В. И. КОПЫЛОВ

КУРС ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

•

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2011

ББК 22.176
К 66

Копылов В. И.

К 66 Курс дискретной математики: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 208 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1218-1

Книга предназначена для студентов и преподавателей физико-математических факультетов педагогических вузов и классических университетов, студентов инженерных направлений технических вузов. Содержит курс лекций, задания для проведения практических занятий, выполнения контрольных и расчетно-графических работ по дискретной математике.

ББК 22.176

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор, проректор по учебной работе и дополнительному образованию ГОУВПО ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, *Б. Г. МИРОНОВ;* кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой алгебры ГОУВПО ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, *В. Г. ЕФРЕМОВ*.

Обложка
А. В. ПАНКЕВИЧ

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Курс дискретной математики» предназначен для студентов и преподавателей физико-математических факультетов педагогических вузов и классических университетов, студентов инженерных направлений технических вузов. Содержит курс лекций, задания для проведения практических занятий, выполнения контрольных и расчетно-графических работ по дискретной математике.

Учебное пособие состоит из четырех частей. Первая часть представляет собой курс лекций по дискретной математике. Здесь рассмотрены такие вопросы, как числа Фибоначчи, элементы комбинаторики, биномиальные коэффициенты, рекуррентные соотношения, методы суммирования рядов, целочисленные функции, асимптотические формулы и оценки.

Основную часть курса лекций занимает изложение вопросов теории графов: графы и связанные с ними матрицы, связные графы, обходы графов, эйлеровы и гамильтоновы графы, раскраски и планарность графов.

Во второй части «Практические занятия» учебного пособия приведены задачи для проведения практических занятий, тематика которых соответствует тематике лекций, и для выполнения домашних заданий.

В третьей части приведены четыре варианта контрольной работы по дискретной математике.

Четвертая часть содержит 25 вариантов заданий для выполнения индивидуальной домашней работы.

Типовые задачи, предназначенные для проведения практических занятий, и наиболее трудные задачи снабжены решениями.

Учебники, учебные пособия и сборники задач, использованные при подготовке данного пособия и рекомендуемые для дополнительного изучения, приведены в списке литературы.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЛЕКЦИИ

Лекция 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Задача о паре кроликов. Задача о прыгуне. Определение чисел Фибоначчи. Линейные рекуррентные соотношения. Свойства чисел Фибоначчи, вытекающие из их определения. Свойства чисел Фибоначчи, доказываемые методом математической индукции.

1. Задача о паре кроликов. К понятию чисел Фибоначчи приводит следующая задача. Пару кроликов поместили в некоторое место, со всех сторон огороженное стенами. Природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а потомство кролики приносят со второго месяца своего рождения. Сколько пар кроликов будет через год?

Решение. Последовательно заполним столбцы таблицы. Результат показан в таблице 1.

Таблица 1

Задача о паре кроликов

Начало месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число зрелых пар	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
Число всех пар	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Ответ: к началу 13-го месяца будет 377 пар, т. е. 754 кролика. ■

2. Задача о прыгуне. Рассмотрим еще одну задачу, приводящую к последовательности чисел Фибоначчи. Прыгун может прыгать в одном направлении вдоль разделенной на клетки полосы, перемещаясь при каждом прыжке либо в соседнюю клетку, либо через клетку. Сколькими способами он может сдвинуться на $n-1$ клетку и, в частности, переместиться из первой клетки на n-ю клетку?

Решение. Обозначим через x_n число способов, которыми можно переместиться на $n - 1$ клетку и достигнуть n-й клетки независимо от того, в какой клетке прыгун находится (табл. 2). Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Пусть целью прыгуна является достижение $(n + 2)$-й клетки. Число способов равно x_{n+2}. С самого начала все способы разбиваются на два класса:

1) движение начинается с прыжка во вторую клетку;

2) движение начинается с прыжка в третью клетку.

Таблица 2

Задача о прыгуне

•									
1	2	3	4	5	6	...	n	$n+1$	$n+2$

Из второй клетки прыгун может переместиться в $(n + 2)$-ю клетку x_{n+1} способами, а из третьей клетки — x_n способами. Таким образом, последовательность $\{x_k\}_1^\infty$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$$

и поэтому совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи. ■

3. Определение чисел Фибоначчи. Линейные рекуррентные соотношения. Обозначим через u_n n-е число второй строки табл. 1. Тогда

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5$$

и так далее. Закон образования этой последовательности таков:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \tag{3.1}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 3.1. Элементы последовательности (3.1) называются *числами Фибоначчи*.

Леонардо Фибоначчи Пизанский (1180–1240) — итальянский математик.

Рекуррентное соотношение (3.1) является *линейным*.

Определение 3.2. В общем случае *линейное рекуррентное соотношение* записывается следующим образом:

$$u_{n+k+1} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_{n+2} + \ldots + a_k u_{n+k}, \qquad (3.2)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — постоянные коэффициенты; число k называется *порядком рекуррентного соотношения*.

Порядок рекуррентного соотношения показывает, сколько предыдущих членов последовательности нужно знать, чтобы вычислить следующий член.

Например, формула (3.1) определяет рекуррентное соотношение второго порядка. Рекуррентные формулы для общих членов арифметической и геометрической прогрессии — соотношения первого порядка.

4. Свойства чисел Фибоначчи, вытекающие из их определения.

Свойство 4.1. Сумма первых n чисел Фибоначчи равна $(n + 2)$-му числу минус единица:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Для того чтобы при сложении в формуле (4.1) соседние слагаемые взаимно уничтожались, воспользуемся формулой (3.1), которую запишем в виде

$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}.$$

Тогда

$$\begin{cases} u_1 = u_3 - u_2, \\ u_2 = u_4 - u_3, \\ u_3 = u_5 - u_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1} = u_{n+1} - u_n, \\ u_n = u_{n+2} - u_{n+1}. \end{cases}$$

Отсюда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) + \ldots + \\ + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) = u_{n+2} - u_2 = u_{n+2} - 1. \blacksquare$$

Свойство 4.2. Сумма чисел Фибоначчи с нечетными номерами от первого до $(2n-1)$-го числа равна числу с номером $2n$:

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (4.1), которую теперь запишем в виде

$$u_{n+1} = u_{n+2} - u_n.$$

Тогда

$$\begin{cases} u_1 = u_2, \\ u_3 = u_4 - u_2, \\ u_5 = u_6 - u_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \ldots + \\ + (u_{2n} - u_{2n-2}) = u_{2n}. \ \blacksquare$$

Свойство 4.3. Сумма чисел Фибоначчи с четными номерами со второго до $2n$-го числа равна числу с номером $2n+1$ минус единица:

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \tag{4.3}$$

Доказательство. По свойствам 4.1, 4.2 имеем

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1, \\ u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} - 1. \tag{4.4}$$

Заметим, что в силу формулы (4.1)

$$u_{2n+2} - u_{2n} = u_{2n+1}.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.4), приходим к формуле (4.3). $\blacksquare$

Свойство 4.3 можно доказать, используя идею доказательства свойства 4.2. Из рекуррентного соотношения $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$ следует, что $u_{n+1} = u_{n+2} - u_n$. Тогда

$$\begin{cases} u_2 = u_3 - u_1, \\ u_4 = u_5 - u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n-1}. \end{cases}$$

Отсюда

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$$

Свойство 4.4. Знакопеременная сумма чисел Фибоначчи определяется по формуле

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1. \quad (4.5)$$

Доказательство. По свойствам 4.2, 4.3 имеем

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n};$$
$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим знакочередующуюся сумму:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} = u_{2n} - u_{2n+1} + 1. \quad (4.6)$$

Из формулы (3.1) следует, что

$$u_{2n} - u_{2n+1} = -u_{2n-1}.$$

Следовательно, по формуле (4.6)

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1,$$

или

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1.$$

Две последние формулы равносильны равенству (4.5). ■

Свойство 4.5. Сумма квадратов первых n чисел Фибоначчи равна произведению последнего числа на следующее число:

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}. \quad (4.7)$$

Доказательство. Согласно формуле (3.1),

$$u_k^2 = u_k \cdot u_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k u_{k+1} - u_{k-1}u_k\,,$$
$$k = 1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Тогда можно записать следующую систему равенств:

$$\begin{cases} u_1^2 = u_1u_2, \\ u_2^2 = u_2u_3 - u_1u_2, \\ u_3^2 = u_3u_4 - u_2u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}^2 = u_{n-1}u_n - u_{n-2}u_{n-1}, \\ u_n^2 = u_nu_{n+1} - u_{n-1}u_n. \end{cases} \tag{4.8}$$

Суммируя левые и правые части равенств (4.8), получаем формулу (4.7). ■

5. Свойства чисел Фибоначчи, доказываемые методом математической индукции.

Свойство 5.1. Для последовательности чисел Фибоначчи $\{u_n\}$ справедлива формула

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Для доказательства свойства 5.1 применим метод математической индукции по m.

1. При $m = 1$ $u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_nu_2 = u_{n-1} + u_n$, что, очевидно, верно, так как по определению чисел Фибоначчи $u_1 = u_2 = 1$ и $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. При $m = 2$ формула (5.1) также верна, так как

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_nu_3 = u_{n-1} + 2u_n =$$
$$= (u_{n-1} + u_n) + u_n = u_n + u_{n+1}.$$

2. Пусть формула (5.1) верна при $m = k$ и при $m = k + 1$. Докажем ее при $m = k + 2$. Имеем

$$\begin{cases} u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_nu_{k+1}, \\ u_{n+(k+1)} = u_{n-1}u_{k+1} + u_nu_{k+2}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Складывая почленно левые и правые части равенств системы (5.2), получим, пользуясь определением чисел Фибоначчи, что

$$u_{n+k+2} = u_{n+k} + u_{n+k+1} = u_{n-1}(u_k + u_{k+1}) + u_n(u_{k+1} + u_{k+2}) = \\ = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}. \blacksquare$$

Замечание 5.1. Формула (5.1) выражает u_{n+m} через u_n и u_m и, следовательно, является рекуррентной формулой.

Замечание 5.2. Обратите внимание на особенности применения метода математической индукции при доказательстве формулы (5.1) — индукция опирается на два предыдущих шага. Это замечание касается и начала, и базы индукции.

Свойство 5.2. Для последовательности чисел Фибоначчи $\{u_n\}$ справедлива формула

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}). \tag{5.3}$$

Доказательство. Формула (5.3) вытекает из формулы (5.2) при $m = n$. ■

Свойство 5.3. Для последовательности чисел Фибоначчи $\{u_n\}$ u_{2n} делится на u_n:

$$u_{2n} \vdots u_n. \tag{5.4}$$

Доказательство. Формула (5.4) вытекает из формулы (5.3). ■

Свойство 5.4. Для подпоследовательности последовательности чисел Фибоначчи $\{u_n\}$ с четными номерами справедлива формула

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2. \tag{5.5}$$

Доказательство. Согласно формуле (5.3),

$$u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2. \blacksquare$$

Упражнение 5.1. Доказать, что

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3. \tag{5.6}$$

Свойство 5.5. Для последовательности чисел Фибоначчи $\{u_n\}$ справедлива формула

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}, \ \ n = 2, 3, \dots . \tag{5.7}$$

Доказательство. Формулу (5.7) докажем методом математической индукции по n.

1. При $n = 2$ $u_2^2 = u_1 u_3 + (-1)^3 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$. В этом случае формула (5.7) верна.

2. Пусть формула (5.7) верна для некоторого n. Нужно доказать, что

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^{n+2}. \qquad (5.8)$$

К обеим частям формулы (5.7) прибавим $u_n u_{n+1}$:

$$u_n^2 + u_n u_{n+1} = u_{n-1} u_{n+1} + u_n u_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

или

$$\begin{aligned} &u_n (u_n + u_{n+1}) = u_{n+1} (u_{n-1} + u_n) + (-1)^{n+1}, \\ &u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}, \\ &u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} - (-1)^{n+1}, \\ &u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^{n+2}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание 5.3. Формула (5.7) говорит о том, что определение чисел Фибоначчи отличается от определения геометрической прогрессии дополнительным слагаемым $(-1)^{n+1}$.

Лекция 2

БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Определение и свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Восходящие диагонали в треугольнике Паскаля.

1. Определение и свойства биномиальных коэффициентов

Определение 1.1. *Биномиальными коэффициентами* называются коэффициенты при степенях x в разложении

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \qquad (1.1)$$

Числа C_n^k однозначно определены при любом $n \in \mathbb{N}$ и при любом $k \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0$, $k \le n$.

Биномиальные коэффициенты связаны с числами Фибоначчи, и мы выявим некоторые закономерности, связывающие эти два класса чисел. Для того чтобы получить формулу для вычисления биномиальных коэффициентов, начнем с изучения их свойств.

Свойство 1.1. Для биномиальных коэффициентов справедлива формула

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \tag{1.2}$$

Доказательство. Из формулы (1.1) при $n = 1$ получаем

$$(1 + x)^1 = 1 + x.$$

Следовательно,

$$C_1^0 = C_1^1 = 1.$$

Пусть для некоторого произвольного $n \in \mathbb{N}$ формула (1.2) верна. Тогда, так как

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = (1 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)(1+x) =$$
$$= 1 + (1 + C_n^1)x + \ldots + C_n^n x^{n+1},$$

то из последней формулы вытекает, что

$$C_n^0 = 1 \text{ и } C_{n+1}^{n+1} = C_n^n = 1. \blacksquare$$

Свойство 1.2. Для биномиальных коэффициентов справедлива рекуррентная формула

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Очевидно, справедлива формула

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x). \tag{1.4}$$

Тогда из формул (1.1) и (1.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} &C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+1}^k x^k + \ldots + C_{n+1}^n x^n + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \\ &= (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + C_n^{k+1} x^{k+1} + \ldots + C_n^n x^n)(1+x) = \\ &= C_n^0 + (C_n^0 + C_n^1)x + (C_n^1 + C_n^2)x^2 + \ldots + (C_n^k + C_n^{k+1})x^{k+1} + \ldots + \\ &\quad + (C_n^{n-1} + C_n^n)x^n + C_n^n x^{n+1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой части равенства (1.5), получим следующую систему равенств:

$$\begin{cases} C_{n+1}^0 = C_n^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n+1}^{n+1} = C_n^n. \end{cases} \tag{1.6}$$

Одно из равенств системы (1.6) совпадает с доказываемым равенством (1.3). ■

Замечание 1.1. Биномиальные коэффициенты можно вычислять с помощью рекуррентной формулы (1.3). Можно вычислять биномиальные коэффициенты непосредственно по определению, т. е. находя разложение $(1+x)^n$, но эти вычисления слишком громоздкие и на практике не применяются.

Отметим, что с помощью метода математической индукции можно доказывать различные утверждения относительно биномиальных коэффициентов.

2. Треугольник Паскаля

Определение 2.1. *Треугольником Паскаля* называется следующая таблица, составленная из биномиальных коэффициентов:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0^0 & & & & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & & & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{2.1}$$

то есть

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{2.2}$$

Обозначим для краткости треугольник Паскаля через $\Delta\pi$. Рассмотрим свойства $\Delta\pi$. Первые два свойства $\Delta\pi$ очевидны.

Свойство 2.1. Крайние члены в каждой строке $\Delta\pi$ равны единице.

Свойство 2.2. Каждый не крайний член $\Delta\pi$ равен сумме двух других, стоящих над ним и левее на одну позицию.

Свойство 2.3. Сумма всех элементов строки с номером n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в треугольнике $\Delta\pi$ равна 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{2.3}$$

Доказательство. Справедливость формулы (2.3) вытекает из формулы (1.1) при $x = 1$. ■

Свойство 2.4. Знакочередующаяся сумма всех элементов строки с номером n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в $\Delta\pi$ равна нулю:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Справедливость формулы (2.4) вытекает из формулы (1.1) при $x = -1$. ■

Свойство 2.5. Для биномиальных коэффициентов справедлива формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n. \tag{2.5}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (2.5) применим метод математической индукции по n.

1. При $n = 1$ $\quad C_1^1 = 1 = \frac{1}{0!}$. В этом случае формула (2.5) верна.

2. Пусть при некотором произвольном n формула (2.5) верна при любом $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Тогда

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n-k+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}. \ \blacksquare$$

Замечание 2.1. Формула (2.5) применяется для практического вычисления биномиальных коэффициентов при решении различных задач комбинаторики или теории вероятностей.

3. Восходящие диагонали в треугольнике Паскаля. Изучение свойств треугольника Паскаля позволяет установить связь между биномиальными коэффициентами и числами Фибоначчи.

Проведем через элементы треугольника $\Delta\pi$ прямые линии, идущие под углом $\frac{\pi}{4}$ к его строкам, и назовем их *восходящими диагоналями треугольника* $\Delta\pi$.

Теорема 3.1. Сумма чисел, расположенных на любой восходящей диагонали $\Delta\pi$, есть число Фибоначчи.

Доказательство. Самая верхняя диагональ состоит из одного числа 1, которое является числом Фибоначчи. Затем $1 + 1 = 2$ — это также число Фибоначчи. Покажем, что сумма Δ_n чисел, стоящих на n-й диагонали, плюс сумма Δ_{n+1} чисел, стоящих на $(n + 1)$-й диагонали, равна сумме Δ_{n+2} чисел, стоящих на $(n + 2)$-й диагонали, т. е.

$$\Delta_n + \Delta_{n+1} = \Delta_{n+2}. \tag{3.1}$$

Так как $\Delta_0 = \Delta_1 = 1$, то из формулы (3.1) будет следовать, что числа Δ_n являются числами Фибоначчи.

На n-й диагонали расположены числа

$$C_{n-1}^0, C_{n-2}^1, C_{n-3}^2, \ldots, \tag{3.2}$$

на $(n + 1)$-й диагонали расположены числа

$$C_n^0, C_{n-1}^1, C_{n-2}^2, \ldots . \tag{3.3}$$

Следовательно,

$$\Delta_n + \Delta_{n+1} = C_n^0 + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2) + \ldots =$$
$$= C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \ldots = \Delta_{n+2}. \blacksquare$$

Теорема 3.2. Сумма всех биномиальных коэффициентов, лежащих выше n-й восходящей диагонали и на самой n-й диагонали треугольника $\Delta\pi$, равна $(n + 2)$-му числу Фибоначчи минус единица:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1. \tag{3.4}$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1,

$$\Delta_n = u_n,$$

поэтому по формуле (1.4.1) получаем равенство (3.4). $\blacksquare$

Лекция 3

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения и возвратные последовательности. Общее решение однородного линейного рекуррентного соотношения. Общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения. Общие линейные рекуррентные соотношения. Нелинейные рекуррентные соотношения, приводимые к линейным. Применение рекуррентных соотношений для вычисления интегралов. Применение рекуррентных соотношений для вычисления определителей.

1. Рекуррентные соотношения и возвратные последовательности.

Определение 1.1. *Рекуррентным соотношением*, *рекуррентной формулой* или *рекуррентным уравнением* называется соотношение вида

$$a_{n+k} = F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}). \qquad (1.1)$$

Соотношение (1.1) позволяет вычислять все члены последовательности $\{a_n\}$, если заданы ее первые k членов.

Пример 1.1. 1) Формула $a_{n+1} = a_n + d$, задающая арифметическую прогрессию, является рекуррентным соотношением.

2) Формула $b_{n+1} = b_n q$, задающая геометрическую прогрессию, также является рекуррентным соотношением.

3) Последовательность $\{u_n\}$ чисел Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Определение 1.2. В случае, когда рекуррентное соотношение линейно и однородно, т. е. имеет вид

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \ldots + p_k a_n = 0, \qquad (1.2)$$

где $p_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, последовательность $\{a_n\}$ называется *возвратной*.

Определение 1.3. Многочлен

$$P_a(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + \ldots + p_k \qquad (1.3)$$

называется *характеристическим* для возвратной последовательности (1.2). Корни характеристического многочлена называются *характеристическими*.

Определение 1.4. Множество всех последовательностей, удовлетворяющих данному рекуррентному соотношению, называется *общим решением рекуррентного соотношения*.

2. Общее решение однородного линейного рекуррентного соотношения. Описание общего решения линейного однородного соотношения (1.2) имеет аналоги с описанием общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема 2.1. Если λ — корень характеристического многочлена (1.3), то последовательность $\{c\lambda^n\}$, где c — произвольная константа, удовлетворяет соотношению (1.2).

Докажите теорему 2.1.

Теорема 2.2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — простые корни характеристического многочлена (1.3), то общее решение рекуррентного соотношения (1.2) имеет вид

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n, \tag{2.1}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные константы.

Теорема 2.3. Если λ_i — корень кратности r_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, характеристического многочлена (1.3), то общее решение рекуррентного соотношения (1.2) имеет вид

$$a_n = \sum_{i=1}^{s}(c_{i1} + c_{i2}n + c_{i3}n^2 + \ldots + c_{ir_i}n^{r_i-1})\lambda_i^n, \tag{2.2}$$

где c_{ij} — произвольные константы.

Зная общее решение рекуррентного соотношения (1.2), по начальным условиям $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ можно найти неопределенные постоянные c_{ij} и тем самым получить решение уравнения (1.2) с данными начальными условиями.

Пример 2.1. Найти последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$$

и начальным условиям $a_1 = 10$, $a_2 = 16$.

Решение. Мы имеем линейное однородное рекуррентное соотношение второй степени. Его характеристический многочлен имеет вид

$$P_a(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Этот многочлен имеет простые корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Следовательно, по теореме 2.2 общее решение имеет вид

$$a_n = c_1 + c_2 3^n.$$

Используя начальные условия, получаем систему

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 10, \\ c_1 + 9c_2 = 16. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $c_1 = 7$, $c_2 = 1$. Таким образом,

$$a_n = 7 + 3^n. \tag{2.3}$$

Проверка. Подставляя выражение a_n из формулы (2.3) в данное рекуррентное соотношение и преобразуя его, получим

$$\begin{gathered} 7 + 3^{n+2} - 4(7 + 3^{n+1}) + 3(7 + 3^n) = 0, \\ 3^{n+2} - 4 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+1} + 7 - 28 + 21 = 0, \\ 3^{n+2} - 3 \cdot 3^{n+1} = 0, \ \ 3^{n+2} - 3^{n+2} = 0. \end{gathered}$$

Начальные условия $a_1 = 10$, $a_2 = 16$ для формулы (2.1) также выполняются.

Ответ: $a_n = 7 + 3^n$. ■

3. Общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения. Рассмотрим неоднородное линейное рекуррентное уравнение

$$\begin{gathered} a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \ldots + p_k a_n = f(n), \\ n = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{3.1}$$

Пусть $\{b_n\}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (2.1), а $\{c_n\}$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (3.1). Тогда последовательность $\{b_n + c_n\}$ образует общее решение уравнения (3.1), и, таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Общее решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного линейного рекуррентного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

Следовательно, в силу теорем 2.2, 2.3 задача решения неоднородного уравнения сводится к нахождению некоторого частного решения.

В отдельных случаях имеются общие рецепты нахождения частного решения.

Если в формуле (3.1) $f(n) = \beta^n$, где β не является характеристическим корнем, то, подставляя

$$a_n = c\beta^n \tag{3.2}$$

в уравнение (3.1), получаем

$$c(\beta^k + p_1\beta^{k-1} + p_2\beta^{k-2} + \ldots + p_k)\beta^n = \beta^n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Отсюда

$$cP_a(\beta) = 1,$$

т. е. надо взять

$$c = \frac{1}{P_a(\beta)},$$

и тогда, согласно формуле (3.2), частное решение можно задать формулой

$$a_n = \frac{\beta^n}{P_a(\beta)}.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. Если в неоднородном уравнении (3.1)

$$f(n) = \beta^n, \tag{3.3}$$

где β не является характеристическим корнем, т. е. $P_a(\beta) \neq 0$, то частное решение этого уравнения можно задать формулой

$$a_n = \frac{\beta^n}{P_a(\beta)}. \tag{3.4}$$

Теорема 3.3. Если в неоднородном уравнении (3.1) $f(n)$ есть многочлен степени r от переменной n и число 1 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$a_n = \sum_{i=0}^{r} d_i n^i, \tag{3.5}$$

где d_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, r$, — неопределенные коэффициенты.

Коэффициенты d_i в формуле (3.5) можно найти, подставляя решение (3.5) в уравнение (3.1).

Доказательство. Подставляя решение (3.5) в формулу (3.1), получим

$$\sum_{i=0}^{r} d_i (n+k)^i + p_1 \sum_{i=0}^{r} d_i (n+k-1)^i + \ldots + p_k \sum_{i=0}^{r} d_i n^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} d_i ((n+k)^i + p_1 (n+k-1)^i + \ldots + p_k n^i) = \sum_{i=0}^{r} d_i (g_1 n^i + \ldots) = f(n).$$

Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства, получаем соотношения для чисел d_i, позволяющие эти числа определить. ■

Пример 3.1. Найти частное решение уравнения

$$a_{n+1} + 2a_n = n + 1 \tag{3.6}$$

с начальным условием $a_0 = 1$.

Решение. Характеристический многочлен уравнения (3.6) имеет вид

$$P_a(x) = x + 2.$$

Так как $P_a(1) = 3 \neq 0$ и $f(n) = n + 1$, то согласно теореме 3.3 частное решение уравнения (3.6) будем искать в виде

$$c_n = d_0 + d_1 n.$$

Подставляя c_n в уравнение (3.6), получаем

$$d_0 + d_1(n + 1) + 2(d_0 + d_1 n) = n + 1,$$

или

$$(3d_0 + d_1) + 3d_1 n = n + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} 3d_0 + d_1 = 1, \\ 3d_1 = 1, \end{cases}$$

откуда находим $d_0 = \frac{2}{9}$, $d_1 = \frac{1}{3}$. Таким образом, частное решение уравнения (3.6) имеет вид

$$c_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n.$$

По теореме 2.2 общее решение соответствующего однородного уравнения задается формулой

$$b_n = c(-2)^n.$$

По теореме 3.1 общее решение уравнения (3.6) имеет вид

$$a_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n + c(-2)^n.$$

Из начального условия $a_0 = 1$ находим

$$\frac{2}{9} + c = 1, \quad c = \frac{7}{9}.$$

Таким образом,

$$a_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n - \frac{7}{9}(-2)^n = \frac{2 + 3n - 7 \cdot (-2)^n}{9}.$$

Ответ: $a_n = \dfrac{2 + 3n - 7 \cdot (-2)^n}{9}$. ■

4. Общие линейные рекуррентные соотношения. Рекуррентные соотношения, отличные от линейных соотношений с постоянными коэффициентами, не имеют общего метода решения, подобного тому, который был рассмотрен выше для линейных соотношений. На практике общие рекуррентные соотношения решают методом проб и ошибок. Мы рассмотрим несколько примеров поиска решений общих рекуррентных соотношений, которые удается свести к линейным соотношениям с постоянными коэффициентами.

Пример 4.1. Решить рекуррентное соотношение

$$f(n+1) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

с начальным условием $f(0) = a$.

Решение. Это неоднородное линейное рекуррентное соотношение, которое не принадлежит к классу соотношений, которые рассмотрены выше. Преобразуем его в однородное линейное соотношение, заметив, что

$$f(n+1)-f(n)=\sum_{i=0}^{n}f(i)-\sum_{i=0}^{n-1}f(i)=f(n),$$

или

$$f(n+1)-2f(n)=0.$$

Решением характеристического уравнения последнего соотношения будет $\lambda = 2$, следовательно, $f(n) = c \cdot 2^n$, $n \geq 0$. Из начального условия $f(0) = a$ находим, что $c = a$. Частное решение данного соотношения, удовлетворяющее данному начальному условию, имеет вид $f(n) = a \cdot 2^n$, $n \geq 0$.

Ответ: $f(n) = a \cdot 2^n$, $n \geq 0$. ■

Замечание 4.1. Подобный прием часто позволяет упростить рекуррентные соотношения, которые включают суммы с постоянными коэффициентами всех предшествующих членов.

Пример 4.2. Решить рекуррентное соотношение

$$f(n+1)=\sum_{i=0}^{n}a_i f(i)+b_{n+1},$$

где a_i — независимые от n постоянные числа.

Решение. Преобразуем данное линейное рекуррентное соотношение в линейное неоднородное соотношение

$$f(n+1)-f(n)=b_{n+1}-b_n+a_n f(n)$$

или

$$f(n+1)=(b_{n+1}-b_n)+(1+a_n)f(n).$$

Решение этого соотношения может быть найдено способами, описанными выше. Но если коэффициенты $b_{n+1} - b_n$ и $1 + a_n$ не имеют простой структуры, мы ничего не выиграем. ■

5. Нелинейные рекуррентные соотношения, приводимые к линейным. Рассмотрим простейшие нелинейные рекуррентные соотношения, приводимые заменой зависимой переменной к линейным.

Пример 5.1. Найти общее решение нелинейного рекуррентного соотношения

$$f^2(n+1) - f^2(n) = 1.$$

Решение. Вводя новую зависимую переменную $\varphi(n) = f^2(n)$, преобразуем данное нелинейное соотношение в линейное неоднородное соотношение

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = 1.$$

Решив последнее соотношение, получим

$$\varphi(n) = n + c.$$

Следовательно, общее решение исходного рекуррентного соотношения имеет вид

$$f^2(n) = n + c.$$

Ответ: $f^2(n) = n + c$. ■

Пример 5.2. Найти общее решение нелинейного рекуррентного соотношения

$$f^2(n+1) = 2f(n). \qquad (5.1)$$

Решение. Прологарифмировав обе части данного соотношения, получим $2\ln f(n+1) = \ln 2 + \ln f(n)$. Обозначив $\varphi(n) = \ln f(n)$, получим неоднородное линейное соотношение

$$2\varphi(n+1) - \varphi(n) = \ln 2. \qquad (5.2)$$

Характеристический многочлен $P(x) = x - \frac{1}{2}$ имеет корень $\lambda = \frac{1}{2}$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$c\left(\frac{1}{2}\right)^n = c \cdot 2^{-n}.$$

Общее решение уравнения (5.2) можно записать в виде

$$\varphi(n) = c \cdot 2^{-n} + \ln 2.$$

Общее решение исходного соотношения находим из равенства

$$\ln f(n) = c2^{-n} + \ln 2 = \ln 2e^{c \cdot 2^{-n}}.$$

Получаем

$$f(n) = 2c_1^{2-n},$$

где $c_1 = e^c$.

Ответ: $f(n) = 2c_1^{2-n}$. ■

Пример 5.3. Решить нелинейное рекуррентное соотношение

$$f(n)\,f^3(n+2) = f^3(n+1)\,f(n+3) \qquad (5.3)$$

с начальными условиями

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}},\ \ f(2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^4}}. \qquad (5.4)$$

Решение. Заметим, что данное уравнение удобно для логарифмирования. Прологарифмировав обе части соотношения (5.3), получим

$$\ln f(n) + 3\ln f(n+2) - 3\ln f(n+1) - \ln f(n+3) = 0.$$

Выполнив в последнем уравнении замену

$$\varphi(n) = \ln f(n),$$

получаем уравнение

$$\varphi(n) + 3\varphi(n+2) - 3\varphi(n+1) - \varphi(n+3) = 0$$

или

$$\varphi(n+3) - 3\varphi(n+2) + 3\varphi(n+1) - \varphi(n) = 0. \qquad (5.5)$$

Уравнение (5.5) — это однородное линейное уравнение третьего порядка. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$(x-1)^3 = 0,$$

поэтому согласно теореме 2.3 общее решение уравнения (5.5) имеет вид

$$\varphi(n) = c_1 + c_2 n + c_3 n^2.$$

Тогда

$$f(n) = Ae^{c_2 n + c_3 n^2}. \qquad (5.6)$$

Отсюда

$$f(0)=A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{c_2+c_3}=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}},$$

т. е. $c_2+c_3=-\frac{1}{2}$; $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2c_2+4c_3}=\frac{1}{\sqrt{2\pi e^4}}$, следовательно, $2c_2+4c_3=-2$. Для вычисления произвольных постоянных c_2, c_3 мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_2+c_3=-\frac{1}{2}, \\ c_2+2c_3=-1, \end{cases}$$

откуда находим, что $c_2=0$, $c_3=-\frac{1}{2}$. Поэтому

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n^2}{2}}.$$

Ответ: $f(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n^2}{2}}$. ■

6. Применение рекуррентных соотношений для вычисления интегралов.

Пример 6.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx. \tag{6.1}$$

Решение. Для получения рекуррентного соотношения для последовательности интегралов (6.1) обозначим данный интеграл через I_n и применим к нему метод интегрирования по частям:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\sin x\,dx=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

Следовательно,

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Отсюда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (6.2)$$

Для решения нелинейного рекуррентного соотношения (6.2) применим метод математической индукции. Очевидно,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, согласно формуле (6.2),

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}; \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}; \quad I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}; \quad I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2};$$

....

$$I_{2k-1} = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}; \quad I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ответ:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & n = 2k-1; \\ \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n = 2k. \end{cases} \blacksquare$$

7. Применение рекуррентных соотношений для вычисления определителей.

Пример 7.1. Вычислить определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычитая из первой строки вторую и применяя затем формулу разложения определителя по элементам первой строки, разлагая данный определитель по элементам первой строки, получим, что

$$\Delta_n = \Delta_{n-2}.$$

Решая однородное линейное рекуррентное соотношение $\Delta_n - \Delta_{n-2} = 0$, находим его общее решение

$$\Delta_n = c_1 + c_2(-1)^n.$$

Очевидно, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 1$. Используя эти начальные условия, вычисляем значения произвольных постоянных c_1, c_2: $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\Delta_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n).$$

Ответ: $\Delta_n = \dfrac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. ■

Лекция 4

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Асимптотические формулы. Асимптотические формулы для сумм значений некоторых функций. Теорема Штольца. Степенные асимптотические ряды.

Asymptotos (греч.) — несовпадающий.

1. Асимптотические формулы. При решении задач комбинаторного анализа часто приходится сталкиваться со сложными формулами, по которым вычисления при больших значениях входящих в них параметров становятся затруднительными. В этих случаях используются некоторые более простые приближенные формулы, по которым погрешность вычисления тем меньше, чем ближе значения параметров к некоторым предельным значениям, в частности к бесконечности или к нулю. Такие приближенные формулы и полученные с их помощью оценки вычисляемых величин называются *асимптотическими*.

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве X и x_0 — предельная точка этого множества, U — некоторая окрестность точки x_0, c — постоянная.

Определение 1.1.

$$1)\ f(x) \sim g(x),\ x \to x_0,\ \text{если}\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{1.1}$$

$$2)\ f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0,\ \text{если}\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{1.2}$$

$$3)\ f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0,\ \text{если}\ |f(x)| \le c\,|g(x)|,\ x \in U. \tag{1.3}$$

$$4)\ f(x) = O(g(x)),\ \text{если}\ |f(x)| \le c\,|g(x)|,\ x \in X. \tag{1.4}$$

Определение 1.2. Выражения, содержащие символы $\sim$, o, O называются *асимптотическими формулами*, *асимптотическими оценками* или *асимптотиками*.

Приведем примеры асимптотических оценок.

Пример 1.1. 1) $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

3) $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 1.2. (Пример из теории чисел.) $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ при $x \to \infty$, где $\pi(x)$ — количество простых чисел на отрезке $[1, x]$, так как согласно формуле Адамара и Валле-Пуссена

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} = 1.$$

Пример 1.3.

$$\ln x = o(x),\ \ x \to \infty. \tag{1.5}$$

Доказательство. Применяя формулу (1.2) определения 1.1 и правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.\ \blacksquare$$

Пример 1.4.

$$e^x = O(1),\ x \to 0. \tag{1.6}$$

Доказательство. Функция e^x непрерывна на всей числовой оси и, в частности, в точке $x_0 = 0$ и, следовательно, ограничена в любой конечной окрестности U этой точки, т. е. $e^x \le c$ при $x \in U$. Применяя формулу (1.3) определения 1.1, получаем, что $e^x = O(1)$, $x \to 0$. $\blacksquare$

2. Асимптотические формулы для сумм значений некоторых функций. Выведем некоторые асимптотические формулы для сумм значений некоторых функций, используя их связь с интегралами.

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает на отрезке $[a, b]$, то для нее справедливы неравенства

$$\frac{b-a}{n}f(b) \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{n}f(a), \qquad (2.1)$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает на отрезке $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ на отрезки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, $x_n = b$ и обозначим через Δ_k длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \le k \le n$. Из очевидных неравенств

$$f(x_k)\Delta_k \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \le f(x_{k-1})\Delta_k$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta_k. \qquad (2.2)$$

Если $\Delta_k = \dfrac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$-\frac{b-a}{n}f(a) + \left(\frac{b-a}{n}f(a) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k\right) \le \int_a^b f(x)dx \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta_k + \frac{b-a}{n}f(b)\right) - \frac{b-a}{n}f(b),$$

$$-\frac{b-a}{n}f(a) + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta_k \le \int_a^b f(x)dx \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta_k - \frac{b-a}{n}f(b).$$

Отсюда

$$\frac{b-a}{n}f(b) \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{n}f(a). \ \blacksquare \qquad (2.3)$$

Следствие 2.1. Если при условиях теоремы 2.1 в формуле (2.1) $\frac{b-a}{n}=1$, то имеет место неравенство

$$f(b)\le\sum_{k=0}^{n}f(x_k)-\int_a^b f(x)dx\le f(a). \qquad (2.4)$$

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, то для нее справедливы неравенства

$$\frac{b-a}{n}f(a)\le\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}f(x_k)-\int_a^b f(x)dx\le\frac{b-a}{n}f(b), \qquad (2.5)$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки.

Теорему 2.2 можно доказать, повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.1. Докажите теорему 2.2.

Следствие 2.2. Если при условиях теоремы 2.2 в формуле (2.5) $\frac{b-a}{n}=1$, то имеет место неравенство

$$f(a)\le\sum_{k=0}^{n}f(x_k)-\int_a^b f(x)dx\le f(b). \qquad (2.6)$$

Замечание 2.1. Оценку суммы значений произвольной положительной функции следует проводить путем разбиения ее на участки непрерывности и монотонности.

Получим ряд асимптотических оценок с помощью выведенных неравенств.

Теорема 2.3. Справедлива следующая асимптотическая оценка для суммы первых n обратных значений чисел натурального ряда:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+O(1),\ n\to\infty. \qquad (2.7)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

и возьмем $a = 1$, $b = n$. Тогда из формулы (2.4) вытекает, что

$$\frac{1}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} \le 1.$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1). \ ■$$

Теорема 2.4. Справедлива следующая асимптотическая оценка при $n \to \infty$ для суммы α-х степеней ($\alpha > -1$) первых n натуральных чисел:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(n^{\alpha}). \tag{2.8}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3. Следует рассмотреть функцию $f(x) = x^{\alpha}$. ■

Используя неравенства (2.6), можно получить асимптотику вида

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - n + O(\ln n), \ n \to \infty. \tag{2.9}$$

Докажите формулу (2.9).

При помощи более детальных рассуждений можно получить формулу

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12\pi},$$
$$0 < \theta < 1, \ n \to \infty. \tag{2.10}$$

3. Теорема Штольца. Теорема Штольца представляет дискретный аналог правила Лопиталя. Ее применяют при вычислении пределов числовых последовательностей. Мы будем применять эту теорему для доказательства асимптотических соотношений.

Теорема 3.1 (Штольц). Пусть последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) последовательность является возрастающей, т. е. $y_{n-1} < y_n$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$.

Если для числовой последовательности $\{x_n\}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{3.1}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) применяется для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Аналогично раскрывается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Формула (3.2) аналогична правилу Лопиталя, так как в формуле (3.2) вместо отношения производных берется отношение конечных разностей, являющихся дискретными аналогами производных.

Рассмотрим пример применения теоремы Штольца для доказательства асимптотических формул.

Пример 3.1. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n \tag{3.3}$$

при $n \to \infty$.

Решение. Пусть $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Тогда

$$y_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = y_n.$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Пусть $x_n = \ln n$. Применяя правило Лопиталя, находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n - \ln(n-1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-1)} = 1.$$

Следовательно, по теореме Штольца,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1,$$

т. е. справедлива асимптотическая формула (3.3). ■

4. Степенные асимптотические ряды.

Определение 4.1. Рассмотрим функцию $f(x)$ действительного переменного x. Представление

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}, \; x \to \infty, \tag{4.1}$$

означающее, что при любом $N \geq 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^{-k} + o(x^{-N}), \; x \to \infty, \tag{4.2}$$

где a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, называется *степенным асимптотическим рядом для функции $f(x)$ при $x \to \infty$.*

При этом в определении 4.1 сам асимптотический ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Сформулируем одно важное свойство степенных асимптотических рядов.

Теорема 4.1. Если

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}, \; x \to \infty, \quad g(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-k}, \; x \to \infty,$$

то для любых постоянных α, β

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^{-k}, \; x \to \infty. \tag{4.3}$$

Лекция 5
СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

Основные методы суммирования рядов. Преобразование Эйлера и формула Эйлера. Пример применения формулы Эйлера. Кратные ряды.

1. Основные методы суммирования рядов. Основными методами суммирования являются следующие методы:

1) непосредственное суммирование;

2) представление данного ряда в виде линейной комбинации известных рядов;

3) метод Абеля;

4) суммирование тригонометрических рядов;

5) суммирование степенных рядов при помощи дифференцирования или интегрирования;

6) метод рекуррентных соотношений;

7) метод дифференциальных уравнений;

8) суммирование рядов при помощи интегралов.

Опишем каждый из этих методов и рассмотрим соответствующие примеры.

1. Непосредственное суммирование. Метод непосредственного суммирования основан на применении определения суммы ряда:

$$\text{если } S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \text{ то } S=\lim_{n\to\infty}S_n, \text{ где } S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k. \qquad (1.1)$$

Наиболее часто этот метод применяется в следующей ситуации:

Теорема 1.1. Если

$$u_n=v_{n+1}-v_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots,\ \text{ и } \lim_{n\to\infty}v_n=v, \qquad (1.2)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=v-v_1. \qquad (1.3)$$

Пример 1.1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\ . \qquad (1.4)$$

Решение. Представим данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right). \qquad (1.5)$$

Так как

$$v=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0,\ \ v=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0,$$

то согласно формулам (1.2), (1.3) сумма данного ряда равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$. ■

2. Представление данного ряда в виде линейной комбинации известных рядов. В некоторых случаях данный ряд удается представить в виде линейной комбинации других рядов, суммы которых известны. Наиболее часто применяются следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \tag{1.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{1.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \tag{1.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x, \tag{1.10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \tag{1.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n}}{n} = \ln(1+x), \tag{1.12}$$

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots = (1+x)^m, \tag{1.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \operatorname{sh} x, \tag{1.14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x, \tag{1.15}$$

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q} \quad (|q|<1). \tag{1.16}$$

Пример 1.2.

$$\frac{17}{4} + \frac{49}{16} + \frac{143}{64} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5\cdot 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} + 5\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}. =$$

$$= \frac{1}{1/2} + 5\cdot \frac{1}{1/4} = 22.$$

3. Метод Абеля. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1.17}$$

Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в простейших случаях находится с помощью почленного дифференцирования или интегрирования.

Пример 1.3. Используя метод Абеля, найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots .$$

Решение. Рассмотрим вспомогательный степенной ряд

$$1 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{7}x^6 - \frac{1}{10}x^9 + \frac{1}{13}x^{12} - \ldots .$$

Для вычисления его суммы преобразуем этот ряд следующим образом:

$$\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{13}}{13} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\int(1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \ldots)\,dx =$$

$$= \frac{1}{x}\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Сумма S данного ряда вычисляется по формуле

$$S = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{6\sqrt{2}}$. ■

Упражнение 1.1. Вычислите произведение

$$5^{1/5} \cdot 25^{1/25} \cdot 125^{1/125} \cdot \ldots .$$

4. Суммирование тригонометрических рядов. Для нахождения сумм рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

рассматривают ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\cos nx + i \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.18}$$

где

$$z = \cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right).$$

Эта подстановка позволяет свести задачу вычисления суммы тригонометрического ряда к вычислению суммы степенного ряда. Сумма степенного ряда в формуле (1.18) вычисляется рассмотренными выше способами.

Здесь во многих случаях бывает полезен ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Тогда

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}, \quad S = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)\Big|_0^z = \ln\frac{1}{1-z}. \ \blacksquare$$

Пример 1.4. Вычислить сумму тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\cos nx + i \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

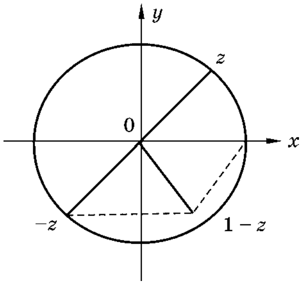

Рис. 1
Вычисление мнимой части
$\ln\frac{1}{1-z}$

Согласно формуле (1.19)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}.$$

Отделяя мнимую часть в формуле (1.19), получаем (рис. 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}.$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$. ■

Упражнение 1.2. Вычислите

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

5. Суммирование степенных рядов при помощи дифференцирования или интегрирования. Этот прием уже применялся при решении примера 1.3. Рассмотрим еще один пример.

Пример 1.5. С помощью почленного интегрирования найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}.$$

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(nx^{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}n(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}xnx^{n-1}\right)'=$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x(x^n)'\right)'=\left(x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\right)'=\left(x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\right)'=\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'=$$

$$=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$. ■

6. Метод рекуррентных соотношений. Метод рекуррентных соотношений состоит в том, чтобы найти рекуррентное соотношение, связывающее частичные суммы S_n данного ряда. Решив это соотношение, мы получим формулу для S_n. После этого сумма ряда вычисляется по формуле $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Пример 1.6. Применяя метод рекуррентных соотношений, найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}.$$

Решение. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{5^k}.$$

Тогда

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{5^k}.$$

Следовательно,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n+1}{5^{n+1}}. \tag{1.20}$$

Мы получили неоднородное линейное рекуррентное соотношение (1.20). Для его решения рассмотрим соответствующее однородное соотношение

$$S_{n+1} - S_n = 0. \tag{1.21}$$

Характеристический многочлен этого соотношения имеет вид

$$P(x) = x - 1.$$

Он имеет единственный корень $\lambda_1 = 1$. Следовательно, общее решение соотношения (1.21) имеет вид

$$b_n = c, \quad c = \text{const}. \tag{1.22}$$

Какое-нибудь частное решение соотношения (1.20) будем искать в виде

$$c_n = \frac{an+b}{5^n}. \tag{1.23}$$

Подставляя выражение (1.23) в формулу (1.20), получим, что

$$c_n = -\frac{4n+5}{16\cdot 5^n}. \tag{1.24}$$

Согласно формулам (1.22), (1.24), общее решение рекуррентного соотношения (1.20) имеет вид

$$a_n = b_n + c_n = c - \frac{4n+5}{16\cdot 5^n}. \tag{1.25}$$

Для определения произвольной постоянной в формуле (1.25) воспользуемся начальным условием $S_1 = \frac{1}{5}$. Из формулы (1.25) при $n = 1$ следует, что $c - \frac{9}{80} = \frac{1}{5}$, $c = \frac{5}{16}$. Подставляя найденное значение $c = \frac{5}{16}$ в формулу (1.25), находим, что

$$S_n = \frac{5}{16} - \frac{4n+5}{16\cdot 5^n}.$$

Получаем

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{16} - \frac{4n+5}{16\cdot 5^n}\right) = \frac{5}{16},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{16\cdot 5^n} = 0.$$

Ответ: $\frac{5}{16}$. ■

Сумму ряда в примере 1.6 можно найти другим способом. Представим ряд в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^n$. Рассмотрим степенной ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} =$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}=S\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{16}{25}}=\frac{5}{16}.$$

7. Метод дифференциальных уравнений. Этот метод применяется для вычисления суммы степенного ряда. Дифференцируя данный ряд, находят дифференциальное уравнение для его суммы $S(x)$. Решая это уравнение и применяя начальные условия для определения произвольных постоянных в общем решении уравнения, находят функцию $S(x)$.

Пример 1.7. Найти сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Решение. Дифференцируя данный ряд, находим, что

$$S'(x)=S(x). \tag{1.26}$$

Таким образом, функция $S(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.26) с начальным условием $S(0)=1$. Решая уравнение (1.26), находим, что

$$\frac{dS}{S}=dx,\ \ \ln\frac{S}{C}=x,\ \ S(x)=Ce^x.$$

Из условия $S(0)=1$ вытекает, что $C=1$. Следовательно, $S(x)=e^x$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$. ■

8. Суммирование рядов при помощи интегралов.

Пример 1.8. Исходя из соотношения

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}(-\cos^{2}x)^{n}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos^{2}x}{1+\cos^{2}x}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2}dx-\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^{2}x}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\frac{1}{\cos^{2}x}}{1+\frac{1}{\cos^{2}x}}dx=$$

$$=1-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{d(\operatorname{tg}x)}{2+\operatorname{tg}^{2}x}=1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. ■

2. Преобразование Эйлера и формула Эйлера. При использовании какого-либо ряда для приближенных вычислений иногда оказывается удобным предварительно этот ряд преобразовать. *Применяют преобразования лишь в том случае, когда новый ряд быстрее сходится или удобнее для вычислений.*

Определение 2.1. *Преобразованием ряда* называется замена данного сходящегося ряда по тому или иному правилу другим рядом с той же суммой.

Выведем формулу для классического преобразования, носящего имя *Эйлера*. Пусть дан сходящийся ряд

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}a_{k}x^{k}=$$
$$=a_{0}-a_{1}x+a_{2}x^{2}-\ldots+(-1)^{k}a_{k}x^{k}+\ldots,\tag{2.1}$$

где $x>0$. Введем в рассмотрение разности

$$\Delta a_{k}=a_{k+1}-a_{k},$$
$$\Delta^{2}a_{k}=\Delta a_{k+1}-\Delta a_{k}=a_{k+2}-2a_{k+1}+a_{k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^{p}a_{k}=\Delta^{p-1}a_{k+1}-\Delta^{p-1}a_{k}=$$
$$=a_{k+p}-C_{p}^{1}a_{k+p-1}+C_{p}^{2}a_{k+p-2}-\ldots+(-1)^{p}a_{k}.\tag{2.2}$$

Перепишем данный ряд так:

$$S(x)=\frac{a_0}{1+x}-\frac{a_1x-a_0x}{1+x}+\frac{a_2x^2-a_1x^2}{1+x}-\frac{a_3x^3-a_2x^3}{1+x}+\ldots\,. \quad (2.3)$$

Представление (2.3) допустимо, так как частичная сумма ряда (2.3) разнится от частичной суммы ряда (2.1) лишь слагаемым

$$\frac{1}{1+x}(-1)^{k+1}a_{k+1}x^{k+1},$$

стремящимся к нулю при $k\to\infty$ ввиду сходимости исходного ряда (2.1). Вводя разности для упрощения записи, получим

$$S(x)=\frac{1}{1+x}(a_0-\Delta a_0x+\Delta a_1x^2-\Delta a_2x^3+\ldots). \quad (2.4)$$

Сохраняя первый член $\dfrac{a_0}{1+x}$ ряда (2.4), остающийся ряд

$$-\frac{x}{1+x}(\Delta a_0-\Delta a_1x+\Delta a_2x^2-\ldots),$$

как и $S(x)$, перепишем в форме

$$-\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x}(\Delta a_0-\Delta^2a_0x+\Delta^2a_1x^2-\ldots),$$

так что, если снова выделить первый член, то имеем

$$S(x)=\frac{a_0}{1+x}-\frac{\Delta a_0}{(1+x)^2}x+\frac{x^2}{(1+x)^2}(\Delta^2a_0-\Delta^2a_1x+\ldots). \quad (2.5)$$

Продолжая этот процесс, после p шагов получим

$$S(x)=\frac{a_0}{1+x}-\frac{\Delta a_0}{(1+x)^2}x+\frac{\Delta^2a_0}{(1+x)^3}x^2-\ldots+$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{\Delta^{p-1}a_0}{(1+x)^p}x^{p-1}+R_p(x), \quad (2.6)$$

где

$$R_p(x)=(-1)^p\frac{x^p}{(1+x)^p}(\Delta^pa_0-\Delta^pa_1x+\Delta^pa_2x^2-\ldots)=$$
$$=(-1)^p\frac{x^p}{(1+x)^p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Delta^pa_kx^k. \quad (2.7)$$

Можно доказать, что $R_p(x) \to 0$ при $p \to \infty$. Переходя к пределу в формуле (2.6) при $p \to \infty$, получим

$$S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\begin{array}{l} a_0 - \Delta a_0 \cdot \dfrac{x}{1+x} + \Delta^2 a_0 \cdot \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2 - \ldots + \\ + (-1)^p \Delta^p a_0 \cdot \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^p + \ldots \end{array}\right). \qquad (2.8)$$

Подставляя в формулу (2.8) вместо $S(x)$ его представление (2.1), мы получим *преобразование Эйлера*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k x^k = \frac{1}{1+x}\left(\begin{array}{l} a_0 - \Delta a_0 \cdot \dfrac{x}{1+x} + \Delta^2 a_0 \cdot \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2 - \ldots + \\ + (-1)^p \Delta^p a_0 \cdot \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^p + \ldots \end{array}\right). \qquad (2.9)$$

Формулу (2.9) называют *формулой Эйлера*.

Замечание 2.1. Чаще всего это преобразование применяют при $x = 1$. Тогда оно преобразует числовой ряд в числовой по формуле

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Delta^p a_0}{2^{p+1}}. \qquad (2.10)$$

3. Пример применения формулы Эйлера. Рассмотрим пример применения преобразования Эйлера, из которого будет видна и ощутимая польза такого преобразования.

Пример 3.1. Пусть в формуле (2.10)

$$a_k = \frac{1}{c+k}, \qquad (3.1)$$

где c — любое постоянное число, $c \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c+k}, \qquad (3.2)$$

если отбросить в нем достаточно большое число первых членов, окажется рядом «лейбницевского типа» и, следовательно, сходится.

Последовательность Δa_k, $\Delta^2 a_k$, ... в этом случае легко вычисляется. С помощью математической индукции находим

$$\Delta^p a_k = (-1)^p \frac{p!}{(c+k)(c+k+1)\ldots(c+k+p)}. \qquad (3.3)$$

В частности,

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{p!}{c(c+1)\ldots(c+p)}.$$

Таким образом, по формуле (2.10)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{p!}{c(c+1)\ldots(c+p)}. \qquad (3.4)$$

Если положить здесь $c = 1$, то получится преобразование известного ряда для $\ln 2$:

$$\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Вторым рядом гораздо выгоднее пользоваться для вычисления $\ln 2$. Например, чтобы получить точность 0,01, в первом ряде нужно вычислить 99 слагаемых, а во втором достаточно взять 5 членов. Скорость сходимости второго ряда намного выше, чем первого.

4. Кратные ряды. Пусть задана бесконечная система чисел

$$u_{i,\, k,\, \ldots,\, l}, \qquad (4.1)$$

занумерованных s индексами i, k, ..., l ($s \geq 2$), каждый из которых независимо от других принимает всевозможные натуральные значения.

Определение 4.1. Символ

$$\sum_{i,k,\ldots,l=1}^{\infty} u_{i,k,\ldots,l} \qquad (4.2)$$

называется *кратным* или *s-кратным рядом*.

Определение 4.2. *Суммой кратного ряда* (4.2) называется предел при $n \to \infty$, $m \to \infty$, ..., $p \to \infty$ частичной суммы ряда

$$U_{n,m,\ldots,p} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \ldots \sum_{l=1}^{p} u_{i,k,\ldots,l}. \qquad (4.3)$$

Определение 4.3. Ряд (4.2) называется *сходящимся*, если он имеет конечную сумму.

Важнейшим классом кратных рядов являются *степенные ряды с несколькими переменными:*

$$\sum_{i,k,\ldots,l=1}^{\infty} a_{i,k,\ldots,l}\, x^i y^k \ldots z^l. \tag{4.4}$$

Пример 4.1. Найти сумму двойного ряда

$$\sum_{i\geq k}^{\infty} x^i y^k.$$

Решение. Запишем данный ряд в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} y^k \sum_{i=k}^{\infty} x^i.$$

Предполагая абсолютную сходимость данного ряда, т. е. считая, что $|x| < 1$ и $|y| < 1$, применим к последнему ряду формулу суммы членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{\infty} y^k \sum_{i=k}^{\infty} x^i = \sum_{k=1}^{\infty} y^k \frac{x^k}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} (xy)^k = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{xy}{1-xy}.$$

Ответ: $\dfrac{xy}{(1-x)(1-xy)}$. ■

Лекция 6

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Функция Эйлера. Функция Мёбиуса.

1. Функция Эйлера.

Определение 1.1. *Функцией Эйлера* $\varphi(n)$ называется функция, определенная на множестве натуральных чисел и означающая количество чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

Пример 1.1.

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = 4,$$
$$\varphi(6) = 2,\ \varphi(7) = 6,\ \varphi(8) = 4,\ \varphi(9) = 6,\ \varphi(10) = 4.$$

Теорема 1.1. Пусть

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s} \tag{1.1}$$

— каноническое разложение числа n. Тогда

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right). \tag{1.2}$$

Следствие 1.1. Если p — простое число, то

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Пример 1.2.

$$\varphi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16; \quad \varphi(81) = 81\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 54.$$

Теорема 1.2. Функция $\varphi(n)$ мультипликативна, т. е. для любых натуральных взаимно простых чисел n_1, n_2 справедливо равенство

$$\varphi(n_1 \cdot n_2) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2). \tag{1.3}$$

Пример 1.3. $\varphi(405) = \varphi(81)\varphi(5) = 54 \cdot 4 = 216.$

Теорема 1.3 (тождество Гаусса). Сумма значений функции Эйлера в натуральных делителях числа n равна n:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \tag{1.4}$$

Пример 1.4. Убедимся в справедливости формулы (1.4) при $n = 12$:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) =$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12.$$

Теорема 1.4 (Л. Эйлер). Если $(a, m) = 1$, где $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \tag{1.5}$$

Частным случаем теоремы Эйлера является следующая теорема Ферма.

Теорема 1.5. Если $p \in \mathbb{N}$, p — простое число и $(a, p) = 1$, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{1.6}$$

Функция Эйлера играет основную роль в теории сравнений.

Теорема 1.6. Если в сравнении

$$ax \equiv b \pmod{m} \tag{1.7}$$

$(a, m) = 1$, то

$$x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod{m}. \tag{1.8}$$

Целочисленными функциями являются также функции $\tau(n)$ — количество натуральных делителей натурального числа n и $\sigma(n)$ — сумма всех натуральных делителей натурального числа n.

Теорема 1.7. Если $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ — каноническое представление натурального числа n, то

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_m + 1), \tag{1.9}$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1}. \tag{1.10}$$

2. Функция Мёбиуса.

Определение 2.1. *Функцией Мёбиуса* $\mu(n)$ называется функция

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1; \\ 0, \text{ если } n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} \text{ и } \exists k_i > 1; \\ (-1)^s, \text{ если } n = p_1 p_2 \ldots p_s, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ — каноническое разложение натурального числа n.

Таким образом, функция Мёбиуса «следит» за наличием в каноническом разложении натурального числа кратных множителей — в этом случае функция Мёбиуса равна нулю. Если кратных множителей нет, то функция фиксирует четность количества простых множителей в каноническом разложении числа — если число таких множителей нечетно, то функция Мёбиуса равна -1; в противном случае она равна 1.

Значения функции Мёбиуса для первых десяти натуральных чисел представлены в таблице 3.

Таблица 3

Значения функции Мёбиуса

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	–1	–1	0	–1	1	–1	0	0	1

Рассмотрим некоторые свойства функции Мёбиуса и ее связь с функцией Эйлера.

Теорема 2.1. Сумма значений функции Мёбиуса в натуральных делителях натурального числа n удовлетворяет следующим равенствам:

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}0, \text{ если } n>1;\\ 1, \text{ если } n=1.\end{cases} \qquad (2.2)$$

Доказательство. Второе равенство в формуле (2.2) очевидно. Действительно, если $n = 1$, то единственным натуральным делителем числа n является 1, поэтому

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\mu(1)=1.$$

Если $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}\neq 1$, то $\mu(d)\neq 0$, если $d=p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_r}$. Тогда $\mu(d) = (-1)^r$. Количество делителей такого вида равно C_s^r, поэтому

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n,\,\mu(d)\neq 0}\mu(d)=\sum_{r=1}^{s}C_s^r(-1)^r=(1-1)^s=0. \blacksquare$$

Теорема 2.2. Пусть функции $f(n)$ и $g(n)$ определены на множестве $\mathbb{N}$. Если

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d), \qquad (2.3)$$

то

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right). \qquad (2.4)$$

Формула (2.4) называется *формулой обращения Мёбиуса*.

Следующие теоремы являются простыми следствиями теоремы 2.2.

Теорема 2.3. Имеет место следующая формула, устанавливающая связь между функциями Эйлера и Мёбиуса:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Согласно тождеству Гаусса

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Отсюда по формуле обращения Мёбиуса

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d},$$

или

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \ \blacksquare$$

Следствие 2.1. Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, то

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{k=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \tag{2.6}$$

Пример 2.1. Проверим справедливость формулы (2.5) при $n = 10$. В этом случае она имеет вид

$$\frac{\varphi(10)}{10} = \frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(2)}{2} + \frac{\mu(5)}{5} + \frac{\mu(10)}{10},$$

или

$$\frac{4}{10} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}.$$

Согласно определению функции $\tau(n)$

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1. \tag{2.7}$$

Из формулы (2.7) следует, что в обозначениях теоремы 2.2 $f(n) = \tau(n)$, $g(d) = 1$. Поэтому, согласно формуле (2.4)

$$\sum_{d|n} \tau\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = 1.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. Для любого натурального n справедлива формула

$$\sum_{d|n} \tau\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = 1. \tag{2.8}$$

Пример 2.2. Проверим справедливость формулы (2.8) при $n = 12$. В этом случае она имеет вид

$$\tau\left(\frac{12}{1}\right)\mu(1) + \tau\left(\frac{12}{2}\right)\mu(2) + \tau\left(\frac{12}{3}\right)\mu(3) +$$
$$+ \tau\left(\frac{12}{4}\right)\mu(4) + \tau\left(\frac{12}{6}\right)\mu(6) + \tau\left(\frac{12}{12}\right)\mu(12) =$$
$$= 6 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 8 - 7 = 1.$$

Согласно определению функции $\sigma(n)$

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d. \tag{2.9}$$

Из формулы (2.9) следует, что в обозначениях теоремы 2.2

$$f(n) = \sigma(n),\ g(d) = d.$$

Поэтому согласно формуле (2.4)

$$\sum_{d|n} \sigma\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = n.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5. Для любого натурального n справедлива формула

$$\sum_{d|n} \sigma\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = n. \tag{2.10}$$

Пример 2.3. Проверим справедливость формулы (2.10) при $n = 12$. В этом случае она имеет вид

$$\sigma\left(\frac{12}{1}\right)\mu(1) + \sigma\left(\frac{12}{2}\right)\mu(2) + \sigma\left(\frac{12}{3}\right)\mu(3) +$$
$$+ \sigma\left(\frac{12}{4}\right)\mu(4) + \sigma\left(\frac{12}{6}\right)\mu(6) + \sigma\left(\frac{12}{12}\right)\mu(12) =$$
$$= 28 \cdot 1 + 12 \cdot (-1) + 7 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 31 - 19 = 12.$$

Лекция 7

ВИДЫ ГРАФОВ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

Задачи, приводящие к понятию графа. Определение графа. Виды графов.

1. Задачи, приводящие к понятию графа.

Задача 1.1. *Задача о кенигсбергских мостах.* В Кенигсберге на реке Прегель было два острова, соединенных между собой и с берегами мостами так, как это показано на рис. 2. Можно ли, начиная с некоторого места суши обойти все мосты по одному разу и вернуться назад?

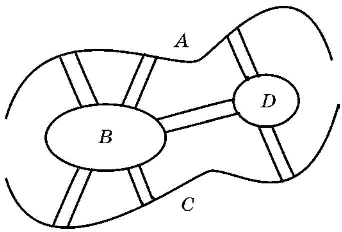

Рис. 2
Задача о кенигсбергских мостах

В 1736 году Леонард Эйлер опубликовал работу, в которой при решении этой задачи он рассматривал граф, изображенный на рис. 3. Этой работой Эйлер положил начало новому разделу математики — теории графов.

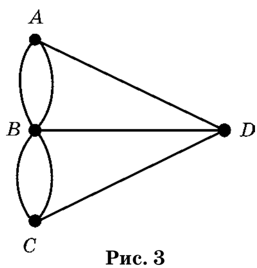

Рис. 3
Граф задачи о кенигсбергских мостах

Задача 1.2. *Задача о трех домах и трех колодцах.* Имеется три дома и три колодца (рис. 4). Требуется провести от каждого дома D_1, D_2, D_3 к каждому колодцу C_1, C_2, C_3 тропинку так, чтобы тропинки не пересекались.

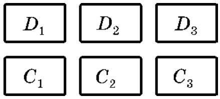

Рис. 4
Задача о трех домах и трех колодцах

Задача о трех домах и трех колодцах была решена польским математиком Куратовским (1896–1979) в 1930 году.

Задача 1.3. *Задача о четырех красках.* Любую карту на плоскости раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом (рис. 5).

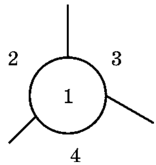

Рис. 5
Задача о четырех красках

2. Определение графа. Виды графов.

Определение 2.1. *Графом* называется пара $G = G(V, E)$, где V — непустое множество (множество *вершин*), E — множество неупорядоченных пар различных элементов множества V (множество *ребер* или *дуг*):

$$G(V, E) = (V, E), V \neq \varnothing, E \subset V \times V, E = E^{-1}. \qquad (2.1)$$

Число вершин графа обозначают буквой p, а число ребер — буквой q:

$$p = p(G) = |V|, q = q(G) = |E|. \qquad (2.2)$$

Пример 2.1. 1. Сеть улиц в городе — дуги, перекрестки — вершины.

2. Блок-схемы компьютерных программ: вершины — блоки, ребра — переходы от одного блока к другому.

3. Электрические и радиотехнические схемы.

4. Географические карты.

5. Молекулы химических соединений.

6. Связи между людьми и группами людей.

Определение 2.2. Граф $G(V, E)$ называется *ориентированным* или *орграфом*, если элементами множества E являются упорядоченные пары. В этом случае элементы множества V называются *узлами*, а множества E — *дугами*.

Определение 2.3. Если элементом множества E может быть пара одинаковых элементов множества V, то такой элемент множества E называется *петлей*, а граф называется *графом с петлями* или *псевдографом*.

Определение 2.4. Если E является не множеством, а набором, содержащим несколько одинаковых элементов, то эти элементы называются кратными ребрами, а граф называется *мультиграфом*.

Например, граф задачи о кенигсбергских мостах является мультиграфом.

Определение 2.5. Если элементами множества E являются не обязательно двухэлементные, а любые подмножества множества V, то такие элементы множества E называются *гипердугами*, а граф называется *гиперграфом*.

Определение 2.6. Если задана функция $F: V \to M$ и (или) $F: E \to M$, где M — некоторое множество, то множество M называется *множеством пометок*, а граф называется *помеченным* или *нагруженным*.

В качестве множества пометок обычно используются буквы или целые числа.

Пример 2.2. Пусть

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 1)\}.$$

Изобразить граф.

Граф изображен на рис. 6. Данный граф является орграфом и псевдографом.

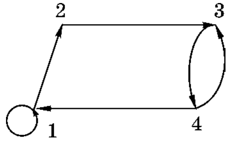

Рис. 6
Граф к примеру 2.2

Определение 2.7. Если в орграфе $G(V, E)$ к каждой дуге $(a, b) \in E$ добавить дугу (b, a), то в результате образуется неорграф, который называется *соответствующим орграфу* $G(V, E)$ и обозначается через $F(G)$.

Пример 2.3. Орграфу $G(V, E)$ из примера 2.2, изображенному на рис. 6, соответствует неорграф $F(G)$, изображенный на рис. 7.

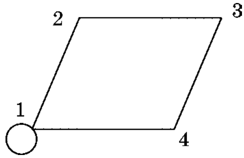

Рис. 7
Неорграф к примеру 2.3

Лекция 8

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ МАТРИЦАМИ

Матрица смежности графа. Изоморфные графы. Матрица инцидентности графа. Матрица весов графа.

1. Матрица смежности графа. Информация о структуре графа может быть задана матрицей бинарного отношения. Пусть $G(V, E)$ — граф, в котором множество вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Определение 1.1. *Матрицей смежности графа* $G(V, E)$ называется матрица $A_G = (A_{ij})$ порядка n, определенная следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (v_i, v_j) \in E; \\ 0, \text{ если } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases} \tag{1.1}$$

Определение 1.2. Если $(v_i, v_j) \in E$, т. е. $A_{ij} = 1$, то вершина v_j называется *последователем вершины* v_i, а вершина v_i называется *предшественником* вершины v_j.

Определение 1.3. Если $A_{ij} = 1$ или $A_{ji} = 1$, то вершины v_i и v_j называются *смежными*.

Определение 1.4. Если G — мультиграф, то элемент A_{ij} в матрице A_G по определению равен числу дуг, исходящих из вершины v_i и входящих в вершину v_j.

Пример 1.1. Граф, изображенный на рис. 8, имеет матрицу смежности

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

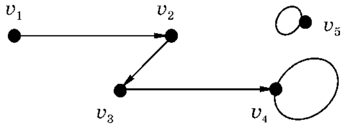

Рис. 8
Граф к примеру 1.1

Пример 1.2. Матрица смежности задачи о кенигсбергских мостах имеет вид

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

если нумерация вершин на рис. 3: A — 1, B — 2, C — 4, D — 3.

Простейшие свойства матриц смежности:

1) если G — неорграф, то матрица A_G симметрична;

2) если G — граф без петель, то в его матрице смежности A_G на главной диагонали стоят нули.

2. Изоморфные графы.

Определение 2.1. Пусть $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ — графы. Отображение $\varphi\colon V \to V'$ называется *гомоморфизмом*, если для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ $(v_1, v_2) \in E \Rightarrow (\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \in E'$.

Таким образом, гомоморфизм графов — это отображение множества вершин одного графа в множество вершин другого графа, сохраняющее отношение связности вершин.

Определение 2.2. Пусть $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ — графы. Отображение $\varphi\colon V \to V'$ называется *изоморфизмом*, если:

1) $\varphi\colon V \to V'$ — биекция;

2) $(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \in E'$.

Пример 2.1. Пусть $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1)\}$, $G' = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\})$.

1. Постройте графы G, G' (все графы неориентированные).

2. Докажите, что граф G' является гомоморфным образом графа G при отображении $\varphi: V \to V'$, где

$$\varphi(1) = a, \varphi(2) = b, \varphi(3) = c, \varphi(4) = b.$$

3. Докажите, что граф $G'' = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, b), (c, d)\})$ изоморфен графу G.

4. Постройте граф G''.

5. Докажите, что отображение $\chi: G \to G$, определенное равенствами

$$\chi(1) = 2, \chi(2) = 1, \chi(3) = 4, \chi(4) = 3,$$

является автоморфизмом графа G.

6. Постройте матрицы смежности графов G, G', G''.

Внешне различные графы могут быть изоморфными. Рассмотрим в связи с этим замечанием следующий пример.

Пример 2.2. Докажите, что графы, изображенные на рис. 9, изоморфны.

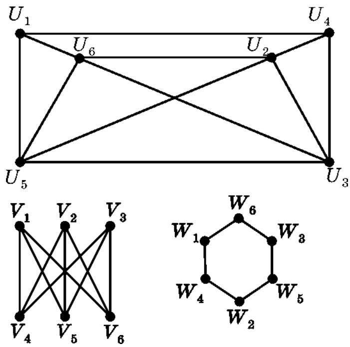

Рис. 9
Изоморфные графы

Определение 2.3. Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется *инвариантом* графа.

Например, $p(G)$, $q(G)$ — инварианты графа G. Неизвестно никакого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

Пример 2.3. Количество вершин, ребер и смежных вершин для каждой вершины не определяют граф. Докажите, что у графов, представленных на рис. 10, указанные инварианты совпадают, но они не изоморфны. Точка пересечения диагоналей трапеции на первом графе вершиной графа не является.

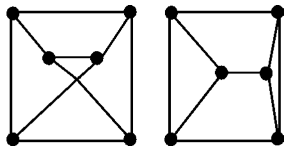

Рис. 10
Неизоморфные графы

Теорема 2.1. Отношение изоморфизма графов является отношением эквивалентности, т. е. оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1) рефлексивность: $G \sim G$;

2) симметричность: $G_1 \sim G_2 \Rightarrow G_2 \sim G_1$;

3) транзитивность: $(G_1 \sim G_2) \wedge (G_2 \sim G_3) \Rightarrow G_1 \sim G_3$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, т. е. рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма.

Теорема 2.2. Два графа изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов — i-й и j-й строки, i-го и j-го столбца.

Согласно этой теореме по матрице смежности граф восстанавливается с точностью до изоморфизма.

Пример 2.4. Преобразовать матрицу смежности графа G_2 из примера 2.2 к матрице смежности графа G_1, применяя преобразование теоремы 2.2.

3. Матрица инцидентности графа.

Определение 3.1. В мультиграфе $G = (V, U, P)$, где V — множество вершин, U — множество дуг, P — множество пар вершин и соединяющих их дуг, *дуга* u называется *инцидентной вершине* $v_1 \in V$, если существует вершина $v_2 \in V$, для которой $(v_1, u, v_2) \in P$ или $(v_2, u, v_1) \in P$.

Определение 3.2. Пусть $V = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. *Матрицей инцидентности* $B_G = (B_{ij})$ мультиграфа G называется матрица размерности $m \times n$, определенная по правилу

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } v_i; \\ -1, \text{ если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } v_i \\ \text{ и не является петлей;} \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пример 3.1. Напишите матрицу инцидентности для мультиграфа, изображенного на рис. 11.

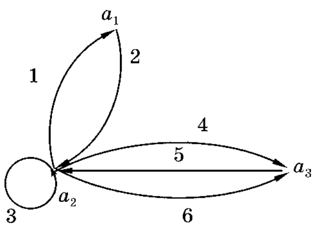

Рис. 11
Мультиграф к примеру 3.1

Определение 3.3. Мультиграфы $G = (V, E, P)$ и $G' = (V', E', P')$ называются *изоморфными*, если существуют биекции $\varphi\colon V \to V'$ и $\psi\colon E \to E'$, для которых

$$(v_1, u, v_2) \in P \Leftrightarrow (\varphi(v_1), \psi(u), \varphi(v_2)) \in P'.$$

Теорема 3.1. Для того чтобы мультиграфы $G = (V, E, P)$ и $G' = (V', E', P')$ были изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы матрицы инцидентности этих графов получались друг из друга некоторыми перестановками строк и столбцов.

4. Матрица весов графа. Во многих задачах требуется дополнительная информация о вершинах и ребрах. Например, это может быть расстояние между населенными пунктами или время прохождения сигнала от одного пункта до другого в узлах связи. В таких задачах используются *взвешенные графы*.

Определение 4.1. Пусть S_V, S_E — некоторые множества, которые мы будем называть *множествами меток*. *Пометкой* или *распределением* графа $G = (V, E)$ называется пара функций

$$f\colon V \to S_V, \quad g\colon E \to S_E.$$

При этом функция $f\colon V \to S_V$ называется *распределением меток вершин*, а $g\colon E \to S_E$ — *распределением меток дуг*.

Определение 4.2. Четверка (V, E, f, g) называется *взвешенным* или *помеченным* графом.

Определение 4.3. Для элемента $v \in V$ элемент $f(v) \in S_V$ называется *весом вершины* v. Для дуги $u \in E$ элемент $g(u) \in S_E$ называется *весом дуги* u.

Пример 4.1. Пусть

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad E = ((v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4)),$$
$$C = \{\text{Омск, Новосибирск, Кемерово, Павлодар}\},$$
$$f\colon V \to C, \quad f(v_1) = \text{Омск}, \quad f(v_2) = \text{Новосибирск},$$
$$f(v_3) = \text{Кемерово}, \quad f(v_4) = \text{Павлодар}.$$
$$W = \{681, 274, 413, 589\},$$
$$g\colon E \to W, \quad g((v_1, v_2)) = 681, \quad g((v_2, v_3)) = 274,$$
$$g((v_1, v_4)) = 413, g((v_2, v_4)) = 589.$$

Помеченный псевдограф представляет схему автодорог с указанием их протяженности (рис. 12).

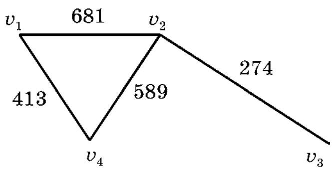

Рис. 12
Помеченный псевдограф

Информацию о весах дуг во взвешенном графе можно представить в виде *матрицы весов*.

Определение 4.4. *Матрицей весов* называется матрица $W = (w_{ij})$, где

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{вес дуги } (v_i, v_j), \text{ если такая дуга существует;} \\ 0\,(\infty), \text{ если такой дуги не существует.} \end{cases}$$

Метка 0 или ∞ выбирается в зависимости от приложений, т. е. по смыслу конкретной задачи.

Пример 4.2. Матрица весов графа из примера 4.1

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Лекция 9

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

Подграфы и части графа. Операции над графами.

1. Подграфы и части графа.

Определение 1.1. Граф $G' = G'(V', E')$ называется *подграфом графа* $G = G(V, E)$, если выполняются следующие условия:

1) $V' \subseteq V$;

2) $E' = E \bigcap V'^2$.

Следовательно, на подграфе сохраняются все ребра основного графа $G = G(V, E)$ на подмножестве вершин.

Определение 1.2. Граф $G' = G'(V', E')$ называется *частью графа* $G = G(V, E)$, если:

1) $V' \subseteq V$;

2) $E' \subseteq E \bigcap V'^2$.

На части графа сохраняется часть ребер основного графа на подмножестве вершин.

Пример 1.1. Рассмотрим графы, изображенные на рис. 13. Квадратными скобками обозначаются неориентированные дуги, т. е. ребра:

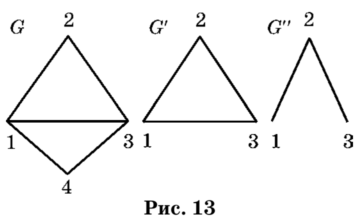

Рис. 13
Графы к примеру 1.1

$G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [3, 4]\})$,
$G' = (\{1, 2, 3\}, \{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\})$,
$G'' = (\{1, 2, 3\}, \{[1, 2], [2, 3]\})$.

Очевидно, что G' — подграф графа G, G''— часть графа G.

Определение 1.3. Граф $G' = G'(V', E')$ называется *остовом* (*остовным подграфом*) *графа* $G = G(V, E)$, если выполняются следующие условия:

1) G' — часть графа G;

2) $V' = V$.

Для остова сохраняется часть ребер основного графа на множестве всех его вершин.

Определение 1.4. Количество ребер, инцидентных вершине v графа G, называется *степенью* или *валентностью вершины* v и обозначается $d(v)$.

Степень любой вершины v графа G удовлетворяет неравенству

$$0 \le d(v) \le p - 1. \tag{1.1}$$

Пусть $\delta(G)$ — минимальная степень вершин графа G, т. е.

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v), \tag{1.2}$$

и пусть $\Delta(G)$ — максимальная степень вершин графа G:

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v). \tag{1.3}$$

Определение 1.5. Если степени всех вершин графа G равны k, то граф G называется *регулярным степени* k. Тогда

$$\delta(G) = \Delta(G) = k. \tag{1.4}$$

Степень регулярности графа является его инвариантом и обозначается $r(G)$. Для нерегулярных графов $r(G)$ не определяется.

Пример 1.2. На рис. 14 изображен регулярный граф G степени $r(G) = 3$.

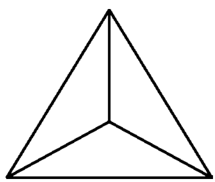

Рис. 14
Регулярный граф степени 3

Определение 1.6. Если степень вершины v графа G равна нулю:

$$d(v) = 0,$$

то вершина v называется *изолированной*.

Определение 1.7. Если степень вершины v графа G равна единице:

$$d(v) = 1,$$

то вершина v называется *висячей* или *концевой*.

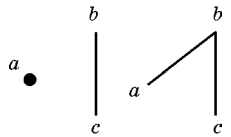

Рис. 15
Висячие и концевые вершины

Пример 1.3. На рис. 15 вершина a первого графа — висячая, вершины a, c второго графа — концевые.

Определение 1.8. Для орграфа число дуг, исходящих из вершины a, называется *полустепенью исхода* и обозначается $d^{-}(a)$, а число дуг, входящих в вершину a, называется *полустепенью захода* и обозначается $d^{+}(a)$.

Теорема 1.1 (теорема Эйлера). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q, \tag{1.5}$$

$$\sum_{v \in V} d^{-}(v) + \sum_{v \in V} d^{+}(v) = 2q. \tag{1.6}$$

2. Операции над графами.

Определение 2.1. *Операция добавления к графу* $G = (V, E)$ *вершины* v образует граф

$$G' = (V \cup \{v\}, E). \tag{2.1}$$

Определение 2.2. *Операция добавления к графу* $G = (V, E)$ *дуги* (a, b) образует граф

$$G' = (V \cup \{a, b\}, E \cup \{(a, b)\}). \tag{2.2}$$

Определение 2.3. *Операция удаления из графа* $G = (V, E)$ *вершины* v заключается в удалении из графа $G = (V, E)$ вершины v вместе с инцидентными ей дугами:

$$G' = (V \backslash \{v\}, E \backslash \{(b, c) \mid b = v \vee c = v\}). \qquad (2.3)$$

Определение 2.4. *Операция удаления из графа* $G = (V, E)$ *дуги* (a, b) заключается в удалении из графа $G = (V, E)$ пары (a, b). В результате получается граф

$$G' = (V, E \backslash \{(a, b)\}). \qquad (2.4)$$

Определение 2.5. *Операция отождествления вершин* a *и* b *графа* $G = (V, E)$ состоит в удалении из графа $G = (V, E)$ вершин a и b и присоединении новой вершины a', дуг (a', c), если $(a, c) \in E$ или $(b, c) \in E$, и дуг (c, a'), если $(c, a) \in E$ или $(c, b) \in E$:

$$\begin{gathered} G' = (V \setminus \{a, b\} \cup \{a'\}, \\ (E \setminus \{(c, d) \mid c = a \vee c = b \vee d = a \vee d = b\}) \cup \\ \cup \{(a', c) \mid (a, c) \in E \vee (b, c) \in E\} \cup \\ \cup \{(c, a') \mid (c, a) \in E \vee (c, b) \in E\}). \end{gathered} \qquad (2.5)$$

При этом говорят, что построенный *граф* G' *получается из графа* $G = (V, E)$ *отождествлением вершин* a *и* b. В случае, когда вершины a и b соединены дугой, операцию отождествления называют *стягиванием дуги* (a, b).

Пример 2.1. Из графа G_1, показанного на рис. 16, добавлением вершины 5 образуется граф G_2, добавлением дуги (3, 1) — граф G_3, удалением дуги (3, 2) — граф G_4, удалением вершины 2 — граф G_5, отождествлением вершин 1 и 4 — граф G_6, стягиванием дуги (2, 3) — граф G_7.

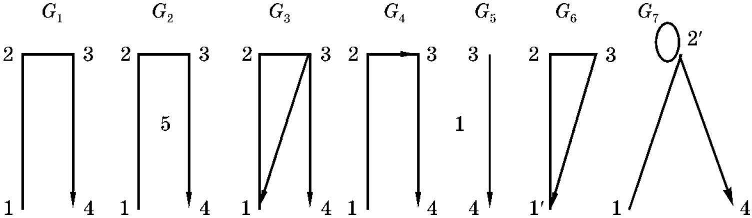

Рис. 16
Операции над графами

Определение 2.6. *Дополнением графа* без петель $G = (V, E)$ называется граф

$$\bar{G} = (V, V^2 \setminus (E \bigcup idV)), \tag{2.6}$$

где $idV = \{(v, v) \mid v \in V\}$.

Пример 2.2. Дополнением графа G_1, изображенного на рис. 16, является граф $\bar{G}_1$, показанный на рис. 17.

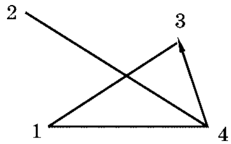

Рис. 17
Операция дополнения графа

Определение 2.7. *Объединением графов* $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф

$$G_1 \bigcup G_2 = (V_1 \bigcup V_2, E_1 \bigcup E_2). \tag{2.7}$$

Определение 2.8. *Пересечением графов* $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, у которых $V_1 \bigcap V_2 \neq \varnothing$, называется граф

$$G_1 \bigcap G_2 = (V_1 \bigcap V_2, E_1 \bigcap E_2). \tag{2.8}$$

Определение 2.9. *Кольцевой суммой графов* $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф

$$G_1 \oplus G_2 = (V_1 \bigcup V_2, E_1 \oplus E_2), \tag{2.9}$$

где

$$E_1 \oplus E_2 = (E_1 \setminus E_2) \bigcup (E_2 \setminus E_1) = E_1 \Delta E_2. \tag{2.10}$$

Пример 2.3. Для графов

$$G_1 = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{[a_1, a_2], (a_2, a_3)\}),$$
$$G_2 = (\{a_1, a_2, a_4\}, \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\}),$$

изображенных на рис. 18, найти G_1 U G_2, G_1 I G_2, G_1 E G_2.

Решение. По определению, имеем

$$G_1 \bigcup G_2 = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{[a_1, a_2], (a_2, a_3), (a_4, a_1)\}),$$
$$G_1 \bigcap G_2 = (\{a_1, a_2\}, \{(a_1, a_2)\}),$$
$$G_1 \oplus G_2 = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\}). \ \blacksquare$$

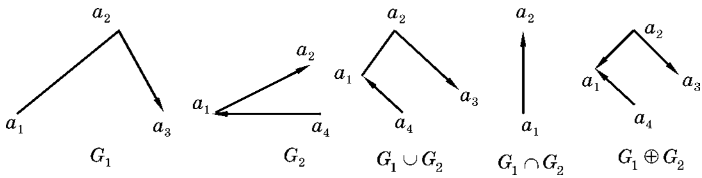

Рис. 18
Объединение, пересечение и кольцевая сумма графов

Определение 2.10. *Соединением графов* $G_1 = (V_1, E_1)$ *и* $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \\ \cup \{[a, b] \mid a \in V_1, b \in V_2, a \neq b\}). \qquad (2.11)$$

Пример 2.4. Для графов G_1, G_2, представленных на рис. 19*а*, соединением $G_1 + G_2$ является граф, представленный на рис. 19*б*.

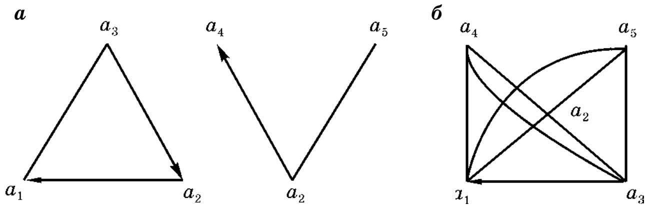

Рис. 19
Операция соединения графов

Определение 2.11. *Произведением графов* $G_1 = (V_1, E_1)$ *и* $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф

$$G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E), \qquad (2.12)$$

в котором

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((a_1 = a_2 \wedge (b_1, b_2) \in E_2) \vee \\ \vee (b_1 = b_2 \wedge (a_1, a_2) \in E_1)). \qquad (2.13)$$

Пример 2.5. На рис. 20 представлено произведение $G_1 \times G_2$ графов

$$G_1 = (\{1, 2\}, \{(1, 1), (2, 1)\}) \text{ и} \\ G_2 = (\{a, b, c\}, \{[a, b], (b, c)\}).$$

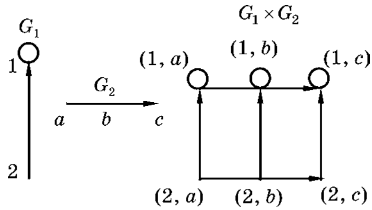

Рис. 20
Произведение графов

Определение 2.12. Неорграф без петель называется *полным*, если любые его две различные вершины смежны.

Полный граф, имеющий n вершин, обозначается через K_n.

Определение 2.13. Рассмотрим граф K_2, вершины которого обозначим 0 и 1. *n-мерный куб* или *куб* Q_n определяется по следующим правилам:

1) Q_0 — граф без петель, состоящий из одной вершины;

2) $Q_1 = K_2$;

3) $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$, $n > 1$.

Вершинами куба Q_n являются всевозможные n-ки, состоящие из нулей и единиц, а ребра задаются по следующему правилу: вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие кортежи различаются ровно одной координатой.

На рис. 21 показаны кубы Q_2, Q_3.

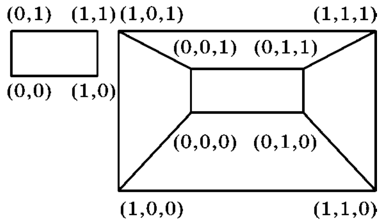

Рис. 21
Кубы Q_2 и Q_3

Определение 2.14. *Композицией графов* $G_1 = (V_1, E_1)$ *и* $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф

$$G_1[G_2] = (V_1 \times V_2, E), \tag{2.14}$$

в котором

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((a_1, a_2) \in E_1) \vee (a_1 = a_2 \wedge (b_1, b_2) \in E_2). \qquad (2.15)$$

Пример 2.6. Композицией $G_1[G_2]$ графов, рассмотренных в примере 2.5, является граф, изображенный на рис. 22, а композицией $G_2[G_1]$ — граф, представленный на рис. 23.

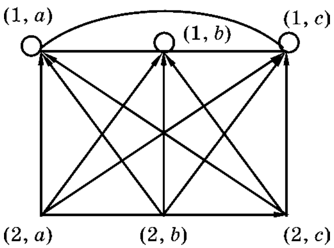

Рис. 22
Композиция графов $G_1[G_2]$

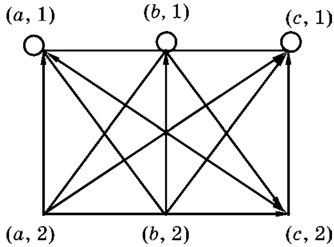

Рис. 23
Композиция графов $G_2[G_1]$

Композиция $G_1[G_2]$ означает, что каждая вершина a графа G_1 заменяется на изоморфную копию G_a графа G_2, а затем, если $(a_1, a_2) \in E_1$, то между любыми вершинами $b_1 \in G_{a_1}$ и $b_2 \in G_{a_2}$ проводится дуга (b_1, b_2).

Лекция 10

СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Маршруты, цепи и циклы графа. Пути, контуры, достижимость, связность. Исследование маршрутов графа по его матрице смежности. Матрицы связности, достижимости и контрадостижимости графа.

1. Маршруты, цепи и циклы графа.

Определение 1.1. Пусть $G = (V, E)$ — граф. Последовательность

$$a_1, u_1, a_2, u_2, \ldots, u_n, a_{n+1}, \qquad (1.1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in V$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$, называется *маршрутом, соединяющим вершины* a_1 *и* a_{n+1} *или* (a_1, a_{n+1})*-маршрутом*, если $u_i = (a_i, a_{i+1}) \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n$, (рис. 24).

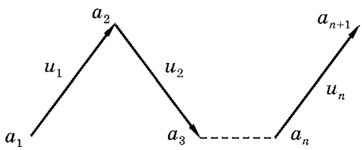

Рис. 24
Маршрут, соединяющий вершины a_1 и a_{n+1}

Очевидно маршрут (1.1) можно задать последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ его вершин или последовательностью $u_1, u_2, \ldots, u_n$ дуг.

Определение 1.2. *Длиной маршрута* (1.1) называется число n дуг в маршруте.

Определение 1.3. Пусть G — неорграф. Маршрут (1.1) называется *цепью*, если все ребра $[a_1, a_2], \ldots, [a_n, a_{n+1}]$ различны.

Определение 1.4. Пусть G — неорграф. Маршрут (1.1) называется *простой цепью*, если все его вершины, кроме, возможно, первой и последней, различны.

Определение 1.5. Маршрут (1.1) называется *циклическим*, если

$$a_1 = a_{n+1}. \tag{1.2}$$

Определение 1.6. *Циклом* называется циклическая цепь.

Определение 1.7. *Простым циклом* называется циклическая простая цепь.

Определение 1.8. Неорграф без циклов называется *ациклическим*.

Определение 1.9. *Обхватом неорграфа* называется минимальная из длин его циклов.

Пример 1.1. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 25.

В нем наборы (1, 2), (1, 2, 4, 7), (3, 4, 5, 6) являются простыми цепями; (1, 2, 4, 7, 8, 4) — цепь, не являющаяся

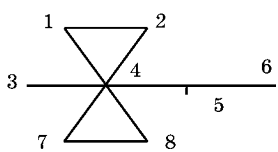

Рис. 25
Маршруты, цепи и циклы в графе

простой; (1, 2, 4, 7, 8, 4, 2) — маршрут, не являющийся цепью; (1, 2, 4, 7, 8, 4, 1) — цикл, не являющийся простым; (1, 2, 4, 1) — простой цикл. Обхват этого графа равен 3.

2. Пути, контуры, достижимость, связность.

Определение 2.1. Пусть G — граф, возможно, ориентированный. Маршрут (1.1) называется *путем*, если все его дуги различны.

Определение 2.2. Путь (1.1) называется *контуром*, если

$$a_1 = a_{n+1}. \tag{2.1}$$

Определение 2.3. Граф, не имеющий контуров, называется *бесконтурным*.

Определение 2.4. Вершина b называется *достижимой из вершины* a, если существует (a, b)-путь.

Пример 2.1. Граф, изображенный на рис. 26, имеет контур (1, 2, 3, 1). Вершина 5 достижима из любой другой вершины, а из вершины 5 не достижима ни одна из вершин графа.

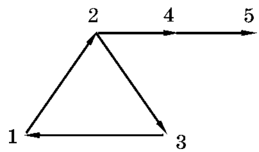

Рис. 26
Достижимые и недостижимые вершины графа

Определение 2.5. Неорграф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Определение 2.6. Граф G называется *связным*, если соответствующий ему неорграф $F(G)$ является связным.

Определение 2.7. Граф G называется *сильно связным*, если для каждой пары различных вершин a, b существуют (a, b)-маршрут и (b, a)-маршрут.

Аналогично определяются понятия связности и сильной связности для мультиграфов.

Пример 2.2. Граф, показанный на рис. 25, является связным, орграф, представленный на рис. 26, — связным, но не сильно связным, а граф, изображенный на рис. 27, не является связным.

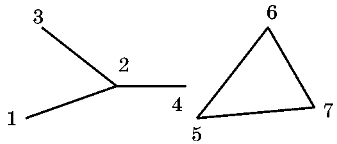

Рис. 27
Пример несвязного графа

Заметим, что любой связный неорграф является сильно связным.

Определение 2.8. Всякий максимальный по включению (сильно) связный подграф данного графа называется его (*сильно*) *связной компонентой* или (*сильной*) *компонентой связности*.

Пример 2.3. Граф, показанный на рис. 27, имеет две компоненты связности: с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{5, 6, 7\}$. Граф, представленный на рис. 26, имеет три сильные компоненты, задаваемые множествами вершин $\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}$.

Теорема 2.1. Любой граф представляется в виде объединения непересекающихся связных (сильных) компонент. Разложение графа на связные (сильные) компоненты представляется однозначно.

3. Исследование маршрутов графа по его матрице смежности.

Следующая теорема позволяет по матрице смежности A_G исследовать маршруты данного графа G.

Теорема 3.1. Если A_G — матрица смежности графа G, то (i, j)-й элемент матрицы A_G^k есть число (a_i, a_j)-маршрутов длины k.

Следствие 3.1. В графе G мощности n тогда и только тогда существует (a_i, a_j)-маршрут $(a_i \neq a_j)$, когда (i, j)-й элемент матрицы $A_G + A_G^2 + A_G^3 + \ldots + A_G^{n-1}$ не равен нулю.

Следствие 3.2. В графе G мощности n тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину a_i, когда (i, i)-й элемент матрицы $A_G + A_G^2 + A_G^3 + \ldots + A_G^n$ не равен нулю.

Пример 3.1. Определить с помощью матрицы смежности существование (1, 3)-маршрута в графе G, изображенном на рис. 28.

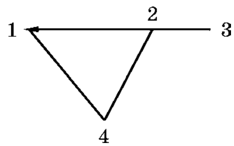

Рис. 28
Существование (1, 3)-маршрута

В матрице

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1, 3)-элемент равен 0, т. е. (1, 3)-маршрутов длины 1 нет. В матрице

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1, 3)-элемент также равен 0, поэтому (1, 3)-маршрутов длины 2 нет. В матрице

$$A_G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1, 3)-элемент равен 1, поэтому в данном графе существует один (1, 3)-маршрут длины 3. Из рис. 28 видно, что этот маршрут определяется набором вершин (1, 4, 2, 3).

В матрице A_G^3 элемент (4, 2) равен 3, следовательно, существует три (4, 2)-маршрута длины 3: (4, 1, 4, 2), (4, 2, 4, 2), (4, 2, 3, 2).

4. Матрицы связности, достижимости и контрадостижимости графа.

Определение 4.1. Для графа G мощности n образуем из матрицы

$$(b_{ij}) = E + A_G + A_G^2 + \ldots + A_G^n \qquad (4.1)$$

матрицу $C = (c_{ij})$ по следующему правилу:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } b_{ij} \neq 0, \\ 0, \text{ если } b_{ij} = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Матрица C называется *матрицей связности* графа G, если G — неорграф, и *матрицей достижимости*, если G — орграф.

Из теоремы 3.1 следует, что в графе G существует (a_i, a_j)-маршрут, где $i \neq j$, тогда и только тогда, когда $c_{ij} = 1$. Таким образом, в матрице C содержится информация о существовании связей между различными элементами графа посредством маршрутов.

Если G — связный неорграф, то все элементы матрицы связности C равны единице. В общем случае матрица связности неорграфа является матрицей отношения эквивалентности, соответствующего разбиению множества вершин графа на компоненты связности.

Определение 4.2. *Матрицей контрадостижимости* графа G называется матрица $Q = (q_{ij})$, где

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } a_i \text{ достижима из вершины } a_j; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (4.3)$$

Нетрудно заметить, что если C — матрица достижимости графа G, то

$$Q = C^t. \qquad (4.4)$$

Матрицы достижимости $C = (c_{ij})$ и контрадостижимости $Q = (q_{ij})$ можно использовать для нахождения сильных компонент графа. Рассмотрим матрицу

$$S = C * Q, \qquad (4.5)$$

где операция * означает поэлементное произведение матриц C и Q:

$$s_{ij} = c_{ij} \cdot q_{ij}. \tag{4.6}$$

Очевидно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Элемент s_{ij} матрицы S равен 1 тогда и только тогда, когда вершины a_i и a_j взаимно достижимы, т. е. a_i достижима из a_j и a_j достижима из a_i.

Таким образом, матрица S является матрицей следующего отношения эквивалентности E: a_iEa_j *тогда и только тогда, когда* a_i *и* a_j *находятся в одной сильной компоненте*.

Следовательно, сильная компонента, содержащая вершину a_i, состоит из элементов a_j, для которых $s_{ij} = 1$.

Пример 4.1. Матрицы достижимости C и контрадостижимости Q графа G, изображенного на рис. 28, имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = C * Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По второй строке матрицы S находим, что сильная компонента, содержащая вершину 2, состоит из вершин (1, 2, 3).

Лекция 11

ОБХОДЫ ГРАФОВ

Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях. Эйлеровы мультиграфы. Гамильтоновы графы.

1. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях.

Определение 1.1. *Степенью* или *валентностью* вершины a неорграфа G называется число ребер, инцидентных вершине a, т. е. число ребер, концом которых является вершина a. При этом петли считаются дважды.

Если G — орграф, то степени его вершин определяются как степени вершин в соответствующем неорграфе $F(G)$. Аналогично вводится понятие степени вершины в мультиграфах. Степень вершины можно обозначать символами $\deg_G a$, $\deg a$, $d(a)$.

Вершина степени 0 называется *изолированной*, а степени 1 — *концевой* или *висячей*.

Пример 1.1. Вершины графа G, изображенного на рис. 29, имеют следующие валентности:

$$\deg 1 = \deg 2 = \deg 3 = 1,\ \deg 4 = 5,\ \deg 5 = 0.$$

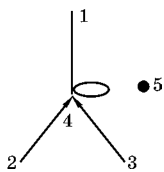

Рис. 29
Валентности вершин графа

Рассмотрим сумму степеней всех вершин графа. Поскольку каждое ребро входит в эту сумму дважды, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1 (лемма о рукопожатиях). Сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равна удвоенному числу его ребер.

Определение 1.2. Пусть G — бесконтурный орграф. *Полустепенью исхода* $\deg^+ a$ вершины a называется число дуг, исходящих из a. *Полустепенью захода* $\deg^- a$ вершины a называется число дуг, заходящих в вершину a.

Справедливо соотношение

$$\deg a = \deg^+ a + \deg^- a. \tag{1.1}$$

2. Эйлеровы мультиграфы. Рассмотрим *задачу о кенигсбергских мостах*. Граф этой задачи представлен на рис. 30.

Вершины x_1, x_4 соответствуют берегам реки, x_2, x_3 — островам, ребра мультиграфа — мостам. На языке теории

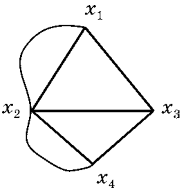

Рис. 30
Граф задачи о кенигсбергских мостах

графов задача формулируется следующим образом: существует ли в мультиграфе цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа?

Определение 2.1. Цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа, называется *эйлеровым*. Мультиграф, в котором имеется эйлеров цикл, также называется *эйлеровым*.

Теорема 2.1 (Л. Эйлер). Связный неориентированный мультиграф тогда и только тогда является эйлеровым, когда степень каждой из его вершин — четное число.

Пример 2.1. Мультиграф задачи о кенигсбергских мостах, изображенный на рис. 3, не содержит эйлеров цикл, поскольку в нем есть вершины, имеющие нечетную степень; более того, нечетную степень имеют все вершины.

Опишем алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе. Этот алгоритм задается следующими правилами.

1. Выбрать произвольно некоторую вершину a.

2. Выбрать произвольно некоторое ребро u, инцидентное a, и присвоить ему номер 1. Назовем это ребро *пройденным*.

3. Каждое пройденное ребро вычеркнуть и присвоить ему номер, на единицу больший номера предыдущего вычеркнутого ребра.

4. Находясь в вершине x, не выбирать ребро, соединяющее x с a, если имеется возможность иного выбора.

5. Находясь в вершине x, не выбирать ребро, которое является *перешейком* (т. е. ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру).

6. После того, как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

Пример 2.2. Найти эйлеров цикл в эйлеровом мультиграфе, изображенном на рис. 31.

Решение. После выбора вершины a и прохождения ребер 1, 2 имеется три возможности выбора: ребра 3, 6 или 7. Так как ребро 7 является перешейком, выбираем следующее ребро из оставшихся, например ребро 3. Далее обходим оставшиеся ребра и получаем эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. ■

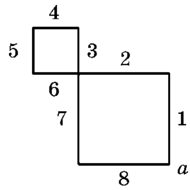

Рис. 31
Определение эйлерова цикла

3. Гамильтоновы графы. Мы рассмотрели обходы ребер графа. Следующей нашей целью является изучение обходов вершин графа.

Определение 3.1. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам такой цикл называется *гамильтоновым*. *Гамильтоновой* называется и простая цепь, содержащая все вершины графа.

Пример 3.1. Любой граф, ребра которого образуют простой цикл, гамильтонов. Граф, изображенный на рис. 31, негамильтонов.

Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов, решение последней значительно сложнее. Известны следующие достаточные условия нахождения гамильтоновых циклов в связном неорграфе без петель, имеющем $n \geq 3$ вершин.

Теорема 3.1. Если для любых двух различных несмежных вершин a, b графа G выполняется условие

$$\deg a + \deg b \geq n, \tag{3.1}$$

то существует гамильтонов цикл.

Следствие 3.1. Если для любой вершины a графа G выполняется условие

$$\deg a \geq \frac{n}{2}, \tag{3.2}$$

то существует гамильтонов цикл.

Замечание 3.1. С задачей нахождения гамильтонова цикла связана *задача о коммивояжере*. Район, который должен посетить торговец, содержит некоторое количество городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходный город. Если таких маршрутов много, требуется найти кратчайший из них.

Математическая постановка этой задачи выглядит так: требуется найти гамильтонов цикл минимального веса.

Лекция 12

РАСКРАСКИ ГРАФОВ

Определение хроматического числа графа. Примеры. Реберный мультиграф. Бихроматические и двудольные графы.

1. Определение хроматического числа графа. Примеры. Реберный мультиграф.

Определение 1.1. Пусть $G = (V, E)$ — неорграф без петель. *Раскраской* (*вершин*) *графа* G называется такое задание цветов вершинам G, что если $[a, b]$ — ребро, то вершины a и b имеют различные цвета.

Определение 1.2. *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, требующихся для раскраски G.

Пример 1.1. Так как в полном графе K_n любые две различные вершины связаны ребром, то $\chi(K_n) = n$.

Многие практические задачи сводятся к построению раскрасок графа.

Пример 1.2. Рассмотрим *задачу составления расписания*. Предположим, что нужно прочесть несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно. (Например, их читает один и тот же лектор.) Построим граф G, вершины которого биективно соответствуют лекциям и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции нельзя читать одновременно. Любая раскраска этого графа определяет допустимое расписание: лекции, соответствующие вершинам одного цвета, могут читаться одновременно. Оптимальные расписания определяют раскраску графа с минимальным числом цветов, а число часов, необходимое для прочтения всех лекций, равно $\chi(G)$.

Пример 1.3. Рассмотрим граф G, вершины которого — страны, а ребра соединяют страны, имеющие общую границу. Числу $\chi(G)$ соответствует наименьшее число красок, необходимое для раскраски карты так, чтобы никакие две страны, имеющие общую границу, не были окрашены в один цвет.

Существуют и практические задачи, связанные с раскраской ребер в мультиграфе.Раскраска ребер в мультиграфе может быть определена с помощью раскраски вершин так называемого *реберного мультиграфа* $L(G)$.

Определение 1.3. Для произвольного неориентированного мультиграфа $G = (M, U, P)$ *реберным мультиграфом* $L(G)$ называется тройка

$$L(G) = (U, M, P'), P' \subseteq U \times M \times U,$$

причем $(u, \alpha, v) \in P'$ тогда и только тогда, когда в мультиграфе G вершина α является концом ребер u, v. *Раскраской ребер мультиграфа* G называется раскраска вершин мультиграфа $L(G)$.

Пример 1.4. Проводится монтаж радиоаппаратуры. Чтобы не перепутать проводники, необходимо их окрасить таким образом, чтобы два проводника, идущие к одной плате, имели разные цвета. В этом случае вершинами графа являются платы, а ребрами — проводники.

2. Бихроматические и двудольные графы.

Определение 2.1. Неорграф G называется *бихроматическим*, если

$$\chi(G) = 2. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Неорграф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество всех ребер графа G образует разрез графа, т. е. для некоторого разбиения множества вершин V_1, V_2 концы любого ребра принадлежат разным частям разбиения.

Теорема 2.1. Пусть G — неорграф без петель, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) G — бихроматический граф;

2) G — двудольный граф;

3) G не содержит циклов нечетной длины.

Оценим хроматическое число графа G через его параметры. Обозначим через $\deg G$ максимальную степень вершин графа G.

Теорема 2.2. Для любого неорграфа G без петель выполняется неравенство

$$\chi(G) \le \deg G + 1.$$

Лекция 13

ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

Определение и пример планарного графа. Критерии планарности графа. Теорема об изображении графов в пространстве $\mathbb{R}^3$. Теорема о четырех красках.

1. Определение и пример планарного графа.

Определение 1.1. Неорграф G называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, что никакие два ребра не будут иметь общих точек кроме, может быть, общего конца этих ребер.

Определение 1.2. Изображение планарного графа на плоскости, удовлетворяющее условию определения 1.1, называется *плоским*.

Пример 1.1. Граф K_4 (рис. 32*а*) планарен, поскольку он может быть изображен, как показано на рис. 32*б*.

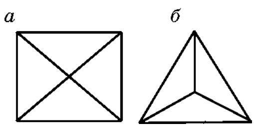

Рис. 32
Примеры планарных графов

Пример 1.2. Граф в примере 12.1.3, планарен.

Пример 1.3. Граф, вершины которого — отверстия печатной платы, а ребра — проводники печатной платы, соединяющие отверстия, планарен.

Рассмотрим операцию *подразбиения ребра* в графе $G = (M, R)$.

Определение 1.3. После *подразбиения ребра* $[a, b] \in R$ получается граф $G' = (M', R')$, где

$$M' = M \cup \{ab\},\ R' = (R \setminus \{[a, b]\}) \cup \{[a, ab], [ab, b]\}, \quad (1.1)$$

т. е. ребро $[a, b]$ заменяется на (a, b)-цепь длины два.

Определение 1.4. Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер.

2. Критерии планарности графа. Не всякий неорграф является планарным. Критерий планарности графа описывает следующая теорема Понтрягина — Куратовского.

Теорема 2.1 (теорема Понтрягина — Куратовского). Граф G планарен тогда и только тогда, когда G не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 33).

Эквивалентная форма критерия планарности описана в следующей теореме.

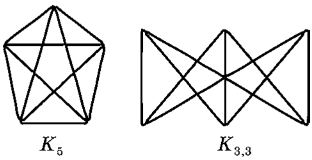

Рис. 33
Графы K_5 и $K_{3,3}$

Теорема 2.2. Неорграф планарен тогда и только тогда, когда не содержит подграфов, стягиваемых (т. е. получаемых последовательным отождествлением вершин, связанных ребрами) к графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 33).

3. Теорема об изображении графов в пространстве $\mathbb{R}^3$. Трехмерного евклидова пространства оказывается достаточно для изображения любого конечного или счетного графа без пересечения дуг вне их концов.

Теорема 3.1. Любой граф, состоящий не более чем из счетного множества вершин, может быть изображен в пространстве $\mathbb{R}^3$ без пересечения дуг вне их концов.

Доказательство. Пусть $G = (M, R)$ — граф, у которого число вершин не более чем счетно. Тогда и множество ребер графа не более чем счетно. Расположим все точки графа на некоторой прямой l и каждой дуге из R сопоставим взаимно однозначно некоторую плоскость, содержащую прямую l. Искомое изображение графа получается после проведения всех дуг в соответствующих плоскостях. ■

4. Теорема о четырех красках. Известна оценка хроматического числа планарного графа.

Теорема 4.1. Если G — планарный граф, то

$$\chi(G) \le 4. \tag{4.1}$$

Пример 4.1. При исследовании принципиальной электрической схемы радиоэлектронного устройства с точки зрения возможности ее реализации с помощью печатного монтажа или монтажа на слоях микросхемы, конструктору важно знать ответы на следующие вопросы:

1) является ли граф, соответствующий рассматриваемой схеме, планарным;

2) если граф планарен, то как получить его изображение без пересечения ребер?

На первый вопрос принципиальный ответ дает теорема Понтрягина — Куратовского (теорема 2.1). В дискретной математике разработаны методы получения плоских изображений планарных графов.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Занятие 1

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1.1. Последовательность Фибоначчи $\{u_n\}$ задается рекуррентным соотношением

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

и начальным условием

$$u_1 = u_2 = 1.$$

Доказать, что:

1) для любых натуральных m, n $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$;

2) для любых натуральных m, n таких, что n делится на m, число u_n делится на u_m;

3) два соседних числа u_n, u_{n+1} взаимно просты;

4) всякое натуральное число N, $N > 1$ может быть однозначно представлено в виде такой суммы чисел Фибоначчи, что каждое число входит в сумму не более одного раза и никакие два соседних числа не входят вместе;

5) $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$;

6) $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n+1} = u_{2n+2}$;

7) $1 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1}$;

8) $u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3 = u_{3n}$.

1.2. Докажите следующие свойства чисел Фибоначчи:

1) $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$;

2) $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$;

3) $nu_1 = (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \ldots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$;

4) $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + (n-1)u_{n-1} + nu_n = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2$.

В задачах 1.3–1.6 с помощью пункта 2 утверждения 1.1 докажите следующие признаки делимости чисел Фибоначчи.

1.3. Число Фибоначчи четно тогда и только тогда, когда его номер делится на 3.

1.4. Число Фибоначчи делится на 3 тогда и только тогда, когда его номер делится на 4.

1.5. Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делится на 5.

1.6. Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делится на 8.

Решение задач 1.7, 1.8 основано на следующем свойстве чисел Фибоначчи:

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

1.7. Докажите, что не существует чисел Фибоначчи, дающих при делении на 8 в остатке 4.

1.8. Докажите, что не существует нечетных чисел Фибоначчи, делящихся на 17.

В задачах 1.9–1.12 докажите справедливость равенств для чисел Фибоначчи.

1.9. $u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2$.

1.10. $u_n u_{n+1} - u_{n-2}u_{n-1} = u_{2n-1}$.

1.11. $u_{n+1}u_{n+2} - u_n u_{n+3} = (-1)^{n+1}$.

1.12. $u_n^4 - u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2} = 1$.

Верно ли, что $u_{n-k}u_{n+k} = u_n^2 + (-1)^{n+k}$? Выведите формулу для u^{2k}, аналогичную формуле задачи 1.12.

1.13. Докажите, что последняя цифра числа Фибоначчи u_{15k}, $k \in \mathbb{N}$, есть 0.

1.14. Докажите, что число цифр числа Фибоначчи u_n больше $\dfrac{n-2}{5}$.

Занятие 2

БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

2.1. Доказать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^k C_k^r = C_{n-r}^{k-r} C_n^r$;

3) $\dfrac{C_n^{k-r}}{C_n^k} = \dfrac{(k)_r}{(n-k+r)_r}$, где $(n)_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$;

4) $\dfrac{C_{n-r}^{k-r}}{C_n^k} = \dfrac{(k)_r}{(n)_r}$;

5) $\dfrac{C_{n+1}^k}{C_n^k} = \dfrac{n+1}{n-k+1}$;

6) $\sum\limits_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$.

2.2. Доказать, что:

1) последовательность C_n^k возрастает по n при фиксированном k;

2) последовательность C_{n-r}^{k-r} убывает по r при фиксированных n и k;

3) если n фиксировано, то C_n^k возрастает по k при $k \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$ и убывает при $k > \left[\dfrac{n}{2}\right]$;

4) $\max\limits_{0 \le k \le n} C_n^k = C_n^{[n/2]}$;

5) $\min\limits_{\sum_{i=1}^{s} n_i = n} (C_{n_1}^k + C_{n_2}^k + \ldots + C_{n_s}^k) = (s-r)C_q^r + rC_{q+1}^k$, где $q = \left[\dfrac{n}{s}\right]$, $r = (n-s)\left[\dfrac{n}{s}\right]$;

6) $q = \left[\dfrac{n}{s}\right]$, $\max\limits_{0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_s \le n} (C_n^{k_1} + C_n^{k_2} + \ldots + C_n^{k_s}) =$

$$= \sum_{\frac{n-s}{2} \le j \le \frac{n+s}{2}} C_n^j \ (1 \le s \le n+1);$$

7) при простом p и любом $p > k \geq 1$ число C_p^k кратно p;

8) $\prod\limits_{\substack{n<p\leq 2n,\\ p\text{ — простое}}} p \leq C_{2n}^n$.

2.3. Используя формулу бинома Ньютона, докажите, что при любом натуральном n:

1) $(3^{2n+3} - 24n + 37) \vdots 64$;

2) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$;

3) $(6^{2n} - 1) \vdots 35$;

4) $(2^{n+2}3^n + 5n - 4) \vdots 25$.

2.4 (неравенство Бернулли). Доказать, что для любого $c > 1$ и натурального $n > 1$ верно соотношение

$$c^n > 1 + n(c - 1). \tag{2.1}$$

2.5. Доказать, что для любого $c < 1$ и натурального $n > 1$ верно неравенство

$$c^n < \frac{1}{n(1-c)}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. Для любого натурального n имеет место соотношение

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!} a_1^{r_1} a_1^{r_2} \ldots a_k^{r_k}. \tag{2.3}$$

2.6. Найти коэффициент при x^8 в разложении полинома $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$.

2.7. Найти коэффициент при x^9 в разложении полинома $(1 + 2x - 3x^2)^8$.

2.8. Найти коэффициент при x^7 в разложении полинома $(1 - x + 2x^2)^{10}$.

2.9. Найти коэффициент при x^5 в разложении полинома $(2 + x - 2x^3)^5$.

2.10. Найти коэффициент при x^{17} в разложении полинома $(2 + x^4 + x^7)^{15}$.

2.11. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

2.12. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20}$?

2.13. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{50}$?

2.14. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2})^{100}$?

2.15. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3})^{30}$?

2.16. Второй, третий и четвертый члены разложения $(x+y)^p$ равны соответственно 240, 720, 1080. Найти x, y, p.

2.17. Используйте биномиальную формулу для приближенного вычисления:

$$1)\,1{,}002^{10};\ 2)\,0{,}997^{20};\ 3)\,1{,}004^{5};\ 4)\,0{,}9998^{10};\ 5)\,\sqrt{9{,}09};$$

$$6)\,\sqrt[3]{8{,}024};\ 7)\,\sqrt{26};\ 8)\,600^{\frac{3}{4}};\ 9)\,\sqrt[3]{999};\ 10)\,\frac{1}{\sqrt[5]{3120}}.$$

2.18. Найдите число векторов $\bar{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

2) $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, k_i-1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

3) $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $a_1 + a_2 + \dots + a_n = r$.

2.19. 1. Каково число матриц размерности $m\times n$ с элементами из множества $\{0, 1\}$?

2. Тот же вопрос при условии, что строки матрицы попарно различны.

2.20. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если: 1) все путевки различны; 2) все путевки одинаковы?

2.21. Крокодил имеет 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух с одинаковым набором зубов.

2.22. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 0, 1, 2?

2.23. Алфавит X состоит из двух символов. Сколько существует слов алфавита X, длина которых не превосходит 4?

2.24. Сколько натуральных чисел от 20 до 1000 делятся ровно на одно из чисел 7, 11, 13?

2.25. Сколькими способами r пассажиров могут разместиться в n вагонах поезда?

2.26. Шестизначный номер билета считается счастливым, если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Найдите число счастливых номеров от 000 000 до 999 999.

2.27. Используя тождество $(1 + 1)^n = 2^n$, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

2.28. Используя тождество $(1 - 1)^n = 0$, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

2.29. Дифференцируя формулу $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k$ по t, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}.$$

2.30. Дважды дифференцируя формулу $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k$ по t, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k = n(n-1) 2^{n-2}.$$

2.31. Используя формулы задач 2.27 и 2.29, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) C_n^k = (n+1) 2^n.$$

2.32. Интегрируя тождество $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k$ по t от 0 до 1, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1).$$

2.33. Используя задачу 2.32, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}.$$

2.34. Методом математической индукции докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

2.35. Сравнивая коэффициенты при t^k в левой и правой частях тождества $(1 + t)^n(1 + t)^m = (1 + t)^{n+m}$, докажите, что

$$\sum_{r=0}^{n} C_m^r C_n^{k-r} = C_{n+m}^k.$$

2.36. Полагая в задаче 2.35 $k = n = m$, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

2.37. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{((2n)!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2} = (C_{2n}^n)^2$. Делением на C_{2n}^n сведите задачу к 2.36.

2.38. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{r} \sum\limits_{r=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^r = 3^n$.

2.39. Докажите, что $\sum\limits_{r=k}^{n} (-1)^{k-r} C_n^r = \sum\limits_{r=0}^{n-k} (-1)^{n-k-r} C_n^r$.

2.40. Докажите, что $\sum\limits_{r=0}^{n-k} C_n^{k+r} C_m^r = C_{m+n}^{n-k}$.

2.41. Докажите, что $\sum\limits_{k=n}^{m} (-1)^{k-n} C_k^n C_m^k = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$

2.42. Применяя метод математической индукции по n и рекуррентное соотношение для C_n^k, докажите тождества

$$\sum_k C_n^{2k} = \sum_k C_n^{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Занятие 3

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

3.1. Найти общие решения рекуррентных соотношений:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$;
2) $a_{n+2} + 3a_n = 0$;
3) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$;
4) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$;
5) $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0$;
6) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

3.2. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0, a_0 = 10, a_1 = 16;$
2) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0, a_0 = 3, a_1 = 7, a_2 = 27;$
3) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c;$
4) $a_{n+2} - 2\cos\alpha \cdot a_{n+1} + a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = \cos\beta;$
5) $a_{n+2} - a_n = 0, a_0 = 0, a_1 = 2;$
6) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0, a_0 = 6, a_1 = 6.$

3.3. Решить рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+1} - a_n = n, a_1 = 1;$
2) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 25 \cdot 5^n, a_0 = 0, a_1 = -9;$
3) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n, a_0 = 1, a_1 = 2;$
4) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = n, a_0 = 1, a_1 = -2;$
5) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n, a_0 = 1, a_1 = 2;$
6) $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5 \cdot 2^{n+1}, a_0 = 2, a_1 = 1.$

3.4. 1. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности, члены которых связаны соотношениями

$$\begin{gathered} a_{n+1} = p_1a_n + q_1b_n, \\ b_{n+1} = p_2a_n + q_2b_n, \\ \Delta = p_1q_2 - q_1p_2 \neq 0, \end{gathered}$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 — данные числа. Найти выражения для a_n и b_n, считая, что a_1 и b_1 заданы.

2. Найти решение системы рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n, \\ b_{n+1} = -a_n + b_n, \end{cases}$$
$$a_1 = 14,\ b_1 = -6.$$

3. Найти общее решение системы рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n + 5, \\ b_{n+1} = a_n + 3. \end{cases}$$

3.5. Используя метод математической индукции, найти последовательность $\{a_n\}$ по рекуррентному соотношению и начальным условиям:

1) $a_{n+1} = (n + 1)a_n, a_0 = 1;$
2) $(n + 2)(n + 1)a_{n+2} = n^2a_n, a_0 = 0, a_1 = 1;$
3) $(n + 2)^2a_{n+2} + a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 0;$

4) $na_{n+1} + a_n = 0, a_1 = 1$;

5) $n^2a_{n+2} + (n+2)^2a_n = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$;

6) $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^{n-1},\ a_0 = 1,\ a_1 = 1$.

3.6. Найдите общие решения следующих рекуррентных соотношений:

1) $f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$;
2) $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$;
3) $f(n) = f(n-1) - f(n-2)$;
4) $f(n+2) - 7f(n+1) + 12f(n) = 0$;
5) $f(n+2) + 3f(n+1) - 10f(n) = 0$;
6) $f(n+2) + 4f(n+1) + 4f(n) = 0$;
7) $f(n+3) - 9f(n+2) + 26f(n+1) + f(n) = 0$.

3.7. Найдите общие решения следующих рекуррентных соотношений:

1) $f(n+1) - f(n) = n$;
2) $f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 4$;
3) $f(n+1) - f(n) = 3^n$;
4) $f(n+2) + 2f(n+1) - 8f(n) = 2^n$.

3.8. Найдите a_n, зная рекуррентные соотношения и начальные условия:

1) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, a_1 = 1, a_2 = -7$;
2) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0, a_1 = 2, a_2 = 4$;
3) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n, a_0 = 1, a_1 = 2$;
4) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0, a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = -29$.

3.9. 1. Найдите последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ положительных чисел, зная рекуррентное соотношение и первый член: $a_n - a_{n+1} = a_{n+2},\ \ a_0 = 1$.

2. Покажите, что существует только одна такая последовательность.

3.10. Решите рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n(n+1)}{2},\ a_1 = 1$;

2) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4, a_1 = 1, a_2 = -7$;

3) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = -24n^2 - n - 8,\ a_1 = 4, a_2 = 26, a_3 = 74$;

4) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n, a_1 = -9, a_2 = 45$;

5) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n, a_0 = 5, a_1 = 7$;

6) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n^2 - 3n + 1$.

3.11.* Докажите, что последовательность с общим членом $a_n = n^k$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} - C_k^1 a_{n+k-1} + C_k^2 a_{n+k-2} - \ldots + (-1)^k C_k^k a_n = 0.$$

В задачах 3.12–3.19 вычислите интегралы методом рекуррентных соотношений.

3.12. $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx.$ **3.13.** 1) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$

3.14. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx.$ **3.15.** $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

3.16. $\int\limits_0^1 x^m \ln^n x\,dx.$ **3.17.** $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx.$

3.18. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx.$ **3.19.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx.$

3.20. Пусть

$$x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + 2x_{n+1}), n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найдите его.

3.21. Пусть $x_0 = a$, $x_1 = b$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1} + \frac{1}{n}x_{n-2},\ n = 2, 3, \ldots;$

2) $x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)x_n + \frac{1}{2n}x_{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$

Решение. 1) Так как

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \ldots = (-1)^n \frac{x_0 - x_1}{n!},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1}) = x_0 + (x_0 - x_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} =$$
$$= x_0 + (x_0 - x_1)(e^{-1} - 1).$$

Ответ: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 + (x_0 - x_1)(e^{-1} - 1)$. ■

3.22. Методом рекуррентных соотношений найдите предел последовательности:

1) $\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \ldots, \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}, \ldots$.

2) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots, \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}, \ldots$.

3) $\sqrt{k}, \sqrt{k+\sqrt{k}}, \sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k}}}, \ldots,$

$\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k+\ldots+\sqrt{k}}}}, \ldots$ ($k \in \mathbb{N}$).

При каком условии предел последовательности будет целым числом?

4) $\sqrt{1}, \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1}}, \sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1}}}, \ldots,$

$\sqrt{\frac{1}{n+1}+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n-1}+\ldots+\sqrt{1}}}}, \ldots$.

5) Вычислите сумму

$$5 + i^4 - i^{14} + i^{24} - i^{34} + i^{44} - i^{54} + i^{64} - i^{74} + i^{84}.$$

3.23. Методом рекуррентных соотношений вычислите определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

3.24. Составьте рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет общий член последовательности

$$\lambda \cos\mu,\ 2\lambda^2\cos 2\mu,\ 3\lambda^3\cos 3\mu,\ \ldots,\ n\lambda^n\cos n\mu,\ \ldots$$

(λ, μ — данные числа) и с помощью этого рекуррентного соотношения найдите сумму

$$\lambda \cos\mu + 2\lambda^2\cos 2\mu + 3\lambda^3\cos 3\mu + \ldots + n\lambda^n\cos n\mu.$$

3.25. Докажите следующие утверждения.

1. Если $x = 1$ не является корнем многочлена $p(x) = x^2 + px + q$, то частным решением рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = \alpha n + \beta, \tag{3.1}$$

где α, β, p, q — данные числа, является последовательность $a_n^* = an + b$. Найдите a и b.

2. Если $x = 1$ — простой корень многочлена $p(x) = x^2 + px + q$, то частное решение рекуррентного соотношения (3.1) может быть найдено в виде $a_n^* = n(an + b)$. Найдите a и b.

3. Если $x = 1$ — кратный корень многочлена $p(x) = x^2 + px + q$, то частное решение рекуррентного соотношения (3.1) может быть найдено в виде $a_n^* = n^2(an + b)$. Найдите a и b.

4. В каждом из предыдущих случаев найдите общее решение соотношения (3.1).

3.26. $x_1 = 2010$, $x_2 = 2009$, $x_{n+1} = x_{n-1} - \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 2$. Найти номер N такой, что $x_N = 0$.

Занятие 4
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

При асимптотических оценках полезна *формула Стирлинга*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \tag{4.1}$$

Для более точных оценок используются неравенства

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right) < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \frac{1}{12n}\right). \tag{4.2}$$

4.1. С помощью неравенства $n \leq (i+1)(n-i) < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$, где $0 \leq i < n$, докажите, что

$$n^{n/2} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ при } n > 2.$$

4.2. С помощью неравенства $(i + 1)(2n - i) < n(n + 1)$, где $0 \leq i < n$, докажите неравенство $(2n)! < (n(n + 1))^n$.

4.3. Применяя формулу бинома Ньютона с последующей оценкой слагаемых, докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

4.4. Методом математической индукции с использованием неравенства задачи 4.3 докажите, что

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!.$$

4.5. Заметив, что $(n!)^2 \le (2n)! \cdot 2^{-n}$, с использованием неравенства задачи 4.2 докажите неравенство

$$(n!)^2 < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n, \ n > 1.$$

4.6. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \le \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

4.7. Докажите неравенство

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Для доказательства положить $a_n = \dfrac{(2n-1)!!\sqrt{3n+1}}{(2n)!!}$ и показать, что $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2} < 1.$ Далее примените метод математической индукции.

4.8. Используя неравенство $i(2n-i) < n^2$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, докажите неравенство $(2n-1)!! < n^n$, $n > 1$.

4.9. Докажите неравенство $n! > n^n \cdot e^{-n}$. Для доказательства используйте неравенство

$$e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n^n}{n!}.$$

4.10. Используя формулу Стирлинга, докажите, что при $n \to \infty$ справедливы следующие асимптотические равенства:

1) $(2n-1)!! \sim \sqrt{2}(2n)^n e^{-n}$;

2) $\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot 4^n$;

3) $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)} \sim \frac{k!}{m!} n^{m-k}$, $m, k = 0, 1, 2, \ldots$;

4) $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}$;

5) вычисляя $\int\limits_0^1 (1+t)^n\, dt$ непосредственно и по формуле бинома Ньютона, докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k \sim \frac{2^{n+1}}{n}.$$

В следующей задаче применяется неравенство

$$f(n) \le \sum_{k=n}^{m} f(k) - \int\limits_n^m f(x)\,dx \le f(m), \tag{4.3}$$

где $f(x)$ — непрерывная, монотонно возрастающая на отрезке $[n, m]$ функция.

4.11. Используя неравенство (4.3), доказать, что при $m \to \infty$ справедливы следующие соотношения:

1) $\sum_{k=1}^{m} \ln k \sim m \ln m - m + O(\ln m)$;

2) $\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{1}{n+1} m^{n+1} + O(m^n)$, $n > 1$;

3) $\sum_{k=1}^{m} \frac{\log k}{k} = \frac{1}{2} \log^2 m + c + O\left(\frac{\log m}{m}\right)$, $c = \text{const}$;

4) $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \ln \frac{m}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$;

5) $\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k \ln^2 k} = c - \frac{1}{\ln m} + O\left(\frac{2}{m \ln^2 m}\right)$, $c = \text{const}$.

Определение 4.1. С каждой последовательностью a_0, a_1, ..., a_n, ... можно связать ряд $A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$, называемый *производящей функцией* для последовательности $\{a_n\}$. В тех случаях, когда ряд $A(t)$ сходится к функции $f(t)$, функцию $f(t)$ также называют *производящей функцией* для $\{a_n\}$.

Определение 4.2. *Экспоненциальной производящей функцией для* $\{a_n\}$ называется ряд

$$E(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + \ldots + a_n \frac{t^n}{n!} + \ldots .$$

Определение 4.3. Операции *сложения и умножения производящих функций* определяются обычным образом: если $B(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n + \ldots$, то

$$\alpha A(t) + \beta B(t) = (\alpha a_0 + \beta b_0) + \\ + (\alpha a_1 + \beta b_1)t + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n)t^n + \ldots,$$

$$A(t) \cdot B(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + \ldots + \\ + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)t^n + \ldots .$$

Определение 4.4. Если $E_a(t)$, $E_b(t)$ — экспоненциальные производящие функции для последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, то *сложение и умножение на константу* определяются так же, как для обычных производящих функций, а их *произведение* определяется так:

$$E_a(t) E_b(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{t^n}{n!} + \ldots ,$$

где

$$c_n = a_0 b_n + C_n^1 a_1 b_{n-1} + \ldots + C_n^k a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0.$$

4.12. Показать, что функция $A(t)$ (соответственно $E(t)$) является производящей (экспоненциальной производящей) функцией для последовательности $\{a_n\}$, если:

1) $a_n = a^n, A(t) = (1 - at)^{-1}, E(t) = e^{at}$;

2) $a_n = n,\ A(t) = \dfrac{t}{(1-t)^2},\ E(t) = te^t$;

3) $a_n = n(n-1),\ A(t) = \dfrac{2t^2}{(1-t)^3},\ E(t) = t^2 e^t$;

4) $a_n = n^2,\ A(t) = \dfrac{t(t+1)}{(1-t)^3},\ E(t) = t(t+1)e^t$;

5) $a_n = C_m^n,\ A(t) = (1+t)^m$.

4.13. Пусть $A(t)$ и $E(t)$ — обычная и экспоненциальная производящие функции для последовательности $\{a_n\}$.

1. Используя равенство

$$n! = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx,$$

показать, что

$$A(t) = \int_0^\infty e^{-x} E(xt)\, dx. \tag{4.4}$$

2. Убедиться, что формула (4.4) справедлива для производящих функций $A(t) = \frac{1}{1-t}$, $E(t) = e^t$ последовательности

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 1.$$

4.14. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — последовательности, $A(t)$ и $B(t)$ — соответствующие производящие функции. Показать, что:

1) если $a_n = b_n - b_{n-1}$, то $A(t) = B(t)(1 - t)$;

2) если $a_n = b_{n+1} - b_n$, то $A(t) = B(t)\frac{1-t}{t} - \frac{b_0}{t}$;

3) если $a_n = b_{n+1} + b_{n+1} + \ldots$, $a_0 = B(1)$, то

$$A(t) = \frac{B(1) - B(t)}{1-t};$$

4) если $a_n = nb_n$, то $A(t) = t\frac{d}{dt}B(t)$;

5) если $a_n = n^2 b_n$, то $A(t) = t\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}B(t)\right)$;

6) если $a_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$, $a_0 = 0$, то $A(t) = \frac{B(t)t}{1-t}$.

4.15. Найдите общий член последовательности $\{a_n\}$, для которой функция $A(t)$ является производящей:

1) $A(t) = (q + pt)^m$;

2) $A(t) = (1 - t)^{-1}$;

3) $A(t) = \sqrt{1-t}$;

4) $A(t) = t^m(1 - t)^m$;

5) $A(t) = (t + t^2)^m$;

6) $A(t)=\left(1+\dfrac{t^2}{2}\right)^{-m}$;

7) $A(t) = (1 + 2t)^{-1/2}$;

8) $A(t) = \operatorname{arctg} t$; воспользоваться тем, что

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} t;$$

9) $A(t) = \arcsin t$; воспользоваться тем, что

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin t;$$

10) $A(t)=\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^{-m}$;

11) $A(t) = \ln(1 + t)$.

4.16. Найти предел последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентными соотношениями:

1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+\dfrac{b}{a_n}}{2}$, $b>0$, $a_0>0$;

2) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+\dfrac{b}{a_n^2}}{3}$, $b>0$, $a_0>0$;

3) $a_{n+1}=\dfrac{b-a_n^2}{2}$, $1>b>0$, $a_0=\dfrac{b}{2}$.

4.17. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$a_{n+m} \le a_n + a_m,\ a_1 > 0.$$

Доказать, что $a_n \le a_1 n$ при $n \ge 1$.

Применяя метод математической индукции, решите задачи 4.18–4.23.

4.18. Докажите, что $n^n > (n + 1)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.19. Докажите, что $n! \ge 2n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$.

4.20. Докажите, что $2^n \ge 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.21. Для каких натуральных n выполняется неравенство $2^n \ge n^3$?

4.22. Докажите, что $3^n > n \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.23. Докажите, что $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.24. Применяя метод математической индукции, определите (и докажите), какое из чисел больше: $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$ (10 двоек) или $3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^3}}}}$ (9 троек)?

Замечание. У данной задачи имеются и другие решения, помимо индуктивного.

4.25. Произведение положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равно единице. Докажите, что

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_n) \geq 2^n.$$

4.26. Докажите неравенство Бернулли

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

если известно лишь, что $x \geq -1$ и $n \geq 1$. (Обычно в этом неравенстве $x \geq 0$.)

В задачах 4.27–4.30 с помощью теоремы Штольца докажите асимптотические формулы.

4.27. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $n \to \infty$, $\alpha > -1$.

4.28. $\sum\limits_{k=n}^{\infty} k^\alpha \sim -\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $n \to \infty$, $\alpha < -1$.

4.29. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^\alpha} \sim \frac{\ln n}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$, $n \to \infty$, $\alpha < 1$.

4.30. $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^\alpha} \sim \frac{\ln n}{\alpha-1} n^{1-\alpha}$, $n \to \infty$, $\alpha > 1$.

В задачах 4.31–4.35 докажите асимптотические формулы.

4.31. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha k} \sim n^{\alpha n}$, $n \to \infty$, $\alpha > 0$.

4.32. $\sum\limits_{k=n}^{\infty} k^{\alpha k} \sim n^{\alpha n}$, $n \to \infty$, $\alpha < 0$.

4.33. $\sum\limits_{k=1}^{n} a^k k! \sim a^n n!$, $n \to \infty$, $a > 0$.

4.34. $\sum_{k=1}^{n}(k!)^{-\alpha k} \sim \frac{e^{\alpha}}{1-\alpha}n^{1-\alpha}$, $n \to \infty$, $\alpha < 1$.

4.35. $\sum_{k=n}^{\infty}(k!)^{-\alpha k} \sim \frac{e^{\alpha}}{\alpha-1}n^{1-\alpha}$, $n \to \infty$, $\alpha > 1$.

Указание. При решении задач 4.34 и 4.35 воспользуйтесь формулами

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!, \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

$$n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n \ \text{ при } n \geq 11. \tag{4.6}$$

Пользуясь формулой Стирлинга, найдите пределы в задачах 4.36–4.39.

4.36. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$.

4.37. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

4.38. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$.

4.39. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

4.40. Найдите производящую функцию для последовательности чисел Фибоначчи.

4.41. Пусть члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют соотношению

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0, \ a_0 = 1.$$

1. Покажите, что производящая функция $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ удовлетворяет равенству $tA^2(t) = A(t) - a_0$ или, с учетом начальных условий, равенству

$$A(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}.$$

2. Разлагая $A(t)$ в ряд по степеням t, покажите, что

$$a_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

3. Найдите последовательность $\{a_n\}$, члены которой удовлетворяют соотношению $2^{n-1}a_{n-1} = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0$, $a_0 = a_1 = 1$.

4.42. С помощью формулы Стирлинга исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$.

4.43. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Занятие 5

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

В задачах 5.1–5.9 найдите суммы рядов.

5.1. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots$.

5.2. $\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\ldots$.

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$, где m — произвольное натуральное число.

5.5. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\ldots$.

5.6. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}x^n$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$.

5.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$.

5.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!}x^n$.

5.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$.

С помощью почленного дифференцирования найдите суммы рядов в задачах 5.10, 5.11.

5.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. **5.11.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

С помощью почленного интегрирования найдите суммы рядов в задачах 5.12, 5.13.

5.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$. **5.13.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n$.

5.14. Вычислите сумму следующего ряда, используя результат задачи 3.15:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots .$$

5.15. Методом Абеля найдите суммы рядов:

$$1)\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots;\ 2)\ 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots .$$

5.16. Методом Абеля сведите вычисление суммы указанного ряда к сумме ряда задачи 5.14:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots .$$

Найдите суммы тригонометрических рядов в задачах 5.17–5.23.

5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

5.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \cdot \sin nx}{n}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

5.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

5.20. 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$.

5.21. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n-1}$.

5.22. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.

5.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$.

В задачах 5.24, 5.25 докажите равенства.

5.24. $\frac{\pi}{2}|\sin x| = 1 - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

5.25. $\frac{\pi}{2}|\cos x| = 1 - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

При решении задач 5.26–5.28 используйте формулы

$$4\sin^3\varphi = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi,$$
$$4\cos^3\varphi = 3\cos\varphi + \cos 3\varphi,$$
$$(C_{n+1}^{r+1})^{-1} = \frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{C_{n+r-1}^{r}} - \frac{1}{C_{n+r}^{r}}\right).$$

5.26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \sin^3 \frac{x}{3^n}$.

5.27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^3(3^n x)}{3^n}$.

5.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_{n+1}^{r+1}}$, $r \in \mathbb{N}$.

5.29. Постройте кривую $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = 0$.

В задачах 5.30–5.39 найдите суммы рядов.

5.30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

5.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

5.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

5.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

5.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

5.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

5.36. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

5.37. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$.

5.38. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

5.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a+d)(a+2d)\ldots(a+(n-1)d)}{d\cdot 2d\cdot 3d\cdot\ldots\cdot nd}x^n$. Для вычисления суммы продифференцируйте данный ряд и умножьте полученный ряд на $1 - x$.

5.40. С помощью формулы суммы ряда, найденной при решении задачи 5.39, вычислите сумму ряда

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots.$$

5.41.* Вычислите $\varphi(81)$, если известно, что

$$4\varphi(x)=\int\limits_0^1\varphi(\alpha x)\,d\alpha,\ \varphi(1)=243.$$

5.42. Вычислите суммы:

1) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5$;

2) $1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6$;

3) $1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7$.

5.43. Используя тождество

$$4\sum_k C_n^{4k}=(1+1)^n+(1+i)^n+(1+i^2)^n+(1+i^3)^n,$$

докажите, что $4\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^{4k}=2^n+2^{\frac{n}{2}+1}\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

5.44. Методом математической индукции, используя равенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}C_n^k=\dfrac{1}{n+1}$ и рекуррентную формулу $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$, $0 \le k \le n - 1$, докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_n^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

5.45. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, если 1) $|x|<1$; 2) $|x|>1$.

5.46. Найдите сумму ряда $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^4}+\dfrac{x^4}{1-x^8}+\ldots$, если 1) $|x|<1$; 2) $|x|>1$.

5.47. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin^4(2^n x)}{4^n}$.

5.48. Монета бросается до тех пор, пока не появятся обе ее стороны. Найдите математическое ожидание числа бросаний.

Занятие 6

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Вычислить функцию Эйлера для чисел 375, 720, 957, 988, 990.

6.2. Дано, что $\varphi(a) = 3600$ и $a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$. Найти a.

6.3. Дано, что $\varphi(a) = 120$, и $a = p \cdot q$, p, q — различные простые числа, $p - q = 2$. Найти a.

6.4. Дано, что $\varphi(a) = 11424$, и $a = p^2 \cdot q^2$, p, q — различные простые числа. Найти a.

6.5. Доказать, что сумма S чисел, взаимно простых с числом m и меньших m, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} m \cdot \varphi(m).$$

6.6. Решить уравнение $\varphi(7^x) = 705\,894$.

6.7. Докажите, что при $m \geq 3$ число $\varphi(m)$ всегда четное.

6.8. Найдите x, если

$$1)\ \varphi(x) = \frac{1}{2}x;\ 2)\ \varphi(x) = \frac{2}{3}x;\ 3)\ \varphi(x) = \frac{1}{3}x;\ 4)\ \varphi(x) = \frac{1}{4}x.$$

6.9. Сколько чисел в интервале [1, 120] не взаимно простых с 30?

6.10. Найдите количество натуральных чисел, меньших 300 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 20.

6.11. Вычислите значения функции Мёбиуса: $\mu(90)$, $\mu(77)$, $\mu(56)$, $\mu(105)$.

6.12. Составьте таблицу значений функции Мёбиуса для первых 100 натуральных чисел.

Теорема 6.1. Пусть целым положительным числам $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ отвечают любые вещественные или комплексные числа $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Тогда, обозначая символом S' сумму значений f, отвечающих значениям $\delta = 1$:

$$S' = \sum_{\delta_i = 1} f_i$$

и символом S_d — сумму значений f, отвечающих значениям δ, кратным d:

$$S_d = \sum_{\delta_i \vdots d} f_i,$$

будем иметь

$$S' = \sum_{d \mid \delta_i} \mu(d) S_d,$$

где d пробегает все целые положительные числа, делящие хотя бы одно значение δ.

6.13. Пусть $R(s) > 0$, где $R(s)$ — действительная часть числа s. Доказать, что

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

где p пробегает все простые числа.

6.14. Пусть $n \geq 1$. Применяя теорему 6.1, доказать, что

$$1 = \sum_{0<d\leq n} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right].$$

Проверьте справедливость этого утверждения при $n = 7$.

6.15. Пусть

$$M(z, z_0) = \sum_{z_0 < a \leq z} \mu(a); \quad M(x) = M(x, 0).$$

Доказать, что

1) $M(n) + M\left(\frac{n}{2}\right) + M\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = 1,\ n \geq 1;$

2) $M\left(n, \frac{n}{2}\right) + M\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{4}\right) + M\left(\frac{n}{5}, \frac{n}{6}\right) + \ldots = -1,\ n \geq 2.$

6.16. Вычислите $\tau(5600)$ и $\sigma(5600)$.

6.17. Вычислите $\tau(116\,424)$ и $\sigma(116\,424)$.

6.18. Вычислите $\varphi(5040)$, $\varphi(1\,294\,700)$.

Теорема 6.2. Показатель, с которым простое число p входит в $n!$, равен

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots .$$

С помощью теоремы 6.2 решите задачи 6.19, 6.20.

6.19. Найдите показатель, с которым 5 входит в 5258!.

6.20. Найдите каноническое разложение числа 125!.

6.21. 1. Пусть в интервале $Q \le x \le R$ функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна. Докажите, что сумма

$$\sum_{Q<x\le R} [f(x)],\ x \in \mathbb{N}$$

выражает число целых точек (точек с целыми координатами) плоской области $Q < x \le R$, $0 < y \le f(x)$.

2. Пусть P и Q — положительные нечетные взаимно простые числа. Докажите, что

$$\sum_{0<x<\frac{Q}{2}} \left[\frac{P}{Q}x\right] + \sum_{0<y<\frac{P}{2}} \left[\frac{Q}{P}y\right] = \\ = \frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2},\ x, y \in \mathbb{N}.$$

3. Пусть $r > 0$ и T — число целых точек области $x^2 + y^2 < r^2$. Докажите, что

$$T = 1 + 4[r] + 8 \sum_{0<x\le\frac{r}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right] - 4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

4. Пусть $n > 0$ и T — число целых точек области $x > 0$, $y > 0$, $xy \le n$. Докажите, что

$$T = 2 \sum_{0<x\le\sqrt{n}} \left[\frac{n}{x}\right] - \left[\sqrt{n}\right]^2.$$

5. Рассмотрим многоугольник, вершины которого — целые точки и контур которого сам себя не пересекает и не касается. Пусть S — площадь многоугольника и $T = \sum \delta - 1$, где суммирование распространяется на все целые точки, лежащие внутри многоугольника и на его контуре, причем $\delta = 1$ для внутренних точек и $\delta = 0{,}5$ для точек контура. Докажите, что $T = S$.

6.22. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и T — число целых точек области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$. Рассуждая так же, как при решении 6.21, п. 3, докажите, что

$$T = 1 + 2([a]+[b]) +$$
$$+4\sum_{0<x\le\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right]+\left[\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right]-4\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\right]\cdot\left[\frac{b}{\sqrt{2}}\right].$$

6.23. Докажите, что для любого вещественного a и любого натурального n выполняется равенство

$$\left[\frac{[a]}{n}\right]=\left[\frac{a}{n}\right].$$

6.24. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные числа. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$[a_1 + a_2 + \ldots + a_n] \ge [a_1] + [a_2] + \ldots + [a_n].$$

6.25. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \ne 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$, x пробегает полную систему вычетов по модулю m, ξ пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Докажите, что

$$1)\ \sum_x\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\frac{1}{2}(m-1);\ \ 2)\ \sum_\xi\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{1}{2}\varphi(m).$$

6.26. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $a \in \mathbb{Z}$, x пробегает полную систему вычетов по модулю m. Докажите, что

$$\sum_x e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\begin{cases} m, & \text{если } a \text{ кратно } m;\\ 0, & \text{если } a \text{ не кратно } m.\end{cases}$$

6.27. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \ne 1$, ξ пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Докажите, что

$$\mu(m)=\sum_\xi e^{2\pi i\frac{\xi}{m}}.$$

6.28. Докажите, что

$$\varphi(a)=\sum_{n=0}^{a-1}\prod_{p|a}\left(1-\frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{nx}{p}}\right).$$

6.29. Проверьте следующие формулы из лекции 6:

1) (2.2) при $n = 30$;
2) (2.5) при $n = 90$;
3) (2.8) при $n = 75$;
4) (2.10) при $n = 52$.

Занятие 7

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

7.1. Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя и только двумя другими. Возможна ли такая компания?

7.2. Нарисуйте полный граф с n вершинами, если: 1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 5$.

7.3. Скольким ребрам принадлежит вершина в полном графе с n вершинами, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = k$?

7.4. Существует ли полный граф с семью ребрами?

7.5. Докажите, что в полном графе с n вершинами $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

7.6. Сколько ребер следует добавить к графу, изображенному на рис. 34, чтобы он стал полным?

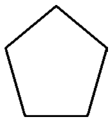

Рис. 34
Граф к задаче 7.6

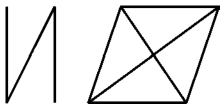

Рис. 35
Граф к задаче 7.7

7.7. Нарисуйте граф $\overline{\Gamma}$, являющийся дополнением графа Γ, изображенного на рис. 35.

7.8. У графа Γ четыре вершины, A — одна из его вершин, $\overline{\Gamma}$ — дополнение графа Γ. Скольким ребрам принадлежит вершина A в графе $\overline{\Gamma}$, если в графе Γ она принадлежит: 1) одному ребру; 2) трем ребрам; 3) не принадлежит ни одному ребру?

7.9. Участники конференции, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Используя понятие степени вершины графа, докажите, что:

1) всего было передано четное число конвертов;

2) число участников, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четное.

Решение задачи 7.9 является доказательством следующих двух теорем.

Теорема 7.1. Сумма степеней всех вершин графа — число четное, равное удвоенному числу его ребер:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg A_i = 2p.$$

Теорема 7.2. Число нечетных вершин любого графа четно.

7.10. Найдется ли граф с пятью вершинами, у которого одна вершина изолированная, а другая — степени 4?

7.11. Найдется ли граф с пятью вершинами, степени которых все различны между собой, т. е. равны 0, 1, 2, 3, 4?

7.12. Нарисуйте граф с пятью вершинами, у которого ровно две вершины имеют одинаковую степень.

7.13. Сколько вершин с одинаковыми степенями имеет дополнение графа Г, если граф Г имеет ровно две вершины с одинаковыми степенями?

7.14. Если в графе с пятью вершинами ровно две вершины имеют одинаковую степень, то могут ли они быть обе изолированными или обе иметь степень 4?

7.15. Девять шахматистов проводят турнир в один круг — каждый из участников должен сыграть с каждым из остальных участников по одному разу. Используя понятие степени вершины, методом от противного покажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.

Решение. На языке теории графов нужно доказать, что во всяком графе с девятью вершинами всегда найдутся хотя бы две вершины одинаковой степени. Каждая вершина графа может иметь степень 0, 1, 2, ..., 8. Предположим, что существует граф, все вершины которого имеют разную степень, т. е. каждое из чисел последовательности 0, 1, 2, ..., 8 является степенью одной и только одной из его вершин. Но если в графе есть вершина A со степенью 0, то в нем не найдется вершины B со степенью 8. Противоречие. Следовательно, в графе найдутся хотя бы две вершины, степени которых равны между собой. ■

Идеи решения этой задачи применяются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 7.3. Во всяком графе с n вершинами, $n \geq 2$, всегда найдется по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями.

7.16. Девять шахматистов проводят турнир в один круг. К некоторому моменту выясняется, что в точности двое сыграли одинаковое число партий. Докажите, что тогда либо в точности один участник еще не сыграл ни одной партии, либо в точности один сыграл все партии.

Решение. Пусть вершины графа — игроки, а каждое ребро означает, что соответствующие игроки уже сыграли между собой партию. Из условия известно, что ровно две вершины имеют одинаковые степени. Требуется доказать, что в таком графе всегда найдется либо только одна изолированная вершина, либо только одна вершина степени 8. В общем случае у графа с девятью вершинами степень каждой вершины может принимать только одно из девяти значений: 0, 1, 2, ..., 8. Но у данного графа степени вершин принимают только 8 различных значений, так как ровно две вершины имеют одинаковую степень. Следовательно, обязательно либо 0, либо 8 будет степенью одной из вершин.

Для окончания доказательства покажите, что в этом графе не может быть двух вершин степени 0 или двух вершин степени 8. ■

Используя идеи решения задачи 7.16, докажите следующую теорему.

Теорема 7.4. Если в графе с n вершинами, $n > 2$, ровно две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n - 1$.

7.17. В бюро по туризму составляются маршруты путешествий для автотуристов, которые должны проехать из пункта S в пункт R (рис. 36) и по пути осмотреть все местные достопримечательности. Пункты и все шоссейные дороги, соединяющие их между собой, представлены схемой. Составьте такой маршрут, чтобы туристы в каждый из указанных пунктов попадали не более одного раза.

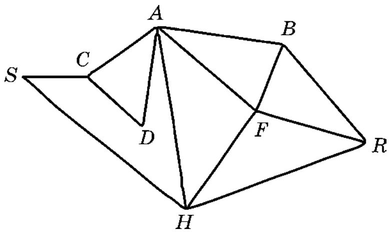

Рис. 36
Граф к задаче 7.17

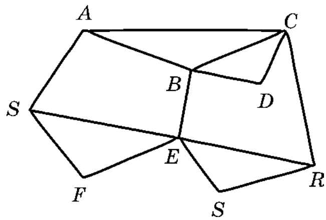

Рис. 37
Граф к задаче 7.18

Существует ли хотя бы один такой маршрут? Сколько их может быть при данной схеме дорог? Выпишите последовательность пунктов для каждого найденного маршрута.

7.18. Условия те же, что в задаче 7.17, но схема задается рис. 37.

7.19. Имеется три листа бумаги. Некоторые из них разрезаются на три части, несколько новых кусков — на три более мелкие части и т. д. Сколько всего получится листков, если всего было разрезано k листов?

7.20. Имеется m листов бумаги. Некоторые из них разрезаются на пять частей, несколько новых кусков — на пять более мелких частей и т. д. Сколько всего получится листков, если всего было разрезано k листов?

7.21. Имеется m листов бумаги. Некоторые из них разрезаются на n частей, несколько новых кусков — на n более мелких частей и т. д. Сколько всего получится листков, если всего было разрезано k листов?

7.22. Имеется 5 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 частей. Некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 5 частей и т. д. Проделав так несколько раз, подсчитали число получившихся кусков. Докажите, что в результате не мог получиться 71 лист.

7.23. Составьте множество двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3. Сколько таких чисел?

7.24. Составьте множество трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 2 и 5. Сколько таких чисел?

7.25. Составьте множество четырехзначных чисел из цифр 7 и 9. Сколько таких чисел?

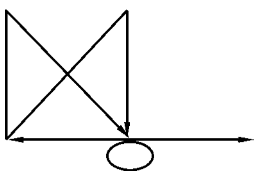

Рис. 38
Граф к задаче 7.29

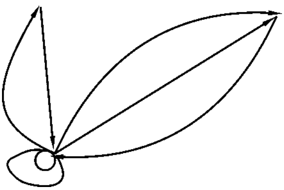

Рис. 39
Граф к задаче 7.30

7.26. Семеро школьников, разъезжаясь на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли оказаться, что каждый из них получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?

7.27. В футбольном турнире участвует 29 команд. Докажите, что в любой момент найдется команда, сыгравшая четное число матчей (быть может, ни одного).

7.28. Существует ли граф с шестью вершинами, степени которых равны 2, 3, 3, 4, 4, 4?

7.29. Представьте граф (рис. 38) в аналитической и матричной формах списком дуг и структурой смежности.

7.30. Составьте матрицу инцидентности для мультиграфа, изображенного на рис. 39.

7.31. Найдите все неизоморфные подграфы и части графа K_3. Граф K_3 состоит из трех вершин, соединенных ребрами.

7.32. Представьте в геометрической и матричной формах графы $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$ (рис. 40).

7.33. Для графов G_1 и G_2 из предыдущей задачи найдите $G_1 \times G_2$, $G_1[G_2]$ и $G_2[G_1]$.

7.34. С помощью матрицы смежности графа на рис. 41 найдите его матрицы достижимости, контрадостижимости и сильных компонент.

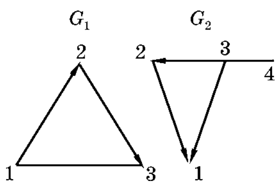

Рис. 40
Графы к задаче 7.32

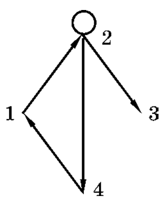

Рис. 41
Графы к задаче 7.34

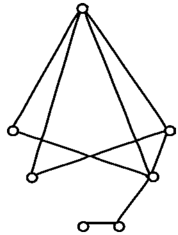

Рис. 42
Графы к задаче 7.35

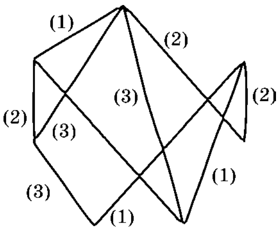

Рис. 43
Граф к задаче 7.36

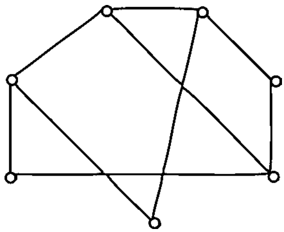

Рис. 44
Граф к задаче 7.37

7.35. Проверьте на эйлеровость граф, изображенный на рис. 42.

7.36. Найдите остов минимального веса взвешенного графа на рис. 43.

7.37. Найдите хроматическое число графа на рис. 44.

Занятие 8

ИЗОМОРФНЫЕ ГРАФЫ. СТЕПЕНИ ВЕРШИН ГРАФА

ПУТЬ В ГРАФЕ. ЦИКЛ

Как пройти по ребрам на рис. 45 из A_1? Вот три последовательности ребер, по которым можно попасть из A_1 в A_5:

1) $(A_1, A_4), (A_4, A_5)$;

2) $(A_1, A_2), (A_2, A_4), (A_4, A_5)$;

3) $(A_1, A_4), (A_4, A_2), (A_2, A_1), (A_1, A_4), (A_4, A_5)$.

В одних случаях ребра повторяются, в других — не повторяются. Можно указать маршрут от A_1 до A_5, содержащий все вершины графа. Таков, например, маршрут

$$(A_1, A_2), (A_2, A_4), (A_4, A_3), (A_3, A_1), (A_1, A_4), (A_4, A_5).$$

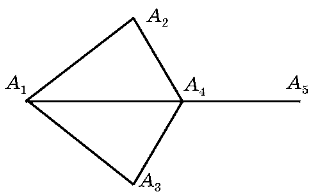

Рис. 45
Маршруты, пути и циклы в графе

Однако не всякую последовательность ребер, ведущую из A_1 в A_5, называют путем из A_1 в A_5.

Определение 8.1. *Путем от* A_1 *до* A_n в графе называется такая последовательность ребер, ведущая от A_1 к A_n, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза. Путь в графе называется *простым*, если не проходит ни через одну вершину графа более одного раза.

Из определения следует, что последовательность 3 из перечисленных выше (см. рис. 45) не является путем. Заметим, что согласно определению, вершины пути могут повторяться, т. е. путь может быть самопересекающимся.

8.1. Найдите два пути, связывающие вершины A_1 и A_3 в графе, изображенном на рис. 46.

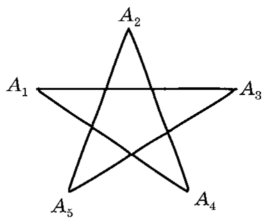

Рис. 46
Граф к задаче 8.1

8.2. Для графа, изображенного на рис. 47, назовите один из путей от A_1 до A_6. Существует ли путь от A_1 до A_6, проходящий через все вершины графа?

8.3. Найдется ли путь в графе от A_1 до A_8, содержащий все вершины графа на рис. 48?

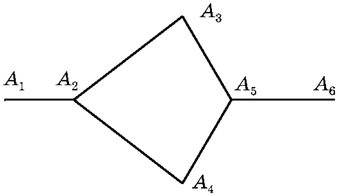

Рис. 47
Граф к задаче 8.2

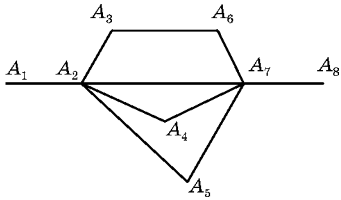

Рис. 48
Граф к задаче 8.3

8.4. Существует ли простой путь от A_1 до A_5, проходящий через все вершины графа на рис. 46?

Определение 8.2. *Циклом* называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины. *Простым циклом* в графе называется цикл, не проходящий ни через одну вершину графа более одного раза.

8.5. Найдите в графе на рис. 49 циклы, содержащие: 1) 4 ребра; 2) 6 ребер; 3) 5 ребер; 4) 10 ребер. Какие из этих циклов простые?

8.6. Изобразите простой цикл с шестью вершинами и подсчитайте, сколько у него ребер. Из скольких ребер состоит простой цикл, если у него: 1) 10 вершин; 2) 15 вершин?

8.7. Каково наименьшее число ребер в простом цикле?

8.8. Сколько ребер в простом цикле с b ($b \geq 3$) вершинами?

8.9. Сколько ребер в простом пути с b вершинами?

Определение 8.3. *Длиной пути* называется число ребер этого пути. *Длиной цикла* называется число ребер этого цикла.

8.10. От вершины A_1 до вершины A_6 графа на рис. 50 можно пройти четырьмя путями; один из них — длины 1, второй — длины 2 и два пути длиной 6. Назовите эти пути.

Теорема 8.1. Если в графе все простые циклы четной длины, то он не имеет ни одного цикла нечетной длины, т. е. все циклы имеют четную длину.

Доказательство. Для графа, являющегося простым циклом, утверждение теоремы очевидно. Допустим, что у

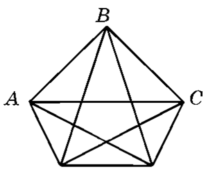

Рис. 49
Граф к задаче 8.5

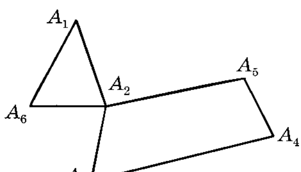

Рис. 50
Граф к задаче 8.10

графа, все простые циклы которого четной длины, найдется цикл нечетной длины. Во всяком непростом цикле существует вершина, через которую цикл проходит более одного раза. В такой вершине цикл разобьется на два, причем один из них будет иметь нечетную длину, а другой — четную. Будем продолжать разбиение нечетного цикла до тех пор, пока не дойдем до простых циклов. Хотя бы один из них должен иметь нечетную длину. Но существование такого цикла противоречит условию теоремы. Следовательно, принятое предположение неверно. ■

СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

8.11. Может ли так случиться, что в одной компании из 6 человек каждый знаком с двумя и только двумя другими?

Решение. Участников этой компании изобразим вершинами графа, а отношение знакомства между двумя участниками — ребром. Изобразим графы, которые могут соответствовать такой компании (рис. 51). ■

Итак, ситуация, рассмотренная в задаче, вполне возможна, но второй из случаев, представленных на рис. 51, соответствует не одной, а двум компаниям, участники одной из них не знакомы с участниками другой.

Определение 8.4. Две вершины A и B графа называются *связными*, если в графе существует путь с концами в A и B. Две вершины графа называются *несвязными*, если в графе не существует ни одного пути, связывающего их.

Определение 8.5. Граф называется *связным*, если каждые две его вершины связные. Граф называется *несвязным*, если хотя бы две его вершины несвязные.

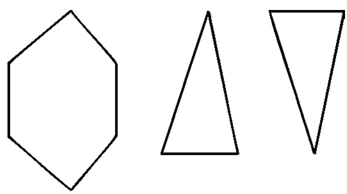

Рис. 51
Графы к задаче 8.11

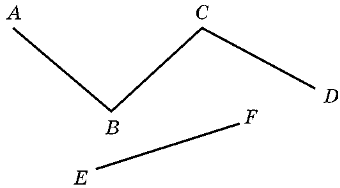

Рис. 52
Граф к задаче 8.13

8.12. Нарисуйте несвязный граф с пятью вершинами.

8.13. Дорисуйте граф, изображенный на рис. 52, так, чтобы он оказался связным.

8.14. Назовите пути наименьшей и наибольшей длины от вершины A_1 до вершин A_2 и A_6 в графе на рис. 47.

Теорема 8.2. Связный граф представляет собой простой цикл тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет степень 2.

Доказательство.

Необходимость. Пусть связный граф представляет собой простой цикл. Тогда этот граф есть замкнутый простой путь, т. е. из каждой вершины графа можно попасть в любую другую, не проходя ни через какую вершину более одного раза. Степень каждой вершины такого графа равна двум.

Покажем, что в простом цикле не может быть вершины, степень которой не равна двум. Если какая-то вершина имеет степень меньше двух, то она не принадлежит никакому простому циклу.

Если какая-то вершина имеет степень больше двух, то никакой простой цикл не может содержать все ребра, которым принадлежит эта вершина. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в связном графе степень каждой вершины равна двум. Покажем, что этот граф — простой цикл. Из каждой вершины данного графа в любую другую ведет путь. Начнем путь из какой-нибудь вершины A и пройдем по одному из двух ребер, которым принадлежит эта вершина. Попав во вторую вершину, выйдем из нее по второму ребру и т. д. Все ребра графа будут пройдены, и мы вернемся в исходную вершину A. Путь замыкается. Достаточность доказана. ■

ОПЕРАЦИЯ УДАЛЕНИЯ РЕБРА. МОСТ

Определение 8.6. При *удалении ребра* (A, B) графа Г получается граф с теми же вершинами, что и в графе Г, и всеми ребрами, кроме ребра (A, B).

При удалении ребра из связного графа может получиться граф как связный, так и несвязный. Приведите примеры.

Определение 8.7. Ребро (A, B) графа Г называется *мостом*, если в графе, полученном после удаления из Г данного ребра, вершины A и B оказываются несвязными.

8.15. Выделите в графе красным цветом ребра (рис. 53), являющиеся мостами.

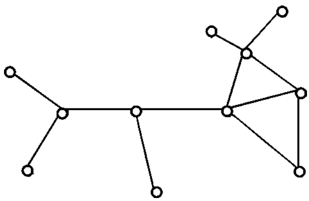

Рис. 53
Граф к задаче 8.15

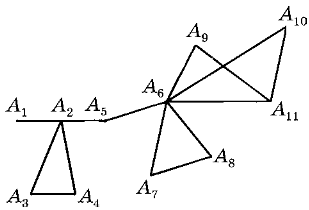

Рис. 54
Граф к задаче 8.16

Следующие теоремы являются признаками моста.

Теорема 8.3. Ребро (A, B) является мостом в том и только в том случае, когда (A, B) — *единственный путь, соединяющий вершины* A и B.

Теорема 8.4. Ребро (A, B) является мостом в том и только в том случае, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

8.16. На рис. 54 изображен граф Г.

1. Найдите путь в Г от A_1 до A_{11}, содержащий все вершины графа Г.

2. Найдите маршрут обхода всех вершин графа Г от A_1 до A_{11}, не являющийся путем.

3. Существует ли в графе Г простой путь от A_1 до A_{11}, проходящий через все вершины графа Г?

4. Сколько граф Г содержит: а) циклов; б) простых циклов; в) мостов?

8.17. На рис. 55 изображен граф Г.

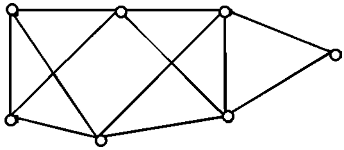

Рис. 55
Граф к задачам 8.17, 8.25

1. Найдите пути, связывающие вершины 1 и 3.
2. Является ли граф Г связным?
3. Найдутся ли в графе Г циклы из трех, четырех, пяти и шести ребер?
4. Имеются ли в графе Г простые циклы? Если да, то из скольких ребер они состоят? Укажите их.

8.18. Можно ли из полного графа с 17 вершинами удалить некоторые ребра так, чтобы степень каждой вершины равнялась пяти?

ДЕРЕВЬЯ. ЛЕС

8.19. Нарисуйте граф с семью вершинами и шестью ребрами, не имеющий ни одного цикла.

8.20. Нарисуйте связный граф с семью вершинами и шестью ребрами.

8.21. Нарисуйте граф с семью вершинами, в котором для любых двух вершин существует один и только один связывающий их путь.

8.22. Постройте связный граф с семью вершинами, каждое ребро которого — мост.

Определение 8.8. *Деревом* называется всякий связный граф, не имеющий циклов. Считается, что граф, состоящий из одной изолированной вершины, тоже является деревом.

Для каждой пары вершин дерева существует единственный соединяющий их путь.

Определение 8.9. Вершина дерева, степень которой равна единице, называется *висячей вершиной*.

Определение 8.10. *Лесом* называется несвязный граф, представляющий объединение деревьев.

Теорема 8.5. Дерево с b вершинами имеет $b - 1$ ребро.

8.23. Какое максимальное число висячих вершин может иметь дерево, обладающее 9 вершинами? Какое минимальное число вершин оно может иметь? Сделайте рисунки таких деревьев.

8.24. Докажите, что лес, состоящий из k деревьев и содержащий b вершин, имеет $b - k$ ребер.

8.25. Из графа Г на рис. 55 удалите часть ребер так, чтобы новый граф был деревом, содержащим все вершины графа Г.

8.26. Сколько ребер надо удалить из связного графа, имеющего p ребер и b вершин, чтобы получить дерево, содержащее все вершины этого графа?

8.27. Приведите пример графа, из которого нельзя выделить дерево, содержащее все вершины графа.

8.28. Проводится эксперимент, при котором морскую свинку пускают в лабиринт (рис. 56). Сколькими способами она может попасть к пище, если она ни в один тупик не заходит более одного раза, причем, попав в тупик, возвращается на перекресток, с которого свернула в этот тупик. Нарисуйте дерево всевозможных маршрутов морской свинки к пище. Какова длина самого короткого маршрута к пище? Самого длинного?

8.29. Задан граф, изображенный на рис. 57. Какое наибольшее число ребер можно удалить, чтобы граф остался связным?

Пример 8.1. Кубок по настольному теннису разыгрывается по олимпийской системе. Встречи проводятся без ничьих. К очередному туру допускается только победив-

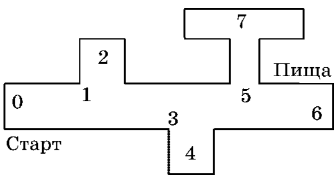

Рис. 56
Граф к задаче 8.28

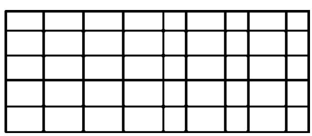

Рис. 57
Граф к задаче 8.29

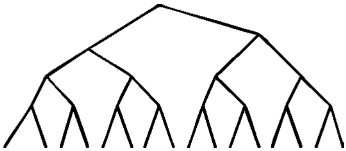

Рис. 58
Граф к примеру 8.1

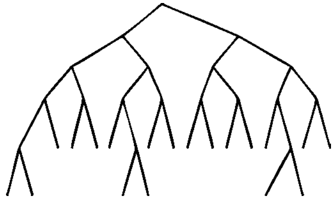

Рис. 59
Граф к задаче 8.30

шая в предыдущем туре команда. Проигравшие выбывают из игры. Для завоевания кубка команда должна победить во всех турах.

На участие в розыгрыше кубка поданы заявки от 16 команд. Схема проведения игр изображается графом на рис. 58. Какую информацию можно получить с помощью этого дерева? Непосредственно с него считывается:

1) число всех участников розыгрыша кубка;

2) число этапов проведения розыгрыша кубка;

3) число команд, участвующих в $\frac{1}{8}$ финала, в $\frac{1}{4}$, в $\frac{1}{2}$ финала;

4) число матчей, которые придется сыграть командам для выявления обладателя кубка.

8.30. Если в розыгрыше кубка по олимпийской системе участвует 19 команд, то схема проведения розыгрыша может быть такой, как на рис. 59. Шести командам, выбранным по жеребьевке, придется провести дополнительные встречи. Сколько матчей необходимо провести для выявления победителя?

8.31. Сколько матчей необходимо провести для выявления обладателя кубка среди 147 команд?

8.32. Показать, что для произвольного псевдографа $G = (V, X)$ справедливо равенство

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|X|.$$

Замечание. Это первая теорема теории графов, принадлежащая Л. Эйлеру и опубликованная в 1736 г.

8.33. Обозначим через $n_i(G)$ число вершин степени i в графе G. Построить все неизоморфные графы без петель и кратных ребер, у которых:

1) $n_2(G) = 1$, $n_3(G) = n_4(G) = 2$, $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$;

2) $n_2(G) = 3$, $n_3(G) = 2$, $n_4(G) = 1$, $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

8.34. Изобразить все попарно неизоморфные 4-вершинные графы без петель и кратных ребер.

8.35. Изобразить все попарно неизоморфные несвязные 6-вершинные графы без петель и кратных ребер, состоящие: 1) из 4 компонент; 2) из 3 компонент; 3) из одной компоненты и имеющие 7 ребер и 2 висячие вершины.

8.36. Сколько существует попарно неизоморфных 6-вершинных графов без петель и кратных ребер со следующим набором степеней вершин: (2, 2, 3, 3, 3, 5)?

8.37. Сколько существует попарно неизоморфных кубических графов без петель и кратных ребер с шестью вершинами? Есть ли среди них двудольные графы?

8.38. Существует ли 6-вершинный граф без петель и кратных ребер со следующим набором степеней вершин: (2, 2, 2, 4, 5, 5)?

8.39. Выяснить, какие наборы степеней вершин могут быть у 6-вершинных связных графов без петель и кратных ребер, имеющих 7 ребер и содержащих вершину степени 3. Для каждого допустимого набора степеней вершин построить пример соответствующего графа.

8.40. Показать, что в любом графе без петель и кратных ребер, содержащем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

8.41. Доказать, что для всякого $n \geq 3$ существует n-вершинный связный граф без петель и кратных ребер, содержащий $n - 1$ вершину с неравными друг другу степенями.

8.42. Среди пар графов, изображенных на рис. 60, указать пары изоморфных и пары неизоморфных графов. Ответ обосновать.

8.43. Изоморфны ли графы в парах, изображенных на рис. 61?

Некоторые причины неизоморфности графов: 1) разное число вершин; 2) разное число ребер; 3) разное число

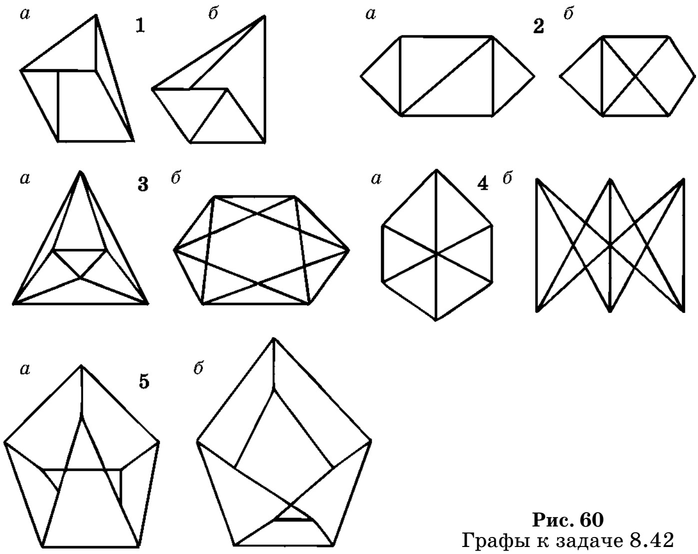

Рис. 60
Графы к задаче 8.42

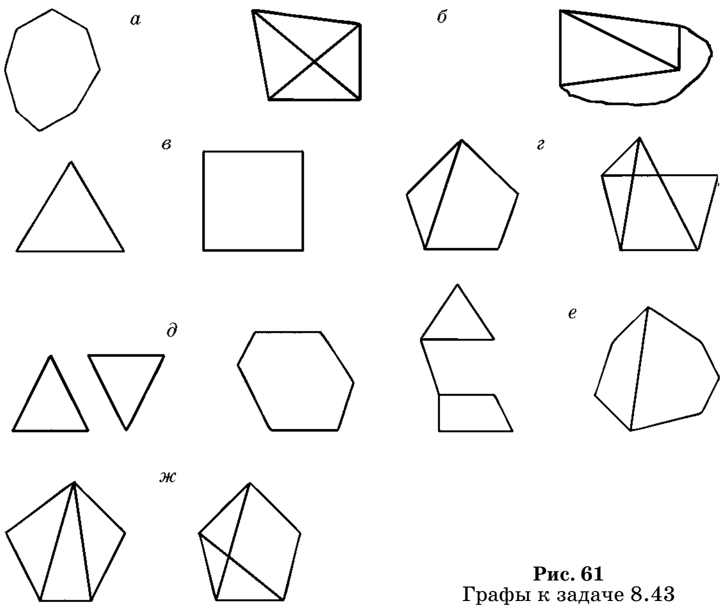

Рис. 61
Графы к задаче 8.43

компонент связности; 4) в одном графе есть вершина, из которой выходит k ребер, а во втором такой вершины нет; 5) в одном графе есть ребро, после удаления которого граф распадается на две компоненты связности, а во втором такого ребра нет; 6) в одном графе есть цикл, а в другом нет.

8.44. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны (4, 4, 4, 4, 2).

8.45. Методом математической индукции докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $(1, 1, 2, 2, \ldots, n, n)$.

8.46. Верно ли, что два графа изоморфны, если: 1) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9; 2) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3; 3) они связны, без циклов и содержат по 6 ребер?

8.47. В связном графе степени четырех вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

8.48. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены простым путем, является деревом.

8.49. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.

8.50. Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (висячая).

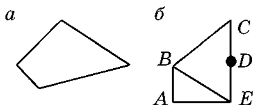

Рис. 62
Графы к задаче 8.52

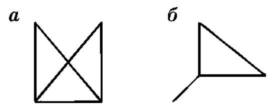

Рис. 63
Графы к задаче 8.52

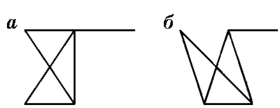

Рис. 64
Графы к задаче 8.52

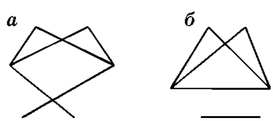

Рис. 65
Графы к задаче 8.52

Теорема 8.6. Граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин на единицу больше числа ребер.

8.51.* Волейбольная сетка имеет форму прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

8.52. Объясните, почему не являются изображениями одного и того же графа рисунки: 1) 62*а* и 62*б*; 2) 63*а* и 63*б*; 3) 64*а* и 64*б*; 4) 65*а* и 65*б*.

Занятие 9

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Определение 9.1. Ребро графа называется *ориентированным*, если одну вершину считают началом ребра, а другую — концом.

Определение 9.2. Граф, все ребра которого ориентированы, называется *ориентированным графом*.

Определение 9.3. *Источником* называется вершина, степень выхода которой положительна, а степень входа равна нулю. *Стоком* называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна нулю.

Определение 9.4. *Путем в ориентированном графе* от вершины A_1 до вершины A_n называется последовательность ориентированных ребер (A_1, A_2), (A_2, A_3), ..., (A_{n-1}, A_n), такая что конец каждого предыдущего ребра совпадает с началом следующего и ни одно ребро не встречается более одного раза.

Определение 9.5. *Простым путем* в ориентированном графе называется путь, в котором ни одна из вершин не содержится более одного раза.

Определение 9.6. *Ориентированным циклом* называется замкнутый путь в ориентированном графе.

Определение 9.7. *Расстоянием* $S(A, B)$ от вершины A до вершины B в ориентированном графе называется наикратчайший путь от A до B.

9.1. В графе на рис. 66: 1) определите степень входа и степень выхода каждой вершины; 2) найдите источник,

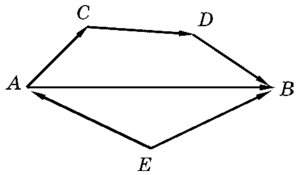

Рис. 66
Граф к задаче 9.1

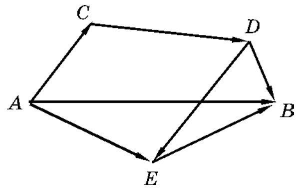

Рис. 67
Граф к задаче 9.2

сток; 3) определите число путей от E до C; 4) определите расстояние от E до C; д) назовите вершину, которая недостижима ни из одной вершины графа.

9.2. Подсчитайте, сколько путей в графе Г от A до B на рис. 67. Определите расстояние от A до B, от C до A, от A до C.

9.3. Нарисуйте граф Г с пятью вершинами, который: 1) имеет два стока и один источник; 2) не имеет ни стока, ни источника.

9.4. Докажите, что в ориентированном графе с n вершинами $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ и p ребрами:

1) $d^+(A_1) + d^+(A_2) + \ldots + d^+(A_n) = p$;

2) $d^+(A_1) + d^+(A_2) + \ldots + d^+(A_n) =$
$= d^-(A_1) + d^-(A_2) + \ldots + d^-(A_n)$.

9.5. Докажите, что если в ориентированном графе вершина B достижима из A, а вершина C достижима из B, то

$$S(A, C) \le S(A, B) + S(B, C).$$

Определение 9.8. *Полным ориентированным графом* называется граф, каждая пара вершин которого соединена в точности одним ориентированным ребром.

9.6. Почему граф на рис. 67 не является полным ориентированным графом?

9.7. Нарисуйте полный ориентированный граф с шестью вершинами.

9.8. Круговой бескомпромиссный турнир (каждая команда играет с каждой по одному разу без ничьих) проводится среди n команд. Сколько команд могут пройти: 1) без единого поражения; 2) без единой победы?

9.9. Докажите, что в полном ориентированном графе может существовать самое большее один источник.

9.10. Докажите, что в полном ориентированном графе может существовать самое большее один сток.

9.11. Построить все попарно неизоморфные орграфы без петель и кратных дуг, содержащие: 1) 3 вершины и 3 дуги; 2) 3 вершины и 4 дуги; 3) 4 вершины и 3 дуги.

9.12. Изобразить все попарно неизоморфные ориентированные псевдографы, содержащие: 1) 2 вершины и 2 дуги; 2) 2 вершины и 3 дуги; 3) 3 вершины и 2 дуги.

Теорема 9.1. Если в полном ориентированном графе с n вершинами хотя бы две вершины имеют одинаковые степени выхода, то в этом графе найдутся три такие вершины, что ребра, соединяющие их, образуют ориентированный цикл.

Пример 9.1. Турнир по волейболу проводится между n командами. Докажите, что если какие-нибудь две команды одержали в турнире одинаковое число побед, то найдутся среди участников три команды 1, 2, 3 такие, что 1 выиграла у 2, 2 выиграла у 3, 3 выиграла у 1.

Теорема 9.2. Всякий полный ориентированный граф с n вершинами имеет простой ориентированный путь, проходящий через все вершины графа.

Пример 9.2. Турнир между шахматистами закончился без ничьих. Можно ли пронумеровать всех участников так, чтобы оказалось, что каждый выиграл у шахматиста, имеющего номер на единицу больше?

В примерах 9.1, 9.2 слово «турнир» означает, что соревнования круговые, т. е. каждый участник играет с каждым ровно один раз.

Определение 9.9. Ориентированный граф называется *направленным*, если он не имеет симметричных пар ориентированных ребер, т. е. он не может содержать одновременно дугу (u, v) и противоположно направленную дугу (v, u).

Определение 9.10. Ориентированный псевдограф называется *сильно связным* или *сильным*, если любая его вершина достижима из любой другой вершины.

Ориентированный псевдограф называется *односторонне связным* или *односторонним*, если для любых двух различных его вершин по крайней мере одна вершина достижима из другой.

Ориентированный псевдограф $G = (V, X)$ называется *слабо связным* или *слабым*, если ассоциированный с ним псевдограф (V, X^0) является связным.

9.13. Построить все попарно неизоморфные направленные графы, имеющие: 1) 3 вершины и хотя бы одну дугу; 2) 4 вершины и 4 дуги; 3) 5 вершин и 3 дуги. Сколько среди них сильно связных, односторонне связных и слабо связных?

9.14. Доказать, что если полустепень исхода каждой вершины ориентированного псевдографа положительна, то в нем существует ориентированный цикл. (Петля считается ориентированным циклом длины 1.)

9.15. 1. Доказать, что в n-вершинном, $n \geq 3$, ориентированном сильно связном орграфе (без петель и кратных дуг) число m его дуг удовлетворяет неравенствам $n \leq m \leq n(n-1)$.

2. Доказать, что в n-вершинном, $n \geq 2$, ориентированном слабо связном орграфе (без петель и кратных дуг) число m его дуг удовлетворяет неравенствам $n - 1 \leq m \leq (n-1)^2$.

9.16. Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озер, соединенных между собой реками. Из каждого озера вытекают 3 реки и в каждое озеро впадают 4 реки. Докажите, что он ошибается.

9.17. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города, в том числе и столица, соединены дорогами. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

9.18. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

9.19. Докажите, что на ребрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из каждой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

9.20. В связном графе число всех вершин четно. Докажите, что на ребрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой; 2) для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны.

Задачи 9.21–9.24 можно решить методом математической индукции.

9.21. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

9.22. Несколько команд сыграли между собой круговой турнир по волейболу. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо существует команда C, которая выиграла у B и проиграла A. Докажите, что: 1) есть команда, которая сильнее всех; 2) команда, выигравшая турнир, сильнее всех.

9.23. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

9.24. 20 команд сыграли круговой турнир по волейболу. Докажите, что команды можно занумеровать числами от 1 до 20 так, что 1-я команда выиграла у 2-й, 2-я — у 3-й, ..., 19-я — у 20-й.

9.25. Какие-то две команды набрали в круговом турнире по волейболу одинаковое число очков. Докажите, что найдутся команды A, B, C такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A.

Занятие 10

ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

Определение 10.1. Граф называется *плоским* (или *планарным*), если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели других общих точек, кроме их общей вершины.

Рисунок графа, на котором выполняются условия определения 10.1, называется *плоским представлением графа*.

Примером неплоского графа служит полный граф с пятью вершинами.

10.1. Докажите, что графы, представленные на рис. 68, плоские.

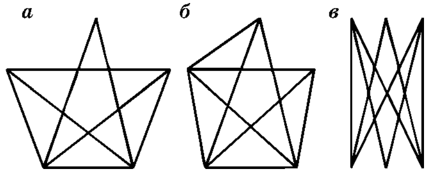

Рис. 68
Графы к задаче 10.1

10.2. Существует ли граф с четырьмя вершинами, не являющийся плоским?

10.3. Является ли плоским граф, который может быть изображен проволочной моделью куба?

Определение 10.2. *Гранью* в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

Определение 10.3. Ребро, соединяющее два цикла и являющееся мостом, назовем *перегородкой*.

Определение 10.4. Простой цикл, ограничивающий грань, называется *границей грани*. Две грани называются *соседними*, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

Определение 10.5. В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную вне плоского представления графа. Она ограничена изнутри простым циклом и не содержит других циклов. Эту часть плоскости называют *бесконечной гранью*.

Как особый случай рассматривается бесконечная грань в плоском представлении дерева и леса. В этом случае за бесконечную грань принимают всю плоскость рисунка.

Теорема 10.1. Для всякого плоского представления связного плоского графа без перегородок число вершин (в), ребер (р) и граней (г) связаны соотношением

$$в - р + г = 2. \qquad (10.1)$$

Формула (10.1) называется *формулой Эйлера*. Теорема Эйлера — очень сильный факт, из которого можно получить много красивых и интересных следствий.

10.4. Проверьте, что формула Эйлера верна для графов, изображенных на рис. 68 и 69.

10.5. Проверьте, справедлива ли формула Эйлера для графа на рис. 70.

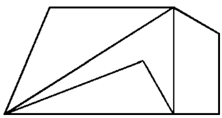

Рис. 69
Граф к задаче 10.4

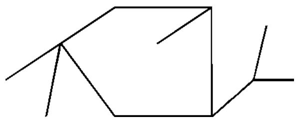

Рис. 70
Граф к задаче 10.5

10.6. Покажите, что формула Эйлера не верна для графа, не являющегося связным.

Формулу Эйлера можно использовать для доказательства того, что графы определенного вида не плоские.

10.7. На участке три дома и три колодца. От каждого дома к каждому колодцу ведет тропинка. Покажите, что нельзя проложить дороги от каждого дома к каждому колодцу так, чтобы владельцам домов не приходилось встречаться на пути к колодцам.

Решение. Для решения достаточно показать, что граф Г, соответствующий условию задачи, не плоский. Предположим, что граф Г плоский, т. е. существует его плоское представление. Граф Г связный, он не имеет ни одного моста, поэтому не имеет и перегородок. Таким образом, условия теоремы Эйлера выполняются. Подсчитаем число вершин и ребер в графе Г: в = 6, р = 9, поэтому

$$г = 2 - в + р = 2 - 6 + 9 = 5.$$

Оценим удвоенное число ребер 2р. Заметим, что в графе Г нет простых циклов длины 3, т. е. граница любой грани в плоском представлении графа содержит не менее четырех ребер. Каждое ребро служит границей двух граней, так как мы учитываем и бесконечную грань. При этом число 4г не может быть больше удвоенного числа всех ребер: $4г \leq 2р$. Если бы мы знали число ребер в границе каждой грани, то их сумма должна быть равна 2р. Нам известно, что $2р = 18$, $4г = 20$, откуда $20 \leq 18$. Полученное противоречие доказывает, что предположение было неверно, т. е. граф Г не плоский. ■

10.8. Каждый из четырех соседей соединил свой дом с тремя другими дорожками, которые пересекались лишь около домов (рис. 71). Докажите, что дом пятого соседа со всеми остальными домами соединить непересекающимися дорожками невозможно.

Решение. Решение задачи сводится к доказательству того, что полный граф Г с пятью вершинами (рис. 72) не является плоским.

Предположим, что граф Г плоский, т. е. существует его плоское представление. Граф Г связный, он не имеет перегородок, так как не имеет ни одного моста. Следовательно, граф Г удовлетворяет условиям теоремы Эйлера. Поэтому для плоского представления графа верна формула Эйлера. Подсчитаем число вершин и ребер: $в = 5$, $р = 10$. Тогда

$$г = 2 - 5 + 10 = 7.$$

Оценим удвоенное число ребер 2р. Каждая грань ограничена не более чем тремя ребрами (граф полный), причем каждое ребро принадлежит границам двух граней,

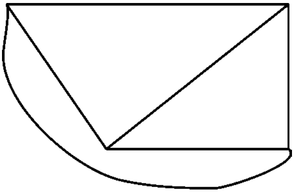

Рис. 71
Граф к задаче 10.8

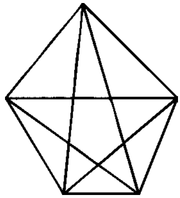

Рис. 72
Полный граф с пятью вершинами

поэтому число 3г не может быть больше, чем 2р, т. е. 3г ≤ 2р. Но 3г = 21, 2р = 20, т. е. 20 > 21. Полученное противоречие показывает, что предположение было неверным, т. е. граф Г не плоский. ■

Если мы добавим новые вершины, которые расположены на ребрах графов $K_{3,3}$ и K_5, то мы получим графы, которые также окажутся не плоскими.

Определение 10.6. Граф $K_{3,3}$ с дополнительными вершинами на ребрах или без них называется *графом типа* I, а граф K_5 с дополнительными вершинами на ребрах или без них называется *графом типа* II.

Теорема 10.1 (Понтрягина — Куратовского). Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет подграфов типа I или типа II.

10.9. Применяя критерий Понтрягина — Куратовского, выяснить, планарны ли графы, изображенные на рис. 68*а*, *б* и 73.

10.10. При каких $n \geq 2$ являются планарными графы, изображенные на рис. 74? (Графы содержат по n секций. Точки пересечения диагоналей вершинами графа не являются).

10.11. Построить граф с 6 вершинами и 12 ребрами, содержащий одновременно подграфы, гомеоморфные K_5 и $K_{3,3}$.

10.12. Построить все попарно неизоморфные непланарные графы без петель и кратных ребер, содержащие 6 вершин и 11 ребер.

10.13. Используя формулу Эйлера, доказать, что следующие графы непланарны: 1) K_5; 2) $K_{3,3}$; 3) граф Петерсена

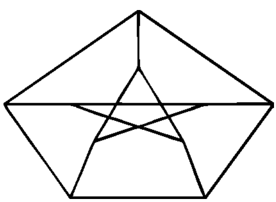

Рис. 73
Граф к задаче 10.9

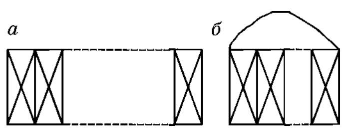

Рис. 74
Графы к задаче 10.10

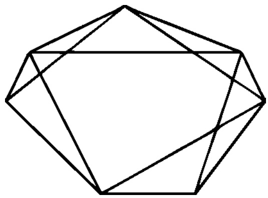

Рис. 75
Граф к задаче 10.13

(рис. 73); 4) граф, изображенный на рис. 75. (Внутренние точки пересечения ребер вершинами графа не являются.)

10.14. Выяснить, существует ли планарный граф без петель и кратных ребер, у которого: 1) 7 вершин и 16 ребер; 2) 8 вершин и 17 ребер.

10.15. Какое наибольшее число граней может быть у плоского 5-вершинного графа, не имеющего петель и кратных ребер? Изобразите такой граф.

10.16. Доказать, что в каждом планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени, не большей чем 5.

10.17. В квадрате отметили 20 точек и соединили их друг с другом и с вершинами квадрата непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Обозначим через V количество вершин, E — количество ребер, F — количество граней плоского графа.

10.18. Докажите, что для плоского графа справедливо неравенство

$$2E \geq 3F. \qquad (10.2)$$

10.19. Докажите, что для плоского связного графа справедливо неравенство

$$E \leq 3V - 6. \qquad (10.3)$$

10.20. Докажите, что для любого плоского графа (в том числе и несвязного) справедливо неравенство $E \leq 3V - 6$. *Указание.* Требуемое неравенство получается сложением неравенств для компонент связности.

10.21. Граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, не является плоским. *Указание.* Для этого графа не выполнено неравенство (10.3).

Из результатов задачи 10.13 следует, что полный граф более, чем с 4 вершинами не является плоским.

10.22. Докажите, что для графа задачи 10.7 о трех домах и трех колодцах выполняется неравенство $E \geq 2F$.

10.23. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, не плоский.

С помощью неравенства (10.3) можно доказать следующие три изящных факта.

10.24. Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

10.25. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный», либо «синий» граф не является плоским.

10.26.* Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причем каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

Определение 10.7. Плоский граф называется *максимально плоским*, если невозможно добавить к нему ни одного ребра так, чтобы полученный граф был плоским.

Каждая грань в максимально плоском графе имеет три вершины. Поэтому максимально плоский граф называется еще *триангулированным*.

Определение 10.8. Операция добавления новых ребер, в результате которой в плоском представлении каждая грань имеет ровно три вершины, называется *триангуляцией графа*.

10.27. Убедитесь в том, что существует только один триангулированный граф с четырьмя вершинами и только один с пятью вершинами.

10.28. Приведите примеры неплоских графов с шестью вершинами.

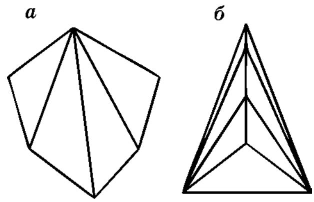

Рис. 76
Графы к задаче 10.29

10.29. Можно ли к графам на рис. 76 добавить новые ребра так, чтобы полученные графы остались плоскими? Если можно, то какие?

10.30. Триангулируйте граф с n вершинами, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 7$; 4) $n = 8$. Подсчитайте в каждом случае число полученных треугольных граней.

10.31. Приведите пример двух разных триангулированных графов с семью вершинами. Сравните число треугольных граней в плоских представлениях этих графов.

10.32. Чему равно число треугольных граней в плоском представлении триангулированного графа с n вершинами, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$; 4) $n = 6$?

10.33. Докажите, что в плоском представлении триангулированного графа с n вершинами число треугольных граней равно $1 + 2(n - 3)$, если бесконечную грань не учитывать.

Занятие 11

ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

Определение 11.1. *Эйлеровым путем* в графе называется путь, содержащий все ребра графа.

Определение 11.2. *Эйлеровым циклом* в графе называется цикл, содержащий все ребра графа.

Определение 11.3. *Эйлеровым графом* называется граф, обладающий эйлеровым циклом.

Теорема 11.1. Для того чтобы граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и все его вершины были четными.

Если граф не обладает эйлеровым циклом, то можно поставить задачу об отыскании эйлеровых путей, т. е. путей, содержащих все ребра графа.

Теорема 11.2. Граф обладает эйлеровым путем, соединяющим вершины A и B ($A \neq B$), тогда и только тогда, когда граф связный и A, B — единственные нечетные его вершины.

Теорема 11.3. Если связный граф имеет $2k$ нечетных вершин, то найдется семейство из k путей, которые в совокупности содержат все ребра графа в точности по одному разу.

11.1. Существует ли эйлеров цикл в графе на рис. 77? Если существует, то найдите его.

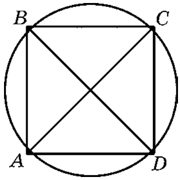

Рис. 77
Граф к задаче 11.1

11.2. Существует ли эйлеров путь в графах на рис. 78? Если существует, то найдите его.

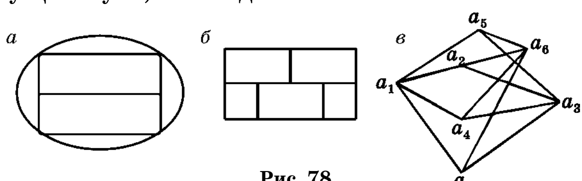

Рис. 78
Графы к задаче 11.2

11.3. Нарисуйте граф с восемью вершинами, который: 1) имеет эйлеров цикл; 2) имеет эйлеров путь; 3) не имеет ни эйлерова цикла, ни эйлерова пути; 4) имеет простой путь, содержащий все ребра графа.

11.4. На рис. 79 — схема зоопарка. Вершины графа — вход A, выход B, перекрестки, повороты, тупики, ребра — дорожки, вдоль которых расположены клетки. Найдите

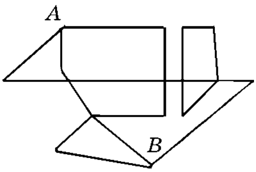

Рис. 79
Граф к задаче 11.4

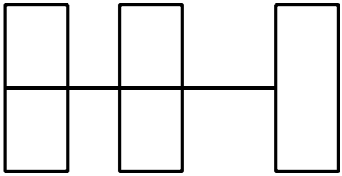

Рис. 80
Граф к задаче 11.5

маршрут, по которому экскурсовод мог бы провести посетителей, показав им всех зверей и не проходя более одного раза ни одного участка пути.

11.5. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале ровно один раз? Соответствующий граф приведен на рис. 80. Вершины графа — это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра — залы и коридоры.

11.6. Где на выставке (рис. 80) следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

11.7. На рис. 81 показан план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После смерти рыцаря его наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, а затем пройти через

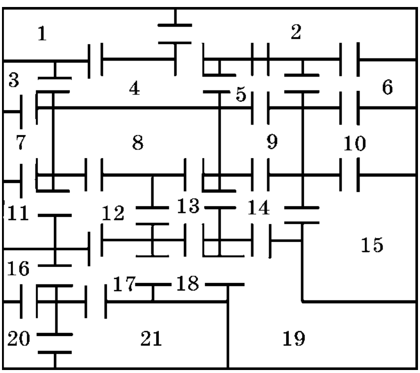

Рис. 81
Граф к задаче 11.7

все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

В 1857 году ирландский математик Гамильтон предложил игру, названную «путешествие по додекаэдру». Игра сводилась к обходу по ребрам всех вершин додекаэдра при условии, что ни в одну из вершин нельзя заходить более одного раза.

Додекаэдр — это правильный многогранник, гранями которого служат 12 правильных пятиугольников (рис. 82). У него 20 вершин и 30 ребер. В каждой его вершине сходится по три ребра.

Вершины и ребра додекаэдра составляют плоский граф (рис. 83).

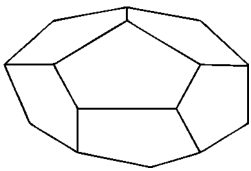

Рис. 82
Додекаэдр

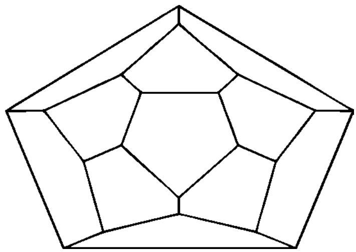

Рис. 83
Плоский граф додекаэдра

11.8. Найдите цикл, содержащий все вершины додекаэдра, причем в точности по одному разу каждую. Для определенности начните путь из вершины 1 и в первую очередь посетите вершины 2, 3, 4 и 5 (рис. 84). Числами 1, 2, 3, 4, 5 пронумерованы вершины пятиугольника, расположенного в центре графа (рис. 83) против часовой стрелки.

Определение 11.4. *Гамильтоновым путем* в графе называется путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

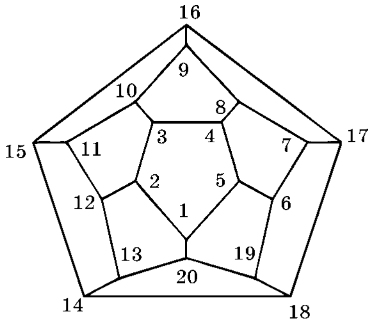

Рис. 84
Граф к задачам 11.8, 11.9

Определение 11.5. *Гамильтоновым циклом* в графе называется цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Определение 11.6. *Гамильтоновым графом* называется граф, обладающий гамильтоновым циклом.

11.9. На рис. 84 изображены 20 городов (они произвольно пронумерованы) и дороги, соединяющие их. Предполагается, начав путешествие в городе 1, объехать все остальные города, не заехав ни в один город более одного раза. Выпишите последовательность городов, в которой можно совершить такое путешествие, если:

1) окончить путешествие нужно в городе 16;

2) в первую очередь нужно заехать в города 2, 12, 11, 10, а вернуться в город 1;

3) в первую очередь нужно заехать в города 2 и 3, а окончить путешествие нужно в городе 18.

11.10. Какой из графов, изображенных на рис. 85, является эйлеровым или гамильтоновым?

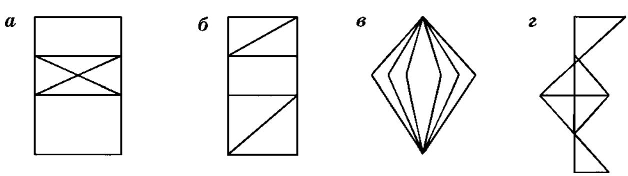

Рис. 85
Графы к задаче 11.10

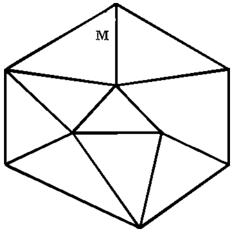

Рис. 86
Граф к задаче 11.11

11.11. На рис. 86 изображена схема, на которой отмечен магазин, а также остальные вершины — места жительства заказчиков. Как шоферу машины «Доставка на дом» объехать всех заказчиков, не подъезжая ни к одному дому более одного раза?

Общий критерий существования гамильтонова цикла на произвольном графе пока не найден. Рассмотрим несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе.

Теорема 11.4. Всякий полный граф является гамильтоновым.

Теорема 11.5. Если гамильтонов граф объединить еще с одной вершиной ребром так, что образуется висячая вершина, то такой граф гамильтоновым не является (рис. 87).

Теорема 11.6. Граф, представляющий собой простой цикл с «перекладиной», на которой расположена одна или несколько вершин, гамильтоновым не является (рис. 88).

Теорема 11.7. Если для любой пары вершин U и V графа с m вершинами справедливо неравенство

$$d(U) + d(V) \geq m, \tag{11.1}$$

то граф обладает гамильтоновым циклом.

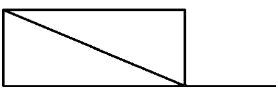

Рис. 87
Негамильтонов граф

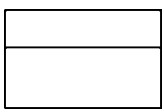

Рис. 88
Негамильтонов граф

Теорема 11.8. Если для произвольной вершины A_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, графа выполняется неравенство

$$d(A_i) \geq \frac{m}{2}, \tag{11.2}$$

то граф обладает гамильтоновым циклом.

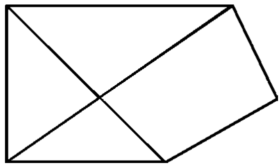

Рис. 89
Граф к задаче 11.12

11.12. Найдите в графе, изображенном на рис. 89, три гамильтоновых цикла.

Занятие 12

РАСКРАСКА ГРАФОВ

Определение 12.1. Раскраска вершин или ребер графа называется *правильной*, если смежные вершины (или, соответственно, ребра) окрашены в разные цвета.

Определение 12.2. *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число цветов для правильной раскраски графа.

Определение 12.3. *Хроматическим индексом* $\chi'(G)$ (*реберно-хроматическим числом*, *реберно-хроматическим классом*) мультиграфа G называется наименьшее число цветов для правильной раскраски его ребер.

Для хроматического числа графа $G = G(V, E)$ справедливы следующие оценки:

1) $\chi(G) \geq w(G)$, где $w(G)$ — число вершин у наибольшего полного подграфа графа G (так называемое *кликовое число* графа G);

2) $\chi(G) \geq \dfrac{n^2}{n^2 - 2m}$, где $n = |V|$, $m = |E|$;

3) $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} d(v)$.

Для хроматического индекса мультиграфа $G = G(V, E)$ имеют место следующие оценки:

1) $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, где $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} d(v)$.

2) $\chi'(G) \leq \left[\frac{3}{2}\Delta(G)\right]$ (теорема К. Шеннона);

3) $\chi(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$, где $\mu(G) = \max\limits_{(v,w)} \mu(v, w)$, $\mu(v, w)$ — число ребер, соединяющих в G вершины v и w, т. е. $\mu(G)$ — мощность наибольшей из совокупностей кратных ребер в мультиграфе G. (Оценка В. Г. Визинга.)

12.1. Шесть школьников участвуют в шахматном турнире, который проводится в один круг. Докажите, что среди них всегда найдутся три участника, которые провели уже все встречи между собой или не сыграли друг с другом ни одной партии.

Решение. Каждому участнику поставим в соответствие вершину графа. Соединим вершины попарно ребрами двух цветов. Пусть ребро красного цвета означает, что двое уже сыграли между собой, а синего — что не сыграли. Получим граф с шестью вершинами и ребрами двух цветов — красного и синего.

Теперь для решения задачи достаточно доказать, что в таком графе обязательно найдется треугольник с одноцветными сторонами.

Каждая вершина нашего графа принадлежит пяти ребрам. Скольким ребрам одного цвета может принадлежать произвольная вершина такого графа? Очевидно, каждая вершина принадлежит по меньшей мере трем ребрам одного цвета. Пусть, например, вершина A принадлежит трем ребрам красного цвета. Какого цвета ребра могут соединять вершины B, C и D (рис. 90)?

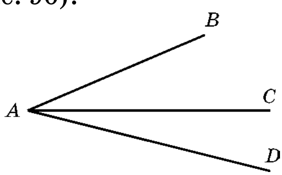

Рис. 90
Граф к решению задачи 12.1

Если хотя бы одно из них окажется красным, то получится треугольник с красными сторонами. Если же все эти ребра синие, то они вместе образуют треугольник с синими сторонами. Следовательно, найдутся три шахматиста, уже сыгравшие между собой или не сыгравшие ни одной партии. ■

При решении доказаны следующие два свойства цветных графов.

Теорема 12.1. Любая вершина полного графа с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов принадлежит по меньшей мере трем ребрам одного цвета.

Теорема 12.2. В любом полном графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов найдется по меньшей мере один треугольник с одноцветными сторонами.

12.2. На географической карте выбрано пять городов. Известно, что среди них из любых трех найдутся два, соединенные авиалиниями, и два — не соединенные. Докажите, что тогда: 1) каждый город соединен авиалиниями непосредственно с двумя и только двумя другими городами; 2) вылетев из любого города, можно облететь остальные, побывав в каждом по одному разу и вернуться назад.

Решение. Пусть вершины графа соответствуют городам, красное ребро — наличию авиалинии, синее — отсутствию. По условию, среди трех ребер, соединяющих любые три вершины, одно — красное, второе — синее (см. рис. 91*а*), а это означает, что в графе нет ни одного

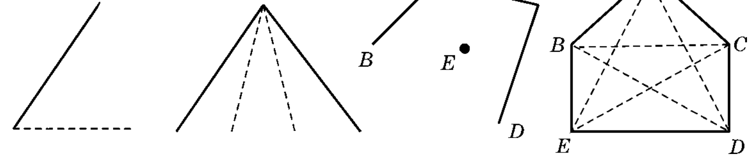

Рис. 91
Графы к задаче 12.2

треугольника с одноцветными сторонами. Тогда из решения предыдущей задачи следует, что каждая вершина непременно принадлежит двум красным ребрам и двум синим (рис. 91*б*), поскольку в противоположном случае образовался бы треугольник с одноцветными сторонами. А это означает, что каждый город соединен авиалиниями с двумя и только двумя городами.

Остается показать, что в графе найдется пятиугольник, все ребра которого — красные. Выберем одну из вершин, например A, а красными будут, скажем, ребра (A, B) и (A, C) (рис. 91*в*).

Ребро (B, C) не может быть красным, следовательно, красным является одно из ребер (C, D) либо (C, E). Пусть красное — ребро (C, D). Если теперь соединить красным ребром вершины D и B, то вершина E должна быть соединена красными ребрами с вершинами, которые принадлежат уже двум красным ребрам. По условию это невозможно. Остается соединить красными ребрами вершины D и E, B и E. Остальные ребра должны быть синими (рис. 91*г*). ■

При решении этой задачи мы получили еще одно свойство.

Теорема 12.3. Если в полном графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов не найдется треугольника с одноцветными сторонами, то граф можно изобразить в виде пятиугольника с красными сторонами и синими диагоналями.

12.3. В течение дня двое из шести телефонных абонентов могут поговорить друг с другом по телефону, а могут и не поговорить. Докажите, что всегда можно указать две тройки абонентов, в каждой из которых все переговорили друг с другом или все не переговорили.

Решение. Пусть у полного графа с шестью вершинами красные ребра соответствуют парам абонентов, которые говорили друг с другом по телефону, а синие — тем, кто не говорил. Тогда в графе найдется хотя бы один треугольник ABC (см. рис. 92) с одноцветными сторонами. Остается

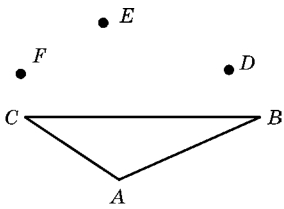

Рис. 92
Граф к задаче 12.3

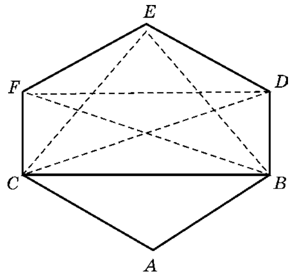

Рис. 93
Граф к задаче 12.3

показать, что обязательно найдется еще и второй такой треугольник.

Временно исключим из рассмотрения одну из вершин, скажем A, вместе с ребрами, принадлежащими ей.

Найдется ли в оставшемся графе с пятью вершинами треугольник с одноцветными сторонами? Если найдется, то он содержится и в исходном графе.

В противном случае получается пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями (рис. 92). Теперь восстановим шестую вершину A с ее ребрами (рис. 93).

Если ребро (A, D) или ребро (A, F) будет окрашено в красный цвет, то образуется еще минимум один треугольник с красными сторонами — ADB или ACF. Если оба эти ребра будут синего цвета, то появится треугольник AFD с синими сторонами. Вывод нетрудно перевести с языка теории графов на язык задачи. ■

При решении этой задачи установлено следующее свойство графа.

Теорема 12.4. В любом полном графе с шестью и более вершинами и ребрами одного из двух цветов всегда найдутся два разных треугольника с одноцветными сторонами. Эти два треугольника могут иметь общую вершину или даже общее ребро.

12.4. Докажите, что в полных графах с восемью вершинами и ребрами двух цветов каждая вершина принадлежит по меньшей мере четырем ребрам одного цвета.

12.5. Все ребра полного графа с пятью вершинами окрасьте в красный или синий цвет так, чтобы не было ни одного треугольника с одноцветными сторонами. Скольким красным ребрам принадлежит каждая вершина?

12.6. Докажите, что если каждый из пяти человек переписывается только с двумя другими, то не найдется трех человек, которые все переписываются между собой. Сформулируйте соответствующее свойство.

12.7. Докажите, что всегда среди шести острых углов найдутся три угла A, B, C такие, что их попарные суммы $A+B$, $A+C$, $B+C$ одновременно либо больше $\frac{\pi}{2}$, либо одновременно не больше $\frac{\pi}{2}$.

12.8. На одном фестивале встретились шесть делегатов. Оказалось, что из любых троих по меньшей мере двое могут говорить на одном из языков. Докажите, что всегда найдутся три делегата, каждый из которых может объясниться с каждым из этой тройки. Сформулируйте соответствующее свойство графа.

12.9. Докажите, что не найдется девяти человек, каждый из которых был знаком ровно с тремя другими.

12.10. Найти хроматические числа и хроматические индексы графов, изображенных на рис. 45–49.

12.11. Найти хроматическое число и хроматический индекс графа G:

1) $G = K_n$, $n \geq 2$;

2) $G = K_{m,n}$, $n \geq m \geq 1$.

12.12. Доказать, что если G — кубический гамильтонов граф, то $\chi'(G) = 3$.

12.13. Пусть l — длина самой длинной простой цепи в графе G, не имеющем петель и кратных ребер. Показать, что $\chi(G) \leq l + 1$.

12.14. Пусть G — граф, не имеющий петель и кратных ребер и $\Delta(G)$ — наибольшая из степеней его вершин. Показать, что $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

12.15. Доказать, что вершины всякого плоского графа без петель и кратных ребер можно правильно окрасить в $q \leq 6$ цветов.

12.16. Доказать, что для правильной раскраски ребер всякого кубического мультиграфа достаточно 4 цветов.

Занятие 13

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

13.1. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс, Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

13.2. Два белых коня находятся в клетках с номерами 1 и 7, а два черных — в клетках с номерами 3 и 9 (табл. 4). Можно ли, сделав несколько ходов конями, расположить их так, чтобы белые кони находились в клетках с номерами 1 и 9, а черные — в клетках с номерами 3 и 7?

Таблица 4

К условию задачи 13.2

1	4	7
2	5	8
3	6	9

13.3. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 удалить угловые клетки. Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по одному разу?

13.4. В одной стране есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что города соединены авиалинией в том и только в том случае, когда двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

13.5. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга в этом классе, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

13.6. В городе 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

13.7. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

13.8. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

13.9. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из мостов выходит на берег озера?

13.10. Докажите, что число людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

13.11. Можно ли на плоскости нарисовать 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

13.12. В стране 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого.

13.13. Докажите, что каждый граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связен.

13.14. В некотором царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 newline ковролиния, из города Дальний — одна, из остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний.

13.15. Можно ли нарисовать графы, изображенные на рис. 94, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

13.16. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перелезть через каждый забор ровно один раз (рис. 95)?

13.17. Имеется кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоку, изготовить каркас куба с ребром 10 см? Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

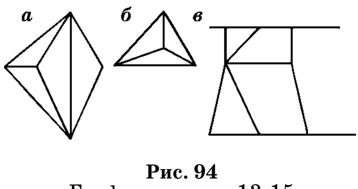

Рис. 94
Графы к задаче 13.15

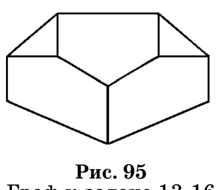

Рис. 95
Граф к задаче 13.16

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант № 1

1. Найдите величину суммы

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n.$$

2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=2^n,\quad a_0=1,\quad a_1=2.$$

3. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n=0,\quad a_0=1,\quad a_1=2.$$

4. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

5. Найдите количество натуральных чисел, меньших 200 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 10.

6. Дана производящая функция $A(t)=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m}$. Найдите соответствующую последовательность $\{a_n\}$.

Вариант № 2

1. Найдите величину суммы

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n.$$

2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=n,\quad a_0=1,\quad a_1=-2.$$

3. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 2.$$

4. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^3(3^n x)}{3^n}.$$

5. Найдите количество натуральных чисел, меньших 1665 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 37.

6. Дана производящая функция $A(t) = (1+2t)^{-\frac{1}{2}}$. Найдите соответствующую последовательность $\{a_n\}$.

Вариант № 3

1. Найдите величину суммы

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n.$$

2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

3. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0, \quad a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = -2.$$

4. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

5. Найдите количество натуральных чисел, меньших 1476 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 41.

6. Дана производящая функция $A(t) = \operatorname{arctg} t$. С помощью формулы

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

найдите соответствующую последовательность $\{a_n\}$.

Вариант № 4

1. Найдите величину суммы

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m.$$

2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 1.$$

3. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+4} - 4a_{n+2} + 4a_n = 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0.$$

4. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

5. Докажите, что $2^n \geq 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Дана производящая функция $A(t) = \arcsin t$. С помощью формулы

$$\arcsin t = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

найдите соответствующую последовательность $\{a_n\}$.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1.1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из них можно использовать не более одного раза?

1.2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 8.$$

1.3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

1.4. Докажите, что связный граф, имеющий не более двух нечетных вершин, можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз.

1.5. Докажите, что

$$(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-1)2n = 2^n(2n-1)!!\,.$$

1.6. Докажите, что для последовательности чисел Фибоначчи справедливо равенство $u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2$.

1.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$.

Вариант 2

2.1. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

2.2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, \;\; a_0 = 1, \;\; a_1 = 2, \;\; a_2 = 3.$$

2.3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

2.4. Можно ли составить решетку, изображенную на рис. 96, из пяти ломаных длины 8? (Длина стороны клетки равна 1.)

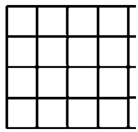

Рис. 96
Граф к задаче 2.4

2.5. Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right).$$

2.6. Докажите, что для последовательности чисел Фибоначчи справедливо равенство $u_{2n-1} = u_n u_{n+1} + u_{n-2} u_{n-1}$.

2.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$.

Вариант 3

3.1. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой — m точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне. Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника?

3.2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} + 9a_n = 0, \;\; a_0 = 1, \;\; a_1 = 0.$$

3.3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

3.4. Можно ли составить решетку, изображенную на рис. 96, из шести ломаных длины 5? (Длина стороны клетки равна 1.)

3.5. Докажите, что

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3.6. Докажите, что для последовательности чисел Фибоначчи справедливо равенство $u_{n+1}u_{n+2} - u_n u_{n+2} = (-1)^n$.

3.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$.

Вариант 4

4.1. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой — m точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне. На сколько частей делят треугольник эти прямые?

4.2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} - 9a_n = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

4.3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}.$$

4.4. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную, т. е. не распадающуюся на части, фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

4.5. Докажите, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

4.6. Докажите, что для последовательности чисел Фибоначчи справедливо равенство $u_n^4 - u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2} = 1$.

4.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)C_n^n$.

Вариант 5

5.1. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

5.2. Решите неоднородное рекуррентное соотношение

$$a_{n+1} = a_n + n, \quad a_0 = 1.$$

5.3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}.$$

5.4. Докажите, что связный граф с $2n$ нечетными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

5.5. Применяя формулу $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, докажите, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Эту задачу можно решить методом математической индукции.

5.6. Докажите, что для последовательности чисел Фибоначчи $\{u_k\}$ при любом целом неотрицательном n справедливо равенство $1 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2^n} = u_{2^n+1}$.

5.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-1)C_n^n$.

Вариант 6

6.1. Пассажир забыл номер автоматической камеры хранения, в которой он оставил вещи. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37 и что номер — пятизначный. Какое наибольшее количество номеров придется перебрать, чтобы открыть камеру?

6.2. Решите рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + 2^{-n},\ a_0 = 1,\ a_1 = \frac{3}{2}.$$

6.3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}.$$

6.4. На конференции присутствует 50 ученых, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый из них сидел рядом со знакомыми ему людьми.

6.5. Применяя формулу $(k + 1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k + 4k + 1$ и пользуясь формулой задачи 5.5, докажите, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Эту задачу можно решить методом математической индукции.

6.6. Докажите, что число цифр числа Фибоначчи u_n больше, чем $\frac{n-2}{5}$.

6.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1} n C_n^n$.

Вариант 7

7.1. Дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

7.2. Найдите общее решение рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0.$$

7.3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)}.$$

7.4. Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

7.5. Применяя формулу

$$(k + 1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

и пользуясь формулами задач 5.5, 6.5, докажите, что

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Эту задачу можно решить также методом математической индукции.

7.6. Найдите коэффициент при x^6 в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

7.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n$.

Вариант 8

8.1. В соревнованиях по гимнастике две команды имели одинаковое число участников. В итоге общая сумма баллов, полученных всеми участниками, равна 156. Сколько было участников, если каждый из них получил только 8 или 9 баллов?

8.2. Найдите общее решение рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4} a_n.$$

8.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots .$$

8.4. Дима нарисовал на доске 7 графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два изоморфных.

8.5. Применяя формулу задачи 6.5, докажите, что

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Эту задачу можно решить и методом математической индукции.

8.6. Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

8.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$.

Вариант 9

9.1. Расстояние от A до B — 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояния от A до B записаны, как показано в таблице 5. Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

Таблица 5

К условию задачи 9.1

0	999		1	998		2	997	...	999	0

9.2. Найдите число целых положительных чисел, не превосходящих 100 и не делящихся ни на одно из целых чисел 3, 5 и 7.

9.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots .$$

9.4. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта.

9.5. Заметив, что $1 \cdot 2! + 2 \cdot 2! = 3 \cdot 2! = 3!$, докажите, что

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

Эту задачу можно решить методом математической индукции.

9.6. Найдите коэффициент при x^2 в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

9.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}$.

Вариант 10

10.1. В роте имеется три офицера и 40 солдат. Сколькими способами может быть выбран наряд из одного офицера и трех солдат?

10.2. Покажите, что если $n = 30m$, то количество целых положительных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15, равно $22m$.

10.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots .$$

10.4. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что из некоторого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более, чем с одной пересадкой, пользуясь только этим выбранным видом транспорта.

10.5. Пользуясь рекуррентной формулой

$$C_{m+1}^k = C_m^k + C_m^{k-1},$$

докажите, что

$$C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k - 1.$$

Эту задачу можно решить методом математической индукции.

10.6. Найдите коэффициент при x^{12} в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

10.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$.

Вариант 11

11.1. Сколько членов получится после раскрытия скобок в выражении

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)?$$

11.2. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 учащихся не посещают ни один из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружок?

11.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots .$$

11.4. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что из каждого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более, чем с одной пересадкой, пользуясь только этим выбранным видом транспорта.

11.5. Докажите, что

$$\frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_3 N}+\frac{1}{\log_4 N}+\ldots+\frac{1}{\log_{100} N}=\frac{1}{\log_{100!} N}.$$

11.6. Найдите коэффициент при x^{14} в разложении $(1+2x^2-3x^4)^8$.

11.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n,$$

вычислите сумму $C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n$.

Вариант 12

12.1. Сколько существует чисел от 0 до 10^n, в которые не входят две подряд идущие друг за другом одинаковые цифры?

12.2. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 учащихся не посещают ни один из этих кружков. Сколько учеников посещают только математический кружок?

12.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots .$$

12.4. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы пользуясь только им, можно было добраться из любого города до любого другого не более чем с двумя пересадками.

12.5. Умножая данное выражение слева на $1-\frac{1}{3}$, докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right).$$

12.6. Найдите коэффициент при x^{16} в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

12.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

Вариант 13

13.1. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

13.2. Сколькими способами можно расположить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

13.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots .$$

13.4. Каждое из ребер полного графа с шестью вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми одного цвета.

13.5. Умножая данное выражение слева на $\sin\alpha$, докажите, что

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}}.$$

13.6. Найдите коэффициент при x^{18} в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

13.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$.

Вариант 14

14.1. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет разного достоинства?

14.2. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что в точности k человек получат свои шляпы назад. Рассмотреть все значения k, $0 \le k \le 4$.

14.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \ldots .$$

14.4. Каждое из ребер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трех цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми — одного цвета.

14.5. Пользуясь формулой бинома Ньютона, докажите, что

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

14.6. Найдите коэффициент при x^5 в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

14.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$.

Вариант 15

15.1. Определите, сколько рациональных членов содержится в разложении

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{20}.$$

15.2. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}.$$

15.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots .$$

15.4. Каждое из ребер полного графа с девятью вершинами покрашено в синий или красный цвет. Докажите, что либо есть четыре вершины, все ребра между которыми синие, либо есть три вершины, все ребра между которыми красные.

15.5. Методом математической индукции докажите, что при $n > 6$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

15.6. Найдите коэффициент при x^{18} в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

15.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)C_n^n$.

Вариант 16

16.1. Определите, сколько рациональных членов содержится в разложении

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt[4]{2}\right)^{100}.$$

16.2. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k = (n+1)2^n.$$

16.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{225}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots .$$

16.4. Каждое из ребер полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть четыре вершины, все ребра между которыми одного цвета.

16.5. Докажите, что при всяком натуральном $n > 1$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}.$$

Для оценки суммы снизу оцените снизу каждое слагаемое. Для оценки суммы сверху сгруппируйте равноотстоящие от концов слагаемые.

16.6. Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1 + 2x^2 - 3x^4)^8$.

16.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-1)C_n^n$.

Вариант 17

17.1. Найдите коэффициент при t^{17} в разложении $(2 + t^4 + t^7)^{15}$.

17.2. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

17.3. Методом непосредственного суммирования, пользуясь формулой

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-a\cdot b},$$

найдите сумму ряда

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \ldots .$$

17.4. Среди офицеров A, $Б$, $В$ и $Г$ — майор, капитан и два лейтенанта. A и один из лейтенантов — танкисты, $Б$ и капитан — артиллеристы. A младше по званию, чем $В$. Определите род войск и воинское звание каждого из них.

17.5. Докажите, что при всяком натуральном $n > 1$ справедливы неравенства

$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2.$$

Для оценки суммы снизу оцените снизу каждое слагаемое. Для оценки суммы сверху сгруппируйте равноотстоящие от концов слагаемые.

17.6. Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

17.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1} n C_n^n$.

Вариант 18

18.1. Найдите коэффициент при t^{10} в разложении $(2 + t - 2t^3)^{20}$.

18.2. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $a_{n+m} \le a_n + a_m$, $a_1 > 0$. Докажите, что $a_n \le a_1 n$ при $n \ge 1$.

18.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots .$$

18.4. Три подруги были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были тех же трех цветов, только у Тамары цвет платья и туфель совпал. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Люды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

18.5. Решите в целых числах уравнение

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2.$$

Непосредственным подбором найдите все решения при $x < 5$. Докажите, что при $x \ge 5$ других решений нет.

18.6. Найдите коэффициент при x^2 в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

18.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n$.

Вариант 19

19.1. Докажите неравенство $(2n - 1)!! < n^n$, $n > 1$.

19.2. Докажите, что для последовательности чисел Фибоначчи $\{u_k\}$ при любом целом неотрицательном n число $\frac{1}{10}(u_{n+60} - u_n)$ — целое.

19.3. Найдите сумму ряда

$$x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots .$$

19.4. Петр, Геннадий, Алексей и Владимир занимаются в одной детской спортивной школе в разных секциях: гимнастики, легкой атлетики, волейбола и баскетбола. Петр, Алексей и волейболист учатся в одном классе, Петр и Геннадий на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с волейболистом, ни с баскетболистом. Кто в какой секции занимается?

19.5. Найдите в целых числах 17 решений уравнения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}.$$

19.6. Найдите коэффициент при x^8 в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

19.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $\dfrac{C_n^0}{1}+\dfrac{C_n^1}{2}+\dfrac{C_n^2}{3}+\ldots+\dfrac{C_n^n}{n+1}$.

Вариант 20

20.1. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}.$$

20.2. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}.$$

20.3. Найдите сумму ряда

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots .$$

20.4. Три товарища — Владимир, Игорь и Сергей — окончили один и тот же педагогический институт и преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Ярославля. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле. Рязанец преподает не физику, Игорь — не математику, туляк преподает литературу. Какой предмет и в каком городе преподает каждый и них?

20.5. Методом рекуррентных соотношений вычислите

$$\int_1^e \ln^n x\,dx.$$

20.6. Найдите коэффициент при x^9 в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

20.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $\dfrac{C_n^0}{2} + \dfrac{C_n^1}{3} + \dfrac{C_n^2}{4} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+2}$.

Вариант 21

21.1. Докажите, что $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

21.2. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

21.3. Исходя из соотношения $\int\limits_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$, вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2}.$$

21.4. В поезде «Москва — Санкт-Петербург» едут пассажирами Иванов, Петров и Сидоров. В поездной бригаде такие же фамилии у машиниста, бригадира поезда и у одного из проводников. Известно, что:

1) пассажир Иванов живет в Москве;

2) проводник живет на полпути между Санкт-Петербургом и Москвой;

3) пассажир-однофамилец проводника живет в Санкт-Петербурге;

4) ближайший по месту проживания проводника пассажир зарабатывает ровно втрое больше, чем проводник;

5) пассажир Петров зарабатывает 2000 руб. в месяц;

6) Сидоров из поездной бригады выиграл у бригадира партию в шахматы.

Какая фамилия у машиниста?

21.5. Методом рекуррентных соотношений вычислите

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx.$$

21.6. Найдите коэффициент при x^7 в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

21.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $\dfrac{C_n^0}{1} - \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \ldots + (-1)^n \dfrac{C_n^n}{n+1}$.

Вариант 22

22.1. Пусть m, n — целые положительные числа. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) C_n^k = (n+1) \cdot 2^n.$$

22.2. Найдите предел последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right),\ b > 0,\ a_0 > 0.$$

22.3. Исходя из соотношения

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n-3}.$$

22.4. Четверо друзей, владельцы моторных лодок, решили провести гонку из четырех заездов, меняясь в каждом заезде лодками. В первом заезде Борис был на лодке Виктора, а во втором Виктор плыл на лодке Олега. Петр выиграл третий заезд на своей лодке «Мотылек», причем он выиграл и все остальные заезды. На «Колибри» во втором заезде плыл Олег, а в четвертом заезде плыл Борис. В четвертом заезде «Колибри» пришла второй после «Стрижа». Кому принадлежит лодка «Шмель»?

22.5. Методом рекуррентных соотношений вычислите

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx.$$

22.6. Найдите коэффициент при x^{10} в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

23.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \ldots + (-1)^n C_n^2$.

Вариант 23

23.1. Докажите, что $C_{2n-1}^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_{2n-i-1}^{n-1}$.

23.2. Найдите предел последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{b}{a_n^2}\right),\ b > 0,\ a_0 > 0.$$

23.3. Исходя из соотношения

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n},$$

вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

23.4. В одной школе уроки по биологии, географии, английскому языку, французскому языку, истории и математике ведут три учителя: Морозов, Васильев и Токарев. Каждый из них преподает по два предмета. Учитель географии и учитель французского языка — соседи по дому. Морозов самый младший из троих. Все трое — Токарев, учитель биологии и учитель французского языка ездят вместе из школы. В свободное время, если им удается найти четвертого партнера, учитель английского языка, учитель математики и Морозов обычно играют в преферанс. Кто какие предметы преподает?

23.5. Методом рекуррентных соотношений вычислите

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx.$$

23.6. Найдите коэффициент при x^{12} в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

23.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

Вариант 24

24.1. Докажите тождество

$$C_{2n}^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_{2n-i}^{n}.$$

24.2. Найдите предел последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b - a_n^2),\ 1 > b > 0,\ a_0 = \frac{b}{2}.$$

24.3. Исходя из соотношения

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

вычислите сумму ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} + \ldots\ .$$

24.4. В городе три футбольные команды: «Звезда», «Салют» и «Победа». Смирнов, Родин и Егоров — вратари этих команд. Однажды в день состязаний все они находились на стадионе. В первой половине игры Смирнов оказался в крайне невыгодном положении — солнце светило ему в глаза и он едва не пропустил мяч. Дул сильный ветер, сорвавший шляпу с головы вратаря «Салюта». В первой половине игры счет открыт не был. Но вот свисток судьи возвестил о начале второго тайма. Вскоре радиокомментатор, находившийся на западной трибуне, сообщил: «Слева от меня, у ворот „Звезды“, опасный прорыв! Удар! Еще удар! Вратарь делает отчаянный бросок. Поздно! Мяч в воротах „Звезды“!» Счет 1 : 0 так и не изменился до конца матча. После игры Егоров подошел к вратарю проигравшей команды и указал на его ошибки. В какой команде играет каждый из вратарей?

24.5. Методом рекуррентных соотношений вычислите

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

24.6. Найдите коэффициент при x^{13} в разложении $(1+2x-x^2)^8$.

24.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$.

Вариант 25

25.1. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{i-1}}{C_{2n-1}^{i}} = \frac{2}{n+1},\ n \ge 1.$$

25.2. Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{2k+1} = 2^{n-1}.$$

25.3. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}.$$

25.4. В шахматном турнире приняли участие шесть партнеров различных профессий: токарь, слесарь, инженер, учитель, врач и шофер. Известно, что:

1) в первом туре Андреев играл с врачом, учитель — с Борисовым, а Григорьев — с Евдокимовым;

2) во втором туре Дмитриев играл с токарем, а врач — с Борисовым;

3) во втором туре Евдокимов играл с инженером;

4) по окончании турнира места распределились так: Борисов — первое место, Григорьев и инженер поделили второе и третье места, Дмитриев занял четвертое место, а Золотарев и слесарь поделили пятое и шестое места.

Определите профессию каждого.

25.5. Докажите, что число цифр числа Фибоначчи u_n больше, чем $\frac{n-2}{5}$.

25.6. Найдите коэффициент при x^{14} в разложении $(1 + 2x - x^2)^8$.

25.7. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

вычислите сумму $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

ЗАНЯТИЕ 1. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1.1. 2) Индукция по k. При $k = 1$ $u_n \,\vdots\, u_n$. Пусть для некоторого k $u_{kn} \,\vdots\, u_n$. Тогда $u_{(k+1)n} = u_{n+kn} = u_{n-1}u_{kn} + u_n u_{kn+1} \,\vdots\, u_n$, так как оба слагаемых в правой части этой формулы делятся на u_n.

3) Если при некотором n $(u_{n+1}, u_n) = d$, то $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n \,\vdots\, d$. Но тогда $u_{n-2} = u_n - u_{n-1} \,\vdots\, d$. Продолжая этот процесс, мы приходим к выводу, что $u_2 = 1 \,\vdots\, d$. Следовательно, $d = 1$.

5) Применим метод математической индукции по n. При $n = 1$ и $n = 2$ формула верна. Пусть при $n - 2$ и $n - 1$ формула верна. Тогда

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right),$$

так как

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

8) $u_{3n} = u_{2n+n} = u_{2n-1}u_n + u_{2n}u_{n+1} = (u_{2n} - u_{2(n-1)})u_n + u_{2n}u_{n+1} =$

$$= (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2)u_n - (u_n^2 - u_{n-2}^2)u_n + (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2)u_{n+1} =$$
$$= (u_n + u_{n+1})u_n - u_{n-1}^2 u_n - u_n^3 u_{n-2}^2 u_n + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^2(u_{n-1} + u_n) =$$
$$= u_n^3 + 2u_n u_{n-1} u_{n-1}^3 - u_{n-1}^2 u_n - u_n^3 + u_{n-1}^2 u_n + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 - u_{n-1}^2 u_n =$$

$$= 2u_n^2 u_{n-1} + (u_n - u_{n-1})^2 u_n - u_{n-1}^2 u_n + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 =$$
$$= 2u_n^2 u_{n-1} + u_n^3 - 2u_n^2 u_{n-1} + u_{n-1}^2 u_n - u_{n-1}^2 u_n + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 =$$
$$= u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

1.7. Предположим, что существует такое число Фибоначчи u_n, которое при делении на 8 дает в остатке 4. Тогда $u_n = 4(2n + 1)$. Возьмем $u_6 = 8$. Тогда $(u_n, u_6) = u_{(n,6)} = 4$. Но 4 не является числом Фибоначчи — противоречие. Следовательно, наше допущение неверно, т. е. такого числа u_n не существует.

1.8. Предположим, что существует такое нечетное число Фибоначчи u_m, которое делится на 17. Возьмем число $u_8 = 34$. Тогда $(u_m, u_8) = u_{(m,8)} = 17$. Но такого числа Фибоначчи не существует. Полученное противоречие говорит о том, что наше допущение неверно, т. е. не существует нечетного числа Фибоначчи, делящегося на 17.

1.12. По свойствам чисел Фибоначчи $u_{n-1}u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^{n+1}$. Покажем, что $u_{n-2}u_{n+2} = u_n^2 + (-1)^{n+2}$.

$$\begin{cases} u_{n-2} + u_{n-1} = u_n, \\ u_n + u_{n+1} = u_{n+2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n-2} = u_n - u_{n-1}, \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{n-2}u_{n+2} = (u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n+1}) = u_n^2 + u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) - u_{n-1}u_{n+1} =$$
$$= u_n^2 + u_n^2 - (u_n^2 + (-1)^{n+1}) = u_n^2 - (-1)^{n+1}; \; u_{n-2}u_{n+2} = u_n^2 - (-1)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2} = (u_{n-2}u_{n+2})(u_{n-1}u_{n+1}) =$$
$$= (u_n^2 - (-1)^{n+1})(u_n^2 + (-1)^{n+1}) = u_n^4 - 1.$$

Отсюда $u_n^4 - u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2} = 1$.

ЗАНЯТИЕ 2. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

2.3. 1) $3^{2n+3} - 24n + 37 = 27 \cdot 9^n - 24n + 37 =$

$$= 27(1+8)^n - 24n + 37 = 27(C_n^0 + 8C_n^1 + 8^2C_n^2 + \ldots + 8^n C_n^n) =$$
$$= 27 + 216n + 8^2(27C_n^2 + 27 \cdot 8C_n^2 + \ldots + 27 \cdot 8^{n-2}C_n^n) - 24n + 37 =$$
$$= 64 + 192n + 64a,$$

где a — выражение в скобках. Полученная сумма делится на 64.

2.4. $c^n = (1 + (c-1))^n =$

$$= 1 + n(c-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(c-1)^2 + \ldots > 1 + n(c-1).$$

2.5. Применим формулу из задачи 2.4 для $\frac{1}{c} > 1$:

$$\left(\frac{1}{c}\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{c} - 1\right) = 1 + \frac{n(1-c)}{c} > \frac{n(1-c)}{c} > n(1-c),$$

$$\frac{1}{c^n} > n(1-c), \; c^n < \frac{1}{n(1-c)}.$$

2.6. $(1+2x^2-3x^4)^{10}=\sum\limits_{r_1+r_2+r_3=10}\dfrac{10!}{r_1!r_2!r_3!}1^{r_1}(2x^2)^{r_2}(-3x^4)^{r_3}=$

$=\sum\limits_{r_1+r_2+r_3=10}\dfrac{10!}{r_1!r_2!r_3!}2^{r_2}(-3)^{r_3}x^{2r_2+4r_3}$.

$2r_2+4r_3=8$, $r_2+2r_3=4$, $r_2=2(2-r_3)$. $r_3\in\{0, 1, 2\}$.

1) $r_3=0$, $r_2=4$, $r_1=6$; 2) $r_3=1$, $r_2=2$, $r_1=7$; 3) $r_3=2$, $r_2=0$, $r_1=8$.

$\dfrac{10!}{6!4!0!}2^4+\dfrac{10!}{7!2!1!}2^2(-3)+\dfrac{10!}{8!0!2!}(-3)^2=555.$

2.11. 26.

2.16. $(x+y)^p=x^p+C_p^1x^{p-1}y+C_p^2x^{p-2}y^2+C_p^3x^{p-3}y^3+\ldots$,

$$\begin{cases}px^{p-1}y=240,\\ \dfrac{p(p-1)}{2}x^{p-2}y^2=720,\\ \dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}x^{p-3}y^3=1080;\end{cases}\qquad \begin{cases}px^{p-1}y=240,\\ p(p-1)x^{p-2}y^2=1440,\\ p(p-1)(p-2)x^{p-3}y^3=6480;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{p-2}\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{9},\end{cases}$$

$\dfrac{p-2}{p-1}=\dfrac{3}{4}$, $p=5$, $y=\dfrac{3}{2}x$, $5x^4\cdot\dfrac{3}{2}x=240$, $x^5=32$, $x=2$, $y=3$.

$x=2$, $y=3$, $p=5$.

2.17. 1) 1,02; 2) 0,94; 3) 1,02; 4) 0,998; 5) 3,015; 6) 2,002; 7) 5,1; 8) 121,25; 9) 9,997; 10) 0,20006.

2.20. 1) $A_5^3=\dfrac{5!}{2!}=3\cdot4\cdot5=60$; 2) $C_5^3=\dfrac{5!}{3!2!}=\dfrac{4\cdot5}{2}=10$.

2.21. $n=2^{68}=2^{4\cdot17}=16^{17}$. **2.22.** $n=2\cdot3^9$.

2.23. $n=2+2^2+2^3+2^4=\dfrac{2(2^4-1)}{2-1}=30$.

2.42. При $n=2$ получаются справедливые равенства

$C_2^0+C_2^2=C_2^1=2^{2-1}$.

Пусть $\sum\limits_k C_n^{2k}=\sum\limits_k C_n^{2k+1}=2^{n-1}$. Тогда

$$\sum_k C_{n+1}^{2k}=\sum_k C_n^{2k}+\sum_k C_n^{2k-1}=2^{n-1}+2^{n-1}=2\cdot2^{n-1}=2^n.$$

Аналогично,

$$\sum_k C_{n+1}^{2k+1}=\sum_k C_n^{2k+1}+\sum_k C_n^{2k}=2^{n-1}+2^{n-1}=2\cdot2^{n-1}=2^n.$$

ЗАНЯТИЕ 3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

3.12. $I_n=\int\limits_0^1(1-x^2)^n\,dx=\int\limits_0^1(1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\,dx=$

$$=\int\limits_0^1(1-x^2)^{n-1}dx-\int\limits_0^1(1-x^2)^{n-1}x\cdot x\,dx=$$

$$\left(u=x,\ du=dx,\ dv=(1-x^2)^{n-1}x\,dx,\ v=-\frac{(1-x^2)^n}{2n}\right)$$

$$=I_{n-1}+\frac{(1-x^2)^n x}{2n}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2n}\int\limits_0^1(1-x^2)^n\,dx=I_{n-1}-\frac{1}{2n}I_n,$$

$$I_n=I_{n-1}+\frac{1}{2n}I_n,\ I_n=\frac{2n}{2n-1}I_{n-1},\ I_0=1.$$

$$I_1=1,\ I_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1},\ I_3=\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1},\ \ldots,\ I_n=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

3.14. $I_{2n}=\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n}x\,dx=\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x\cdot\mathrm{tg}^2x\,dx=$

$$=\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x\,d(\mathrm{tg}\,x)-\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^{2n-1}x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/4}-I_{2n-2}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2},\ \ I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2}.$$

$$I_0=\frac{\pi}{4},\ I_2=1-\frac{\pi}{4},\ I_4=\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4},\ \ I_6=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1-\frac{\pi}{4},\ \ldots,$$

$$I_{2n}=(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n-1}\right).$$

3.15. $I_n=\int\limits_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\limits_0^1 x^{n-2}\cdot\frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$$=\int\limits_0^1\frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\limits_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$\left(u=\sqrt{1-x^2},\ du=\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\ dv=x^{n-2}dx,\ v=\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)$$

$$=I_{n-2}-\left(\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n-1}\Bigg|_0^1+\frac{1}{n-1}\int\limits_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}I_n,$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ I_0 = 1,\ I_1 = 0,\ I_2 = \frac{1}{2},\ I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2},\ I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2},\ \ldots,$$

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\ I_{2n+1} = 0.$$

3.16. $I_n = \int\limits_0^1 x^m \ln^n x\,dx = \int\limits_0^1 x^{m+1} \ln^n x \cdot \frac{dx}{x} =$

$$\left(u = x^{m+1},\ du = (m+1)x^m dx,\ dv = \frac{\ln^n x}{x}dx,\ v = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}\right)$$

$$= \frac{x^{m+1}\ln^{n+1} x}{n+1}\Bigg|_0^1 - \frac{m+1}{n+1}\int\limits_0^1 x^m \ln^{n+1} x\,dx = -\frac{m+1}{n+1} I_{n+1}.$$

$$I_n = -\frac{m+1}{n+1} I_{n+1},\ I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n,\ I_0 = \frac{1}{m+1}.$$

$$I_1 = -\frac{1}{(m+1)^2},\ I_2 = \frac{2}{(m+1)^3},\ I_3 = -\frac{3\cdot 2}{(m+1)^4},\ \ldots,$$

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

3.17. $I_{2n+1} = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n-1} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n-1} \left(\frac{1 - 2\sin x\cos x}{1 + 2\sin x\cos x}\right) dx.$$

Заметим, что $\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$. Поэтому преобразуем последнее выражение I_{2n+1} следующим образом:

$$I_{2n+1} = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n-1} \left(\left(\frac{1 - 2\sin x\cos x}{1 + 2\sin x\cos x} + 1\right) - 1\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n-1} \cdot \frac{2dx}{(\sin x + \cos x)^2} dx - \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n-1} dx =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n}\Bigg|_0^{\pi/2} - I_{2n-1} = -I_{2n-1},\ \ I_{2n+1} = -I_{2n-1},$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx =$$

$$= \ln|\sin x + \cos x|\Big|_0^{\pi/2} = 0,$$

$$I_2=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^2dx=\int_0^{\pi/2}\left(\left(\frac{1-2\sin x\cos x}{1+2\sin x\cos x}+1\right)-1\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{1+2\sin x\cos x}dx-\int_0^{\pi/2}dx=\int_0^{\pi/2}d\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{\pi}{2}=2-\frac{\pi}{2},\ I_4=-\left(2-\frac{\pi}{2}\right),\ I_6=2-\frac{\pi}{2},\ \ldots,$$

$$I_{2n}=(-1)^{n+1}\left(\frac{4-\pi}{2}\right).$$

3.22. 1) Пусть

$$S_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}\quad (n \text{ единиц}).$$

Тогда $S_{n+1}=\sqrt{1+S_n}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении $S_{n+1}=\sqrt{1+S_n}$ при $n\to\infty$, получим $S=\sqrt{1+S}$, $S^2-S-1=0$, $S=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

2) Пусть $S_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n двоек).

Тогда $S_{n+1}=\sqrt{2+S_n}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении $S_{n+1}=\sqrt{2+S_n}$ при $n\to\infty$, получим $S=\sqrt{2+S}$, $S^2-S-2=0$, $S=2$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}=2.$$

3) *Ответ:* $\frac{1+\sqrt{4k+1}}{2}$.

Выясним, при каком условии указанный ответ будет целым числом. Для этого нужно, чтобы $4k+1$ было полным квадратом. Очевидно, это должен быть квадрат нечетного числа. Следовательно, должно выполняться равенство $4k+1=(2l+1)^2$ при некотором l O N. Отсюда $4k+1=4l^2+4l+1$, $k=l(l+1)$, т. е. если число k в данной последовательности является произведением $l(l+1)$ — двух последовательных натуральных чисел, то предел этой последовательности есть целое число, равное $l+1$.

4) *Ответ:* 0.

3.23. Понижая порядок данного определителя при помощи его элементарных преобразований, приходим к однородному линейному рекуррентному соотношению второго порядка

$D_n = D_{n-2}$, или $D_n - D_{n-2} = 0$. Начальные условия имеют вид $D_1 = 0$, $D_2 = 1$. Характеристическое уравнение $x^2 - 1 = 0$ имеет решения $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Поэтому общее решение рекуррентного уравнения имеет вид $D_n = c_1 + c_2(-1)^n$. Согласно начальным условиям

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 1, \end{cases}$$

т. е. $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\Delta_n = \dfrac{1}{2}(1+(-1)^n)$, $\Delta_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ нечетно;} \\ 1, \text{ если } n \text{ четно.} \end{cases}$

3.26. Запишем данное рекуррентное соотношение в виде

$$x_{n-1}x_n - x_n x_{n+1} = 1.$$

Отсюда получаем следующую систему равенств:

$$x_1x_2 - x_2x_3 = 1,\quad x_2x_3 = x_1x_2 - 1,$$
$$x_2x_3 - x_3x_4 = 1,\quad x_3x_4 = x_2x_3 - 1 = x_1x_2 - 2,$$
$$x_3x_4 - x_4x_5 = 1,\quad x_4x_5 = x_3x_4 - 1 = x_1x_2 - 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{N-2}x_{N-1} - x_{N-1}x_N = 1,\quad x_{N-1}x_N = x_{N-2}x_{N-1} - 1 = x_1x_2 - (N-3).$$

Если $x_N = 0$, то из последнего равенства вытекает, что

$$x_1x_2 - (N-3) = 0,\quad N = x_1x_2 + 3 = 2009 \cdot 2010 + 3.$$

Ответ: $N = 2009 \cdot 2010 + 3$.

ЗАНЯТИЕ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

4.1. $$\begin{cases} n \le 1\cdot n < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2, \\ n \le 1\cdot(n-1) < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2, \\ n \le 2\cdot(n-2) < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2, \ \Rightarrow \\ \Rightarrow n^n \le (n!)^2 < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n},\ n^{\frac{n}{2}} \le n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \quad . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \le n\cdot 1 < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

4.3. *1-й способ.* По формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \ldots =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) + \ldots <$$

$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=$$

$$=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2+1=3.\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

2-й способ. Выше доказано, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e<3.$$

4.4. По методу математической индукции при $n = 1$ получается истинное неравенство $\frac{1}{3}<1$. Пусть $\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!$. Докажем, что $\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}<(n+1)!$. Имеем

$$(n+1)!=n!(n+1)>\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1)=\frac{n^n(n+1)}{3^n}.$$

Покажем, что $\frac{n^n(n+1)}{3^n}>\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}}$. После сокращения последнее неравенство примет вид

$$n^n>\frac{(n+1)^n}{3},\ \text{или}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n<3,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Это неравенство справедливо в силу задачи 4.3.

4.7. Пусть $a_n=\frac{(2n-1)!!\sqrt{3n+1}}{(2n)!!}$. Тогда $a_{n+1}=\frac{(2n+1)!!\sqrt{3n+4}}{(2n+2)!!}$. Поэтому

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\frac{((2n+1)!!)^2(3n+4)((2n)!!)^2}{((2n+2)!!)^2(3n+1)((2n-1)!!)^2}=\frac{(2n+1)^2(3n+4)}{(2n+2)^2(3n+1)}<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2n+1)^2(3n+4)<(2n+2)^2(3n+1),$$

$$12n^3+12n^2+3n+16n^2+16n+4<$$

$$<12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4\Leftrightarrow n>0.$$

Таким образом, неравенство $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}<1$ доказано. Докажем данное неравенство методом математической индукции. При $n = 2$ $a_2=\frac{1\cdot3\sqrt{7}}{2\cdot4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}<1$, так как $3^2\cdot7<8^2$. Пусть $a_n<1$. Тогда, в силу доказанного $a_{n+1}<a_n<1$. Следовательно,

$$\frac{(2n-1)!!\sqrt{3n+1}}{(2n)!!}<1,\ \text{т. е.}\ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

4.8. $\begin{cases} 1\cdot(2n-1)<n^2, \\ 3\cdot(2n-3)<n^2, \\ 5\cdot(2n-5)<n^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (2n-1)\cdot 1<n^2. \end{cases} \Rightarrow ((2n-1)!!)^2<n^{2n},\ (2n-1)!!<n^n.$

4.10. 1) $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!!}{2^n n!}\sim\dfrac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{2^n\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}}=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n}.$

2) $C_{2n}^n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}}=\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$

4) $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\dfrac{2^n n!\cdot 2^n n!}{(2n)!}\sim\dfrac{2^{2n}2\pi n\cdot n^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}=\sqrt{\pi n}.$

5) $\displaystyle\int_0^1(1+t)^n dt=\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}.$

$$\int_0^1(1+t)^n dt=\int_0^1\sum_{k=0}^n C_n^k t^k dt=\sum_{k=0}^n C_n^k\frac{t^{k+1}}{k+1}\bigg|_0^1=\sum_{k=0}^n\frac{C_n^k}{k+1}.$$

$$\sum_{k=0}^n\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^n\frac{C_n^k}{k+1}}{\frac{2^{n+1}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}}{\frac{2^{n+1}}{n}}=1.$$

4.11. 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^m\ln k=\int_1^m\ln x\,dx+O(\ln m-\ln 1)=x\ln x\Big|_1^m-x\Big|_1^m=$

$=m\ln m-m+1+O(\ln m)=m\ln m-m+O(\ln m).$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^m k^n=\int_1^m x^n dx+O(m^n-1)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_1^m+O(m^n)=$

$=\dfrac{m^{n+1}}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}+O(m^n)=\dfrac{m^{n+1}}{n+1}+O(m^n).$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^m\frac{\ln k}{k}=\int_1^m\frac{\ln x}{x}dx+O\left(\frac{\ln m}{m}\right)=\frac{1}{2}\ln^2 x\bigg|_1^m=\frac{1}{2}\ln^2 m+O\left(\frac{\ln m}{m}\right).$

4) $\displaystyle\sum_{k=n}^m\frac{1}{k}=\int_n^m\frac{dx}{x}+O\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)=\ln x\Big|_n^m+O\left(\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{m}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right).$

5) $\displaystyle\sum_{k=n}^m\frac{1}{k\ln^2 k}=\int_n^m\frac{1}{x\ln^2 x}dx+O\left(\frac{1}{m\ln^2 m}-\frac{1}{n\ln^2 n}\right)=$

$=-\dfrac{1}{\ln m}+\dfrac{1}{\ln n}+O\left(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right).$

4.12. 1) $a_n = a^n$. $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (at)^n = \dfrac{1}{1-at}\left(|t|<\dfrac{1}{|a|}\right)$.

$$E(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}=e^{at}.$$

2) $a_n = n$. $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty} nt^n = t\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t\sum_{n=0}^{\infty}(t^n)' =$

$$=t\sum_{n=0}^{\infty}(t^n)'=t\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)'=t\left(\frac{1}{1-t}\right)'=\frac{t}{(1-t)^2}.$$

$$E(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=te^t.$$

3) $a_n = n(n-1)$. $A(t)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)t^n = t\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}(n-1) =$

$$=t\sum_{n=0}^{\infty}(t^n(n-1))'=t\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)t^n\right)'=t\left(t^2\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)t^{n-2}\right)'=$$

$$=t\left(t^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n-1}\right)'\right)'=t\left(t^2\left(\frac{t}{1-t}\right)'\right)'=\frac{2t^2}{1-t^3}.$$

$$E(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)t^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{(n-2)!}=t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}=t^2e^t.$$

4) $a_n = n^2$. $A(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2t^n = t\sum_{n=1}^{\infty}(nt^{n-1})n = t\left(\sum_{n=0}^{\infty} nt^n\right)' =$

$$=t\left(t\sum_{n=0}^{\infty}nt^{n-1}\right)'=t\left(t\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)'\right)'=t\left(t\left(\frac{1}{1-t}\right)'\right)'=\frac{t(1+t)}{1-t^3}.$$

$$E(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2t^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}t^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{(n-2)!}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}=t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=t^2e^t+te^t=(t^2+t)e^t.$$

5) По формуле бинома Ньютона $A(t)=\sum_{n=0}^{m} C_m^n t^n = (1+t)^m$.

4.13. 1. $\int_0^{\infty} e^{-x}E(xt)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n(xt)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_nt^n}{n!}\int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx =$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nt^n}{n!}n!=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=A(t).$$

2. $\int\limits_0^\infty e^{-x}E(xt)dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}e^{xt}dx = \int\limits_0^\infty e^{x(t-1)}dx = \frac{1}{t-1}e^{x(t-1)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{1-t} = A(t)$

при условии $t < 1$.

4.14. 1) $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\ B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - b_{n-1})t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-1}t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - t\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}t^{n-1} = (1-t)B(t).$$

2) $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n+1}t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n =$

$$= \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \frac{1}{t}(B(t) - b_0) - B(t) = \left(\frac{1}{t} - 1\right)B(t) - \frac{b_0}{t} =$$

$$= \frac{1-t}{t}B(t) - \frac{b_0}{t}.$$

3) $a_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots,\ a_{n-1} = b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots,\ b_n = a_{n-1} - a_n.$

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} - a_n)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n =$$

$$= t\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = tA(t) - (A(t) - a_0) = (t-1)A(t) + B(1).$$

$$B(t) - B(1) = (t-1)A(t),\ A(t) = \frac{B(1) - B(t)}{t-1}.$$

4) $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nb_n t^n = t\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n nt^{n-1} = t\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right)' = tB'(t).$

5) $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n n^2 t^n = t\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n nt^{n-1} = t\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n nt^n\right)' =$

$$= t\left(t\sum_{n=1}^{\infty} b_n nt^{n-1}\right)' = t\left(t\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n\right)'\right)' = t(tB'(t))'.$$

6) $a_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1},\ a_{n+1} = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n,\ b_n = a_{n+1} - a_n.$

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n =$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{t}A(t) - A(t) = \frac{1-t}{t}A(t).$$

$$B(t) = \frac{1-t}{t}A(t),\ A(t) = \frac{t}{1-t}B(t).$$

4.15. 1) $f(0) = 2^m$,
$f'(x) = mp(q + pt)^{m-1}$, $f'(0) = mpq^{m-1}$,
$f''(x) = m(m-1)p^2(q + pt)^{m-2}$, $f''(0) = m(m-1)p^2q^{m-2}$, ...,
$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1)p^nq^{m-n}$,
$a_n = m(m-1)\ldots(m-n+1)p^nq^{m-n}$.

2) $A(t) = \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots$, $a_n = 1$.

3) $A(t) = \sqrt{1-t} = (1-t)^{\frac{1}{2}} =$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-t) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}t^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}t^3 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}t^4 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}t^n.$$

$$a_n = (-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}.$$

4) $$A(t) = t^m(1-t)^m = t^m\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}t^{m+n}.$$

$$a_{m+n} = (-1)^n\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}.$$

5) $$A(t) = \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m} = 1 - m\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{-m(-m-1)}{2!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{-m(-m-1)(-m-2)}{3!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{-m(-m-1)(-m-2)\ldots(-m-n+1)}{n!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{2^n n!}t^{2n}.$$

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = (-1)^n\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{2^n n!}.$$

4.17. Применим метод математической индукции по n. При $n = 1$ получаем истинное неравенство $a_1 \le a_1$. Пусть $a_n \le na_1$. Тогда $a_{n+1} \le a_n + a_1 \le na_1 + a_1 = (n+1)a_1$.

4.18. Преобразуем данное неравенство $n^n > (n+1)^{n-1}$ к виду $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-1} < n$, т. е. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} < n$. Применяя формулу бинома Ньютона к левой части последнего неравенства, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=1+\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!n^2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!n^3}+\ldots+\frac{1}{n^{n-1}}<$$
$$<1+1+\ldots+1=n.$$

4.19. Индукция по n. При $n = 4$ имеем $4! = 24 \geq 8$ — неравенство верно. Пусть $n! \geq 2n$. Тогда $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! \geq (n + 1) \cdot 2n \geq$ $\geq 2(n + 1)$.

4.20. Индукция по n. При $n = 3$ имеем $2^2 > 3$ — неравенство верно. Пусть $2^{n-1} > n$. Тогда $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2 \cdot n = 2n > n + 1$.

4.21. Из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^3}=\infty$ следует, что графики функций $y = 2^x$ и $y = x^3$ пересекаются в двух точках и при достаточно больших значениях x выполняется неравенство $2^x > x^3$. Понаблюдаем за неравенствами между 2^n и n^3 для того, чтобы выяснить, начиная с какого значения n выполняется неравенство $2^n > n^3$:

$n = 1$: $2^1 > 1^3$,
$n = 2$: $2^2 < 2^3$,
$n = 3$: $2^3 < 3^3$,
$n = 4$: $2^4 < 4^3$,
$n = 5$: $2^5 < 5^3$,
$n = 6$: $2^6 < 6^3$,
$n = 7$: $2^7 = 128 < 7^3$,
$n = 8$: $2^8 = 256 < 8^3$,
$n = 9$: $2^9 = 512 < 9^3$,
$n = 10$: $2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$.

Следовательно, при $n \geq 10$ выполняется неравенство $2^n > n^3$.

4.22. Методом математической индукции покажем, что $\left(\frac{3}{2}\right)^n>n$. При $n = 1$ $\left(\frac{3}{2}\right)^1>1$ — неравенство верно. Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^n>n$. Тогда

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n>\frac{3}{2}n=n+\frac{n}{2}>n+1.$$

4.23. Покажем, что функция $y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ является возрастающей при $x > 0$. Имеем $\ln y = x(\ln(x + 1) - \ln x)$, $\frac{y'}{y}=\ln\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x+1}>0$ при $x > 0$. Следовательно, $y'=y\left(\ln\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)>0$, т. е. функция y возрастает при $x > 0$. Тогда $y(n + 1) > y(n)$, т. е. выполняется доказываемое неравенство.

4.24. Покажем, что степени n двоек меньше, чем степени n – 1 тройки. При $n = 3$ получаем истинное неравенство $2^{2^2}<3^3$. Пусть выполняется неравенство $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}<3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$, где n двоек и $n - 1$ тройка.

Рассмотрим неравенство $2^{2^{\cdots^{2}}} < 3^{3^{\cdots^{3}}}$ с $n+1$ двойкой и n тройками. Логарифмируя это неравенство, получим $2^{2^{\cdots^{2}}} \cdot \ln 2 < 3^{3^{\cdots^{3}}} \cdot \ln 3$, в котором коэффициенты содержат степени n двоек и $n-1$ тройки. В силу предположения индукции и неравенства $\ln 2 < \ln 3$ это неравенство верно.

4.36. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} = 1$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\right)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{\frac{1}{2n^2}} n^{\frac{1}{2n^2}} n^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{n}} = 1.$$

4.37. e. **4.38.** $e/2$. **4.39.** 1.

4.40. $$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + a_{n-1}) t^n =$$

$$= 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^n =$$

$$= 1 + t + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n-2} + t \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} =$$

$$= 1 + t + t^2 A(t) + t(A(t) - 1) = (t^2 + t) A(t) + t,$$

$$A(t) = \frac{t}{1 - t - t^2}.$$

4.41. 1. $$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.\ A^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^n =$$

$$= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} = \frac{1}{t}(A(t) - a_0),\ A^2(t) = \frac{A(t) - a_0}{t},$$

$$tA^2(t) - A(t) + 1 = 0,\ A(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

2. $$A(t) = \frac{1}{2t}\left(2t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (2n-3)!!}{n!} t^n\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!} t^{n-1} \overset{(n-1=k)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (2k-1)!!}{(k+1)!} t^k.\ a_n = \frac{2^n (2n-1)!!}{(n+1)!} = C_{2n}^{n}.$$

3. $$A^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2t)^n = A(2t),\ A^2(t) = A(2t).$$

Пусть $A(t) = e^{\alpha t}$. Так как $a_1 = 1 = A'(0) = \alpha$, то

$$A(t) = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.\ a_n = \frac{1}{n!}.$$

4.42. По формуле Стирлинга при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое соотношение $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. Поэтому

$$\frac{1}{\ln n!} \sim \frac{1}{\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n} \sim \frac{1}{n\ln n},$$

так как при $n \to \infty$ $\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n \sim n\ln n$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ расходится, так как согласно интегральному признаку сходимости $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_2^{\infty} = \infty$. Значит, по признакам сравнения ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$ расходится.

Ответ: расходится.

4.43. Для того чтобы применить для вычисления этого предела правило Лопиталя, покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \infty$. Имеем

$$\int\limits_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx > \int\limits_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_1^{\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^{\infty} \ln(x+1)\,dx - \int\limits_1^{\infty} \ln x\,dx.$$

$$\int\limits_1^{\infty} \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^{\infty} = (x-1)\ln x\Big|_1^{\infty}; \quad \int\limits_1^{\infty} \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1)\Big|_1^{\infty}.$$

$$\int\limits_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = (x\ln(x+1) - (x+1)\ln x)\Big|_1^{\infty}.$$

$$\lim_{x\to\infty}(x\ln(x+1) - (x+1)\ln x) = \lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x} - \ln x\right) = -\infty.$$

Применяя теперь правило Лопиталя, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = 2\ln e = 2.$$

Ответ: 2.

ЗАНЯТИЕ 5. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

5.1. Применяя метод неопределенных коэффициентов, находим, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

5.2. Перегруппировав слагаемые, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+1}=$$

$$=\ln 2+\ln 2-1=2\ln 2-1.$$

5.3. Применяя метод неопределенных коэффициентов, находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{n+2}-3\cdot\frac{1}{n+3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-7\cdot\frac{1}{n+2}+6\cdot\frac{1}{n+3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{6}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=-\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{4}.$$

5.4. $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right).$

5.5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}+3\cdot\frac{1}{2n+2}-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{n+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+6\cdot\frac{1}{2n+2}-7\cdot\frac{1}{2n+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\frac{6}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=2.$$

5.6. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{n})'}{n!}=x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\right]'=x(e^{x})'=xe^{x};$$

2) пользуясь результатом пункта 1, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{nx^{n-1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(x^n)'}{n!} =$$

$$= x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}\right]' = x(xe^x)' = x(x+1)e^x;$$

3) пользуясь результатом пункта 2, находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} n^2\cdot\frac{nx^{n-1}}{n!} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}\right)' =$$

$$= x((x^2+x)e^x)' = x(x^2+3x+1)e^x;$$

4) пользуясь результатом пункта 2, находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x^2+2x+4}{4}.$$

5.7. Согласно формуле пункта 3 задачи 5.6

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3(-x)^n}{(n+1)!} = -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3(-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пусть $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$. Тогда

$$S'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3(-x)^n}{n!} = -(-x)(x^2-3x+1)e^{-x} = (x^3-3x^2+x)e^x,$$

$$S(x) = \int_0^x (t^3-3t^2+1)e^{-t}dt.$$

Вычисление $S(x)$ заканчивается интегрированием по частям. Затем находим требуемую сумму по формуле $-\frac{S(x)}{x}$.

5.8. $S = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x} - \operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$, если x і 0;

$S = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\operatorname{sh}\sqrt{|x|} - \operatorname{ch}\sqrt{|x|}\right)$, если $x < 0$.

5.9. $S = \left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x - \frac{x}{2}\sin x.$

5.10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{4n}dt = \int_0^x\frac{dt}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} =$

$$=\frac{1}{4}\int_0^x\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{4}\int_0^x\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

5.11. $S=2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$.

5.12. $S=(1+2x^2)e^{x^2}$. **5.13.** $S=\dfrac{x(3-x)}{1-x^2}$.

5.15. 1) $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x t^{2(n-1)}dt=\int\limits_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(t^2)^{n-1}\right)dt=$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t\Big|_0^x=\operatorname{arctg}x.\quad S=S(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

5.16. $S=\dfrac{\pi}{2}$. **5.17.** $S(x)=-\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$, $0<x<2\pi$.

5.18. $\sin^2 n\alpha\sin nx=\dfrac{(1-\cos 2n\alpha)\sin nx}{2}=$

$$=\frac{1}{2}\sin nx-\frac{1}{2}\sin nx\cos 2n\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\sin nx-\frac{1}{4}\sin n(x+2\alpha)-\frac{1}{4}\sin n(x-2\alpha).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+2\alpha)}{n}-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)\ \text{и т. д.}$$

$$S=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4},\ 0<x<2\alpha;\\ 0,\ 2\alpha<x<2\pi-2\alpha;\\ -\dfrac{\pi}{4},\ 2\pi-2\alpha<x<2\pi.\end{cases}$$

5.19. $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. Пусть

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z u^{2(n-1)}du=\int_0^z\left(\sum_{n=1}^{\infty}(u^2)^{n-1}\right)du=\int_0^z\frac{du}{1-u^2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(1+z)-\ln(1-z)).$$

$$S(x)=\frac{1}{2}(\arg(1+z)-\arg(1-z))=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

5.20. 1) $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2-1}$. $S_1=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n^2-1}=$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n-1}=z\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n-1}=z\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^z t^{n-2}dt=$$

$$=z\int_0^z\left(\sum_{n=2}^{\infty}t^{n-2}\right)dt=z\int_0^z\frac{dt}{1-t}=-z\ln(1-z).$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}=\frac{1}{z}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{z}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^z t^n dt=\frac{1}{z}\int_0^z\left(\sum_{n=2}^{\infty}t^n\right)dt$$

$$=\frac{1}{z}\int_0^z\frac{t^2dt}{1-t}=-\frac{1}{z}\ln(1-z)-\left(\frac{z}{2}+1\right).$$

$$S_1=-\frac{1}{2}z\ln(1-z)+\frac{1}{2z}\ln(1-z)+\frac{z}{4}+\frac{1}{2}.$$

$$z\ln(1-z)=\left(\ln|1-z|-i\frac{\pi-x}{2}\right)(\cos x+i\sin x),$$

$$\operatorname{Re}z\ln(1-z)=\cos x\ln|1-z|+\frac{\pi-x}{2}\sin x.$$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}\ln(1-z)=\cos x\ln|1-z|-\frac{\pi-x}{2}\sin x.$$

$$S(x)=\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{4}-\frac{\pi-x}{2}\sin x.$$

2) $S(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x$.

5.22. 1) $e^{\cos x}\cos(\sin x)$. **5.29.** $x=k\pi$, $y=l\pi$ $(k,l\in\mathbb{Z})$.

5.30. $S=\frac{3}{4}$. **5.31.** $S=\frac{\pi^2}{3}-3$. **5.32.** $S=7-\frac{2}{3}\pi^2$.

5.33. $S=2(1-\ln 2)$. **5.34.** $S=2e$. **5.35.** $S=3e^2$.

5.36. $S=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$. **5.37.** $S=\frac{1}{6}(4\ln 2-1)$.

5.39. $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)(a+2d)\ldots(a+(n-1)d)}{d\cdot 2d\cdot 3d\cdot\ldots\cdot nd}x^n=$

$$=\frac{a}{d}x+\frac{a(a+d)}{d\cdot 2d}x^2+\frac{a(a+d)(a+2d)}{d\cdot 2d\cdot 3d}x^3+\ldots,$$

$$S'(x)=\frac{a}{d}+\frac{a(a+d)}{d\cdot 2d}2x+\frac{a(a+d)(a+2d)}{d\cdot 2d\cdot 3d}3x^2+\ldots,$$

$$S'(x)(1-x)=\frac{a}{d}-\frac{a}{d}x+\frac{a(a+d)}{d\cdot 2d}2x-\frac{a(a+d)}{d\cdot 2d}2x^2+$$

$$+\frac{a(a+d)(a+2d)}{d\cdot 2d\cdot 3d}3x^2-\frac{a(a+d)(a+2d)}{d\cdot 2d\cdot 3d}3x^3+\ldots=$$

$$=\frac{a}{d}+\left(\frac{a(a+d)}{d\cdot 2d}2-\frac{a}{d}\right)x+\left(\frac{a(a+d)(a+2d)}{d\cdot 2d\cdot 3d}3-\frac{a(a+d)}{d\cdot 2d}2\right)x^2+\ldots=$$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a^2}{d\cdot d}x+\frac{a^2(a+d)}{d\cdot 2d\cdot d}x^2+\ldots=$$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\left(\frac{a}{d}x+\frac{a(a+d)}{d\cdot 2d}x^2+\frac{a(a+d)(a+2d)}{d\cdot 2d\cdot 3d}x^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}S(x),\quad S'(x)(1-x)=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}S(x),$$

$$\frac{S'(x)}{1+S(x)}=\frac{a/d}{1-x},\quad S(x)=\frac{1}{(1-x)^{a/d}}-1,\quad |x|<1.$$

5.40. $S(x)=\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1.$

5.41. Разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

$$\varphi'(x)=\frac{1}{4}\int_0^1\varphi'(\alpha x)\alpha\,d\alpha,$$

$$\varphi'(1)=\frac{1}{4}\int_0^1\varphi'(\alpha)\alpha\,d\alpha=\frac{1}{4}\left(\alpha\varphi(\alpha)\Big|_0^1-\int_0^1\varphi(\alpha)\,d\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(\varphi(1)-4\varphi(1))=-\frac{3}{4}\varphi(1),\quad \varphi'(1)=-\frac{3}{4}\varphi(1).$$

$$\varphi''(x)=\frac{1}{4}\int_0^1\varphi''(\alpha x)\alpha^2\,d\alpha,$$

$$\varphi''(1)=\frac{1}{4}\int_0^1\varphi''(\alpha)\alpha^2\,d\alpha=\frac{1}{4}\left(\alpha^2\varphi'(\alpha)\Big|_0^1-2\int_0^1\varphi'(\alpha)\alpha\,d\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\varphi'(1)-2\varphi'(1)=\frac{3\cdot 7}{4^2}\varphi(1),\quad \varphi''(1)=\frac{3\cdot 7}{4^2}\varphi(1),\ \ldots,$$

$$\varphi^{(n)}(1)=(-1)^n\frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{4^n}\varphi(1).$$

По формуле Тейлора

$$\varphi(x)=\varphi(1)+\left(-\frac{3}{4}\right)\varphi(1)(x-1)+$$

$$+\frac{3\cdot 7}{2!\,4^2}\varphi(1)(x-1)^2-\frac{3\cdot 7\cdot 11}{3!\,4^3}\varphi(1)(x-1)^3+\ldots,$$

$$\varphi(x)=\left(1+\frac{3}{4}(1-x)+\frac{3\cdot 7}{4\cdot 8}(1-x)^2+\frac{3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12}(1-x)^3+\ldots\right)\varphi(1).$$

По формуле суммы ряда задачи 5.39 при $a=3$, $d=4$

$$\varphi(x)=\left(\frac{1}{(1-(1-x))^{3/4}}\right)\varphi(1)=\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)\varphi(1)=x^{-\frac{3}{4}}\varphi(1).$$

Убедимся в том, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$4\varphi(x)=\int_0^1\varphi(\alpha x)d\alpha.$$

$$4x^{-\frac{3}{4}}=\int_0^1((\alpha x)^{-\frac{3}{4}})d\alpha=x^{-\frac{3}{4}}\int_0^1\alpha^{-\frac{3}{4}}d\alpha=4x^{-\frac{3}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\Big|_0^1.$$

Очевидно, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет граничному условию $\varphi(1) = 243$, т. е. она является решением поставленной задачи. Поэтому

$$\varphi(81)=\frac{\varphi(1)}{81^{3/4}}=\frac{243}{27}=9.$$

Ответ: $\varphi(81) = 9$.

5.42. 1) $\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$; 2) $\dfrac{n(n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{14}$;

3) $\dfrac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$.

5.44. При $n = 1$ получаем истинное равенство $C_1^1=1$. Пусть при некотором $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_n^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Покажем, что

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{C_{n+1}^k}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Используя рекуррентную формулу для числа сочетаний $C_{n+1}^k=$ $=C_n^k+C_n^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, отделяя последнее слагаемое, преобразуем левую часть доказываемого равенства:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{C_{n+1}^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_{n+1}^k}{k}+\frac{(-1)^n}{n+1}C_{n+1}^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(C_n^k+C_n^{k-1})+\frac{(-1)^n}{n+1}C_{n+1}^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^{k-1}+\frac{(-1)^n}{n+1}C_{n+1}^{n+1}.$$

По предположению индукции, первое слагаемое в правой части этого выражения равно

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_n^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Два других слагаемых преобразуем:

$$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^{k-1}+\frac{(-1)^n}{n+1}C_{n+1}^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$

5.47. Пусть $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^4 2^n x}{4^n}$. Преобразуем:

$$\sin^4 2^n x=(\sin^2 2^n x)^2=\left(\frac{1-\cos 2^{n+1}x}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2^{n+1}x+\cos^2 2^{n+1}x).$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2\cos 2^{n+1}x+\cos^2 2^{n+1}x}{4^n}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\frac{\cos^2 2^{n+1}x-2\cos 2^{n+1}x}{4^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1+\cos 2^{n+2}x}{2}-2\cos 2^{n+1}x}{4^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2^{n+2}x-4\cos 2^{n+1}x}{4^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2^{n+2}x-4\cos 2^{n+1}x}{4^n}\right).$$

Пусть

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2^{n+2}x-4\cos 2^{n+1}x}{4^n}.$$

Тогда

$$S_1=\frac{\cos 2^2x-4\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2^3x-4\cos 2^2x}{4^1}+$$

$$+\frac{\cos 2^4x-4\cos 2^3x}{4^2}+\ldots=-4\cos 2x.$$

Значит, согласно полученной выше формуле для S,

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-2\cos 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(2(1-\cos 2x))=\frac{4\sin^2 x}{4}=\sin^2 x.$$

Ответ: $\sin^2 x$.

ЗАНЯТИЕ 6. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ

6.7. Возможны два случая. 1. Если в каноническое разложение числа m входит $p_1 = 2$ в степени $\alpha_1 \geq 2$, то

$$\varphi(m) = 2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1)\ldots p_s^{\alpha_s - 1}(p_s - 1),$$

где $\alpha_1 - 1 \geq 1$, т. е. в этом случае число $\varphi(m)$ четное. 2. Если $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_1 = 1$, то, так как $m \geq 3$, в разложение m входят простые нечетные числа. Поэтому из формулы

$$\varphi(m) = 2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1)\ldots p_s^{\alpha_s - 1}(p_s - 1)$$

следует, что число $\varphi(m)$ четное. Это утверждение можно доказать методом «от противного».

6.8. 1) 2^n, $n \in \mathbb{N}$; 2) 3^n, $n \in \mathbb{N}$; 3) $2^\alpha \cdot 3^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$; 4) $\varnothing$.

6.9. Сначала найдем количество чисел, взаимно простых с 30. Заметим, что $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому число $n \in \mathbb{N}$ взаимно просто с 30 тогда и только тогда, когда оно взаимно просто со 120. Но количество чисел, не превосходящих 120 и взаимно простых со 120, равно $\varphi(120) = 32$. Тогда искомое число равно $120 - 32 = 88$.

Ответ: 88.

6.10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n < 300$ и $(n, 300) = 20$. Очевидно,

$$(n, 300) = 20 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{20}, 15\right) = 1.$$

Следовательно, искомое количество равно количеству натуральных чисел, не превосходящих 15 и взаимно простых с 15, т. е. оно равно $j(15) = 8$.

Ответ: 8.

6.21. 1. Построив график функции $y = f(x)$, убеждаемся в справедливости формулы.

2. Пусть, например, $P = 11$, $Q = 5$ (рис. 97). Тогда, согласно пункту 1 этой задачи, $\sum\limits_{0<x<\frac{Q}{2}} \left[\frac{P}{Q}x\right]$ есть количество целых точек в части плоскости, ограниченной сверху прямой $y = \frac{P}{Q}x$ $(0 < x < \frac{Q}{2})$ и осью абсцисс. Построив прямую $y = \frac{11}{5}x$, $0 < x < 2{,}5$, можно непосредственно определить, что $\sum\limits_{0<x<\frac{5}{2}} \left[\frac{11}{5}x\right] = 6 + 4 = 10.$

Аналогично, вторая сумма $\sum\limits_{0<y<\frac{P}{2}} \left[\frac{Q}{P}y\right]$ выражает количество целых точек первой четверти под прямой $y = \frac{Q}{P}x$ $(0 < x < \frac{P}{2})$ или, что в силу симметрии этих прямых то же самое, над пря-

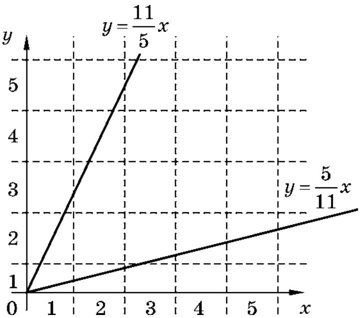

Рис. 97
К решению задачи 6.21

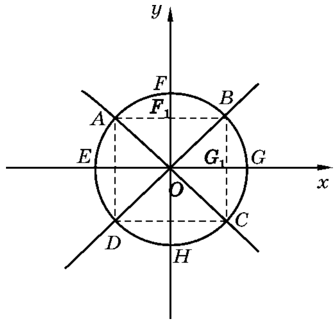

Рис. 98
К решению задачи 6.21

мой $y=\frac{P}{Q}x$ $(0<y<\frac{P}{2})$. Эти области образуют прямоугольник со сторонами $\frac{P-1}{2}$ и $\frac{Q-1}{2}$. Поэтому общее количество целых точек в этом прямоугольнике равно, с одной стороны, сумме

$$\sum_{0<x<\frac{Q}{2}}\left[\frac{P}{Q}x\right]+\sum_{0<y<\frac{P}{2}}\left[\frac{Q}{P}y\right],$$

а с другой стороны, оно равно произведению $\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}$. Поэтому справедливо равенство

$$\sum_{0<x<\frac{Q}{2}}\left[\frac{P}{Q}x\right]+\sum_{0<y<\frac{P}{2}}\left[\frac{Q}{P}y\right]=\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}.$$

В рассматриваемом нами примере

$$\sum_{0<x<\frac{5}{2}}\left[\frac{11}{5}x\right]+\sum_{0<y<\frac{11}{2}}\left[\frac{5}{11}y\right]=\frac{11-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}=10.$$

3. $$T=1+4[r]+8\sum_{0<x\le\frac{r}{\sqrt{2}}}\left[\sqrt{r^2-x^2}\right]-4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2. \qquad (6.1)$$

Первое слагаемое — единица в формуле (6.1) соответствует началу координат — точке $O(0,\,0)$ с целыми координатами, являющейся центром круга (рис. 98). Второе слагаемое $4[r]$ соответствует количеству целых точек, расположенных на осях координат внутри и, возможно, на границе круга. Одно слагаемое в сумме $\sum\limits_{0<x\le r/\sqrt{2}}\left[\sqrt{r^2-x^2}\right]$ соответствует количеству целых точек, расположенных на части плоскости, ограниченной криволинейной трапецией $OFBG_1$. Следующее слагаемое соответствует

криволинейной трапеции F_1BGO и т. д. Всего таких трапеций восемь. Поэтому третье слагаемое в формуле (6.1) имеет коэффициент 8. При таком методе подсчета целые точки, расположенные внутри или на границе квадрата $ABCD$, считаются два раза. Поэтому нужно вычесть количество этих точек. Этому соответствует слагаемое $-4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2$ в формуле (6.1).

4. $$T = 2\sum_{0<x\le\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right] - \left[\sqrt{n}\right]^2. \qquad (6.2)$$

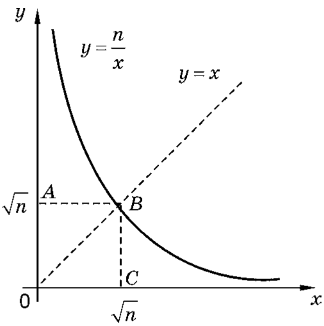

Рис. 99
К решению задачи 6.21

Прямая $y = x$ служит осью симметрии кривой $y=\frac{n}{x}$ (рис. 99). Сумма $\sum_{0<x\le\sqrt{n}}\left[\frac{n}{x}\right]$ выражает количество целых точек, расположенных в области, ограниченной кривой $y=\frac{n}{x}$ при $0<x\le\sqrt{n}$. Симметричным образом столько же целых точек расположено под кривой $x=\frac{n}{y}$ при $0<y\le\sqrt{n}$. Поэтому в формуле (6.2) эта сумма умножается на 2. Но при этом точки квадрата $OABC$ считаются дважды, так как они принадлежат и той, и другой криволинейной трапеции. Этим объясняется слагаемое $-\left[\sqrt{n}\right]^2$, выражающее количество целых точек квадрата $OABC$, взятое со знаком «минус».

5. Сначала рассмотрим случай, когда многоугольник является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, имеющим высоту n и ширину m единиц. Тогда $S = m \cdot n$. Число внутренних целых точек равно $(m - 1)(n - 1)$. Число граничных точек равно $2(n + 1) + 2m$, поэтому

$$T=(m-1)(n-1)+\frac{2(n-1)+2m}{2}-1=n\cdot m.$$

Таким образом, в этом случае доказываемая формула верна.

Докажите, что эта формула верна и для случая прямоугольного треугольника, у которого катеты параллельны осям координат. (Дополните треугольник до прямоугольника, сводя задачу к уже исследованному случаю.) Так как любой многоугольник можно разбить на прямоугольники и прямоугольные треугольники, то, таким образом, формула доказана и в общем случае.

6.22. Постройте на полуосях эллипса прямоугольник и проведите его диагонали. Уравнение одной из диагоналей $y=\frac{b}{a}x$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=\dfrac{b}{a}x,\end{cases}$$

находим точку пересечения эллипса и этой диагонали, лежащую в первой четверти — $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Далее так же, как при решении задачи 6.21, рассмотрите соответствующие криволинейные трапеции.

6.23. Пусть $[a]$ — целая часть a. Тогда $a=[a]+\delta$, где $0\le\delta<1$. Отсюда

$$\left[\frac{a}{n}\right]=\left[\frac{[a]+\delta}{n}\right]=\left[\frac{[a]}{n}+\frac{\delta}{n}\right].$$

Пусть $\frac{[a]}{n}=\left[\frac{[a]}{n}\right]+\frac{r}{n}$, где $0\le r\le n-1$. Тогда

$$\left[\frac{a}{n}\right]=\left[\frac{[a]+\delta}{n}\right]=\left[\frac{[a]}{n}+\frac{\delta}{n}\right]=\left[\left[\frac{[a]}{n}\right]+\frac{r}{n}+\frac{\delta}{n}\right]=\left[\frac{[a]}{n}\right],$$

так как $\frac{r}{n}+\frac{\delta}{n}=\frac{r+\delta}{n}<\frac{n-1+1}{n}=1$.

6.24. Применим метод математической индукции по n. При $n=1$ доказываемое неравенство очевидно. При $n=2$ докажем, что $[a+b]\ge[a]+[b]$. Пусть $a=[a]+\alpha$, $0\le\alpha<1$, $b=[b]+\beta$, $0\le\beta<1$. Тогда $[a+b]=[[a]+\alpha+[b]+\beta]=[([a]+[b])+(\alpha+\beta)]$. Если $\alpha+\beta<1$, то $[a+b]=[a]+[b]$. Если $\alpha+\beta\ge1$, то $[a+b]=[a]+[b]+1$, т. е. $[a+b]>[a]+[b]$. В обоих случаях $[a+b]\ge[a]+[b]$. Предположим, что для некоторого натурального n выполняется неравенство $[a_1+a_2+\ldots+a_n]\ge[a_1]+[a_2]+\ldots+[a_n]$. Тогда

$$[a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}]=[(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1}]\ge$$
$$\ge[a_1+a_2+\ldots+a_n]+[a_{n+1}]\ge[a_1]+[a_2]+\ldots+[a_n]+[a_{n+1}].$$

6.25. 1. При указанных условиях $ax+b$ пробегает полную систему вычетов по модулю m, поэтому $ax+b=k+mq_k$, $k=0$, $1, 2, \ldots, m-1$, $q_k\in\mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\sum_x\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{k+mq_k}{m}\right\}=\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{k}{m}+q_k\right\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k}{m}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}k=\frac{1+m-1}{2m}(m-1)=\frac{1}{2}(m-1).$$

2. В этом случае $a\xi$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю m, т. е. $a\xi = k_i + mq_i$, где $i = 1, 2, \ldots, \varphi(m)$, $1 \le k_i < m$, $(k_i, m) = 1$. Тогда

$$\sum_{\xi}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\} = \sum_{k=1}^{\varphi(m)}\left\{\frac{k_i + mq_i}{m}\right\} = \sum_{k=0}^{\varphi(m)}\left\{\frac{k_i}{m}\right\} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\varphi(m)} k_i = \frac{1}{2}\frac{m\varphi(m)}{m} = \frac{1}{2}\varphi(m).$$

(Согласно известной формуле, $\sum_{i=1}^{\varphi(m)} k_i = \frac{1}{2}m\varphi(m)$).

6.26. Если a кратно m, то $a = km$, $x = l + mq_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$. Тогда

$$\sum_x e^{2\pi i\frac{ax}{m}} = \sum_x\left(\cos 2\pi\frac{ax}{m} + i\sin 2\pi\frac{ax}{m}\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1}(\cos 2\pi k(l + mq_l) + i\sin 2\pi k(l + mq_l)) = \sum_{l=0}^{m-1}(\cos 0 + i\sin 0) = \sum_{l=0}^{m-1} 1 = m.$$

Если a не кратно m, то $a = mq + r$, $1 \le r < m$, $q \in \mathbb{Z}$, $x = l + mq_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$, $q_l \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\frac{ax}{m} = \frac{(r + mq)(l + mq_l)}{m} = \frac{rl + m(ql + rl + mqq_l)}{m} = \frac{rl}{m} + n,$$

где $n = ql + rq_l + mqq_l \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\sum_x e^{2\pi i\frac{ax}{m}} = \sum_{l=0}^{m-1}\left(\cos 2\pi\left(\frac{rl}{m} + n\right) + i\sin 2\pi\left(\frac{rl}{m} + n\right)\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1}\left(\cos 2\pi r\frac{l}{m} + i\sin 2\pi r\frac{l}{m}\right) = \sum_{l=0}^{m-1}\left(\cos\frac{2\pi l}{m} + i\sin\frac{2\pi l}{m}\right)^r = \sum_{l=0}^{m-1}\left(\sqrt[m]{1}\right)_l^r = 0,$$

так как согласно известному свойству корней степени m из единицы, их сумма равна нулю: $\sum_{l=0}^{m-1}\left(\sqrt[m]{1}\right)_l = 0$. Возведение в натуральную степень r приведет только к вращению системы точек $\left(\sqrt[m]{1}\right)_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$, вокруг начала координат. Сумма при этом не изменится.

6.28. Используйте формулу задачи 6.26.

ЗАНЯТИЕ 8. ИЗОМОРФНЫЕ ГРАФЫ. СТЕПЕНИ ВЕРШИН ГРАФА

8.33. 1) Такой граф один; у него 5 вершин и 8 ребер; 2) таких графов три. **8.34.** Таких графов 11. **8.35.** 2) Таких графов 9. **8.36.** Два. **8.37.** Два. **8.38.** Не существует. **8.39.** Имеется 5 наборов степеней вершин. **8.40.** Набор степеней у одного из таких графов имеет вид $\{1, 2, \ldots, n - 1, [n/2]\}$.

ЗАНЯТИЕ 9. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

9.11. 1) 4 орграфа; односторонне связных 4; сильно связный один; 2) 4 орграфа; сильно связных 2; 3) 9 орграфов; слабо связных 4; односторонне связный один.

9.13. 1) 6 графов. 2) 12 графов. 3) 9 графов.

ЗАНЯТИЕ 10. ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

10.1. Нарисуйте граф так, чтобы его ребра не имели других общих точек, кроме принадлежащих им вершин.

10.2. Не существует. Убедитесь в том, что все графы с четырьмя вершинами, в том числе и полный, плоские.

10.3. Этот граф плоский. Его можно изобразить так, как показано на рис. 100.

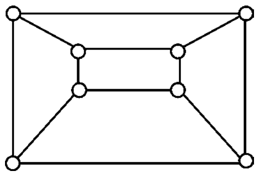

Рис. 100
К решению задачи 10.3

10.9. Каждый из графов, изображенных на рис. 68*а*, *б*, содержит подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$, а граф, изображенный на рис. 73, содержит подграф, гомеоморфный графу K_3.

10.10. а) При всех $n \geq 2$; б) только при $n = 2$.

10.12. Таких графов 4.

10.13. 3) Оценка для числа граней имеет вид $5f \leq 2m$; 4) для получения противоречия оценивать число граней нужно достаточно тонко: $f = f_3 + f_{\geq 4}$, где f_3 — число граней, ограниченных циклами длины 3, $f_{\geq 4}$ — число остальных граней; $3f_3 + 4f_{\geq 4} \leq 2m$.

10.14. 1) Не существует; 2) существует.

10.15. 6 граней. Рассмотрите граф, получающийся из K_5 после удаления одного ребра.

ЗАНЯТИЕ 12. РАСКРАСКА ГРАФОВ

12.11. 1) $\chi(K_n) = n$; $\chi'(K_n) = n$, если n нечетно; $\chi'(K_n) = n - 1$, если n четно; 2) $\chi(K_{m,n}) = 2$; $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n) = n$.

12.13. Примените индукцию по числу вершин.

12.14. Примените индукцию по числу вершин.

12.15. Примените индукцию по числу вершин.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Асанов, В. А.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. — М.–Ижевск: РХД, 2001. — 282 с.
2. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по математическому анализу. — М.: Наука, 1971. — 416 с.
3. *Де Брейн, Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. — М.: ИЛ, 1961. — 244 с.
4. *Воробьев, Н. Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1979. — 110 с.
5. *Гаврилов, Г. П.* Задачи и упражнения по дискретной математике / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.
6. *Генкин, С. А.* Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. — Киров, 1994. — 268 с.
7. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
8. *Копылов, В. И.* Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля / Функциональный анализ: межвуз. сб. науч. тр. — Ульяновск, 1982. — С. 85–91.
9. *Копылов, В. И.* Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака / Функциональный анализ: межвуз. сб. науч. тр. — Ульяновск, 1982. — С. 73–78.
10. *Копылов, В. И.* Методы суммирования рядов / Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. — 2008. — № 3 (59). — С. 10–22.
11. *Копылов, В. И.* Студенческие олимпиады по математике. — Чебоксары: ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2009. — 152 с.
12. *Кузьмин, О. В.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Дрофа, 2005. — 110 с.

13. *Кузьмин, О. В.* Комбинаторные методы решения логических задач. — М.: Дрофа, 2006. — 187 с.
14. *Куликов, Л. Я.* Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая школа, 1979. — 589 с.
15. *Макаров, Б. М.* Избранные задачи и теоремы по вещественному анализу / Б. М. Макаров и др. — М.: Наука, 1992. — 432 с.
16. *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика. — СПб.: Питер, 2001. — 301 с.
17. *Сачков, В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: МЦМНО, 2004. — 421 с.
18. *Судоплатов, С. В.* Элементы дискретной математики / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — М.: Инфра-М, 2002. — 280 с.
19. *Федорюк, М. В.* Асимптотические методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
20. *Шапорев, С. Д.* Дискретная математика. — СПб.: БХВ — Петербург, 2006. — 396 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виктор Иванович КОПЫЛОВ

КУРС ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Ответственный редактор *Е. А. Мармылева*
Художественный редактор *С. Ю. Малахов*
Редактор *А. В. Андреев*
Корректор *В. В. Вересиянова*
Верстка *М. И. Хетерели*
Выпускающие *Ю. Г. Бакшанова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 20.06.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 1/32.
Печать офсетная. Усл. п. л. 10,92. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru