\partial} dl, \quad (1)$$

аналогичная принятой в задаче 25.15. Схема приложения добавочной силы  $F_\partial = 0$  и направления подвижных осей координат  $xyz$  показаны на



К задаче 25.16

рис. б. Продольная деформация по осевой линии выражается как обычно

$$\varepsilon^T = \frac{1}{2} \alpha \Delta T, \quad (2)$$

а изменение кривизны – следующим образом:

$$K_z^T = \frac{1}{h} \alpha \Delta T. \quad (3)$$

Знак плюс в правой части формулы (3) определяется направлением осей  $x, y, z$ , см. соответствующие рассуждения в задаче 25.15.

Развернем формулу (1) исходя из заданных условий

$$\begin{aligned} u_{B\xi} = & \frac{1}{2} \alpha \Delta T \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_1 \cdot R d\varphi_1 + \int_0^l 0 \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot R d\varphi_2 \right) + \\ & + \frac{1}{h} \alpha \Delta T \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(1 - \cos \varphi_1) \cdot R d\varphi_1 + \int_0^l (x + R) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R \sin \varphi_2 + (l + R) \cos \varphi_2) \cdot R d\varphi_2 \right). \quad (4) \end{aligned}$$

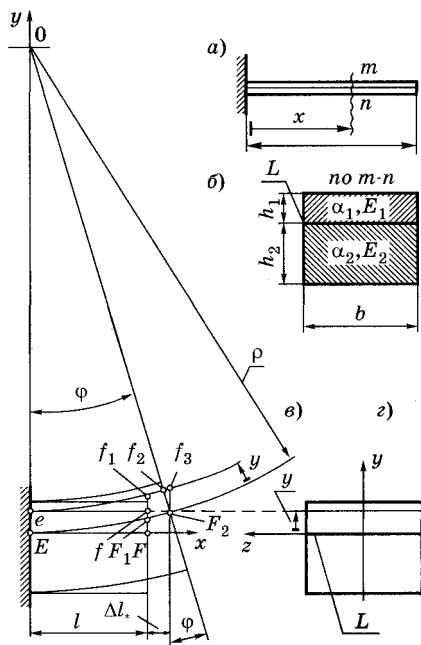
Вычислим интегралы, входящие в соотношение (4). Получим

$$u_{B\xi} = \frac{R}{2} \alpha \Delta T + \frac{1}{h} \alpha \Delta T \left( R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + l^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{R}{l} \right) + R^2 \left( 2 + \frac{l}{R} \right) \right)$$

или

$$u_{B\xi} = \frac{\alpha \Delta T}{h} \left( \frac{1}{2} Rh + R^2 \left( 2,57 + \frac{l}{R} \right) + l^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{R}{l} \right) \right).$$

**25.17.** В технике широко используют так называемые биметаллические стержни (пластины), которые получают спайкой или сваркой двух стержней (пластин) по поверхности их соприкосновения  $L$  (рис. а и б). Материалы этих двух частей различны. В общем случае имеем для первого  $\alpha_1$ ,  $E_1$  и  $\alpha_2$ ,  $E_2$  для второго. При равномерном нагреве такой стержень искривляется и изменяет свою длину (рис. в). Искривление характеризуют радиусом кривизны  $\rho$  поверхности спая, а изменение длины – удлинением (укорочением)  $\Delta l_*$ , измеренным вдоль по спаяу (рис. в). Найти кривизну  $1/\rho$  и относительное удлинение  $\varepsilon_* = \Delta l_*/l$  в зависимости от температуры нагрева  $\Delta T$ , параметров  $\alpha_1$ ,  $E_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $E_2$ , а также  $h_1$  и  $h_2$  (рис. б).



К задаче 25.17

*Решение.* Если  $\alpha_2 > \alpha_1$ , то стержень при своем нагреве искривляется так, как показано на рис. в. Здесь через  $EF$  обозначена проекция

поверхности спая  $L$  на плоскость  $xy$ , а через  $ef$  – проекция поверхности, параллельной слою  $L$  и отстоящей от него на расстоянии  $y$  (рис. в и з). Установлено, что при  $l \gg (h_1 + h_2)$  соблюдается гипотеза плоских сечений. Поэтому отрезки  $EF$  и  $ef$  при нагреве превращаются в дуги  $EF_2$  и  $ef_2$  концентрических окружностей радиусов  $\rho$  и  $(\rho - y)$ . Из рис. в видно, что удлинение  $\Delta l$  отрезка  $ef$ , равное  $f_1 f_2$ , можно представить в виде разности

$$\Delta l = f_1 f_2 = f_1 f_3 - f_2 f_3$$

или

$$\Delta l = \Delta l_* - \varphi y,$$

где  $\varphi$  – угол поворота концевой сечения (рис. в).

Обращаем внимание на то, что длина дуги  $EF_2$  может быть определена следующим образом:

$$EF_2 = \varphi \rho.$$

Так как

$$EF_2 \approx EF = l,$$

то можно записать

$$\varphi = \frac{l}{\rho}.$$

Благодаря этому получим для удлинения и относительного удлинения отрезка  $ef$

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_* - \frac{l}{\rho} y, \\ \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_* - \frac{y}{\rho}. \end{aligned} \quad (1)$$

С другой стороны, величина  $\varepsilon$  определяется физическими соотношениями

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma}{E_1} + \alpha_1 \Delta T & (\text{при } 0 \leq y \leq h_1), \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E_2} + \alpha_2 \Delta T & (\text{при } -h_2 \leq y \leq 0). \end{cases} \quad (2)$$

Подстановка выражений (2) в равенство (1) позволяет получить

$$\begin{cases} \sigma = E_1 \left( \varepsilon_* - \frac{y}{\rho} - \alpha_1 \Delta T \right) & (\text{при } 0 \leq y \leq h_1), \\ \sigma = E_2 \left( \varepsilon_* - \frac{y}{\rho} - \alpha_2 \Delta T \right) & (\text{при } -h_2 \leq y \leq 0). \end{cases} \quad (3)$$

Рассечем стержень произвольным поперечным сечением и запишем условия равновесия правой (или левой) отсеченной части:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \int_A dN = \int_A \sigma dA = 0, \\ \sum m_z &= \int_A dM_z = \int_A y dN = \int_A y \sigma dA = 0. \end{aligned}$$



Ввиду симметрии относительно оси  $y$  можно записать для элементарной площади следующее выражение:

$$dA = bdy,$$

где  $b$  – ширина стержня. Поэтому уравнения равновесия несколько упрощаются:

$$\sum F_x = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma bdy = 0, \quad (4)$$

$$\sum m_z = \int_{-h_2}^{h_1} y \sigma bdy = 0. \quad (5)$$

Подставим (3) сначала в (4), а затем в (5):

$$\begin{aligned} E_1 \int_0^{h_1} \left( \varepsilon_* - \frac{y}{\rho} - \alpha_1 \Delta T \right) bdy + E_2 \int_{-h_2}^0 \left( \varepsilon_* - \frac{y}{\rho} - \alpha_2 \Delta T \right) bdy, \\ E_1 \int_0^{h_1} \left( \varepsilon_* - \frac{y}{\rho} - \alpha_1 \Delta T \right) y bdy + E_2 \int_{-h_2}^0 \left( \varepsilon_* - \frac{y}{\rho} - \alpha_2 \Delta T \right) y bdy. \end{aligned}$$

После интегрирования можно получить

$$\begin{aligned} \varepsilon_* \left( h_1 + h_2 \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{1}{2\rho_1} \left( h_1^2 - h_2^2 \frac{E_2}{E_1} \right) &= \left( \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \frac{E_2}{E_1} \right) \Delta T, \\ \frac{\varepsilon_*}{2} \left( h_1^2 - h_2^2 \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{1}{3\rho_1} \left( h_1^3 + h_2^3 \frac{E_2}{E_1} \right) &= \frac{1}{2} \left( \alpha_1 h_1^2 - \alpha_2 h_2^2 \frac{E_2}{E_1} \right) \Delta T \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} a_1 \varepsilon_* + b_1 \frac{1}{\rho} = c_1, \\ a_2 \varepsilon_* + b_2 \frac{1}{\rho} = c_2, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_1 = h_1 + h_2 \frac{E_2}{E_1}, \\ b_1 = -\frac{1}{2} \left( h_1^2 - h_2^2 \frac{E_2}{E_1} \right), \\ c_1 = \left( \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \frac{E_2}{E_1} \right) \Delta T, \\ a_2 = \frac{1}{2} \left( h_1^2 - h_2^2 \frac{E_2}{E_1} \right), \\ b_2 = -\frac{1}{3} \left( h_1^3 + h_2^3 \frac{E_2}{E_1} \right), \\ c_2 = \frac{1}{2} \left( \alpha_1 h_1^2 - \alpha_2 h_2^2 \frac{E_2}{E_1} \right) \Delta T. \end{cases} \quad (7)$$

Решая систему уравнений (6), находим

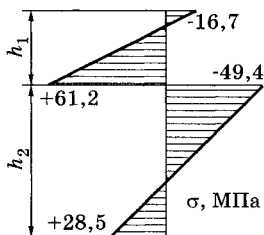
$$\varepsilon_* = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}. \quad (9)$$

Отметим, что при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  из (8) и (9) следует

$$\varepsilon_* = \alpha \Delta T, \quad \frac{1}{\rho} = 0,$$

т.е. стержень не искривляется, а лишь удлиняется.



**25.18.** В предыдущей задаче 25.17 определить значения величин  $\varepsilon_*$  и  $K = 1/\rho$ , если  $\Delta T = 200^\circ$ ,  $\alpha_1 = 12,5 \cdot 10^{-6}$  1/град,  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\alpha_2 = 16,5 \cdot 10^{-6}$  1/град,  $E_2 = 10^{11}$  Па,  $h_1 = 1$  мм,  $h_2 = 2$  мм. Дополнительно определить поперечное перемещение свободного конца стержня, принимая  $l = 60$  мм.

*Решение.* Вычислим сначала коэффициенты уравнений (6):

К задаче 25.18

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,001 + 0,002(1/2) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\ b_1 &= -(0,001^2 - 0,002^2(1/2)) = \\ &= 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \\ c_1 &= (12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,001 + \\ &\quad + 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,002(1/2)) \cdot 200 = \\ &= 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \\ a_2 &= (0,001^2 - 0,002^2(1/2))/2 = -0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \\ b_2 &= -(0,001^3 + 0,002^3(1/2))/3 = -1,667 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3, \\ c_2 &= (12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,001 - 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,002^2(1/2)) \cdot 200/2 = \\ &= -2,05 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Далее замечаем, что в выражениях (8) и (9) используется один и тот же знаменатель. Вычислим его:

$$\begin{aligned} \Delta &= b_1 a_2 - b_2 a_1 = 0,5 \cdot 10^{-6}(-0,5 \cdot 10^{-6}) - (-1,667 \cdot 10^{-9}) \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \\ &= 3,08 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Это позволяет несколько упростить подстановки в формулы (8) и (9):

$$\begin{aligned}\varepsilon_* &= (0,5 \cdot 10^{-6}(-2,05 \cdot 10^{-9}) - \\ &\quad - (-1,667 \cdot 10^{-9}) \cdot 5,8 \cdot 10^{-6}) / (3,08 \cdot 10^{-12}) = 2,806 \cdot 10^{-3}, \\ \frac{1}{\rho} = K &= (5,8 \cdot 10^{-6}(-0,5 \cdot 10^{-6}) - \\ &\quad - (-2,05 \cdot 10^{-9}) \cdot 2 \cdot 10^{-3}) / (3,08 \cdot 10^{-12}) = 0,3896 \text{ м}^{-1}.\end{aligned}$$

Далее по формулам (3) вычисляем нормальные напряжения в характерных точках поперечного сечения. Получаем

$$\begin{aligned}\sigma|_{y=h_1} &= 2 \cdot 10^{11}(2,806 \cdot 10^{-3} - 0,001 \cdot 0,3896 - 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 200) = \\ &= -16,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = -16,7 \text{ МПа}, \\ \sigma|_{y=0} &= 2 \cdot 10^{11}(2,806 \cdot 10^{-3} - 0 - 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 200) = \\ &= 61,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 61,2 \text{ МПа (сверху над слоем } L), \\ \sigma|_{y=-h_2} &= 10^{11}(2,806 \cdot 10^{-3} - (-0,002) \cdot 0,3896 - 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 200) = \\ &= 28,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28,5 \text{ МПа}, \\ \sigma|_{y=0} &= 10^{11}(2,806 \cdot 10^{-3} - 0 - 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 200) = \\ &= -49,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = -49,4 \text{ МПа (снизу под слоем } L).\end{aligned}$$

Соответствующая эпюра нормальных напряжений приведена на рис.

Для определения поперечных прогибов стержня запишем дифференциальное уравнение его изогнутой оси

$$v'' = \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

а затем его дважды проинтегрируем:

$$v' = C_* + \frac{x}{\rho}, \quad (2)$$

$$v = D_* + C_*x + \frac{x^2}{2\rho}. \quad (3)$$

Постоянные интегрирования определяем из условий закрепления стержня в заделку на левом конце

$$v'|_{x=0} = 0 = C_*, \quad (4)$$

$$v|_{x=0} = 0 = D_*. \quad (5)$$

С учетом (4) и (5) уравнение (3) принимает вид

$$v = \frac{x^2}{2\rho}. \quad (6)$$

Для прогиба на свободном конце стержня имеем

$$v|_{x=l} = \frac{l^2}{2\rho}. \quad (7)$$

Числовые подстановки из условий задачи дают

$$\begin{aligned} v|_{x=l} &= 0,06^2 \cdot 0,3896/2 = \\ &= 7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,7 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Положительное значение величины  $v$  соответствует перемещению вверх.

**25.19.** Определить усилие  $R$  между полуконтактом  $B$  и биметаллической пластиной, возникающее при нагреве последней на температуру  $\Delta T = 200^\circ$ . Между пластиной и полуконтактом  $B$  предусмотрен начальный зазор  $\delta = 0,3$  мм (см. рис. *a*). Рассмотреть два варианта:

- ширина пластины постоянна по всей длине и составляет  $b = 8$  мм,
- ширина пластины линейно изменяется от  $b = 8$  мм на свободном конце до  $b_0 = 16$  мм у заделки (рис. *б* и *в*). Параметры  $\alpha_1$ ,  $E_1$ ,  $h_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $E_2$ ,  $h_2$  принять из предыдущей задачи 25.18.

*Решение.* Сначала определим перекрытие  $f$  зазора  $\delta$  при свободном деформировании пластины (когда полуконтакт  $B$  устранили):

$$f = v|_{x=l} - \delta = 0,7 - 0,3 = 0,4 \text{ мм},$$

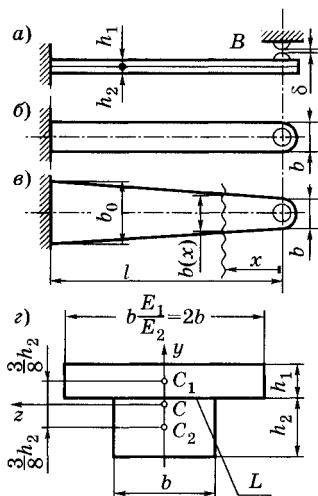
где  $f = v|_{x=l} = 0,7$  мм – перемещение свободного конца, найденное в предыдущей задаче.

*Первый вариант.* Для однородной пластины имеем формулу, связывающую перемещение  $f$  с усилием  $R$ :

$$f = \frac{Rl^3}{3EI}.$$

Отсюда получаем для усилия

$$R = \frac{3EI f}{l^3}. \quad (1)$$



К задаче 25.19

В случае биметаллической пластины этой формулой можно пользоваться, но с заменой параметра жесткости  $EI$  на другой, ему эквивалентный, например,  $E_2 I_2$ . На рис. *г* поясняется способ трансформирования заданного сечения в эквивалентное, когда модуль упругости последнего принимается равным  $E_2$ . В этой ситуации вертикальные размеры  $h_1$  и  $h_2$ , а также ширина  $b$  нижней (второй) пластины остаются неизменными. Увеличивается лишь ширина верхней пластины в отношении  $E_1/E_2$ , т.е. в два раза. Так как  $h_2 = 2h_1$ , то вновь полученное сечение оказывается состоящим из двух равновеликих площадей. Поэтому центр тяжести  $C$  сечения

расположен строго посередине между центрами тяжести  $C_1$  и  $C_2$  упомянутых площадей на расстоянии  $3h_2/8$  от каждого из них (см. рис. 2). Далее подсчитываем момент инерции  $I_z$  составного сечения в соответствии с правилами параллельного переноса осей:

$$I_z = \frac{1}{12} 2b \left( \frac{h_2}{2} \right)^3 + \frac{1}{12} b h_2^3 + \left( 2b \cdot \frac{1}{2} h_2 \right) \left( \frac{3}{8} h_2 \right)^2 + (b h_2) \left( \frac{3}{8} h_2 \right)^2 = 0,385 b h_2^3.$$

Наконец, находим усилие  $R$ , используя формулу (1) с заменой  $EI$  на  $E_2 I_z$ :

$$R = \frac{1,156 E_2 b h_2^3}{l^3}$$

или

$$R = 1,156 \cdot 10^{11} \cdot 0,008 \cdot 0,002^3 \cdot 0,0004/0,06^3 = 13,7 \text{ Н.}$$

*Второй вариант.* Для решения используем теорему Кастильяно применительно к эквивалентной однородной балке переменного сечения. Получаем

$$f = \frac{\partial U}{\partial R} = \int_0^l \frac{M(x)}{E_2 I_z(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial R} \cdot dx. \quad (2)$$

Изгибающий момент и частную производную от него по обобщенной силе  $R$  вычисляем для консольной балки с силой на конце

$$M(x) = -Rx, \quad (3)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial R} = -x. \quad (4)$$

Для определения переменного момента инерции воспользуемся формулой, полученной в варианте 1:

$$I_z(x) = 0,385 b(x) h_2^3. \quad (5)$$

Переменная ширина описывается здесь следующим соотношением

$$b(x) = b + (b_o - b) \frac{x}{l}$$

или

$$b(x) = C_1 (C_2 + x), \quad (6)$$

где

$$C_1 = \frac{b_o - b}{l}, \quad (7)$$

$$C_2 = \frac{bl}{b_o - b}. \quad (8)$$

С учетом формул (3)–(8) выражение (2) принимает вид

$$f = \frac{R}{0,385 E_2 C_1 h_2^3} \int_0^l \frac{x^2 dx}{C_2 + x}$$

или

$$R = \frac{0,385 E_2 C_1 h_2^3 f}{I_*}, \quad (9)$$

где

$$I_* = \int_0^l \frac{x^2 dx}{C_2 + x}. \quad (10)$$

Вычислим этот интеграл

$$\begin{aligned} I_* &= \int_0^l \frac{x^2 - C_2^2 + C_2^2}{C_2 + x} dx = \int_0^l (x - C_2) dx + \int_0^l C_2^2 \frac{dx}{C_2 + x} = \\ &= \left( \frac{1}{2} x^2 - C_2 x + C_2^2 \ln(C_2 + x) \right) \Big|_0^l \end{aligned}$$

или окончательно

$$I_* = \frac{1}{2} l^2 - C_2 l + C_2^2 \ln \frac{C_2 + l}{C_2}. \quad (11)$$

Далее найдем численные значения промежуточных параметров

$$C_1 = (16 - 8)/60 = 0,1333,$$

$$C_2 = 8 \cdot 60/(16 - 8) = 60 \text{ мм} = 0,06 \text{ м},$$

$$I_* = 60^2/2 - 60 \cdot 60 + 60^2 \ln((60 + 60)/60) = 695 \text{ мм}^2 = 695 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

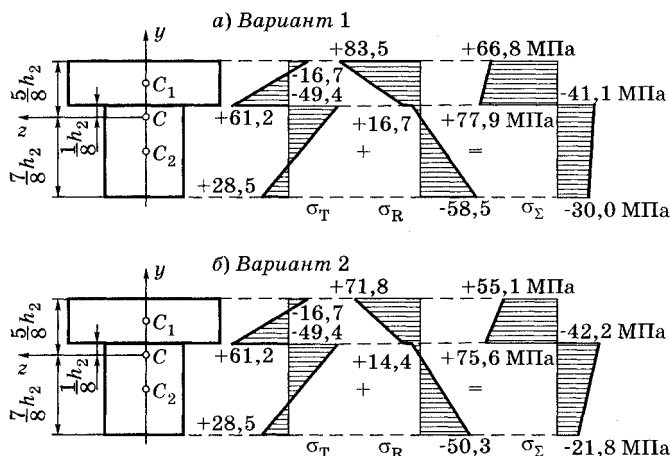
после чего по формуле (5) определяем усилие взаимодействия пластины и полуконтакта  $B$ :

$$R = 0,385 \cdot 10^{11} \cdot 0,1333 \cdot 0,002^3 \cdot 0,0004/(695 \cdot 10^{-6}) = 23,6 \text{ Н}.$$

**25.20.** По условиям предыдущей задачи 25.19 определить нормальные напряжения в заделке биметаллической пластины для вариантов 1 и 2 (пластины постоянной и переменной ширины).

*Решение.* В процессе вычислений следует просуммировать напряжения, обусловленные нагревом пластины в свободном состоянии (см. эпюру  $\sigma$  в задаче 25.18), и напряжения, возникающие под действием силы  $R$  (см. задачу 25.19). Для вычисления последних воспользуемся следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = -\frac{y}{\rho} E_1 & (\text{при } \frac{1}{8} h_2 \leq y \leq \frac{5}{8} h_2), \\ \sigma = -\frac{y}{\rho} E_2 & (\text{при } -\frac{7}{8} h_2 \leq y \leq \frac{1}{8} h_2), \end{array} \right. \quad (1)$$



К задаче 25.20

где  $\frac{1}{\rho}$  – кривизна пластины у заделки при воздействии только силой  $R$ .  
Имеем для варианта 1

$$\frac{1}{\rho^{(1)}} = \frac{M_z^{(1)}}{E_2 I_z^{(1)}} = -\frac{R^{(1)} l}{E_2 \cdot 0,385 b h_2^3}, \quad (2)$$

а также для варианта 2

$$\frac{1}{\rho^{(2)}} = \frac{M_z^{(2)}}{E_2 I_z^{(2)}} = -\frac{R^{(2)} l}{E_2 \cdot 0,385 b_0 h_2^3}. \quad (3)$$

С помощью числовых подстановок находим

$$\frac{1}{\rho^{(1)}} = -13,7 \cdot 0,06 / (10^{11} \cdot 0,385 \cdot 0,008 \cdot 0,002^3) = -0,334 \text{ 1/м},$$

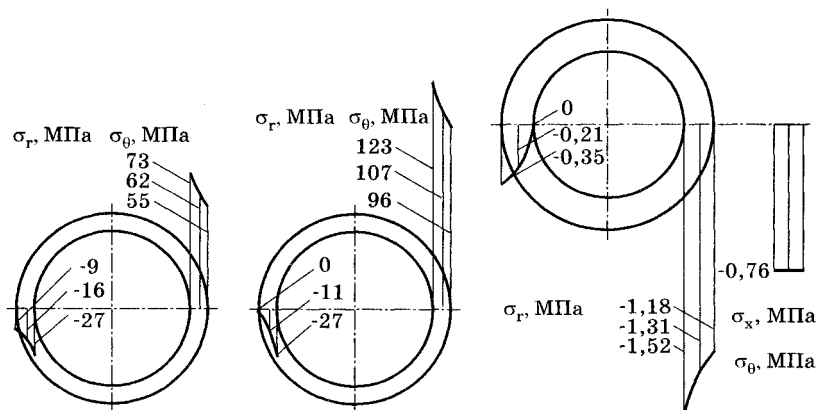
$$\frac{1}{\rho^{(2)}} = -23,6 \cdot 0,06 / (10^{11} \cdot 0,385 \cdot 0,016 \cdot 0,002^3) = -0,288 \text{ 1/м}.$$

Далее можно переходить к вычислениям напряжений по формулам (1). Результаты этих подсчетов иллюстрируются эпюрами  $\sigma_R$  на рис. а и б. Здесь же приведены эпюры  $\sigma_T$  – напряжений, связанных только с нагревом, а также эпюры  $\sigma^P$  – суммарных напряжений.

## РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

**26.1.** Длинная стальная труба, имеющая внутренний и наружный диаметры  $2a = 40$  мм и  $2b = 50$  мм, подвергается внутреннему и наружному давлениям жидкости  $p_a = 27$  МПа и  $p_b = 9$  МПа. Определить радиальные  $\sigma_r$  и окружные  $\sigma_\theta$  нормальные напряжения в стенке этой трубы при  $r = 20$  мм,  $r = 22,5$  мм,  $r = 25$  мм и построить соответствующие эпюры.

*Ответ:* См. иллюстрацию на рис.



К задаче 26.1

К задаче 26.2

К задаче 26.3

**26.2.** Как изменятся эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  для трубы из предыдущей задачи, если внешнее давление снизить до нуля.

*Ответ:* См. иллюстрацию на рис.

**26.3.** По дну водоема глубиной  $H = 35$  м проложен технологический туннель в виде цилиндрической бетонной трубы с наружным и внутренним диаметрами  $2b = 2,7$  м,  $2a = 2,0$  м. Определить радиальные  $\sigma_r$  и окружные  $\sigma_\theta$  нормальные напряжения в стенке этой трубы. Принять, что в продольном направлении труба подвергается давлению той же воды.

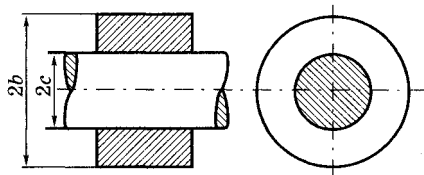
*Указание.* Давление воды  $p_b$  вычислить по известной формуле

$$p_b = H\rho g = 35 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 343000 \text{ Па} = 0,343 \text{ МПа}.$$

*Ответ:* См. иллюстрацию на рис.



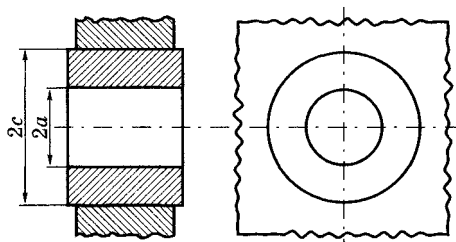
**26.4.** Стальной вал диаметром  $2c = 20$  мм собирается в единое целое со стальной втулкой наружного диаметра  $2b = 40$  мм по посадке с гарантированным натягом. Натяг на радиус составляет  $\Delta = 0,02$  мм. Определить контактное давление  $p_o$ , возникающее по поверхности соприкосновения вала и втулки.



К задаче 26.4

*Ответ:*  $p_o = 150$  МПа.

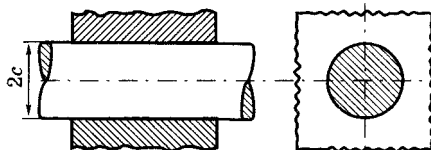
**26.5.** Стальная втулка с наружным и внутренним диаметрами  $2c = 40$  мм и  $2a = 20$  мм вставлена в стальную плиту с гарантированным натягом. Натяг на радиус составляет  $\Delta = 0,02$  мм. Определить контактное давление  $p_o$ , возникающее по поверхности соприкосновения втулки и плиты.



К задаче 26.5

*Ответ:*  $p_o = 75$  МПа.

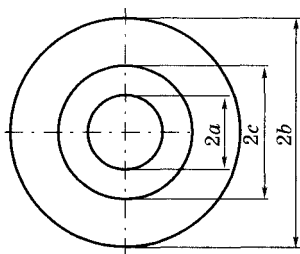
**26.6.** Стальной вал диаметром  $2c = 40$  мм вставляется в стальную плиту с гарантированным натягом. Натяг на радиус составляет  $\Delta = 0,02$  мм. Определить контактное давление  $p_o$ , возникающее по поверхности соприкосновения вала и плиты.



К задаче 26.6

Ответ:  $p_o = 100$  МПа.

**26.7.** Подобрать оптимальные размеры  $b$  и  $c$  составного ("скрепленного") стального цилиндра с заданным внутренним диаметром  $2a = 200$  мм (см. рис.). Во внутренней полости цилиндра предполагается рабочая жидкость под давлением  $p = 200$  МПа. Определить также оптимальный натяг на радиус  $\Delta$  при посадке одного цилиндра на другой. Предел текучести стали не превосходит  $\sigma_y = 600$  МПа. Принять нормативный коэффициент запаса  $[s] = 2,0$ .



К задаче 26.7

Отсюда нетрудно получить

$$b = \frac{a[\sigma]}{[\sigma] - p} \quad (1)$$

или

$$b = 0,1(300/(300 - 200)) = 0,3 \text{ м} = 300 \text{ мм}.$$

Второе условие Гадолина записывается следующим образом:

$$c = \sqrt{ab}. \quad (2)$$

Отсюда в нашем случае получается

$$c = \sqrt{0,1 \cdot 0,3} = 0,173 \text{ м} = 173 \text{ мм}.$$

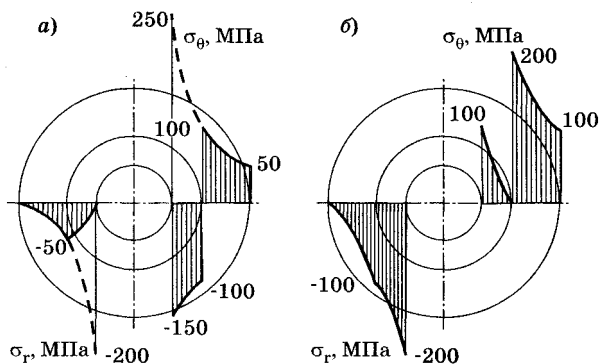
Наконец, определим значение оптимального натяга на радиус при посадке с гарантированным натягом наружного цилиндра на внутренний

$$\Delta = \frac{p}{E} \sqrt{ab} = \frac{p}{E} c. \quad (3)$$

В результате числовых подстановок имеем

$$\Delta = (200 \cdot 10^6 / 2 \cdot 10^{11}) \cdot 0,173 = 0,173 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,173 \text{ мм}.$$

**26.8.** По данным предыдущей задачи 26.7 определить контактное давление  $p_o$  между цилиндрами, а также радиальные  $\sigma_r$



К задаче 26.8

и окружные  $\sigma_\theta$  нормальные напряжения в характерных объемах скрепленного цилиндра.

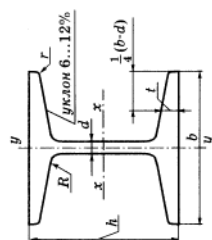
Ответ:  $p_o = 50$  МПа, см. также иллюстрацию на рис. а и б. На рис. а даны эпюры  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  после напрессовки одного цилиндра на другой; кроме того, штриховой линией показаны эпюры  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , которые возникли бы в сплошном цилиндре под действием рабочего давления; на рис. б даны эпюры  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в скрепленном цилиндре в рабочем состоянии.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

## ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАННЫЕ

Сортамент

(в соответствии с ГОСТ 8239-89)



| Номер<br>дву-<br>тав-<br>ра | Размеры |     |      |      |      |     | Площадь<br>поперечного<br>сечения, см <sup>2</sup> | Масса<br>1 м,<br>кг | Справочные значения для осей      |                                   |                      |                                   |                                   |                                   |                      |
|-----------------------------|---------|-----|------|------|------|-----|----------------------------------------------------|---------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|
|                             | h       | b   | d    | t    | R    | r   |                                                    |                     | x - x                             |                                   |                      | y - y                             |                                   |                                   |                      |
|                             |         |     |      |      |      |     |                                                    |                     | I <sub>x</sub><br>см <sup>4</sup> | W <sub>x</sub><br>см <sup>3</sup> | i <sub>x</sub><br>см | S <sub>x</sub><br>см <sup>3</sup> | I <sub>y</sub><br>см <sup>4</sup> | W <sub>y</sub><br>см <sup>3</sup> | i <sub>y</sub><br>см |
| 10                          | 100     | 55  | 4,5  | 7,2  | 7,0  | 2,5 | 12,0                                               | 9,46                | 198                               | 39,7                              | 4,06                 | 23,0                              | 17,9                              | 6,49                              | 1,22                 |
| 12                          | 120     | 64  | 4,8  | 7,3  | 7,5  | 3,0 | 14,7                                               | 11,50               | 350                               | 58,4                              | 4,88                 | 33,7                              | 27,9                              | 8,72                              | 1,38                 |
| 14                          | 140     | 73  | 4,9  | 7,5  | 8,0  | 3,0 | 17,4                                               | 13,70               | 572                               | 81,7                              | 5,73                 | 46,8                              | 41,9                              | 11,50                             | 1,55                 |
| 16                          | 160     | 81  | 5,0  | 7,8  | 8,5  | 3,5 | 20,2                                               | 15,90               | 873                               | 109,0                             | 6,57                 | 62,3                              | 58,6                              | 14,50                             | 1,70                 |
| 18                          | 180     | 90  | 5,1  | 8,1  | 9,0  | 3,5 | 23,4                                               | 18,40               | 1290                              | 143,0                             | 7,42                 | 81,4                              | 82,6                              | 18,40                             | 1,88                 |
| 20                          | 200     | 100 | 5,2  | 8,4  | 9,5  | 4,0 | 26,8                                               | 21,00               | 1840                              | 184,0                             | 8,28                 | 104,0                             | 115,0                             | 23,10                             | 2,07                 |
| 22                          | 220     | 110 | 5,4  | 8,7  | 10,0 | 4,0 | 30,6                                               | 24,00               | 2550                              | 232,0                             | 9,13                 | 131,0                             | 157,0                             | 28,60                             | 2,27                 |
| 24                          | 240     | 115 | 5,6  | 9,5  | 10,5 | 4,0 | 34,8                                               | 27,30               | 3460                              | 289,0                             | 9,97                 | 163,0                             | 198,0                             | 34,50                             | 2,37                 |
| 27                          | 270     | 125 | 6,0  | 9,8  | 11,0 | 4,5 | 40,2                                               | 31,50               | 5010                              | 371,0                             | 11,20                | 210,0                             | 260,0                             | 41,50                             | 2,54                 |
| 30                          | 300     | 135 | 6,5  | 10,2 | 12,0 | 5,0 | 46,5                                               | 36,50               | 7080                              | 472,0                             | 12,30                | 268,0                             | 337,0                             | 49,90                             | 2,69                 |
| 33                          | 330     | 140 | 7,0  | 11,2 | 13,0 | 5,0 | 53,8                                               | 42,20               | 9840                              | 597,0                             | 13,50                | 339,0                             | 419,0                             | 59,90                             | 2,79                 |
| 36                          | 360     | 145 | 7,5  | 12,3 | 14,0 | 6,0 | 61,9                                               | 48,60               | 13380                             | 743,0                             | 14,70                | 423,0                             | 516,0                             | 71,10                             | 2,89                 |
| 40                          | 400     | 155 | 8,3  | 13,0 | 15,0 | 6,0 | 72,6                                               | 57,00               | 19062                             | 953,0                             | 16,20                | 545,0                             | 667,0                             | 86,10                             | 3,03                 |
| 45                          | 450     | 160 | 9,0  | 14,2 | 16,0 | 7,0 | 84,7                                               | 66,50               | 27696                             | 1231,0                            | 18,10                | 708,0                             | 808,0                             | 101,00                            | 3,09                 |
| 50                          | 500     | 170 | 10,0 | 15,2 | 17,0 | 7,0 | 100,0                                              | 78,50               | 39727                             | 1589,0                            | 19,90                | 919,0                             | 1043,0                            | 123,00                            | 3,23                 |
| 55                          | 550     | 180 | 11,0 | 16,5 | 18,0 | 7,0 | 118,0                                              | 92,60               | 55962                             | 2035,0                            | 21,80                | 1181,0                            | 1356,0                            | 151,00                            | 3,39                 |
| 60                          | 600     | 190 | 12,0 | 17,8 | 20,0 | 8,0 | 138,0                                              | 108,00              | 76806                             | 2560,0                            | 23,60                | 1491,0                            | 1725,0                            | 182,00                            | 3,54                 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

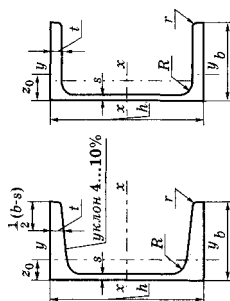
## ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАННЫЕ

Сортамент

(в соответствии с ГОСТ 8240-89)

Таблица 1

## Швеллеры с уклоном внутренних граней полок



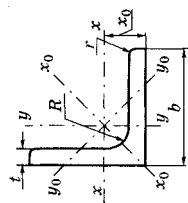
| Номер швеллера | Размеры  |          |          |          |                                | Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup> | Масса 1 м, кг     | Справочные значения для осей   |                                |                                |                   |        |       |      | Z <sub>0</sub> |
|----------------|----------|----------|----------|----------|--------------------------------|----------------------------------------------|-------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|--------|-------|------|----------------|
|                | h        | b        | s        | t        | R                              |                                              |                   | x - x                          |                                |                                |                   |        |       |      |                |
|                |          |          |          |          |                                |                                              |                   | τ                              | y - y                          |                                |                   |        |       |      |                |
|                |          |          |          |          |                                |                                              |                   |                                | i <sub>y</sub>                 |                                |                   |        |       |      |                |
| не более       | не более | не более | не более | не более | I <sub>x</sub> см <sup>4</sup> | W <sub>x</sub> см <sup>3</sup>               | i <sub>x</sub> см | S <sub>x</sub> см <sup>3</sup> | I <sub>y</sub> см <sup>4</sup> | W <sub>y</sub> см <sup>3</sup> | i <sub>y</sub> см |        |       |      |                |
| 5              | 50       | 32       | 4,4      | 7,0      | 6,0                            | 2,5                                          | 4,84              | 22,8                           | 9,1                            | 1,92                           | 5,59              | 5,61   | 2,75  | 0,95 | 1,16           |
| 6,5            | 65       | 36       | 4,4      | 7,2      | 6,0                            | 2,5                                          | 5,90              | 48,6                           | 15,0                           | 2,54                           | 9,00              | 8,70   | 3,68  | 1,08 | 1,24           |
| 8              | 80       | 40       | 4,5      | 7,4      | 6,5                            | 2,5                                          | 7,05              | 89,4                           | 22,4                           | 3,16                           | 23,30             | 12,80  | 4,75  | 1,19 | 1,31           |
| 10             | 100      | 46       | 4,5      | 7,6      | 7,0                            | 3,0                                          | 8,59              | 174,0                          | 34,8                           | 3,99                           | 20,40             | 20,40  | 6,46  | 1,37 | 1,44           |
| 12             | 120      | 52       | 4,8      | 7,8      | 7,5                            | 3,0                                          | 10,40             | 304,0                          | 50,6                           | 4,78                           | 29,60             | 31,20  | 8,52  | 1,53 | 1,54           |
| 14             | 140      | 58       | 4,9      | 8,1      | 8,0                            | 3,0                                          | 12,30             | 491,0                          | 70,2                           | 5,60                           | 40,80             | 45,40  | 11,00 | 1,70 | 1,67           |
| 16             | 160      | 64       | 5,0      | 8,4      | 8,5                            | 3,5                                          | 14,20             | 747,0                          | 93,4                           | 6,42                           | 54,10             | 63,30  | 13,80 | 1,87 | 1,80           |
| 16a            | 160      | 68       | 5,0      | 9,0      | 8,5                            | 3,5                                          | 15,30             | 823,0                          | 103,0                          | 6,49                           | 59,40             | 78,80  | 16,40 | 2,01 | 2,00           |
| 18             | 180      | 70       | 5,1      | 8,7      | 9,0                            | 3,5                                          | 16,30             | 1090,0                         | 121,0                          | 7,24                           | 69,80             | 86,00  | 17,00 | 2,04 | 1,94           |
| 18a            | 180      | 74       | 5,1      | 9,3      | 9,0                            | 3,5                                          | 17,40             | 1190,0                         | 132,0                          | 7,32                           | 76,10             | 105,00 | 20,00 | 2,18 | 2,13           |
| 20             | 200      | 76       | 5,2      | 9,0      | 9,5                            | 4,0                                          | 18,40             | 1520,0                         | 152,0                          | 8,07                           | 87,80             | 113,00 | 20,50 | 2,20 | 2,07           |
| 22             | 220      | 82       | 5,4      | 9,5      | 10,0                           | 4,0                                          | 21,00             | 2110,0                         | 192,0                          | 8,89                           | 110,00            | 151,00 | 25,10 | 2,37 | 2,21           |
| 24             | 240      | 90       | 5,6      | 10,0     | 10,5                           | 4,0                                          | 24,00             | 2900,0                         | 242,0                          | 9,73                           | 139,00            | 208,00 | 31,60 | 2,60 | 2,42           |
| 27             | 270      | 95       | 6,0      | 10,5     | 11,0                           | 4,5                                          | 27,70             | 4160,0                         | 308,0                          | 10,90                          | 178,00            | 262,00 | 37,30 | 2,73 | 2,47           |
| 30             | 300      | 100      | 6,5      | 11,0     | 12,0                           | 5,0                                          | 31,80             | 5810,0                         | 387,0                          | 12,00                          | 224,00            | 327,00 | 43,60 | 2,84 | 2,52           |
| 33             | 330      | 105      | 7,0      | 11,7     | 13,0                           | 5,0                                          | 36,50             | 7980,0                         | 484,0                          | 13,10                          | 281,00            | 410,00 | 51,80 | 2,97 | 2,59           |
| 36             | 360      | 110      | 7,5      | 12,6     | 14,0                           | 6,0                                          | 41,90             | 10820,0                        | 601,0                          | 14,20                          | 350,00            | 513,00 | 61,70 | 3,10 | 2,68           |
| 40             | 400      | 115      | 8,0      | 13,5     | 15,0                           | 6,0                                          | 48,30             | 15220,0                        | 761,0                          | 15,70                          | 444,00            | 642,00 | 73,40 | 3,23 | 2,75           |

Таблица 2

## Швеллеры с параллельными гранями полок

| Номер швеллера | Размеры |     |     |      |      |     | Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup> | Масса 1 м, кг | Справочные значения для осей   |                                |                   |                                |                                |                                |                   | Z <sub>0</sub> |
|----------------|---------|-----|-----|------|------|-----|----------------------------------------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|----------------|
|                | h       | b   | s   | t    | R    | r   |                                              |               | x - x                          |                                |                   |                                | y - y                          |                                |                   |                |
|                |         |     |     |      |      |     |                                              |               | I <sub>x</sub> см <sup>4</sup> | W <sub>x</sub> см <sup>3</sup> | i <sub>x</sub> см | S <sub>x</sub> см <sup>3</sup> | I <sub>y</sub> см <sup>4</sup> | W <sub>y</sub> см <sup>3</sup> | i <sub>y</sub> см |                |
| 5 П            | 50      | 32  | 4,4 | 7,0  | 6,0  | 3,5 | 6,16                                         | 4,84          | 22,8                           | 9,1                            | 1,92              | 5,61                           | 5,95                           | 2,99                           | 0,98              | 1,21           |
| 6,5 П          | 65      | 36  | 4,4 | 7,2  | 6,0  | 3,5 | 7,51                                         | 5,90          | 48,8                           | 15,0                           | 2,55              | 9,02                           | 9,35                           | 4,06                           | 1,12              | 1,29           |
| 8 П            | 80      | 40  | 4,5 | 7,4  | 6,5  | 3,5 | 8,98                                         | 7,05          | 89,8                           | 22,5                           | 3,16              | 13,30                          | 13,90                          | 3,31                           | 1,24              | 1,38           |
| 10 П           | 100     | 46  | 4,5 | 7,6  | 7,0  | 4,0 | 10,90                                        | 8,59          | 175,0                          | 34,9                           | 3,99              | 20,50                          | 22,60                          | 7,37                           | 1,44              | 1,53           |
| 12 П           | 120     | 52  | 4,8 | 7,8  | 7,5  | 4,5 | 13,30                                        | 10,40         | 305,0                          | 50,8                           | 4,79              | 29,70                          | 34,90                          | 9,84                           | 1,62              | 1,66           |
| 14 П           | 140     | 58  | 4,9 | 8,1  | 8,0  | 4,5 | 15,60                                        | 12,30         | 493,0                          | 70,4                           | 5,61              | 40,90                          | 51,50                          | 12,90                          | 1,81              | 1,82           |
| 16 П           | 160     | 64  | 5,0 | 8,4  | 8,5  | 5,0 | 18,10                                        | 14,20         | 750,0                          | 93,8                           | 6,44              | 54,30                          | 72,80                          | 16,40                          | 2,00              | 1,97           |
| 16аП           | 160     | 68  | 5,0 | 9,0  | 8,5  | 5,0 | 19,50                                        | 15,30         | 827,0                          | 103,0                          | 6,51              | 59,50                          | 90,50                          | 19,60                          | 2,15              | 2,19           |
| 18 П           | 180     | 70  | 5,1 | 8,7  | 9,0  | 5,0 | 20,70                                        | 16,30         | 1090,0                         | 121,0                          | 7,26              | 70,00                          | 100,00                         | 20,60                          | 2,20              | 2,14           |
| 18аП           | 180     | 74  | 5,1 | 9,3  | 9,0  | 5,0 | 22,20                                        | 17,40         | 1200,0                         | 133,0                          | 7,34              | 76,30                          | 123,00                         | 24,30                          | 2,35              | 2,36           |
| 20 П           | 200     | 76  | 5,2 | 9,0  | 9,5  | 5,5 | 23,40                                        | 18,40         | 1530,0                         | 153,0                          | 8,08              | 88,00                          | 134,00                         | 25,20                          | 2,39              | 2,30           |
| 22 П           | 220     | 82  | 5,4 | 9,5  | 10,0 | 6,0 | 26,70                                        | 21,00         | 2120,0                         | 193,0                          | 8,90              | 111,00                         | 178,00                         | 31,00                          | 2,58              | 2,47           |
| 24 П           | 240     | 90  | 5,6 | 10,0 | 10,5 | 6,0 | 30,60                                        | 24,00         | 2910,0                         | 243,0                          | 9,75              | 139,00                         | 248,00                         | 39,50                          | 2,85              | 2,72           |
| 27 П           | 270     | 95  | 6,0 | 10,5 | 11,0 | 6,5 | 35,20                                        | 27,70         | 4180,0                         | 310,0                          | 10,90             | 178,00                         | 314,00                         | 46,70                          | 2,99              | 2,78           |
| 30 П           | 300     | 100 | 6,5 | 11,0 | 12,0 | 7,0 | 40,50                                        | 31,80         | 5830,0                         | 389,0                          | 12,00             | 224,00                         | 393,00                         | 54,80                          | 3,12              | 2,83           |
| 33 П           | 330     | 105 | 7,0 | 11,7 | 13,0 | 7,5 | 46,50                                        | 36,50         | 8010,8                         | 486,0                          | 13,10             | 281,00                         | 491,00                         | 64,60                          | 3,25              | 2,90           |
| 36 П           | 360     | 110 | 7,5 | 12,6 | 14,0 | 8,5 | 53,40                                        | 41,90         | 10850,0                        | 603,0                          | 14,30             | 350,00                         | 611,00                         | 76,30                          | 3,38              | 2,99           |
| 40 П           | 400     | 115 | 8,0 | 13,5 | 15,0 | 9,0 | 61,50                                        | 48,30         | 15260,0                        | 763,0                          | 15,80             | 445,00                         | 760,00                         | 89,90                          | 3,51              | 3,05           |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ  
Сортамент (в соответствии с ГОСТ 8509-93)

| Номер<br>уголка | b  | t  | R   | r   | Площадь<br>поперечного<br>сечения,<br>мм <sup>2</sup> | Справочные данные величины для осей |                                     |                        |                                          |                             |                                          |                                 |                                      |      |                                      | Масса<br>1 м,<br>кг |                      |
|-----------------|----|----|-----|-----|-------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|------|--------------------------------------|---------------------|----------------------|
|                 |    |    |     |     |                                                       | x - x                               |                                     |                        | x <sub>0</sub> - x <sub>0</sub>          |                             |                                          | y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub> |                                      |      | I <sub>xy</sub> ,<br>см <sup>4</sup> |                     | x <sub>0</sub><br>см |
|                 |    |    |     |     |                                                       | I <sub>x</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | W <sub>x</sub> ,<br>см <sup>3</sup> | i <sub>x</sub> ,<br>см | I <sub>x0</sub> max.,<br>см <sup>4</sup> | i <sub>x0</sub> max.,<br>см | I <sub>y0</sub> min.,<br>см <sup>4</sup> | i <sub>y0</sub> min.,<br>см     | W <sub>y0</sub> ,<br>см <sup>3</sup> |      |                                      |                     |                      |
|                 |    |    |     |     |                                                       |                                     |                                     |                        |                                          |                             |                                          |                                 |                                      |      |                                      |                     |                      |
| 1               | 2  | 3  | 4   | 5   | 6                                                     | 7                                   | 8                                   | 9                      | 10                                       | 11                          | 12                                       | 13                              | 14                                   | 15   | 16                                   | 17                  |                      |
| 2               | 20 | 3  | 3,5 | 1,2 | 1,13                                                  | 0,40                                | 0,28                                | 0,59                   | 0,63                                     | 0,75                        | 0,17                                     | 0,20                            | 0,39                                 | 0,23 | 0,60                                 | 0,89                |                      |
|                 |    | 4  | 3,5 | 1,2 | 1,46                                                  | 0,50                                | 0,37                                | 0,58                   | 0,78                                     | 0,73                        | 0,22                                     | 0,24                            | 0,38                                 | 0,28 | 0,64                                 | 1,15                |                      |
| 2,5             | 25 | 3  | 3,5 | 1,2 | 1,43                                                  | 0,81                                | 0,46                                | 0,75                   | 1,29                                     | 0,95                        | 0,34                                     | 0,33                            | 0,49                                 | 0,47 | 0,73                                 | 1,12                |                      |
|                 |    | 4  | 3,5 | 1,2 | 1,86                                                  | 1,03                                | 0,59                                | 0,74                   | 1,62                                     | 0,93                        | 0,44                                     | 0,41                            | 0,48                                 | 0,59 | 0,76                                 | 1,46                |                      |
| 2,8             | 28 | 3  | 4,0 | 1,3 | 1,62                                                  | 1,16                                | 0,58                                | 0,85                   | 1,84                                     | 1,07                        | 0,48                                     | 0,42                            | 0,55                                 | 0,68 | 0,80                                 | 1,27                |                      |
|                 |    | 30 | 3   | 4,0 | 1,3                                                   | 1,74                                | 1,45                                | 0,67                   | 0,91                                     | 2,30                        | 1,15                                     | 0,60                            | 0,53                                 | 0,59 | 0,85                                 | 0,85                | 1,36                 |
| 3               | 30 | 4  | 4,0 | 1,3 | 2,27                                                  | 1,84                                | 0,87                                | 0,90                   | 2,92                                     | 1,13                        | 0,77                                     | 0,61                            | 0,58                                 | 1,08 | 0,89                                 | 1,78                |                      |
|                 |    | 32 | 3   | 4,5 | 1,5                                                   | 1,86                                | 1,77                                | 0,77                   | 0,97                                     | 2,80                        | 1,23                                     | 0,74                            | 0,59                                 | 0,63 | 1,03                                 | 0,89                | 1,46                 |
| 3,2             | 32 | 4  | 4,5 | 1,5 | 2,43                                                  | 2,26                                | 1,00                                | 0,96                   | 3,58                                     | 1,21                        | 0,94                                     | 0,71                            | 0,62                                 | 1,32 | 0,94                                 | 1,91                |                      |
|                 |    | 35 | 3   | 4,5 | 1,5                                                   | 2,04                                | 2,35                                | 0,93                   | 1,07                                     | 3,72                        | 1,35                                     | 0,97                            | 0,71                                 | 0,69 | 1,37                                 | 0,97                | 1,60                 |
| 3,5             | 35 | 4  | 4,5 | 1,5 | 2,67                                                  | 3,01                                | 1,21                                | 1,06                   | 4,76                                     | 1,33                        | 1,25                                     | 0,88                            | 0,68                                 | 1,75 | 1,01                                 | 2,10                |                      |
|                 |    | 5  | 4,5 | 1,5 | 3,28                                                  | 3,61                                | 1,47                                | 1,05                   | 5,71                                     | 1,32                        | 1,52                                     | 1,02                            | 0,68                                 | 2,10 | 1,05                                 | 2,58                |                      |
| 4               | 40 | 3  | 5,0 | 1,7 | 2,35                                                  | 3,55                                | 1,22                                | 1,23                   | 5,63                                     | 1,55                        | 1,47                                     | 0,95                            | 0,79                                 | 2,08 | 1,09                                 | 1,85                |                      |
|                 |    | 4  | 5,0 | 1,7 | 3,08                                                  | 4,58                                | 1,60                                | 1,22                   | 7,26                                     | 1,53                        | 1,90                                     | 1,19                            | 0,78                                 | 2,68 | 1,13                                 | 2,42                |                      |
| 4,5             | 45 | 5  | 5,0 | 1,7 | 3,79                                                  | 5,53                                | 1,95                                | 1,21                   | 8,75                                     | 1,52                        | 2,30                                     | 1,39                            | 0,78                                 | 3,22 | 1,17                                 | 2,98                |                      |
|                 |    | 3  | 5,0 | 1,7 | 2,65                                                  | 5,13                                | 1,56                                | 1,39                   | 8,13                                     | 1,75                        | 2,12                                     | 1,24                            | 0,89                                 | 3,00 | 1,21                                 | 2,08                |                      |
| 5               | 50 | 4  | 5,0 | 1,7 | 3,48                                                  | 6,63                                | 2,04                                | 1,38                   | 10,52                                    | 1,74                        | 2,74                                     | 1,54                            | 0,89                                 | 3,89 | 1,26                                 | 2,73                |                      |
|                 |    | 5  | 5,0 | 1,7 | 4,29                                                  | 8,03                                | 2,51                                | 1,37                   | 12,74                                    | 1,72                        | 3,33                                     | 1,81                            | 0,88                                 | 4,71 | 1,30                                 | 3,37                |                      |
| 5               | 50 | 3  | 5,5 | 1,8 | 2,96                                                  | 7,11                                | 1,94                                | 1,55                   | 11,27                                    | 1,95                        | 2,95                                     | 1,57                            | 1,00                                 | 4,16 | 1,33                                 | 2,32                |                      |
|                 |    | 4  | 5,5 | 1,8 | 3,89                                                  | 9,21                                | 2,54                                | 1,54                   | 14,63                                    | 1,94                        | 3,80                                     | 1,95                            | 0,99                                 | 5,42 | 1,38                                 | 3,05                |                      |
| 5               | 50 | 5  | 5,5 | 1,8 | 4,80                                                  | 11,20                               | 3,13                                | 1,53                   | 17,77                                    | 1,92                        | 4,63                                     | 2,30                            | 0,98                                 | 6,57 | 1,42                                 | 3,77                |                      |
|                 |    | 6  | 5,5 | 1,8 | 5,69                                                  | 13,07                               | 3,69                                | 1,52                   | 20,72                                    | 1,91                        | 5,43                                     | 2,63                            | 0,98                                 | 7,65 | 1,46                                 | 4,47                |                      |

Продолжение табл.

| 1   | 2   | 3   | 4    | 5   | 6     | 7      | 8     | 9    | 10     | 11   | 12     | 13    | 14   | 15     | 16   | 17    |
|-----|-----|-----|------|-----|-------|--------|-------|------|--------|------|--------|-------|------|--------|------|-------|
| 5,6 | 56  | 4   | 6,0  | 2,0 | 4,38  | 13,10  | 3,21  | 1,73 | 20,79  | 2,18 | 5,41   | 2,52  | 1,11 | 7,69   | 1,52 | 3,44  |
|     |     | 5   | 6,0  | 2,0 | 5,41  | 15,97  | 3,96  | 1,72 | 25,36  | 2,16 | 6,59   | 2,97  | 1,10 | 9,41   | 1,57 | 4,25  |
| 6,3 | 63  | 4   | 7,0  | 2,3 | 4,96  | 18,86  | 4,09  | 1,95 | 29,90  | 2,45 | 7,81   | 3,26  | 1,25 | 11,00  | 1,69 | 3,90  |
|     |     | 5   | 7,0  | 2,3 | 6,13  | 23,10  | 5,05  | 1,94 | 36,80  | 2,44 | 9,52   | 3,87  | 1,25 | 13,70  | 1,74 | 4,81  |
|     |     | 6   | 7,0  | 2,3 | 7,28  | 27,06  | 5,98  | 1,93 | 42,91  | 2,43 | 11,18  | 4,44  | 1,24 | 15,90  | 1,78 | 5,72  |
| 7   | 70  | 4,5 | 8,0  | 2,7 | 6,20  | 29,04  | 5,67  | 2,16 | 46,03  | 2,72 | 12,04  | 4,53  | 1,39 | 17,00  | 1,88 | 4,87  |
|     |     | 5   | 8,0  | 2,7 | 6,86  | 31,94  | 6,27  | 2,16 | 50,67  | 2,72 | 13,22  | 4,92  | 1,39 | 18,70  | 1,90 | 5,38  |
|     |     | 6   | 8,0  | 2,7 | 8,15  | 37,58  | 7,43  | 2,15 | 59,64  | 2,71 | 15,52  | 5,66  | 1,38 | 22,10  | 1,94 | 6,39  |
|     |     | 7   | 8,0  | 2,7 | 9,42  | 42,98  | 8,57  | 2,14 | 68,19  | 2,69 | 17,77  | 6,31  | 1,37 | 25,20  | 1,99 | 7,39  |
|     |     | 8   | 8,0  | 2,7 | 10,67 | 48,16  | 9,68  | 2,12 | 76,35  | 2,68 | 19,97  | 6,99  | 1,37 | 28,20  | 2,02 | 8,37  |
| 7,5 | 75  | 5   | 9,0  | 3,0 | 7,39  | 39,53  | 7,21  | 2,31 | 62,65  | 2,91 | 16,41  | 5,74  | 1,49 | 23,10  | 2,02 | 5,80  |
|     |     | 6   | 9,0  | 3,0 | 8,78  | 46,57  | 8,57  | 2,30 | 73,87  | 2,90 | 19,28  | 6,62  | 1,48 | 27,30  | 2,06 | 6,89  |
|     |     | 7   | 9,0  | 3,0 | 10,15 | 53,34  | 9,89  | 2,29 | 84,61  | 2,89 | 22,07  | 7,43  | 1,47 | 31,20  | 2,10 | 7,96  |
|     |     | 8   | 9,0  | 3,0 | 11,50 | 59,84  | 11,18 | 2,28 | 94,89  | 2,87 | 24,80  | 8,16  | 1,47 | 35,00  | 2,15 | 9,02  |
|     |     | 9   | 9,0  | 3,0 | 12,83 | 66,10  | 12,43 | 2,27 | 104,72 | 2,86 | 27,48  | 8,91  | 1,46 | 38,60  | 2,18 | 10,07 |
| 8   | 80  | 5,5 | 9,0  | 3,0 | 8,63  | 52,68  | 9,03  | 2,47 | 83,56  | 3,11 | 21,80  | 7,10  | 1,59 | 30,90  | 2,17 | 6,78  |
|     |     | 6   | 9,0  | 3,0 | 9,38  | 56,97  | 9,80  | 2,47 | 90,40  | 3,11 | 23,54  | 7,60  | 1,58 | 33,40  | 2,19 | 7,36  |
|     |     | 7   | 9,0  | 3,0 | 10,85 | 65,31  | 11,32 | 2,45 | 103,60 | 3,09 | 26,97  | 8,55  | 1,58 | 38,30  | 2,23 | 8,51  |
|     |     | 8   | 9,0  | 3,0 | 12,30 | 73,36  | 12,80 | 2,44 | 116,39 | 3,08 | 30,32  | 9,44  | 1,57 | 43,00  | 2,27 | 9,65  |
| 9   | 90  | 6   | 10,0 | 3,3 | 10,61 | 82,10  | 12,49 | 2,78 | 130,00 | 3,50 | 33,97  | 9,88  | 1,79 | 48,10  | 2,43 | 8,33  |
|     |     | 7   | 10,0 | 3,3 | 12,28 | 94,30  | 14,45 | 2,77 | 149,67 | 3,49 | 38,94  | 11,15 | 1,78 | 55,40  | 2,47 | 9,64  |
|     |     | 8   | 10,0 | 3,3 | 13,93 | 106,11 | 16,36 | 2,76 | 168,42 | 3,48 | 43,80  | 12,34 | 1,77 | 62,30  | 2,51 | 10,93 |
|     |     | 9   | 10,0 | 3,3 | 15,60 | 118,00 | 18,29 | 2,75 | 186,00 | 3,46 | 48,60  | 13,48 | 1,77 | 68,00  | 2,55 | 12,20 |
| 10  | 100 | 6,5 | 12,0 | 4,0 | 12,82 | 122,10 | 16,69 | 3,09 | 193,46 | 3,89 | 50,73  | 13,38 | 1,99 | 71,40  | 2,68 | 10,06 |
|     |     | 7   | 12,0 | 4,0 | 13,75 | 130,59 | 17,90 | 3,08 | 207,01 | 3,88 | 54,16  | 14,13 | 1,98 | 76,40  | 2,71 | 10,79 |
|     |     | 8   | 12,0 | 4,0 | 15,60 | 147,19 | 20,30 | 3,07 | 233,46 | 3,87 | 60,92  | 15,66 | 1,98 | 86,30  | 2,75 | 12,25 |
|     |     | 10  | 12,0 | 4,0 | 19,24 | 178,95 | 24,97 | 3,05 | 283,83 | 3,84 | 74,08  | 18,51 | 1,96 | 110,00 | 2,83 | 15,10 |
|     |     | 12  | 12,0 | 4,0 | 22,80 | 208,90 | 29,47 | 3,03 | 330,95 | 3,81 | 86,84  | 21,10 | 1,95 | 122,00 | 2,91 | 17,90 |
|     |     | 14  | 12,0 | 4,0 | 26,28 | 237,15 | 33,83 | 3,00 | 374,98 | 3,78 | 99,32  | 23,49 | 1,94 | 138,00 | 2,99 | 20,63 |
|     |     | 16  | 12,0 | 4,0 | 29,68 | 263,82 | 38,04 | 2,98 | 416,04 | 3,74 | 111,61 | 25,79 | 1,94 | 152,00 | 3,06 | 23,30 |
| 11  | 110 | 7   | 12,0 | 4,0 | 15,15 | 175,61 | 21,83 | 3,40 | 278,54 | 4,29 | 72,68  | 17,36 | 2,19 | 106,00 | 2,96 | 11,89 |
|     |     | 8   | 12,0 | 4,0 | 17,20 | 198,17 | 24,77 | 3,39 | 314,51 | 4,28 | 81,83  | 19,29 | 2,18 | 116,00 | 3,00 | 13,50 |
|     |     | 8   | 14,0 | 4,6 | 19,69 | 294,36 | 32,20 | 3,87 | 466,76 | 4,87 | 121,98 | 25,67 | 2,49 | 172,00 | 3,36 | 15,46 |



Окончание табл.

| 1    | 2   | 3  | 4    | 5   | 6      | 7       | 8      | 9    | 10       | 11   | 12      | 13     | 14   | 15      | 16   | 17     |
|------|-----|----|------|-----|--------|---------|--------|------|----------|------|---------|--------|------|---------|------|--------|
| 12,5 | 125 | 9  | 14,0 | 4,6 | 22,00  | 327,48  | 36,00  | 3,86 | 520,00   | 4,86 | 135,88  | 28,26  | 2,48 | 192,00  | 3,40 | 17,30  |
|      |     | 10 | 14,0 | 4,6 | 24,33  | 359,82  | 39,74  | 3,85 | 571,04   | 4,84 | 148,59  | 30,45  | 2,47 | 211,00  | 3,45 | 19,10  |
|      |     | 12 | 14,0 | 4,6 | 28,89  | 422,23  | 47,06  | 3,82 | 670,02   | 4,82 | 174,43  | 34,94  | 2,46 | 248,00  | 3,53 | 22,68  |
|      |     | 14 | 14,0 | 4,6 | 33,37  | 481,76  | 54,17  | 3,80 | 763,90   | 4,78 | 199,62  | 39,10  | 2,45 | 282,00  | 3,61 | 26,20  |
|      |     | 16 | 14,0 | 4,6 | 37,77  | 538,56  | 61,09  | 3,78 | 852,84   | 4,75 | 224,29  | 43,10  | 2,44 | 315,00  | 3,68 | 29,65  |
| 14   | 140 | 9  | 14,0 | 4,6 | 24,72  | 465,72  | 45,55  | 4,34 | 739,42   | 5,47 | 192,03  | 35,92  | 2,79 | 274,00  | 3,76 | 19,41  |
|      |     | 10 | 14,0 | 4,6 | 27,33  | 512,29  | 50,32  | 4,33 | 813,62   | 5,46 | 210,96  | 39,05  | 2,78 | 301,00  | 3,82 | 21,45  |
|      |     | 12 | 14,0 | 4,6 | 32,49  | 602,49  | 59,66  | 4,31 | 956,98   | 5,43 | 248,01  | 44,97  | 2,76 | 354,00  | 3,90 | 25,50  |
| 16   | 160 | 10 | 16,0 | 5,3 | 31,43  | 774,24  | 66,19  | 4,96 | 1229,10  | 6,25 | 319,33  | 52,52  | 3,19 | 455,00  | 4,30 | 24,67  |
|      |     | 11 | 16,0 | 5,3 | 34,42  | 844,21  | 72,44  | 4,95 | 1340,06  | 6,24 | 347,77  | 56,53  | 3,18 | 496,00  | 4,35 | 27,02  |
|      |     | 12 | 16,0 | 5,3 | 37,39  | 912,89  | 78,62  | 4,94 | 1450,00  | 6,23 | 375,78  | 60,53  | 3,17 | 537,00  | 4,39 | 29,35  |
|      |     | 14 | 16,0 | 5,3 | 43,57  | 1046,47 | 90,77  | 4,92 | 1662,13  | 6,20 | 430,81  | 68,15  | 3,16 | 615,00  | 4,47 | 34,20  |
|      |     | 16 | 16,0 | 5,3 | 49,07  | 1175,19 | 102,64 | 4,89 | 1865,73  | 6,17 | 484,64  | 75,92  | 3,14 | 690,00  | 4,55 | 38,52  |
|      |     | 18 | 16,0 | 5,3 | 54,79  | 1290,24 | 114,24 | 4,87 | 2061,03  | 6,13 | 537,46  | 82,08  | 3,13 | 771,00  | 4,63 | 43,01  |
|      |     | 20 | 16,0 | 5,3 | 60,40  | 1418,85 | 125,60 | 4,85 | 2248,26  | 6,10 | 589,43  | 90,02  | 3,12 | 830,00  | 4,70 | 47,41  |
| 18   | 180 | 11 | 16,0 | 5,3 | 38,80  | 1216,44 | 92,47  | 5,60 | 1933,10  | 7,06 | 499,78  | 72,86  | 3,59 | 716,00  | 4,85 | 30,47  |
|      |     | 12 | 16,0 | 5,3 | 42,19  | 1316,62 | 100,41 | 5,59 | 2092,78  | 7,04 | 540,45  | 78,15  | 3,58 | 776,00  | 4,89 | 33,12  |
| 20   | 200 | 12 | 18,0 | 6,0 | 47,10  | 1822,78 | 124,61 | 6,22 | 2896,16  | 7,84 | 749,40  | 98,68  | 3,99 | 1073,00 | 5,37 | 36,97  |
|      |     | 13 | 18,0 | 6,0 | 50,85  | 1960,77 | 134,44 | 6,21 | 3116,18  | 7,83 | 805,35  | 105,07 | 3,98 | 1156,00 | 5,42 | 39,92  |
|      |     | 14 | 18,0 | 6,0 | 54,60  | 2097,00 | 144,17 | 6,20 | 3333,00  | 7,81 | 861,00  | 111,50 | 3,97 | 1236,00 | 5,46 | 42,80  |
|      |     | 16 | 18,0 | 6,0 | 61,98  | 2362,57 | 163,37 | 6,17 | 3755,39  | 7,78 | 969,74  | 123,77 | 3,96 | 1393,00 | 5,54 | 48,65  |
|      |     | 20 | 18,0 | 6,0 | 76,54  | 2871,47 | 200,37 | 6,12 | 4860,42  | 7,72 | 1181,92 | 146,62 | 3,93 | 1689,00 | 5,70 | 60,08  |
|      |     | 25 | 18,0 | 6,0 | 94,29  | 3466,21 | 245,59 | 6,06 | 5494,04  | 7,63 | 1438,38 | 172,68 | 3,91 | 2028,00 | 5,89 | 74,02  |
|      |     | 30 | 18,0 | 6,0 | 111,54 | 4019,60 | 288,57 | 6,00 | 6351,05  | 7,55 | 1698,16 | 193,06 | 3,89 | 2332,00 | 6,07 | 87,56  |
| 22   | 220 | 14 | 21,0 | 7,0 | 60,38  | 2814,36 | 175,18 | 6,83 | 4470,15  | 8,60 | 1158,56 | 138,62 | 4,38 | 1655,00 | 5,91 | 47,40  |
|      |     | 16 | 21,0 | 7,0 | 68,58  | 3175,44 | 198,71 | 6,80 | 5045,37  | 8,58 | 1305,52 | 153,34 | 4,36 | 1869,00 | 6,02 | 53,83  |
| 25   | 250 | 16 | 24,0 | 8,0 | 78,40  | 4717,10 | 258,43 | 7,76 | 7492,10  | 9,78 | 1942,09 | 203,45 | 4,98 | 2775,00 | 6,75 | 61,55  |
|      |     | 18 | 24,0 | 8,0 | 87,72  | 5247,24 | 288,82 | 7,73 | 8336,69  | 9,75 | 2157,78 | 223,39 | 4,96 | 3089,00 | 6,83 | 68,86  |
|      |     | 20 | 24,0 | 8,0 | 96,96  | 5764,87 | 318,76 | 7,71 | 9159,73  | 9,72 | 2370,01 | 242,52 | 4,94 | 3395,00 | 6,91 | 76,11  |
|      |     | 22 | 24,0 | 8,0 | 106,12 | 6270,32 | 348,26 | 7,69 | 9961,30  | 9,69 | 2579,04 | 260,52 | 4,93 | 3691,00 | 7,00 | 83,31  |
|      |     | 25 | 24,0 | 8,0 | 119,71 | 7006,39 | 391,72 | 7,65 | 11125,52 | 9,64 | 2887,26 | 287,14 | 4,91 | 4119,00 | 7,11 | 93,97  |
|      |     | 28 | 24,0 | 8,0 | 133,12 | 7716,86 | 434,25 | 7,61 | 12243,84 | 9,59 | 3189,89 | 311,98 | 4,90 | 4527,00 | 7,23 | 104,50 |
|      |     | 30 | 24,0 | 8,0 | 141,96 | 8176,82 | 462,11 | 7,59 | 12964,66 | 9,56 | 3388,98 | 337,82 | 4,89 | 4788,00 | 7,31 | 111,44 |
|      |     | 35 | 24,0 | 8,0 | 163,71 | 9281,05 | 530,11 | 7,53 | 14682,73 | 9,47 | 3879,37 | 366,13 | 4,87 | 5401,68 | 7,53 | 128,51 |

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ .....                                                                              | 3   |
| ГЛАВА 1. Внутренние усилия в стержне .....                                                     | 4   |
| ГЛАВА 2. Растяжение—сжатие. Предельные и допускаемые состояния .....                           | 27  |
| ГЛАВА 3. Прочность элементов конструкций в условиях растяжения и сжатия .....                  | 49  |
| ГЛАВА 4. Напряженное состояние элемента материала .....                                        | 73  |
| ГЛАВА 5. Деформированное состояние элемента материала. Обобщенный закон Гука .....             | 78  |
| ГЛАВА 6. Механические критерии пластичности и разрушения .....                                 | 89  |
| ГЛАВА 7. Кручение стержней круглого поперечного сечения .....                                  | 95  |
| ГЛАВА 8. Нормальные напряжения при плоском изгибе .....                                        | 107 |
| ГЛАВА 9. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня .....                       | 116 |
| ГЛАВА 10. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе стержня .....                   | 132 |
| ГЛАВА 11. Дифференциальное уравнение изогнутой оси упругого стержня и его интегрирование ..... | 142 |
| ГЛАВА 12. Сложный изгиб с кручением и растяжением—сжатием .....                                | 178 |
| ГЛАВА 13. Энергетические способы определения перемещений .....                                 | 211 |
| ГЛАВА 14. Определение реакций и перемещений в статически неопределимых системах .....          | 244 |
| ГЛАВА 15. Устойчивость равновесия сжатого стержня .....                                        | 281 |
| ГЛАВА 16. Расчеты на прочность при динамических и ударных нагрузках .....                      | 303 |
| ГЛАВА 17. Цилиндрические винтовые пружины с малым шагом .....                                  | 310 |
| ГЛАВА 18. Изгиб стержней большой начальной кривизны .....                                      | 315 |
| ГЛАВА 19. Заклепочные, шпоночные и другие соединения, работающие на сдвиг .....                | 321 |
| ГЛАВА 20. Усталость металлов при циклических нагрузках .....                                   | 329 |
| ГЛАВА 21. Местные контактные напряжения .....                                                  | 360 |
| ГЛАВА 22. Вязкие свойства материалов. Ползучесть .....                                         | 366 |
| ГЛАВА 23. Длительная прочность под постоянной нагрузкой .....                                  | 371 |
| ГЛАВА 24. Трещиностойкость материалов и конструкций .....                                      | 378 |
| ГЛАВА 25. Оценка термоупругого эффекта в стержнях и стержневых системах .....                  | 386 |
| ГЛАВА 26. Расчет толстостенной трубы .....                                                     | 420 |
| ПРИЛОЖЕНИЯ .....                                                                               | 424 |

**СБОРНИК ЗАДАЧ  
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ  
МАТЕРИАЛОВ**

*Учебное пособие*

Под редакцией Л. К. Паршина

Издание пятое, стереотипное

Зав. редакцией  
инженерно-технической литературы *Е. В. Баженова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028  
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.  
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 15.02.17.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 27,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 103-17.

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленного оригинал-макета  
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».  
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.

# ГДЕ КУПИТЬ

## ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги,  
достаточно обратиться в любую из торговых компаний  
Издательского Дома «ЛАНЬ»:

### по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД»

РФ, 196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, 1

тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82

тел./факс: (812) 412-54-93

e-mail: [trade@lanbook.ru](mailto:trade@lanbook.ru)

ICQ: 446-869-967

[www.lanbook.com](http://www.lanbook.com)

пункт меню «Где купить»

раздел «Прайс-листы, каталоги»

### в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС»

109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19

тел.: (499) 178-65-85

e-mail: [lanpress@lanbook.ru](mailto:lanpress@lanbook.ru)

### в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ»

350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1

тел.: (861) 274-10-35

e-mail: [lankrd98@mail.ru](mailto:lankrd98@mail.ru)

## ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин

Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>

магазин электронных книг

Global F5

<http://globalf5.com/>